

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
CAMPUS A. C. SIMÕES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Antonio Evandro dos Santos

**Estudo do Fenômeno de Espalhamento Acústico por meio do Método de  
Elementos Finitos FEM**

Maceió/AL

2023



ESTUDO DO FENÔMENO DE ESPALHAMENTO ACÚSTICO POR MEIO DO MÉTODO DE  
ELEMENTOS FINITOS FEM

Antonio Evandro dos Santos

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física (PPGF), da Universidade Federal de Alagoas, como requisito necessário para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Pereira Leão Neto.

Maceió/AL

2023

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
Bibliotecária: Girlaine da Silva Santos – CRB-4 – 1127

S237e Santos, Antonio Evandro dos.

Estudo do Fenômeno de Espalhamento Acústico por meio do Método de Elementos Finitos FEM / Antonio Evandro dos Santos. – 2023.  
88 f. : il.

Orientador: José Pereira Leão Neto.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas.  
Instituto de Física. Programa de Pós-Graduação em Física. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 75-79.

Apêndices: f. 80- 88.

1. Acustofluídica. 2. Espalhamento de Rayleigh. 3. Método de elementos finitos. 4. Ondas acústica. I. Título.

CDU: 531.742



**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**“Estudo do Fenômeno de Espalhamento Acústico por meio do  
Método de Elementos Finitos FEM”**

**por**

**Antonio Evandro dos Santos**

A Banca Examinadora composta pelos professores José Pereira Leão Neto, como presidente da banca examinadora e orientador, do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas; José Henrique Araújo Lopes de Andrade, do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas; e Alex Emanuel Barros Costa, do Instituto Federal de Alagoas, consideram o **candidato aprovado com conceito “B”**.

Maceió, 6 de setembro de 2023.

Documento assinado digitalmente  
 JOSE PEREIRA LEO NETO  
Data: 06/09/2023 11:27:10-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Pereira Leão Neto

Documento assinado digitalmente  
 JOSE HENRIQUE ARAUJO LOPES DE ANDRADE  
Data: 06/09/2023 15:51:28-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Henrique Araújo Lopes de Andrade

Documento assinado digitalmente  
 ALEX EMANUEL BARROS COSTA  
Data: 06/09/2023 11:37:32-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Alex Emanuel Barros Costa

**Antonio Evandro dos Santos**

**Estudo do Fenômeno de Espalhamento Acústico por meio do Método de Elementos Finitos FEM**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. José Pereira Leão Neto,  
Universidade Federal de Alagoas

Prof. Dr. José Henrique Araújo Lopes de Andrade,  
Universidade Federal de Alagoas

Prof. Dr. Alex Emanuel Barros Costa,  
Instituto Federal de Alagoas IFAL

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de **Mestre em Física**.

---

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

---

Prof. Dr. José Pereira Leão Neto,  
Orientador

Maceió, 2023.

"Eu tenho asas, vou pular mãe.  
Talvez eu decole, levo um mundo nos ombros,  
mas a senhora já me pegou no colo..."

Mãe: ★ 12/02/1966  
† 11/07/2021.

Foi por você, obrigado!

# Agradecimentos

Primeiramente, expresso minha profunda gratidão a Deus, por sua presença constante em minha vida e por me conceder a força e a inspiração necessárias para enfrentar os desafios desta jornada acadêmica.

À minha família e aos meus queridos pais, meu eterno agradecimento. Vocês foram meu alicerce, meus maiores incentivadores e sempre acreditaram em meu potencial. Sem o apoio incondicional de vocês, essa conquista não seria possível.

Ao meu orientador, sou grato por sua orientação fundamental no desenvolvimento desta dissertação. Serei eternamente grato por seu papel crucial em minha formação acadêmica.

Aos meus orientadores da graduação Profs. Samuel Bezerra, Lucíolo Victor e Amâncio da Cruz, por suas orientações sábias e encorajadoras, aprendi muito com suas experiências e conhecimentos, e serei eternamente grato pelo papel crucial que tiveram em minha formação acadêmica. Meus sinceros agradecimentos a todos os professores da coordenação de Física do Instituto Federal de Educação do Sertão Pernambucano (IF SERTÃO PE) onde fiz minha graduação, sem vocês isso não seria possível.

Aos colegas do grupo GAF (Grupo de Física Acústica), por suas contribuições para esse trabalho, Alisson Marques e Everton Lima.

À Universidade Federal de Alagoas (UFAL), meu reconhecimento pelo ambiente acadêmico propício ao aprendizado e ao desenvolvimento de pesquisas. As oportunidades e recursos disponibilizados pela UFAL foram essenciais para o desenvolvimento desta dissertação.

Por fim, meu agradecimento à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro concedido, por meio do fomento à pesquisa. Esse suporte foi fundamental para que eu pudesse me dedicar integralmente aos estudos e à pesquisa, possibilitando a realização deste trabalho.

A todos os que direta ou indiretamente contribuíram para a concretização deste sonho, meus sinceros agradecimentos por fazerem parte desta importante conquista em minha vida acadêmica. Obrigado!

Ora, a realidade é constituída por essências e existências particulares e, portanto, o conhecimento verdadeiro tem que ser um conhecimento que preserve o particular sem destruí-lo numa nomenclatura abstrata.

Baruch de Espinosa

# Resumo

A propagação de ondas acústicas em partículas é um fenômeno complexo que envolve a interação Onda-Partícula, resultando em reflexão, transmissão e espalhamento da energia acústica. O estudo do espalhamento acústico envolve a análise das soluções da equação de Helmholtz, considerando condições de contorno e a expansão em ondas parciais, essa análise nos permite compreender como partículas interagem com ondas acústicas e contribuem para a propagação e espalhamento da energia acústica. A maioria das análises teóricas sobre espalhamento e força de radiação acústica  $F_{rad}$  (força estacionária causada pela mudança linear do fluxo de momento durante o espalhamento de uma onda acústica por uma partícula) em fluidos assume que as partículas têm forma esférica, mas, essa simplificação não representa todas as situações da realidade. A forma esférica é considerada uma forma geométrica idealizada, onde a partícula é simétrica em todas as direções, essa suposição simplifica o problema ao permitir que equações matemáticas mais simples sejam aplicadas para descrever o comportamento da partícula em resposta à radiação acústica. Ao considerar partículas com formas não esféricas, as técnicas analíticas exatas podem se tornar impraticáveis. Nesses casos, são necessárias abordagens numéricas mais sofisticadas, como métodos de elementos finitos, métodos de diferenças finitas ou métodos de elementos de contorno, para resolver o problema de espalhamento e obter resultados precisos e realistas. Aqui, uma abordagem semianalítica é introduzida para lidar com partículas axissimétricas de subcomprimento de onda (limite de espalhamento de Rayleigh) imersas em um fluido ideal isotrópico. Os coeficientes de espalhamento que refletem os modos monopolo e dipolo são determinados por meio da resolução numérica do problema de espalhamento. Nosso método é comparado com o resultado exato para uma esfera rígida de subcomprimento de onda em água, uma esfera fluida e um sólido viscoelástico, além disso estendemos nossa análise para um esferoide, geometria que se aproxima da esfera, porém envolve complicações analíticas que tornam as soluções exatas mais complicadas. Esses estudos são fundamentais para diversas aplicações Biomédicas, que usam técnicas como aprisionamento de partículas, levitação e pinças acústica, entre outras. Técnicas para imobilizar partículas e células em sistemas microfluídicos são muitas vezes necessários no conceito da tecnologia de laboratório dentro de um chip (Lab-On-Chip) onde é comum partículas com dimensões muito menores do que o comprimento de onda acústica, conhecido como regime de espalhamento Rayleigh, encontrado em dispositivos de Acustofluídica.

**Palavras-chave:** Acustofluídica, Espalhamento de Rayleigh, Método de elementos finitos.

# Abstract

The propagation of acoustic waves in particles is a complex phenomenon that involves the interaction between waves and particles, resulting in the reflection, transmission, and scattering of acoustic energy. The study of acoustic scattering involves analyzing the solutions of the Helmholtz equation, considering boundary conditions and the expansion into partial waves. This analysis allows us to understand how particles interact with acoustic waves and contribute to the propagation and scattering of acoustic energy. Most theoretical analyses on scattering and acoustic radiation force  $F_{rad}$  (the stationary force caused by the linear change of momentum flux during the scattering of an acoustic wave by a particle) in fluids assume that particles have a spherical shape, but this simplification does not represent all real-world situations. The spherical shape is considered an idealized geometric form, where the particle is symmetrical in all directions. This assumption simplifies the problem by allowing simpler mathematical equations to describe the particle's behavior in response to acoustic radiation. However, when considering particles with non-spherical shapes, exact analytical techniques can become impractical. In such cases, more sophisticated numerical approaches are required, such as finite element methods, finite difference methods, or boundary element methods, to solve the scattering problem and obtain precise and realistic results. Here, we introduce a semi-analytical approach to deal with axially symmetric particles of sub-wavelength size (Rayleigh scattering limit) immersed in an ideal isotropic fluid. The scattering coefficients that reflect the monopole and dipole modes are determined through the numerical resolution of the scattering problem. Our method is compared with the exact result for a rigid sub-wavelength sphere in water, a fluid sphere, and a viscoelastic solid. Additionally, we extend our analysis to an spheroid, a geometry that approximates a sphere but involves analytical complications that make exact solutions more challenging. These studies are fundamental for various biomedical applications, which utilize techniques such as particle trapping, levitation, and acoustic tweezers, among others. Techniques for immobilizing particles and cells in microfluidic systems are often necessary in the concept of Lab-On-Chip technology, where particles with dimensions much smaller than the acoustic wavelength are common, known as the Rayleigh scattering regime, found in Acoustofluidic devices.

**Keywords:** Acoustofluidics, Rayleigh Scattering, Finite Element Method.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Sistema de Levitação Acústica . . . . .	8
Figura 2 – Volume de Controle. . . . .	11
Figura 3 – Onda plana incidente sobre uma partícula fluida. . . . .	24
Figura 4 – Representação esquemática, uma onda plana incide sobre uma esfera sólida viscoelástica. . . . .	30
Figura 5 – Onda incidente sobre uma partícula esferoidal rígida. . . . .	38
Figura 6 – Onda incidente sobre uma partícula esférica, os círculos concêntricos pontilhados e as setas pretas mostram a direção da onda espalhada. . . . .	42
Figura 7 – Estrutura do software COMSOL Multiphysics <sup>®</sup> , Graphical User Interface (GUI). . . . .	47
Figura 8 – Geometria do problema de espalhamento em uma esfera. . . . .	48
Figura 9 – Geometria do problema de espalhamento em um esferoide. . . . .	49
Figura 10 – Perfectly Matched layer PML. . . . .	53
Figura 11 – Gráfico da convergência de malha para partícula esférica, com $n = 10$ fixo e $n_2$ variável. As curvas mostram o erro em relação ao resultado analítico dos coeficientes de espalhamento obtidos numericamente. A malha converge a medida que $n_2$ se aproxima de 200. . . . .	54
Figura 12 – Gráfico da convergência de malha em relação aos coeficientes de espalhamento para partícula esférica, com $n_2 = 200$ fixo e $n$ variável. . . . .	54
Figura 13 – Gráfico da convergência de malha em relação aos coeficientes de espalhamento para partícula esferoidal rígida, para uma frequência fixa de 2 MHz, com $n_2$ variável. A malha converge conforme $n_2$ se aproxima de 200. . . . .	55
Figura 14 – Gráfico da convergência de malha em relação aos coeficientes de espalhamento para partícula esferoidal rígida, para uma frequência fixa de 12 MHz, com $n_2$ variável. . . . .	56
Figura 15 – Regiões de transição de malha. . . . .	57
Figura 16 – Espalhamento de onda plana por uma partícula esférica rígida (mostrada em branco) em água. A onda plana viaja em a direção vertical ao longo do eixo $z$ . A imagem de fundo corresponde para a parte real da onda espalhada computada, a pressão positiva e negativa correspondem a regiões azul e amarelo-a-vermelho, respectivamente. . . . .	61
Figura 17 – Coeficientes de espalhamento de uma partícula esférica rígida. As linhas sólidas representam a solução exata (Wolfram Mathematica), os pontos são a solução numérica (Comsol Multiphysics). . . . .	62

Figura 18 – Distribuição de pressão da onda plana por uma partícula esférica fluida. A onda plana viaja em a direção vertical ao longo do eixo z. A imagem de fundo corresponde para a parte real da onda espalhada computada, a pressão positiva e negativa correspondem a regiões azul e amarelo-a-vermelho, respectivamente. . . . .	64
Figura 19 – Coeficientes de espalhamento de uma partícula esférica fluida. As linhas sólidas representam a solução exata (Wolfram Mathematica), os pontos são a solução numérica (Comsol Multiphysics). . . . .	65
Figura 20 – Espalhamento de onda plana por uma partícula esférica de material sólido viscoelástico (mostrada em branco) em água. A onda plana viaja em a direção vertical ao longo do eixo z. A imagem de fundo corresponde para a parte real da onda espalhada, a pressão positiva e negativa correspondem a regiões azul e amarelo-a-vermelho, respectivamente. . . . .	68
Figura 21 – Coeficientes de espalhamento de uma partícula esférica feita de material sólido viscoelástico, as linhas sólidas representam a solução exata (Wolfram Mathematica), os pontos são a solução numérica (Comsol Multiphysics). . . . .	69
Figura 22 – Espalhamento de uma onda plana por um esferoide (Comsol Multiphysics). A onda plana viaja em a direção vertical ao longo do eixo z. A imagem de fundo corresponde para a parte real da onda espalhada computada, a pressão positiva e negativa correspondem a regiões azul e amarelo-a-vermelho, respectivamente. . . . .	71
Figura 23 – Coeficientes de espalhamento de uma partícula esferoidal rígida. Os pontos são a solução numérica (Comsol Multiphysics). . . . .	72

# Lista de tabelas

Tabela 2 – Coeficientes de espalhamento dados na Eq.(3.61). . . . .	37
Tabela 3 – Parâmetros da simulação. . . . .	50
Tabela 4 – Parâmetros geométricos e físicos usados na simulação do problema de espalhamento por uma esfera rígida imersa em um fluido ideal. . . . .	60
Tabela 5 – Parâmetros geométricos e físicos usados na simulação do problema de espalhamento por uma esfera fluida. . . . .	63
Tabela 6 – Parâmetros geométricos e físicos usados na simulação do problema de espalhamento por um sólido viscoelástico. . . . .	67
Tabela 7 – Parâmetros geométricos e físicos usados na simulações do problema de espalhamento por um esferoide. . . . .	70

# Lista de abreviaturas e siglas

UFAL: Universidade Federal de Alagoas.

GAF: Grupo de Física Acústica.

PPGF: Programa de Pós Graduação em Física.

CAPES: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

IF: Instituto de Física.

FEM: Método de Elementos Finitos.

Lab-on-Chip: Laboratório no chip.

PML: Perfectly Matched Layer.

GUI: Graphical User Interface.

CTCs: Células Tumerais Circulantes.

NASA: Administração Nacional do Espaço e da Aeronáutica.

ESA: Escola de Sargentos das Armas.

FIG: Figura.

EQs: Equações.

EDPs: Equações Diferenciais Parciais.

SEC: Seção.

Tab: Tabela.

RAM: Memória de Acesso Aleatório.

CPU: Central Processing Unit.

# Lista de símbolos

Símbolo	Nome	Unidade (S.I)
$F_{rad}$	Força de radiação acústica	N
$T$	Período	$s$
$r$	Vetor posição	$m$
$\rho$	Densidade	$kg/m^3$
$v$	Velocidade	$m/s$
$m$	Massa	$kg$
$\nabla$	Operador gradiente	$m^{-1}$
$\nabla \cdot$	Operador divergente	$m^{-1}$
$\nabla \times$	Operador rotacional	$m^{-1}$
$\nabla^2$	Operador laplaciano	$m^{-2}$
$p$	Pressão acústica	Pa
$I$	Tensor unitário	
$c_0$	Velocidade do som no fluido ideal	$m/s$
$k$	Número de onda	$m^{-1}$
$\lambda$	Comprimento de onda	$m$
$f$	Frequência	$1/s$
$a$	Raio da partícula	$m$
$\beta$	Compressibilidade do meio	$Pa^{-1}$
$\epsilon$	Parâmetro de escala em relação a partícula	
Hz	Hertz	
$\mu m$	Micrômetro	
cm	Centímetro	
mm	Milímetro	
KHz	Quilohertz	
MHz	Megahertz	
$\Omega$	Volume	$m^3$
t	Tempo	s
$\partial\Omega$	Superfície de volume	
$d\partial\Omega, d\Omega$	Elementos de integração de área e volume	
$B(x)$	Campo vetorial	
F	Força	N
u	Energia interna	U/m
s	Entropia	S/m
$\zeta$	Tensor de tensões	

$\mathcal{M}$	Número de Mach	
$\psi(\mathbf{r}, t)$	Função potencial	
$\omega$	Frequência angular	Hz
$k$	Número de onda	
$\phi(r)$	Fasor	
$(r, \theta, \varphi)$	Coordenadas esféricas	
$(x, y, z)$	Coordenadas cartesianas	
$R(r), \Theta(\theta), \Phi(\varphi)$	Funções arbitrárias	
$\in \mathbb{R}$	Pertence aos reais	
$\in \mathbb{Z}$	Pertence aos inteiros	
$P_l^m(\cos \theta)$	Funções associadas de Legendre	
$Y_l^m(\cos \theta, \varphi)$	Harmônicos esféricos	
$j_l(kr)$	Função de Bessel esférica de ordem $l$ ,	
$y_l(kr)$	Função de Neumann esférica de ordem $l$	
$R_1$ e $R_2$	Constantes	
$h_l(kr)$	Função de Hankel de ordem $l$	
$\phi_{in}$	Onda incidente	
$\phi_1$	Onda transmitida	
$\phi_{sc}$	Onda espalhada	
$a_{lm}$	Coefficiente de forma do feixe	
$b_{lm}$	Coefficiente de transmissão	
$s_{lm}$	Coefficiente de espalhamento	
$Y_t^{S*}$	Complexo conjugado harmônicos esféricos	
$\omega_r$	Deslocamento radial	
$\sigma_{rr}$	Componente radial de tensões	
$\sigma_{r\theta}$ e $\sigma_{r\varphi}$	Componentes tangenciais de tensões	
$\phi_\nu, \psi_{s,1}$ e $\psi_{s,2}$	Potenciais escalares de Debye	
$\alpha e \alpha^{-1}$	Matriz e Matriz inversa	
$s_{00}$	Coefficiente aprox. monopolo	
$s_{10}$	Coefficiente aprox. dipolo	
$f_0, f_1, g_0, g_1$	Coefficientes complexos	
$d$	Distância interfocal	
$\xi, \eta$	Coordenada esferoidais	
$S_{lm}$	Função angular	
$R_{lm}^{(1)}$ e $R_{lm}^{(3)}$	Funções radiais	
$\phi_\xi(\xi_0)$	Velocidade na superfície da partícula	
$f_{00}, f_{10}, f_{11}$	Fatores de espalhamento	
$k\xi \gg 1$	Aproximação de campo distante	
$P_l^m$	Polinômio de Legendre	

---

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Som</b>	<b>1</b>
1.1.1	Acústica e Acustofluídica	2
<b>1.2</b>	<b>Revisão da Literatura</b>	<b>4</b>
<b>1.3</b>	<b>Aplicações</b>	<b>6</b>
1.3.1	Pinças Acústicas	6
1.3.2	Levitação Acústica	6
1.3.3	Acustofluídica	8
1.3.4	Motivação	9
<b>2</b>	<b>FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA PROPAGAÇÃO DE ONDAS ACÚSTICAS EM MEIOS FLUIDOS</b>	<b>10</b>
<b>2.1</b>	<b>Ondas acústicas</b>	<b>10</b>
<b>2.2</b>	<b>Conservação de massa</b>	<b>10</b>
<b>2.3</b>	<b>Conservação de Energia</b>	<b>14</b>
2.3.1	Pressão e Densidade	14
<b>2.4</b>	<b>Conservação de Momento</b>	<b>16</b>
<b>2.5</b>	<b>Equação de Onda</b>	<b>17</b>
<b>2.6</b>	<b>Equação de Helmholtz</b>	<b>20</b>
<b>3</b>	<b>TEORIA DE ESPALHAMENTO ACÚSTICO</b>	<b>22</b>
<b>3.1</b>	<b>Descrição do Fenômeno de Espalhamento</b>	<b>22</b>
<b>3.2</b>	<b>Partícula com Geometria Esférica</b>	<b>23</b>
3.2.1	Partícula fluida	23
3.2.1.1	Coeficientes de espalhamento	25
3.2.2	Partícula Rígida	28
3.2.3	Sólido Viscoelástico	29
<b>3.3</b>	<b>Partícula com Geometria Esferoidal</b>	<b>37</b>
3.3.1	Teoria de Espalhamento Acústico para o Esferoide Rígido	38
<b>3.4</b>	<b>Método Semianalítico</b>	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>MODELO NÚMÉRICO</b>	<b>45</b>
<b>4.1</b>	<b>Software de simulação Comsol Multiphysics</b>	<b>46</b>
<b>4.2</b>	<b>Geometria e Parâmetros das Simulações</b>	<b>47</b>
4.2.1	Geometria	47
4.2.2	Parâmetros da Simulação	49

4.2.3	Pressão Acústica . . . . .	50
4.2.4	Mecânica dos Sólidos . . . . .	51
4.2.5	Interface de Acoplamento das Físicas . . . . .	52
4.2.6	Camada absorvedora PML . . . . .	52
4.2.7	Discretização (Mesh) . . . . .	53
4.2.8	Pós-processamento (study) e Carga computacional . . . . .	57
4.2.8.1	Carga Computacional . . . . .	57
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>5.1</b>	<b>Validação do Modelo . . . . .</b>	<b>58</b>
5.1.1	Partícula Rígida . . . . .	59
5.1.2	Partícula Fluida (Óleo de Oliva) . . . . .	63
5.1.3	Sólido Viscoelástico . . . . .	66
5.1.4	Partícula esferoidal . . . . .	70
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>6.1</b>	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>73</b>
6.1.1	Perspectivas . . . . .	74
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>75</b>
	<b>Apêndice 1 - Fórmulas de recorrência e assintóticas - Funções de</b>	
	<b>Bessel e Hankel . . . . .</b>	<b>1</b>
	<b>Apêndice 2 - Funções Radiais Monopolo e Dipolo . . . . .</b>	<b>1</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Som

O som é uma onda mecânica e, por esse motivo, só é capaz de se propagar em meios materiais, como o ar, água ou metais. Sua propagação é tridimensional e tem forma esférica em um meio homogêneo, percorrendo distâncias iguais em todas as direções. É percebido pelo ouvido humano como uma sensação auditiva e é gerado pela vibração de um objeto ou fonte sonora, que cria ondas de pressão que se propagam através de um meio. Essas ondas de pressão são compostas por variações na pressão do meio em relação ao seu valor médio [1], elas se propagam em todas as direções a partir da fonte sonora e são captadas pelo sistema auditivo, que as transforma em impulsos elétricos transmitidos ao cérebro onde esses sinais elétricos são interpretados como sons e reconhecidos como diferentes tonalidades, intensidades e timbres. Os sons audíveis pelos seres humanos se encontram dentro de um intervalo de frequências chamado de espectro audível, essas frequências distribuem-se, na média, entre 20 Hz e 20.000 Hz, sons de frequências inferiores a 20 Hz são chamados de infrassons, é considerado ultrassom quando a frequência das ondas sonoras está acima da faixa audível pelo ouvido humano. Algumas características incluem sua frequência, que está relacionada à altura do som (agudos ou graves), amplitude relacionada à intensidade do som (volume), sua forma de onda, que determina o timbre ou qualidade sonora e a velocidade de propagação das ondas sonoras que depende de fatores como densidade, temperatura e elasticidade do meio, as ondas sonoras se propagam mais rapidamente nos meios sólidos, além disso, os estudos do som e seus princípios fundamentais são realizados no campo da Acústica.

A teoria de espalhamento acústico em partículas de subcomprimento de onda é fundamentada em métodos analíticos, numéricos e experimentais e envolve a resolução de equações de espalhamento, modelagem de partículas com geometrias complexas e a consideração de propriedades físicas, como densidade, velocidade do som e atenuação do meio em que as partículas estão imersas [2]. O espalhamento de ondas tem por objetivo inicial compreender a natureza de propagação de ondas sonoras incidentes e espalhadas, para diferentes estruturas e geometrias dos centros espalhadores que formam um meio. Problemas desse tipo são investigados também em outras áreas da Física, incluindo Eletromagnetismo, Mecânica Clássica e Mecânica Quântica, essas áreas estudam a dinâmica do espalhamento de ondas e partículas quando interagem com estruturas ou objetos [3]. O estudo dos problemas de espalhamento desempenha um papel crucial no avanço do conhecimento científico e no desenvolvimento de tecnologias em diversas aplicações práticas. O entendimento dos mecanismos de espalhamento de ondas em

partículas é essencial para a compreensão da interação entre a radiação e a matéria, além de fornecer informações valiosas sobre as propriedades das partículas e dos objetos em estudo. Na Acústica, o espalhamento ocorre quando uma onda sonora incide em um objeto ou meio e sofre reflexão, difração ou dispersão [3]. Compreender como ondas de ultrassom se comportam ao interagir com objetos complexos é fundamental como exemplo para desenvolver técnicas de diagnóstico.

É sabido que a natureza das ondas acústicas e seu tratamento formal dependem do meio em que se propagam. Em fluidos, ondas acústicas são descritas como ondas longitudinais de pressão, que podem ser representadas por um campo escalar [4], nesse caso, a variação da pressão é a principal característica da onda acústica. Para objetos elásticos, como sólidos, é necessário utilizar a teoria da elasticidade para descrever e formalizar as deformações e tensões no material, isso é necessário para obter os potenciais que descrevem a onda acústica no meio sólido. A teoria da elasticidade permite relacionar as deformações do material com as forças e tensões resultantes, fornecendo uma descrição completa do comportamento elástico do sólido [1]. Em sólidos, em geral, além das ondas longitudinais de pressão, também podem ocorrer ondas transversais de cisalhamento, essas envolvem a deformação do meio sólido de forma perpendicular à direção de propagação da onda, a presença dessas ondas de cisalhamento é influenciada pela estrutura da rede de átomos e pela organização cristalina do sólido [4]. No caso de sólidos rígidos, em que a estrutura cristalina é altamente ordenada, é comum e conveniente utilizar o formalismo dos fônons para descrever as ondas acústicas, os fônons representam as quantizações da rede cristalina e permitem uma descrição precisa das vibrações e propriedades acústicas do sólido rígido [5].

Propomos nesse trabalho a descrição do fenômeno de espalhamento acústico em que ondas viajantes são desviadas de sua trajetória inicial, esse processo de desvio é possivelmente acompanhado pela absorção parcial da onda no interior do centro espalhador. Na prática é de grande interesse o entendimento dos materiais usados como espalhadores para que otimizem a absorção ou o espalhamento. Em nossas análises consideramos diferentes estruturas de espalhamento simples, como esfera rígida, fluida e esfera viscoelástica, além de um esferoide rígido.

### 1.1.1 Acústica e Acustofluídica

A Acústica é o ramo da Física que estuda o som e sua propagação através de diferentes meios. Abrange diversos aspectos relacionados à produção, transmissão e detecção de ondas sonoras, bem como os efeitos dessas ondas no ambiente e nos objetos, envolve o estudo das propriedades do som, como frequência, amplitude, velocidade, intensidade e timbre. Também investiga fenômenos como a reflexão, a difração e a interferência sonora, que influenciam a forma como o som se comporta em diferentes

ambientes. Já a Acustofluídica é uma área multidisciplinar que combina os princípios da Acústica e da Fluidodinâmica, buscando entender e controlar a interação entre ondas sonoras e fluidos, como líquidos e gases [6]. A Acustofluídica tem aplicações em diversas áreas, como biomedicina, microfluídica, separação de partículas, manipulação de fluidos e tecnologias de laboratório em escala micro ou nanométrica.

Ondas consistem em perturbações que transportam energia e momento (linear e angular). Quando uma onda sonora que se propaga em um meio atinge a superfície de um objeto parte do momento angular da onda é transferida dando origem à força de radiação acústica  $F_{rad}$ , [7]. O controle cuidadoso desse efeito permite o manuseio de micropartículas da ordem de  $1\mu\text{m}$  a  $1\text{cm}$  [8, 9] sem contato, que pode ser uma ferramenta útil para manipular uma única célula ou molécula para uma ampla gama de aplicações biomédicas. Além de levitar, também é possível utilizar ondas sonoras para mover e girar objetos de forma controlada; à  $F_{rad}$  também pode ser utilizada em meios líquidos, permitindo a manipulação e separação de células e micropartículas com ondas de ultrassom, isto pode ter importantes aplicações práticas, como possibilitar a separação de células tumorais circulantes (CTCs) de células saudáveis ou dar origem a placas de petri “inteligentes”, que poderiam ser utilizadas para manipular células usando ondas sonoras. A manipulação de micropartículas através da  $F_{rad}$  e torque decorrentes do espalhamento de ondas é essencial para a separação de partículas, aglomeração, transporte, formação de padrões, e imagem. Tais aplicações potencialmente promovem as indústrias bioquímica e médica em assuntos específicos, incluindo migração de microrganismos, montagem de estrutura coloidal e desenvolvimento de novos métodos de bioimpressão [10].

Existem algumas técnicas para manipulação de micropartículas sem contato, como a Magnética que consiste na manipulação de partículas em solução usando campos magnéticos para transporte e localização de micro e nanomateriais [11], o aprisionamento Óptico de partículas [12] e a Acústica que usam força de radiação sonora para manipular a matéria sem contato [13]. Porém as técnicas magnéticas e eletrônicas exigem que as partículas ou meios que elas estejam imersas sejam magneticamente suscetíveis ou eletricamente polarizáveis. As alternativas ópticas são limitadas por danos na amostra devido ao aquecimento extensivo por lasers de alta intensidade que podem danificar amostras biológicas, um fato que restringe a viabilidade de aplicações em organismo vivo, conseqüentemente a manipulação direta da matéria biológica é um desafio significativo para técnicas que se utilizam de aprisionamento óptico [14]. Os métodos acústicos por sua vez são livres de tais restrições, as forças de radiação acústica são cinco ordens de magnitude maior por unidade de potência de entrada do que no aprisionamento óptico, dando-lhes uma vantagem de eficiência significativa e permitindo operação de baixo consumo de energia que é crítica em aplicações de manipulação de células [15].

## 1.2 Revisão da Literatura

A teoria de espalhamento é um tópico amplamente explorado na Física há muitos séculos, desde os avanços no entendimento da propagação da luz, que resultaram em descobertas importantes como a lei de Snell e os princípios de Huygens e Fermat no século XVII [16], até a formalização da Acústica por Lord Rayleigh, que realizou estudos fundamentais na teoria do som [17] e áreas relacionadas, entre o final do século XIX e o início do século XX.

