UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

CARLOS EDUARDO MÜLLER

A ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL EM LIVROS DIDÁTICOS DO PNLD 2019

Maceió – AL
2022

CARLOS EDUARDO MÜLLER

A ÁLGEBRA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL EM LIVROS DIDÁTICOS DO PNLD 2019

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Luís Paulo Leopoldo Mercado

Maceió – AL
2022

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valdir Batista Pinto – CRB - 4 – 1588

M958a Müller, Carlos Eduardo.

A álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental em livros didáticos do PNLD 2019 / Carlos Eduardo Müller. – 2022.
213 f.:il.

Orientador: Luís Paulo Leopoldo Mercado.
Tese (doutorado em Educação) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação. Maceió. 2022.

Bibliografia: f. 201-213.

1. Conteúdo educacional. 2. Matemática. 3. Álgebra. 4. Ensino fundamental I. Titulo

CDU: 37.011.33

Oh! Bendito o que semeia
Livros... livros à mão cheia...
E manda o povo pensar!
O livro, caindo n'alma
É germe – que faz a palma,
É chuva – que faz o mar.

Castro Alves

Às educadoras, representadas em Célia e Jô
Aos estudantes, representados por Léo e Edu
Aos trabalhadores, representados na lembrança
do Sadi Carlos Müller

AGRADECIMENTOS

Aos trabalhadores brasileiros, que gerando toda a riqueza desse país possibilitam o financiamento da educação pública.

Aos meus pais, Sadi (*in memoriam*) e Jolásdica, um operário industrial e uma professora de Matemática aposentada, exemplos de trabalhadores que lutaram para dar a melhor educação possível aos seus filhos.

À minha esposa, Célia e aos meus filhos, Leonardo e Eduardo que souberam me dar todo apoio, carinho e inspiração necessários, mesmo nos momentos em que desistir seria mais fácil.

Aos meus colegas professores e aos meus ex-alunos da educação básica que contribuíram na minha formação.

Ao Prof. Dr. Givaldo Oliveira e Prof. Dr. Walter Matias pelas contribuições na qualificação, para melhoria desta tese.

Aos meus amigos, doutores Fernando Sílvio Cavalcante Pimentel e Elton Casado Fireman pela colaboração nessa difícil e tortuosa trajetória de um trabalho com tanto isolamento.

Ao meu orientador, professor doutor Luís Paulo Leopoldo Mercado, pelas valiosas orientações, mas principalmente pela recepção e apoio em um momento delicado da minha pesquisa.

Aos membros da banca professores, doutores Maria Cecília Bueno Fischer, Arlete de Jesus Brito, Maria Aparecida Pereira Viana e Carloney Alves pelas contribuições para o aperfeiçoamento desta tese.

Aos ex-presidentes Luís Inácio Lula da Silva e Dilma Vana Rousseff, que entre 2003 e 2015 multiplicaram por cinco o número de vagas nos Programas de Pós-Graduação na Universidade Federal de Alagoas e assim, mesmo que indiretamente, possibilitaram esse estudo.

RESUMO

A BNCC introduziu a Álgebra no currículo da matemática escolar nos anos iniciais do Ensino Fundamental, uma novidade em relação aos PCN. O NCTM desde os anos 1980 tem enfatizado pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra e consolidou no início dos anos 2000 o movimento Early Algebra. O Early Algebra desenvolveu uma série de pesquisas acerca do trabalho do desenvolvimento do pensamento algébrico nas crianças desde os anos iniciais de escolaridade. Em diferentes momentos da história se propôs alterar a Educação Matemática, quase nunca com sucesso. Nessa nova mudança do programa curricular de Matemática, como estaria se dando essa inserção da Álgebra nos livros didáticos dos anos iniciais é o objeto dessa pesquisa. Desse modo, o objetivo desse estudo foi a entender como a Álgebra foi inserida nos livros didáticos dos primeiros anos do Ensino Fundamental, quais as influências, as possibilidades e as limitações. Os estudos de Blanton e Kaput (2005) mostravam a possibilidade de a Álgebra ser trabalhada como Aritmética Generalizada e como Pensamento Funcional. Antes de chegar aos atuais livros didáticos que apresentam a Álgebra nos anos iniciais se fez uma pesquisa historiográfica sobre obras que introduziam o estudo dessa área da Matemática na história brasileira e em alguns países que mantém algum nível de relação. Essa pesquisa qualitativa de caráter descritivo-analítico e abordagem dedutiva, teve como método de coleta de dados uma pesquisa documental, utilizando a Análise de Conteúdo para o tratamento e análise dos dados. A forma como a Álgebra apareceu nas coleções de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental foi verificada mediante a análise das atividades dos livros didáticos destinados ao 1º ano do Ensino Fundamental de 11 coleções aprovadas pelo PNLD em 2019. Observou-se a predominância da Álgebra como Pensamento Funcional, com ênfase no trabalho com padrões figurais, numéricos e numérico-figurais. A BNCC apresenta a Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental influenciada pelo NCTM e com viés tecnicista, limitando o trabalho nos Livros Didáticos dos primeiros anos.

Palavras-chave: Ensino de Álgebra; Livros Didáticos; Pensamento Algébrico; Anos Iniciais do Ensino Fundamental

ABSTRACT

The BNCC introduced Algebra into the school mathematics curriculum in the early years of Elementary School, a novelty in relation to the PCN. NCTM since the 1980s has emphasized research on the teaching and learning of Algebra and consolidated the Early Algebra movement in the early 2000s. Early Algebra developed a series of research on the development of algebraic thinking in children from the early years of schooling. At different times in history, it was proposed to change Mathematics Education, almost never successfully. In this new change to the Mathematics curricular program, the subject of this research is how Algebra is being included in the didactic books for the initial years. Therefore, the objective of this study was to understand how Algebra was included in didactic books in the first years of Elementary School, what were the influences, possibilities, and limitations. The studies by Blanton and Kaput (2005) showed the possibility of Algebra being worked on as Generalized Arithmetic and as Functional Thinking. Before arriving at the current didactic books that present Algebra in the early years, historiographical research was carried out on works that introduced the study of this area of Mathematics in Brazilian history and in some countries that maintain some level of relationship. This qualitative research with a descriptive-analytical nature and a deductive approach, used documentary research as its data collection method, using Content Analysis for data processing and analysis. The way in which Algebra appeared in didactics book collections for the initial years of elementary school was verified by analyzing the activities of didactic books intended for the 1st year of Elementary School in 11 collections approved by the PNLD in 2019. The predominance of Algebra was observed as Functional Thinking, with an emphasis on working with figural, numerical and numerical-figural patterns. BNCC presents Algebra in the early years of Elementary School influenced by the NCTM and with a technical trend, limiting the work in didactic books for the first years.

Keywords: Teaching Algebra; Didactic books; Algebraic Thinking; Primary School.

RESUMEN

La BNCC introdujo el Álgebra en el currículo de matemáticas escolar en los primeros años de la Enseñanza Primaria, novedad con relación al PCN. El NCTM desde la década de 1980 ha enfatizado la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra y consolidó el movimiento de Early Algebra a principios de la década de 2000. Early Algebra desarrolló una serie de investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en niños desde los primeros años de escolarización. En distintos momentos de la historia se propuso cambiar la Educación Matemática, casi nunca con éxito. En este nuevo cambio en el programa curricular de Matemáticas, cómo se está dando esta inclusión del Álgebra en los libros didácticos de los años iniciales es objeto de esta investigación. Por tanto, el objetivo de este estudio fue comprender cómo se incluyó el Álgebra en los libros didácticos en los primeros años de Educación Primaria, cuáles fueron las influencias, posibilidades y limitaciones. Los estudios de Blanton y Kaput (2005) mostraron la posibilidad de trabajar el Álgebra como Aritmética Generalizada y como Pensamiento Funcional. Antes de llegar a los libros de texto actuales que presentan el Álgebra en los primeros años, se realizó una investigación historiográfica sobre obras que introdujeron el estudio de esta área de la Matemática en la historia de Brasil y de algunos países que mantienen algún nivel de relación. Esta investigación cualitativa de carácter descriptivo-analítico y enfoque deductivo utilizó como método de recolección de datos la investigación documental, utilizándose el Análisis de Contenido para el procesamiento y análisis de los datos. La forma en que apareció el Álgebra en las colecciones de libros de texto para los primeros años de la enseñanza primaria se verificó analizando las actividades de los libros de texto destinados al 1º año de la Enseñanza Primaria en 11 colecciones aprobadas por el PNLD en 2019. Se observó el predominio del Álgebra como Pensamiento Funcional, con énfasis en el trabajo con patrones figurativos, numéricos y numérico-figurales. La BNCC presenta el Álgebra en los primeros años de la Escuela Primaria influenciado por el NCTM y con un sesgo tecnicista, limitando el trabajo en los Libros de Texto para los primeros años.

Palabras clave: Enseñanza de Álgebra; Libros didácticos; Pensamiento algebraico; Escuela Primaria.

LISTA DE SIGLAS

AAG	Álgebra como Aritmética Generalizada
APF	Álgebra como Pensamento Funcional
APOS	Action Process Object Schema
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CBE	Conferência Brasileira de Educação
CNE	Conselho Nacional de Educação
CNLD	Comissão Nacional do Livro Didático
Colted	Comissão do Livro Técnico e Didático
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
EF	Ensino Fundamental
EJA	Educação de Jovens e Adultos
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
ENPEC	Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências
FENAME	Fundação Nacional do Material Escolar
FIS	Fundação Itaú Social
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
GERM	Global Education Reform Movement
GHEMAT	Grupo de História da Educação Matemática

IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
INL	Instituto Nacional do Livro
LD	Livro Didático
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
LDBEN	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
MM	Matemática Moderna
MMM	Movimento da Matemática Moderna
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
ONG	Organização Não-Governamental
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIB	Produto Interno Bruto
PISA	Programme for International Student Assessment
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PNAIC	Programa Nacional de Aprendizagem na Idade Certa
Plidef	Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental
RCNEI	Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Brasileira
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SEPS	Secretaria de Ensino de 1º e 2º graus
SME	Secretaria Municipal de Educação

TDA	Teoria Antropológica do Didático
TDIC	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
USAID	United States – Agency for International Development
UFAL	Universidade Federal de Alagoas
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
URSS	União das Repúblicas Socialistas Soviéticas
UT	Unidade Temática

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As indagações que originaram esta tese acerca da inserção da Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental por meio dos livros didáticos são fruto da conjunção de três fatores: a experiência de lecionar Matemática na educação básica; o ingresso como professor no curso de Pedagogia; e a promulgação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O estudo aqui apresentado, se iniciou em 2012, quando assumimos o cargo de professor do curso de Pedagogia no Campus Sertão da Universidade Federal de Alagoas (UFAL). Com uma história de duas décadas na docência da Educação Básica, sempre percebemos a Álgebra como um assunto que causava grandes controvérsias, tanto junto aos colegas professores, quanto junto aos alunos.

Assim, ingressando na carreira do ensino superior, ligado a futuros pedagogos e futuras pedagogas, que assumem como professores e professoras das salas de aula dos anos iniciais do Ensino Fundamental, não queríamos lhes legar medo ou insegurança, os quais poderiam ser retransmitidos aos seus alunos. Desejávamos desenvolver junto aos alunos uma prática em que os conhecimentos matemáticos fossem vistos como importantes, porém compreensíveis, úteis e que não lhes causassem temor. Também sabíamos que era necessária uma abordagem que fornecesse aos estudantes ferramentas que lhes habilitassem a trabalhar com os conteúdos matemáticos historicamente característicos dos anos iniciais e que lhes proporcionassem êxito nas suas futuras classes. A nossa experiência como professor de Matemática que continha a Álgebra, conteúdo tradicionalmente destinado aos anos finais do Ensino Fundamental, sabíamos que era necessário buscar meios de bem fundamentar, mais e melhor, o trabalho para trilhar por caminhos diferentes.

Assim, esta investigação é fruto de inquietações provenientes das salas de aula da Educação Básica, enquanto professor, desde 1992; mas, também da necessidade de sermos melhores profissionalmente, agora no ensino superior; e com uma dose de casualidade aparente, que foi o surgimento da BNCC.

É importante salientar que existe um aspecto curioso na Matemática e no seu ensino que nos tem chamado a atenção. Por um lado, ela é a base do desenvolvimento das novas tecnologias da informação (STEEN, 1988) e de outro lado o seu ensino ainda apresenta óbices. A partir das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) há os mais variados estudos mostrando possíveis transformações na educação, ao mesmo tempo em que existem ainda buscas pela formulação de currículos e práticas didáticas que seriam mais adequados ao ensino de Álgebra (HOUSE, 1994).

Cabe destacar que desde a última década do século passado a palavra «mudança» talvez tenha sido a mais pronunciada em introduções de trabalhos e pesquisas em educação.

Porém, na educação, e mais especificamente na Matemática escolar, existem mudanças e permanências, as quais por vezes são tão ou mais difíceis de se verificar.

Nesse sentido, historicamente, percebemos uma tendência a ampliação do ensino, buscando cada vez levar as crianças mais cedo para a escola, pelas pré-escolas, jardins de infância ou creches. Em termos de ensino da Matemática algumas de suas áreas têm sido chamadas a comparecerem mais cedo no currículo escolar. Foi assim, com a Probabilidade e Estatística nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), quando se enfatizou que fossem trabalhadas dentro do bloco temático «Tratamento da Informação» desde o Ensino Fundamental. E, agora na BNCC, a Álgebra foi inscrita entre as Unidades Temáticas (UT) desde os anos iniciais.

Os trabalhos do Grupo de História da Educação Matemática (GHEMAT) mostram a história dessa disciplina escolar no Brasil, subdividida em fases que vão desde fins do século XIX aos anos 1970, em que predominaram certos modos de ensino, tais como: Lição das Coisas; Escola Nova e Matemática Moderna (MM). Tais formas de ensino se refletem nos livros didáticos de cada época.

A BNCC afirma o intuito de alcançar uma "aprendizagem de qualidade" (BRASIL, 2017, p. 5), e a inovação presente no ensino de Matemática, quando comparada com os PCN (BRASIL, 1998a e 1998b), foi a presença da Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, acompanhando uma tendência já presente nos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM[1], 2000). Entretanto, a preocupação com o ensino e a aprendizagem de Álgebra são bem anteriores. Já no início do século passado Antonio Trajano (1905, p. 3) abria o seu livro Algebra Elementar exaltando que nas grandes potências da época a Álgebra era uma das áreas mais importantes da educação e lamentando que em nosso país "(...) ao exceptuarmos os homens formados em qualquer dos ramos das mathematicas, será bem difficil acharmos em nossas cidades pessoas que tenham conhecimento de Algebra".

No Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2019 ocorreu a exigência de adaptação à nova portaria do Ministério da Educação (MEC) que estabeleceu a BNCC. É conhecida a influência dos livros didáticos no cotidiano escolar. De tal modo que nos parece salutar averiguar de que modo a inserção da Álgebra está ocorrendo por meio dos livros didáticos dos anos iniciais, ainda mais quando se observa que a última vez em que a Álgebra

[1] *National Council of Teachers of Mathematics*, o Conselho Nacional de Professores de Matemática, com sede nos Estados Unidos, mas que aceita associação de professores de vários países do mundo. Seus documentos são citados por documentos oficiais brasileiros e livros didáticos.

esteve no currículo dos anos iniciais (VALENTE et al., 2016) causou reações adversas em vários países (KLINE, 1976; MIORIM, 1998).

Valente et al. (2016), por sua vez, indicam que por vezes se pensa no passado como causa dos problemas atuais e a atualidade rica em soluções, ou seja, nos atualmente somos sempre melhores do que no passado, ou que no presente estamos em melhor condições de avaliar e propor algo transformador. Nas palavras de uma canção popular brasileira "o passado é uma roupa que não nos serve mais" (BELQUIOR, 1976). Contudo, nunca se tem a certeza de que as escolhas do presente sejam melhores que as do passado, se é que haveria possiblidade de comparação. De qualquer modo, parece bastante razoável que se busque as mais diversas avaliações sobre as decisões e propostas atuais.

Desse modo, muitas são as indagações que norteiam essa pesquisa, tendo como destaque: «como a Álgebra está sendo inserida nos livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental»? E, ainda, será que o fato de muito bem especificar suas propostas curriculares na forma de Objetos de Conhecimento e Habilidades descritas ano a ano, área por área da Matemática, ou traduzindo para a linguagem da BNCC, de unidade temática em unidade temática? Quer dizer, se por um lado têm o mérito de explicitar o que se quer, por outro lado não traz o prejuízo da restrição, da imposição de tantos limites que acabam por petrificar o trabalho? Ainda, até que ponto o que está sendo proposto no plano teórico acaba se apresentando nos livros didáticos (LD)?

Face ao exposto, o objetivo geral do estudo concentrou-se em analisar como a Álgebra está sendo inserida nos livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objetivos específicos:

a) Identificar conformidade entre as atividades dos livros didáticos com as habilidades propostas pela BNCC para a Álgebra;
b) Destacar as habilidades relacionadas à Álgebra mais recorrentes nas atividades dos livros didáticos;
c) Destacar as habilidades relacionadas à Álgebra poderiam estar presentes nas atividades dos livros didáticos;

Devido ao fato de a BNCC ter sido promulgada no final do ano e os livros didáticos terem sido editados ainda em 2017, nossa hipótese é de que esta aparição da Álgebra nos livros didáticos dos anos iniciais da escolarização tenha se dado de modo tímido, insuficiente talvez para cumprir os objetivos estabelecidos. Nesse documento a finalidade destinada para a unidade temática Álgebra nos anos iniciais é que o estudante desenvolva o pensamento algébrico, o qual se caracteriza na BNCC, pela capacidade de identificar regularidades e padrões, estabelecer relações numéricas e não-numéricas, e reconhecer as propriedades da igualdade.

Nesse sentido, esta pesquisa busca averiguar como a inserção da Álgebra está alterando os novos livros didáticos dos primeiros anos do EF. A importância deste estudo para a Educação Matemática diz respeito na mesma medida em que a Álgebra é importante nas suas relações com as demais áreas da Matemática. Sobre este aspecto, Lins e Gimenez (1997) e Fiorentini et al. (1993) defendem um trabalho na Matemática que estabeleça articulação da Álgebra com a Aritmética e da Álgebra com a Geometria. Já Piaget e Garcia (1987) entendem a Álgebra como algo tão importante a ponto de que viam nela a base de toda a estruturação da Matemática e de outras ciências.

Consideramos que este estudo é igualmente importante no currículo do ensino da Matemática, uma vez que mostra como as propostas de alterações curriculares acabam se expondo nos livros didáticos, suas possiblidades e limitações. Em relação a importância do estudo para a Formação de Professores, se dá na medida em que os professores precisam saber quais as características dos livros didáticos com os quais trabalham, de igual modo, é necessário perceber que os materiais didáticos com os quais trabalham são fruto de propostas pedagógicas, e precisam compreender o que dizem e a que se propõem essas renovações pedagógicas e didáticas.

Buscando compreender as novas propostas para o ensino de Álgebra nos anos iniciais, tomando como base os pressupostos de Chervel (1990), Lins e Gimenez (1997), Blanton e Kaput (2005), Saviani (2013) e Valente et al. (2016), apresentou-se como tese dessa pesquisa a seguinte proposição: «a BNCC insere a Álgebra nos anos iniciais do EF, influenciada pelo NCTM, e com viés tecnicista, que limita o trabalho nos Livros Didáticos dos primeiros anos».

Para encontrar possíveis respostas foi realizada uma pesquisa qualitativa (YIN, 2016) e, por lidar com a BNCC, o Guia do PNLD (BRASIL, 2018) e os livros didáticos aprovados no PNLD 2019, também uma pesquisa de procedimento documental. Num primeiro momento, analisando a BNCC (BRASIL, 2017) observamos, visando verificar tanto a importância quanto à forma atribuída à Álgebra nos anos iniciais, partindo das categorias Álgebra e subcategorias Álgebra como Aritmética Generalizada e Álgebra como Pensamento Funcional e com a utilização da Análise de Conteúdo (BARDIN, 2016).

Chervel (1990) mostra que nas reformas curriculares sempre são prometidas melhorias e/ou facilidades sejam elas no ensino ou na aprendizagem. E, com a BNCC não foi diferente. Ela se propõe ser parte de uma mudança curricular necessária para reduzir os índices de evasão e repetência, e melhorar a aprendizagem (BRASIL, 2017). Na apresentação da BNCC (BRASIL, 2017) o Ministro da Educação, afirma que a aprendizagem de qualidade é um objetivo que o país deve almejar e que para tanto a BNCC é um instrumento central, que o documento é completo, contemporâneo, elaborado por especialistas e atende às necessidades dos estudantes no seu desenvolvimento. Por fim, o Ministro garante que a partir da BNCC os estudantes vão adquirir as aprendizagens essenciais e apoiando-se nas dez competências gerais realizar seus projetos de vida.

Blanton e Kaput (2005) entendem que nos anos iniciais as principais formas da Álgebra se apresentar podem ser descritas como sendo extensões ou do pensamento funcional ou da Aritmética generalizada. Na abordagem da Álgebra como Pensamento Funcional (APF) existe o trabalho com padrões numéricos ou figurais, sequências repetitivas ou recursivas, regularidades e proporcionalidade. O tratamento da APF visa as habilidades referentes ao trabalho com as mais variadas formas de funções matemáticas. O trabalho deles entende que a Álgebra como Aritmética Generalizada (AAG) é aquela que visa abordar as propriedades da igualdade e da equivalência, bem como das propriedades das operações, de um modo geral visando a habilitar a criança a, num período posterior, ser capaz de resolver situações que envolvam problemas e atividades com equações e inequações.

Na sua estrutura, essa tese está dividida em seis seções. Na primeira seção apresentamos as visões sobre a Álgebra e o seu ensino ao longo da história e que ainda se expressam atualmente na educação matemática brasileira. Buscamos evidenciar que historicamente têm ocorrido influências de pesquisas de outros países nas formulações de propostas curriculares brasileiras. Desde o surgimento das primeiras escolas primárias no Brasil, passando pela MM até mais recentemente nas propostas de inserção da Álgebra nos primeiros anos escolares nos parece haver essa influência. Entendemos que os documentos formulados pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) nos anos 1980 e publicados no Brasil nos anos 1990 sob o título As idéias da Álgebra (COXFORD; SHULTE, 1994), conjuntamente com o *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) foram os principais influenciadores da inserção da Álgebra nos anos iniciais por meio da BNCC (BRASIL, 2017). Nessa seção mostraremos ainda algumas discussões sobre a elaboração da BNCC, as possíveis origens do documento brasileiro e como esse aborda a Álgebra.

Em seguida, discutimos em uma visão panorâmica debates que se travam em torno dos livros e manuais didáticos. Abordamos discussões acerca da importância dos livros didáticos desde seu surgimento e as contestações que lhes são feitas. Destacamos a importância que os livros tiveram no surgimento das primeiras escolas de primeiras letras. Apresentamos ainda as características necessárias pelos livros didáticos. Ressaltamos a importância dos livros textos e didáticos no intercâmbio de ideias pedagógicas entre o Brasil e outros países, bem como a possibilidade sempre presente dos livros didáticos nos fornecerem informações sobre a história das disciplinas escolares e suas características em cada época e país. Apresentamos, ainda, o desenvolvimento das diferentes iniciativas de incentivo ao uso do Livro Didático até chegarmos ao atual PNLD.

Na seção terceira, mostraremos os caminhos trilhados pela pesquisa, os procedimentos utilizados para a coleta de dados e análise dos livros didáticos aprovados pelo PNLD 2019. Apresentamos também a análise da Álgebra presente na BNCC, na avaliação do MEC a respeito dos livros didáticos e nossa sondagem inicial sobre eles.

Na quarta seção, elencamos todas as atividades relacionadas à Álgebra encontradas nos LD dos primeiros anos das 11 coleções que tivemos acesso. Fazemos uma classificação consoante às diferentes ações e conteúdos encontrados em cada atividade. Demonstramos as limitações e as possibilidades de trabalho com a Álgebra baseados no que diz a BNCC e no que afirmam os estudos de Blanton e Kaput (2005).

Nas considerações finais, analisamos a trajetória percorrida nesse estudo, buscando tirar proveito dos ensinamentos provenientes dos livros didáticos atuais e do passado, e de discussões históricas e do presente.

2. ÁLGEBRA: DO PENSAMENTO DEDUTIVO AO INTUITIVO E INDUTIVO

A Álgebra tem inúmeras aplicações, se destacando na resolução de problemas do cotidiano, na informática e na modelagem matemática e em outras ciências (COXFORD; SHULTE, 1994; BRASIL, 2018). Entretanto, existem problemas no seu processo de ensino e de aprendizagem, reconhecidos pelos próprios documentos oficiais, como citado nos PCN.

A Álgebra é, num primeiro momento, associada à parte da Matemática que utiliza letras para efetuar cálculos. Essas letras recebem nomes diferentes ao longo do período escolar, podem ser incógnitas, variáveis ou parâmetros. Seu estudo é considerado como iniciado por volta do sétimo ano, com o trabalho com equações e problemas no qual se deve calcular um valor desconhecido. No ano seguinte, o estudo se aprofunda com boa parte tendo-se lições com monômios, polinômios, produtos notáveis, fatorações, frações e equações algébricas. Para findar o ensino fundamental, no nono ano, trata-se das equações de segundo grau e as funções. Em suma, esse é o entendimento comum que se tem por Álgebra (LINS; GIMENEZ, 1997). Cabe ressaltar que algumas escolas dividem a Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental em Álgebra e Geometria, ou disfarçadamente em Matemática I e Matemática II. Esta é uma ideia antiga sobre Álgebra, mas também não se pode afirmar que sempre foi assim.

O ensino de Matemática chegou ao Brasil no século XVIII, com as primeiras aulas de fortificações e o ensino militar, mas seu estudo só passa a ser unificado, em uma só disciplina escolar, depois dos anos de 1930 (VALENTE, 1999). Antes disso eram «as matemáticas» e por elas se entendiam a Aritmética, a Geometria e a Trigonometria. Ainda hoje nas línguas inglesa, francesa e espanhola, a Matemática permanece como plural: *Mathematics*, *Mathématiques* e *Matemáticas*. Anteriormente, ainda havia a logística (MIORIM, 1998). Ou seja, o que queremos incialmente demonstrar é que há uma história por trás de (quase) tudo o que, por (muitas) vezes, entendemos como natural, imutável e estático.

Do mesmo modo, o entendimento atual do que se tem por Álgebra também tem se alterado durante a história. Os mais tradicionais livros sobre história da Matemática tratam a história da Álgebra como dividida em três momentos distintos, devido aos estudos de Neuggbauer, nos anos de 1920, e foi aceita plenamente até bem pouco tempo (ROQUE, 2012). Hoje, entende-se que esta divisão está ligada mais à linguagem algébrica e não propriamente à Álgebra, como mostraremos adiante.

Desde as primeiras marcações usadas pelos homens primitivos para representar as quantidades, passando pela criação dos algarismos e dos sistemas de numeração, vencendo as dificuldades para unificar as diferentes propostas de substituições de palavras e abreviações por símbolos e sinais para designar as operações matemáticas e quantidades desconhecidas, a humanidade foi assim constituindo a Álgebra, por meio de abstrações, simbolismos e generalizações (BOYER, 2002; EVES, 2004). A Álgebra como a Matemática se construiu tanto enquanto um conjunto de respostas às necessidades de sobrevivência do ser humano, como também por extensão do seu simbolismo e de sua capacidade de abstração. Os principais divulgadores da História da Matemática no Brasil, como Boyer (2002) e Eves (2004), aceitam que ocorreram três fases distintas da Álgebra: retórica, sincopada e simbólica. Os pontos nodais da história da Álgebra nos quais comumente se dividem os períodos são com Diofante de Alexandria no século III e com Viètè no século XVI. Dentro desta visão, no período da Álgebra retórica teria prevalecido a escrita na língua corrente. Com o passar do tempo surgiram abreviações que caracterizariam o período da Álgebra sincopada. Estas abreviações, assim, seguiram um processo de «redução» em suas extensões físicas, até que por meio de inúmeras propostas de símbolos, estas iriam passando por um funil histórico-lógico e seletor que resultaria na linguagem universal em que hoje está convertida a Álgebra simbólica. (BOYER; 2002, EVES; 2004)

A fase denominada «Álgebra retórica**»**, que vai dos primórdios até o século III da era comum (e. c.)[2], se considera como Álgebra as resoluções de equações. Os problemas estudados envolvem a quadratura do círculo, questões referentes a partilhas de heranças, questões contábeis dos governos, agrimensura e engenharia. A transmissão dos conteúdos se dava por preceptores, pessoas remuneradas para cuidar dos filhos da corte (MANACORDA, 2006). De outro lado, os trabalhadores manuais passavam seus conhecimentos de geração a geração, de pai para filho. A maior parte da população era de escravos, excluídos de qualquer ensino pouco mais sistematizado que não fossem práticas manuais do cotidiano e costumes transmitidos oralmente. Todos os processos eram descritos na língua corrente, sem uso de símbolos ou sinais além dos números. Diofante (nascido entre 201 e 214 — falecido entre 284 e 298) é denominado o «pai da Álgebra» a partir de um livro chamado Arithmética. Ele insere abreviações na escrita sobre resoluções de equações e, desse modo, a Álgebra, desse período posterior a Diofante, é considerada como «Álgebra sincopada**»**. Ainda que não tenha atingido a forma atual e moderna ela favorecia a escrita mais enxuta. Importante ressaltar que qualquer material para a escrita ou era demasiado custoso (papiro, pergaminho) ou frágil (tabletes de cerâmica).

[2] Notação usada para evitar discriminações religiosas (ROQUE, 2012).

Num terceiro período, no século XVI, Viètè (1540 - 1603) aprofunda as abreviações e cria sinais e formas de representar as equações que excetuando os expoentes ainda eram resolvidas por meio de textos. A partir desse período é o que se costuma chamar de «Álgebra abstrata» ou moderna. Por certo que todos os sinais e símbolos matemáticos que hoje conhecemos não foram de imediato produzidos. Os centros de produção da Matemática, que se tem conhecimento, eram dispersos pela Europa. A produção de livros tinha se iniciado no século XV, a partir de Gutemberg com a invenção da imprensa de tipo móvel, o que tinha favorecido a transmissão de conhecimentos. Schubring (2003) cita que grande número de livros de Matemática começava a ser produzido. O período vigente teve a predominância do comércio, também denominado de Mercantilismo. E, não havia uniformidade nas escritas matemáticas que surgiam, nem no idioma. Se os idiomas cultos eram considerados o latim e o grego, para popularizar a divulgação dos seus livros, e consequentemente facilitar a venda, os autores começaram a produzir na língua corrente, seja nos territórios hoje conhecidos como Itália, ou na França, Alemanha ou Inglaterra. Lembrando que nessa época os estados países como os encontramos atualmente ainda não estavam formados. A difusão de múltiplos sinais, representações e símbolos e em diferentes idiomas estava presente (SCHUBRING, 2003). Entretanto, podemos considerar que as abreviações usadas eram interessantes economicamente, visto que reduziam os gastos com papel (CHARTIER, 1999). Desse modo, ao mesmo tempo em que os conhecimentos matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da economia, também a economia acabou por influenciar o desenvolvimento da linguagem matemática e algébrica. Nesse período, os conhecimentos matemáticos produzidos não casualmente são os logaritmos, usados em cálculos referentes a juros, ao comércio (EVES, 2004).

O ensino distinguia-se conforme as classes sociais. As artes manuais eram repassadas nas corporações de manufaturas. Nas universidades e mosteiros destinava-se às cortes. Por outro lado, Roque (2012, p. 21) questiona esta linearidade histórica e qualifica como “mito” a versão de que “somos herdeiros dos gregos”.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apresentam outros quatro modos de dividir a história da Álgebra. Um deles separa em «Álgebra Clássica» ou Elementar e «Álgebra Moderna» ou Abstrata, o que as distinguiria seria a natureza do objeto de investigação, um primeiro momento dedicado ao estudo de equações e operações sobre quantidades generalizadas e num segundo às estruturas matemática, a partir dos trabalhos de matemáticos ingleses e franceses no começo dos anos 1800. Outra forma apresentada de fracionar a história da Álgebra trata de se referir às diferentes contribuições pela origem geográfica e/ou temporal tornando assim possível de ser abordar sobre uma «Álgebra egípcia», uma

«Álgebra babilônica», uma «Álgebra grega pré-diofantiana», uma «Álgebra chinesa», uma «Álgebra hindu», uma «Álgebra arábica», entre outras. Uma quarta leitura demarca o trabalho desenvolvido por Viètè como o verdadeiro surgimento da Álgebra, visto que o uso de letras para incógnitas e para coeficientes consistia num novo caráter simbólico assumido pelas letras. Assim, esse teria sido o início da Álgebra, e Viètè o seu «fundador».

O quinto modo de ver a história da Álgebra teria sido apresentado por Piaget e Garcia (1987), que tratavam de três períodos, especificamente: «intra-operacional», «interoperacional» e «transoperacional». O período intra-operacional é aquele no qual se buscava soluções específicas para equações e problemas específicos. O período interoperacional representa o período no qual se buscou soluções para grupos de equações, marcado pelos trabalhos de Lagrange (1736 – 1813) e Gauss (1777 – 1855). Por fim, o período transoperacional foi considerado a partir dos trabalhos de Galois (1811 – 1832) que geraram a teoria das equações com o cálculo infinitesimal.

Em *School Knowledge for the masses* (MEYER; KAMENS; BENAVOT, 2017), os autores mostram que a inserção da Matemática, através da Aritmética, principalmente, nos currículos de grande parte dos países ocorreu em três momentos, como que em ondas. Uma primeira onda na virada do século XVIII para XIX, outra por volta de 1830 e uma terceira entre os anos 1870 e início do século XX.

2.1. Diferentes visões sobre o ensino de Álgebra

Após essa digressão histórica, passamos agora a discutir o ensino de Álgebra dentro da Matemática escolar, a partir de trabalhos que consideramos significativos na Educação Matemática brasileira. Primeiramente, nos trabalhos brasileiros do início da década de 1990, quando ainda não havia um programa de pós-graduação em Educação Matemática. Em seguida, analisamos pesquisas realizadas no final da década de 1980, mas divulgadas pelo NCTM em forma de livro no Brasil apenas em 1994. Nestes artigos que seguem procuramos identificar de um lado a análise crítica sobre o ensino de Álgebra no Brasil e, de outro, conceitos e definições que foram se formando dentro dos estudos sobre a Álgebra escolar.

O artigo Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? de Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 39) começa questionando "O que é mais importante no ensino da Matemática, a Álgebra ou a Geometria? (...) Qual a especificidade de cada uma delas e que cuidados devemos ter no seu desenvolvimento?". Os autores iniciaram um importante resgate histórico do ensino de Matemática no Brasil e, não apenas no trabalho citado, apresentaram livros didáticos de distintas épocas com suas diferentes metodologias para os ramos da Álgebra e da Geometria, como na obra Introdução à história da educação matemática, de Miorim (1998). Eles denominaram de «pêndulo» a sequência histórica que, de um período da superioridade racional destinada ao ensino de Geometria, sobreveio seu abandono à centralidade da Álgebra para, em seguida, novamente, no início dos anos 1990[3], um novo descaso com a Álgebra e uma nova ênfase na Geometria. Inferiram a possibilidade desta oscilação ter decorrido de "uma atitude maniqueísta" fruto da tentativa de superar uma dicotomia "enfatizando o polo oposto àquele que vinha sendo priorizado" (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 52). Mas, teria existido realmente tal maniqueísmo, e qual teria sido a origem deste? Se ocorreu, por quê? Podemos retomar a interrogação feita pelos pesquisadores: "que forças interferiram e interferem no modo de encarar a relação entre o ensino de Álgebra e da Geometria?" (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 39). Essas questões partem da sugestão aventada pelos próprios pesquisadores. Intentamos, na verdade, apresentar que há outras possibilidades para essa «oscilação pendular» no ensino da Matemática.

Os referidos autores afirmam que até metade do século XX eram atribuídas diferentes finalidades às aprendizagens de Aritmética/Álgebra e de Geometria. As primeiras eram tratadas de modo pragmático, tinham seu referido valor definido pela utilização prática, enquanto a Geometria era apreciada por seu caráter formativo, sua capacidade de «elevar o espírito», sendo essa «superior». