

Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Domínios $f$ -Extremais para o operador Laplaciano

Carlos Eduardo Soares de Maria

MACEIÓ – AL  
AGOSTO DE 2022

Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado em Matemática

# Domínios $f$ -Extremais para o operador Laplaciano

por

Carlos Eduardo Soares de Maria

sob a orientação do

Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

Maceió – AL  
Agosto de 2022

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

M332d Maria, Carlos Eduardo Soares de.  
Domínios  $f$ -extremais para o operador laplaciano / Carlos Eduardo Soares de Maria. – 2022.  
66 f. : il. color.

Orientador: Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante.  
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 61-62.  
Apêndice: f. 63-66.

1. Propriedades geométricas. 2. Domínios extremais . 3. Princípios do máximo (Matemática). I. Título.

CDU: 51

*Aos meus pais.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que sempre me forneceu todos os subsídios necessários para chegar até aqui.

À minha família, em especial aos meus pais Mauriene e Lúcia por terem me dado uma boa educação e por sempre apoiarem meus estudos, aos meus irmãos Joyce, Bruna e João Kenedy por toda ajuda e palavras de apoio em todos os momentos. Sem vocês isto não seria possível.

Ao meu orientador Prof. Marcos Petrúcio pela orientação, apoio e aconselhamento durante o desenvolvimento deste trabalho e demais etapas do curso. Muito obrigado!!

Aos professores Márcio Batista e José Nazareno Gomes por aceitarem participar da banca e pelas valiosas sugestões. Em particular, agradeço ao professor Márcio pela ajuda no entendimento de alguns resultados durante o período de elaboração da dissertação.

Deixo meu agradecimento a todos professores que ministraram aulas na pós, com os quais pude aprender bastante: Márcio Batista, Rafael Lucena, Ranieri, Abraão Mendes, Davi Lima, Marcos Petrúcio, Cícero Tiarlos, Feliciano e Carlos Gonçalves.

Aos colegas da pós-graduação: Antonio Deígerson, Jandir Gomes, Rodrigo Costa, Cícero Caleiros, Talita Araújo e Lucas Barreto. Em particular, agradeço Matheus Martins, Cleone Neres e Vinícius Guardiano pelas vezes que eu não entendia alguma coisa e eles forneciam parte do seu tempo para me ajudar na escrita, entendimento ou na pesquisa de algum artigo que “salvasse minha vida”. Valeu mesmo!

Aos moradores e amigos que fiz na República do Seu Del (RUD). Todos vocês me ajudaram bastante em todo o período que passei em Maceió. Vocês são demais!

À CAPES pelo apoio financeiro.

*No dia em que a Universidade me atestou,  
em pergaminho, uma ciência que eu estava  
longe de trazer arraigada no cérebro, con-  
fesso que me achei de algum modo logrado,  
ainda que orgulhoso.*

(Machado de Assis)

## RESUMO

Nesta dissertação, investigamos propriedades geométricas de domínios extremais, limitados ou não. Os domínios extremais são os domínios que são pontos críticos para o primeiro funcional de autovalor para variações de preservação de volume. Mostramos que esses domínios se caracterizam por admitir uma solução não trivial para um problema do tipo Serrin sobredeterminado. Isso nos motiva a definir os domínios  $f$ -extremais, quando usamos uma função arbitrária  $f$  como a não linearidade do problema sobredeterminado. A principal ferramenta utilizada é o princípio do máximo no formato do método dos planos móveis e o principal resultado é o Teorema de Ros-Sicbaldi na prova da Conjectura de Berestycki-Caffarelli-Nirenberg na dimensão dois quando a não linearidade cresce pelo menos como uma função linear.

**Palavras-chave:** Domínio extremais; problemas sobredeterminados; princípio do máximo; método dos planos móveis.

## ABSTRACT

In this dissertation, we investigate geometric properties of extremal domains, bounded or not. The extremal domains are the domains that are critical points for the first eigenvalue functional for volume-preserving variations. We show that these domains are characterized by admitting a non-trivial solution to an overdetermined Serrin-type problem. This motivates us to define the  $f$ -extremal domains, when we use an arbitrary function  $f$  as the nonlinearity of the overdetermined problem. The main tool used is the maximum principle in the format of the moving planes method and the main result is the Ros-Sicbaldi Theorem on the proof of Berestycki-Caffarelli-Nirenberg Conjecture in dimension two when the nonlinearity grows at least as a function linear.

**Keywords:** Extremal domains; overdetermined problems; maximum principle; moving plane method.



# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES BÁSICAS</b>	<b>12</b>
2.1 Princípios do Máximo . . . . .	12
2.2 Espaços de Sobolev . . . . .	16
2.3 Problema de autovalor . . . . .	20
<b>3 A CONJECTURA BCN EM <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>24</b>
3.1 Domínios $f$ -extremais . . . . .	24
3.2 Propriedades de estreitamento . . . . .	27
3.3 Propriedades de simetria do domínio via método dos planos móveis . .	32
3.4 Domínios com topologia finita . . . . .	37
<b>4 LIMITAÇÃO PARA DOMÍNIOS <math>f</math>-EXTREMAIS</b>	<b>49</b>
<b>5 CONCLUSÃO</b>	<b>60</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>61</b>
<b>APÊNDICE A - RESULTADOS DE CÁLCULO</b>	<b>63</b>
<b>APÊNDICE B - RESULTADOS DE ANÁLISE COMPLEXA</b>	<b>65</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação, investigamos propriedades geométricas de domínios (i.e., abertos e conexos) bidimensionais, limitados ou não, que admitem uma solução para o seguinte problema sobredeterminado:

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle = \alpha & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  é uma constante não positiva.

Em seu célebre artigo, Alexandrov [2] introduziu um método inovador no estudo de hipersuperfícies mergulhadas com curvatura média constante, ferramenta esta que atualmente conhecemos como Método dos Planos Móveis (MPM). Por meio dele, foi possível demonstrar que as únicas hipersuperfícies conexas, compactas e mergulhadas com curvatura média constante no espaço Euclidiano são as esferas.

Em [20], Serrin adaptou a técnica dos planos móveis para soluções de EDPs elípticas e mostrou que se o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle = \text{cte} & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

admite uma solução num domínio limitado  $\Omega$ , então  $\Omega$  é uma bola e a função  $u$  é radialmente simétrica. No mesmo artigo ele estende este resultado de forma a classificar os domínios  $f$ -extremais limitados com o seguinte teorema:

**Teorema 1** (Serrin, [20], Teorema 2). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado com fronteira suave. Se existe uma solução  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  para o Problema (1), então  $\Omega$  é uma bola e  $u$  é radialmente simétrica.*

Este resultado tem várias aplicações em problemas físicos. Por exemplo, quando  $f$  é constante, o Problema (1) descreve a viscosidade de um fluido incompressível movendo-se em retas paralelas através de um tubo reto de forma transversal dada por  $\Omega$ . Ao fixarmos as coordenadas retangulares  $(x, y, z)$  com o eixo  $z$  apontando ao longo do

---

tubo, é conhecido que a velocidade do fluxo  $u$  ao longo do tubo é dada por uma função nas variáveis  $x$  e  $y$  satisfazendo

$$\Delta u + k = 0,$$

onde  $k$  é uma constante relacionada à viscosidade e densidade do fluido. A condição de aderência é dada por  $u = 0$  em  $\partial\Omega$ .

O resultado de Serrin nos impele a concluir que a tensão tangencial por unidade área na parede do tubo (representada por  $\mu\langle\nabla u, \nu\rangle$ , onde  $\mu$  é a viscosidade) é a mesma em todos os pontos da parede se, e somente se, o tubo tiver uma seção transversal circular. Outros modelos da física também estão relacionados ao Problema (1), como a teoria linear da torção de uma barra reta sólida de seção  $\Omega$  [22] e o problema de obstáculo de menor dimensão (Problema de Signorini) [9].

O método de Serrin inspirou vários trabalhos na área das EDP's elípticas. Dentre eles, podemos mencionar o importantíssimo trabalho de Berestycki, Caffarelli e Nirenberg [3], que estendeu o problema para domínios não limitados. Neste caso, foi considerada a não linearidade  $f(u) = u - u^3$ , o que reduz a equação em (1) à equação de Allen–Cahn. Sob a hipótese de ser  $\Omega$  um epigráfico Lipschitz com algum controle adequado no infinito para sua fronteira, eles provaram que se o Problema (1) admite uma solução suave e limitada, então  $\Omega$  é um semi-espaço. No mesmo artigo, os autores propuseram uma importante conjectura, com o objetivo de generalizar o Teorema de Serrin para domínios não limitados.

**Conjectura BCN** (Berestycki-Caffarelli-Nirenberg, [3]). *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  é uma função de Lipschitz e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio suave tal que  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  é conexo, então a existência de um solução limitada para o Problema (1) implica que  $\Omega$  é ou uma bola, ou um semiespaço, ou um cilindro generalizado  $B^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ , onde  $B^k \subset \mathbb{R}^k$  é uma bola, ou o complementar de um deles.*

Esta conjectura foi verificada em muitos casos, mas é falsa em geral. Em [21], Sicbaldi forneceu um contraexemplo à Conjectura BCN para  $n \geq 3$  quando  $f(t) = \lambda t$ ,  $\lambda > 0$ , construindo uma perturbação periódica do cilindro reto  $B_1^n \times \mathbb{R}$ , onde  $B_1^n$  é a bola unitária de  $\mathbb{R}^n$ , que suporta uma solução periódica (e então limitada) do Problema (1). Em [19], Schlenk e Sicbaldi construíram uma família a 1-parâmetro de domínios ilimitados  $s \rightarrow \Omega_s$  em  $\mathbb{R}^n$  para  $n \geq 3$ , cujos limites são hipersuperfícies periódicas suaves de revolução em relação a um eixo coordenado e tais que (1) tem um solução limitada em  $\Omega_s$ , com  $f(t) = \lambda t$ ,  $\lambda > 0$ . Em [5], alguns contraexemplos em dimensão  $n \geq 9$  foram obtidos com base no Teorema de Bernstein. Finalmente, em [18], Ros, Ruiz e Sicbaldi construíram exemplos de domínios extremais que são perturbações do exterior de uma esfera para equações que envolvem a não linearidade de Allen-Cahn.

---

Estes exemplos valem em todas as dimensões; em particular, eles obtiveram o contra-exemplo em dimensão 2.

Embora não seja válida em geral, Ros e Sicbaldi [17] encontraram uma resposta positiva para a conjectura BCN em dimensão 2, desde que assumamos algumas hipóteses acerca do crescimento da não linearidade ou sobre o domínio  $\Omega$ . De fato, temos o seguinte teorema:

**Teorema 2** (Ros-Sicbaldi, [17], Teorema 1.1). *Em dimensão  $n = 2$ , a conjectura de Berestycki-Caffarelli-Nirenberg é verdadeira em dois casos:*

(A) *Quando existe uma constante positiva  $\lambda$  tal que  $f(t) \geq \lambda t$ , para todo  $t > 0$ , ou*

(B) *quando  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  está contido em um semiplano e  $|\nabla u|$  é limitado.*

A parte (A) do Teorema 2 torna a conjectura verdadeira quando a não linearidade cresce pelo menos como uma função linear e segue como consequência das proposições enunciadas ao longo do Capítulo 2, no qual utilizamos como ferramenta principal o princípio do máximo no formato do método dos planos móveis.

**Teorema 3** (Ros-Sicbaldi, [17], Corolário 2.4). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio  $f$ -extremal, onde  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Lipschitz que satisfaz  $f(t) \geq \lambda t$ , para cada  $t > 0$  e para algum  $\lambda > 0$ , de tal forma que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  seja conexo. Então  $\Omega$  é uma bola.*

A parte (B) do Teorema 2 seguirá como corolário das proposições enunciadas ao longo do Capítulo 3, que culmina com o seguinte resultado:

**Corolário 1** (Ros-Sicbaldi, [17], Corolário 2.10). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio de classe  $C^3$  tal que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  seja conexo e  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  seja uma solução do Problema (1). Se  $\Omega$  está contido em um semiplano e  $|\nabla u|$  é limitado, então ou  $\Omega$  é uma bola e  $u$  é uma solução radial ou (após um movimento rígido)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  e  $u$  depende apenas da variável  $y$ .*

## 2 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES BÁSICAS

No escopo deste capítulo constam alguns resultados essenciais para o bom prosseguimento da leitura, tais como algumas versões do *Princípio do Máximo* e o *Problema de autovalor* para o operador Laplaciano. Para tanto, foram utilizados como referências principais os textos de Evans [7] e Gilbarg-Trudinger [12]. Não consideramos que haja prejuízo ao leitor que desejar omitir tal seção, desde que o mesmo esteja familiarizado com os tópicos subsequentes.

### 2.1 Princípios do Máximo

Considere o operador linear de segunda ordem dado pela expressão

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \quad (2.1)$$

onde  $u \in C^2(\Omega)$  e os coeficientes  $a^{ij}, b^i, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais. Salvo disposição contrária, estamos admitindo que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio (i.e., um aberto conexo) limitado.

Se  $u \in C^2(\Omega)$ , então o Teorema de Schwartz (LIMA, [13]) garante que  $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ . Dessa forma, podemos reescrever a Expressão (2.1) como

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2}(a^{ij}(x) + a^{ji}(x))u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que para cada  $x \in \Omega$ , a matriz associada

$$A(x) = \begin{bmatrix} a^{11}(x) & \cdots & a^{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1}(x) & \cdots & a^{nn}(x) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

é simétrica. Estamos em condições de precisar sob quais circunstâncias o operador linear  $L$  é um operador elíptico.

**Definição 2.1.** Dizemos que o operador  $L$  é elíptico se a forma quadrática associada à matriz  $A(x)$  definida em (2.2) é positiva definida, ou seja, se  $\lambda(x)$  denota o menor

autovalor de  $A$ , então

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda(x) |\xi|^2 > 0,$$

para todo  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e para todo  $x \in \Omega$ . Dizemos que  $L$  é uniformemente elíptico em  $\Omega$  se existe  $\theta > 0$  tal que  $\lambda(x) \geq \theta$ , para todo  $x \in \Omega$ . Em particular, vale a seguinte desigualdade

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2.$$

O operador Laplaciano é um operador uniformemente elíptico de segunda ordem. De fato,  $a^{ij} = \delta_{ij}$ ,  $b^i = 0$ ,  $c = 0$ ,  $\theta = 1$ , e portanto para qualquer vetor  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , temos

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = |\xi|^2.$$

Introduziremos agora algumas versões do Princípio do Máximo expostas em [12].

**Teorema 2.1.** (*Princípio do Máximo Fraco*). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado e  $L$  um operador uniformemente elíptico em  $\Omega$  com  $c \equiv 0$ . Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , então:*

(i) *Se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ , então*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(ii) *Se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$ , então*

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

*Demonstração.* Ver [12], página 32. □

Vamos considerar uma versão do Teorema 2.1 para o caso em que o termo  $c(x)$  é não positivo. Antes disso, definamos, respectivamente, as partes positiva e negativa de uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\} \quad \text{e} \quad u^-(x) := \max\{-u(x), 0\},$$

onde  $x \in \Omega$ . É de fácil verificação que valem as igualdades

$$|u| = u^+ + u^- \quad \text{e} \quad u = u^+ - u^-.$$

**Teorema 2.2.** (*Princípio do Máximo Fraco para  $c \leq 0$* ). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado e  $L$  um operador uniformemente elíptico em  $\Omega$  com  $c \leq 0$ . Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , então valem os seguintes itens:*

---

(i) Se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$ , então

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

(ii) Se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$ , então

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-.$$

(iii) Se  $Lu = 0$  em  $\Omega$ , então

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

*Demonstração.* Ver [12], página 33. □

Os Teoremas 2.1 e 2.2 são necessários, por exemplo, na obtenção de resultados acerca da unicidade da solução. A respeito disso, temos

**Corolário 2.1.** (*Unicidade da solução*) Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado e  $L$  um operador uniformemente elíptico em  $\Omega$  com  $c \leq 0$ , então o problema

$$\begin{cases} Lu = f \text{ em } \Omega, \\ u = g \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

possui no máximo uma solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .

*Demonstração.* Sejam  $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  duas soluções para o Problema (2.3). A linearidade do operador  $L$  garante que a função definida por  $v(x) := u_1(x) - u_2(x)$  cumpre em  $\Omega$  a condição

$$Lv = Lu_1 - Lu_2 = f - f = 0.$$

Dado que  $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , então o item (iii) do Teorema 2.2 nos garante que  $\max_{\overline{\Omega}} |v| = \max_{\partial\Omega} |v|$ . Contudo, sobre o bordo  $\partial\Omega$ , temos que

$$v = u_1 - u_2 = g - g = 0.$$

Dessa forma, encontramos que  $\max_{\overline{\Omega}} |v| = 0$ , de onde concluímos que  $v \equiv 0$  e as soluções  $u_1$  e  $u_2$  são iguais no domínio  $\Omega$ . □

**Corolário 2.2.** (*Princípio da comparação*) Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado e  $L$  um operador uniformemente elíptico em  $\Omega$  com  $c \leq 0$ . Se  $u, v \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C(\Omega)$  são duas funções que satisfazem

$$\begin{cases} Lu = Lv \text{ em } \Omega, \\ u = v \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4)$$

então  $u = v$  em  $\Omega$ . Por outro lado, se

$$\begin{cases} Lu \geq Lv \text{ em } \Omega, \\ u \leq v \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

então  $u \leq v$  em  $\Omega$ .

*Demonstração.* Considere a função  $w \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C(\Omega)$  definida por  $w = u - v$ . Em (2.4),  $w$  satisfaz

$$\begin{cases} Lw = 0 \text{ em } \Omega, \\ w = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo item (iii) do Teorema 2.2, temos que

$$\max_{\overline{\Omega}} |w| = \max_{\partial\Omega} |w| = 0,$$

de onde  $w = 0$  e  $u = v$  em  $\Omega$ . Em (2.5),  $w$  satisfaz

$$\begin{cases} Lw \geq 0 \text{ em } \Omega, \\ w \leq 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, pelo item (i) do Teorema 2.2, temos que

$$\max_{\overline{\Omega}} w \leq \max_{\partial\Omega} w^+ \leq 0,$$

de onde  $w \leq 0$  e  $u \leq v$  em  $\Omega$ . □

O lema a seguir, atribuído ao matemático austro-húngaro Eberhard Hopf, afirma que se uma função contínua com bordo suficientemente suave é harmônica em seu interior e o valor da função em um ponto do bordo é maior do que os valores em pontos próximos dentro do domínio, então a derivada da função na direção do vetor normal exterior é estritamente positiva.

**Lema 2.1.** (*Hopf*) *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado,  $B \subset \Omega$  uma bola aberta,  $L$  um operador uniformemente elíptico em  $\Omega$  e  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ . Suponha que  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$  e existe  $x_0 \in \partial B \cap \partial\Omega$  tal que  $u$  é contínua em  $x_0$  e  $u(x_0) > u(x)$  para todo  $x \in \Omega$ .*

(i) *Se  $c \equiv 0$  em  $\Omega$  e existe a derivada normal  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$ , então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$



---

(ii) Se  $c \leq 0$  em  $\Omega$  e  $u(x_0) \geq 0$ , então vale o mesmo resultado do item acima.

*Demonstração.* Ver [12], página 34. □

**Teorema 2.3.** (*Princípio do Máximo Forte*) Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado,  $L$  um operador uniformemente elíptico em  $\Omega$  com  $c \equiv 0$  e  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

(i) Se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$  e  $u$  atinge um máximo no interior de  $\Omega$ , então  $u$  é constante em  $\Omega$ .

(ii) Se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$  e  $u$  atinge um mínimo no interior de  $\Omega$ , então  $u$  é constante em  $\Omega$ .

*Demonstração.* Ver [12], página 35. □

**Teorema 2.4.** (*Princípio do Máximo Forte para  $c \leq 0$* ) Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado,  $L$  um operador uniformemente elíptico em  $\Omega$  com  $c \leq 0$  e  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

(i) Se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$  e  $u$  atinge um mínimo não positivo no interior de  $\Omega$ , então  $u$  é constante em  $\Omega$ .

(ii) Se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$  e  $u$  atinge um máximo não negativo no interior de  $\Omega$ , então  $u$  é constante em  $\Omega$ .

*Demonstração.* Ver [12], página 33. □

## 2.2 Espaços de Sobolev

Nesta seção estabeleceremos uma caracterização para os espaços de Hölder e Sobolev. O conteúdo desta seção foi essencialmente retirado de [7].

**Definição 2.2.** Um vetor da forma  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , onde cada componente  $\alpha_i$  é um número inteiro não negativo, é chamado de multi-índice de ordem  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ .

**Definição 2.3.** Seja  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado um multi-índice  $\alpha$ , definimos a derivada parcial da função  $u$  como sendo

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x).$$

**Definição 2.4.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $\gamma \in (0, 1]$ . Uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é Hölder contínua com expoente  $\gamma$  se existe alguma constante  $C > 0$  tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma,$$

para quaisquer  $x, y \in \Omega$ .

---

**Definição 2.5.** Seja  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e contínua. Definimos a norma

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

**Definição 2.6.** A  $\gamma$ -ésima seminorma de Hölder de  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} = \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}$$

e a  $\gamma$ -ésima norma de Hölder é

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}.$$

**Definição 2.7.** O espaço de Hölder  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  consiste de todas as funções  $u \in C^k(\bar{\Omega})$  para os quais a norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$$

é finita.

Dessa forma, o espaço  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  consiste de todas as funções  $k$ -vezes diferenciáveis cujas  $k$ -ésimas derivadas parciais são limitadas e Hölder contínuas com expoente  $\gamma$ .

Frequentemente os espaços de Hölder não são suficientes para desenvolver uma teoria sólida sobre EDP's, o que nos impele a considerar espaços mais gerais do que  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ . Suponha que  $u \in C^1(\Omega)$  e  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  é uma função suave com suporte compacto em  $\Omega$ . Segue da integração por partes que

$$\int_{\Omega} u \phi_{x_i} dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \phi dx.$$

Em geral, se  $k$  é um inteiro positivo,  $u \in C^k(\Omega)$  e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é um multi índice de ordem  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ , então

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) \phi(x) dx.$$

Esta observação nos possibilita definir o conceito de derivada fraca.

**Definição 2.8.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ , ou seja,  $u$  é integrável em todo subconjunto compacto de  $\Omega$ . Dizemos que uma função  $v \in L_{loc}^1(\Omega)$  é uma  $\alpha$ -ésima derivada fraca de  $u$  se

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \phi(x) dx. \quad (2.6)$$

---

para toda  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

**Exemplo 2.1.** Sejam  $\Omega = (0, 2)$  e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Então a derivada fraca de  $u$  é dada por

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Note que  $u \in L_{loc}^1(0, 2)$  e que não existe a derivada no sentido clássico, pois não existe a derivada (clássica) no ponto  $x = 1$ . Afirmamos que a função  $u$  possui derivada fraca  $v : (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

De fato, perceba que  $v \in L_{loc}^1(0, 2)$ . Dada uma função  $\phi \in C_0^\infty(0, 2)$ , pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x)\phi'(x)dx &= \int_0^1 x\phi'(x)dx + \int_1^2 \phi'(x)dx \\ &= x\phi(x)|_0^1 - \int_0^1 \phi(x)dx + (\phi(2) - \phi(1)) \\ &= \phi(1) - \int_0^1 \phi(x)dx - \phi(1) \\ &= - \int_0^1 \phi(x)dx \\ &= - \int_{\Omega} v(x)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

De modo que,  $u' = v$ , no sentido fraco.

**Exemplo 2.2.** Sejam  $\Omega = (0, 2)$  e  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Então a função  $u$  não admite derivada fraca.

Suponha, por contradição, que existe  $v \in L^1_{loc}(\Omega)$  tal que

$$\int_0^2 u(x)\phi'(x)dx = - \int_0^2 v(x)\phi(x)dx$$

para toda função  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Então

$$\begin{aligned} - \int_0^2 v(x)\phi(x)dx &= \int_0^1 x\phi'(x)dx \\ &= x\phi \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi(x)dx \\ &= \phi(1) - \int_0^1 \phi(x)dx \end{aligned}$$

Logo,

$$1 = \phi(1) = - \int_0^2 v(x)\phi(x)dx + \int_0^1 \phi(x)dx. \quad (2.7)$$

Escolha uma sequência de funções  $\{\phi_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$  tais que

- (i)  $0 \leq \phi_m \leq 1$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ .
- (ii)  $\phi_m(1) = 1$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ .
- (iii)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m(x) = 0$ , para todo  $x \neq 1$ .

Para todo  $m \in \mathbb{N}$ , as funções  $\phi_m$  são integráveis, pois  $\{\phi_m\}_{m=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ . Além disso,  $\phi_m \rightarrow 0$  q.t.p e  $0 \leq \phi_m \leq 1$ , e pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \phi_m(x)dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

Além disso, por (2.7),

$$1 = \phi_m(x) = - \int_0^2 v(x)\phi_m(x)dx + \int_0^1 \phi_m(x)dx.$$

Assim, novamente usando o Teorema da Convergência Dominada e usando o fato de  $v$  ser  $L^1_{loc}(\Omega)$ , temos

$$1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ - \int_0^2 v(x)\phi_m(x)dx + \int_0^1 \phi_m(x)dx \right] = 0,$$

o que é um absurdo. Concluímos que a a função  $u$  não admite derivada fraca.

**Definição 2.9.** (Espaços de Sobolev) Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $1 \leq p \leq \infty$  e  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Definimos o espaço de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  como sendo

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\},$$

onde  $D^\alpha u$  denota a derivada no sentido fraco.

Definimos em  $W^{k,p}$  as normas

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{esssup}_{\Omega} |D^\alpha u| & \text{se } p = \infty. \end{cases} \quad (2.8)$$

Quando  $p = 2$ , podemos denotar  $W^{k,p}(\Omega)$  simplesmente por  $H^k(\Omega)$ . Em particular, se  $k = 1$ , temos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \text{ para } i = \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Por fim, denotamos por  $W_0^{k,p}(\Omega)$  o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  em  $W^{k,p}(\Omega)$ , onde  $C_0^\infty(\Omega)$  é o conjunto das funções  $C^\infty$  com suporte compacto em  $\Omega$ .

## 2.3 Problema de autovalor

Examinaremos o problema de autovalor do Laplaciano com a condição de fronteira de Dirichlet, usando como referência [12]. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado e  $W_0^{1,2}$  o espaço de Sobolev munido com a norma

$$\|u\|_{1,2} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O operador Laplaciano é definido por

$$\begin{aligned} \Delta : W_0^{1,2}(\Omega) &\rightarrow W^{-1,2}(\Omega) \\ u &\mapsto \Delta u := \operatorname{div}(\nabla u), \end{aligned}$$

onde  $W^{-1,2}$  é o espaço dual de  $W_0^{1,2}$ . Estamos particularmente interessados em analisar o problema de autovalor

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.9)$$

A formulação fraca de (2.9) é obtida como segue. Seja  $v \in W_0^{1,2}$ , então

$$v\Delta u + \lambda uv = 0.$$

Integrando em  $\Omega$  e utilizando a integração por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \lambda \int_{\Omega} uv dx.$$

**Definição 2.10.** *Seja  $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ . Dizemos que  $u$  é uma autofunção para o Problema (2.9) se*

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \lambda \int_{\Omega} uv dx \quad (2.10)$$

para toda função  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Nessas condições, o número real  $\lambda$  é chamado de autovalor do Laplaciano.

Em [7] encontramos um teorema interessante que caracteriza o espectro do Laplaciano.

**Teorema 2.5.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado. Então o problema de autovalor*

$$-\Delta u = \lambda u \text{ em } \Omega, u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

*possui um número infinito enumerável de autovalores*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

*tais que*

$$\lambda_k \rightarrow \infty$$

*quando  $k \rightarrow \infty$ . Além disso, as autofunções  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  constituem um sistema ortonormal completo para  $L^2(\Omega)$ , isto é,*

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$$

*para todo  $v \in L^2(\Omega)$ .*

*Demonstração.* ver [7], p.337.

□

Podemos estabelecer uma caracterização variacional para o primeiro autovalor do Laplaciano em termos do *Quociente de Rayleigh* dada por

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u \in W_0^{1,2} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}. \quad (2.11)$$

O primeiro autovalor é simples, isto é, o autoespaço associado à  $\lambda_1$  é unidimensional, possuindo uma autofunção positiva associada. Este resultado é clássico e pode ser encontrado em diversas referências bibliográficas sobre esta teoria. Por uma questão de completude e devido a sua importância nesta dissertação, faremos aqui sua demonstração em detalhes. Para tanto, seguiremos os passos estabelecidos em [7].

**Proposição 2.1.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado,  $\lambda_1$  o primeiro autovalor associado ao Problema (2.9) e  $\varphi_1$  uma autofunção associada a este autovalor. Então*

(i)  $\varphi_1 > 0$  ou  $\varphi_1 < 0$  em  $\Omega$ .

(ii) Se  $\varphi_2$  é uma  $\lambda_1$ -autofunção, então existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi_2 = \alpha\varphi_1$ .

*Demonstração.* Conforme vimos na Seção 2.1, podemos escrever  $\varphi_1 = \varphi_1^+ - \varphi_1^-$ , com  $\varphi_1^+, \varphi_1^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$  e

$$\nabla\varphi_1^+ = \begin{cases} \nabla\varphi_1 & \text{q.t.p. em } \{x \in \Omega \mid \varphi_1(x) > 0\}, \\ 0 & \text{q.t.p. em } \{x \in \Omega \mid \varphi_1(x) \leq 0\}, \end{cases}$$

$$\nabla\varphi_1^- = \begin{cases} 0 & \text{q.t.p. em } \{x \in \Omega \mid \varphi_1(x) \geq 0\}, \\ -\nabla\varphi_1 & \text{q.t.p. em } \{x \in \Omega \mid \varphi_1(x) < 0\}. \end{cases}$$

Fazendo  $v = \varphi_1^+$  em (2.10), temos

$$\int_{\Omega} \langle \nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1^+ \rangle dx = \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_1^+ dx. \quad (2.12)$$

Contudo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1^+ \rangle dx &= \int_{\{\varphi_1 > 0\}} \langle \nabla\varphi_1^+, \nabla\varphi_1^+ \rangle dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla\varphi_1^+|^2 dx, \end{aligned} \quad (2.13)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_1^+ dx &= \int_{\{\varphi_1 > 0\}} \varphi_1^+ \varphi_1^+ dx \\ &= \int_{\Omega} (\varphi_1^+)^2 dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Portanto, usando (2.13) e (2.14) em (2.12), obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla\varphi_1^+|^2 dx = \lambda_1 \int_{\Omega} (\varphi_1^+)^2 dx.$$

Assim,  $\varphi_1^+$  é uma autofunção associada ao autovalor  $\lambda_1$ . Da mesma forma, pode-se mostrar que  $\varphi_1^-$  também é uma  $\lambda_1$ -autofunção. Temos que

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1^+ + \lambda_1\varphi_1^+ = 0 & \text{em } \Omega, \\ \varphi_1^+ = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1^- + \lambda_1\varphi_1^- = 0 & \text{em } \Omega, \\ \varphi_1^- = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabemos que  $\varphi_1^+$  é não negativa em  $\Omega$ . Provaremos agora que  $\varphi_1^+ > 0$  ou  $\varphi_1^+ \equiv 0$  em  $\Omega$ .

De fato, se existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $\varphi_1^+(x_0) = 0$ , então  $x_0$  é um mínimo para a função  $\varphi_1^+$ . Além disso,

$$-\Delta\varphi_1^+ = \lambda_1\varphi_1^+ \geq 0.$$

Segue do Princípio do Máximo Forte 2.3 que  $\varphi_1^+ \equiv 0$  em  $\Omega$ . De forma análoga, pode-se mostrar que  $\varphi_1^- > 0$  ou  $\varphi_1^- \equiv 0$  em  $\Omega$ . Segue que  $\varphi_1 > 0$  ou  $\varphi_1 < 0$  em  $\Omega$ .

Para provarmos o item (ii), considere duas autofunções  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  de  $\lambda_1$ . Note que

$$\int_{\Omega} \varphi_1 dx \neq 0 \text{ e } \int_{\Omega} \varphi_2 dx \neq 0. \text{ Tome } c = \frac{\int_{\Omega} \varphi_1 dx}{\int_{\Omega} \varphi_2 dx} \text{ e defina a função } \psi = \varphi_1 - c\varphi_2, \text{ donde}$$

$\psi$  é uma autofunção de  $\lambda_1$  e  $\int_{\Omega} \psi = 0$ .

Por outro lado,  $\psi \leq 0$  ou  $\psi \geq 0$ , de onde  $\psi \equiv 0$  e o resultado segue.

□



### 3 A CONJECTURA BCN EM $\mathbb{R}^2$

O principal objetivo deste capítulo é provar o teorema de Ros e Sicbaldi [17] que fornece uma resposta parcial para a conjectura Berestycki–Caffarelli–Nirenberg em dimensão 2. Para tanto, exigiremos apenas que a não linearidade satisfaça  $f(t) \geq \lambda t$ , para alguma constante  $\lambda > 0$ .

**Teorema 3.6** (Ros-Sicbaldi, [17], Corolário 2.4). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio  $f$ -extremal, onde  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Lipschitz que satisfaz  $f(t) \geq \lambda t$ , para cada  $t > 0$  e para algum  $\lambda > 0$ , de tal forma que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  seja conexo. Então  $\Omega$  é uma bola.*

#### 3.1 Domínios $f$ -extremais

O propósito desta seção consiste em exibir uma caracterização para domínios extremais como sendo pontos críticos para o funcional primeiro autovalor sobre variações que preservam volume.

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado com bordo de classe  $C^2$ . Temos que seu primeiro autovalor,  $\lambda_1(\Omega)$ , existe e é um número real positivo. Dessa forma, temos bem definido o funcional *primeiro autovalor* nessa classe de domínios:

$$\Omega \mapsto \lambda_1(\Omega). \tag{3.1}$$

Dizemos que um domínio é extremal se é um ponto crítico para este funcional para deformações que preservam volume.

Seja  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores e considere a seguinte família de difeomorfismos  $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$\phi_t(x) = x + tV(x) = y,$$

com  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Se  $\|V\|$  é limitado e  $\epsilon$  é suficientemente pequeno, então segue do Teorema da Função Inversa que  $\phi_t$  é um difeomorfismo.

Seja  $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$ . Como  $\phi_0 = Id$ , temos que  $\Omega_t$  é uma perturbação de  $\Omega$ . Se  $\lambda(t)$  é

o primeiro autovalor de  $\Omega_t$ , então temos que a primeira autofunção  $u(t, y)$  é solução de

$$\begin{cases} \Delta u(t, y) + \lambda(t)u(t, y) = 0 & \text{em } \Omega_t, \\ u(t, y) = 0 & \text{no } \partial\Omega_t. \end{cases}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $\int_{\Omega_t} u^2(t, y)dy = 1$ , para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Suponhamos também que  $u(t, x)$  e  $\lambda(t)$  sejam diferenciáveis com respeito ao parâmetro  $t$ . Assim, temos

$$\Delta u' + \lambda'u + \lambda u' = 0 \text{ em } \Omega_t, \quad (3.2)$$

onde  $u' = \frac{d}{dt}u(t, x)$ .

Multiplicando (3.2) por  $u = u(t, x)$  e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_t} u \Delta u' dy + \lambda'(t) \int_{\Omega_t} u^2 dy + \lambda \int_{\Omega_t} uu' dy \\ &= \int_{\Omega_t} u' \Delta u dy + \int_{\partial\Omega_t} u \frac{\partial u'}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\partial\Omega_t} u' \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma + \lambda'(t) + \lambda \int_{\Omega_t} uu' dy \\ &= -\lambda \int_{\Omega_t} uu' dy - \int_{\partial\Omega_t} u' \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma + \lambda'(t) + \lambda \int_{\Omega_t} uu' dy \\ &= \lambda'(t) - \int_{\partial\Omega_t} u' \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma. \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $y = x + tV(x)$  também depende de  $t$ , podemos derivar a condição de bordo

$$u(t, x + tV(x)) = 0, \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

para obtermos

$$u'(t, y) + \langle \nabla u(t, y), V(x) \rangle = 0, \text{ no } \partial\Omega_t,$$

ou seja,  $u = u'(0) = -\langle \nabla u, V(x) \rangle$ , para  $x \in \partial\Omega$ . Assim,

$$\lambda'(0) = - \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, V \rangle \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma.$$

Como  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , temos que  $\nabla u$  é um vetor normal ao bordo, ou seja,  $\nabla u = \langle \nabla u, \nu \rangle \nu$ , onde  $\nu$  é o vetor conormal apontando para fora de  $\Omega$ . Desse modo, concluímos que

$$\lambda'(0) = - \int_{\partial\Omega} \langle V, \nu \rangle \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2. \quad (3.3)$$

A prova da diferenciabilidade de  $u_1$  e  $\lambda_1$  foi realizada por Garabedian e Schiffer em

[10]. Para fins de registro, temos o

**Teorema 3.1** (Garabedian-Schiffer, [10]). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado de classe  $C^2$ ,  $V$  um campo suave ao longo de  $\partial\Omega$  e  $\{\Omega_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$  uma deformação do domínio  $\Omega$  cujo campo variacional seja  $V$ . Então o primeiro autovalor  $\lambda_1(\Omega_t)$  é diferenciável, com*

$$\delta_V[\lambda_1(\Omega_t)] = - \int_{\partial\Omega} \langle V, \nu \rangle \left( \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma, \quad (3.4)$$

onde  $u_1$  é a primeira autofunção positiva associada a  $\lambda_1(\Omega)$  e  $\nu$  é o normal exterior ao longo de  $\partial\Omega$ .

Dado um campo suave  $V$  ao longo de  $\partial\Omega$ , então a variação  $\phi_t = x + tV(x)$  preserva volume se, e somente se,

$$\int_{\partial\Omega} \langle V, \nu \rangle = 0.$$

Em particular, segue de (3.4) que  $\Omega$  é um domínio extremal se, e somente se,

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \text{cte},$$

isto é, se existe uma solução positiva para o problema sobredeterminado

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle = \text{cte} & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5)$$

Em geral, se  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Lipschitz, dizemos que um domínio (limitado ou não)  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é  **$f$ -extremal** para o operador Laplaciano se existe uma solução  $u \in C^2(\Omega)$  para o problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle = \alpha & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6)$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  é uma constante não positiva.

A seguir, temos o famoso Teorema de Serrin que classifica os domínios  $f$ -extremais limitados.

**Teorema 3.2** (Serrin, [20], Teorema 2). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado com fronteira suave e simplesmente conexo. Se existe uma solução  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  para o Problema (3.6), então  $\Omega$  é uma bola e  $u$  é radialmente simétrica.*

---

*Demonstração.* Ver [20], p. 311; ou ainda [15], p. 198. □

Para o caso de domínios não limitados existem vários resultados parciais, como os obtidos por Reichel [16] e Aftalion e Busca [1]. Em particular, este problema foi estudado por Berestycki, Caffarelli e Nirenberg em [3]. Neste artigo, eles propõem a seguinte conjectura:

**Conjectura BCN** (Berestycki-Caffarelli-Nirenberg, [3]). *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  é uma função de Lipschitz e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio suave tal que  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  é conexo, então a existência de um solução limitada para o Problema (3.6) implica que  $\Omega$  é ou uma bola, ou um semiespaço, ou um cilindro generalizado  $B^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ , onde  $B^k \subset \mathbb{R}^k$  é uma bola, ou o complementar de um deles.*

O principal objetivo desta dissertação é provar o teorema de Ros e Sicbaldi [17] que fornece uma resposta positiva e muito elegante para esta conjectura quando  $n = 2$  e a não linearidade satisfaz  $f(t) \geq \lambda t$ , para alguma constante  $\lambda > 0$ . Para tanto, precisaremos de alguns resultados geométricos.

## 3.2 Propriedades de estreitamento

Nesta seção veremos que domínios  $f$ -extremais apresentam como uma de suas características o fato de serem estreitos.

Podemos encontrar uma expressão para o primeiro autovalor em uma bola de raio  $R > 0$ . De fato, denotando por  $B_1 = B_1(p)$  e  $B_R = B_R(p)$  as bolas de raios 1 e  $R > 0$ , ambas centradas em  $p$ , respectivamente.

**Lema 3.1.** *O primeiro autovalor do Laplaciano em uma bola de raio  $R > 0$  é dado por*

$$\lambda_1(B_R) = \frac{\lambda_1(B_1)}{R^2}, \quad (3.7)$$

onde  $\lambda_1(B_1)$  é o primeiro autovalor para o Laplaciano em  $B_1$ .

*Demonstração.* Seja  $u : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução positiva para o problema de autovalor

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & \text{em } B_1, \\ u = 0, & \text{em } \partial B_1, \end{cases}$$

e considere a aplicação  $\phi : B_R(p) \rightarrow B_1(p)$  dada por

$$\phi(x) = \frac{x}{R}.$$

Seja  $\tilde{u} = u \circ \phi$ .

---

**Afirmação.**  $-\Delta\tilde{u} = \frac{\lambda_1}{R^2}\tilde{u}$ .

Note que  $\phi(x_1, \dots, x_n) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n))$ , em que  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Dessa forma,  $y_k = \frac{1}{R}x_k$ , com  $k = 1, \dots, n$ , e pela regra da cadeia, obtemos:

$$(u \circ \phi)_{x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial y_i}.$$

Derivando novamente, obtemos

$$(u \circ \phi)_{x_i x_i} = \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial y_i} \right)_{x_i} = \frac{1}{R} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(\phi(x)).$$

Assim, para um ponto  $x \in B_R$ , encontramos

$$\begin{aligned} -\Delta\tilde{u}(x) &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2}(x) \\ &= -\frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(\phi(x)) \\ &= -\frac{1}{R^2} \Delta u(\phi(x)) \\ &= \frac{1}{R^2} \lambda_1 u(\phi(x)) \\ &= \frac{\lambda_1}{R^2} \tilde{u}(x), \end{aligned}$$

o que demonstra a afirmação. Dessa forma,  $\frac{\lambda_1}{R^2}$  é um autovalor do Laplaciano em  $B_R$ , e como a função  $\tilde{u} > 0$  em  $B_R$ , a Proposição 2.1 garante que

$$\lambda_1(B_R) = \frac{\lambda_1(B_1)}{R^2}.$$

□

Em particular, temos o seguinte corolário:

**Corolário 3.1.** *Para todo  $\lambda > 0$ , existe um raio  $R_\lambda$  tal que  $\lambda_1(B_{R_\lambda}) = \lambda$ .*

Dessa forma,  $R_\lambda$  é uma constante positiva que resolve o problema

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{em } B_{R_\lambda}, \\ u > 0 & \text{em } B_{R_\lambda}, \\ u = 0 & \text{em } \partial B_{R_\lambda}. \end{cases} \quad (3.8)$$

**Teorema 3.3** (Ros-Sicbaldi, [17], Proposição 3.1). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio (limitado ou não). Suponha que exista uma solução estritamente positiva  $u \in C^2(\Omega)$  da equação elíptica*

$$\Delta u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega, \quad (3.9)$$

onde  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Lipschitz que satisfaz a condição  $f(t) \geq \lambda t$ , para alguma constante positiva  $\lambda$  e para todo  $t > 0$ . Então  $\Omega$  não contém nenhuma bola fechada de raio  $R_\lambda$ .

*Demonstração.* Vamos supor, por contradição, que  $\overline{B_{R_\lambda}(p)} \subset \Omega$ , para algum  $p \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $v \in C^2(\Omega)$  uma solução de

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(p), \\ v > 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(p), \\ v = 0 & \text{em } \partial B_{R_\lambda}(p). \end{cases} \quad (3.10)$$

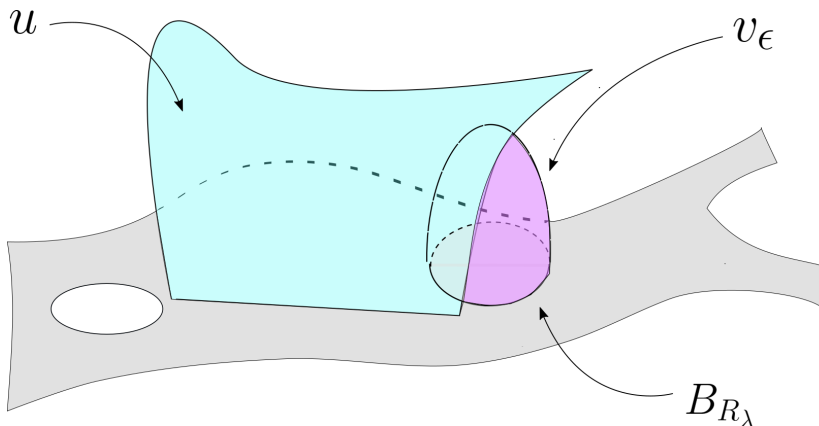
Considere a função  $v_\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $v_\epsilon(x) := \epsilon v(x)$ , onde  $\epsilon > 0$ . Perceba que  $v_\epsilon$  também é uma solução do Problema (3.10), pois  $v_\epsilon > 0$  em  $B_{R_\lambda}(p)$ ,  $v_\epsilon = 0$  em  $\partial B_{R_\lambda}(p)$  e

$$\Delta v_\epsilon + \lambda v_\epsilon = \Delta(\epsilon v) + \lambda(\epsilon v) = \epsilon(\Delta v + \lambda v) = 0.$$

Sabemos que  $u > 0$  em  $B_{R_\lambda}(p)$ . Dessa forma, variando o parâmetro  $\epsilon$  adequadamente, podemos fazer com que  $v_\epsilon$  satisfaça as condições:

- (1)  $v_\epsilon(x) \leq u(x)$ , para todo  $x \in \overline{B_{R_\lambda}(p)}$ , e
- (2) existe  $x_0 \in B_{R_\lambda}(p)$  tal que  $v_\epsilon(x_0) = u(x_0)$ .

Figura 3.1: Gráfico das funções  $u$  (em azul) e  $v_\epsilon$  (em rosa).



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Perceba que a hipótese realizada acerca da *não linearidade*  $f$  implica que

$$0 = \Delta u + f(u) \geq \Delta u + \lambda u.$$

Dessa forma, garantimos que  $\Delta u + \lambda u \leq 0 = \Delta v_\epsilon + \lambda v_\epsilon$  em  $B_{R_\lambda}$ . Donde

$$\Delta(u - v_\epsilon) \leq -\lambda(u - v_\epsilon) \leq 0. \quad (3.11)$$

Nessa situação, o Princípio do Máximo 2.1 indica que

$$\min_{B_{R_\lambda}(p)} (u - v_\epsilon) = \min_{\partial B_{R_\lambda}(p)} (u - v_\epsilon) = 0.$$

Por outro lado, para  $x_0 \in B_{R_\lambda}(p)$ , a função  $u - v_\epsilon$  satisfaz

$$(u - v_\epsilon)(x_0) = u(x_0) - v_\epsilon(x_0) = 0,$$

ou seja,  $u - v_\epsilon$  tem um ponto de mínimo no interior. Neste caso, o Princípio do Máximo Forte 2.3 implica que  $u = v_\epsilon$  em  $B_{R_\lambda}$ , o que é uma contradição.  $\square$

Para o próximo teorema, imporemos duas condições de bordo, a fim de obtermos um resultado mais forte.

**Teorema 3.4** (Ros-Sicbaldi, [17], Proposição 3.1). *Sob as hipóteses do Teorema 3.3, suponha que exista uma solução estritamente positiva  $u \in C^2(\Omega)$  para o problema elíptico sobredeterminado*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle = \alpha & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.12)$$

para alguma constante  $\alpha < 0$ . Então

- i) ou  $\overline{\Omega}$  não contém nenhuma bola fechada de raio  $R_\lambda$ ;
- ii) ou  $\Omega$  é uma bola de raio  $R_\lambda$ .

*Demonstração.* Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio não limitado. Suponha, por contradição, que existe um ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\overline{B_{R_\lambda}(p)} \subset \overline{\Omega}$ . Com isso, também deve existir um ponto  $q \in \overline{B_{R_\lambda}(p)} \cap \partial\Omega$ , pois caso contrário, teríamos  $\overline{B_{R_\lambda}(p)} \cap \partial\Omega = \emptyset$  e, portanto,  $\overline{B_{R_\lambda}(p)} \subset \Omega$ , fato que contradiz o Teorema 3.3.

Pelas condições de bordo explicitadas em (3.12), existe uma constante  $\delta_0 > 0$  tal que a função  $v_{\delta_0} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $v_{\delta_0} = \delta_0 v$  cumpre as seguintes propriedades:

(1)  $v_{\delta_0} < u(x)$ , para todo  $x \in B_{R_\lambda}(p)$ ;

(2)  $\langle \nabla v_{\delta_0}, \nu \rangle = \beta$  em  $B_{R_\lambda}(p)$ , onde  $\alpha < \beta < 0$ .

Vamos agora aumentar continuamente o parâmetro  $\delta_0$  até encontrarmos uma constante positiva  $\delta > 0$  tal que a função  $v_\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $v_\delta = \delta v$  satisfaça apenas uma das seguintes situações:

(1') ou  $v_\delta(x_0) = u(x_0)$ , para algum  $x_0 \in B_{R_\lambda}(p)$ ;

(2') ou  $\langle \nabla v_\delta, \nu \rangle = \alpha$  no ponto  $q \in \partial\Omega \cap \partial B_{R_\lambda}(p)$  e  $v_\delta(x) < u(x)$ , para todo  $x \in B_{R_\lambda}(p)$ .

No caso (1'), a função  $(u - v_\delta)(x) = u(x) - v_\delta(x)$  é não negativa e seu Laplaciano é não positivo, ou seja,  $(u - v_\delta) \geq 0$  e

$$\Delta(u - v_\delta) = -\lambda(u - v_\delta) \leq 0.$$

Como o mínimo é atingido no ponto interior  $x_0 \in B_{R_\lambda}(p)$ , o Princípio do Máximo Forte 2.3 garante que  $u \equiv v_\delta$  e, por conseguinte,  $\Omega = B_{R_\lambda}(q)$ .

No caso (2'), temos que  $(u - v_\delta) > 0$  em  $B_{R_\lambda}(p)$  e

$$\Delta(u - v_\delta) = -\lambda(u - v_\delta) < 0.$$

Por outro lado, no ponto  $q \in \partial\Omega$ , temos

$$\langle \nabla(u - v_\delta), \nu \rangle(q) = \langle \nabla u - \nabla v_\delta, \nu \rangle(q) = \langle \nabla u, \nu \rangle(q) - \langle \nabla v_\delta, \nu \rangle(q) = \alpha - \alpha = 0,$$

o que contraria o Lema de Hopf 2.1. Dessa forma,  $\overline{B_{R_\lambda}(p)} \not\subset \overline{\Omega}$ . □

Uma consequência imediata do teorema anterior é o seguinte corolário:

**Corolário 3.2.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio e  $u \in C^2(\Omega)$  uma solução positiva de*

$$\Delta u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega.$$

*Se existe  $\lambda > 0$  tal que  $f(u) \geq \lambda u$ , então  $\Omega$  não pode ser:*

(i) *nem o complementar de uma bola;*

(ii) *nem um semiespaço;*

(iii) *nem um epigráfico;*

(iv) *nem o complementar de um cilindro  $B^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ , onde  $B^k$  é uma bola em  $\mathbb{R}^k$ .*

De fato, quaisquer desses domínios contém alguma bola  $B_R(p) \subset \mathbb{R}^n$ , para algum  $R > 0$ .



### 3.3 Propriedades de simetria do domínio via método dos planos móveis

Uma importante ferramenta advinda do princípio do máximo é o *Método dos Planos Móveis*. Introduzido por Alexandrov em [2] com o intuito de demonstrar que as únicas hipersuperfícies conexas, compactas, mergulhadas, de curvatura média constante em  $\mathbb{R}^n$  são as esferas, ele vem sendo utilizado na investigação de problemas de simetria envolvendo equações diferenciais parciais (GIDAS et al., [11]).

O Método dos Planos Móveis também foi a técnica usada por Serrin em [20] para provar o seu Teorema 3.2. Passemos agora a uma descrição do método de Serrin:

Seja  $\{\mathcal{H}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  uma folheação de  $\mathbb{R}^n$  por hiperplanos  $\mathcal{H}(t)$ , onde

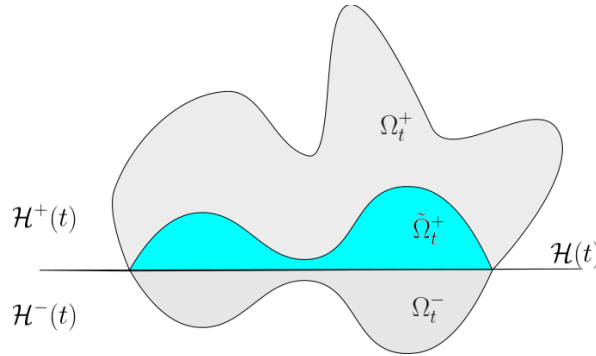
$$\mathcal{H}(t) = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Considere então os semiespaços

$$\mathcal{H}^-(t) = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mid x_n < t\} \text{ e } \mathcal{H}^+(t) = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mid x_n > t\},$$

onde  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}^-(t) \cup \mathcal{H}^+(t)$ , conforme mostra a Figura 3.2.

Figura 3.2: Reflexão de  $\Omega_t^-$  em torno de  $\mathcal{H}(t)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , considere a reflexão  $R_t : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  com respeito ao hiperplano  $\mathcal{H}(t)$  dada por

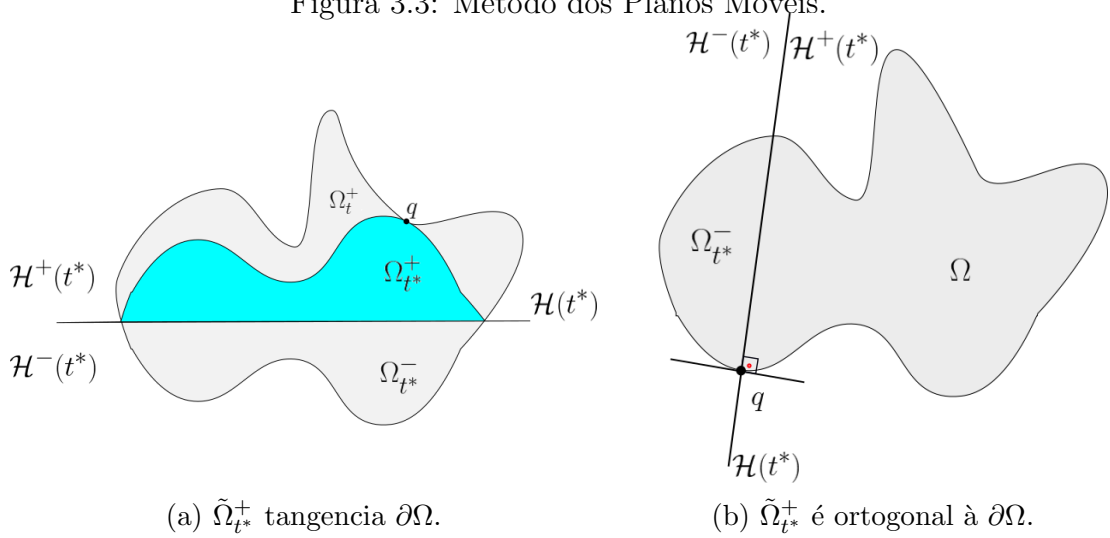
$$R_t(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 2t - x_n).$$

Perceba que  $\mathcal{H}(t)$  é invariante por estas isometrias. Para cada domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  limitado, vamos definir os conjuntos  $\Omega_t^+ := \Omega \cap \mathcal{H}^+(t)$ ,  $\Omega_t^- := \Omega \cap \mathcal{H}^-(t)$  e  $\tilde{\Omega}_t^+ := R_t(\Omega_t^-)$ . Para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ , temos  $\mathcal{H}(t_0) \cap \bar{\Omega} = \emptyset$  e  $\Omega \subset \mathcal{H}^+(t_0)$ . Aumentando continuamente o parâmetro  $t$ , podemos encontrar um ponto  $t_1 > t_0$  de tal forma que quando  $t = t_1$  estabelecemos a primeira interseção entre  $\partial\Omega$  e algum hiperplano de  $\{\mathcal{H}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ .

Para  $t > t_1$ , o hiperplano  $\mathcal{H}(t)$  determina uma componente conexa limitada  $\Omega_t^-$ . Podemos aumentar continuamente o parâmetro  $t \in (t_1, t_1 + \delta)$ , para algum  $\delta > 0$ , de tal forma que  $\tilde{\Omega}_t^+ \subset \Omega$ , o que continua valendo, a menos que alguma das seguintes situações ocorra:

- (i)  $\tilde{\Omega}_t^- := R_t(\Omega_t^-)$  tangencia internamente  $\partial\Omega$  em algum ponto  $q \in \partial\Omega \setminus \mathcal{H}(t)$ , ou
- (ii)  $\mathcal{H}(t) \perp \partial\Omega$  em  $q$ , para algum ponto  $q \in \partial\Omega$ .

Figura 3.3: Método dos Planos Móveis.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Nosso objetivo consiste em mostrar que o domínio  $\Omega$  é simétrico com respeito ao hiperplano  $\mathcal{H}(t^*)$  para o qual o item (i) é satisfeito, ou seja,  $\tilde{\Omega}_{t^*}^+ = \Omega \cap \mathcal{H}^+(t^*)$ , para algum  $t = t^*$  na qual a situação (i) ocorra. Optamos por omitir a prova da situação (ii), a qual pode ser consultada em [20].

Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  uma solução do Problema (3.6) e  $\tilde{u} : \tilde{\Omega}_t^+ \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $\tilde{u}(x) = u(R_t(x))$ , para todo  $t \in (t_1, t^*)$ , onde  $R_t : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a aplicação reflexão com respeito ao hiperplano  $\mathcal{H}(t)$ . Note que

$$\Delta \tilde{u}(x) = \Delta u(R_t(x)) = -f(u(R_t(x))) = -f(\tilde{u}(x)).$$

Mais que isso, a função  $\tilde{u}$  satisfaz as seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{u} + f(\tilde{u}) = 0 & \text{em } \tilde{\Omega}_t^+, \\ \tilde{u} > 0 & \text{em } \tilde{\Omega}_t^+, \\ \tilde{u} = 0 & \text{em } \partial \tilde{\Omega}_t^+ \cap \mathcal{H}^+(t), \\ \tilde{u} = u & \text{em } \partial \tilde{\Omega}_t^+ \cap \mathcal{H}(t), \\ \langle \nabla \tilde{u}, \nu \rangle = \alpha & \text{em } \partial \tilde{\Omega}_t^+ \cap \mathcal{H}^+(t), \end{array} \right. \quad (3.13)$$

pois  $\tilde{u}(x) = u(R_t(x)) > 0$ , para  $x \in \tilde{\Omega}_t^+$ ;  $\tilde{u}(x) = u(R_t(x)) = 0$ , para  $x \in \partial\tilde{\Omega}_t^+ \cap \mathcal{H}^+(t)$ ;  $\tilde{u}(x) = u(R_t(x)) = u(x)$ , para  $x \in \partial\tilde{\Omega}_t^+ \cap \mathcal{H}(t)$ ; e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} &= (\tilde{u} \circ \gamma)'(0) = ((u \circ \varphi) \circ \gamma)'(0) \\
&= (u \circ (\varphi \circ \gamma))'(0) \\
&= u'(\varphi(\gamma(0)))\varphi'(\gamma'(0)) \\
&= u'(\varphi(p))\varphi'(\nu(p)) \\
&= \frac{\partial u}{\partial \nu}(R^{-1}(p)),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde  $p \in \partial\Omega$ ,  $\nu(p)$  é o campo normal ao bordo de  $\Omega$  em  $p$ ,  $\varphi = R^{-1}$  e  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um caminho diferenciável tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = \nu(p)$ .

Considere agora a função auxiliar  $v = u - \tilde{u}$  definida em  $\tilde{\Omega}_t^+$ , a qual cumpre

$$\Delta v = \Delta u - \Delta \tilde{u} = -(f(u) - f(\tilde{u})). \tag{3.15}$$

Desde que a função  $f$  é Lipschitz, então  $|f(u) - f(\tilde{u})| \leq c|u - \tilde{u}|$ , para alguma constante  $c > 0$ . Em particular,

$$-(f(u) - f(\tilde{u})) \leq c(u - \tilde{u}). \tag{3.16}$$

**Afirmação.**  $u = \tilde{u}$  em  $\tilde{\Omega}_t^+$ .

De fato, considere o operador operador  $\Delta - c$ , o qual é uniformemente elítico em uma vizinhança  $V \subset \Omega$  do ponto  $q$  onde  $\tilde{\Omega}_t^+$  é tangente à  $\partial\Omega$ . Por (3.15) e (3.16), encontramos

$$\Delta u - cu \leq \Delta \tilde{u} - c\tilde{u}. \tag{3.17}$$

Além disso,  $u = \tilde{u}$  em  $\mathcal{H}(t^*)$  e  $u \geq \tilde{u}$  em  $\tilde{\Omega}_t^+ \cap \mathcal{H}^+(t^*)$ , pois  $u > 0$  em  $\Omega$  e  $\tilde{u} = 0$  em  $\partial\tilde{\Omega}_t^+$ . Reunindo estas duas informações, concluímos que  $u \geq \tilde{u}$  em  $\partial\tilde{\Omega}_t^+$ . Pelo Corolário 2.2, temos que  $u \geq \tilde{u}$  em  $\tilde{\Omega}_t^+$ . Contudo, se  $u > \tilde{u}$ , então  $v(q) \geq 0$  e pelo Lema de Hopf 2.1

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(q) > 0, \tag{3.18}$$

o que é um absurdo, pois

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(q) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(q) - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}(q) = \alpha - \alpha = 0, \tag{3.19}$$

de onde concluímos que  $u = \tilde{u}$  em  $\tilde{\Omega}_t^+$ .

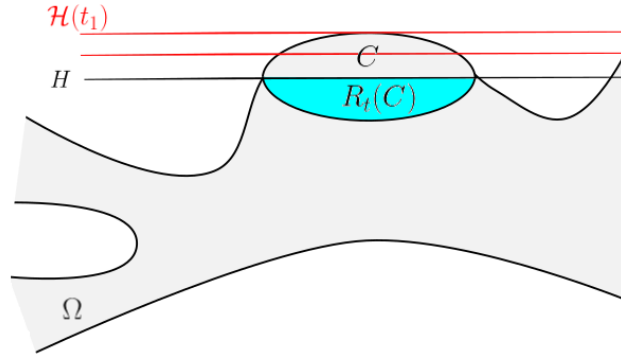
Observe que a limitação do domínio  $\Omega$  é usado apenas para garantir que para cada direção possamos encontrar um hiperplano de simetria para  $\Omega$ , o que nos permite

expandir, em alguns casos, a utilização desse método para domínios não limitados.

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio não limitado,  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  uma solução para o Problema (3.6),  $H \subset \mathbb{R}^n$  um hiperplano que intersecta  $\Omega$  e  $H^+$  e  $H^-$  as duas componentes conexas de  $\mathbb{R}^n \setminus H$  tais que  $\mathbb{R}^n \setminus H = H^+ \cup H^-$ . Estamos interessados em estudar algumas propriedades relativas à componente conexa limitada  $H^+ \cap \Omega$  (ou  $H^- \cap \Omega$ ), a qual surge ao aplicarmos o Método dos Planos Móveis.

**Proposição 3.1.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio  $f$ -extremal não limitado e  $H$  um hiperplano em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\Omega \cap H \neq \emptyset$ . Se  $C$  é uma componente conexa limitada de  $\Omega \cap H^+$ , então o fecho de  $\partial C \cap H^+$  é um gráfico sobre  $\partial C \cap H$ .*

Figura 3.4: Método dos Planos Móveis aplicado à componente conexa  $C$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

*Demonstração.* Sejam  $C$  uma componente conexa limitada em  $\Omega \cap H^+$  e  $\{\mathcal{H}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  uma folheação de  $\mathbb{R}^n$  por hiperplanos paralelos ao hiperplano  $H$ . A menos de um movimento rígido, podemos supor que  $H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ . Como a componente conexa  $C$  é limitada, podemos escolher um  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{H}(t_0) \cap C = \emptyset$ .

Seja  $t_1 = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \partial C \cap \mathcal{H}(t) \neq \emptyset\}$ . Diminuindo o parâmetro  $t$ , para cada  $\epsilon > 0$  e para cada  $t \in (t_1 - \epsilon, t_1)$ , podemos encontrar uma componente conexa limitada  $C_t := C \cap \mathcal{H}^+(t)$  tal que  $R_t(C_t) \subset \Omega$ . Dessa forma, para cada  $t \in (t_1 - \epsilon, t_1)$ , a curva  $\partial C_t \cap \mathcal{H}^+(t)$  é um gráfico de alguma função sobre  $\partial C_t \cap \mathcal{H}(t)$ .

Vamos continuar diminuindo o parâmetro  $t$  até que:

- (i)  $R_t(C_t)$  tangencie internamente  $\partial\Omega$  em algum ponto  $q$ , o qual não pertence ao hiperplano  $\mathcal{H}(t)$ , ou
- (ii)  $\mathcal{H}(t) \perp \partial\Omega$  em algum ponto  $q$ , ou
- (iii)  $\mathcal{H}(t) = H$ .

Se as situações (i) ou (ii) ocorrem, então o Princípio do Máximo garante que o domínio  $\Omega$  é simétrico em relação ao hiperplano  $\mathcal{H}(t)$  e, portanto, limitado, o que é absurdo.

Se (iii) ocorre, então  $\overline{\partial C_t \cap \mathcal{H}^+(t)}$  é um gráfico sobre  $\partial C \cap H$ .

□

Os próximos corolários que apresentaremos seguem como consequência imediata da Proposição 3.1.

**Corolário 3.3.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio  $f$ -extremal não limitado e  $H$  um hiperplano em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\Omega \cap H \neq \emptyset$ . Suponha que  $\Omega \cap H^+$  possua uma componente conexa limitada  $C$ , então  $\partial C \cap H$  é conexo.*

*Demonstração.* Seja  $C$  uma componente conexa e limitada de  $\Omega \cap H^+$ . Suponha, por absurdo, que  $\partial C \cap H$  fosse não conexo. Assim, o fecho de  $\partial C \cap H^+$  não poderia ser um gráfico sobre  $\partial C \cap H$ , que contraria a Proposição 3.1. Portanto, concluímos que  $\partial C \cap H$  é conexo. □

**Corolário 3.4.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio  $f$ -extremal não limitado e  $H$  um hiperplano em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\Omega \cap H \neq \emptyset$ . Suponha que  $\Omega \cap H^+$  possua uma componente conexa limitada  $C$ . Então o fecho de  $\partial C \cap H^+$  não é ortogonal à  $H$ .*

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que exista um ponto  $q \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\partial C \cap H^+$  seja ortogonal à  $H$  em  $q$ . Nesse caso, incorremos na situação (ii) do método de Serrin, de onde o domínio  $\Omega$  é simétrico em relação a  $H$  e, portanto, é limitado, o que é um absurdo. Dessa forma, concluímos que  $\overline{\partial C \cap H^+} \not\perp H$ . □

**Corolário 3.5.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio  $f$ -extremal não limitado e  $H$  um hiperplano em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\Omega \cap H \neq \emptyset$ . Suponha que  $\Omega \cap H^+$  tenha uma componente conexa limitada  $C$ . Se  $C'$  é a reflexão de  $C$  sobre o hiperplano  $H$ , então  $\overline{C \cup C'} \subset \overline{\Omega}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\{\mathcal{H}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  uma folheação de  $\mathbb{R}^n$  por hiperplanos paralelos à  $H$ , com  $\mathcal{H}(t_0) = H$ . Desde que  $C$  é uma componente conexa limitada, existe um  $t_1 > t_0$  tal que  $\mathcal{H}(t_0) \cap \partial C = \emptyset$ . Variando o parâmetro  $t$ , encontramos um primeiro  $t_2 < t_1$  tal que  $\mathcal{H}(t_2) \cap \partial C = \emptyset$ .

Perceba que, para cada  $t \in (t_0, t_1)$ , existe uma componente conexa  $C_t = C \cap \mathcal{H}^+(t)$ , cuja reflexão em torno do hiperplano  $\mathcal{H}(t)$  é dada por  $C'_t$ .

**Afirmção.**  $\overline{C \cup C'} \subset \overline{\Omega}$ .

Suponha, por absurdo, que  $\overline{C \cup C'} \not\subset \overline{\Omega}$ . Dessa forma, existe  $t \in (t_0, t_2]$  tal que  $C'_t$  tangencia o  $\partial\Omega$  internamente em algum ponto  $q$ , o qual não se encontra em  $\mathcal{H}(t)$ .

Segue do item (i) do método de Serrin que  $\Omega$  é simétrico sobre  $\mathcal{H}(t)$ , logo limitado, o que é uma contradição. Dessa forma, temos que  $\overline{C \cup C'} \subset \overline{\Omega}$ .  $\square$

**Corolário 3.6.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio  $f$ -extremal não limitado e  $H$  um hiperplano em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\Omega \cap H \neq \emptyset$ . Suponha que  $\Omega \cap H^+$  tenha uma componente conexa limitada  $C$  e que exista uma função  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz, com  $f(t) \geq \lambda t$  para todo  $t > 0$  e para alguma constante  $\lambda > 0$ . Então não existe nenhuma semi bola de raio  $R_\lambda$  com base em  $\partial C \cap H$  e inteiramente contida em  $C$ .*

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que exista uma semi bola de raio  $R_\lambda$ , centrada no ponto  $c \in \partial C \cap H$  e completamente contida na componente conexa  $C$ . Seja  $C'$  a reflexão de  $C$  em torno do hiperplano  $H$ . Assim, a bola  $B_{R_\lambda}(c) \subset C \cup C'$ .

**Afirmção.**  $\overline{B_{R_\lambda}} \subset \overline{\Omega}$ .

De fato, o Corolário 3.5 garante que  $\overline{C \cup C'} \subset \overline{\Omega}$ . Como  $B_{R_\lambda}(c) \subset C \cup C'$ , então tomando o fecho em ambos os conjuntos, concluímos que  $\overline{B_{R_\lambda}} \subset \overline{\Omega}$ . Contudo, isso contraria o Teorema 3.4. Dessa forma, não existe uma semi bola de raio  $R_\lambda$  com as características acima expostas.  $\square$

## 3.4 Domínios com topologia finita

Estudaremos agora algumas propriedades geométricas e topológicas relacionadas aos domínios com topologia finita, mais especificamente no que tange aos seus fins  $f$ -extremais não limitados em  $\mathbb{R}^2$ . Para tanto, seguiremos a exposição apresentada em (ROS; SICBALDI, [17]), a qual baseia-se no ilustre artigo de W. Meeks sobre superfícies com curvatura média constante (MEEKS III, [14]).

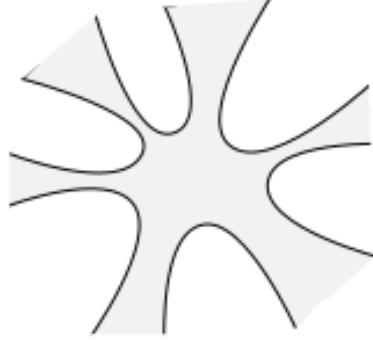
**Definição 3.1.** *Um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  tem topologia finita se existe uma bola  $B_R^n$  (de raio  $R > 0$  suficientemente grande) tal que*

1.  $\overline{\Omega} \setminus \overline{B_R^n} = \emptyset$ , isto é,  $\overline{\Omega}$  é compacto, ou
2.  $\overline{\Omega} \setminus \overline{B_R^n} = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \overline{B_R^n}$ , isto é,  $\Omega$  é o complemento de uma região compacta, ou
3.  $\overline{\Omega} \setminus B_R^n$  tem um número finito de componentes não compactas, sendo cada componente não compacta  $E$  é difeomorfa a  $B_1^{n-1} \times [0, \infty)$ .

A Figura 3.5 ilustra um exemplo de domínio que possui topologia finita. De fato, para um raio  $R$  grande,  $\overline{\Omega_1} \setminus B_R$  tem um número finito de componentes não compactas, sendo cada componente não compacta  $E$  difeomorfa a  $B_1^{n-1} \times [0, \infty)$ .

---

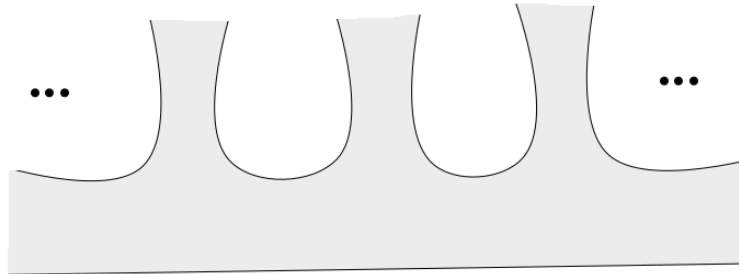
Figura 3.5: Exemplo de domínio cuja topologia é finita



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Por sua vez, a Figura 3.6 exibe um exemplo de domínio que não possui topologia finita. Com efeito,  $\overline{\Omega}_2$  não é um domínio compacto nem o complementar de um domínio compacto. Além disso, dado  $R > 0$ ,  $\overline{\Omega}_2 \setminus B_R$  não é difeomorfo a um semicilindro  $B_1^{n-1} \times [0, \infty)$ .

Figura 3.6: Exemplo de domínio cuja topologia não é finita



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

No último caso da Definição 3.1, podemos supor que a esfera  $\partial B_R^n$  intersecta  $\partial\Omega$  transversalmente e que cada componente de  $\partial B_R^n \cap \partial\Omega$  é difeomorfa à  $\partial B_1^{n-1}$ . Neste caso, diremos que  $\Omega$  tem **topologia própria finita** e  $E$  é um *fim cilíndrico sólido* de  $\Omega$ , se  $n \geq 3$ , ou um *fim planar* de  $\Omega$ , se  $n = 2$ . Dessa forma,  $\Omega$  tem topologia própria finita se, e somente se ele, é não compacto,  $\partial\Omega$  tem um número finito de componentes limitadas, algumas delas sendo não compactas.

Um importante resultado encontrado em [17] consiste em demonstrar que, quando um domínio  $f$ -extremal em dimensão 2 possui topologia finita e a função  $f$  satisfaz propriedade  $f(t) \geq \lambda t$ , para alguma constante  $\lambda > 0$  e para todo  $t > 0$ , então cada fim de  $\Omega$  encontra-se contido em um semicilindro. De forma mais precisa, temos o seguinte teorema:

---

**Teorema 3.5** (Ros-Sicbaldi, [17], Teorema 2.2). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio  $f$ -extremal com topologia finita, onde  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é Lipschitz e satisfaz  $f(t) \geq \lambda t$ , para todo  $t > 0$  e para algum  $\lambda > 0$ . Então, valem as seguintes propriedades:*

1. *Se  $E$  é um fim de  $\Omega$ , então  $E$  está a uma distância limitada de uma reta.*
2.  *$\Omega$  possui no mínimo dois fins.*
3. *Se  $\Omega$  apresenta exatamente dois fins, então existe uma reta  $H$  tal que*

$$\text{dist}(\Omega, H) \leq K,$$

*para algum  $K > 0$ . Em particular os fins de  $\Omega$  se encontram em lados opostos de cada reta  $T$  ortogonal à reta  $H$ .*

Dessa forma, se o domínio  $f$ -extremal  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  possui topologia finita, então cada fim de  $\Omega$  tem a topologia de uma semi faixa. Além disso, se  $\Omega$  possuir dois fins, então  $\Omega$  está contido em um cilindro.

A partir deste momento, concentraremos nossos esforços em exibir e demonstrar alguns resultados necessários à demonstração do Teorema 3.5. Para tanto, seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio  $f$ -extremal não limitado tal que  $\partial\Omega$  seja de classe  $C^2$  e que exista uma solução  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  do Problema (3.6). Suponha que a função  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaça a propriedade  $f(t) \geq \lambda t$ , para todo  $t > 0$  e para algum  $\lambda > 0$ , isto é, o domínio  $\Omega$  não contém nenhuma bola de raio  $R_\lambda > 0$  (conforme observado no Teorema 3.3).

Considere também uma reta  $H \subset \mathbb{R}^2$ , a qual divide  $\mathbb{R}^2$  em dois semiespaços, os quais denotaremos por  $H^+$  e  $H^-$ , de tal sorte que  $\mathbb{R}^2 \setminus H = H^- \cup H^+$ . O próximo lema garante uma cota superior para a distância entre o bordo de uma componente conexa em  $\Omega$  e limitada pela reta  $H$ .

**Lema 3.2.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio  $f$ -extremal não limitado, com  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $f(t) \geq \lambda t$ , para todo  $t > 0$  e para algum  $\lambda > 0$ . Sejam  $C$  uma componente conexa limitada de  $\Omega \cap H^+$  e  $h(C) = \underset{\max}{\text{dist}}(\partial C, H)$ . Então*

$$h(C) \leq 3R_\lambda.$$

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que  $h(C) > 3R_\lambda$ . Realizando, se necessário, uma rotação seguida de uma translação de  $\Omega$  em torno de  $H$ , podemos fazer coincidir  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$  e  $H^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ . Pela Proposição 3.1, existe uma função  $g : [a, b] \subset H \rightarrow \mathbb{R}$  de tal forma que tenhamos  $g([a, b]) = \overline{\partial C \cap H^+}$ . Podemos transladar o domínio  $\Omega$  novamente a fim de obtermos  $g(0) = h(C)$ , o qual,

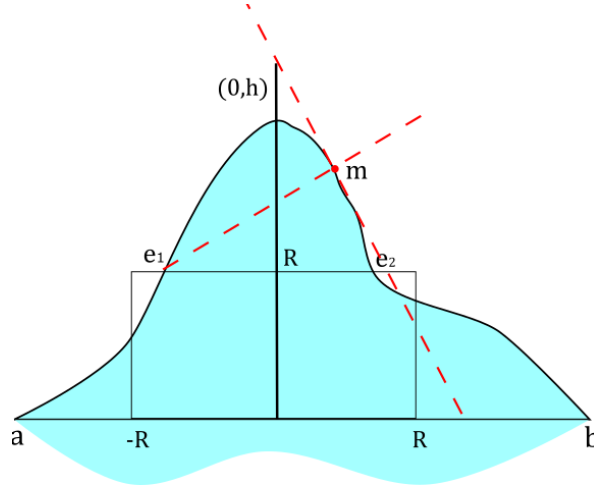


por simplicidade, denotaremos por  $h := h(C)$  (pelo mesmo motivo, vamos denotar  $R := R_\lambda$ ).

Seja  $H_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = R\}$  a reta que intersecta o ponto  $(0, R)$  e é paralela ao eixo  $x$ .

**Afirmção.**  $C \cap H_R$  é formado por intervalos abertos cujos comprimentos são inferiores à  $2R$ .

Figura 3.7: Gráfico da função  $g$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

De fato,  $C \cap H_R$  é formada por intervalos abertos, visto que o conjunto  $C$  é aberto e  $H_R$  é uma reta. Podemos então supor que cada um desses intervalos que compõem  $C \cap H_R$  é da forma

$$I_i = \{(x, R) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a_i, b_i)\} \subset H_R,$$

de onde  $C \cap H_R = \bigcup_{i \in \Lambda} I_i$ , para algum conjunto de índices  $\Lambda$ . Suponha por contradição que se tenha, para algum  $i \in \Lambda$ ,  $dist(a_i, b_i) \geq 2R$ . Então o retângulo  $(a_i, b_i) \times (0, R) \subset C$  contém uma semi-bola de raio  $R_\lambda$ , cujo centro  $c$  pertence à  $\partial C \cap H$ , o que contraria o Corolário 3.6. Dessa forma, concluímos que nenhum intervalo  $I_i$  possui comprimento maior que  $2R$ .

Sejam  $C'$  uma componente conexa de  $C \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > R\}$  na qual o ponto  $(0, h) \in \partial C'$  e  $\Gamma$  é o fecho de  $C \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > R\}$ , com pontos extremos  $e_1$  e  $e_2$ . Dado que  $C' \subset C$ , então  $C'$  é uma componente conexa limitada de  $\Omega \cap H_R^+$ . Segue da Proposição 3.1 que  $\overline{\partial C' \cap H_R^+} = g(\partial C' \cap H_R)$ , com altura máxima dada por  $h_1 = h - R > 3R - R = 2R$ . Além disso, pela afirmação realizada acima, concluímos que

$$dist(e_1, e_2) \leq 2R.$$

Considere a função distância ao ponto  $e_1$  definida por  $d_{e_1}(t) = \text{dist}(t, e_1)$ , com  $t \in \Gamma$ . Por ser  $\Gamma$  um compacto e  $d_{e_1}$  ser positiva em  $[e_1, e_2]$ , existe um ponto  $m \in \Gamma \setminus \{e_2\}$  que maximiza essa função, de onde estabelecemos as desigualdades

$$d_{e_1}(m) > h_1 > 2R \geq d_{e_1}(e_2).$$

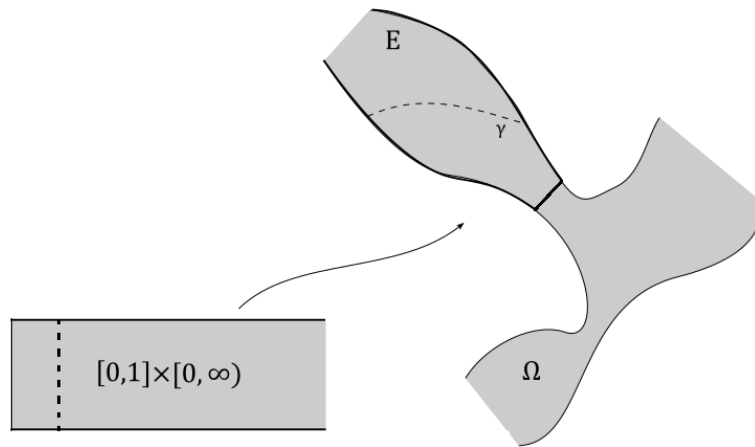
Denotamos por  $H_*$  a reta que passa pelos pontos  $e_1$  e  $m$  e por  $H_*^+$  e  $H_*^-$  os dois semiespaços de  $\mathbb{R}^2$  separados por  $H_*$ , escolhidos de tal forma que  $e_2 \in H_*^-$ . Note que  $H_* \perp \partial C'$  no ponto  $m$ , o que é absurdo, pelo Corolário 3.4. Portanto, com esta contradição, obtemos que  $h(C) \leq 3R_\lambda$ . □

Consideremos agora um domínio  $f$ -extremal plano  $\Omega$  com topologia finita. Estamos interessados em analisar o comportamento dessa região nas suas extremidades, tarefa esta que nos impele a considerar um tipo mais simples de fim. Passemos à definição:

**Definição 3.2.** Um fim (faixa plana) de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um subdomínio  $E \subset \overline{\Omega}$  não limitado, com um homeomorfismo  $F : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow E$  tal que:

1.  $F(0, s) \in \partial\Omega$ , para todo  $s \in [0, \infty)$ .
2.  $F(1, s) \in \partial\Omega$ , para todo  $s \in [0, \infty)$ .
3.  $F(t, s) \in \Omega$ , para todo  $(t, s) \in (0, 1) \times [0, \infty)$ .

Figura 3.8: Um fim  $E$  e uma curva transversal  $\gamma$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Dentro do subconjunto  $E$ , podemos ainda traçar uma curva transversal  $\gamma$ , que corresponde a uma curva partindo de um ponto  $F(0, s_1)$  e terminando em um ponto

$F(1, s_2)$ , com  $s_1, s_2 \in [0, \infty)$ . Dado que caracterizamos os fins de um domínio  $f$ -extremal, podemos estudar algumas características que a eles são inerentes.

**Lema 3.3.** *Sejam  $E$  um fim de um domínio  $f$ -extremal  $\Omega$  e  $H \subset \mathbb{R}^2$  uma reta tal que  $H \cap E$  contém uma componente conexa ilimitada. Se  $H'$  é uma reta paralela à  $H$  tal que a distância entre essas duas retas seja superior à  $2R_\lambda$ , então  $H'$  intercepta  $E$  apenas em componentes conexas limitadas.*

*Demonstração.* Podemos supor, a menos de movimento rígido, que a reta  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$  e que  $H \cap E = \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ . Considere então uma reta  $H'$  paralela à  $H$  tal que

$$H' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = k, \|k\| > 2R_\lambda\}.$$

Por simplicidade, denotaremos  $R := R_\lambda$ .

Suponha, por absurdo, que exista uma componente conexa não limitada  $G$  em  $H' \cap E$ . Então devem existir uma constante  $\rho \in \mathbb{R}$  tal que

$$G = \{(x, k) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-\infty, \rho]\} \text{ ou } G = \{(x, k) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\rho, \infty)\}.$$

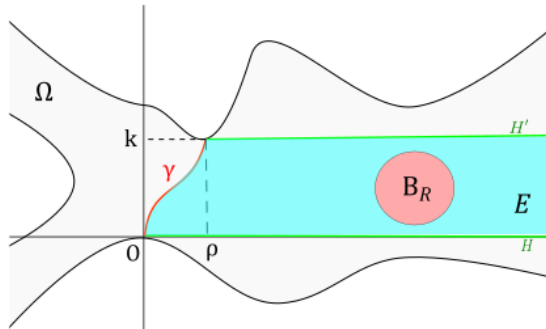
Além disso, existe uma curva  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ , com  $\text{int}(\gamma) \subset \text{int}(E)$ , que interliga os pontos  $(0, 0)$  e  $(\rho, k)$ . Seja  $\sigma = H \cup \gamma \cup G$  uma curva que separa  $\mathbb{R}^2$  em duas componentes conexas. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: Seja  $G = \{(x, k) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [\rho, \infty)\}$ . Então a curva

$$\sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \infty)\} \cup \gamma \cup G$$

divide  $\mathbb{R}^2$  em duas componentes conexas na qual uma delas está contida em  $E$ , como mostra a Figura 3.9. Por construção,  $\text{dist}(H, H') > 2R$ , de onde concluímos que o fim  $E \subset \Omega$  contém bolas de raio  $R$ , o que contraria o Teorema 3.3.

Figura 3.9: O fim  $E$  contém uma componente conexa não limitada  $H$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

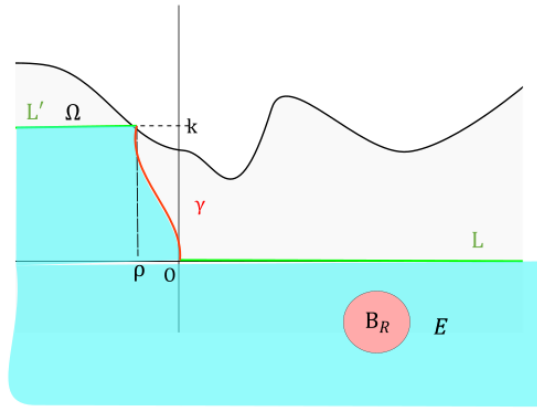
Caso 2: Considere  $G = \{(x, k) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-\infty, \rho]\}$ . Então a curva

$$\sigma = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-\infty, \rho)\} \cup \gamma \cup \{(x, k) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, \infty)\} \subset E$$

estende-se na direção do eixo  $x$  de  $-\infty$  à  $\infty$ , ocorrendo o mesmo com  $E$  (Figura 3.10). Contudo,  $E$  é um fim para  $\Omega$ , de onde uma das componentes de  $\mathbb{R}^2$  determinadas por  $\sigma$  está contida em  $E$  e, com maior razão, no domínio  $\Omega$ .

Em particular,  $E$  contém um semiplano e portanto contém bolas cujos raios excedem a constante  $R > 0$  inicialmente fixada, o que novamente contraria o Teorema 3.3. Sendo assim, a reta  $H'$  intercepta  $E$  apenas em componentes conexas limitadas.

Figura 3.10: No segundo caso, o fim  $E$  é degenerado.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

□

No trecho que segue, vamos diluir a demonstração do Teorema 3.5 nas Proposições 3.2, 3.3 e 3.4.

**Proposição 3.2.** *Seja  $E$  um fim de um domínio  $f$ -extremal  $\Omega$ , onde  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Lipschitz que satisfaz  $f(t) \geq \lambda t$ , para todo  $t > 0$  e para alguma constante  $\lambda > 0$ . Então  $E$  se encontra a uma distância limitada de uma semirreta.*

*Demonstração.* Sejam  $F : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow E$  o homeomorfismo dado na definição 3.2,  $\beta = F([0, 1] \times \{0\})$  a curva transversal inicial em  $E$  e  $B = B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$  uma bola tal que a curva  $\beta \subset B$ . Escolha uma sequência divergente  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de pontos em  $E$  e considere a sequência normalizada  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  cujos elementos são da forma  $q_i = \frac{p_i}{\|p_i\|}$ . Como  $(q_i)_i$  é uma sequência contida no conjunto compacto  $\mathbb{S}^1$ , existe uma subsequência convergindo para um ponto  $q \in \mathbb{S}^1$ . Nosso primeiro passo será mostrar que o fim  $E$  está a uma distância limitada de uma semirreta apontando na direção de  $q$ . Por conveniência, suporemos (a menos de uma rotação de  $E$ ) que  $q = (0, 1)$  e que tal semirreta é o eixo  $x$ .

---

**Afirmação. 1.** *O fim  $E$  se encontra a uma distância limitada do eixo  $x$ .*

Por simplicidade, vamos denotar o eixo  $x$  por  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ . Suponha, por absurdo, que

$$\max_{p \in E} \text{dist}(p, X) > K, \forall K > 0.$$

Em particular, para toda reta  $l_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \alpha\}$ , com  $\alpha > 0$ , temos que  $E \cap l_\alpha \neq \emptyset$ . Denotaremos por  $l_\alpha^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \alpha\}$  e  $l_\alpha^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \alpha\}$ . Vamos escolher  $\alpha > r + 1$  tal que  $l_\alpha$  intersekte o bordo  $\partial E$  transversalmente.

Observação 1: A região  $E \cap l_\alpha^+$  possui uma componente conexa ilimitada.

De fato, caso isso não ocorra, todas as componentes conexas de  $E \cap l_\alpha^+$  são limitadas. Seja  $C$  uma componente conexa limitada de  $E \cap l_\alpha^+$ , a Proposição 3.1 garante que  $\overline{\partial C \cap l_\alpha^+}$  é gráfico sobre  $\partial C \cap l_\alpha$  e o Lema 3.2 garante que

$$h(C) = \max_{p \in \partial C} \text{dist}(p, l_\alpha) \leq 3R_\lambda,$$

o que é absurdo, pois supomos que  $E \cap l_\alpha \neq \emptyset$ , para todo  $\alpha > 0$ . Dessa forma, existe uma componente conexa ilimitada, a qual denotaremos por  $C$ .

Observação 2: Existe uma curva transversal  $\gamma \subset E$  tal que  $\gamma \subset C$ .

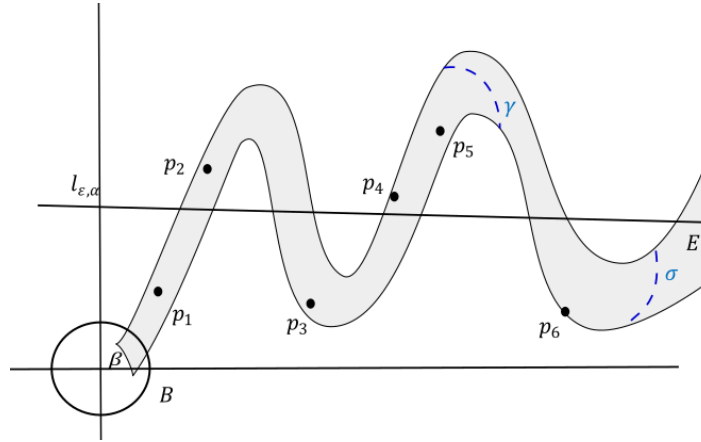
Sejam  $C_1 = F(\{1\} \times [0, \infty))$  e  $C_2 = F(\{0\} \times [0, \infty))$  duas curvas no bordo  $\partial E$ . Definimos as curvas  $C_1$  e  $C_2$  de modo que  $C_1$  estará sempre acima de  $C_2$ , no sentido de que  $C_1$  intersectará primeiro qualquer reta horizontal situada acima da bola  $B_r$ . Note que a observação 2 equivale a mostrar que  $C_2 \cap l_\alpha^+ \neq \emptyset$ , pois teremos partes de  $C_1$  e  $C_2$  acima da reta  $l_\alpha$  permitindo traçar um caminho  $\gamma$  ligando as duas curvas dentro do conjunto conexo por caminhos  $E \cap l_\alpha^+$ .

Suponha que  $C_2 \cap l_\alpha^+ = \emptyset$ , então a curva  $C_2$  está abaixo da reta  $l_\alpha$  enquanto  $C_1$  deve intersectar qualquer reta  $l_\beta$ ,  $\forall \beta > \alpha$ . Em particular,  $l_\alpha \cap C$  é ilimitada. Além disso, sempre é possível escolher uma reta  $l_\beta$  tão distante de  $l_\alpha$  quanto se queira e de modo que  $l_\beta \cap C$  admite uma componente conexa ilimitada. Isto contradiz diretamente o Lema 3.3 e demonstra a observação 2.

Dessa forma, temos que  $\beta \subset l_\alpha^-$  e  $\gamma \subset l_\alpha^+$ . Dado  $\epsilon > 0$ , considere os semiplanos  $l_{\alpha, \epsilon}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \epsilon x + \alpha\}$  e  $l_{\alpha, \epsilon}^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \epsilon x + \alpha\}$ . Note que, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, ainda temos  $\beta \subset l_{\alpha, \epsilon}^-$  e  $\gamma \subset l_{\alpha, \epsilon}^+$ .

Seja  $E^*$  o subfim de  $E$ , obtido de tal forma que  $\gamma$  que seja sua curva transversal inicial. Dado qualquer reta horizontal  $l_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = b\}$ , temos que  $l \cap l_{\alpha, \epsilon} \neq \emptyset$  e existe uma semirreta  $l'_b \subset l_{\alpha, \epsilon}^-$ . Como  $\lim_{i \in \mathbb{N}} q_i = (1, 0)$ , então o fim  $E$  contém uma semirreta horizontal  $l'_b$  e a subsequência  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  está contida em alguma semifaixa  $[-\delta, \delta] \times l'_b$ , para algum  $\delta > 0$ . Além disso, se  $t \rightarrow \infty$ , então  $\text{dist}(l'_b(t), l_{\alpha, \epsilon}(t)) \rightarrow \infty$ . Observe que a subsequência  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  passará a estar contida em  $l_{\alpha, \epsilon}^-$  a partir de um certo

Figura 3.11: Fim  $E$  e a seqüência  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

índice. Em particular,  $(C_2 \cap \overline{E^*}) \cap l_{\alpha, \epsilon}^- \neq \emptyset$ .

Observação 3: Existe uma curva transversal  $\sigma \subset E^*$  tal que  $\sigma \subset l_{\alpha, \epsilon}^-$ .

Uma vez que a curva transversal  $\gamma$  está contida em  $l_{\alpha, \epsilon}^+$ , temos que  $C_2$  intersecta  $l_{\alpha, \epsilon}$  antes de  $C_1$ . Além disso, já havíamos observado que  $(C_2 \cap \overline{E^*}) \cap l_{\alpha, \epsilon}^- \neq \emptyset$ . Note que a observação 3 equivale a mostrar que  $(C_1 \cap \overline{E^*}) \cap l_{\alpha, \epsilon}^- \neq \emptyset$ .

Suponha que  $(C_1 \cap \overline{E^*}) \cap l_{\alpha, \epsilon}^- = \emptyset$ , então  $C_1 \cap \overline{E^*}$  está acima da reta  $l_{\alpha, \epsilon}$ . A partir de certo ponto, a semirreta  $l'_b$  está contida em  $l_{\alpha, \epsilon}^- \cap E$  e, desse modo, tem-se que  $C_2$  está abaixo de  $l'_b$ . Repetindo o argumento da observação 2, podemos tomar uma semirreta  $l'$  paralela a  $l'_b$  e tão distante dela quanto se queira, de modo que  $l' \cap E$  admite uma componente conexa ilimitada, contradizendo o Lema 2.2. Logo, existe  $s > 0$  tal que  $\sigma = F([0, 1] \times \{s\}) \subset l_{\alpha, \epsilon}^+$ .

A existência das curvas  $\gamma$  e  $\sigma$  leva a uma contradição. De fato, a componente conexa  $C$  de  $E \cap l_{\alpha, \epsilon}^+$  contendo o arco transversal  $\gamma$  deve ser limitada, o que contradiz a Proposição 3.1, pois  $\overline{\partial C} \cap l_{\alpha, \epsilon}^+$  não pode ser um gráfico sobre  $\partial C \cap l_{\alpha, \epsilon}$ , visto que sua projeção não é injetiva. Portanto, o fim  $E$  permanece a uma distância limitada do eixo  $x$ .

**Afirmção. 2.** O fim  $E$  está a uma distância limitada de uma semirreta.

Sejam  $\gamma = \partial E \cap \partial \Omega$  e  $k = \underset{\max}{\text{dist}}(E, X)$ . Suponha que  $B \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -b\} = \emptyset$ , com  $b > 0$ , e a reta  $l_{-b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -b\}$  intercepta  $\Gamma$  transversalmente. Por isso, o conjunto  $E \cap l_{-b}$  consiste em uma união finita de arcos próprios mergulhados cujos extremos pertencem a  $\Gamma$ . Como  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}'}$  é uma subsequência em  $E$ , então os pontos  $p_i \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, |y| < k\}$ , para cada  $i \in \mathbb{N}'$ .

Portanto  $E \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -b\}$  é formado unicamente por componentes conexas limitadas e, pelo Lema 3.2, temos que  $\underset{\max}{\text{dist}}(\partial E, l_{-b}) \leq 3R_\lambda$ . Logo, podemos

concluir que o fim  $E \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -(b + 3R_\lambda), |y| < k\}$  e se encontra a uma distância limitada de alguma semirreta  $l$ .

□

**Proposição 3.3.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio  $f$ -extremal com topologia finita, onde  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Lipschitz e satisfaz a propriedade  $f(t) \geq \lambda t$ , para todo  $t > 0$  e para alguma constante  $\lambda > 0$ . Então  $\Omega$  possui pelo menos dois fins.*

*Demonstração.*

**Afirmção. 1.** *Não existe uma semi faixa  $S$  que contenha o domínio  $\Omega$ .*

De fato, suponha por absurdo que após um movimento rígido, tenhamos  $\Omega \subset S$ , onde  $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } |y| < A\}$  é uma semi faixa em  $\mathbb{R}^2$  com largura igual a  $2A$ , para alguma constante  $A > 0$ .

Sejam  $H_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = k\}$  uma reta que intersecta o domínio  $\Omega$  e  $H_k^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > k\}$ ,  $H_k^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < k\}$  as duas componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus H_k$ . Para qualquer  $k > 0$ , cada componente conexa  $C_k = \Omega \cap H_k^-$  é limitada. Assim, para qualquer raio  $R_\lambda > 0$  fixado, podemos escolher um  $k$  suficientemente grande de tal forma que  $\text{dist}(\partial C, H_k) > 3R_\lambda$ , o que contraria o Lema 3.2. Dessa forma, podemos concluir que  $\Omega \not\subset S$ .

**Afirmção. 2.**  *$\Omega$  possui pelo menos dois fins.*

Suponha, por absurdo, que  $\Omega$  possua somente um fim  $E$ . Logo, a região  $\Omega \setminus E$  é limitada e a Proposição 3.2 garante a existência de uma semifaixa  $S$  que contém o fim  $E$ . Assim, após um aumento do diâmetro e uma translação de  $S$ , concluímos que  $\Omega \subset S$ , o que contraria a Afirmção 1. Dessa forma,  $\Omega$  deve possuir pelo menos dois fins.

□

**Proposição 3.4.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio  $f$ -extremal com topologia finita, onde  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Lipschitz e satisfaz a propriedade  $f(t) \geq \lambda t$ , para todo  $t > 0$  e para alguma constante  $\lambda > 0$ . Se  $\Omega$  admite exatamente dois fins, então existe uma reta  $H$  tal que*

$$\text{dist}(\Omega, H) \leq K,$$

para algum  $K > 0$ . Em particular os fins de  $\Omega$  se encontram em lados opostos de cada reta  $T$  ortogonal à reta  $H$ .

*Demonstração.* Sejam  $E_1$  e  $E_2$  os dois fins do domínio  $\Omega$ . A Proposição 3.2 garante a existência de semirretas  $H_1$  e  $H_2$  em  $\mathbb{R}^2$  tais que  $\text{dist}(E_i, H_i) \leq k_i$ , com  $i \in \{1, 2\}$ . Como a região  $\Omega \setminus (E_1 \cup E_2)$  é limitada, então vamos formular duas considerações

acerca da posição relativa entre as retas  $H_1$  e  $H_2$ , extensões das semirretas homônimas anteriormente apresentadas, e mostrar que apenas a primeira possibilidade se verifica.

Caso 1:  $H_1 \parallel H_2$ .

De fato, se  $H_1$  é paralela a  $H_2$ , então existe uma reta  $H$ , paralela à ambas, tal que é possível traçar uma faixa que contenha  $\Omega$ . Por conseguinte, temos que

$$\text{dist}(\Omega, H) \leq K,$$

para algum  $K > 0$  e o resultado segue.

Caso 2:  $H_1 \not\parallel H_2$ .

Suponha por absurdo que as retas  $H_1$  e  $H_2$  não forem paralelas, então existe uma reta  $l$  tangente ao bordo  $\partial\Omega$  tal que  $\Omega$  se encontra em uma das componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus l$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$  e que  $\Omega \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ .

Dada a reta  $l_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = k, k > 0\}$ , seja  $\Omega_k^- = \Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < k\}$ . A Proposição 3.2 garante que, para cada  $k > 0$ , a região  $\Omega_k^-$  possui apenas componentes conexas limitadas. Como  $\text{dist}_{\max}(\partial\Omega_k^-, l) = k$ , então podemos escolher  $k > 3R_\lambda$ , para cada  $R > 0$  dado. Assim,

$$\text{dist}_{\max}(\partial\Omega_k^-, l) > 3R_\lambda,$$

o que contradiz o Lema 3.2. Dessa forma, as retas  $H_1$  e  $H_2$  são paralelas e recaímos no caso 1.

**Afirmção.**  $E_1$  e  $E_3$  se encontram em lados opostos com relação a qualquer reta ortogonal à reta  $H$ .

Com efeito, seja  $T$  uma reta ortogonal à reta  $H$  e suponha, por contradição, que os fins  $E_1$  e  $E_3$  se encontram do mesmo lado com relação à reta  $T$ . Por cada um dos fins estar contido em uma semi faixa e por ser  $\Omega \setminus (E_1 \cap E_2)$  limitado, então o domínio  $\Omega$  está contido em uma semi faixa, fato que contradiz a primeira afirmação demonstrada na Proposição 3.3. Como a reta  $T$  foi escolhida de forma arbitrária, garantimos que  $E_1$  e  $E_2$  se encontram em lados opostos com relação a qualquer reta ortogonal à reta  $H$ . □

Aplicando os resultados anteriormente estabelecidos em conjunto com alguns fatos de Análise complexa, conseguimos obter uma resposta parcial para a conjectura Berestycki–Caffarelli–Nirenberg em dimensão 2.

**Teorema 3.6** (Ros-Sicbaldi, [17], Corolário 2.4). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio  $f$ -extremal, onde  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Lipschitz que satisfaz  $f(t) \geq \lambda t$ , para cada  $t > 0$  e para algum  $\lambda > 0$ , de tal forma que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  seja conexo. Então  $\Omega$  é uma bola.*



*Demonstração.*

**Afirmção.**  $\Omega$  tem topologia de um disco e o seu bordo consiste de uma única curva plana.

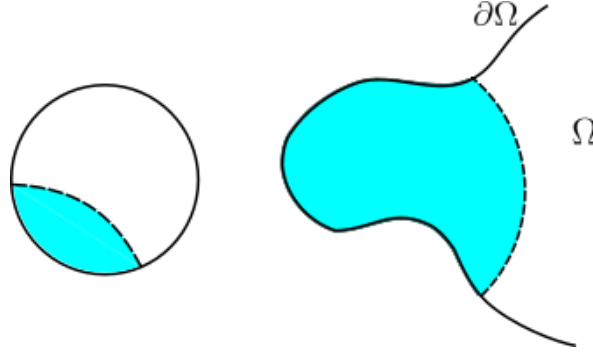
De fato, seja  $\Omega$  um domínio cujo complementar  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  é conexo, então a equivalência (iii) do Teorema 22 garante que  $\Omega$  é um domínio simplesmente conexo. Vamos admitir que  $\Omega \not\subseteq \mathbb{R}^2$ . O Teorema da Aplicação de Riemann 22 garante a existência de um difeomorfismo  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  tal que  $F(\Omega) = B_1(0)$ . Dessa forma, o bordo  $\partial\Omega$  consiste de uma única curva e divide o plano em duas em duas componentes conexas.

Seja  $B_R$  uma bola aberta de raio  $R$ , com  $R > 0$ . Se  $\partial\Omega$  for uma curva fechada, então  $\overline{\Omega} \setminus \overline{B_R^n} = \emptyset$  (e  $\overline{\Omega}$  é compacto) ou  $\overline{\Omega} \setminus \overline{B_R^n} = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \overline{B_R^n}$  (e  $\Omega$  é o complemento de uma região compacta). Se  $\partial\Omega$  não for fechado, considere o homeomorfismo  $F^{-1} : B_1(0) \rightarrow \Omega$ . Perceba que, para algum  $k > 0$ , temos que  $\overline{B_1(0)} \setminus B_k$  pode ser parametrizado por  $[0, 1] \times [0, \infty)$ . Dessa forma,

$$\overline{\Omega} \setminus B_R = F^{-1} \left( \overline{B_1(0)} \setminus B_k \right),$$

isto é,  $\overline{\Omega} \setminus B_R$  tem uma componente não compacta  $E$  difeomorfa a  $[0, 1] \times [0, \infty)$ .

Figura 3.12: Difeomorfismo entre  $\overline{\Omega} \setminus B_R$  e  $[0, 1] \times [0, \infty)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Dessa forma, o domínio  $\Omega$  possui topologia finita. Além disso,

- (i) ou  $\Omega$  é limitado,
- (ii) ou  $\Omega$  é o complementar de um domínio compacto,
- (iii) ou  $\Omega$  é um domínio com topologia própria finita possuindo fim único.

No caso (ii), podemos escolher  $R_\lambda > 0$  suficientemente grande de tal forma que  $B_{R_\lambda}(p) \subset \Omega$ , o que contradiz o Teorema 3.4. No caso (iii),  $\Omega$  tem fim único, o que contradiz o Teorema 3.3. Se ocorre (i), o Teorema 3.2 garante que o domínio  $\Omega = B_R(p)$ , como queríamos.  $\square$

## 4 LIMITAÇÃO PARA DOMÍNIOS $f$ -EXTREMAIS

Neste capítulo provamos algumas propriedades inerentes a domínios planares onde o Problema (3.6) pode ser resolvido, assumindo unicamente que a função  $f$  admita regularidade Lipschitz. Em toda essa seção, assumiremos que o domínio  $\Omega$  é de classe  $C^2$ .

No caso de  $\Omega$  ser um domínio não limitado cuja fronteira é um arco próprio  $\Gamma$ , considere  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  uma parametrização de  $\Gamma$  pelo comprimento de arco,  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$  seu vetor tangente e  $\eta = -\nu = (-y'(t), x'(t))$  o vetor normal apontando para dentro ao longo de  $\Gamma$ . Uma propriedade básica do domínio  $\Omega$  é a seguinte:

**Lema 4.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio  $f$ -extremal não limitado, onde  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Lipschitz. Então, para todo  $p \in \Gamma$ ,*

$$L^+(p) = \{p + s\eta(p) \mid s \geq 0\} \subset \Omega \cap \{p\}.$$

*Demonstração.* De fato, se  $0 < s \ll 1$ , então a propriedade é verificada. Suponha por absurdo que  $(L^+(p) \setminus \{p\}) \cap \Gamma \neq \emptyset$ , então a componente conexa  $C \subset \Omega$  delimitada pelas curvas  $\Gamma$  e  $L^+(p)$  é limitada e

$$\langle \gamma(p), \eta(p) \rangle = \langle (x'(p), y'(p)), (-y'(p), x'(p)) \rangle = 0.$$

Dessa forma,  $\Gamma$  e  $L^+(p)$  são ortogonais no ponto  $p$ , o que contradiz o Corolário 3.4. Assim, temos que  $L^+(p) \subset \Omega \cup \{p\}$ , para todo  $p \in \Gamma$ .

□

A fim de enunciar os próximos resultados sobre domínios  $f$ -extremais, vamos introduzir a noção de epigráfico.

**Definição 4.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio cujo bordo é formado por um único arco próprio  $\Gamma$ . Dizemos que o domínio  $\Omega$  é um **epigráfico** se, após uma mudança de coordenadas adequada,  $\Gamma$  é o gráfico de uma função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , ou seja,*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \varphi(x)\}.$$

O epigráfico  $\Omega$  é **coercitivo** se

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

e é **uniformemente Lipschitz** se a função  $\varphi$  for uniformemente Lipschitz. São exemplos de epigráficos uniformemente Lipschitz os cones e os semiplanos.

**Definição 4.2.** Um domínio  $\Omega$  é um **quase-epigráfico** se, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , o bordo  $\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid x'(t) \geq 0\}$  e  $\{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ .

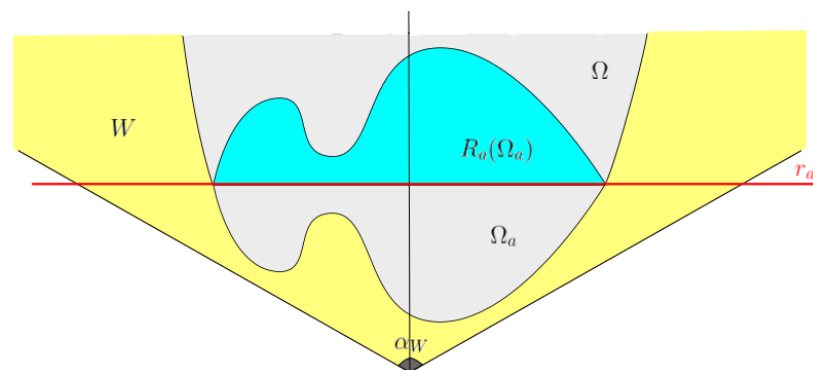
**Proposição 4.1.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio  $f$ -extremal não limitado, onde  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Lipschitz. Se  $\Omega$  estiver contido numa região cônica cujo ângulo é menor que  $\pi$  (sem restrição sobre a topologia do domínio), então ou  $\Omega$  é uma bola ou  $\Omega$  é um epigráfico uniformemente Lipschitz.

*Demonstração.* Seja  $W \subset \mathbb{R}^2$  a região cônica tal que o ângulo entre as suas semirretas seja  $\alpha_W < \pi$ . Após uma mudança de coordenadas adequada, podemos supor que a região cônica  $W \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  e é simétrico com relação ao eixo  $y$ . Defina a região

$$\Omega_a = \Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < a\},$$

o qual é limitada, para todo  $a > 0$ .

Figura 4.13: O domínio  $\Omega \subset W$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.

Sejam  $r_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a\}$  e  $R_a(C_a)$  a reflexão de  $\Omega_a$  com relação a reta  $r_a$ . Vamos aumentar o parâmetro  $a > 0$  até que uma das seguintes situações ocorra:

- (i)  $R_a(\Omega_a)$  tangencia internamente  $\partial\Omega$  em algum ponto  $q \in \partial\Omega \setminus r_a$ , ou
- (ii)  $r_a \perp \partial\Omega$ , para algum ponto  $q \in \partial\Omega$ , ou
- (iii)  $r_a \not\perp \partial\Omega$ .

Caso (i) ou (ii) ocorram, o Teorema 3.2 garante que  $\Omega = B_R(p)$ . Se ocorre (iii), então as afirmações seguintes são verdadeiras.

**Afirmação. 1.** *A curva  $\Gamma$  é um arco próprio cuja projeção  $\pi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por*

$$\pi(x, y) = (x, 0)$$

*é injetiva.*

De fato, se  $\pi$  não fosse injetiva, então existem  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  e  $x(t_1) = x(t_2) = x_0$ . Como a função  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^2$ , então o Teorema de Rolle garante que existe  $t_0 \in (t_1, t_2)$  tal que  $x'(t_0) = 0$ . Assim, no ponto

$$\begin{aligned} \langle r'_a(t_0), \gamma'(t_0) \rangle &= \langle (x'(s), 0), (x'(t_0), y'(t_0)) \rangle \\ &= \langle (x'(s), 0), (0, y'(t_0)) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

O que é um absurdo, pois  $\partial\Omega \not\subset r_a$ . Logo,  $\pi$  é injetiva.

**Afirmação. 2.** *Existe  $\epsilon > 0$  tal que, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x'(t) > \epsilon$ .*

Seja  $e_2 := (0, 1)$  e considere a aplicação ângulo

$$\begin{aligned} \Theta : \Gamma &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \langle \eta(p), e_2 \rangle = |\eta(p)| |e_2| \cos \theta, \end{aligned}$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\eta(p)$  e  $e_2$ .

Desde que  $L^+(p) \subset W$ , temos que, para todo  $p \in \Gamma$ ,

$$\theta \leq \frac{\alpha_W}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Como a função cosseno é decrescente no intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ , então

$$\Theta(p) = \cos(\theta) \geq \cos\left(\frac{\alpha_W}{2}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (4.1)$$

Por outro lado,  $\langle \eta(p), e_2 \rangle = x'(t)$ , para algum  $t \in \mathbb{R}$ . Segue de (4.1) que  $x'(t) > \epsilon$ , para algum  $\epsilon > 0$  e para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Afirmação. 3.**  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \varphi(x)\}$ , onde a função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é Lipschitz.

Considere a função coordenada  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Desde que  $x'(t) > 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , a função é crescente e, portanto, inversível. Podemos então reparametrizar a curva  $\Gamma$

por

$$\Gamma = \{(t, y \circ x^{-1}(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Note que a função  $\varphi = y \circ x^{-1} \in C^2$ . Além disso,

$$1 = \|\eta\| = \sqrt{(-y')^2 + (x')^2} \geq \sqrt{(y')^2} = \|y'\| \quad (4.2)$$

e, portanto,

$$\|\varphi'\| = \|y'(x^{-1})(x^{-1})'\| = \left\| \frac{y'}{x'} \right\| \leq \frac{\|y'\|}{\epsilon} \stackrel{4.2}{\leq} \frac{1}{\epsilon}, \quad (4.3)$$

para algum  $\epsilon > 0$  dado. Como  $\|\varphi'\|$  é limitada, então  $\varphi$  é Lipschitz e o domínio  $\Omega$  é um epigráfico Lipschitz.  $\square$

**Proposição 4.2.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio  $f$ -extremal não limitado, onde  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Lipschitz. Se  $\Omega$  estiver contido numa a região cônica de ângulo menor que  $\frac{\pi}{2}$  (sem restrição sobre a topologia do domínio), então  $\Omega$  é uma bola.*

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que o domínio  $\Omega$  seja não limitado. Após uma mudança de coordenadas adequada, podemos assumir que

$$\Omega \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < bx\},$$

para algum  $b > 0$ . Sejam  $\theta$  e  $\beta$  os ângulos que as semirretas  $L^+(p)$  e  $y = bx$  fazem com o eixo  $x$ . Considere também os vetores  $\eta_1 = (b, -1)$  e  $\gamma'(t) = ((x'(t), y'(t)))$  e os ângulos  $\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta$  e  $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ .

**Afirmção. 1.**  $\beta' \leq \theta'$

Por construção, temos que  $\theta \leq \beta$ . Então,

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{2} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{2} \sin \theta \\ &= \sin \theta \\ &\leq \sin \beta \\ &= \sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta' \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{2} \cos \beta' - \sin \beta' \cos \frac{\pi}{2} \\ &= \cos \beta'. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Como a função cosseno é decrescente no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , então  $\beta' \leq \theta'$  e, em

particular,  $y' \leq -1$ . Segue de (4.4) que

$$y'(t) \leq \frac{-1}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Logo, pelo Teorema do valor médio,

$$y(t) \leq y(0) - \frac{t}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Assim, quanto  $t \rightarrow \infty$ , então  $y(t) < 0$ , o que é um absurdo, pois  $\Omega \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ . Dessa forma, o domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é limitado e, pelo Teorema 3.2,  $\Omega = B_R(p)$ .  $\square$

Sejam  $\Gamma$  o gráfico de uma função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio tal que  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \varphi(x)\}$ . Desde que  $p = (x, \varphi(x))$ , podemos escrever a semirreta  $L^+(p)$  como  $L^+(p) = \{(x, \varphi(x)) + s(-\varphi'(x), 1) \mid s \geq 0\}$ . Vejamos alguns casos onde o domínio  $\Omega$  satisfaz as conclusões do Lema 4.1, isto é, para todo  $p \in \Gamma$ ,

$$L^+(p) \subset \Omega \cup \{p\}. \quad (4.5)$$

Caso 1:  $\varphi'(x) \geq 0$ .

Após uma reparametrização da função  $\varphi$ , temos que os pontos  $p_s \in L^+(p)$  são da forma

$$p_s = (t - s\varphi'(t), \varphi(t) + s).$$

Como  $\varphi'(t) \geq 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então a função é não decrescente, de onde

$$\varphi(t - s\varphi'(t)) \leq \varphi(t) \leq \varphi(t) + s,$$

de onde concluímos que  $p_s \in \Omega \cup \{p\}$ .

Caso 2:  $\varphi''(x) \leq 0$ .

Seja  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \varphi(x)\}$ . Fazendo  $\psi(x) = -\varphi(x)$ , temos

$$\mathbb{R}^2 \setminus \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \psi(x)\}$$

é um epigráfico tal que  $\psi''(x) = (-\varphi(x))'' = -\varphi''(x) \geq 0$ , de onde  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  é um conjunto convexo. Assim, como  $\psi$  é convexa e  $p_s \in L^+(p)$ , temos que

$$\begin{aligned} \psi(x - s\varphi'(x)) &\geq \psi(x) + \langle \nabla \psi, -s\varphi'(x) \rangle \\ &= \psi(x) + s\langle \nabla \varphi'(x), \varphi'(x) \rangle \\ &= \psi(x) + s\|\varphi'(x)\|^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Multiplicando a desigualdade (4.6) por -1, obtemos

$$\varphi(x - s\varphi'(x)) \leq \varphi(x) - s\|\varphi'(x)\|^2 \leq \varphi(x) + s$$

e  $p_s \in \Omega \cup \{p\}$ .

É importante ressaltar que, se  $\Omega$  for convexo, a inclusão (4.5) não é válida em geral. Entretanto, podemos verificar diretamente alguns casos onde  $\varphi'' \geq 0$ , tais como o domínio  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \sqrt{1+x^2}\}$ . Neste exemplo em particular, percebemos que não é possível melhorar a Proposição 4.2 incluindo o caso  $\alpha_W = \frac{\pi}{2}$ .

*Caso 3:*  $\|\varphi'\| \leq 1$ .

Seja  $p = (x_1, \varphi(x_1)) \in \Gamma$ . Suponha, por absurdo, que exista  $x_2 > x_1$  tal que o ponto  $q = (x_2, \varphi(x_2)) \in L^+(p) \cap \Gamma$ . Usando semelhança de triângulos e o Teorema Fundamental do Cálculo, encontramos

$$1 \leq \frac{-1}{\varphi'(x_1)} = \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \varphi' dx \leq 1. \quad (4.7)$$

Por um lado,  $\varphi'(x_1) = -1$ ; em contrapartida,  $\varphi'(x) = 1$ , para  $x_1 \leq x \leq x_2$ , o que é um absurdo. Por exemplo, a inclusão (4.5) é verificada para as funções

$$\varphi(x) = \sin x \text{ e } \varphi(x) = \frac{1}{4} \log(1+x^2) \sin(\log(1+x^2)).$$

A primeira função é periódica e a segunda é oscilante e fornece um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  que nem contém um semiplano nem está contido em um semiplano. Vamos agora utilizar o argumento dos planos móveis para provar a proposição seguinte.

**Proposição 4.3.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio  $f$ -extremal contido em um semiplano. Então ou  $\Omega$  é uma bola ou (após um movimento rígido) existe uma função positiva  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  de classe  $C^2$  tal que:*

(i) *ou o domínio  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \varphi(x)\}$ .*

(ii) *ou  $\varphi$  é limitada e  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < \varphi(x)\}$ , o qual é simétrico.*

*Demonstração.* Se  $\Omega$  é limitado então, pelo Teorema de Serrin 3.2,  $\Omega = B_R(p)$ . Suponha que  $\Omega$  é um subconjunto não limitado do semiplano  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ . Após uma translação adequada, podemos supor que  $\partial\Omega$  intercepta o eixo  $y$  transversalmente. Suponhamos que a interseção de  $\partial\Omega$  com o eixo  $y$  seja feita por mais de um ponto. Considere os conjuntos  $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$  e  $\Omega_2 = \Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ , os quais são não vazios. Se  $\Omega_1$  ou  $\Omega_2$  estão contidos em  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = c, y > 0\}$ , então segue da Proposição 4.1 que  $\Omega$  é um epigráfico com relação a uma das diagonais do plano.

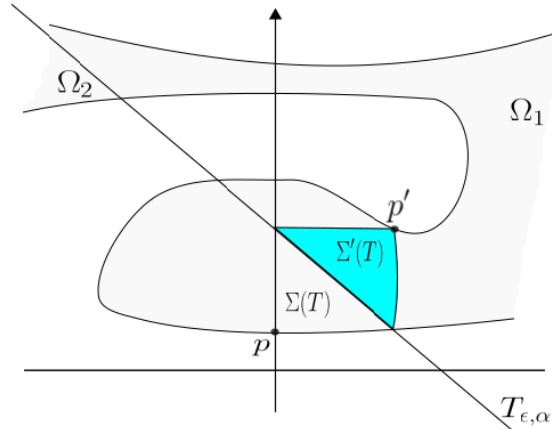
Vamos supor que  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são ilimitadas e que a projeção ortogonal de  $\partial\Omega$  sobre  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$  é sobrejetiva. Perceba que  $\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$  é uma união discreta de intervalos abertos no eixo  $y$ , sendo o menor desses intervalos limitado. Denote por  $p$  o ponto mais baixo na fronteira deste intervalo. Dados uma reta  $T$ , para qualquer  $x \in \mathbb{R}^2$  e qualquer  $X \subset \mathbb{R}^2$ , sejam  $x'$  a reflexão de  $x$  sobre  $T$  e  $X'$  a reflexão de  $X$  sobre  $T$ . Fixe  $\epsilon > 0$  e considere os conjuntos

$$T_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a\} \text{ e } T_{\epsilon, a} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \epsilon x + a\},$$

com  $a \in \mathbb{R}$ . Denote por  $T = T_{\epsilon, a}$ . Para  $a = 0$  a reta  $T$  não intercepta  $\Omega_1$ . Supomos que esta reta seja movida continua e paralelamente a si mesmo até tocar no ponto  $p$ . A partir desse momento, em cada etapa do movimento a reta resultante  $T$  cortará  $\Omega_1$  e definirá uma região limitada  $\Sigma(T) = \Omega_1 \cap T^-$ , onde  $T^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \epsilon x + a\}$ .

Como  $\Sigma(T)$  é limitada, segue da Proposição 3.1 que a imagem refletida em relação a  $T$  das componentes conexas de  $\Omega_1 \cap T^-$  estão contidos em  $\Omega$ , exceto possivelmente para a componente cujo bordo contém  $p$ . Vamos denotar esta componente por  $\Sigma'(T)$ .

Figura 4.14: Método dos planos móveis inclinados.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022.f

Sejam  $I = \partial\Sigma(T) \cap T$ ,  $J = \partial\Sigma(T) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ ,  $K = \partial\Sigma(T) \cap \partial\Omega$  e, respectivamente,  $\Sigma(T)'$ ,  $K'$  e  $J'$  suas reflexões em torno de  $T$ . Observe que  $p \in J \cap K$ . Defina a função  $u'_T : \overline{\Sigma(T)} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u'_T(x) = u(x')$ . No início, temos que  $\Sigma(T) \subset \Omega$  e  $u'_T \leq u$  em  $\Sigma(T)$ . Vamos continuar o processo enquanto isso acontece, e como o eixo  $y$  corta transversalmente  $\partial\Omega$  em pelo menos dois pontos, encontraremos um primeiro valor  $a = a(\epsilon) > 0$  para o qual um dos seguintes casos ocorrem:

- (i)  $K' \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ , com  $q \in \text{int}(K')$ ,
- (ii)  $K$  encontra  $T$  ortogonalmente,



(iii) em um ponto de  $\Sigma(T) \cup I$ , o gráfico da função resultante  $u'_T$  é tangente ao gráfico da função  $u$ ,

(iv)  $p' \in \partial\Omega$ ,

(v) quando restrito ao segmento  $J$ , o gráfico da função resultante  $u'_T$  é tangente em algum ponto interior ao gráfico da função  $u$ .

Pelo método de reflexão de Serrin, deduzimos que (i), (ii) e (iii) implicam que  $K \subset \partial\Omega$ . Portanto, ambos os eventos (iv) ou (v) também são verdadeiros. Concluimos que, de fato, o processo pode ser continuado até que o evento (iv) ou (v) ocorra para um primeiro valor  $a = a(\epsilon) > 0$ .

Agora tome uma sequência  $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$  com  $\epsilon_i > 0$  e  $\epsilon_i \rightarrow 0$  e repita o processo com  $\epsilon = \epsilon_i$ . A sequência  $a(\epsilon_i)$  é limitada, admitindo então uma subsequência convergindo para  $a$  de tal forma que existe uma reta horizontal  $T = T_a$ , com  $a > 0$ , tal que  $\Sigma(T) \subset \Omega$ ,  $u'_T \leq u$  em  $\Sigma(T)$  e um dos dois eventos (iv) ou (v) acima ocorre. Além disso, como  $\epsilon = 0$ , temos que  $J$  é um intervalo contido no fecho do menor intervalo de  $\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$  e o valor de  $a$  depende apenas de  $J$  e do comportamento de  $u$  restrito a  $\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ .

Vamos repetir o procedimento anterior para o fim  $\Omega_2$  com retas de inclinação positiva definidas por  $T_{\epsilon,a} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \epsilon x + a\}$ . Dessa forma, obtemos uma reta horizontal  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a\}$  tal que a imagem refletida de  $\Omega_2 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < a^*\}$  permanece em  $\Omega$ ,  $u'_T \leq u$  e um dos dois eventos (iv) ou (v) ocorre.

Segue que  $a = a^*$  e  $T = T^*$  são tais que a imagem refletida de  $\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < a\}$  com relação a  $T$  está contida em  $\Omega$ ,  $u'_T \leq u$  e uma das asserções (i), (ii) ou (iii) vale (em algum ponto do eixo  $y$ ). Do argumento de reflexão Serrin, obtemos que  $\Omega$  é simétrico com relação a  $T$ . Como  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são ilimitados, existe uma função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  de classe  $C^2$  tal que  $\varphi$  é limitada e, a menos de movimento rígido,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < \varphi(x)\}$ .

Agora vamos considerar o caso onde qualquer reta vertical toca  $\partial\Omega$  transversalmente em apenas um ponto. Dessa forma, o bordo  $\partial\Omega$  consiste em apenas um arco próprio  $\Gamma$ , o qual é projetado monotonicamente e sobrejetivamente sobre o eixo  $x$ . Se existe alguma função  $g$  tal que  $\text{graf}(g) = \Gamma$ , então  $\Omega$  é um epigráfico. Se existe  $b \in (0, \infty)$  tal que  $\Gamma$  é tangente a  $T_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = b\}$ , então repetimos o argumento da reflexão realizado na primeira parte da prova com as retas  $T = T_{\epsilon,a}$  e  $T^* = T_{\epsilon,a}^*$ , com  $a \leq b$ , e concluimos que  $\Omega$  é simétrico com respeito a  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a\}$ , o que é um absurdo, pois o bordo  $\Omega$  toca o eixo  $y$  apenas uma vez. Portanto,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \varphi(x)\}$ . □

---

**Proposição 4.4.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio  $f$ -extremal não limitado cujo bordo  $\partial\Omega$  é dado por um único arco próprio, então ou  $\Omega$  contém um semiplano ou  $\Omega$  é um quase epigráfico.*

*Demonstração.* Sejam  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização de  $\partial\Omega$  pelo comprimento de arco dada por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  e  $\eta(t) = -\nu(t) = (-y'(t), x'(t))$  o vetor normal unitário sobre  $\partial\Omega$  apontando para dentro da curva. Considere então a aplicação normal  $N : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por

$$p \mapsto \eta(p).$$

Perceba imagem normal  $N(\partial\Omega)$  está contida em um semicírculo e, após um movimento rígido, podemos supor que  $x' > 0$  (ver 3.4). Se a imagem  $\{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ , então  $\Omega$  é um quase epigráfico. Se  $\{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}$ , podemos supor que  $\{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  é limitada por uma constante  $a$  e, portanto, as curvas  $\partial\Omega$  e  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\}$  são disjuntas, donde  $\Omega$  está contido em um semiplano. Usando o item (i) da Proposição 4.3, temos que  $\Omega$  é um epigráfico.

Se existem  $p, q \in \partial\Omega$  tais que  $\eta(p) = -\eta(q)$ , então do Lema 4.1 temos que o domínio  $\Omega$  contém duas semirretas paralelas com orientação oposta, portanto,  $\Omega$  contém um semiplano.  $\square$

Em [8], Farina e Valdinoci provaram que se  $f$  é localmente Lipschitz,  $n = 2$  e  $\Omega$  é um epigráfico coercitivo uniformemente Lipschitz de classe  $C^3$ , então não existe nenhuma função  $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$  que é solução de (3.6).

**Proposição 4.5** (Farina-Valdinoci, [8], Teorema 1.6). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto com bordo de classe  $C^3$ ,  $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$  é uma solução para o sistema sobredeterminado (3.6) e  $f$  uma função localmente Lipschitz. Suponha que*

(i) *ou  $n = 2$*

(ii) *ou  $n = 3$  e  $f(r) \geq 0$  para qualquer  $r \geq 0$ .*

*Então,  $\Omega$  não pode ser um epigráfico coercitivo uniformemente Lipschitz.*

Ainda em [8], Farina e Valdinoci provaram que se  $f$  é uma função localmente Lipschitz,  $n = 2$  e  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  é uma solução de (3.6) crescente na segunda variável e com gradiente limitado, então  $\Omega$  é um semiplano.

**Proposição 4.6** (Farina-Valdinoci, [8], Teorema 1.2.). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio com bordo de classe  $C^3$  e  $f$  uma função localmente Lipschitz. Suponha que*

$u \in C^2(\overline{\Omega})$ , com  $|\nabla u| \in L^\infty(\Omega)$ , satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \partial_2 u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponha também que ou  $\Omega$  seja um semiplano ou que  $\partial_\nu u$  seja constante em  $\partial\Omega$ . Então,  $\Omega$  deve ser um semiplano e existe  $\omega \in \mathbb{S}^1$  e  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  de tal forma que  $\omega$  é normal a  $\partial\Omega$  e  $u(x) = u_0(\omega \cdot x)$ , para qualquer  $x \in \Omega$ .

Com estes teoremas, obtemos alguns corolários importantes que seguem das Proposições 4.1 e 4.3.

**Corolário 4.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio de classe  $C^3$  (com topologia arbitrária) e  $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$  uma solução do Problema (3.6). Se  $\Omega$  está contido em uma região cônica de ângulo menor que  $\pi$  e  $u$  é limitada, então  $\Omega$  é uma bola.*

*Demonstração.* Segue diretamente das Proposições 4.1 e 4.5. □

O próximo corolário fornece mais uma elegante resposta parcial para a Conjectura 3.1 no caso bidimensional, admitindo somente que  $|\nabla u|$  seja limitada e  $\Omega$  esteja contido em um semiplano.

**Corolário 4.2** (Ros-Sicbaldi, [17], Corolário 2.10). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio de classe  $C^3$  tal que  $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  seja conexo e  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  seja uma solução do Problema (3.6). Se  $\Omega$  está contido em um semiplano e  $|\nabla u|$  é limitado, então ou  $\Omega$  é uma bola e  $u$  é uma solução radial ou (após um movimento rígido)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  e  $u$  depende apenas da variável  $y$ .*

*Demonstração.* Perceba que estamos nas condições da Proposição 4.3. Dessa forma, ou  $\Omega = B_R(p)$  e  $u$  é radial ou existe uma função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  de classe  $C^2$  tal que:

- (i) ou o domínio  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \varphi(x)\}$
- (ii) ou  $\varphi$  é limitada e  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < \varphi(x)\}$ .

Queremos mostrar que vale o item (i) e  $\Omega$  é um epigráfico. De fato, na demonstração do caso (i) da Proposição 4.3 usamos o argumento dos planos móveis de uma forma inclinada e variamos  $\epsilon > 0$  de tal sorte que a reflexão da reta móvel possa ser aplicada para qualquer linha horizontal. Isso mostra que  $\Omega$  é um epigráfico coercitivo e a função  $u$  deve ser estritamente crescente na segunda variável (ver [6] e [3]). Como  $|\nabla u|$  é limitado, a Proposição 4.6 garante que  $\Omega$  é um semiplano e, a menos de movimento rígido,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$  e  $u$  depende somente da variável  $y$ . □

---

Cabe aqui uma breve explicação adicional do Corolário 4.2. Para um epigráfico  $\Omega$  existem duas situações geométricas onde a condição de que a função  $u$  é limitada implica em  $|\nabla u|$  é também limitado: o caso em que a curvatura de  $\partial\Omega$  é limitada e o caso em que  $\Omega$  é um epigráfico uniformemente Lipschitz.

No primeiro caso, assumindo que  $|\nabla u|$  é ilimitado, é possível escolher uma sequência  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de pontos em  $\Omega$  com  $|\nabla u(p_n)| \rightarrow \infty$  tal que as homotetias impelem a convergência  $p_n \rightarrow (0, 0)$  e, fazendo  $|\nabla u(p_n)| = 1$ , transformamos a função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  em uma sequência de funções  $v_n : D_n \rightarrow \mathbb{R}$  com  $|\nabla v_n(0)| = 1$  e gradiente uniformemente limitado em subconjuntos compactos. Passando a uma subsequência, obtemos no limite uma função não negativa limitada  $v$  definida em uma região  $D \subset \mathbb{R}^2$  sem bordo ou limitada por uma linha reta satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } D, \\ |\nabla v| = 1 & \text{em } 0 \in D, \\ v = 0 & \text{em } \partial D, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle = 0 & \text{sobre } \partial D. \end{cases}$$

O Teorema de Liouville 22 implica que  $D \neq \mathbb{R}^2$ . Então  $D$  é um semiplano e neste caso contradizemos o princípio de continuação única ao longo de  $\partial D$ . No caso em que  $\Omega$  é um epigráfico uniformemente Lipschitz e  $u$  é limitada, a limitação de  $|\nabla u|$  segue dos resultados da Seção 6.2 de [12].

## 5 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, investigamos propriedades geométricas de domínios bidimensionais, limitados ou não, que admitem uma solução para o Problema (1), encontrando uma resposta positiva para a conjectura BCN em dimensão 2, desde que assumamos algumas hipóteses acerca do crescimento da não linearidade ou sobre o domínio a ser estudado.

Provamos que, em dimensão  $n = 2$ , a conjectura de Berestycki-Caffarelli-Nirenberg é verdadeira quando existe uma constante positiva  $\lambda$  tal que  $f(t) \geq \lambda t$ , para todo  $t > 0$ , ou quando  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  está contido em um semiplano e  $|\nabla u|$  é limitado. Para tanto, utilizamos como ferramenta principal o princípio do máximo no formato do método dos planos móveis.

É interessante destacar que o trabalho realizado pode ser expandido quando consideramos ambientes ou operadores mais gerais. Dessa forma, consideramos que este texto poderá servir como suporte para estudantes e pesquisadores que queiram iniciar seus estudos sobre tal tema.

## REFERÊNCIAS

- [1] AFTALION, A.; BUSCA, J. *Symétrie radiale pour des problèmes elliptiques surdéterminés posés dans des domaines extérieurs*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., v. 324, n. 6, p. 633–638, 1997.
- [2] ALEXANDROV, A. D. *Uniqueness theorems for surfaces in the large*. V. Vestnik Leningrad. Univ., v. 13, n. 19, p. 5–8, 1958.
- [3] BERESTYCKI, H.; CAFFARELLI, L. A.; NIRENBERG, L. *Monotonicity for elliptic equations in unbounded Lipschitz domains*. Comm. Pure Appl. Math., v. 50, n. 11, p. 1089–1111, 1997.
- [4] CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag, 1973.
- [5] DEL PINO, M.; PACARD, F.; WEI, J. *Serrin's overdetermined problem and constant mean curvature surfaces*. Duke Mathematical Journal, v. 164, n. 14, p. 2643–2722, 2015.
- [6] ESTEBAN, M.; LIONS, P. *Existence and non-existence results for semilinear elliptic problems in unbounded domains*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 93(1-2), p. 1-14, 1982.
- [7] EVANS, L. C. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [8] FARINA, A., VALDINOCI, E. *Flattening Results for Elliptic PDEs in Unbounded Domains with Applications to Overdetermined Problems*. Arch. Ration. Mech. Anal., v. 195, n. 3, p. 1025–1058, 2010.
- [9] FREHSE, J. *On Signorini's problem and variational problems with thin obstacles*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Série 4, Tome 4, n. 2, p. 343–362, 1977.
- [10] GARABEDIAN, P. R.; SCHIFFER, M.; *Variational problems in the theory of elliptic partial equations*. J. Rational Mech. Anal., v. 2, p. 137–171, 1953.

## REFERÊNCIAS

---

- [11] GIDAS, B.; NI, W. M.; NIRENBERG, L. *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Communications in Mathematical Physics, v. 68, n. 3, p. 209-243, 1979.
- [12] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*. 2 ed. Springer-Verlag, 1983.
- [13] LIMA, E. L. *Curso de análise vol. 2*. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [14] MEEKS III, W. H. *The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature*. J. Differential Geom., v. 27, n. 3, p. 539–552, 1988.
- [15] PUCCI, P; SERRIN, J. *The maximum principle*. Springer Science Business Media, 2007.
- [16] REICHEL, W. *Radial symmetry for elliptic boundary-value problems on exterior domains*. Arch. Rational Mech. Anal., v. 137, n. 4, p. 381–394, 1997.
- [17] ROS, A.; SICBALDI, P. *Geometry and topology of some overdetermined elliptic problems*. J. Differential Equations, v. 255, n. 5, p. 951–977, 2013.
- [18] ROS, A.; RUIZ, D.; SICBALDI, P. *Solutions to overdetermined elliptic problems in nontrivial exterior domains*. J. Eur. Math. Soc. v.22, n. 1, p.253–281, 2020.
- [19] SCHLENK, F. SICBALDI, P. *Bifurcation extremal domains for the first eigenvalue of the laplacian*. Adv. Mat, v. 229, p. 602-632, 2012.
- [20] SERRIN, J. *A symmetry problem in potential theory*. Arch. Rational Mech. Anal., v. 43, p. 304–318, 1971.
- [21] SICBALDI, P. *New extremal domains for the first eigenvalue of the Laplacian in flat tori*. Calc. Var. Partial Differential Equations, v. 37, n. 3-4, p. 329–344, 2010.
- [22] SOKOLNIKOFF, I. S.; SPECHT, R. D. *Mathematical theory of elasticity*. Vol. 83. New York: McGraw-Hill, 1956.

## APÊNDICE A - RESULTADOS DE CÁLCULO

Este apêndice tem por objetivo fornecer uma revisão acerca de alguns fatos de Cálculo que utilizamos ao longo desse trabalho. Para tanto, foram consultados os Apêndices C.1 e C.2 de [7].

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado, com  $\partial\Omega \in C^1$ ,  $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$  o vetor unitário normal exterior no ponto  $x \in \partial\Omega$  e  $\nu^i = \langle \nu, e_i \rangle$ .

**Teorema A.1.** *(Integração por partes)* Sejam  $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ . Então

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v dx = - \int_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu^i dS, \quad (5.1)$$

onde  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Teorema A.2.** *(de Gauss-Green)* Suponha que  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ . Então

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \nu^i dS, \quad (5.2)$$

onde  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Teorema A.3.** *(da Divergência)* Seja  $u = (u_1, \dots, u_n) \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$  um vetor definido em  $\Omega$ . Então

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u dx = \int_{\partial\Omega} \langle u, \nu \rangle dS, \quad (5.3)$$

onde  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Teorema A.4.** *(Fórmulas de Green)* Sejam  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ . Então

(i)

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

(ii)

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS.$$



(iii)

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

## APÊNDICE B - RESULTADOS DE ANÁLISE COMPLEXA

Estabeleceremos uma revisão acerca de alguns fatos de Análise complexa que utilizamos na demonstração do Teorema 3.6. Para tanto, utilizamos [4] como referência para esta seção.

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e conexo. Dizemos que  $\Omega$  é **simplesmente conexo** se, e somente se, toda curva retificável fechada em  $\Omega$  é homotópica a zero. Vamos mostrar algumas definições equivalentes à noção de conjunto simplesmente conexo.

**Teorema B.1.** ([4], Teorema 3.2) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  um subconjunto aberto e conexo. Então os seguintes são equivalente:*

- (i)  $\Omega$  é simplesmente conexo.
- (ii)  $n(\gamma; z_0) = 0$  para cada curva retificável fechada  $\gamma$  em  $\Omega$  e cada ponto em  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ .
- (iii)  $C_\infty \setminus \Omega$  é conexo.
- (iv) Para qualquer  $f \in H(\Omega)$ , onde  $H(\Omega)$  é o conjunto das funções analíticas definidas em  $\Omega$ , existe uma sequência de polinômios que converge à  $f$  em  $H(\Omega)$ .
- (v) Para qualquer  $f \in H(\Omega)$  e qualquer curva retificável fechada  $\gamma \subset \Omega$ , temos  $\int_\gamma f = 0$ .
- (vi) Toda função  $f \in H(\Omega)$  tem uma primitiva.
- (vii) Para qualquer  $f \in H(\Omega)$  tal que  $f(z) \neq 0$ , para todo  $z \in \Omega$ , existe uma função  $g \in H(\Omega)$  tal que  $f(z) = \exp g(z)$ .
- (viii) Para qualquer  $f \in H(\Omega)$  tal que  $f(z) \neq 0$ , para todo  $z \in \Omega$ , existe uma função  $g \in H(\Omega)$  tal que  $f(z) = [g(z)]^2$ .
- (ix)  $\Omega$  é homeomorfo ao disco unitário.
- (x) Se  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é harmônica, então existe uma função harmônica  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = u + iv$  é analítica em  $\Omega$ .

## REFERÊNCIAS

---

*Demonstração.* Ver [4], página 204. □

**Teorema B.2** (Teorema da Aplicação de Riemann). *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{C}$  uma região própria e simplesmente conexa e  $z_0 \in \Omega$ . Então existe uma única função analítica  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que*

(i)  $f(z_0) = 0$  e  $f'(z_0) > 0$ .

(ii)  $f$  é injetiva.

(iii)  $f(\Omega) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ .

*Demonstração.* Ver [4], página 156. □

**Teorema B.3** (Liouville). *Se  $(X, \phi)$  é uma variedade analítica compacta, então não existe nenhuma função analítica não constante de  $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ .*

*Demonstração.* Ver [4], página 240. □