Na Acústica, o problema de espalhamento, envolve o estudo da interação de ondas sonoras com objetos ou estruturas. Essa área de pesquisa existe há várias décadas, e uma das primeiras investigações desse problema datam de 1934, King [18] apresentou em seu trabalho "*On the acoustic radiation pressure on spheres*" expressões para força de radiação acústica sobre uma esfera incompressível devido a uma onda plana progressiva e uma onda plana estacionária. Na década de 1950 Anderson [19], que abordou o espalhamento do som por esferas fluidas. investigando a dependência das propriedades do espalhamento acústico, como a seção de choque de espalhamento e os padrões de radiação acústica, em relação ao tamanho da esfera, frequência do som incidente e propriedades do meio fluido. Seguido por JJ Faran [20] que em 1951 publicou "*Sound Scattering by Solid Cylinders and Spheres*" onde investigou o espalhamento de ondas planas de som por cilindros e esferas circulares isotrópicas considerando ondas de cisalhamento e ondas de compressão em espalhadores de material sólido. Em 1952 Junger [21] e posteriormente Gary S. [22] introduziram as cascas elásticas conhecidas como sistemas *Core-Shell*. Em 1966 Doolittle [23, 24] apresentou a solução para o campo espalhado correspondente a uma onda sonora plana incidente sobre uma casca concêntrica circular-cilíndrica elástica. Em 1988 Stanton [25] investigou o espalhamento de uma onda plana incidente por um cilindro circular finito de fluido para várias frequências. Além desses cenários, contextos com aplicações relevantes foram estudados envolvendo regimes ressonantes em materiais elásticos [26, 27] e viscoelásticos [28]. Ivansson [29] também analisou materiais viscoelásticos em seus estudos.

Esses são alguns estudos que ajudaram a estabelecer as bases para o desenvolvimento de modelos teóricos e técnicas experimentais para a análise do espalhamento acústico em diferentes contextos; desde então, o estudo do espalhamento acústico tem sido ampliado e aplicado a uma variedade de áreas e aplicações na Acústica. Por exemplo, a compreensão das propriedades do espalhamento acústico por esferas fluidas é relevante no projeto de transdutores acústicos, no desenvolvimento de técnicas de imageamento médico baseadas em ultrassom, na detecção e caracterização de partículas suspensas em meios fluidos, entre outras aplicações [2]. Além disso, os estudos sobre o espalhamento acústico contribuem para o avanço da teoria acústica e para a compreensão dos fenômenos físicos envolvidos na interação das ondas sonoras com objetos. Essas pesquisas têm sido fundamentais para o desenvolvimento de métodos de simulação computacional, técnicas de modelagem

matemática e abordagens experimentais mais sofisticadas, permitindo uma análise mais precisa e abrangente do espalhamento acústico em diversos cenários.

Vale salientar um fenômeno de interesse derivado da teoria de espalhamento acústico, surge na interação entre a onda acústica e o objeto. O objeto absorve ou espalha a onda ocasionando uma transferência de momento linear e angular para o objeto. Em particular, o fluxo do momento linear e a tensão que atuam sobre o objeto é conhecido como a força de radiação acústica  $F_{rad}$ , essa força é utilizada em diversas aplicações como aprisionamento, separação, padronização e aglomeração de partículas em diversas áreas, sendo ideal em situações onde as características do sistema requer uma força de intensidade suficiente para transportar ou manipular substâncias sem danificar a estrutura do objeto, como em processos Bioquímicos e Farmacêuticos, [30].

Em 1955, efeitos de compressibilidade da partícula suspensa em um fluido ideal foram introduzidos por Yosioka e Kawasima [31] em seus resultados observaram que a partícula poderia mover-se para um nós ou anti-nós de pressão dependendo das propriedades acústicas do fluido e da partícula. as teorias de King, Hasegawa e Yosioka se equiparam, quando o produto do número de onda e o raio da esfera é pequeno  $KR \ll 1$ , mesmo com condições diferentes para as partículas [32]. Em 1957, Westervelt [33] derivou uma expressão para força de radiação em termos da função de espalhamento assintótico sobre um obstáculo arbitrário devido a uma onda plana incidente.

Em 1962, Gor'kov [34], apresentou uma expressão para uma esfera compressível em campo acústico arbitrário, sua expressão se torna semelhante à proposta por King [18] para o caso de uma onda plana estacionária. O método utilizado por Gor'kov é limitado ao considerar que a partícula é muito menor que o comprimento de onda incidente. Nesta aproximação, somente os coeficientes de espalhamento de monopolo e dipolo são considerados [7]. A partir destes modelos, uma série de estudos e pesquisas veio a aprimorar-se nos últimos anos baseados nestes trabalhos.

Em 2011, Silva [35] obteve uma solução da força de radiação exercida para um feixe acústico de forma arbitrária sobre um objeto de geometria arbitrária, em função da forma do feixe e dos coeficientes de espalhamento de uma onda incidente. Em 2011, Zhang e Marston [36] desenvolveram uma interpretação geométrica da força de radiação exercida pelo feixe de Bessel de ordem zero em uma esfera no eixo em termos das seções transversais de absorção, espalhamento e da potência extraída do feixe. Em 2013 Sapozhnikov [37] desenvolveu uma abordagem teórica para calcular força de radiação de um feixe acústico arbitrário sobre uma esfera elástica dentro de um líquido ou gás, usando uma solução clássica para o espalhamento de uma onda plana a partir de uma esfera elástica aplicada para cada componente de onda plana.

Em 2014, Silva [38] a partir de soluções de espalhamento propôs fórmulas exatas da força de radiação acústica exercida por uma onda harmônica arbitrária sobre uma pequena

partícula compressível absorvedora, suspensa num fluido ideal. Em 2015, Leão Neto [7] analisou um feixe com frente de onda arbitrária incidindo sobre uma pequena partícula viscoelástica suspensa em um fluido ideal e derivou expressões analíticas para força e torque de radiação. Além desses, trabalhos mais recentes se destacam em nossas análises, em 2018 Silva [39] a partir da solução de espalhamento analisou expressões analíticas de força de radiação acústica exercida sobre uma pequena partícula rígida esferoidal por um feixe de frente de onda arbitrária. Com base nisso em 2020, Leão Neto [40] propôs expressões analíticas de torque de radiação acústica em um esferoide. Em 2021 Lima [41] estudou expressões de força e torque de radiação acústica em uma esfera rígida imersa em água e um glóbulo vermelho imerso em plasma sanguíneo sob uma onda ultrassônica estacionária. Além desses, uma série de estudos e pesquisas vem se aprimorando nos últimos anos baseados nestes trabalhos usando técnicas numéricas e software de resolução de equações diferenciais avançados.

## 1.3 Aplicações

### 1.3.1 Pinças Acústicas

Pinça acústica é uma técnica para aprisionamento de partículas que utiliza feixes acústicos, uma das primeiras aplicações da força de radiação [7]. O primeiro sistema de pinça acústico foi proposto por Wu [42], que trata do fenômeno de aprisionamento de objetos usando feixes ultrassônicos colimados e focados de (3.5 MHz), conhecidos como "acoustical tweezers", o texto descreve como é gerado um poço de potencial de força estável por esses feixes e como ele pode ser usado para manipular objetos em água axialmente ou lateralmente movendo um dos transdutores de focalização piezoelétrico PZT que geram o foco ultrassônico. Seu dispositivo é capaz de aprisionar estavelmente partículas de látex e ovos de rã de 270  $\mu\text{m}$  de diâmetro em água.

Uma pinça acústica usa força de radiação acústica exercida por ondas ultrassônicas para prender objetos de tamanho milimétrico [42]. Aplicações usando força de radiação acústica para manipulação sem contato foram propostas anteriormente [43, 44], no entanto, tais métodos são restritos a aplicações acadêmicas [45]. As pinças acústicas são mais adaptáveis a partículas de tamanhos variados e meios diferentes e são cruciais no campo da captação de objetos sem contato [46].

### 1.3.2 Levitação Acústica

A levitação consiste de um processo onde objetos podem ser suspensos em uma posição estável sem contato, e isso pode ser aplicado para a investigação e o processamento dos novos materiais. Esse processo é amplamente utilizado em diversas atividades de pesquisa, como exemplo podemos citar a medição de tensão superficial de líquidos [47],

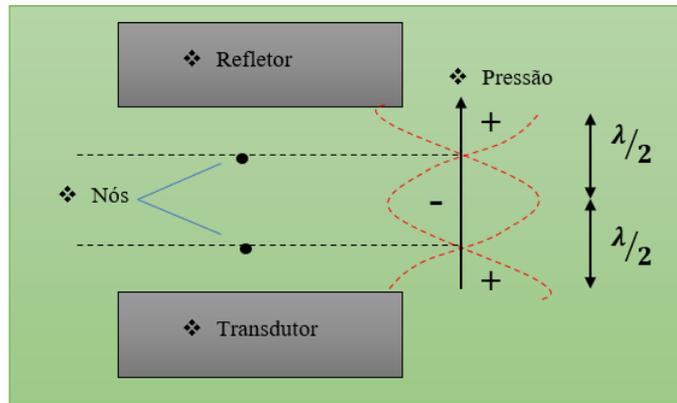
aprisionamento de gases com alta densidade [48], formação de partículas de gelo em campos acústicos estacionários [49, 50], e também nas áreas de Química Analítica e de Química Bioanalítica [51].

Historicamente, a armadilha acústica foi introduzida como uma ferramenta para processamento pela NASA e ESA cerca de 40 anos atrás [52]. Os levitadores acústicos desenvolvidos então eram tipicamente destinados a levitar gotículas líquidas ao ar livre em frequências de algumas dezenas de quilohertz. No início dos anos 1990, a levitação acústica em líquido foi investigada para uso em culturas em suspensão a granel para melhorar a produtividade, desde então, tem havido muitas publicações interessantes integrando armadilhas acústicas com o mundo do laboratório em um chip (Lab-on-chip).

Existe uma variedade de técnicas de levitação, que incluem levitação magnética [53], levitação ótica [54], e levitação eletrostática [55, 56]. Objetos também podem ser suspensos através de ondas de ultrassom, esse método é conhecido como levitação acústica que consiste em contrabalançar a força gravitacional  $F_g$  por meio da força de radiação acústica  $F_{rad}$  exercida por uma onda sonora que na maioria dos casos é uma onda estacionária, sobre uma partícula suspensa em um meio fluido [57].

Um típico exemplo de sistema de levitação acústica consiste de um transdutor de ultrassom, que vibra harmonicamente numa determinada frequência e de um refletor, como mostra a Figura [1], usando um campo de ondas estacionárias gerado entre um transdutor e um refletor é possível capturar pequenos objetos em nós da distribuição de pressão sonora no ar. Na Fig.1, Considerando paredes rígidas, as amplitudes de uma onda estacionária são máximas quando a distância entre o transdutor e o refletor é um múltiplo inteiro de meio comprimento de onda, nesse caso, a distância é igual a um comprimento de onda, o fato de existir dois nós de pressão, indica duas posições de levitação, colocando-se a partícula no levitador ela é empurrada para um dos nós de pressão, aumentando-se a distância entre o transdutor e o refletor é possível posicionar diversas partículas no levitador. Kozuka [58] posicionou sete partículas de poliestireno simultaneamente usando um transdutor cilíndrico do tipo Langevin operando a uma frequência de 28 kHz com amplitude de deslocamento de  $30 \mu m$  e um refletor de placa de vidro circular de 47 mm de diâmetro e uma distância entre a fonte sonora e o refletor foi de 58 mm.

Figura 1 – Sistema de Levitação Acústica



Fonte: Autor, 2023

A técnica de levitação acústica é vantajosa em relação a outras técnicas quando consideramos o fato de não haver restrições sobre a partícula a ser levitada, como a exigência de a partícula ser metálica ou de estar eletrizada, além disso não requer que a partícula esteja confinada em uma região limitada, isso permite a instalação de equipamentos de medição e detecção ao redor da partícula, como equipamentos de espectroscopia Raman e de difração de raio X [51].

### 1.3.3 Acustofluídica

Podemos definir à Acustofluídica como uma técnica que utiliza campos acústicos em micropartículas suspensas em Microfluídica, que é a ciência que opera em pequenos fluidos suspensos em canais de cortes transversais com dimensões micrométricas; dispositivos no domínio de Acustofluídica são, em geral, baseados em ondas estacionárias [7].

Existe a necessidade de manipular partículas e células em escala micrométrica em muitas áreas da Física, Química Analítica e Biociências; técnicas como filtração, centrifugação e a sedimentação são bem estabelecidos em aplicações de macroescala, mas em sistemas microfluídicos o uso de outras abordagens, incluindo óptica, magnéticas, dielectroforéticas e forças acústicas são de interesse, porque permite uma separação de partículas baseadas nas propriedades mecânicas, como, tamanho, forma, densidade e compressibilidade. A forças radiação acústica, normalmente em frequências ultrassônicas nas centenas de kHz a dezenas de MHz, têm comprimentos de onda que são bem combinados com escalas de canais microfluídicos, e são capazes de gerar poços de potencial com escalas de comprimento significativas; a tecnologia também é relativamente fácil de integrar dentro do sistema microfluídico [59].

Técnicas para imobilizar partículas e células em sistemas microfluídicos são muitas vezes necessários no conceito da tecnologia de laboratório dentro de um chip (Lab-On-Chip), à imobilização pode facilitar várias aplicações diferentes, tais como, estudos de microscopia,

incubação e lavagem de células, enriquecimento de células a partir de suspensões diluídas e estudos de interações célula-célula. A Imobilização sem contato especificamente permite o estudo de células não aderentes em um estilo mais controlado em ambiente in vivo, como cultura de células sem contato em câmaras de perfusão [60].

Com o desenvolvimento de sistemas Microfluídicos e o conceito da tecnologia de Lab-On-Chip, o movimento de partículas resultante da força de radiação acústica têm promovido uma revolução em aplicações biomédicas, onde é comum partículas com dimensões muito menores do que o comprimento de onda acústica, conhecido como regime de espalhamento Rayleigh, encontrado em dispositivos de Acustofluídica operando em 2 MHz e manipulação de partículas tão pequenas quanto  $1\mu\text{m}$  em um meio fluido [7].

### 1.3.4 Motivação

O estudo da interação entre uma onda Acústica e partículas com diferentes formas geométricas e materiais distintos é de grande relevância na perspectiva de aplicações em diferentes áreas de estudo. A resposta a radiação acústica de células biológicas se assemelha a esses tipos de sistemas e pode ser aplicado no desenvolvimento de tecnologias para uso em Biomedicina. Portanto, é necessário análises teóricas detalhadas sobre o fenômeno de espalhamento acústico em diferentes tipos partículas na aproximação de Rayleigh. O potencial de aplicação desses estudos nos motivou para analisar teoricamente o fenômeno de espalhamento acústico por partículas esféricas e esferoidais, considerando materiais rígidos, fluidos e sólidos imersos em fluidos ideais. Além disso, nosso trabalho é um passo concreto em direção à computação dos campos acústicos médios em partículas não esféricas em mais configurações acústicas realistas e pode servir como o base para novas investigações em dispositivos acustofluídicos.

## 2 Formulação Matemática para propagação de ondas acústicas em meios fluidos

Neste capítulo, será apresentada uma formulação Matemática para a propagação de ondas acústicas em meios fluidos que será a base para a formulação dos métodos numéricos do [Capítulo 4](#). Inicialmente, serão deduzidas as equações governantes da propagação de ondas, partindo dos princípios de conservação de grandezas fundamentais como, massa, energia e momento. Será apresentada a equação de onda acústica homogênea e a equação de Helmholtz, que representa a solução para a propagação de ondas em um meio sem fontes externas, em seguida, será apresentada soluções analíticas conhecidas para a equação de Helmholtz, essas soluções serão utilizadas posteriormente no [Capítulo 3](#) na análise do espalhamento da onda sonora e formulação dos métodos numéricos apresentados no [Capítulo 4](#).

### 2.1 Ondas acústicas

Ondas acústicas (som) são oscilações de pressão  $P(x, t)$  que se propagam em um meio elástico, gerando variações temporais de densidade, velocidade e compressibilidade do meio. Essas variações geram uma perturbação no campo de pressão que se propaga por meio de sucessivas variações na pressão e na velocidade das partículas do meio, de forma alternada em relação à pressão atmosférica. A frequência dessas oscilações determina a altura do som, enquanto que a amplitude da onda acústica está relacionada à intensidade. As ondas acústicas podem se propagar em meios sólidos, líquidos e gasosos, sendo que a velocidade de propagação depende das propriedades físicas do meio, como densidade, compressibilidade e módulo de elasticidade. A descrição matemática é dada pela equação da onda acústica, que é uma equação diferencial parcial de segunda ordem que governa a propagação das ondas acústicas em um meio elástico e é obtida a partir de leis fundamentais para fluidos compressíveis [61].

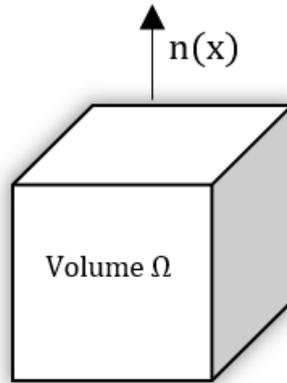
### 2.2 Conservação de massa

A conservação da massa é uma das leis fundamentais da Física e se aplica a todos os sistemas, incluindo fluidos. A matéria é composta por átomos e moléculas, mas, ao analisarmos o comportamento macroscópico de alguns sistemas envolvendo fluidos, é comum considerá-los como meios contínuos, essa abordagem é útil porque simplifica a descrição matemática dos fenômenos. Ao tratar um fluido como um meio contínuo,

podemos aplicar equações diferenciais parciais para descrever seu comportamento em termos de grandezas macroscópicas, como densidade, pressão e velocidade.

Na Fig.(2) consideramos um fluxo de um material fluido com densidade  $\rho(x, t)$ , pressão  $P(x, t)$ , volume de controle  $\Omega$  fixo no espaço e localizado em uma posição  $x$ , com contorno  $\partial\Omega$  e velocidade  $v(x, t)$  na direção do vetor unitário  $\mathbf{n}(x)$ , exterior a  $\Omega$ , onde  $x \in \mathbb{R}$ . Ao considerar o volume de controle fixo no espaço, podemos aplicar as leis da Física para descrever o movimento do fluido nesse volume. O sistema contém um número suficientemente grande de átomos ou moléculas que se encontram em equilíbrio termodinâmico local, um fluido ideal, cujas propriedades macroscópicas são constantes. Isto nos permite definir grandezas físicas para o elemento de fluido, tais como: densidade, velocidade, pressão, energia interna e entropia.

Figura 2 – Volume de Controle.



**Fonte:** Autor, 2023

Podemos definir a densidade  $\rho(x, t)$  de um fluido em um instante de tempo  $t$  em um ponto  $x$  como a quantidade de massa do fluido contida em um volume infinitesimal ao redor desse ponto. Se assumirmos que o elemento de fluido contém  $N$  átomos ou moléculas, a densidade pode ser expressa como a razão entre a massa  $m$  do fluido e o volume  $\Omega$  ocupado pelo elemento de fluido:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\Omega} \sum_{i=1}^{N(t)} m_i \quad , \quad (2.1)$$

$m_i$  é a massa de um átomo ou molécula dentro do elemento de volume  $\Omega$ . A velocidade do centro de massa do elemento de volume do fluido para qualquer instante de tempo  $t$  pode ser definida como:

$$\mathbf{v}(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)\Omega} \sum_{i=1}^{N(t)} m_i \mathbf{v}_i \quad , (2.2)$$

$\mathbf{v}$  é a velocidade do centro de massa do elemento de fluido, é uma grandeza vetorial, ou seja, possui magnitude e direção, indica a rapidez e a direção do deslocamento do elemento de volume do fluido em relação ao tempo,  $\mathbf{v}_i$  é a velocidade do  $i$ -ésimo átomo ou molécula dentro do elemento de volume  $\Omega$ .

A conservação de massa em um fluido exige que a variação da massa total do volume  $\Omega$  por unidade de tempo seja igual ao fluxo de massa através da superfície  $\partial\Omega$  que envolve esse volume. O fluxo de massa por unidade de área por unidade de tempo ( $kg/m^2s$ ) é definido como  $(\rho\mathbf{v})$  que pode ser entendido também como uma densidade de momento, e a velocidade do fluxo normal através do contorno  $\partial\Omega$ , é dada por  $(\mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x, t))$ . conseqüentemente, a conservação de massa por unidade de tempo é.

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\partial\Omega \quad , \quad (2.3)$$

o termo da esquerda da igualdade representa a massa do volume de controle variando com o tempo, o termo da direita mostra o fluxo de entrada, ou saída, através da fronteira. Portanto há um fluxo de entrada e outro de saída, ou seja, os sinais correspondem ao decréscimo de massa devido ao escoamento (ou seja, na direção da normal externa) no material. Logo, só há variação temporal de massa se houver fluxo de massa por  $\partial\Omega$ .

O teorema da divergência de Gauss, também conhecido como teorema de Gauss, é um resultado importante da teoria do cálculo vetorial que estabelece uma relação entre o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície fechada e a divergência desse campo no interior dessa superfície, matematicamente, pode ser expresso da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{B}(x) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega \quad , \quad (2.4)$$

$\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal que aponta para fora da superfície  $\partial\Omega$ ,  $d\partial\Omega$  e  $d\Omega$  são os elementos de integração de área e de volume, respectivamente. O lado esquerdo da equação representa a integral da divergência do campo vetorial sobre o volume  $\Omega$ , enquanto o lado direito representa a integral do campo vetorial  $\mathbf{B}(x)$  sobre a superfície  $\partial\Omega$ . Aplicando o teorema de Gauss na Eq.(2.3), obtemos:

$$\oint_{\partial\Omega} (\rho\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) d\Omega \quad , \quad (2.5)$$

das Equações (2.3) e (2.5) obtemos,

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \right) d\Omega = 0, \quad (2.6)$$

que leva à equação:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad (2.7)$$

que corresponde a equação de conservação de massa; ela dita como ocorre a variação da massa em um elemento infinitesimal de volume no fluido ideal.

Ao analisar o comportamento e o transporte de massa em um fluido, levando em consideração a relação entre a pressão, a densidade e a aceleração, é importante definir a conservação de massa que influencia a distribuição da massa no espaço e também a equação de movimento que descreve como essa distribuição afeta a aceleração do fluido. Assumindo que o volume de controle  $\Omega$  está sujeito à pressão hidrostática  $P(x, t)$ , pode-se identificar a força ao longo de  $\partial\Omega$ , como:

$$\mathbf{F} = - \oint_{\partial\Omega} P \mathbf{n} d\partial\Omega \quad , \quad (2.8)$$

$\mathbf{n}$  denota o vetor normal ao longo de  $\partial\Omega$ . Pela segunda lei de Newton  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , tem-se;

$$- \oint_{\partial\Omega} P \mathbf{n} d\partial\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega \quad , \quad (2.9)$$

usando o teorema de Gauss para transformar a integral de superfície em uma integral de volume, obtém-se a identidade

$$- \oint_{\partial\Omega} P \mathbf{n} d\partial\Omega = - \int_{\Omega} \nabla P d\Omega \quad , \quad (2.10)$$

$\nabla$  é o nabla operador (Gradiente) em coordenadas cartesianas. Sabe-se que a diferencial total pode expressa por:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad , \quad (2.11)$$

assumindo pequenas oscilações no campo de velocidades, pode-se linearizar o diferencial, conforme a referência [61], ficando somente com a parte linear

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad , \quad (2.12)$$

com a suposição de pequenas oscilações, essa relação é linearizada em acústica. Pelas equações (2.9), (2.10) e pela linearização do diferencial total, obtém-se o que é chamado

de equação de Euler ou de movimento:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P \quad . \quad (2.13)$$

## 2.3 Conservação de Energia

### 2.3.1 Pressão e Densidade

A onda sonora (Som) é uma perturbação que se propaga através de variações de pressão em um meio material, como um fluido. Essas variações de pressão se propagam como uma onda, caracterizada por regiões de compressão e rarefação do meio. O som se propaga a uma velocidade finita,  $c_0$ , num fluido inicialmente não perturbado de densidade  $\rho_0$  e pressão  $p_0$ . Considerando grandezas termodinâmicas, como energia interna  $u$  e entropia  $s$  escritas por unidade de massa, podemos mostrar a relação entre a pressão e a densidade, basicamente a passagem do som no fluido altera localmente sua densidade [5].

$$u = \frac{U}{m}, \quad s = \frac{S}{m} \quad e \quad \rho^{-1} = \frac{\Omega}{m}, \quad (2.14)$$

$u$  é a energia interna por unidade de massa e  $s$  é a entropia por unidade de massa. Expressar grandezas termodinâmicas por unidade de massa permite uma abordagem mais generalizada, pois não depende da quantidade total de fluido presente no sistema. Isso é especialmente útil em situações onde a massa do fluido pode variar, como em processos de fluxo contínuo, escoamento em tubulações, etc. A primeira lei da termodinâmica estabelece uma relação fundamental entre o aumento da energia interna de um sistema, o trabalho realizado sobre ele e o calor  $Tds$  adicionado ou removido [7], Essa lei pode ser expressa na forma diferencial como:

$$du = T ds - p d(\rho^{-1}), \quad (2.15)$$

$T$  é a temperatura, o tempo necessário para que o som se propague pelo sistema é muito menor do que o tempo necessário para que ocorram trocas significativas de calor, essa condição simplifica a análise do transporte de energia acústica, permitindo o estudo das variações de pressão e densidade do meio sem a consideração explícita do calor envolvido no processo, logo o transporte de calor pelo som ocorre de forma adiabática, isso implica  $ds = 0$ , portanto;

$$du = p\rho^{-2}d\rho, \quad (2.16)$$

assim, tanto a energia interna como a pressão pode ser expressa pela equação de estado em função da densidade

$$\begin{aligned} p &= p(\rho), \\ u &= u(\rho), \end{aligned} \quad (2.17)$$

isso implica que pequenas variações na pressão,  $p - p_0$ , podem ser expressas em termos de uma expansão em série de Taylor nas variações da densidade,  $\rho - \rho_0$  :

$$p - p_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n p}{\partial \rho^n}(\rho_0) \frac{(\rho - \rho_0)^n}{n!}, \quad (2.18)$$

observe que as dimensões do termo  $\partial_\rho p(\rho_0)$  são as mesmas do quadrado de uma velocidade:

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial \rho} \right] = \frac{\text{Pressão}}{\text{Densidade}} = \frac{\frac{F}{L^2}}{\frac{M}{L^3}} = \frac{\frac{ML}{t^2 L^2}}{\frac{M}{L^3}} = \frac{ML^4}{ML^2 t^2} = \left( \frac{L}{t} \right)^2, \quad (2.19)$$

com isso, define-se formalmente a velocidade do som como,

$$c_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0), \quad (2.20)$$

esse foi o primeiro passo na obtenção da equação de onda do som: a velocidade com que a onda se propaga, resta agora, saber de que forma essa propagação ocorre.

Além disso a densidade de energia em um volume  $\Omega$  é dada pela soma da densidade de energia cinética e a densidade de energia interna;

$$E(x, t) = \frac{\rho v^2(x, t)}{2} + \rho u(x, t), \quad (2.21)$$

a densidade de energia pode variar por convecção através da superfície e pela variação do trabalho realizado por uma força gerada pela pressão na superfície. A densidade de energia de convecção é dada em termos do fluxo de energia  $[(\rho v^2/2 + \rho u)\mathbf{v}]$  e a variação do trabalho devido a pressão é  $p\mathbf{v}$ , logo, a variação da taxa da densidade de energia para um fluido ideal é dada por:

$$\partial t \int_{\Omega} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{nd}\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{nd}\partial\Omega = 0, \quad (2.22)$$

usando do teorema da divergência de Gauss Eq.(2.4), e como o volume é arbitrário, encontramos a equação da conservação de energia,

$$\partial t \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho u + p \right) \mathbf{v} \right] = 0. \quad (2.23)$$

a quantidade entre colchetes é o vetor fluxo de energia.

## 2.4 Conservação de Momento

A variação do momento de um volume  $\Omega_0$  está relacionada à taxa de variação do fluxo de momento através da superfície que o envolve  $\partial\Omega_0$ , de acordo com o teorema do transporte de Reynolds; esse fluxo de momento é determinado pelas velocidades das partículas do fluido e pela densidade do fluido. Por outro lado, a ação das forças de pressão na superfície do volume também pode causar variações no momento. As forças de pressão são exercidas pelas partículas vizinhas no fluido e atuam perpendicularmente à superfície, contribuindo para a mudança do momento do volume.

Assim, considerando as forças externas ao sistema de magnitudes desprezíveis na variação do momento, pode-se considerar que o momento de um volume  $\Omega_0$  pode variar ou por meio de seu próprio fluxo pela superfície que o delimita,  $\partial\Omega_0$ , ou pela ação de forças de pressão na superfície; essas duas contribuições são fundamentais para a conservação do momento em um fluido e são consideradas na análise das equações de movimento de Euler, que descrevem o comportamento do fluido ideal. Nesse contexto, a densidade de momento ( $\rho\mathbf{v}$ ), possui fluxo ( $\rho\mathbf{v}\mathbf{v}$ ), que simboliza o produto tensorial entre a densidade de momentos ( $\rho\mathbf{v}$ ) e a velocidade  $v$  num ponto  $x$  (um tensor de segunda ordem). Dessa forma, escreve-se, a variação da taxa do momento linear no volume  $\Omega_0$  para um fluido ideal;

$$\partial t \int_{\Omega_0} \rho\mathbf{v}d\Omega + \int_{\partial\Omega_0} p(x,t)\mathbf{n}d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega_0} \rho\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}d\partial\Omega = 0, \quad (2.24)$$

$p(x,t)$  simboliza a pressão em um ponto  $x$  em um tempo  $t$ .

Podemos utilizar o teorema de Gauss (2.4) para tensores com intuito de transformar as integrais de superfície da Eq. (2.24) em integrais volumétricas. Com isso temos:

$$\partial t \int_{\Omega_0} \rho\mathbf{v}d\Omega + \int_{\Omega_0} \nabla p \mathbf{n} d\Omega + \int_{\Omega_0} \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) d\Omega = 0, \quad (2.25)$$

como o volume  $\Omega_0$  é arbitrário, encontramos a equação diferencial parcial da conservação do momento, além disso, comutar o operador  $\partial t$  com a integral no espaço produz:

$$\partial t(\rho\mathbf{v}) + \nabla p + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = 0, \quad (2.26)$$

podemos definir o tensor de tensões para um fluido não viscoso como,

$$\zeta = p\mathbf{I} + \rho\mathbf{v}\mathbf{v}, \quad (2.27)$$

$\mathbf{I}$  é o tensor unitário, o gradiente da pressão pode ser expresso em termos de um tensor de segunda ordem,

$$\nabla p = \nabla \cdot (p\mathbf{I}), \quad (2.28)$$

reescrevendo a Eq. (2.26);

$$\partial t(\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot \zeta = 0. \quad (2.29)$$

essa é a equação de conservação do momento linear, ela mostra que a variação temporal da densidade de momento é causada pela divergência das tensões num dado ponto do fluido. Observe ainda que tanto a Eq.(2.29) quanto a Eq.(2.7) descrevem relações entre derivadas temporais\espaciais de densidade e pressão. Isso sugere que elas sejam a chave para a obtenção da equação de onda linear, que será feita na próxima seção.

## 2.5 Equação de Onda

Com o objetivo de simplificar as equações diferenciais parciais não lineares que descrevem a dinâmica da onda em um fluido ideal, podemos utilizar o método de aproximações sucessivas, esse método envolve a escolha de um parâmetro de perturbação, denotado por  $\mathcal{M}$ , que é assumido como sendo muito pequeno ( $\mathcal{M} \ll 1$ ), a partir disso, podemos expandir as grandezas de interesse, como a pressão, densidade e velocidade, em termos desse parâmetro de perturbação. Suponha que a velocidade máxima que o elemento de fluido pode assumir na passagem da onda de pressão seja de magnitude  $v_0$ , certamente,  $v_0 \ll c_0$ , ou seja, a velocidade do som é muito maior do que a perturbação de velocidade que ele gera no meio, isso implica que a fração  $v_0/c_0 \ll 1$ , logo, pode-se considerar como parâmetro de perturbação seja,

$$\mathcal{M} = \frac{v_0}{c_0}, \quad (2.30)$$

esse parâmetro de expansão  $\mathcal{M}$  é conhecido como número de Mach [7], uma medida adimensional da velocidade. A expansão em séries de potência das grandezas de interesse são:

$$p - p_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^n p^{(n)}, \quad (2.31)$$

$$\rho - \rho_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^n \rho^{(n)}, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^n \mathbf{v}^{(n)}, \quad (2.33)$$

aqui o índice  $n$  indica a ordem da expansão. Ao realizar essa expansão, consideramos uma série de aproximações, onde a solução exata é representada como uma série infinita de termos, sendo cada termo multiplicado por uma potência do parâmetro de perturbação. Para a derivação do problema de espalhamento, a aproximação linear dos campos acústicos é suficiente, considerando a aproximação linear, têm-se:

$$p - p_0 = \mathcal{M}p^{(1)}, \quad (2.34)$$

$$\rho - \rho_0 = \mathcal{M}\rho^{(1)}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{v} = \mathcal{M}\mathbf{v}^{(1)}, \quad (2.36)$$

essas expressões simplificam as equações de conservação de massa e momento. No caso do método de aproximações sucessivas, consideramos apenas os primeiros termos da série, geralmente até a primeira ordem em  $\mathcal{M}$ , para obter uma aproximação simplificada das equações originais. Considerando apenas os termos proporcionais a  $\mathcal{M}$ , trunca-se a soma da série de Taylor da Eq.(2.18) para  $n = 1$  e obtém-se:

$$\mathcal{M}p^{(1)} = \mathcal{M}\rho^{(1)}c_0^2. \quad (2.37)$$

dessa forma, a análise perturbativa envolve substituir as grandezas de interesse por suas expansões em termos  $\mathcal{M}$ , e em seguida, substituir essas expansões nas equações de conservação de momento, conservação de massa e equação de estado da pressão em termos da densidade, isso nos permite obter equações aproximadas que descrevem a dinâmica da onda em um fluido ideal de forma simplificada.

A partir dessas equações aproximadas, podemos prosseguir com a resolução e manipulação matemática para encontrar a equação de onda, que é uma forma mais simples e geralmente linearizada da equação original, essa equação de onda descreve a propagação da onda sonora no fluido ideal, e é mais fácil de ser analisada e solucionada em comparação com as equações diferenciais parciais não lineares originais. Substituindo as Equações

(2.34) e (2.35) na equação (2.18) para  $n = 1$ , encontramos;

$$\rho^{(1)} = \frac{p^{(1)}}{c_0^2} \quad \text{e} \quad p^{(1)} = c_0^2 \rho^{(1)}, \quad (2.38)$$

que é uma aproximação linear da expansão da densidade em função da pressão e da pressão em função da densidade respectivamente.

Considerando as equações (2.7) e (2.29), substituímos novamente as Eqs. (2.34), (2.35) e (2.36), mantendo somente os termos de primeira ordem de  $\mathcal{M}$  e eliminando a densidade através da Eq. (2.38) da pressão, obtemos,

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}^{(1)} = 0, \quad (2.39)$$

na Eq. (2.26) a parcela  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v})$ , é proporcional a  $\mathcal{M}^2$ , e é muito pequena comparada com os demais termos, então pode ser desprezada. Juntamente com as expansões lineares obtidas acima, escreve-se:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}^{(1)}}{\partial t} + \nabla p^{(1)} = 0, \quad (2.40)$$

as Eqs.(2.39) e (2.40) são as equações lineares de Dinâmica dos fluidos.

É sabido que o rotacional do gradiente é sempre nulo, com isso tomando o rotacional de (2.40) temos,

$$\nabla \times \mathbf{v}^{(1)} = 0, \quad (2.41)$$

ou seja, a velocidade do elemento do fluido é irrotacional, se na aproximação de primeira ordem, o campo de velocidades é irrotacional. Do cálculo vetorial, isso implica que  $\mathbf{v}$  é o gradiente de alguma função potencial  $\psi(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\mathbf{v}^{(1)} = \nabla \psi, \quad (2.42)$$

a relação dessa função potencial com a pressão é obtida ao substituir a Eq.(2.42) em (2.40) e comutar os operadores de posição e tempo entre si, produzindo,

$$\rho_0 \partial t (\nabla \psi) + \nabla p^{(1)} = 0, \quad (2.43)$$

trabalhando os operadores, chegamos em,

$$\nabla(\rho_0 \partial t \psi) = \nabla(-p^{(1)}), \quad (2.44)$$

como essa relação deve ser válida em todos os pontos, conclui-se que,

$$p^{(1)} = -\rho_0 \partial t \psi, \quad (2.45)$$

as Eq.(2.42) e (2.45) são chamadas de relações constitutivas da onda acústica, descrita pelo potencial  $\psi(\mathbf{r}, t)$ . Por fim, substituindo a Eq. (2.45) em (2.39), obtém-se a equação de onda:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.46)$$

Logo, o som pode ser descrito por uma função potencial  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , relacionada à pressão pela Eq.(2.45) e ao campo de velocidades induzidos no meio pela Eq.(2.42). Essa função potencial satisfaz a equação de onda escalar e por isso, pode-se caracterizar o som como um fenômeno ondulatório. Esses resultados são bem conhecidos na literatura [4, 62, 6], e foram reproduzidos com o propósito de reafirmar a teoria que segue.

## 2.6 Equação de Helmholtz

Em geral as soluções da equação de onda  $\psi(\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t)$ , são atribuídas a Euler, Bernoulli e D'Alambert, e apesar de bem conhecidas, tratar de dependências temporais arbitrárias no problema da propagação da onda sonora, torna-o mais complicado [5]. Em geral, a fonte emissora de ondas de som primárias pode ser controlada, então, por simplicidade, vamos supor que elas sejam geradas com dependência temporal harmônica, isso implica que a variação da perturbação segue uma função seno ou cosseno ao longo do tempo, essa escolha simplifica a análise, pois permite trabalhar com funções periódicas bem definidas, facilitando a aplicação de técnicas matemáticas, pois conhecemos as propriedades das funções senoidais e cossenoidais e suas relações com a frequência, período e amplitude; além disso, a propagação de ondas harmônicas é bem compreendida e estudada na teoria, o que nos permite utilizar soluções analíticas conhecidas. A velocidade do elemento de fluido é  $\phi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (2.47)$$

a dependência temporal harmônica na equação Eq.(2.46) implica, usando  $\omega = 2\pi f$  como a frequência angular da onda, dada sua frequência linear  $f$ , na equação de Helmholtz para o fador  $\phi(\mathbf{r})$ . O termo fador denota o fato de que essa quantidade é invariante no tempo e possui características ondulatórias. Usando  $k = \omega/c_0$  onde  $c_0$  é a velocidade de propagação da

onda, podemos expressar a equação linear da onda Eq.(2.46) como a equação de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)\phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.48)$$

$\nabla^2$  é o operador laplaciano, que representa a segunda derivada espacial. A equação de Helmholtz descreve a propagação de uma onda harmônica no espaço e é amplamente utilizada na análise de problemas acústicos. Suas soluções descrevem o comportamento da pressão e do campo de velocidades gerados no fluido ideal onde se propaga a onda de som. A equação de Helmholtz é uma equação diferencial parcial linear, e suas soluções descrevem o comportamento da onda acústica no meio, ao resolver essa equação, ver [Apêndice 3](#), podemos determinar características importantes da onda, como sua distribuição espacial, sua propagação, reflexão e difração.

# 3 Teoria de Espalhamento Acústico

Neste capítulo, daremos início à análise do espalhamento da onda sonora em um fluido ideal e incompressível, em interação com uma partícula de simetria esférica ao longo de sua trajetória. Em seguida, abordaremos o espalhamento por um esferoide, que apresenta características distintas em comparação ao espalhamento por uma partícula esférica, como sua forma alongada ou achatada, que afeta a interação com a onda sonora incidente.

## 3.1 Descrição do Fenômeno de Espalhamento

O espalhamento ocorre quando a onda sonora interage com um objeto ou obstáculo em seu caminho e tem sua trajetória desviada, a interação pode resultar em mudanças na direção, amplitude e fase da onda, levando ao espalhamento da energia sonora. Essa interação pode ocorrer devido a diferentes fenômenos físicos, como reflexão, refração e difração da onda, resultando na absorção; ou no desvio da trajetória da onda, esse último fenômeno denomina-se espalhamento acústico [63].

Existem diversas aplicações do espalhamento acústico, tanto em campos científicos quanto tecnológicos, por exemplo, na área de diagnóstico médico por ultrassom, o espalhamento acústico é utilizado para obter informações sobre a estrutura interna de tecidos e órgãos. Além disso, no estudo de materiais e na análise de partículas microscópicas, o espalhamento acústico fornece informações valiosas sobre suas propriedades físicas. Assim, ao compreender o espalhamento acústico, podemos melhorar a detecção, caracterização e análise de objetos e obstáculos por meio de ondas sonoras; o estudo desses efeitos é crucial para entender e utilizar de forma eficiente as ondas acústicas em diversas aplicações práticas.

O espalhamento de ondas acústicas desempenha um papel significativo na modificação das propriedades mecânicas do meio em que a onda se propaga. Essa interação pode afetar os coeficientes de absorção e reflexão do material, alterando o comportamento da onda ao atravessá-lo. Diversos fatores podem influenciar, incluindo a geometria e dimensões da partícula em relação ao comprimento de onda da onda acústica. Quando a partícula é comparável em tamanho ao comprimento de onda da onda incidente, o espalhamento se torna mais significativo. Além disso, o material da partícula também desempenha um papel importante ao considerar propriedades como densidade, elasticidade e absorção da partícula que podem afetar a interação com a onda incidente, resultando em mudanças nas características da onda espalhada.

## 3.2 Partícula com Geometria Esférica

Focamos nossa análise no espalhamento de uma única partícula de simetria esférica imersa em um fluido ideal. O problema consiste em estudar a interação entre um feixe de radiação acústica, com um comprimento de onda arbitrário, e uma partícula esférica isolada imersa em um meio homogêneo ideal, ou seja, a única interação que ocorre é entre a onda incidente e o centro espalhador. A onda incidente é considerada monocromática, assumida como plana, com uma frequência angular  $\omega$ , que também é a frequência da onda espalhada e da onda no centro da partícula. Nossa análise é exclusivamente clássica, não levando em consideração nenhum fenômeno de natureza Quântica.

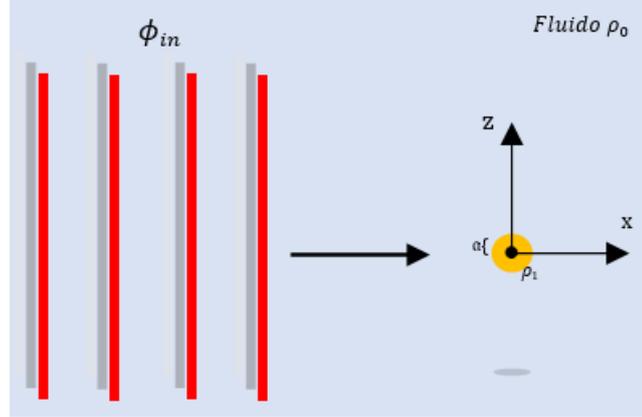
### 3.2.1 Partícula fluida

Nesse caso a esfera espalhadora é penetrável ao campo acústico, a onda de fato entra em seu interior, ou seja, tem absorção, portanto a onda sofre mais influência da partícula em comparação a um regime de difração. No processo de absorção de ondas acústicas, parte da energia da onda incidente é convertida em energia térmica pelo material absorvente, isso resulta em um aumento da temperatura do material, o que está relacionado a um aumento na entropia do sistema. A absorção de energia da onda acústica pelo material pode ser quantificada através da parte imaginária do número de onda  $k$ , que está relacionado à fase dos campos mecânicos da onda e sua parte imaginária representa a perda de energia pela onda enquanto ela se propaga [5], quando há absorção de energia, a parte imaginária do número de onda aumenta, indicando uma diminuição na amplitude da onda com o tempo e a conversão dessa energia em outras formas, como calor; esse processo de absorção resulta em uma alteração da quantidade de energia entre a radiação incidente e a espalhada, levando a um aumento na entropia do sistema.

Na Fig.(3) temos uma ilustração do problema, considere uma esfera líquida de raio  $a$  e densidade  $\rho_1$ , centralizada na origem do sistema de coordenadas, sobre ela incide uma onda  $\phi_{in}$  que viaja num fluido ideal de densidade  $\rho_0$ , na direção crescente do eixo  $z$ . Ao considerar a absorção no processo de interação entre a onda incidente e a partícula é necessário impor condições especiais, como a existência de uma função  $\phi_1$  no interior da partícula que descreve a onda acústica e, portanto, é solução da equação de Helmholtz Eq. (2.48). Isso é satisfeito para espalhadores fluidos, onde não existem ondas de cisalhamento, que são um tipo de onda que envolve a deformação do meio através de um movimento de cisalhamento, ou seja, as partículas do meio se deslocam em direções perpendiculares à direção de propagação da onda, são comuns nos sólidos, onde as partículas estão rigidamente ligadas umas às outras. Já partículas fluidas estão em constante movimento e podem se mover livremente umas em relação às outras. Como resultado, não há uma estrutura coesa que permita a propagação das ondas de cisalhamento nesse tipo de meio. Além disso, a onda de pressão deve satisfazer condições de contorno específicas do problema

na interface entre os meios de propagação que geralmente envolvem a continuidade da pressão e do deslocamento normal na interface entre o fluido e a partícula. Essas condições garantem que a onda incidente seja corretamente transmitida para o interior da partícula, permitindo que ocorra o espalhamento adequado.

Figura 3 – Onda plana incidente sobre uma partícula fluida.



**Fonte:** Autor, 2023

Considere a interação de uma onda de pressão incidente descrita pelo fasor  $\phi_{in}$  sobre uma partícula fluida esférica, parte da onda vai ser transmitida através da partícula e passará a ser descrita pelo fasor  $\phi_1$ , por outro lado, parte da onda será espalhada e então passa a ser descrita pelo fasor  $\phi_{sc}$ . As condições de contorno satisfeitas pelas funções de onda são dadas pelas seguintes equações, avaliadas na superfície da partícula  $r = a$ .

$$\phi_{in} + \phi_{sc} = \phi_1, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\phi_{in} + \phi_{sc}) = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \phi_1, \quad (3.2)$$

a Eq.(3.1) mostra a continuidade dos campos de pressão, enquanto a Eq.(3.2) considera a componente normal do campo de velocidades imposto pela onda acústica, que por sua vez tem a dependência com a densidade do meio  $\rho_0$  e da partícula  $\rho_1$ , essa condição reflete o fato de que não haver deslocamento radial da partícula que não seja compensado pelo fluido que o permeia. A derivação normal à superfície da esfera diz respeito a uma derivação com relação à variável  $r$ . Essas condições de contorno garantem a continuidade da pressão e da velocidade na interface entre a partícula e o meio em que se propaga a onda sonora, são fundamentais para descrever a interação entre a onda incidente e a partícula durante o espalhamento, permitindo determinar as amplitudes e fases das ondas transmitida e espalhada em relação à onda incidente.

### 3.2.1.1 Coeficientes de espalhamento

Considere a equação de Helmholtz para uma onda incidente, descrita pelo fador  $\phi_{in}$ , usando o formalismo da teoria de espalhamento, vamos calcular os coeficientes da onda. A partir da equação de Helmholtz para a onda incidente e das condições de contorno, é possível calcular os coeficientes da onda espalhada e analisar o espalhamento acústico resultante,

$$(\nabla^2 + k_0^2)\phi_{in}(r) = 0, \quad (3.3)$$

para calcular os coeficientes da onda espalhada é necessário resolver a equação de Helmholtz para a onda incidente, considerando as condições de contorno Eqs. [(3.1) e (3.2)], em seguida, a onda espalhada é expressa como uma série de ondas esféricas harmônicas multiplicadas pelos coeficientes de espalhamento. Analogamente a Eq.(20) do [Apêndice 3](#), escrevemos:

$$\phi_{in}(k_0r, \cos\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} j_l(k_0r) Y_l^m(\cos\theta, \varphi), \quad (3.4)$$

$k_0$  é o número da onda no meio circundante,  $a_{lm}$  é o coeficiente de forma do feixe a ser determinado,  $j_l(k_0r)$  representa as funções de Bessel esféricas e  $Y_l^m(\cos\theta, \varphi)$  os harmônicos esféricos. Dentro da esfera, pode-se descrever a onda acústica pelo fador  $\phi_1$ , analogamente ao caso anterior podemos escrever,

$$\phi_1(k_1r, \cos\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l b_{lm} a_{lm} j_l(k_1r) Y_l^m(\cos\theta, \varphi), \quad (3.5)$$

$b_{lm}$  é o coeficiente de transmissão.  $k_1 \neq k_0$  significa que o número de onda  $k_1$  dentro da partícula é diferente do número de onda  $k_0$  no meio externo, isso indica que o material da esfera é diferente do meio em que ela está imersa. Isso resulta em uma alteração no comprimento de onda da onda dentro da partícula, afetando seu número de onda. A dependência radial como funções de Bessel esféricas se justifica pela necessidade de tanto o fador incidente  $\phi_{in}$  quanto o fador interno à esfera,  $\phi_1$ , precisarem ser bem definidos quando  $r = 0$ , ou seja, no centro da partícula. As funções de Bessel esféricas  $j_l(k_0r)$  possuem essa característica, permitindo uma descrição adequada das ondas nesse contexto. O fator de forma  $b_{lm}$ , é chamado de coeficiente interno da onda, e dita a mudança na forma da onda ao entrar na partícula, levando em consideração os efeitos do espalhamento e da interação com a partícula.

Quanto ao fador da onda espalhada  $\phi_{sc}$ , é importante assegurar que as funções radiais sejam adequadamente definidas para  $r \rightarrow \infty$ . Para isso, utilizamos as funções de Hankel do primeiro tipo, representadas por  $h_l^{(1)}(k_0r)$ , para descrever a dependência radial da onda espalhada  $\phi_{sc}$ . Portanto, assim como na Eq.(21) do [Apêndice 3](#) podemos

expressar a onda espalhada da seguinte forma:

$$\phi_{sc}(k_0 r, \cos \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l s_l a_{lm} h_l^{(1)}(k_0 r) Y_l^m(\cos \theta, \varphi), \quad (3.6)$$

$s_{lm}$  são os coeficientes de espalhamento e mostram a mudança na forma da onda depois de espalhada. Além disso, a onda espalhada deve satisfazer a condição de Radiação de Sommerfeld [62], que dita a necessidade da onda espalhada, no limite que  $k_0 r \rightarrow \infty$ , se comportar como uma onda plana, "as fontes devem ser fontes, não sumidouros de energia. A energia que é irradiada das fontes deve se espalhar para o infinito; nenhuma energia pode ser irradiada do infinito para o campo".

$$\lim_{k_0 r \rightarrow \infty} k_0 r (\partial_r - i k_0) \phi_{sc} = 0. \quad (3.7)$$

dadas as Eqs.(3.4), (3.5) e (3.6), faremos uso das condições de contorno (3.1) e (3.2) para determinar os coeficientes de expansão  $a_{lm}$ ,  $b_{lm}$  e  $s_{lm}$ . Inicialmente, determinamos os coeficientes  $a_{lm}$  da onda incidente  $\phi_{in}$ . Usando as relações de ortogonalidade das funções de Bessel esféricas, bem como dos harmônicos esféricos: na Eq. (3.4) multiplicamos os dois lados por  $r^2 j_l(k'_r)$ , com  $k'$  um número de onda arbitrário, e integramos em  $r$  no intervalo  $[0, \infty)$ , temos,

$$\int_0^{\infty} r^2 dr j_l(k'_r) \phi_{in} = \int_0^{\infty} r^2 dr \sum_{l,m} a_{lm} j_l(k_0 r) j_l(k'_r) Y_l^m, \quad (3.8)$$

de acordo com a referência [64] à relação de ortogonalidade entre duas funções de Bessel esféricas pode ser expressa por:

$$\int_0^{\infty} r^2 dr j_l(k_0 r) j_l(k'_r) = \frac{\pi}{2k^2} \delta(k_0 - k'), \quad (3.9)$$

que produz,

$$\frac{\pi}{2k^2} \delta(k_0 - k') \sum_{l,m} a_{lm} Y_l^m = \int_0^{\infty} r^2 dr j_l(k'_r) \phi_{in}, \quad (3.10)$$

com isso, pode-se produzir uma expressão importante para  $k_0 = k'$ ,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\cos \theta, \varphi) = \frac{2k^2}{\pi} \int_0^{\infty} r^2 dr j_l(k_0 r) \phi_{in}(k_0 r, \cos \theta, \varphi), \quad (3.11)$$

agora, pela ortogonalidade dos harmônicos esféricos,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) Y_l^m(\cos \theta, \varphi) Y_t^{s*}(\cos \theta, \varphi) = \delta_{lt} \delta_{ms}, \quad (3.12)$$

onde  $Y_t^{S*}$  denota o complexo conjugado dos harmônicos esféricos. Multiplica-se a Eq.(3.11) por  $Y_t^{S*}(\cos \theta, \varphi)$ , e integra-se nos intervalos convenientes para obter,

$$a_{lm} = \frac{2k_0^2}{\pi} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) j_l(k_0 r) Y_t^{S*}(\cos \theta, \varphi) \phi_{in}(k_0 r, \cos \theta, \varphi), \quad (3.13)$$

a partir dessa equação podemos achar os coeficientes  $a_{lm}$ , dada a forma de  $\phi_{in}$ , mas resolver a integral analiticamente pode trazer complicações, pra simplificar vamos considerar o seguinte: a onda incidente seja uma onda plana de amplitude  $B$  viajando no eixo  $z$ , dada por,

$$\phi_{\beta n}(k_0 r, \cos \theta, \varphi) = B e^{ik_0 r \cos \theta}, \quad (3.14)$$

da referência [20], pode-se escrever a exponencial da Eq.(3.14) como:

$$e^{ik_0 r \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(k_0 r) P_l(\cos \theta) \quad (3.15)$$

com essa expressão, deixamos a dependência angular em  $\varphi$ , graças à simetria física do problema, e passamos a tratar do problema com a onda plana incidente usando as seguintes expansões:

$$\phi_{in}(k_0 r, \cos \theta) = B \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(k_0 r) P_l(\cos \theta), \quad (3.16)$$

$$\phi_1(k_1 r, \cos \theta) = B \sum_{l=0}^{\infty} b_l (2l+1) i^l j_l(k_1 r) P_l(\cos \theta), \quad (3.17)$$

$$\phi_{sc}(k_0 r, \cos \theta) = B \sum_{l=0}^{\infty} s_l (2l+1) i^l h_l^{(1)}(k_0 r) P_l(\cos \theta), \quad (3.18)$$

note que não há dependência das funções de onda com o ângulo  $\varphi$ , dada a simetria esférica do problema juntamente com a forma da onda plana incidente.

Resta a ser determinados os coeficientes  $b_{lm}$  e  $s_{lm}$ . Novamente usando as condições de contorno das Eqs.(3.1) e (3.2), isolamos  $b_{lm}$  nas duas condições de contorno, da Eq.(3.1) temos;

$$b_{lm} = \frac{j_l(k_0 a)}{j_l(k_1 a)} + \frac{h_l^{(1)}(k_0 a)}{j_l(k_1 a)} s_l, \quad (3.19)$$

enquanto a segunda condição de contorno Eq.(3.2), exhibe  $b_{lm}$  como;

$$b_{lm} = \left( \frac{k_0 \rho_1}{k_1 \rho_0} \right) \left[ \frac{j'_l(k_0 a)}{j'_l(k_1 a)} + \frac{h_l^{(1)'}(k_0 a)}{j'_l(k_1 a)} \right] s_l, \quad (3.20)$$

as Eqs. (3.19) e (3.20) devem ser iguais, com isso obtém-se o coeficiente de espalhamento  $s_{lm}$  como,

$$s_{lm} = \frac{k_0 \rho_1 j_l(k_1 a) j'_l(k_0 a) - k_1 \rho_0 j_l(k_0 a) j'_l(k_1 a)}{k_1 \rho_0 h_l^{(1)'}(k_0 a) j'_l(k_1 a) - k_0 \rho_1 j_l(k_1 a) h_l^{(1)'}(k_0 a)}, \quad (3.21)$$

além dos coeficientes de espalhamento  $s_{lm}$ , temos os coeficientes de transmissão da onda  $b_{lm}$ , que podem ser expressos por:

$$b_{lm} = \frac{k_0 \rho_1 [j_l(k_0 a) h_l^{(1)'}(k_0 a) - j'_l(k_0 a) h_l^{(1)}(k_0 a)]}{k_0 \rho_1 j_l(k_1 a) h_l^{(1)'}(k_0 a) - k_1 \rho_0 j'_l(k_1 a) h_l^{(1)}(k_0 a)}. \quad (3.22)$$

### 3.2.2 Partícula Rígida

A partir da análise anterior da esfera penetrável vamos estender nossa análise pros limites de rigidez da esfera, tratando o caso onde o espalhador é "Acusticamente Rígido", sendo definido ao impor zero a condição de contorno Eq.(3.2), ou seja, não há deformações na superfície da esfera, ela é considerada completamente incompressível e não deformável, isso significa que a onda incidente não consegue deformar a superfície da esfera, resultando em uma condição de contorno de deformação zero. Nesse limite, a esfera reflete totalmente a onda incidente, sem permitir que ela penetre ou cause deformações, sendo essencialmente uma barreira rígida para a onda incidente.

Para avaliar esses limites, consideramos os campos do problema com a onda incidente, dados nas Eqs. (3.16) a (3.18), e aplicamos a seguinte condição de contorno,

$$\phi_{in} + \phi_{sc} = \phi_1 = 0, \quad (3.23)$$

isso implica que  $\phi_1 = 0$ , não há penetração da onda acústica nesse centro espalhador, de forma  $b_{lm} = 0$ , para todo  $l$ ; e os coeficientes de espalhamento são definidos como,

$$s_{lm} = - \frac{j_l(k_0 a)}{h_l^{(1)}(k_0 a)}, \quad (3.24)$$

ou seja, a razão da função de Bessel pela função de Hankel de primeiro tipo. A segunda condição de contorno a ser satisfeita é,

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\phi_{in} + \phi_{sc}) = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \phi_1 = 0, \quad (3.25)$$

que também fornece duas informações importantes: a primeira, semelhante ao caso anterior, é a não penetrabilidade do campo acústico no centro espalhador, pois  $b_{lm} = 0$  para todo  $l$ ; a segunda é a determinação dos coeficientes do campo espalhado como,

$$s_{lm} = -\frac{j_l'(k_0 a)}{h_l^{(1)'}(k_0 a)}, \quad (3.26)$$

ou seja, a razão da derivada das funções de Bessel e da função de Hankel de primeiro tipo no ponto  $k_0 a$ , [5].

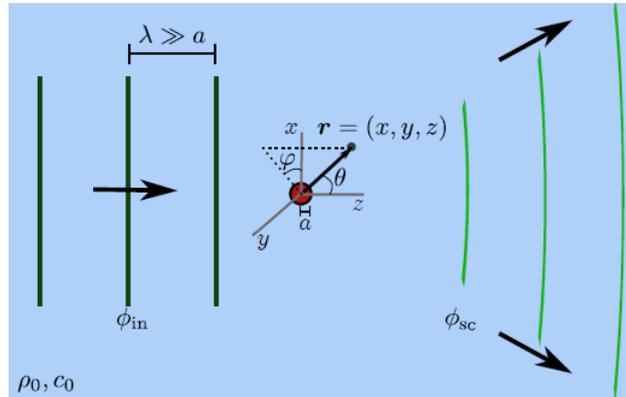
### 3.2.3 Sólido Viscoelástico

Seguiremos apresentando a teoria de espalhamento acústico para uma partícula esférica feita de um material sólido viscoelástico suspensa em um fluido ideal com uma onda acústica arbitrária. Nesse problema físico, temos uma onda viajando em um fluido ideal e incompressível, em um ponto específico dessa trajetória, há um obstáculo com simetria esférica que espalha a onda, esse obstáculo é feito de um material viscoelástico, o que significa que ele pode absorver as ondas longitudinais e de cisalhamento em seu interior, quando o obstáculo é submetido a forças que tentam deformá-lo, ele responde de forma elástica e viscosa, isso significa que ele pode retornar à sua forma original após a deformação, como um material elástico, mas também apresenta dissipação de energia devido às forças de atrito internas, como um material viscoso, na Fig.(4) temos uma ilustração do problema.

As características viscoelásticas do material têm um papel importante na interação da onda com o obstáculo, elas afetam a absorção e a reflexão da onda, bem como a forma como o obstáculo se comporta sob a influência da onda; o estudo desse tipo de problema permite entender como as propriedades viscoelásticas do material afetam o espalhamento e a propagação da onda.

O espalhamento nesse tipo de material pode ser feito com base no modelo de Kelvin-Voigt fracionário; uma generalização do modelo de Kelvin-Voigt, que descreve a dependência da lei de potência da frequência observada experimentalmente em vários materiais viscoelásticos, e pode ser consultado em maiores detalhes nas Referências [7, 5].

Figura 4 – Representação esquemática, uma onda plana incide sobre uma esfera sólida viscoelástica.



**Fonte:** Leão Neto, 2015

Ao incidir uma onda sobre a partícula viscoelástica, ocorre uma divisão da energia da onda em duas componentes: absorção e espalhamento. A absorção refere-se à parte da onda que é absorvida pelo material da partícula, resultando em uma dissipação de energia e conseqüente aumento da temperatura do material. A parte da onda que não é absorvida é chamada de onda espalhada. Tanto a onda incidente quanto a onda espalhada podem ser descritas em termos dos potenciais de velocidade, quantidades que descrevem o movimento das partículas do meio de propagação da onda; estão relacionados à pressão acústica e ao deslocamento das partículas do meio,

$$\phi_{in}(r)e^{-i\omega t}, \quad (3.27)$$

$$\phi_{sc}(r)e^{-i\omega t}, \quad (3.28)$$

assim, podemos obter informações detalhadas sobre a distribuição de energia e o comportamento da onda no interior da partícula viscoelástica. que nos permite analisar a absorção e o espalhamento da onda em termos das propriedades viscoelásticas do material e compreender melhor os efeitos resultantes da interação entre a onda acústica e a partícula viscoelástica. As amplitudes dos potenciais de velocidade satisfazem a equação de onda de Helmholtz Eq.(2.48),

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{pmatrix} \phi_{in} \\ \phi_{sc} \end{pmatrix} = 0, \quad (3.29)$$

na aproximação linear, de acordo com as Eqs. (2.42) e (2.45), a pressão incidente (espalhada) e a velocidade do fluido são relacionados por:

$$p_{in(sc)} = i\rho_0\omega\phi_{in(sc)}, \quad (3.30)$$

$$v_{in(sc)} = \nabla \phi_{in(sc)}, \quad (3.31)$$

no [Apêndice 3](#) ao resolver a equação de Helmholtz para o problema de espalhamento acústico, expressamos as amplitudes dos potenciais incidente e espalhado em termos de uma série de ondas parciais, representação conhecida como expansão multipolar:

$$\phi_{in}(kr, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} a_{lm} j_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (3.32)$$

$$\phi_{se}(kr, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} a_{lm} s_{lm} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (3.33)$$

$a_{lm}$  é o coeficiente de forma do feixe da onda incidente e  $s_{lm}$  é o coeficiente de espalhamento escalar. Para a onda espalhada  $\phi_{sc}$  não consideramos a região que inclui a origem do sistema de coordenadas e sua amplitude da onda espalhada deve satisfazer a condição de radiação Sommerfeld no infinito,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r (\partial r - ik) \phi_{sc} = 0, \quad (3.34)$$

para a onda incidente, representada pela Eq.(3.32), buscamos uma solução que seja regular na origem e finita dentro da região de propagação. O coeficiente de forma do feixe pode ser determinado avaliando o potencial de velocidade incidente, conforme descrito na Eq.(3.31), sobre uma superfície esférica de controle com raio  $R \gg a$ . Multiplicando a Eq.(3.32) por  $Y_l^{m*}(\theta, \varphi)$  e integrando sobre um ângulo sólido ( $\Omega_{sl} = \sin \theta d\theta d\varphi$ ), utilizando a relação de ortogonalidade dos harmônicos esféricos, obtemos o resultado desejado,

$$a_{lm} = \frac{1}{j_l(kR)} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \phi_{in}(kR, \theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (3.35)$$

quando integramos o produto do potencial de velocidade incidente  $\phi_{in}(kR, \theta, \varphi)$  com o complexo conjugado do harmônico esférico  $Y_l^{m*}(\theta, \varphi)$  sobre um ângulo sólido, estamos efetivamente projetando o potencial de velocidade incidente na direção do harmônico esférico específico. Essa projeção é necessária para determinar os coeficientes de forma do feixe de onda incidente  $a_{lm}$ , pois os harmônicos esféricos formam uma base ortogonal no espaço das funções sobre a esfera. A presença do conjugado do harmônico esférico é uma parte essencial do processo de integração que nos permite calcular esses coeficientes.

Para a onda espalhada, não consideramos a região que inclui a origem do sistema de coordenadas, uma vez que estamos interessados na interação da onda com a interface fluido-viscoelástica na superfície da partícula. O coeficiente de espalhamento escalar  $s_l$  é determinado aplicando as condições de contorno apropriadas nessa interface. Essas

condições são derivadas das propriedades viscoelásticas e determinam como a onda se comporta ao se propagar e interagir com a partícula.

Supondo ondas incidentes e espalhadas muito longe da esfera  $kr \gg 1$ , substituímos a forma assintótica da função de Bessel esférica Eq.(9) do apêndice 1 na Eq.(3.32), e a forma assintótica da função de Hankel de primeiro tipo Eq.(11) do apêndice 1 na Eq.(3.33), consulte o [Apêndice 1](#), com isso temos,

$$\phi_{in}(kr, \cos \theta, \varphi) \sim \frac{1}{kr} \sum_{l,m} a_{lm} \sin \left( kr - \frac{l\pi}{2} \right) Y_l^m(\cos \theta, \varphi), \quad (3.36)$$

em que o símbolo “ $\sim$ ” denota “é assintótico a”; a dependência radial na função seno decorre do comportamento assintótico da função de Bessel esférica para argumentos grandes;  $k$  é o número da onda no meio fluido;  $a_{lm}$  são os coeficientes que medem as amplitudes das ondas parciais; e  $Y_l^m$  denotam os harmônicos esféricos,

$$\phi_{sc}(kr, \cos \theta, \varphi) \sim -\frac{ie^{ikr}}{kr} \sum_{l,m} i^{-l} s_{lm} a_{lm} Y_l^m(\cos \theta, \varphi), \quad (3.37)$$

no qual surgem os coeficientes espalhados  $s_l$ , a serem determinados na solução do problema de espalhamento. É preciso observar com cuidado a convergência da primeira série, especialmente para valores  $l \ll kr$  (onde  $k$  é o número de onda da onda incidente e  $r$  é a distância a partir da origem), é importante notar que a convergência da série pode ser um desafio, especialmente para valores pequenos de  $l$  em relação a  $kr$ . Portanto, em práticas numéricas, é comum limitar o número de termos na série para garantir a convergência adequada e obter resultados precisos. Podemos expressar as amplitudes dos potenciais dentro da partícula como funções regulares e finitas. Nesse caso, os potenciais longitudinais e de cisalhamento de Debye podem ser expressos na base de ondas parciais. As soluções da equação de Helmholtz no centro espalhador podem ser escritas da seguinte forma:

$$\phi_\ell(k_\ell r, \cos \theta, \varphi) = \sum_{l,m} b_{lm} a_{lm} j_l(k_\ell r) Y_l^m(\cos \theta, \varphi), \quad (3.38)$$

$$\psi_{s,1}(k_s r, \cos \theta, \varphi) = \sum_{l,m} c_{lm} a_{lm} j_l(k_s r) Y_l^m(\cos \theta, \varphi), \quad (3.39)$$

$$\psi_{s,2}(k_s r, \cos \theta, \varphi) = \sum_{l,m} d_{lm} a_{lm} j_l(k_s r) Y_l^m(\cos \theta, \varphi), \quad (3.40)$$

onde  $k_\ell$ ,  $k_s$  são os números de onda longitudinal e de cisalhamento e  $b_{lm}$ ,  $c_{lm}$ ,  $d_{lm}$ ,  $s_{lm}$  são os coeficientes de expansão determinados pela resolução do sistema linear obtido a partir das condições de contorno na superfície da partícula.

A completa enunciação do problema é feita pelas condições de contorno nesse caso, levando em conta a deformação da estrutura viscoelástica. Para isso, consideram-se as seguintes condições:

- O deslocamento radial da partícula  $w_r$ , na interface, deve ser igual ao deslocamento radial do fluido ideal que circunda a partícula  $(i/\omega)(v_{in,r} + v_{sc,r})$ , usando Eq.(3.31),

$$w_r(a, \theta, \varphi) = \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial r} [\phi_{in}(r, \theta, \varphi) + \phi_{sc}(r, \theta, \varphi)] \Big|_{r=a}, \quad (3.41)$$

- Na superfície, a pressão do fluido  $(p_{in} + p_{sc})$  deve ser igual à componente radial das tensões da partícula  $\sigma_{rr}$  (uma vez que essa pressão deve ser a única atuante na partícula) Desta forma, da Eq. (3.30), encontramos,

$$\sigma_{rr}(a, \theta, \varphi) = -i\rho_0\omega [\phi_{in}(a, \theta, \varphi) + \phi_{sc}(a, \theta, \varphi)], \quad (3.42)$$

- e para que a partícula não gire no fluido, as componentes tangenciais das tensões devem ser nulas,

$$\sigma_{r\theta}(a, \theta, \varphi) = 0, \quad (3.43)$$

$$\sigma_{r\varphi}(a, \theta, \varphi) = 0, \quad (3.44)$$

com essas condições de contorno, determinam-se os coeficientes de espalhamento e internos do campo acústico. Primeiramente, determina-se qual é a componente radial do vetor deslocamento,  $w_r$ , em termos dos potenciais escalares de Debye  $\phi_\ell$ ,  $\psi_{s,1}$  e  $\psi_{s,2}$ , de acordo com Ref [7],

$$w_r = \frac{\partial \phi_\ell}{\partial r} + \frac{\partial^2 (r\psi_{s,2})}{\partial r^2} + k_s^2 r \psi_{s,1}, \quad (3.45)$$

derivando o vetor deslocamento em termos dos potenciais escalares de Debye  $\phi_\ell$ ,  $\psi_{s,1}$  e  $\psi_{s,2}$  obtém-se as componentes do tensor de tensão em coordenadas esféricas [7],

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -[\lambda_e + (-i\omega\lambda_v)^\nu] k_\ell^2 \phi_\ell + 2[\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu] \\ & \times \left[ \partial_r^2 (\phi_\ell + \partial_r (r\psi_{s,1})) + k_s^2 \partial_r (r\psi_{s,1}) \right], \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = [\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu] & \left\{ 2\partial_r \left[ \frac{1}{r} \partial_\theta (\phi_\ell + \partial_r (r\psi_{s,1})) \right] \right. \\ & \left. + k_s^2 \left[ \partial_\theta \psi_{s,1} + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \left( \partial_r \psi_{s,2} - \frac{\psi_{s,2}}{r} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi} = [\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu] & \left\{ \frac{2}{\sin \theta} \partial_r \left[ \frac{1}{r} \partial_\varphi (\phi_\ell + \partial_r (r\psi_{s,1})) \right] \right. \\ & \left. + k_s^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \psi_{s,1} - \partial_\theta \left( \partial_r \psi_{s,2} - \frac{\psi_{s,2}}{r} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

aplicam-se, então, as condições de contorno em busca de um sistema de equações para  $s_l$ ,  $b_l$ ,  $c_l$  e  $d_l$ . Calculando a primeira Equação de contorno Eq.(3.41), usando as Eqs.(3.45), (3.46), (3.48), (3.32), (3.33), (3.38) e (3.40), obtemos,

$$\begin{aligned} b_l [lj_l(k_\ell r) - (k_\ell r) j_{l+1}(k_\ell r)] + c_l l(l+1) j_l(k_s r) = \frac{i}{\omega} & \{ lj_l(kr) - (kr) j_{l+1}(kr) \\ & + s_l [lh_l^{(1)}(kr) - (kr) h_l^{(1)}(kr)] \} \Big|_{r=a}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

fazendo uso da relação de recorrência Eq.(1) do [Apêndice 1](#);

$$j_{l+1}(x) = \frac{l}{x} j_l(x) - j_l'(x), \quad (3.50)$$

$j' = \partial_x j$ ; dentro da Eq.(3.49) encontramos a primeira equação do sistema linear

$$\overbrace{\left[ -i \left( \frac{ka}{\omega} \right) h_l^{(1)}(ka) \right]}^{\alpha_{11}} s_l + \underbrace{[(k_\ell a) j_l'(k_\ell a)]}_{\alpha_{12}} b_l + \overbrace{[l(l+1) j_l(k_s a)]}_{\alpha_{13}} c_l = \underbrace{\frac{ika}{\omega} j_l'(ka)}_{\beta_1}, \quad (3.51)$$

os termos  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$  e  $\alpha_{13}$  são os coeficientes de  $s_l$ ,  $b_l$  e  $c_l$ , respectivamente e  $\beta_1$  é uma constante.

Utilizando os potenciais de velocidade  $\phi_{in(sc)}$  e a componente radial da tensão Eq.(3.46) em termos dos potenciais escalares na segunda condição de contorno Eq.(3.42), obtemos:

$$\begin{aligned} -i\rho_0\omega [j_l(kr) + s_l h_l^{(1)}(kr)] = -[\lambda_e + (-i\omega\lambda_v)^\nu] & b_l k_\ell^2 j_l(k_\ell r) + 2[\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu \{ b_l k_\ell^2 j_l''(k_\ell r) \\ & + c_l [3k_s^2 j_l''(k_s r) + rk_s^3 j_l'''(k_s r) + k_s^2 j_l(k_s r) + rk_s^3 j_l'(k_s r)] \} \Big|_{r=0} \end{aligned} \quad (3.52)$$

manipulando as quantidades nessa equação usando as seguintes relações [7];

$$[\lambda_e + (-i\omega\lambda_v)^\nu] = \frac{\rho_1\omega^2}{k_s^2} \left( \frac{k_s^2 - 2k_\ell^2}{k_\ell^2} \right), \quad (3.53)$$

$$[\mu_e + (-i\omega\mu_v)^\nu] = \frac{\rho_1\omega^2}{k_s^2}, \quad (3.54)$$

e com as relações de recorrência Eq.(2) e Eq.(3) do [Apêndice 1](#), podemos reescrever a Eq.(3.2.3), como:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\left[\frac{i\rho_0(k_s a)^2}{\rho_1\omega} h_l^{(1)}(ka)\right]}^{\alpha_{21}} s_l + \overbrace{\{[2l(l+1) - (k_s a)^2]j_l(k_\ell a) - 4(k_\ell a)j_l'(k_\ell a)\}}^{\alpha_{22}} b_l \\ & + \underbrace{\{2l(l+1)[(k_s a)j_l'(k_s a) - j_l(k_s a)]\}}_{\alpha_{23}} c_l = - \underbrace{\frac{i\rho_0(k_s a)^2}{\rho_1\omega} j_l k a}_{\beta_2}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

essa é a segunda equação do sistema linear da forma  $\alpha_{21}s_l + \alpha_{22}b_l + \alpha_{23}c_l = \beta_2$  a ser usada para determinar os coeficientes de expansão. Utilizando a componente tangencial da tensão Eqs. (3.47) e (3.48) em função dos potenciais de Debye. A terceira condição de contorno Eq. (3.43) produz,

$$\begin{aligned} \frac{im}{\sin\theta} d_l [(k_s a)^2 j_l'(k_s a) - (k_s^2 a) j_l(k_s a)] Y_l^m(\cos\theta, \varphi) &= 2b_l [j_l(k_\ell a) - (k_\ell a) j_l'(k_\ell a)] \partial_\theta Y_l^m(\cos\theta, \varphi) \\ + c_l [2j_l(k_s a) - (k_s a)^2 j_l(k_s a) - 2(k_s a) j_l'(k_s a) - 2(k_s a)^2 j_l''(k_s a)] &\partial_\theta Y_l^m(\cos\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (3.56)$$

utilizando a Eq.(3.48), a quarta condição de contorno Eq. (3.44) nos leva a:

$$\begin{aligned} d_l [(k_s a)^2 j_l'(k_s a) - (k_s^2 a) j_l(k_s a)] \partial_\theta Y_l^m(\cos\theta, \varphi) &= -\frac{im}{\sin\theta} \{2b_l [j_l(k_\ell a) - (k_\ell a) j_l'(k_\ell a)] \\ + c_l [2j_l(k_s a) - (k_s a)^2 j_l(k_s a) - 2(k_s a) j_l'(k_s a) - 2(k_s a)^2 j_l''(k_s a)]\} &Y_l^m(\cos\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (3.57)$$

combinando a Eq.(3.56) com a Eq.(3.57), obtemos:

$$d_l [(k_s a)^2 j_l'(k_s a) - (k_s a) j_l(k_s a)] = 0 \quad (3.58)$$

que deve ser válida para todos os  $d_l$ , bem como para as funções às quais estão multiplicando  $d_l$ . Assim, os coeficientes  $d_l = 0, \forall l = 0, 1, \dots$  ou seja, os coeficiente de espalhamento  $d_l$  que aparece na Eq.(3.40) será nulo, de modo que o potencial escalar de Debye para ondas de cisalhamento  $\psi_{s,2}$  é zero. Portanto, apenas um potencial de Debye  $\psi_{s,1}$  é necessário para descrever a propagação de ondas de cisalhamento no interior de uma partícula esférica. Dessa forma a Eq.(3.56) pode ser reescrita como,

$$\overbrace{\{2[j_l(k_\ell a) - (k_\ell a)j'_l(k_\ell a)]\}}^{\alpha_{32}} b_l + \underbrace{\{2(k_s a)j'_l(k_s a) + [(k_s a)^2 - 2l(l+1) + 2]j_l(k_s a)\}}_{\alpha_{33}} c_l = \overbrace{0}^{\beta_3} \quad (3.59)$$

sendo essa a última equação do sistema linear de equações a ser resolvido. A aplicação das condições de contorno produziu um conjunto de três equações algébricas lineares Eq.(3.51), (3.55) e (3.59) que podem ser expressas na sua forma matricial seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_l \\ b_l \\ c_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

os coeficientes  $\alpha$  da matriz tem seus termos explicitos nas Eqs.(3.51), (3.55) e (3.59). Esse sistema pode ser resolvido inteiramente determinando-se a matriz inversa de  $\alpha$ ,  $\alpha^{-1}$ , assumindo que ela exista. Dessa forma, todos os coeficientes possuem fórmulas explícitas e analíticas, de forma que o problema está completamente determinado com essa equação. Utilizando a regra de Cramer para resolver o sistema linear obtemos o coeficiente de espalhamento escalar  $s_{lm}$ ;

$$s_{lm} = \det \begin{bmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (3.61)$$

os elementos da matriz são dados na tabela 1. Conforme Referência [7], o espalhamento de uma onda por uma pequena partícula de raio muito menor do que o comprimento de onda é conhecido como espalhamento Rayleigh. Nesse caso, é definido um parâmetro de escala em termos do tamanho da partícula,  $\varepsilon = ka \ll 1$ . Com isso, a expansão de ondas parciais da onda espalhada dada na Eq. (3.33) é reduzida para termos que envolvem somente os coeficientes de espalhamento de monopolo  $s_{00}$  e dipolo  $s_{10}$  da Eq.(3.61) expandidos em série de Taylor em torno de  $\varepsilon = 0$  usando o software Mathematica, assim te-mos:

$$s_{00} = -i\frac{f_0}{3}\varepsilon^3 + ig_0\varepsilon^5 - \frac{f_0^2}{9}\varepsilon^6 + O(\varepsilon^8 + i\varepsilon^7), \quad (3.62)$$

$$s_{10} = i\frac{f_1}{6}\varepsilon^3 + ig_1\varepsilon^5 - \frac{f_1^2}{36}\varepsilon^6 + O(\varepsilon^8 + i\varepsilon^7), \quad (3.63)$$

onde  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $g_0$ , e  $g_1$  são coeficientes complexos que dependem das propriedades viscoelásticas da partícula. O coeficiente  $f_1$  é real, enquanto que a parte imaginária de  $f_0$ ,  $g_0$ , e  $g_1$  estão relacionadas com as propriedades de absorção da partícula espalhadora; para

uma partícula não absorvedora, os coeficientes  $f_0$ ,  $f_1$ , e  $g_1$  são quantidades reais. Tabela 1: Coeficientes de espalhamento dados na Eq. (3.61), os Elementos da matriz dessa equação são dados aqui,

Tabela 2 – Coeficientes de espalhamento dados na Eq.(3.61).

$\beta_1$	$i(ka/\omega)j'_l(ka)$
$\beta_2$	$-i(\rho_0/\rho_1\omega)k_s^2a^2j_l(ka)$
$\alpha_{11}$	$-i(ka/\omega)h_l^{(1)}(ka)$
$\alpha_{12}$	$k_\ell a j'_l(k_\ell a)$
$\alpha_{13}$	$l(l+1)j_l(k_s a)$
$\alpha_{21}$	$i(\rho_0/\rho_1\omega)k_s^2a^2h_l^{(1)}(ka)$
$\alpha_{22}$	$-4k_\ell a j'_l(k_\ell a) + [(2l)(l+1) - k_s^2a^2] j_l(k_\ell a)$
$\alpha_{23}$	$2l(l+1)[k_s a j'_l(k_s a) - j_l(k_s a)]$
$\alpha_{31}$	0
$\alpha_{32}$	$2[j_l(k_\ell a) - k_\ell a j'_l(k_\ell a)]$
$\alpha_{33}$	$2k_s a j'_l(k_s a) + [(k_s a)^2 - 2l(l+1) + 2] j_l(k_s a)$

**Fonte:** Leão Neto, 2015.

É importante ressaltar que essa é a solução geral sem aproximações do problema de espalhamento por uma esfera viscoelástica. As equações foram derivadas com base nas referências [7, 61, 5] que devem ser consideradas para uma análise mais detalhada do problema de espalhamento. Apesar de não trivial, os resultados aqui revisitados da literatura podem ser usados para o cálculo da energia depositada durante o processo de interação, bem como de campos acústicos médios (Força e Torque de radiação acústica) resultantes.

### 3.3 Partícula com Geometria Esferoidal

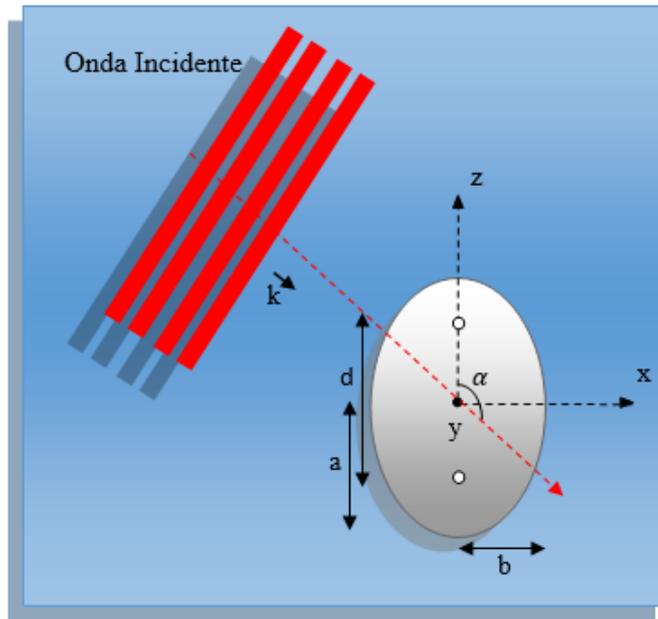
A maioria das análises teóricas sobre espalhamento acústico em fluidos assume que as partículas têm forma esférica [40]; mas essa é uma simplificação que não representa todas as situações da realidade. A forma esférica é considerada uma forma geométrica idealizada, onde a partícula é simétrica em todas as direções, essa suposição simplifica o problema, permitindo que equações matemáticas mais simples sejam aplicadas para descrever o comportamento da partícula em resposta à onda acústica. Ao considerar partículas com formas não esféricas, as técnicas analíticas exatas podem se tornar impraticáveis, nesses casos, são necessárias abordagens numéricas mais sofisticadas, como métodos de elementos finitos, métodos de diferenças finitas ou métodos de elementos de contorno, para resolver o problema da força de radiação.

A ortogonalidade das funções de onda esféricas é uma das propriedades fundamentais que facilita a solução de problemas envolvendo partículas esféricas. Ao considerar objetos não esféricos, as condições de contorno formuladas em coordenadas esféricas se tornam mais complexas. A dependência dos ângulos coordenados faz com que a distância radial a um ponto na superfície da partícula varie com esses ângulos, isso implica funções de onda não necessariamente ortogonais, o que torna as soluções exatas do problema de espalhamento mais difíceis de serem obtidas de forma exata.

### 3.3.1 Teoria de Espalhamento Acústico para o Esferoide Rígido

Considere uma partícula esferoidal rígida (Esferoide Prolate) com eixo maior  $a$  e menor  $b$  imersa em fluido ideal (água), o fluido possui densidade  $\rho_0$  e compressibilidade  $\beta_0$ , e o som se propaga à uma velocidade  $c_0$ . A partícula encontra-se na origem do sistema de coordenadas Fig.(5) com o eixo  $z$  coincidindo com seu eixo de rotação e uma distancia interfocal de  $d = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ .

Figura 5 – Onda incidente sobre uma partícula esferoidal rígida.



Fonte: Autor, 2023

Respeitando a simetria, usaremos coordenadas esferoidais prolatas para descrever o espalhamento acústico. A seguir as relações de coordenadas cartesianas-esferoidais,

$$x = \frac{d}{2}\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \quad (3.64)$$

$$y = \frac{d}{2}\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \quad (3.65)$$

$$z = \frac{d\xi\eta}{2}, \quad (3.66)$$

$\xi \geq 1$  é a coordenada radial esferoidal,  $-1 \leq \eta \leq 1$  e  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  é o ângulo azimutal. A superfície da partícula esferoidal prolata é determinada por  $\xi = \xi_0 = \epsilon_0^{-1} = 2a/d$  a proporção da partícula é  $a/b = (1 - \xi_0^{-2})^{-1/2}$  e seu volume é expresso por  $V = 4\pi ab^2/3 = \pi d^3 \xi_0 (\xi_0^2 - 1)/6$ . Observe que ao fixar  $\epsilon_0 = 0$  recuperamos uma partícula esférica. A conexão entre coordenadas esferoidais com distância radial  $r$  e ângulo polar  $\theta$  pode ser feita usando:

$$r = \frac{d}{2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}, \quad \cos \theta = \frac{\eta\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}}. \quad (3.67)$$

A partícula espalha uma onda plana estacionária de frequência angular  $\omega$  e número de onda  $k = 2\pi/\lambda$ , sendo  $\lambda$  o comprimento de onda. Definimos o parâmetro de expansão em termos da razão interfocal-comprimento de onda  $\epsilon = kd/2 \ll 1$ ; esse é um limite onde os modos de monopolo e dipolo das ondas incidentes e dispersas são suficientes para descrever a interação onda-partícula, e assim as funções potenciais de velocidade de ambas podem ser escritos em coordenadas esferoidais,

$$\phi_{in} = \phi_0 \sum_{l=0}^1 \sum_{m=-l}^l a_{lm} S_{lm}(\epsilon, \eta) R_{lm}^{(1)}(\epsilon, \xi) e^{im\varphi}, \quad (3.68)$$

$$\phi_{sc} = \phi_0 \sum_{l=0}^1 \sum_{m=-l}^l a_{lm} s_{lm} S_{nm}(\epsilon, \eta) R_{lm}^{(3)}(\epsilon, \xi) e^{im\varphi}, \quad (3.69)$$

$a_{lm}$  e  $s_{lm}$  são os coeficientes de forma do feixe e de espalhamento respectivamente,  $\phi_0$  é uma constante,  $S_{lm}$  é uma função angular do primeiro tipo, e  $R_{lm}^{(1)}$  e  $R_{lm}^{(3)}$  são as funções radiais do primeiro e terceiro tipo. além disso a dependência temporal  $e^{i\omega t}$  é omitida por simplicidade.

Os coeficiente vão ser determinados usando as condições de contorno na superfície da partícula ( $\xi = \xi_0$ ), por se tratar de um material rígido a componente normal da velocidade do fluido na superfície da partícula deve ser igual à derivada parcial da soma dos potenciais incidente e espalhado com relação à coordenada radial ( $\xi$ ) na superfície da partícula [40],

$$\phi_\xi(\xi_0) = \partial_\xi(\phi_{in} + \phi_{sc})_{\xi=\xi_0}, \quad (3.70)$$

com essas condições aplicadas aos potenciais  $\phi_{in}$  e  $\phi_{sc}$ , temos o coeficiente de espalhamento

$s_{lm}$ ,

$$s_{lm} = -\frac{\partial_{\xi_0} R_{lm}^{(1)}(\epsilon, \xi_0)}{\partial_{\xi_0} R_{lm}^{(3)}(\epsilon, \xi_0)}, \quad (3.71)$$

como estamos considerando uma partícula no limite de espalhamento de Rayleigh, usamos a aproximação  $\epsilon \ll 1$ , com isso os modos de monopolo ( $l = 0$ ) e dipolo ( $l = 1$ ) são suficientes para descrever o espalhamento acústico. Com isso, expandimos em série de Taylor as funções radiais conforme [Apêndice 2](#) e substituindo na equação anterior temos os coeficientes de espalhamento,

$$s_{00} = -\frac{i\epsilon^3}{3} f_{00} \frac{\epsilon^6}{9} f_{00}^2, \quad s_{10} = \frac{i\epsilon^3}{6} f_{10} \frac{\epsilon^6}{36} f_{10}^2, \quad s_{1,-1} = s_{11} = -\frac{i\epsilon^3}{12} f_{11} \frac{\epsilon^6}{144} f_{11}^2, \quad (3.72)$$

$f_{00}$ ,  $f_{10}$  e  $f_{11}$  são os fatores de espalhamento descritos como,

$$f_{00} = \xi_0 (\xi_0^2 - 1) = \frac{3k^3 V}{4\pi\epsilon^3}, \quad (3.73)$$

$$f_{10} = \frac{2}{3} \left[ \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} - \ln \left( \frac{\xi_0 + 1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \right) \right]^{-1}, \quad (3.74)$$

$$f_{11} = \frac{8}{3} \left[ \frac{2 - \xi_0^2}{\xi_0(\xi_0^2 - 1)} + \left( \frac{\xi_0 + 1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \right) \right]^{-1}. \quad (3.75)$$

usando a aproximação de campo distante)  $k\xi \gg 1$ , o sistema esferoidal se reduz à coordenada esférica  $\epsilon\xi = kr + O(\xi^{-1})$ ,  $\eta = \cos\theta + O(\xi^{-2})$ . Além disso, as funções esferoidais tornam-se [40]:

$$R_{lm}^{(1)}(\epsilon\xi) \underset{\epsilon\xi \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{kr} \sin \left( kr - \frac{l\pi}{2} \right), \quad (3.76)$$

$$R_{lm}^{(3)}(\epsilon, \xi) \underset{\epsilon\xi \rightarrow \infty}{\sim} i^{-n-1} \frac{e^{ikr}}{kr}, \quad (3.77)$$

$$S_{lm}(\epsilon, \eta) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} P_l^m(\cos\theta), \quad (3.78)$$

$P_l^m$  é o polinômio de Legendre. Também precisamos dos harmônicos esféricos de ordem  $n$  e grau  $m$ , que são dados por:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \quad (3.79)$$

ao substituir as funções esferoidais Eqs.(3.76), (3.77) e (3.78) nos potenciais de velocidade Eqs.(3.68) e (3.69) usando  $Y_l^m$ , os potenciais de velocidade na aproximação de campo distante normalizados em  $\phi_0$ , em coordenadas esféricas passam a ser,

$$\Phi_{in} = \frac{\phi_0}{kr} \sum_{l=0}^1 \sum_{m=-l}^l \tilde{a}_{lm} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (3.80)$$

$$\Phi_{sc} = \phi_0 \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{l=0}^1 \sum_{m=-l}^n i^{-l-1} \tilde{a}_{lm} s_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (3.81)$$

$\tilde{a}_{lm}$  é o coeficiente em forma de feixe na base da função esférica, dado por:

$$\tilde{a}_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} a_{lm} \quad (3.82)$$

considerando uma onda plana estacionária a função de onda incidente torna-se,

$$\phi_{in} = \phi_0 \cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)] = \frac{\phi_0}{2} \left[ e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)} + e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)} \right], \quad (3.83)$$

onde  $\mathbf{r}_0$  aponta do centro da partícula para o antinodo de pressão mais próximo, que está na mesma direção do vetor de onda,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 = kr_0$ . Para obter o coeficiente de forma do feixe  $a_{lm}$ , usamos a expansão de onda parcial em coordenadas esféricas [40],

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 4\pi \sum_{l,m} i^l Y_l^{m*}(\theta_k, \varphi_k) j_l(kr) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (3.84)$$

os ângulos  $\theta_k$  e  $\varphi_k$ , são os ângulos polar e azimutal da direção de propagação da onda. A orientação da partícula é fixa ao longo da direção  $z$ . Usando a Eq.(3.84) em (3.83), com a seguinte relação dos harmônicos esféricos  $Y_l^{m*} = (-1)^m Y_l^{-m}$ , obtemos:

$$a_{lm} = 4\pi \cos\left(kr_0 + \frac{l\pi}{2}\right) Y_l^{m*}(\theta_k, \varphi_k), \quad (3.85)$$

o espalhamento acústico de uma onda plana estacionária foi derivado com base nas Refs.[39, 40], que podem ser consultadas para mais detalhes.

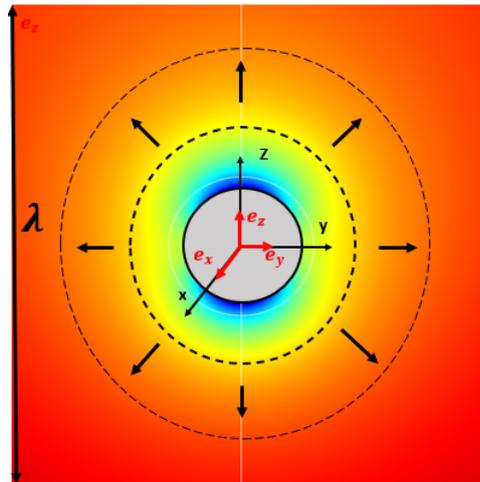
### 3.4 Método Semianalítico

O método semianalítico é de extrema importância na análise do espalhamento acústico por uma partícula, pois combina a simplicidade e eficiência das soluções analíticas

com a capacidade de considerar geometrias e condições mais realistas dos métodos numéricos, que podem não ser tratadas de forma exata pelas soluções puramente analíticas. Uma das vantagens do método semianalítico é que ele oferece uma maneira mais flexível e versátil de analisar o espalhamento acústico, permitindo a consideração de geometrias complexas e distribuições angulares mais realistas dos modos de espalhamento. Além disso, a utilização de funções de Hankel esféricas e harmônicos esféricos na expansão das ondas parciais facilita a análise matemática e numérica do problema.

Para descrever o método vamos considerar como exemplo uma partícula esférica de subcomprimento de onda com simetria rotacional em torno de seu eixo principal (axisimétrica) imersa em um fluido, conforme mostra a Fig.6, a partícula espalha uma onda incidente com amplitude de pressão  $p_{in}$ , frequência angular  $\omega$ , comprimento de onda  $\lambda$  e número de onda  $\mathbf{k}$ . O espalhamento é descrito em relação ao sistema de referência (x,y,z) fixado no centro da partícula, vetores unitários cartesianos do sistemas de referência são denotados por  $e_i$  com  $i = x, y, z$ .

Figura 6 – Onda incidente sobre uma partícula esférica, os círculos concêntricos pontilhados e as setas pretas mostram a direção da onda espalhada.



**Fonte:** Autor, 2023

Assumimos que o raio da partícula, denotada por  $a$ , é muito menor que o comprimento de onda,  $a \ll \lambda$ , ou seja, a chamada aproximação de comprimento de onda longo. Para determinar  $a$ , para uma partícula axisimétrica, primeiro observamos que a partícula ocupa uma região, dada em coordenadas esféricas, por  $(r, \theta, \varphi)$ , com  $0 \leq r \leq R(\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , nesse caso  $R$  é a distância radial até a superfície da partícula. O parâmetro de tamanho característico da partícula pode ser definido como:

$$\mathbf{k}a = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1, \quad (3.86)$$

como já vimos na seção (3.2.1.1), a pressão espalhada pela partícula é obtida resolvendo a

equação de Helmholtz com condições de contorno na superfície da partícula e a condição de radiação de Sommerfeld no campo distante ( $k\mathbf{r} \rightarrow \infty$ ). A solução em série representa a pressão dispersa como uma soma infinita de ondas parciais. É conveniente expressar as ondas parciais em coordenadas esféricas ( $r, \theta, \varphi$ ). Portanto, a onda parcial de ordem  $n$  é  $h_l(kr)Y_l^m(\theta, \varphi)$ , onde  $h_l$  é a função de Hankel esférica do primeiro tipo,  $Y_l^m$  é o harmônico esférico e  $m$  é o número que representa o momento angular orbital da onda. No caso de partículas muito menores que o comprimento de onda, a expansão em ondas parciais pode ser truncada no termo do momento dipolar ( $l = 1$ ). No caso da partícula esférica o erro de truncamento está na ordem de  $O[(ka)^2]$  [65]. Na aproximação do dipolo, a expansão em ondas parciais da pressão espalhada, como vimos nas Eqs.(3.62) e (3.63):

$$\begin{aligned}
p_{sc} = & p_0 \left[ a_{00}s_{00}Y_0^0(\theta, \varphi)h_0(kr) \right. \\
& + \left[ a_{1,-1}s_{1,-1}Y_1^{-1}(\theta, \varphi) + a_{10}s_{10}Y_1^0(\theta, \varphi) \right. \\
& \left. \left. + a_{11}s_{11}Y_1^1(\theta, \varphi) \right] h_1(kr) \right], \tag{3.87}
\end{aligned}$$

onde  $p_0$  e  $a_{lm}$  são a amplitude de pressão e o coeficiente de formato de feixe da onda incidente, respectivamente. O termo dependente do tempo  $e^{-i\omega t}$  é omitido por simplicidade. Temos quatro coeficientes de espalhamento que representam os modos monopolo ( $s_{00}$ ), dipolo transversal ( $s_{1,-1}$ ) e ( $s_{1,1}$ ) e dipolo axial ( $s_{10}$ ), É útil introduzir uma função que representa a distribuição angular do modo ( $l, m$ ) em uma superfície esférica de raio  $\mathbf{R} > a$  e centrada no centro da partícula,

$$p_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{\phi_{sc}(k\mathbf{R}, \theta, \varphi)}{\phi_0 a_{lm} h_l(k\mathbf{R})}, \tag{3.88}$$

usando a ortogonalidade dos harmônicos esféricos, os coeficientes de espalhamento são dados como a projeção da pressão espalhada normalizada no modo angular correspondente,

$$s_{lm} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \phi_{lm}(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta, \varphi), \tag{3.89}$$

os modos de dipolo transversal de uma partícula axisimétrica são degenerados, ( $s_{1,-1} = s_{1,1}$ ), [41]. Mas resolver essas equações analiticamente torna o problema mais complexo, com isso torna-se necessário o uso do método numérico. A Eq.(3.89) será implementada no Comsol para calcular o espalhamento da onda acústica sobre a partícula.

Na abordagem semianalítica apresentada, utiliza-se a teoria de Mie [66] para expressar a pressão espalhada como uma soma infinita de ondas parciais, onde cada onda parcial é representada por uma função de Hankel esférica do primeiro tipo e por harmônicos esféricos. Isso permite considerar diferentes modos de espalhamento, como o modo monopolo e os modos de dipolo transversal e axial, para descrever com maior

precisão a interação da onda sonora com a partícula. Embora o método semianalítico seja poderoso e amplamente utilizado, é importante mencionar que ele ainda requer uma análise cuidadosa e pode ser computacionalmente intensivo para certos casos complexos. Dependendo das características específicas da partícula e da onda incidente, pode ser necessário considerar um número significativo de modos de espalhamento para obter resultados precisos, o que pode aumentar a complexidade computacional.

## 4 Modelo Numérico

Neste capítulo será apresentada uma breve descrição sobre o Método de Elementos Finitos (FEM), e como foram realizadas as simulações numéricas através do método que está disponível no software comercial COMSOL Multiphysics<sup>®</sup>. Esse método basicamente utiliza a discretização de domínios para calcular aproximações para as soluções exatas de equações diferenciais parciais (EDPs),[67].

Podemos resumir o processo de modelagem computacional de um fenômeno físico em etapas, a primeira seria identificar fatores que influenciam de maneira relevante no problema, que implica na escolha adequada dos princípios físicos e das variáveis dependentes e independentes que descrevem o problema, resultando em um modelo matemático constituído por um conjunto de equações diferenciais. A segunda etapa consiste em obter a solução do modelo matemático, tarefa atribuída aos métodos numéricos.

O FEM tem origem na análise estrutural, com o surgimento dos primeiros computadores digitais no início da década de 50, os métodos matriciais para a análise estrutural tiveram um grande desenvolvimento. As primeiras aplicações envolviam apenas estruturas reticuladas, mas a crescente demanda por estruturas mais leves, conduziu ao desenvolvimento de métodos numéricos que pudessem ser utilizados nas análises de problemas mais complexos, [68].

Entre os trabalhos pioneiros nesta linha, podem-se citar os trabalhos de Turner [69] e Argyris [70]. Zienkiewicz [71], em seu histórico artigo “The Finite Element Method: from Intuition to Generality”, apresenta uma descrição mais detalhada da evolução do FEM nesta fase inicial. Na década de 70 o FEM teve suas aplicações estendidas a problemas de mecânica dos fluidos e, desde então, vem consolidando-se como um método mais geral de solução de equações diferenciais parciais (EDPs).

O método “discretiza o contínuo”, nessa perspectiva, simplifica e torna factível o cálculo de estruturas complexas. Simular um objeto qualquer antecipando seu comportamento pode ser uma atividade de alta complexidade considerando toda a variedade de fatores que a realidade impõe. No entanto, o método possibilita enxergar este objeto complexo em “pequenas partes” – elementos finitos, esses são conectados entre si por pontos, os quais são denominados de nós ou pontos nodais. Ao conjunto de todos esses itens – elementos e nós – dá-se o nome de malha. Em função dessas subdivisões da geometria, as equações matemáticas que descrevem o comportamento físico não serão resolvidas de maneira exata, mas de forma aproximada por este método numérico.

A precisão do método depende da quantidade de nós e elementos, do tamanho e dos tipos de elementos da malha. Ou seja, quanto menor for o tamanho e maior for

o número deles em uma determinada malha, maior a precisão nos resultados da análise. Porém, devemos considerar que a solução do problema converge à medida que o número de elementos na região aumenta e isto ocorre porque cada elemento fica com uma área tão pequena que dentro de sua fronteira, existirão apenas pontos com propriedades bem parecidas. Porém, essa convergência tem um limite, pois um número exagerado de elementos pode provocar a propagação de erros numéricos devido aos arredondamentos computacionais. Desta forma, pode-se fazer os devidos cálculos e simulações para as partes menores e depois expandir ao todo.

De forma bastante simplificada, o FEM pode ser entendido como uma aproximação discreta (número finito de incógnitas) para um problema contínuo (número infinito de incógnitas). Nesse tipo de método, a região do espaço que delimita o problema considerado é dividida em um número finito de elementos geométricos, sendo que em cada um deles o campo contínuo, no qual as variáveis da EDP são definidas, é modelado por uma aproximação polinomial local controlada por uma pequena quantidade de coeficientes. A conexão desses elementos através dos valores desses coeficientes em posições nodais compartilhadas, resulta em um conjunto de equações algébricas que pode ser resolvido numericamente por meio de métodos de otimização e de algoritmos matriciais.

## 4.1 Software de simulação Comsol Multiphysics

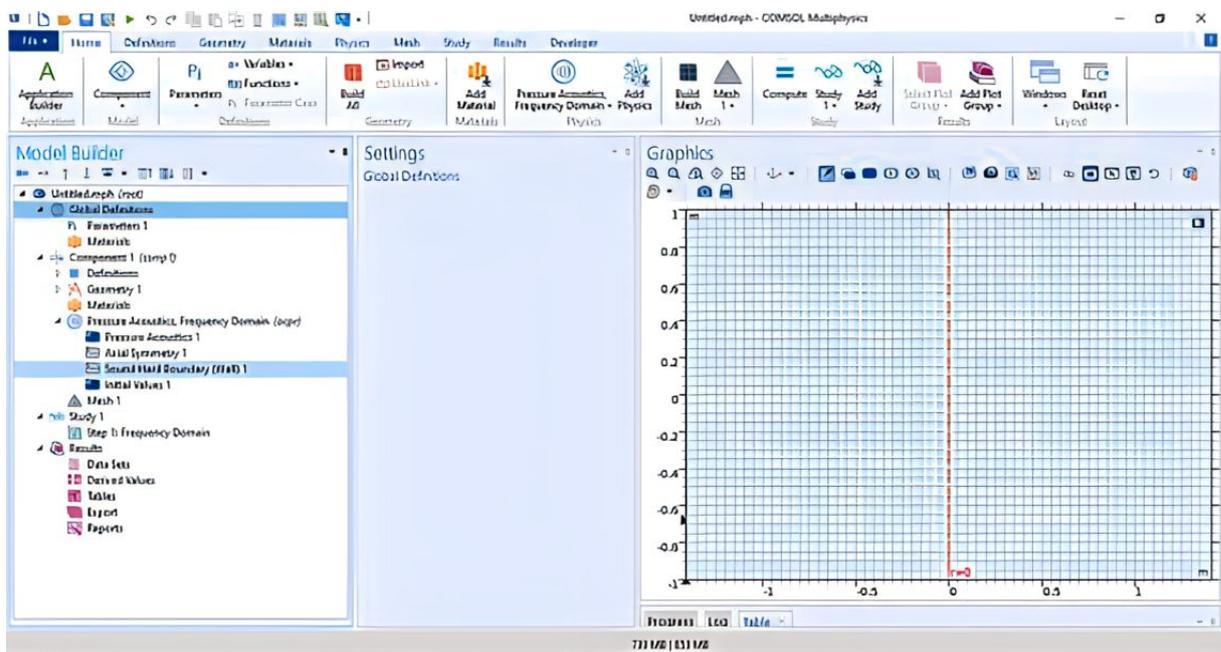
O COMSOL Multiphysics® é uma plataforma de simulação que fornece recursos de modelagem multifísica e de física única totalmente acopladas. Com ele é possível o desenvolver simulações e análises numéricas em diversas áreas, para o estudo de problemas que vão desde análises de escoamento de fluidos a comportamentos biológicos de células.

O software disponibiliza diversas áreas de trabalho denominadas de Módulos e dentro de cada módulo existem diversas interfaces de análises que podem ser configuradas e utilizadas juntas através da função *Multiphysics*. A estrutura do software é feita sob o modelo de blocos. Para acessar ao programa, existe a *Graphical User Interface* (GUI) que é dividido em três partes: *Model Builder* onde são exibidos os blocos utilizados na simulação, inclui todas as etapas do fluxo de trabalho de modelagem — desde a definição de geometrias, propriedades do material e a Física que descreve fenômenos específicos até a resolução e pós-processamento de modelos para produzir resultados precisos. *Configurações do nó* designado para edição e configuração dos nós e *Graphics* local para visualizar a geometria e os gráficos. A GUI e sua divisão são mostradas na Fig.(7). Foi utilizada a versão 6.0 do COMSOL Multiphysics®, com as seguintes configurações de entrada:

- Dimensão → *2D Axisymmetric*

- Módulo → *AcousticsModule*
- “Physics” envolvidas → *PressureAcoustics*
- Tipo de Study → *FrequencyDomain*

Figura 7 – Estrutura do software COMSOL Multiphysics®, Graphical User Interface (GUI).



Fonte: Autor, 2023

## 4.2 Geometria e Parâmetros das Simulações

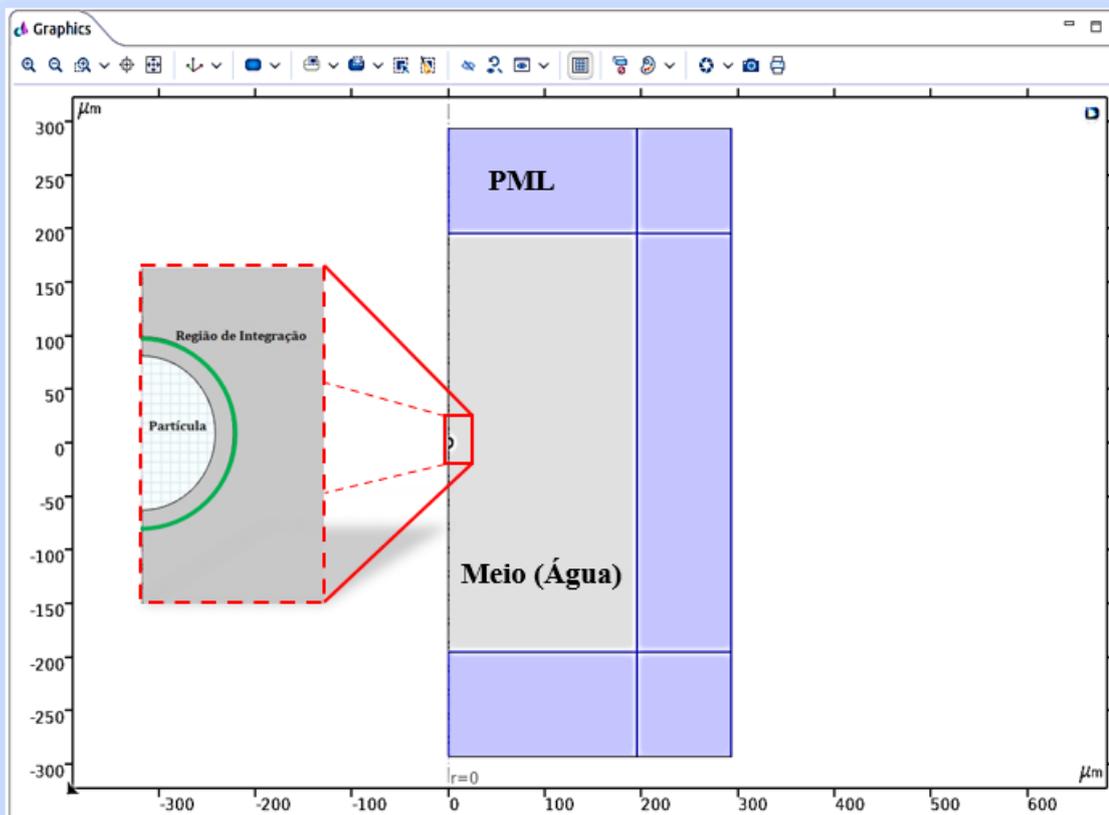
Na Fig.(8) temos uma ilustração da geometria utilizada para espalhamento de uma onda plana de comprimento de onda  $\lambda$  por uma esfera de raio  $a$  imersa em fluido que pode ser caracterizado por sua densidade  $\rho_0$  e pela velocidade do som nesse fluido  $c_0$ , basicamente tem-se um cilindro com uma esfera no centro, como estamos utilizando o COMSOL no modo 2D-axissimétrico, implementamos somente a metade da geometria, no final essa geometria é espelhada com relação ao eixo de simetria.

### 4.2.1 Geometria

A geometria usada nesse trabalho para analisar a interação entre uma onda de pressão acústica e uma partícula esférica pode ser desenhada usando as formas contidas no subnó *Geometry* dentro do nó *Component* na janela *Model Builder* do COMSOL. Primeiro

fizemos o *meio* onde a onda se propaga, ele é preenchido com água e sua forma geométrica é um retângulo com  $2,9 \times 10^{-4}m$  de largura e com comprimento duas vezes a largura, além de uma camada absorvedora *PML* na base, no topo e na extremidade direita do retângulo, e foi posicionado em  $r = 0$  em relação ao sistema de coordenadas adotado. O segundo passo é fazer a partícula composta basicamente de dois círculos em sequência com raios diferentes, com setor de  $180^\circ$  a direita do eixo de simetria e posicionados em  $z = r = 0$  em relação ao sistema de coordenadas, sendo o primeiro uma região de *Integração* onde o software calcula os coeficientes de espalhamento das ondas dispersar, e o segundo (círculo menor) a partícula em si.

Figura 8 – Geometria do problema de espalhamento em uma esfera.

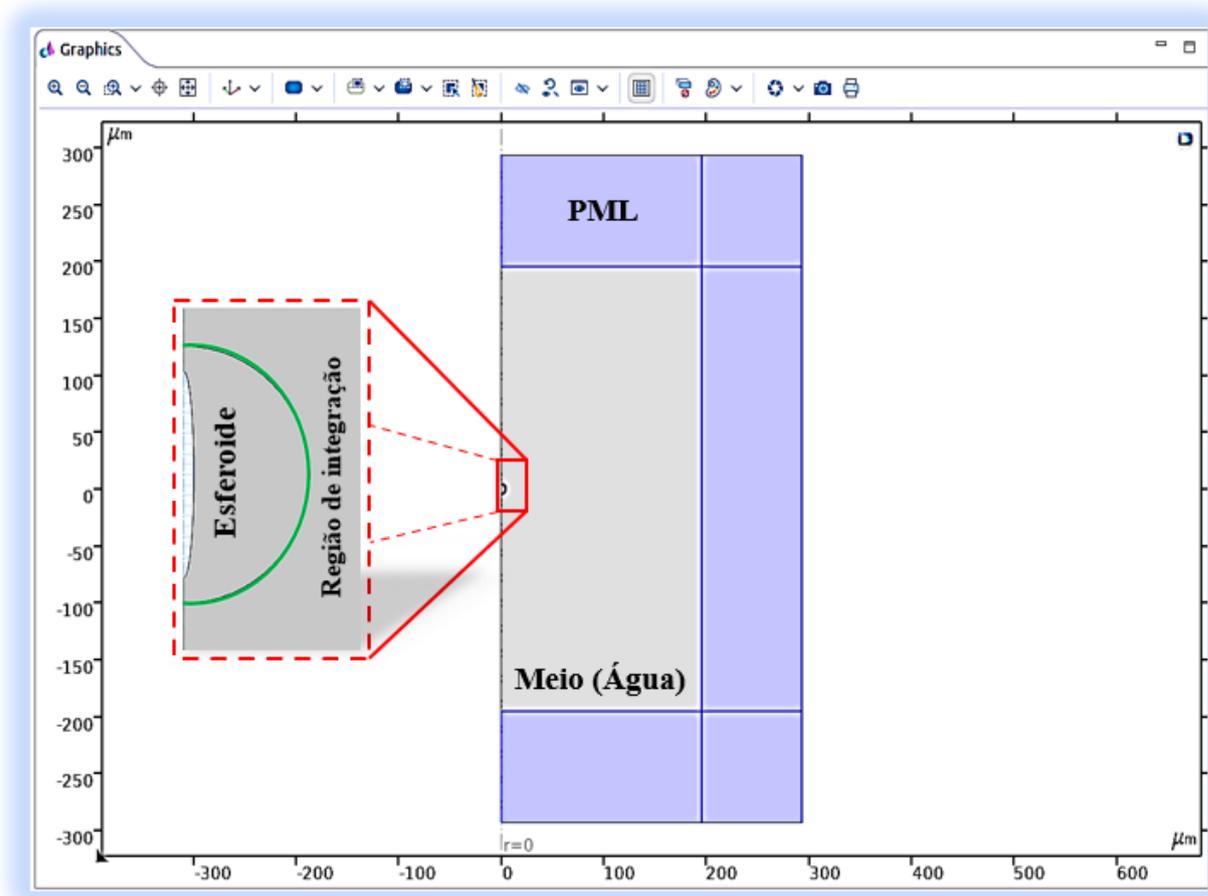


Fonte: Autor, 2023

A escolha da dimensão *2D Axisymmetric* se justifica devido a simetria axial, além de tornar a modelagem mais simples o que reduz a demanda computacional otimizando o tempo de trabalho. Essa opção gera um plano com sistema de coordenadas  $r$  (Vertical) e  $z$  (Horizontal). A Física usada *Pressure Acoustics*, possibilita calcular variações de pressão para propagação de ondas acústicas em fluidos em repouso e o tipo de estudo *Frequency Domain* calcula a resposta de um sistema submetido a uma excitação harmônica para valores de frequência.

Além disso também analisamos o espalhamento Acústico para uma partícula esferoidal, ver Sec.(3.3.1), nesse caso mantemos a geometria anterior do meio circundante alterando apenas a forma geométrica central, veja a figura a seguir,

Figura 9 – Geometria do problema de espalhamento em um esferoide.



Fonte: Autor, 2023

#### 4.2.2 Parâmetros da Simulação

Todas as simulações foram feitas usando como material para o *meio circundante* onde se propaga a onda acústica a água, na Tabela [3] temos alguns parâmetros fixos na simulação, esse como vários outros materiais estão disponíveis no COMSOL no nó *Materials*, que possui uma biblioteca como vários materiais diferentes, o software também possibilita a inserção de novos materiais, adicionando manualmente suas propriedades.

Para o material da partícula, fizemos três variações importantes, na primeira definimos a partícula como rígida, ver seção (3.2.2), que implica a não absorção das ondas, sendo essas totalmente refletidas; em seguida usamos óleo de oliva e definimos a partícula como fluida, ver seção (3.2.1) nesse caso a esfera espalhadora é penetrável ao campo acústico, a onda, de fato, entra em seu interior e portanto sofre mais influência da partícula

Tabela 3 – Parâmetros da simulação.

Parâmetros	Valor	Descrição
f	1 MHz	Frequência
$\lambda$	0.001481 m	Comprimento de onda
$k$	4242.5 m <sup>-1</sup>	Número de onda
Meio Fluido		Água
Domínio Computacional		Cilindro
$L_c$	2.9325x10 <sup>-4</sup> m	Largura do cilindro
$h_c$	5.865x10 <sup>-4</sup> m	Altura do cilindro
Particula		Esfera / Esferoide
a	3.91x10 <sup>-6</sup> m	Raio das particulas (Esféricas)
a - b	1 $\mu$ m – 10 $\mu$ m	Raio menor - maior (Esferoide)

**Fonte:** Autor, 2023

em comparação a uma partícula rígida, isso exige condições especiais, como a existência de uma função  $\phi_1$  no interior da partícula que descreve a onda acústica. Também definimos um material sólido viscoelástico, ver seção [3.2.3] que permite além da absorção de ondas longitudinais, ondas de cisalhamento em seu interior, logo, responde de maneira elástica e viscosa quando sob o efeito de forças que tentem deformá-lo.

### 4.2.3 Pressão Acústica

A Física de pressão acústica foi usada para analisar a propagação da onda acústica no meio circundante, bem como sua interação com a partícula, essa Física estudada no *Frequency Domain* calcula a variação de pressão para propagação de ondas acústicas de fluidos em repouso. Essa Física define automaticamente uma equação para ondas sonoras em um meio sem perdas por condução térmica e viscosidade,

$$\frac{1}{c_0^2 \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left( -\frac{1}{\rho_0} [\nabla p - q_d] \right) = Q_m, \quad (4.1)$$

com  $c_0$  e  $\rho_0$ , a velocidade do som e a densidade do fluido respectivamente,  $q_d$  é o vetor fonte tipo dipolo e  $Q_m$  é a fonte do tipo monopolo. Se  $q_d = Q_m = 0$  considerando que não há fontes no domínio da simulação a Eq.(4.1) corresponde a equação de onda Eq.(2.46) escrita em termos da pressão Eq.(2.38),

$$\nabla^2 p^{(1)} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial t^2}, \quad (4.2)$$

como estamos analisando a interação de uma onda acústica nas partículas, adicionamos um campo de pressão com a ferramenta *Background Pressure Field* contida no subnó *Pressure Acoustics Frequency Domain (acpr)* dentro do nó *Component* na janela de *Model*

*Builder*, com dependência espacial do tipo,

$$p(r) = e^{-ikz}, \quad (4.3)$$

à Física usada considera que a onda plana utilizada tem dependência harmônica com o tempo  $p(t) = e^{-i\omega t}$ , da Eq.(4.3) temos, a onda se propaga no sentido positivo de  $z$  com amplitude de 1 Pa. Usando a Eq.(4.3) podemos reescrever a Eq.(4.1),

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \quad (4.4)$$

que é a equação de Helmholtz para pressão, que descreve a propagação da onda no meio. Ao adicionarmos a Física na nossa simulação o COMSOL define algumas condições por padrão, uma delas é a interface *Sound Hard Boundary (Wall)*, uma condição de limite para um limite rígido ou parede sólida, que é um limite no qual o componente normal da aceleração (e, portanto, a velocidade) é zero:

$$-\mathbf{n} \cdot \left( -\frac{1}{\rho_c} (\nabla p_t - q_d) \right) = 0, \quad (4.5)$$

para fonte de domínio dipolo zero ( $q_d = 0$ ) e densidade de fluido constante  $\rho_c$ , isso significa que a derivada normal da pressão é zero no limite,  $\frac{\partial p_t}{\partial n} = 0$ , isso implica que:

$$-\mathbf{n} \cdot \left( -\frac{\nabla p}{\rho_0} \right) = 0, \quad (4.6)$$

$\mathbf{n}$  é o vetor normal a superfície onde essa condição é aplicada, o termo entre parênteses é a aceleração no fluido e vem da equação de movimento de Euler Eq.(2.13). Essa equação de contorno, equivale a uma condição de contorno de Neumann é aplicada nas extremidades da nossa geometria para evitar a passagem dos campos acústicos para fora do domínio da simulação, ela também é usada na superfície da partícula rígida, o que nos garante que a onda incidente será totalmente espalhada pela partícula não havendo absorção por ela.

#### 4.2.4 Mecânica dos Sólidos

Ao considerar a interação entre uma partícula sólida viscoelástica e a onda acústica, implementamos a Física *Solid Mechanics* no COMSOL, ela descreve o comportamento da partícula a ser perturbada pela onda acústica; baseada na resolução de equações de movimento e dinâmica de corpos rígidos. A partir disso é possível descrever a tensão e a deformação sofrida pelo objeto durante a interação. Para modelar o problema o Comsol utiliza a equação de movimento dada por:

$$\rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = \mathbf{F}_V + \nabla \cdot \zeta, \quad (4.7)$$

$\mathbf{u}$  é o vetor deslocamento,  $\rho_s$  é a densidade,  $F_V$  são forças volumétricas e  $\zeta$  é o tensor de tensões em um sólido. Uma expressão direta da lei de Newton, corresponde a Eq.(2.29), a Física *Solid Mechanics* é aplicada a superfície da partícula.

#### 4.2.5 Interface de Acoplamento das Físicas

O COMSOL Multiphysics® possui a capacidade de combinar e analisar diversas físicas simultaneamente, o que permite uma abordagem mais completa na resolução de problemas. No entanto, para obter uma descrição realista do problema em estudo, é necessário acoplar essas físicas de forma adequada, o COMSOL possui um recurso que desempenha o papel de acoplar as físicas necessárias. Para análise do sólido viscoelástico, utilizamos as físicas de "Pressure Acoustic" (Acústica de Pressão) e "Solid Mechanics" (Mecânica de Sólidos), para acoplar essas físicas, o COMSOL utiliza a interface "Acoustic-Structure Boundary" (Interface Fluido-Estrutura) que considera o fenômeno em que a pressão acústica gera uma carga de fluido no domínio sólido e a aceleração estrutural atua no domínio do fluido com uma aceleração normal através do domínio fluido-sólido.

Através da interface "Acoustic-Structure Boundary", é possível modelar a interação entre a pressão acústica e a estrutura sólida, permitindo uma análise mais realista do problema. É importante definir corretamente as condições de contorno nessa interface, levando em consideração os efeitos da pressão acústica e da aceleração estrutural ver 3.2.3, o COMSOL define as condições de contorno [67],

$$-\mathbf{n} \cdot \left( \frac{\nabla p}{\rho_0} \right) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{tt}, \quad e, \quad \mathbf{F}_A = p\mathbf{n}, \quad (4.8)$$

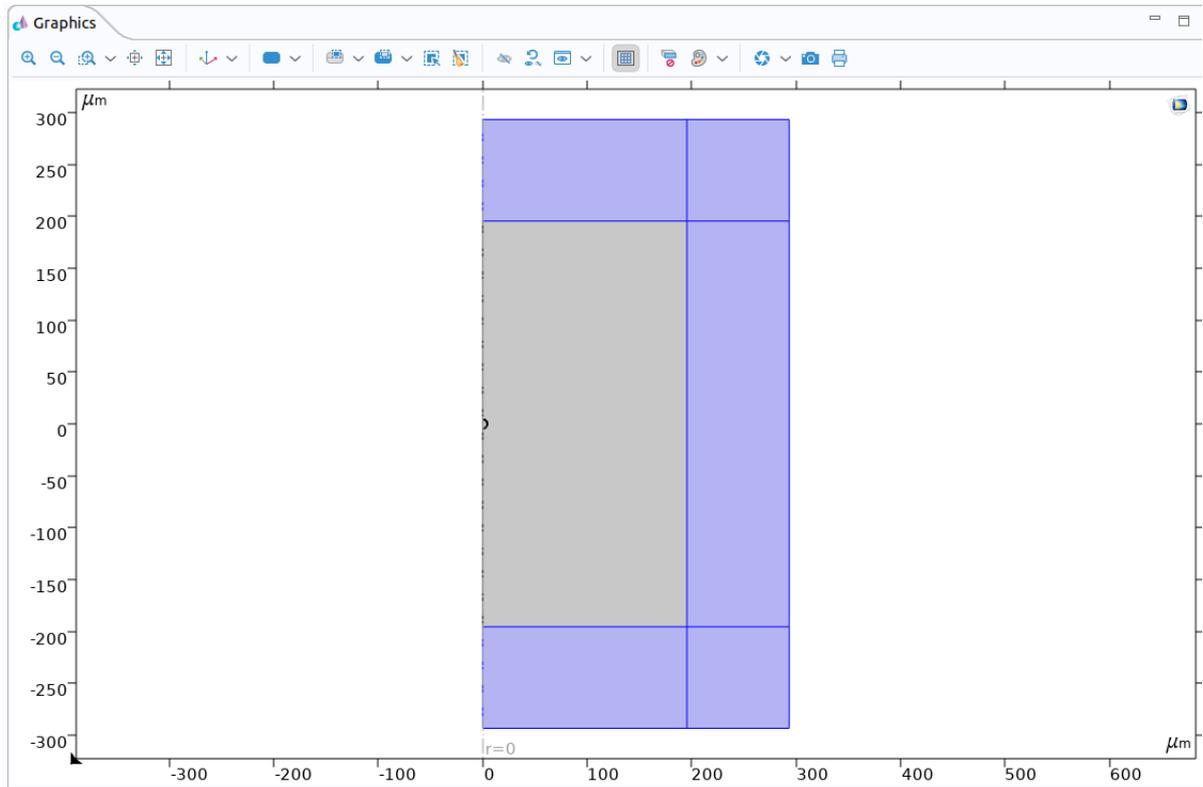
$\mathbf{u}_{tt}$  é a aceleração estrutural sofrida pelo sólido,  $\mathbf{n}$  é o vetor normal a superfície do sólido e  $F_A$  é a carga (Força por unidade de área) experimentada pela estrutura.

#### 4.2.6 Camada absorvedora PML

A Figura (12) mostra onde a PML *Perfectly Matched Layer* foi usada, área em azul. A PML é um artifício utilizado no COMSOL para acentuar a atenuação das ondas incidentes no domínio selecionado criando características de absorção, usamos deste recurso para evitar que as ondas espalhadas sejam refletidas de volta distorcendo os resultados. Em cinza, o meio onde se propaga a onda acústica, e no centro da geometria aparece a partícula, todo o meio está preenchido com água ver seção (4.2.2), exceto a partícula que é feita de um material diferente, especificado nas seções (3.2.1), (3.2.3) e (3.2.3). As

simulações estão parametrizadas em relação ao comprimento de onda incidente  $\lambda$ , para uma melhor análise de dados, os parâmetros de simulação foram adicionados no nó *Global Definitions* usando a ferramenta *Parameters*.

Figura 10 – Perfectly Matched layer PML.



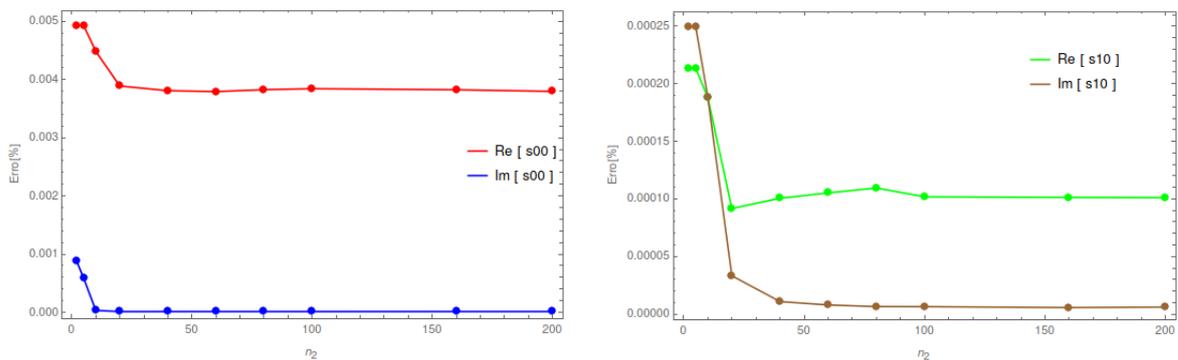
Fonte: Autor, 2023

#### 4.2.7 Discretização (Mesh)

Denominamos Malha a combinação de vários elementos discretizados da geometria, através da ferramenta *Mesh* o COMSOL discretiza a geometria construída criando elementos para aplicação do FEM, a malha pode ter formas, tamanho e combinações diferentes que podem ser configuradas. O software fornece tamanhos predefinidos para os elementos da malha automaticamente ao criar a simulação, através da guia *Size*, a partir dessa malha criada, podemos configurar cada região para um melhor resultado. Definimos parâmetros adimensionais ( $n$  e  $n_2$ ) para analisar a densidade de malha necessária para observar convergência dos resultados, com isso simplificamos a análise de convergência de malha, estabelecendo  $n$  proporcional ao raio da partícula,  $n$  é o número de elementos por comprimento do raio da partícula na superfície de integração e na superfície da partícula e  $n_2$  é o número mínimo de elementos por comprimento de onda para domínios externos à região de transição de malha. Na Fig.(11) temos o gráfico de convergência de malha, onde fixamos  $n = 10$  e variamos  $n_2$ , o eixo vertical representa o erro percentual em relação ao valor de referência (analítico) dos coeficientes de espalhamento da partícula rígida a

partir de um ponto em que o resultado já convergiu ( $n_2 = 200$ ). Note que a partir de ( $n_2 = 40$ ) a malha já está convergindo, ou seja, a partir desse valor de  $n_2$  o erro em relação ao resultado de referência varia muito pouco aproximadamente 4.5% e o tempo gasto é praticamente o mesmo, sendo 16 min para  $n_2 = 40$  e 20 min para  $n_2 = 200$ , com isso assumimos que  $n_2 = 200$  seria uma escolha mais eficiente em relação a aproximação com resultado analítico e ao tempo de simulação que ainda é baixo.

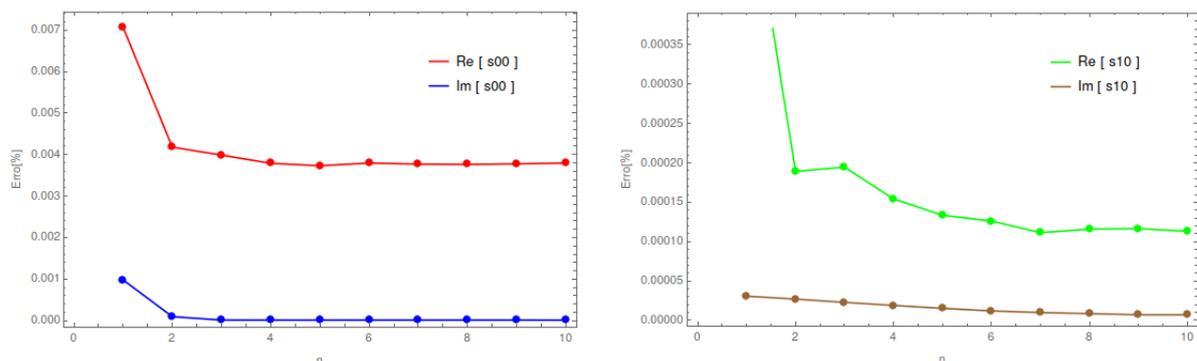
Figura 11 – Gráfico da convergência de malha para partícula esférica, com  $n = 10$  fixo e  $n_2$  variável. As curvas mostram o erro em relação ao resultado analítico dos coeficientes de espalhamento obtidos numericamente. A malha converge a medida que  $n_2$  se aproxima de 200.



Fonte: Autor, 2023

Na Fig.(12) temos outro gráfico de convergência de malha, dessa vez fixamos  $n_2 = 200$  e variamos  $n$ . De forma análoga, o eixo vertical denota o erro percentual em relação ao valor de referência (analítico) dos coeficientes de espalhamento da partícula rígida a partir de um ponto em que o resultado já convergiu ( $n = 10$ ). Observe que, a partir de  $n = 5$  já não ocorrem variações relevantes, e o tempo também é praticamente o mesmo, portanto concluímos que  $n_2 = 200$  e  $n = 10$ , seria uma escolha adequada e se mostrou eficiente para as demais simulações considerando a geometria esférica do centro espalhador.

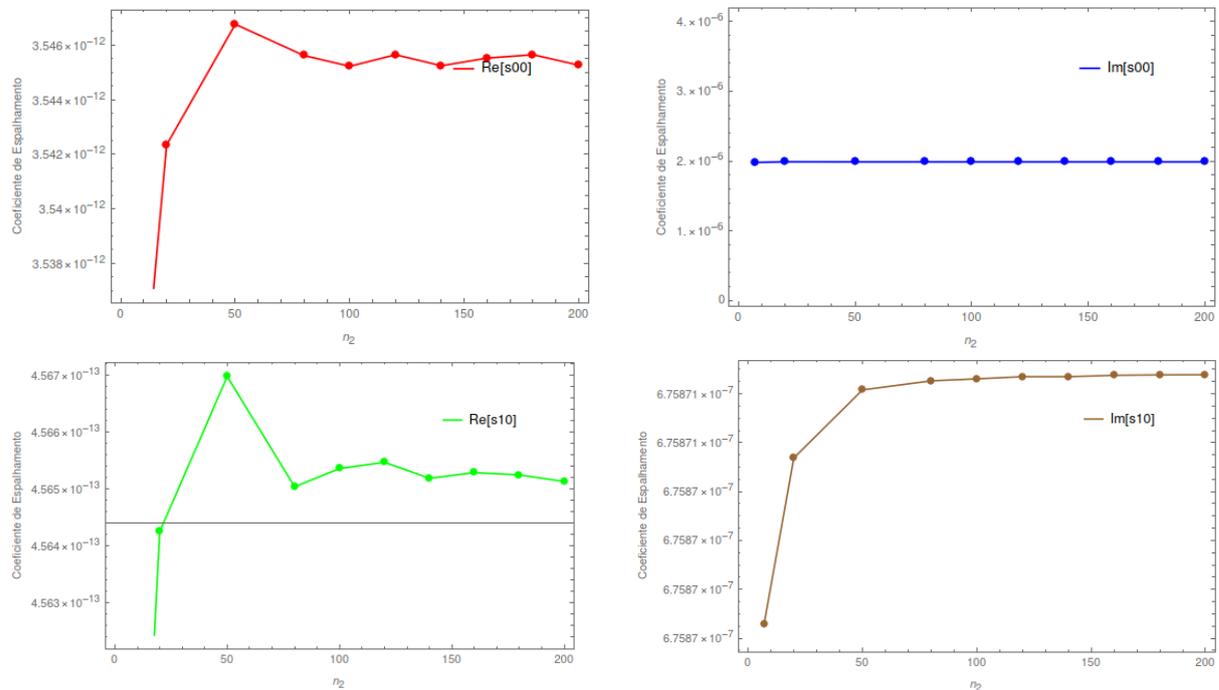
Figura 12 – Gráfico da convergência de malha em relação aos coeficientes de espalhamento para partícula esférica, com  $n_2 = 200$  fixo e  $n$  variável.



Fonte: Autor, 2023

Na Fig.(13) temos um gráfico de convergência de malha, dessa vez para o esferoide, nesse caso fixamos a frequência  $f = 2MHz$  e variamos a malha  $n_2$ . Observamos em que ponto a malha passa a não influenciar no valor dos coeficientes de espalhamento do esferoide. Nesse caso, o eixo vertical denota os coeficientes  $Re[s_{00}]$ ,  $Im[s_{00}]$ ,  $Re[s_{10}]$  e  $Im[s_{10}]$  Respectivamente em relação a  $f = 2MHz$  para uma variação de malha  $n_2$ . Observe que, a partir de  $n_2 = 80$  não ocorrem variações significativas, independente da densidade da malha para todos os coeficientes. Novamente optamos pelo valor de  $n_2 = 200$  para nossa simulação, por estar dentro da região de convergência.

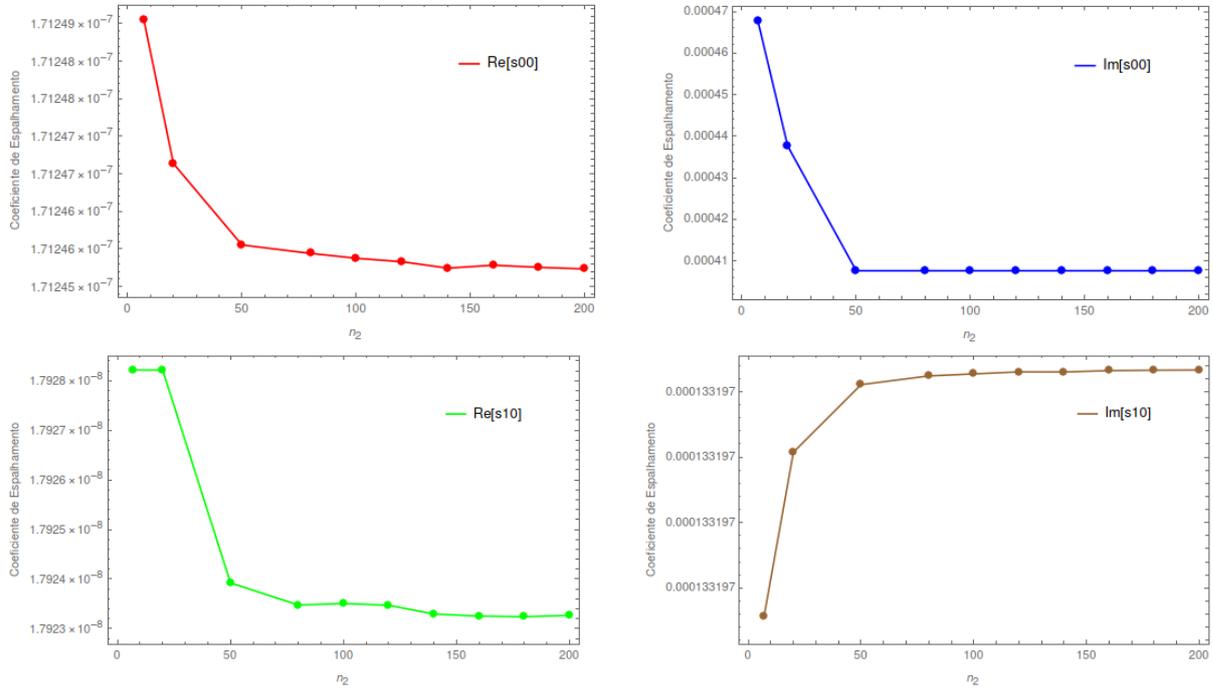
Figura 13 – Gráfico da convergência de malha em relação aos coeficientes de espalhamento para partícula esférica rígida, para uma frequência fixa de 2 MHz, com  $n_2$  variável. A malha converge conforme  $n_2$  se aproxima de 200.



Fonte: Autor, 2023

Na Fig.(14) temos outro gráfico de convergência para o esferoide, dessa vez fixamos a frequência  $f = 12MHz$  e variamos a malha  $n_2$ . Observamos que, a partir de  $n_2 = 50$  não ocorrem variações relevantes, independente da densidade de malha.

Figura 14 – Gráfico da convergência de malha em relação aos coeficientes de espalhamento para partícula esferoidal rígida, para uma frequência fixa de 12 MHz, com  $n_2$  variável.

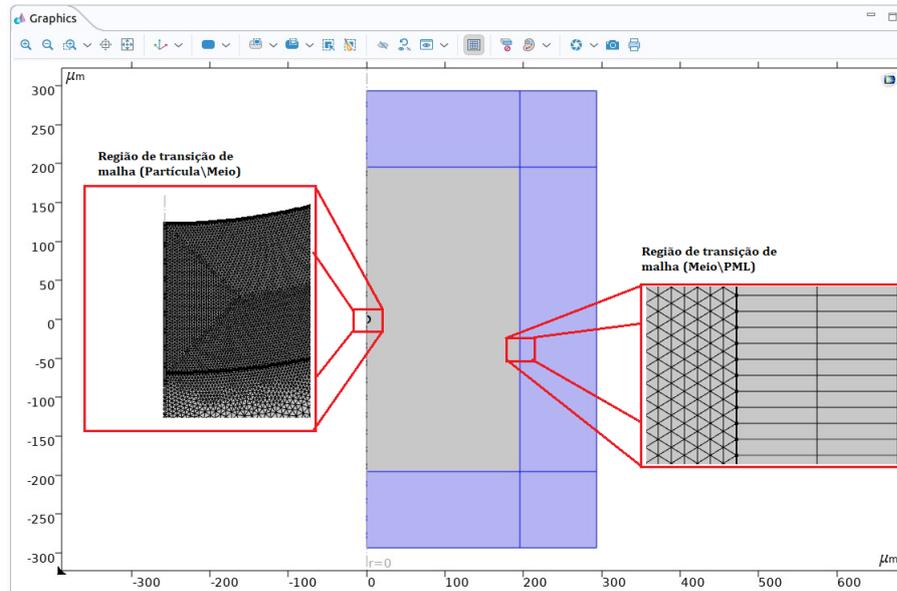


Fonte: Autor, 2023

Fazer essa convergência de malha pro esferoide considerando esses valores de frequência é importante porque, a frequência está relacionada ao comprimento de onda. Quanto maior a frequência, menor será o comprimento de onda associado. Problemas com frequências mais altas podem apresentar variações espaciais mais rápidas, o que pode exigir uma malha mais refinada para capturar essas variações. Se a frequência for muito alta em relação ao tamanho da geometria, a malha necessária para capturar os detalhes da solução será muito fina, o que pode dificultar a convergência e aumentar o tempo de cálculo. Por outro lado, se a frequência for muito baixa em relação ao tamanho da geometria, é possível que a malha necessária para representar adequadamente a onda acústica seja muito grossa, levando a resultados imprecisos. A convergência da malha em simulações numéricas é um aspecto crítico para obter resultados precisos e confiáveis. Ela se refere à obtenção de uma malha fina o suficiente para capturar os detalhes importantes da solução sem gerar excesso de elementos desnecessários, o que aumenta o custo computacional e pode levar a resultados imprecisos.

Na Fig.(15), demarcamos regiões de transição de malha, temos uma demonstração de como a malha foi definida nas proximidades da partícula e da PML. As duas regiões possuem densidade de malha intermediária entre a malha da superfície de integração e a do meio circundante e PML. No mesh realizamos a discretização da geometria, criando uma malha com vários elementos discretizados.

Figura 15 – Regiões de transição de malha.



Fonte: Autor, 2023

Observe que na PML foi utilizada uma malha diferente com objetos quadrangulares para proporcionar uma melhor análise de absorção da camada, isso é feito usando a ferramenta *Mapped* disponível dentro do nó mesh, a ferramenta se baseia em interpolação transfinita, construção de uma função sobre um domínio planar que corresponde a uma determinada função no limite geométrico [72]. Na região do meio circundante à partícula podemos observar uma diferença entre a densidade de malha intermediária entre a malha da superfície de integração e a do meio circundante, limite de transição entre o meio e a partícula, isso ocorre por que o COMSOL cria elementos menores para áreas críticas da simulação e elementos maiores para regiões contínuas através da ferramenta *free triangular*, que discretiza a geometria da simulação em objetos triangulares que podem variar dependendo da região considerada.

#### 4.2.8 Pós-processamento (study) e Carga computacional

Nas nossas análises usamos o estudo *frequency domain*, que calcula uma resposta de um sistema submetido a uma excitação harmônica ver seção 4.2.3.

##### 4.2.8.1 Carga Computacional

Utilizamos em todas as simulações um desktop com CPU Intel(R) Core(TM) i7-3770K, com 64 GB de memória RAM disponível. As simulações duraram cerca de 30 a 40 minutos incluindo todo o processo de gerar a malha e calcular o espalhamento. Procedendo dessa forma em todas as simulações, o espalhamento acústico foi calculado através do FEM, no próximo capítulo apresentamos os resultados das nossas simulações.

# 5 Resultados e Discussões

## 5.1 Validação do Modelo

Nesse trabalho nossa metodologia recupera um importante resultado obtido para teoria de espalhamento acústico [41], que apresenta um método semianalítico para calcular os campos acústicos médios (Força de radiação e Torque) exercidos em uma partícula esférica, simétrica ao eixo do comprimento de onda em um fluido ideal. Os campos acústicos são derivados em função dos coeficientes de espalhamento que refletem os modos monopolo e dipolo. Geralmente, essas soluções são derivadas com métodos de expansão multipolar e/ou espectro angular. Esses coeficientes são obtidos a partir da projeção da pressão sobre a parte angular do modo correspondente (monopolo e dipolo), sec. (3.4). Por sua vez, a pressão espalhada é obtida por meio de um solucionador de elementos finitos, em virtude da complexidade de resolver algumas equações. Um de seus principais resultados mostra que, os coeficientes de espalhamento são independentes da onda incidente, além disso depois de obter esses coeficientes do problema de onda plana, pode-se calcular campos acústicos médios na partícula causados por qualquer onda gerada no dispositivo acustofluídico. A parte numérica do método é ainda verificada em relação à solução exata para uma partícula rígida esférica em um fluido sem perdas.

Obteve-se nesse caso quatro coeficientes de espalhamento que representam os modos de monopolo ( $s_{00}$ ), dipolo transversal ( $s_{1;-1}$ ) e ( $s_{11}$ ), e dipolo axial ( $s_{10}$ ), [41] mostra que os modos de dipolo transversal de uma partícula axissimétrica são degenerados,  $s_{1;-1} = s_{11}$ . Assim como os coeficientes de dipolo axial também são degenerados,  $s_{11} = s_{10}$ , dentro do erro numérico. Assim, os coeficientes de espalhamento do problema são:

$$s_{00} = -\frac{j'_0(ka)}{h'_0(ka)}, \quad s_{10} = s_{11} = -\frac{j'_1(ka)}{h'_1(ka)}, \quad (5.1)$$

$j_n$  é a função esférica de Bessel de ordem  $n$ ,  $h_n$  é a função de Hankel de ordem  $n$ .

No Comsol Multiphysics isso é feito a partir da simulação do espalhamento acústico por meio de elementos finitos, que envolve várias etapas que são configuradas através da interface gráfica do software. Inicialmente criamos o modelo geométrico da partícula que causa o espalhamento conforme descrito na Sec.(4.1), isso é feito utilizando as ferramentas de modelagem do COMSOL, onde podemos criar a geometria 2D axisymmetric respeitando a simetria das partículas e definindo as dimensões e formas necessárias. A geometria é discretizada em uma malha de elementos finitos, ajustada para garantir que seja suficientemente refinada para capturar os detalhes importantes da solução ver Sec.(4.2.7). Após

a criação da geometria são especificadas as equações que governam o comportamento acústico do sistema Cap.(2), isso inclui a equação da onda acústica Eq.(2.48) e as condições de contorno que variam de acordo com o tipo de material Sec.(3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3) e geometria considerada Sec.(3.3). Além disso o material e suas propriedades afetarão o comportamento do espalhamento acústico e as condições de contorno devem ser definidas para simular corretamente a interação entre a onda incidente e a partícula.

Após a especificação das equações, propriedades e condições de contorno, precisamos configurar o solucionador no COMSOL para resolver numericamente o sistema de equações acústicas, como dito na Sec.(3.4) em que descrevemos o método semianalítico. Após a configuração do modelo e do solucionador, podemos executar a simulação no COMSOL, o software resolverá numericamente as equações acústicas e fornecerá os resultados, incluindo a pressão espalhada, o padrão de espalhamento e os respectivos coeficientes usando a aproximação de monopolo e dipolo de espalhamento. Por fim, podemos analisar os resultados da simulação para obter os coeficientes de espalhamento acústico; o COMSOL permite visualizar os resultados graficamente e exportá-los para análises adicionais. Os dados numéricos de espalhamento (coeficientes de espalhamento) são exportados do COMSOL como uma base dados e implementados no Wolfram Mathematica onde resolvemos analiticamente o espalhamento por meio da solução das equações do modelo, os resultados então foram comparados por meio de análise de erro entre as soluções numérica e analítica.

### 5.1.1 Partícula Rígida

Em acústica, partículas não esféricas de subcomprimento de onda, que são muito menores do que o comprimento de onda, são modeladas como pequenas esferas principalmente porque elas se encaixam nas expressões analíticas simples de espalhamento obtidas na aproximação de dipolo de espalhamento. Para verificar esse resultado consideramos a seguinte situação: Uma partícula esférica rígida de subcomprimento de onda, com uma simetria rotacional em torno de seu eixo principal, esta imersa em um fluido ideal sobre o qual se propaga uma onda de pressão acústica, ver Fig (8), a partícula espalha a onda, os parâmetros necessários para esse modelo estão descritos na Tabela (4).

Tabela 4 – Parâmetros geométricos e físicos usados na simulação do problema de espalhamento por uma esfera rígida imersa em um fluido ideal.

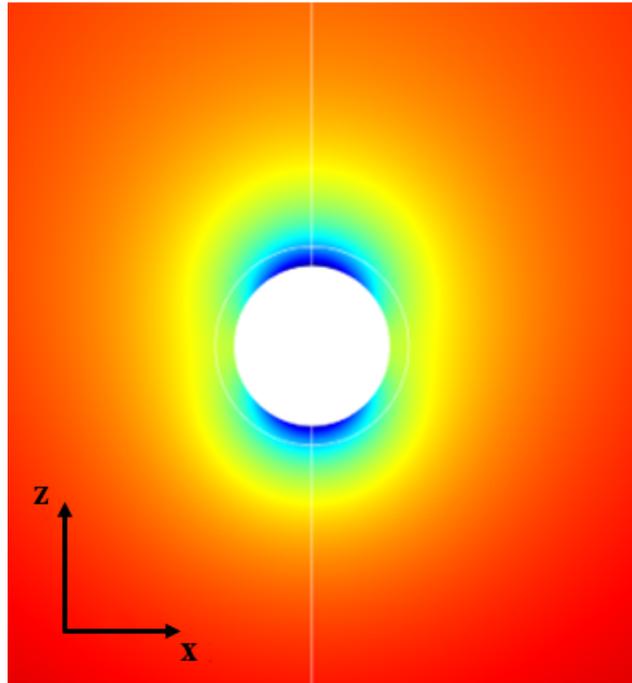
Parâmetros	Valor	Descrição
Meio Fluido		Água
Domínio Computacional		Cilindro
Partícula		Esfera rígida
$L_c$	$2.9325 \times 10^{-4} m$	Largura do cilindro
$h_c$	$5.865 \times 10^{-4} m$	Altura do cilindro
$a$	$3.91 \times 10^{-6} m$	Raio da partícula
$f$	2 - 12 MHz	Frequência
$c_0$	1481 m/s	Velocidade do som no meio
$\beta_0$	$0.4560 \text{ GPa}^{-1}$	Compressibilidade
$\rho_0$	$998 \text{ kg/m}^3$	Densidade do meio
$\lambda$	0.001481 m	Comprimento de onda
$\mathbf{k}$	4242.5 1/m	Número de onda

**Fonte:** Autor, 2023

A pressão espalhada pela partícula é obtida resolvendo a equação de Helmholtz Eq.(2.48) com condições de contorno na superfície da partícula, ver Sec.(3.2.2) e a condição de radiação de Sommerfeld no infinito ( $k_0 r \rightarrow \infty$ ), Eq.(3.34).

Iniciamos a modelagem escolhendo a simetria apropriada do problema, o modelo axisimétrico bidimensional (2D) é computacionalmente menos intenso em comparação a um modelo tridimensional (3D) e corresponde a uma onda plana que se propaga ao longo do eixo de simetria da partícula. O domínio do fluido corresponde a uma malha dentro de uma região cilíndrica. Usamos uma Perfectly Matched Layer (PML) ver Sec. (4.2.6), em uma concha cilíndrica concêntrica para absorver a onda espalhada e evitar que seja refletida de volta ao domínio do fluido, na interface fluido-PML os campos acústicos são contínuos e a superfície externa da PML é uma parede rígida. Resolvemos numericamente o espalhamento usando o FEM no software COMSOL Multiphysics, usando o Módulo de Acústica onde as equações de acústica linear são implementadas, na Fig (16) apresentamos o resultado do nosso modelo.

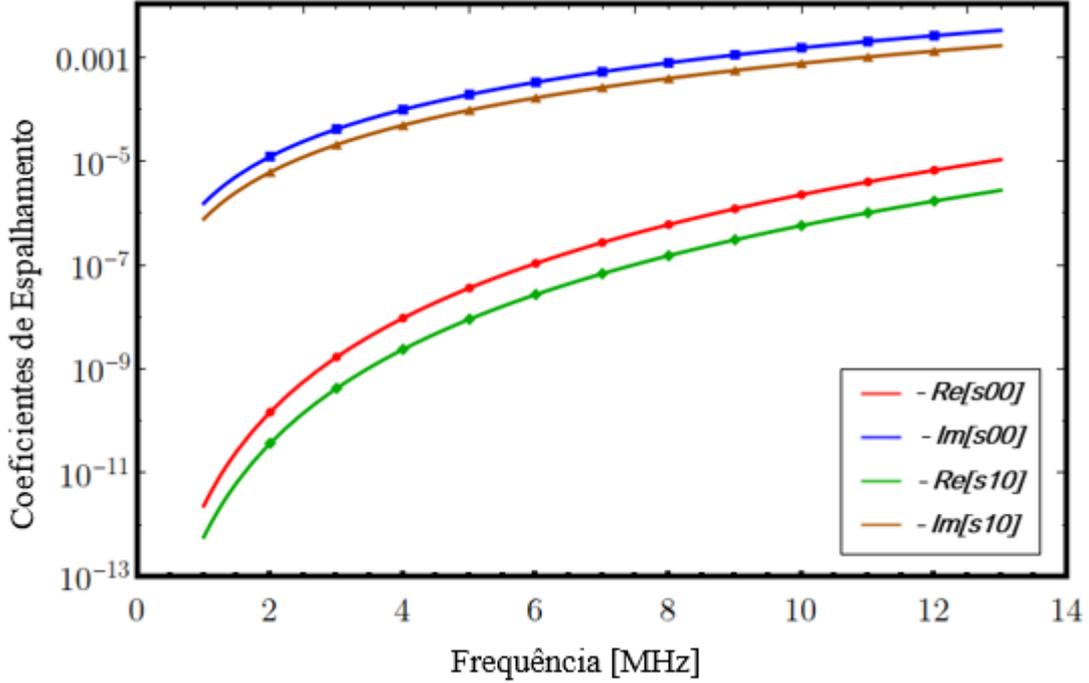
Figura 16 – Espalhamento de onda plana por uma partícula esférica rígida (mostrada em branco) em água. A onda plana viaja em a direção vertical ao longo do eixo  $z$ . A imagem de fundo corresponde para a parte real da onda espalhada computada, a pressão positiva e negativa correspondem a regiões azul e amarelo-a-vermelho, respectivamente.



**Fonte:** Autor, 2023

O padrão de espalhamento é de extrema importância para uma análise visual dos resultados das nossas simulações, podemos ver como a onda acústica interage com a partícula e como ela é espalhada em diferentes direções. A esfera rígida mantém sua forma sob a ação de forças externas, a onda sonora que atinge a partícula e é refletida por sua superfície, resultando nesse padrão de espalhamento. Na Fig.(17) plotamos os coeficientes de espalhamento (analíticos e numéricos) para uma faixa de frequência de 2–12 MHz, essencial para a validação e compreensão dos resultados obtidos a partir da simulação e da análise teórica. A comparação entre os coeficientes numéricos e analíticos permite avaliar a precisão e a confiabilidade da abordagem utilizada. Os coeficientes são obtidos ao resolver numericamente o espalhamento da onda plana pela partícula usando o método FEM. O resultado numérico é verificado analiticamente através da solução do problema do espalhamento acústico através do método de ondas parciais usando o software Wolfram Mathematica.

Figura 17 – Coeficientes de espalhamento de uma partícula esférica rígida. As linhas sólidas representam a solução exata (Wolfram Mathematica), os pontos são a solução numérica (Comsol Multiphysics).



Fonte: Autor, 2023

Como podemos observar o resultado numérico está de acordo com a solução exata apresentada para partícula rígida. O erro quadrático médio (NRMSE) em relação as soluções numérica e analítica para a parte real do coeficiente na aproximação de monopolo  $Re[s_{00}]$  é 0.0036% comparando as duas curvas, a parte imaginária  $Im[s_{00}]$  é de 0.00011%, na aproximação de dipolo de espalhamento  $Re[s_{10}]$  e  $Im[s_{10}]$ , os erros são ainda menores comparados a aproximação de monopolo e por isso foram desprezados. Para comparar os resultados numéricos obtidos com os resultados analíticos, usamos o erro quadrático médio normalizado (NRMSE), que nos fornece uma medida relativa de quão bem o modelo está fazendo previsões em relação à variabilidade dos dados,

$$\Delta(\%) = \frac{100}{x_{max} - x_{min}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n^{anlt} - x_n^{num})^2}, \quad (5.2)$$

em que  $N$  é o número de pontos da amostragem,  $x_{max}$  é o valor máximo obtido analiticamente e  $x_{min}$  o menor valor analítico. A aproximação obtida considerando o valor do erro entre as soluções demonstra a precisão do método semianalítico, uma vez que os métodos numéricos são em geral considerados como aproximações. Nossa metodologia portanto recupera o resultado apresentado [41], com isso ela deve ser válida para os casos que vamos analisar.

### 5.1.2 Partícula Fluida (Óleo de Oliva)

Aproveitando a geometria construída anteriormente, consideramos agora o caso de uma partícula fluida, isso é feito basicamente mudando o material da partícula Fig. (8) por um material fluido. A Tabela (5) apresenta parâmetros da simulação, optamos pelo óleo de oliva, por ser um material com propriedades físicas específicas, como por exemplo a densidade, que podem ser exploradas em aplicações acustofluídicas, considerado seguro e não tóxico para uso em aplicações biológicas, que o torna um material promissor para estudos em acustofluídica em sistemas vivos na perspectiva de validação experimental do modelo, por ser compatível com muitos outros materiais utilizados em estudos acustofluídicos, como polímeros, o que permite a criação de sistemas complexos e multifuncionais. Seu uso pode levar ao desenvolvimento de novas técnicas para separação e manipulação de células, diagnóstico de doenças e tratamentos terapêuticos, entre outras aplicações promissoras.

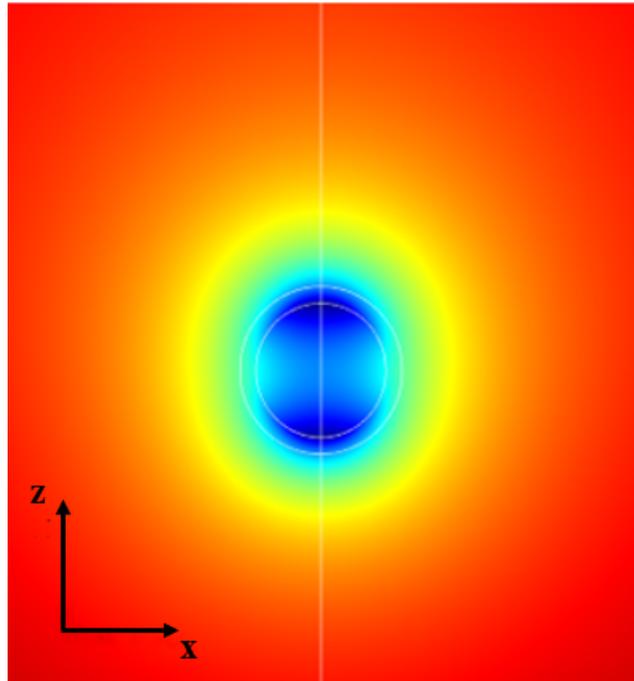
Tabela 5 – Parâmetros geométricos e físicos usados na simulação do problema de espalhamento por uma esfera fluida.

Parâmetros	Valor	Descrição
Meio Fluido		Água
Domínio Computacional		Cilindro
Partícula		Esfera fluida (Óleo de Oliva)
$L_c$	$2.9325 \times 10^{-4} m$	Largura do cilindro
$h_c$	$5.865 \times 10^{-4} m$	Altura do cilindro
$a$	$3.91 \times 10^{-6} m$	Raio da partícula
$f$	2 - 12 MHz	Frequência
$c_0$	1481 m/s	Velocidade do som no meio
$c_1$	1464 m/s	Velocidade do som na partícula
$\rho_0$	998 kg/m <sup>3</sup>	Densidade do meio
$\rho_1$	915.8 kg/m <sup>3</sup>	Densidade da partícula
$\alpha$	$2 \times 10^{-10}$	Coefficiente de absorção
$\lambda$	0.001481 m	Comprimento de onda
$k$	4242.5 1/m	Número de onda

**Fonte:** Autor, 2023

Neste caso em que a esfera espalhadora é penetrável ao campo acústico, a onda de fato entra em seu interior, portanto sofre mais influência da partícula em comparação a partícula rígida, isso exige algumas condições especiais, consulte Sec.(3.2.1). Na Fig.(18) analogamente ao que fizemos pra esfera rígida podemos ver o espalhamento da onda plana pela partícula fluida. A diferença fundamental entre o espalhamento de uma esfera rígida e uma esfera fluida está relacionada à natureza de seus materiais e às propriedades físicas que influenciam o fenômeno de espalhamento.

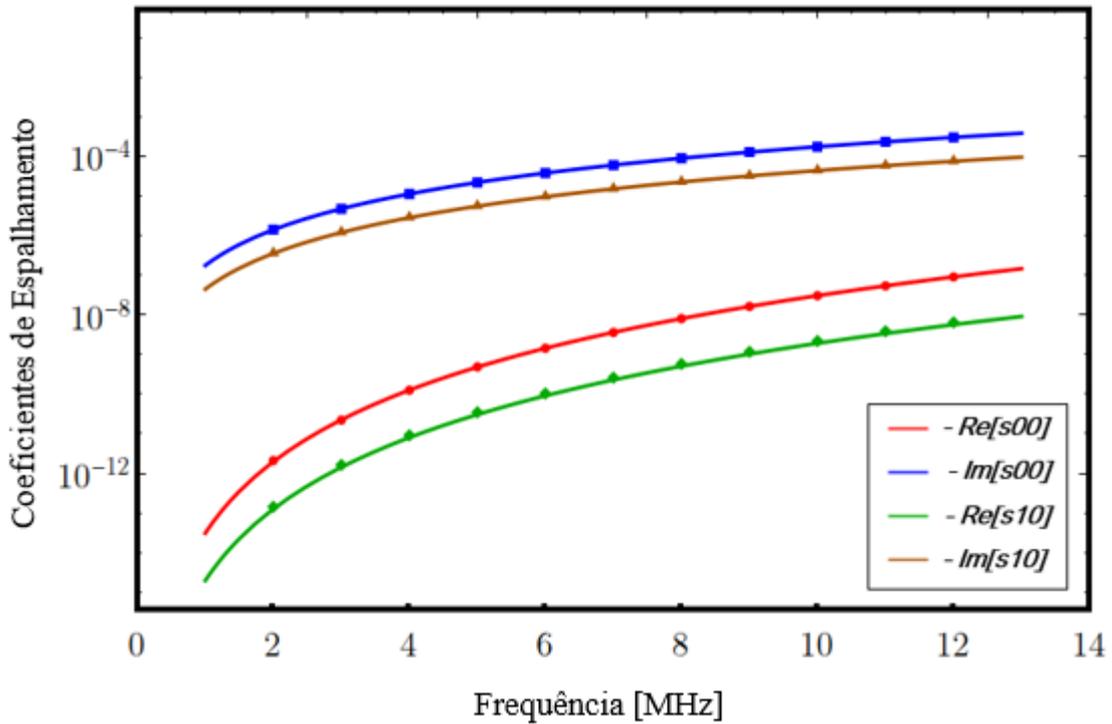
Figura 18 – Distribuição de pressão da onda plana por uma partícula esférica fluida. A onda plana viaja em a direção vertical ao longo do eixo  $z$ . A imagem de fundo corresponde para a parte real da onda espalhada computada, a pressão positiva e negativa correspondem a regiões azul e amarelo-a-vermelho, respectivamente.



Fonte: Autor, 2023

Uma esfera fluida pode ser deformada pela ação de forças externas. Nesse caso o espalhamento acústico ocorre tanto devido à interação com a geometria da partícula quanto devido à interação com as propriedades acústicas do próprio fluido que a constitui. A onda sonora pode induzir movimentos vibratórios e deformações na partícula fluida, resultando nesse padrão de espalhamento característico Fig.(18). Além disso, a velocidade do som e a densidade do fluido que compõe a partícula também afetam o espalhamento acústico, observe na Tab.5 que a densidade da partícula e do meio em que ela está imersa é bem próxima, isso se reflete no padrão de espalhamento gerado, note que a interação é sutil, gerando um espalhamento quase uniforme. Isso também pode ser observado ao comparar o valor dos coeficientes com o caso rígido, notamos que os coeficientes de espalhamento da partícula fluida são no mínimo uma ordem de grandeza inferiores em relação a partícula rígida. Na Fig.(19) plotamos os coeficientes de espalhamento do problema considerando o resultado numérico e analítico.

Figura 19 – Coeficientes de espalhamento de uma partícula esférica fluida. As linhas sólidas representam a solução exata (Wolfram Mathematica), os pontos são a solução numérica (Comsol Multiphysics).



Fonte: Autor, 2023

O resultado obtido numericamente mostra que, para a partícula fluida, os coeficientes de espalhamento na aproximação de monopolo são bem próximos com os resultados analíticos. A parte real do coeficiente de espalhamento ( $Re[s_{00}]$ ) tem um desvio de aproximadamente 1,63% em relação ao resultado de referência, enquanto a parte imaginária ( $Im[s_{00}]$ ) possui um erro relativo de cerca de 0,05%. Isso indica que a aproximação de monopolo é uma boa representação para o espalhamento acústico da partícula fluida.

No entanto, os resultados mostram que os coeficientes de espalhamento na aproximação de dipolo apresentam um desvio mais significativo em relação aos coeficientes de monopolo. A parte real do coeficiente de espalhamento ( $Re[s_{10}]$ ) tem um erro relativo de 5,20%, e sua parte imaginária ( $Im[s_{10}]$ ) 6,40%. Isso sugere que a aproximação de dipolo não é tão precisa para descrever o espalhamento acústico em partículas fluidas.

Esses resultados indicam que a escolha da aproximação utilizada pode afetar a precisão das previsões teóricas. A aproximação de monopolo parece ser mais adequada para partículas fluidas, uma vez que os coeficientes de espalhamento têm um bom acordo com os resultados de referência. Uma possível justificativa para o maior erro na aproximação de dipolo em comparação com a aproximação de monopolo é que a aproximação de dipolo considera apenas um momento de ordem superior, enquanto a aproximação de monopolo captura os efeitos dominantes no espalhamento acústico da partícula. Além

disso, a geometria e as propriedades físicas das partículas podem influenciar a precisão das aproximações utilizadas. Portanto, é importante considerar cuidadosamente as limitações e as condições de aplicabilidade das diferentes aproximações.

### 5.1.3 Sólido Viscoelástico

Os sólidos apresentam diferenças em relação aos fluidos quando se trata do transporte de ondas acústicas. Isso ocorre devido à presença de componentes transversais, além da componente longitudinal, nas ondas acústicas que se propagam nesses meios, essa característica implica em uma maior complexidade matemática no tratamento analítico dos campos de radiação acústica em sólidos. Ao contrário dos fluidos, nos quais é possível associar uma pressão escalar à onda acústica, nos sólidos essa abordagem não é mais válida, isso significa que a análise baseada nos potenciais e energias utilizada para os fluidos perde parte de sua aplicabilidade. No entanto, ainda é possível descrever os campos no interior dos sólidos por meio de potenciais escalares associados aos tensores de tensão e deformação dos sólidos, em contraste com os campos de pressão e velocidade presentes nos fluidos.

Nesse caso, temos uma onda viajando em um fluido ideal e incompressível (Água), em um ponto específico dessa trajetória, há um obstáculo com simetria esférica que espalha a onda, esse obstáculo é feito de um polímero (Polietileno) um material com propriedades viscoelástica, que implica que ele pode absorver as ondas longitudinais e de cisalhamento em seu interior. Novamente consideramos a mesma geometria e dimensões usadas nos casos rígido e fluido, porém aqui devido as propriedades viscoelástica do material a Física "Solid Mechanics" foi acoplada ao estudo conforme Sec.(4.2.4); Quando a onda incide sobre a partícula, ocorre uma divisão da energia da onda em duas componentes: absorção e espalhamento, a absorção refere-se a parte da onda que é absorvida pelo material da partícula, resultando em uma dissipação de energia, a parte da onda que não é absorvida é chamada de onda espalhada. Tanto a onda incidente quanto a onda espalhada podem ser descritas em termos dos potenciais de velocidade, quantidades que descrevem o movimento das partículas do meio de propagação da onda. Para análise numérica, precisamos definir alguns parâmetros acústicos que descrevem o Polietileno. Em geral, a densidade e a velocidade do som longitudinal e de cisalhamento para esse material a temperatura ambiente são dados em tabelas padrões, a Tabela 6 apresenta alguns parâmetros utilizados.

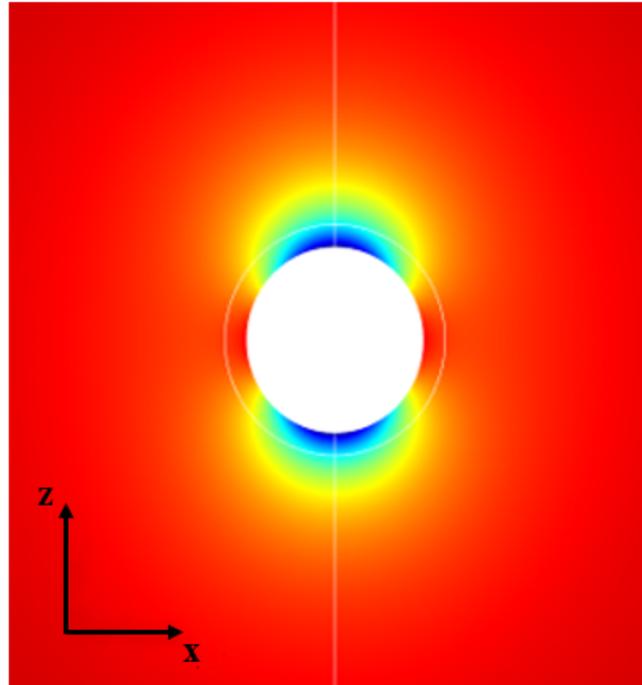
Tabela 6 – Parâmetros geométricos e físicos usados na simulação do problema de espalhamento por um sólido viscoelástico.

<b>Parâmetros</b>	<b>Valor</b>	<b>Descrição</b>
Meio Fluido		Água
Domínio Computacional		Cilindro
Partícula		Esfera sólido viscoelástico (Polietileno)
$L_c$	$2.9325 \times 10^{-4} m$	Largura do cilindro
$h_c$	$5.865 \times 10^{-4} m$	Altura do cilindro
$a$	$3.91 \times 10^{-6} m$	Raio da partícula
$f$	2 - 12 MHz	Frequência
$c_0$	1500 m/s	Velocidade do som no meio
$\rho_0$	1000 kg/m <sup>3</sup>	Densidade do meio
$\rho_1$	957 kg/m <sup>3</sup>	Densidade da partícula
$\lambda$	0.0015 m	Comprimento de onda
$\mathbf{k}$	4188.8 1/m	Número de onda
$c_l$	2380 m/s	Velocidade do som longitudinal
$c_s$	987 m/s	Velocidade do som de cisalhamento
$\alpha_l$	0.0073	Absorção longitudinal
$\alpha_s$	0.022	Absorção de cisalhamento

**Fonte:** Autor, 2023

A Fig.(20) descreve o espalhamento da onda acústica pelo sólido viscoelástico. A partícula sólida viscoelástica exibe tanto comportamento elástico quanto viscoso em resposta a onda acústica incidente. Isso significa que a partícula possui uma combinação de características de um sólido (que pode deformar elasticamente e voltar à sua forma original) e de um fluido viscoso (que pode deformar gradualmente e dissipar energia).

Figura 20 – Espalhamento de onda plana por uma partícula esférica de material sólido viscoelástico (mostrada em branco) em água. A onda plana viaja em a direção vertical ao longo do eixo  $z$ . A imagem de fundo corresponde para a parte real da onda espalhada, a pressão positiva e negativa correspondem a regiões azul e amarelo-a-vermelho, respectivamente.

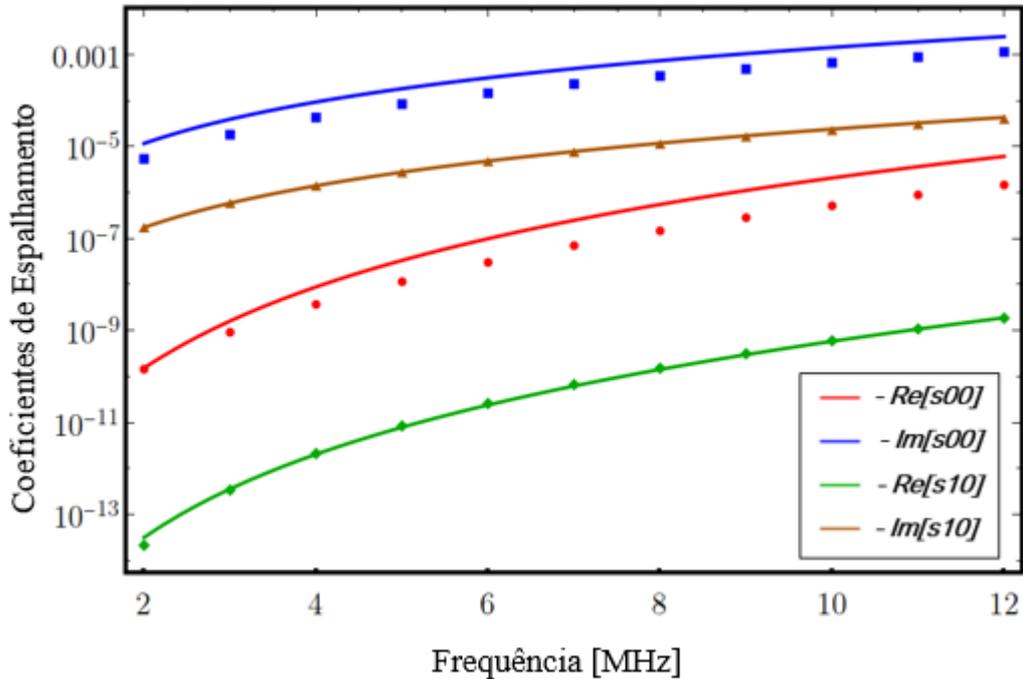


**Fonte:** Autor, 2023

O padrão de espalhamento pode variar com a frequência da onda acústica. Em frequências baixas, o comportamento viscoso pode predominar, enquanto em frequências mais altas, as propriedades elásticas podem se tornar mais proeminentes. Isso por que, em frequências baixas, a onda acústica possui um comprimento de onda maior, o que significa que a partícula é submetida a uma pressão lenta e gradual. Nessa situação, a viscosidade do material tem um papel importante, pois ela governa a capacidade do material de dissipar energia e absorver a deformação ao longo do tempo. A viscosidade é responsável por parte do amortecimento da onda acústica e resulta em uma resposta mais suave e gradual da partícula, que se deforma progressivamente. Por outro lado, Em frequências mais altas, a onda acústica possui um comprimento de onda menor, o que implica que a partícula é submetida a uma pressão rápida e repentina. Nesse cenário, as propriedades elásticas do material são mais proeminentes, pois governam a capacidade da partícula de deformar elástica e instantaneamente em resposta à onda acústica. Essa dependência da frequência pode leva a padrões de espalhamento complexos e não lineares, como mostrado na Fig.(20). Além disso, as propriedades viscoelásticas da partícula podem causar amortecimento na onda acústica, resultando em atenuação ou redução da amplitude da onda à medida que ela interage com a partícula. Na Fig.(21) plotamos os coeficientes de espalhamento para uma faixa de frequência de 2–12 MHz. A parte numérica do método

foi verificada solucionando o problema do espalhamento acústico através do método de ondas parciais usando o software Wolfram Mathematica.

Figura 21 – Coeficientes de espalhamento de uma partícula esférica feita de material sólido viscoelástico, as linhas sólidas representam a solução exata (Wolfram Mathematica), os pontos são a solução numérica (Comsol Multiphysics).



Fonte: Autor, 2023

O resultado obtido para um sólido viscoelástico mostra que os coeficientes de espalhamento na aproximação de monopolo apresentam um desvio considerável em relação aos resultados numéricos e analíticos. A parte real do coeficiente de espalhamento ( $Re[s_{00}]$ ) possui um erro de aproximadamente 28,16%, enquanto a parte imaginária ( $Im[s_{00}]$ ) apresenta um erro de cerca de 24,5%.

No caso da aproximação de dipolo, os resultados mostram um desvio menor em relação aos resultados de referência. A parte real do coeficiente de espalhamento ( $Re[s_{10}]$ ) apresenta um erro de aproximadamente 0,66%, enquanto a parte imaginária ( $Im[s_{10}]$ ) tem um erro de aproximadamente 3,12%. Embora ainda haja algum erro, esses valores indicam uma melhor concordância em comparação com a aproximação de monopolo.

A diferença nos resultados entre as aproximações de monopolo e dipolo pode ser atribuída a características específicas dos sólidos viscoelásticos. Esses materiais têm propriedades mecânicas complexas, como comportamento viscoso e elástico combinados, o que pode dificultar a modelagem precisa do espalhamento acústico. Além disso, a influência de outras interações e fenômenos, como a dissipação de energia e a resposta temporal do material, pode afetar a precisão das aproximações utilizadas. Portanto, é

importante considerar essas limitações ao aplicar a teoria de espalhamento acústico em sólidos viscoelásticos. O alto desvio na aproximação de monopolo indica a necessidade de abordagens mais sofisticadas. O uso da aproximação de dipolo pode fornecer resultados mais próximos, mas ainda pode ser necessário considerar outras fontes de erro e refinamentos na modelagem para obter resultados mais precisos. O erro pode estar relacionado a diversos fatores numéricos e analíticos, como acoplamento das físicas da simulação, condições de contorno, possíveis erros na definição da malha, entre outros fatores, uma análise detalhada de todos os parâmetros envolvidos no problema é necessária para uma melhor convergência dos resultados.

#### 5.1.4 Partícula esferoidal

Como mencionado anteriormente, a maioria das análises teóricas sobre espalhamento e força de radiação acústica em fluidos assume que as partículas têm forma esférica. Uma simplificação útil, porém limitada a formas geométricas idealizadas. Ao considerar partículas com formas não esféricas, as técnicas analíticas exatas podem se tornar impraticáveis e se faz necessário abordagens numéricas mais sofisticadas.

Aplicando as técnicas apresentadas até aqui, consideramos no problema de espalhamento uma partícula com geometria de um esferoide, uma forma geométrica tridimensional que se assemelha a uma esfera achatada nos polos, na Fig.(22), podemos ver o espalhamento acústico pelo esferoide. Consideramos uma partícula esferoidal rígida com eixo maior  $a$  e menor  $b$  imersa em fluido ideal (água), de densidade  $\rho_0$  e velocidade de propagação do som  $c_0$ , os parâmetros necessários com base na Ref. [73] estão descritos na tabela a seguir.

Tabela 7 – Parâmetros geométricos e físicos usados na simulações do problema de espalhamento por um esferoide.

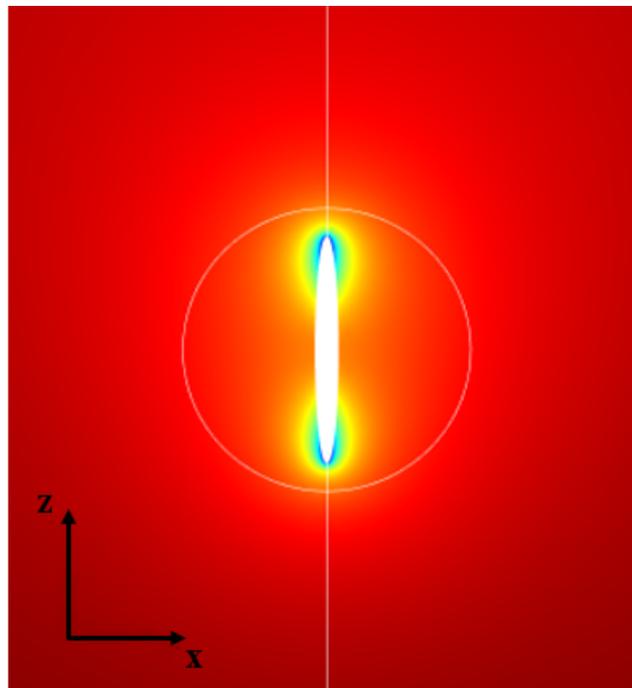
Parâmetros	Valor	Descrição
Meio Fluido		Água
Domínio Computacional		Cilindro
Partícula		Esferoide rígido
$L_c$	$2.9325 \times 10^{-4} m$	Largura do cilindro
$h_c$	$5.865 \times 10^{-4} m$	Altura do cilindro
$a$	$1 \mu m$	Raio menor
$b$	$10 \mu m$	Raio maior
$f$	2 - 12 MHz	Frequência
$c_0$	1492 m/s	Velocidade do som no meio
$\rho_0$	1000 kg/m <sup>3</sup>	Densidade do meio
$\lambda$	0.001481 m	Comprimento de onda
$\mathbf{k}$	4242.5 1/m	Número de onda

**Fonte:** Autor, 2023

A partícula encontra-se na origem do sistema de coordenadas com o eixo  $z$  coinci-

dindo com seu eixo de rotação. Respeitando a simetria, usamos coordenadas esferoidais para descrever o espalhamento acústico ver Sec. (3.3.1). Na Fig.(22) temos o padrão de espalhamento do esferoide. O esferoide é uma forma geométrica não esférica, caracterizada por eixos de comprimento diferentes, isso cria uma geometria anisotrópica que resulta em um padrão de espalhamento assimétrico em relação aos eixos do esferoide, dependendo da orientação, o esferoide pode exibir um padrão de espalhamento direcional, onde a intensidade de espalhamento é diferente em diferentes direções.

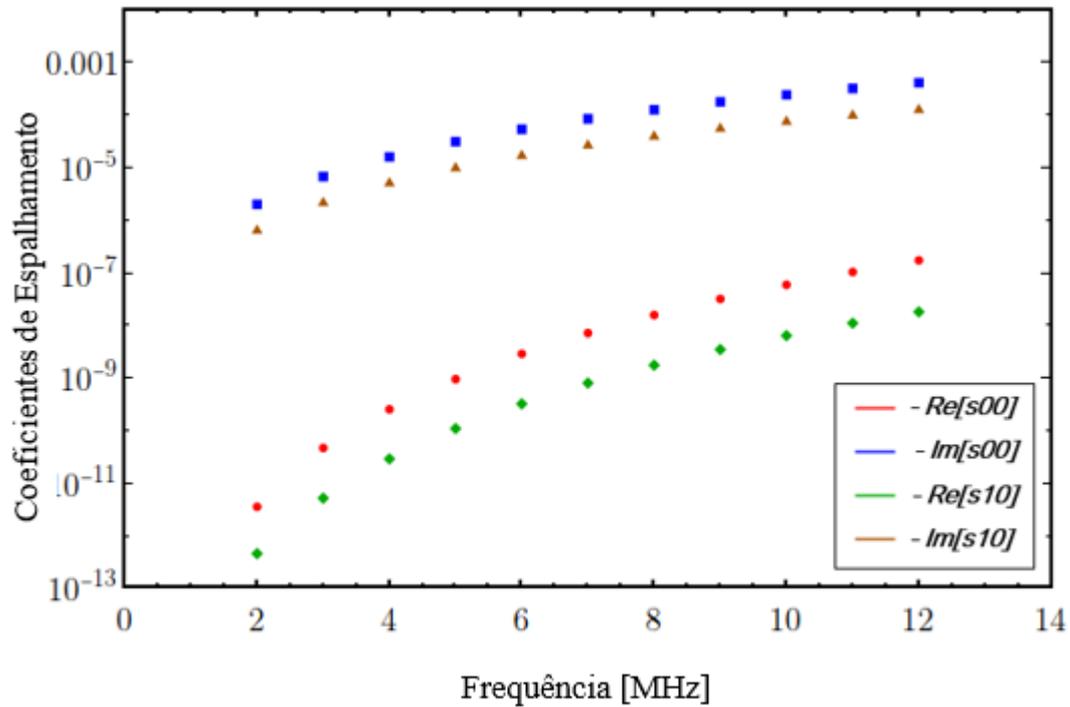
Figura 22 – Espalhamento de uma onda plana por um esferoide (Comsol Multiphysics). A onda plana viaja em a direção vertical ao longo do eixo z. A imagem de fundo corresponde para a parte real da onda espalhada computada, a pressão positiva e negativa correspondem a regiões azul e amarelo-a-vermelho, respectivamente.



**Fonte:** Autor, 2023

Como podemos observar na imagem a forma do esferoide influencia significativamente o padrão de espalhamento acústico. Diferentes relações entre os eixos principais do esferoide podem levar a padrões de espalhamento distintos, incluindo assimetrias e focos de espalhamento em direções específicas. Os coeficientes de espalhamento vão ser determinados usando as condições de contorno na superfície das partículas, com isso obtemos numericamente os coeficientes de espalhamento.

Figura 23 – Coeficientes de espalhamento de uma partícula esferoidal rígida. Os pontos são a solução numérica (Comsol Multiphysics).



Fonte: Autor, 2023

A utilização de um método semianalítico para descrever o espalhamento em partículas esféricas é uma abordagem comum e eficaz para analisar o comportamento acústico dessas partículas. No entanto, ao considerar geometrias não esféricas, como um esferoide, a complexidade do problema aumenta significativamente, tornando o uso de métodos puramente analíticos muito mais difícil ou mesmo impossível.

Contudo a metodologia usada nesse trabalho demonstra que é possível obter resultados precisos não só para partículas esféricas. A metodologia é válida para geometrias complexas como o esferoide, uma validação analítica nesse caso é desejável para validar esse resultado.

# 6 Conclusões e Perspectivas

## 6.1 Conclusões

Nesse estudo, tratamos do espalhamento de campos acústicos por diferentes materiais e geometrias ao analisar seus campos internos e externos no processo de interação. Assim, derivamos expressões analíticas numa aproximação de campo distante  $kr \gg 1$  para os coeficientes de espalhamento escalares  $s_{lm}$  e os coeficientes de forma do feixe  $a_{lm}$ , de uma onda plana sobre diferentes materiais suspensos num fluido ideal, considerando as geometrias esféricas e esferoidal, no chamado limite de espalhamento Rayleigh.

Apresentamos inicialmente uma formulação Matemática da propagação de ondas acústicas em meios fluidos partindo dos princípios de conservação de grandezas fundamentais como: massa, energia e momento. Para isso, fizemos uma revisão bibliográfica no que diz respeito à Física da propagação de ondas acústicas. No Capítulo 2 derivamos por meio dos princípios básicos de conservação as expressões analíticas para a equação de onda acústica homogênea, demonstramos que uma onda acústica pode ser descrita por uma função potencial  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , que relaciona à pressão e o campo de velocidades induzidos no meio que satisfaz a equação de onda escalar, por isso, o som pode ser caracterizado como um fenômeno ondulatório. Mostramos também que uma onda sonora harmônica no tempo pode ser caracterizada por um fasor  $\phi(r)$  que satisfaz a equação de onda linear conhecida como equação de Helmholtz  $(\nabla^2 + k^2)\phi(r) = 0$ , que representa a solução para a propagação de uma onda harmônica no espaço, utilizando o método de aproximações sucessivas. Nas diferentes geometrias consideradas, encontramos soluções através de combinações lineares de funções radiais (como Bessel, Neumann ou Hankel) e funções angulares (harmônicos esféricos), que nos permitem expressar os campos acústicos nas regiões de interesse. No Capítulo 3, focamos no problema de espalhamento por uma esfera penetrável, determinando os coeficientes da onda acústica incidente  $a_{lm}$ , interna  $b_{lm}$  e espalhada  $s_{lm}$ , estudamos o espalhamento por um objeto esférico rígido determinando os coeficientes do campo espalhado  $s_{lm}$ ; estudamos o espalhamento por um objeto esférico viscoelástico, que utiliza o modelo de Kelvin-Voigt fracionário, verificamos que são necessários dois fasores para descrever o campo acústico e desenvolvemos um sistema linear que permite determinar os coeficientes de forma do feixe da onda incidente  $a_{lm}$  e o coeficiente de espalhamento escalar  $s_{lm}$  expressos em termos dos coeficientes de espalhamento de monopolo  $s_{00}$  e dipolo  $s_{10}$ . Além disso, aplicamos a metodologia na análise de um centro espalhador na forma de um esferoide rígido, obtemos os coeficientes de espalhamento  $s_{lm}$  expressos na aproximação de monopolo e dipolo  $s_{00}$  e  $s_{10}$ , além do coeficiente em forma de feixe  $a_{lm}$ . Com essa formalização, fizemos uso da teoria de espalhamento como metodologia para determinar as

expressões das ondas acústicas envolvidas em diferentes geometrias e combinações de meios. No Capítulo 4, apresentamos a aplicação do FEM e do software COMSOL Multiphysics®, usados para resolver numericamente o problema de espalhamento.

Os estudos sobre a propagação de ondas em meios fluidos foram de grande importância para a compreensão do fenômeno de espalhamento acústico. Nesse contexto, é fundamental destacar a relação entre o espalhamento acústico e o fenômeno de força e torque de radiação acústica de grande relevância em diversas aplicações, como pinças acústicas, levitação, separação, aprisionamento de partículas, entre outras. Portanto, os estudos sobre a propagação de ondas acústicas e o fenômeno de espalhamento são fundamentais para avançar o conhecimento na área da Acústica e para aplicar esses princípios em diversas aplicações tecnológicas e científicas.

Ao longo do estudo, investigamos cenários fluido-rígido, fluido-fluido e fluido-sólido com centro espalhador de geometria esférico, além disso mostramos que nossa metodologia é válida não só para partículas esféricas, mas a mesma pode ser aplicada para partículas com formas distintas como no exemplo do esferoide. Por fim, fizemos uma revisão no problema de espalhamento de ondas acústicas em meios fluidos por uma esfera rígida, fluida e sólido viscoelástica, além de um esferoide rígido. Para isso, definimos as grandezas físicas de interesse num problema envolvendo meios elásticos e viscoelásticos, bem como os campos usados nas descrições da onda acústica. Apresentamos como resultado a comparação das descrições analítica e numérica do problema poucas vezes consideradas juntas no mesmo estudo em virtude da complexidade de se resolver tanto a parte analítica como a parte numérica.

### 6.1.1 Perspectivas

A partir deste trabalho, é possível estender os resultados em uma análise mais profunda de fenômenos derivados da teoria de espalhamento acústico, como exemplo os resultados aqui observados podem ser usados para calcular expressões de força e torque de radiação acústica para os diferentes tipos de partículas consideradas, o que é de suma importância no avanço do conhecimento e desenvolvimento de aplicações tecnológicas e científicas na área de Acustoflúidica. Uma segunda perspectiva proveniente desse estudo é a investigação mais detalhada do caso viscoelástico, considerando o resultado aqui apresentados para esse caso em específico. Além disso, é necessária uma validação analítica do esferoide rígido para comparar com o resultado numérico, além de considerar outros tipos de materiais como fluido e sólido para o esferoide.

# Referências

- 1 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics: Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics, Volume 6*. [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 6.
- 2 ALCARÁS, J. R. *Metamateriais acústicos: campos internos e teoria de espalhamento*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2023.
- 3 NEWTON, R. G. *Scattering theory of waves and particles*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- 4 MORSE, P. M.; INGARD, K. U. *Theoretical acoustics*. [S.l.]: Princeton university press, 1986.
- 5 ALCARÁS, J. R. *Espalhamento de ondas acústicas e análise de campos internos de materiais viscoelásticos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019.
- 6 KINSLER, L. E. et al. *Fundamentals of acoustics*. [S.l.]: John wiley & sons, 2000.
- 7 NETO, J. P. L. et al. Força e torque de radiação sobre uma partícula viscoelástica em um fluido ideal. Universidade Federal de Alagoas, 2015.
- 8 LAM, K. H. et al. Ultrahigh frequency lensless ultrasonic transducers for acoustic tweezers application. *Biotechnology and bioengineering*, Wiley Online Library, v. 110, n. 3, p. 881–886, 2013.
- 9 FORESTI, D.; POULIKAKOS, D. Acoustophoretic contactless elevation, orbital transport and spinning of matter in air. APS, 2014.
- 10 OZCELIK, A. et al. Acoustic tweezers for the life sciences. *Nature methods*, Nature Publishing Group, v. 15, n. 12, p. 1021–1028, 2018.
- 11 CAO, Q.; HAN, X.; LI, L. Configurations and control of magnetic fields for manipulating magnetic particles in microfluidic applications: magnet systems and manipulation mechanisms. *Lab on a Chip*, Royal Society of Chemistry, v. 14, n. 15, p. 2762–2777, 2014.
- 12 ASHKIN, A. et al. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 11, n. 5, p. 288–290, 1986.
- 13 MARZO, A.; DRINKWATER, B. W. Holographic acoustic tweezers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 116, n. 1, p. 84–89, 2019.
- 14 CHOUDHARY, D. et al. Bio-molecular applications of recent developments in optical tweezers. *Biomolecules*, MDPI, v. 9, n. 1, p. 23, 2019.
- 15 RIAUD, A. et al. Selective manipulation of microscopic particles with precursor swirling rayleigh waves. *Physical Review Applied*, APS, v. 7, n. 2, p. 024007, 2017.
- 16 HULST, H. C.; HULST, H. C. van de. *Light scattering by small particles*. [S.l.]: Courier Corporation, 1981.

- 17 STRUTT, J. W.; RAYLEIGH, B. *The theory of sound. 2nd revised and enlarged.* [S.l.]: New York: Dover Publications, 1945.
- 18 KING, L. V. On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 147, n. 861, p. 212–240, 1934.
- 19 ANDERSON, V. C. Sound scattering from a fluid sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 22, n. 4, p. 426–431, 1950.
- 20 JR, J. J. F. Sound scattering by solid cylinders and spheres. *The Journal of the acoustical society of America*, Acoustical Society of America, v. 23, n. 4, p. 405–418, 1951.
- 21 JUNGER, M. C. Sound scattering by thin elastic shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 24, n. 4, p. 366–373, 1952.
- 22 SAMMELMANN, G. S.; TRIVETT, D. H.; HACKMAN, R. H. The acoustic scattering by a submerged, spherical shell. i: The bifurcation of the dispersion curve for the spherical antisymmetric lamb wave. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 85, n. 1, p. 114–124, 1989.
- 23 DOOLITTLE, R.; ÜBERALL, H. Sound scattering by elastic cylindrical shells. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 39, n. 2, p. 272–275, 1966.
- 24 DOOLITTLE, R.; ÜBERALL, H.; UGINČIUS, P. Sound scattering by elastic cylinders. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 43, n. 1, p. 1–14, 1968.
- 25 STANTON, T. K. Sound scattering by cylinders of finite length. i. fluid cylinders. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 83, n. 1, p. 55–63, 1988.
- 26 GAUNAURD, G. C. Elastic and acoustic resonance wave scattering. 1989.
- 27 GAUNAURD, G.; WERBY, M. Acoustic resonance scattering by submerged elastic shells. 1990.
- 28 AYRES, V.; GAUNAURD, G. Acoustic resonance scattering by viscoelastic objects. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 81, n. 2, p. 301–311, 1987.
- 29 IVANSSON, S. M. Sound absorption by viscoelastic coatings with periodically distributed cavities. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 119, n. 6, p. 3558–3567, 2006.
- 30 FORESTI, D.; NABAVI, M.; POULIKAKOS, D. On the acoustic levitation stability behaviour of spherical and ellipsoidal particles. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 709, p. 581–592, 2012.
- 31 YOSIOKA, K.; KAWASIMA, Y. Acoustic radiation pressure on a compressible sphere. *Acta Acustica united with Acustica*, S. Hirzel Verlag, v. 5, n. 3, p. 167–173, 1955.

- 32 ANDRADE, M. A. B. *Estudo da força de radiação acústica em partículas produzida por ondas progressivas e estacionárias*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2010.
- 33 WESTERVELT, P. J. Acoustic radiation pressure. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 29, n. 1, p. 26–29, 1957.
- 34 GOR'KOV, L. P. On the forces acting on a small particle in an acoustical field in an ideal fluid. In: *Sov. Phys. Dokl.* [S.l.: s.n.], 1962. v. 6, p. 773–775.
- 35 SILVA, G. T. An expression for the radiation force exerted by an acoustic beam with arbitrary wavefront (1). *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 130, n. 6, p. 3541–3544, 2011.
- 36 ZHANG, L.; MARSTON, P. L. Geometrical interpretation of negative radiation forces of acoustical Bessel beams on spheres. *Physical Review E*, APS, v. 84, n. 3, p. 035601, 2011.
- 37 SAPOZHNIKOV, O. A.; BAILEY, M. R. Radiation force of an arbitrary acoustic beam on an elastic sphere in a fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 133, n. 2, p. 661–676, 2013.
- 38 SILVA, G. T. Acoustic radiation force and torque on an absorbing compressible particle in an inviscid fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 136, n. 5, p. 2405–2413, 2014.
- 39 SILVA, G. T.; DRINKWATER, B. W. Acoustic radiation force exerted on a small spheroidal rigid particle by a beam of arbitrary wavefront: Examples of traveling and standing plane waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 144, n. 5, p. EL453–EL459, 11 2018. ISSN 0001-4966. Disponível em: <<https://doi.org/10.1121/1.5080529>>.
- 40 LEÃO-NETO, J. P.; LOPES, J. H.; SILVA, G. T. Acoustic radiation torque exerted on a subwavelength spheroidal particle by a traveling and standing plane wave. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 147, n. 4, p. 2177–2183, 04 2020. ISSN 0001-4966. Disponível em: <<https://doi.org/10.1121/10.0001016>>.
- 41 LIMA, E. B.; SILVA, G. T. Mean acoustic fields exerted on a subwavelength axisymmetric particle(a). *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 150, n. 1, p. 376–384, 07 2021. ISSN 0001-4966. Disponível em: <<https://doi.org/10.1121/10.0005625>>.
- 42 WU, J. Acoustical tweezers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 89, n. 5, p. 2140–2143, 1991.
- 43 MENG, L. et al. Transportation of single cell and microbubbles by phase-shift introduced to standing leaky surface acoustic waves. *Biomicrofluidics*, American Institute of Physics, v. 5, n. 4, p. 044104, 2011.
- 44 BARESC, D.; THOMAS, J.-L.; MARCHIANO, R. Observation of a single-beam gradient force acoustical trap for elastic particles: acoustical tweezers. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 2, p. 024301, 2016.

- 45 ANDRADE, M. A.; MARZO, A.; ADAMOWSKI, J. C. Acoustic levitation in mid-air: Recent advances, challenges, and future perspectives. *Applied Physics Letters*, AIP Publishing LLC, v. 116, n. 25, p. 250501, 2020.
- 46 KONDO, S.; OKUBO, K. Mid-air acoustic tweezers for non-contact pick up using multi-channel controlled ultrasonic transducer arrays. *Japanese Journal of Applied Physics*, IOP Publishing, v. 60, n. SD, p. SDDD16, 2021.
- 47 TIAN, Y.; HOLT, R. G.; APFEL, R. E. A new method for measuring liquid surface tension with acoustic levitation. *Review of scientific instruments*, American Institute of Physics, v. 66, n. 5, p. 3349–3354, 1995.
- 48 TUCKERMANN, R. et al. Trapping of heavy gases in stationary ultrasonic fields. *Chemical physics letters*, Elsevier, v. 363, n. 3-4, p. 349–354, 2002.
- 49 BAUERECKER, S.; NEIDHART, B. Cold gas traps for ice particle formation. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 282, n. 5397, p. 2211–2212, 1998.
- 50 BAUERECKER, S.; NEIDHART, B. Formation and growth of ice particles in stationary ultrasonic fields. *The Journal of chemical physics*, American Institute of Physics, v. 109, n. 10, p. 3709–3712, 1998.
- 51 SANTESSON, S.; NILSSON, S. Airborne chemistry: acoustic levitation in chemical analysis. *Analytical and bioanalytical chemistry*, Springer, v. 378, n. 7, p. 1704–1709, 2004.
- 52 LIERKE, E. Acoustic levitation—a comprehensive survey of principles and applications. *Acta Acustica united with Acustica*, S. Hirzel Verlag, v. 82, n. 2, p. 220–237, 1996.
- 53 GEIM, A. et al. Magnet levitation at your fingertips. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 400, n. 6742, p. 323–324, 1999.
- 54 ASHKIN, A.; DZIEDZIC, J. Optical levitation by radiation pressure. *Applied Physics Letters*, American Institute of Physics, v. 19, n. 8, p. 283–285, 1971.
- 55 RHIM, W.-K. et al. An electrostatic levitator for high-temperature containerless materials processing in 1-g. *Review of Scientific Instruments*, American Institute of Physics, v. 64, n. 10, p. 2961–2970, 1993.
- 56 RULISON, A. J.; WATKINS, J. L.; ZAMBRANO, B. Electrostatic containerless processing system. *Review of scientific instruments*, American Institute of Physics, v. 68, n. 7, p. 2856–2863, 1997.
- 57 MARZO, A. et al. Realization of compact tractor beams using acoustic delay-lines. *Applied Physics Letters*, AIP Publishing LLC, v. 110, n. 1, p. 014102, 2017.
- 58 KOZUKA, T. et al. Acoustic standing-wave field for manipulation in air. *Japanese Journal of Applied Physics*, IOP Publishing, v. 47, n. 5S, p. 4336, 2008.
- 59 GLYNNE-JONES, P.; BOLTRYK, R. J.; HILL, M. Acoustofluidics 9: Modelling and applications of planar resonant devices for acoustic particle manipulation. *Lab on a Chip*, Royal Society of Chemistry, v. 12, n. 8, p. 1417–1426, 2012.

- 60 EVANDER, M.; NILSSON, J. Acoustofluidics 20: Applications in acoustic trapping. *Lab on a Chip*, Royal Society of Chemistry, v. 12, n. 22, p. 4667–4676, 2012.
- 61 IHLENBURG, F. *Finite element analysis of acoustic scattering*. [S.l.]: Springer, 1998.
- 62 PIERCE, A. D.; BEYER, R. T. *Acoustics: An introduction to its physical principles and applications. 1989 Edition*. [S.l.]: Acoustical Society of America, 1990.
- 63 WU, J.; DU, G. Acoustic radiation force on a small compressible sphere in a focused beam. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 87, n. 3, p. 997–1003, 1990.
- 64 JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999.
- 65 LEÃO-NETO, J.; SILVA, G. T. Acoustic radiation force and torque exerted on a small viscoelastic particle in an ideal fluid. *Ultrasonics*, Elsevier, v. 71, p. 1–11, 2016.
- 66 LOUEDEC, K.; DAGORET-CAMPAGNE, S.; URBAN, M. Ramsauer approach to mie scattering of light on spherical particles. *Physica Scripta*, v. 80, n. 3, p. 035403, sep 2009. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/80/03/035403>>.
- 67 PEPPER, D. W.; HEINRICH, J. C. *The Finite Element Method: Basic Concepts and Applications with MATLAB®, MAPLE, and COMSOL*. [S.l.]: CRC press, 2017.
- 68 FERNANDO, N. d. A. d. P.; RIBEIRO, L. Introdução ao método dos elementos finitos. *COPPE/UFRJ–Notas de aulas do Programa de Engenharia Civil*, 2003.
- 69 TURNER, M. J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *journal of the Aeronautical Sciences*, v. 23, n. 9, p. 805–823, 1956.
- 70 ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. *Energy theorems and structural analysis*. [S.l.]: Springer, 1960. v. 60.
- 71 ZIENKIEWICZ, O. The finite element method- from intuition to generality(finite element method application, origin, development and relation to other mathematical methods, comparing with finite difference discretization processes). *Applied Mechanics Reviews*, v. 23, p. 249–256, 1970.
- 72 DYKEN, C.; FLOATER, M. S. Transfinite mean value interpolation. *Computer Aided Geometric Design*, Elsevier, v. 26, n. 1, p. 117–134, 2009.
- 73 LEAO-NETO, J. P. et al. Acoustic radiation force and torque on spheroidal particles in an ideal cylindrical chamber. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 149, n. 1, p. 285–295, 2021.

# Apêndice 1

## 1 Fórmulas de recorrência e assintóticas - funções de Bessel e Hankel

### 1.1 Formulas de Recorrência

Inicialmente, consideremos as fórmulas de recorrência para as funções de Bessel e Hankel de primeiro tipo. Usando  $x = kr$ .

1. Funções de Bessel esféricas

$$j_l(x) = -j_{l+1}(x) + \frac{l}{x}j_l(x), \quad (1)$$

$$x^2 j_l''(x) + 2x j_l'(x) + [x^2 - l(l+1)] j_l(x) = 0, \quad (2)$$

$$x^2 j_l'''(x) + 4x j_l''(x) + [2 + x^2 - l(l+1)] j_l'(x) + 2x j_l(x) = 0. \quad (3)$$

2. Funções de Hankel de primeiro tipo

$$h_l^{(1)'}(x) = -h_{l+1}^{(1)} + \frac{l}{x}h_l^{(1)}(x). \quad (4)$$

### 1.2 Consideremos, agora, as expressões assintóticas

1. Casos assintóticos quando  $x \ll 1$

- (a) Funções de Bessel esféricas

$$j_l(x) \sim \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad (5)$$

$$j_l'(x) \sim \frac{-x^{l+1} + l(2l+3)x^{l-1}}{(2l+3)!!}. \quad (6)$$

- (b) Funções de Hankel do primeiro tipo

$$h_l^{(1)}(x) \sim \frac{-i(2l+1)!!}{x^{l+1}} \quad (7)$$

$$h_l^{(1)'}(x) \sim \frac{i(l+1)(2l-1)!!}{x^{l+2}}. \quad (8)$$

2. Casos assintóticos quando  $x \gg 1$

(a) Funções de Bessel esféricas

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right), \quad (9)$$

$$j_l'(x) \sim \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{l\pi}{2}\right) + \frac{l}{x^2} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right). \quad (10)$$

(b) Funções de Hankel do primeiro tipo

$$h_l^{(1)}(x) \sim \frac{i^{-l-1}}{x} e^{ix}, \quad (11)$$

$$h_l^{(1)'}(x) \sim \frac{-i^l e^{ix}}{x} \left(1 + i \frac{l}{x}\right). \quad (12)$$

# Apêndice 2

## 1 Funções Radiais Monopolo e Dipolo

Na aproximação de comprimento de onda longo  $\epsilon \ll 1$ , as funções radiais esféricas podem ser expressas por [65];

$$\begin{aligned} R_{00}^{(1)} = & 1 + \frac{\epsilon^2}{18} (2 - 3C_1^2) + \frac{\epsilon^4}{16200} [112 - 180C_1^2 \\ & + 135C_1^4 + \frac{\epsilon^2}{882} (2192 - 8064C_1^2 \\ & + 5670C_1^4 - 2835C_1^6)], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} R_{10}^{(1)} = & \frac{\epsilon}{C_1} + \frac{\epsilon^2 C_1}{150} \left[ 2 - 5C_1^2 + \frac{\epsilon^2}{4900} \right. \\ & \left. \times (368 - 700C_1^2 + 875C_1^4), \right. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} R_{11}^{(1)} = & \frac{\epsilon S_1}{3} + \frac{\epsilon^3 S_1}{150} \left[ 4 - 5C_1^2 + \frac{\epsilon^2}{4900} \right. \\ & \left. \times (712 - 1400C_1^2 + 875C_1^4), \right. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} R_{00}^{(2)} = & -\frac{2}{\epsilon} L - \frac{\epsilon^2}{6} [6C_1 + L(3C_2 - 5)] \\ & + \frac{3}{5} \left(\frac{\epsilon}{6}\right)^4 [11C_1 + 9C_3 \\ & + \frac{L}{60} (1109 - 1380C_2 + 135C_4), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} R_{10}^{(2)} = & \frac{3C_1}{\epsilon^2} 2C_1 - \frac{C_2}{C_1} - 2L - \left(\frac{\epsilon}{10}\right)^2 \\ & \times \left[ 18C_1 - \frac{4C_2}{C_1} + L(22 - 10C_2) \right] + \frac{1}{882} \left(\frac{\epsilon}{10}\right)^4 \\ & \times \left[ 272313C_1 - 864\frac{C_2}{C_1} + 7875C_3 \right. \\ & \left. - L(116073 - 99540C_2 + 7875C_2), \right. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
R_{11}^{(2)} = & -\frac{3S_1}{2\epsilon^2} \left\{ \frac{C_1}{S_1^2} - 2L - \left(\frac{\epsilon}{10}\right)^4 \left[ 8C_1 \left(5 - \frac{1}{S_1^2}\right) \right. \right. \\
& \left. \left. - 8L(33 + 5C_2) - \frac{1}{196} \left(\frac{\epsilon}{10}\right)^2 \right] \right. \\
& \left. \times \left[ 85800C_1 - 1750C_3 + \frac{712C_1}{S_1^2} - L(106324 - 76950C_2 - 1750C_4) \right], \right.
\end{aligned} \tag{6}$$

$$R_{nm}^{(3)} = R_{nm}^{(1)} + iR_{nm}^{(2)}, \tag{7}$$

$R_{nm}^{(2)}$  é a função radial de segunda espécie. Observe que,  $R_{nm}^{(i)} = R_{n,-m}^{(i)}$ , com  $i = 1, 2, 3$ ., além disso;

$$C_n = \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{\epsilon^2 - 1} + \xi \right)^n + \left( \sqrt{\xi^2 - 1} + \xi \right)^{-n} \right], \tag{8}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left[ \left( \sqrt{\xi^2 - 1} + \xi \right)^n - \left( \sqrt{\xi^2 - 1} + \xi \right)^{-n} \right], \tag{9}$$

$$L = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \left( \sqrt{\xi^2 - 1} + \xi \right)^{-1}}{1 - \left( \sqrt{\xi^2 - 1} + \xi \right)^{-1}} \right). \tag{10}$$

# Apêndice 3

## 0.1 Soluções da Equação de Helmholtz - Coordenadas Esféricas

No problema de espalhamento acústico utilizaremos o sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ . Onde  $r$  é a distância radial,  $\theta$  é o ângulo polar e  $\varphi$  é o ângulo azimutal, conforme ilustrado na Fig.(1). Essa representação é particularmente útil, pois permite descrever a propagação da onda sonora em torno de um objeto em três dimensões, as coordenadas esféricas fornecem uma descrição conveniente para analisar a dependência angular do espalhamento acústico, enquanto a coordenada radial  $r$  permite estudar o comportamento da onda em diferentes distâncias do objeto. A regra de transformação de coordenadas esféricas em cartesianas pode ser descrita desta forma:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad (1)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad (2)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (3)$$

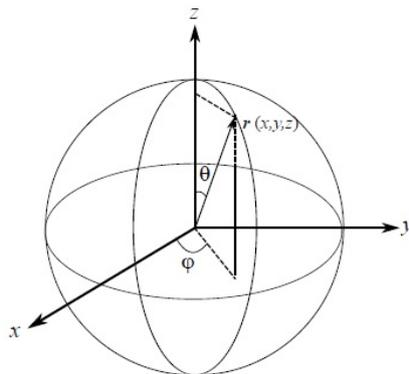
$\theta$  é medido a partir do eixo  $z$  positivo com  $0 \leq \theta \leq \pi$  no plano  $xy$  com  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Essas equações relacionam as coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$  às coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , nos permitindo converter pontos no espaço entre os dois sistemas de coordenadas.

Pode-se resolver a equação de Helmholtz para um fador  $\phi(\mathbf{r})$ , usando o método de separação de variáveis em coordenadas esféricas, que consiste em fazer a seguinte hipótese:

$$\phi(\mathbf{r}, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \quad (4)$$

$R(r)$ ,  $\Theta(\theta)$  e  $\Phi(\varphi)$  são funções arbitrárias radial, polar e azimutal. Essa hipótese assume que a solução da equação de Helmholtz pode ser expressa como o produto de três funções separáveis, uma dependendo apenas de  $r$ , outra dependendo apenas de  $\theta$ , e outra dependendo apenas de  $\varphi$ .

Figure 1: Coordenadas Esférica  $(r, \theta, \varphi)$  .



**Fonte:** Leão Neto, 2015.

O operador laplaciano pode ser escrito em coordenadas esféricas,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (5)$$

usando as Eqs. (4) e (5) podemos reescrever (??),

$$\frac{\Theta \Phi}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R \Phi}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{R \Theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 R \Theta \Phi = 0, \quad (6)$$

observe que, todas as derivadas agora são derivadas ordinárias, não mais parciais. Multiplicando a Eq.(6) por:

$$r^2 \sin^2 \theta (R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi))^{-1},$$

temos;

$$\sin^2 \theta \left[ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + r^2 k^2 \right] = 0, \quad (7)$$

com isso podemos isolar uma porção da equação unicamente dependente de  $(\varphi)$ ,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \sin^2 \theta \left[ -r^2 k^2 - \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right], \quad (8)$$

observe que essa equação relaciona uma função apenas de  $\varphi$  a uma função de  $r$  e de  $\theta$ . Como são variáveis independentes, podemos igualar cada lado a uma constante, ou seja, existe alguma constante real que deve ser igual a ambos os lados da igualdade. Considere  $m \in \mathbb{Z}$  tal que,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2, \quad (9)$$

$$\sin^2 \theta \left[ -r^2 k^2 - \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] = -m^2, \quad (10)$$

dividindo ambos lados da Eq.(10) por  $(\sin^2 \theta)$  e separando os termos, obtemos duas equações dependentes de  $r$  e  $\theta$ .

$$r^2 k^2 + \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right), \quad (11)$$

considerando outra constante  $l \in Z$  escrita como  $l(l+1)$  e escrevendo as equações separadas,

$$r^2 k^2 + \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1), \quad (12)$$

$$\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = l(l+1), \quad (13)$$

a solução da Eq.(9) é uma exponencial complexa, do tipo:

$$\Phi(\varphi) = \Phi_1 e^{im\varphi}, \quad (14)$$

onde  $\Phi_1$  é uma constante e  $m$  é um inteiro de modo que a solução é a mesma para  $\varphi$  e  $\varphi + 2\pi$ , devido a periodicidade do ângulo  $\varphi$ :

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi),$$

resolvemos a Eq.(13), usando uma mudança de variáveis ( $\eta = \cos \theta$ ), isso mostra que na simetria em questão o  $(\cos \theta)$  é a variável natural do problema, pois é em termos dela que suas soluções são visualizadas, com isso a Eq.(13) torna-se:

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{d\Theta}{d\eta}(\eta) \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] \Theta(\eta) = 0, \quad (15)$$

essa equação é identificada como a equação associada de Legendre, que possui por soluções as chamadas funções associadas de Legendre no argumento ( $\eta = \cos \theta$ ), ou seja,

$$\Theta(\theta) = \Theta_1 p_l^m(\cos \theta), \quad (16)$$

onde,  $p_l^m(\cos \theta)$  são as funções associadas de Legendre e  $\Theta_1$  é uma constante.

Podemos reescrever as funções  $\Phi(\varphi)$  e  $\Theta(\theta)$  como um conjunto de funções normalizadas por conveniência, conhecidas como harmônicos esféricos  $Y_l^m(\cos \theta, \varphi)$ , que podem ser representados matematicamente da seguinte forma:

$$Y_l^m(\cos \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (17)$$

onde  $l \geq 0, -l \leq m \leq l$ .

Em relação à dependência radial, da Eq. (12), suas soluções são dadas aos pares (como uma soma de duas soluções linearmente independentes), uma opção é a soma de uma função de Bessel esférica de ordem  $l$ ,  $j_l(kr)$ , e uma função de Neumann esférica de ordem  $l$ ,  $y_l(kr)$ ,  $R_1$  e  $R_2$  são constantes, ou seja,

$$R(r) = R_1 j_l(kr) + R_2 y_l(kr), \quad (18)$$

ou ainda por uma soma de funções de Hankel de primeiro e segundo tipo de ordem  $l$ , ou seja,  $h_l^{(1)}(kr)$  e  $h_l^{(2)}(kr)$ .

$$R(r) = R_3 h_l^{(1)}(kr) + R_4 h_l^{(2)}(kr), \quad (19)$$

$R_3$  e  $R_4$ , são constantes.

As funções de Bessel são bem definidas na origem e oscilam quando  $kr \rightarrow \infty$ , enquanto as funções de Hankel esféricas de primeiro tipo não são bem definidas para  $kr \rightarrow 0$ , mas decaem a zero a medida que  $kr \rightarrow \infty$ . Por fim, essas soluções são conectadas no fasor  $\phi(kr, \cos \theta, \varphi)$  de acordo com a região do espaço que tratamos: caso a função deva ser definida em  $r = 0$ , tomamos a combinação de funções de Bessel esféricas e de Neumann esféricas, então uma vez obtidas as soluções separadas das funções radial, polar e azimutal, a solução geral da equação de Helmholtz dada pela Eq. (4) torna-se:

$$\phi(kr, \cos \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [a_{lm} j_l(kr) + b_{lm} y_l(kr)] Y_l^m(\cos \theta, \varphi), \quad (20)$$

caso a situação seja tal que a função precise ser bem definida quando  $r \rightarrow \infty$ , a combinação das funções de Hankel de primeiro e segundo tipo é mais conveniente:

$$\phi(kr, \cos \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [s_{lm} h_l^{(1)}(kr) + c_{lm} h_l^{(2)}(kr)] Y_l^m(\cos \theta, \varphi), \quad (21)$$

onde  $a_{lm}$ ,  $b_{lm}$ ,  $s_{lm}$  e  $c_{lm}$  são coeficientes que serão determinados através das condições de contorno específicas de um problema acústico. Essas expressões são usadas para recuperar a onda de pressão  $p(\mathbf{r}, t)$  e o campo de velocidades  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  através das relações de recorrência,

$$p(\mathbf{r}, t) = -\rho_0 \phi(kr, \cos \theta, \varphi) \partial_t e^{-i\omega t}, \quad (22)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \nabla \phi(kr, \cos \theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (23)$$

onde  $\rho_0$  indica a densidade do meio onde a onda se propaga.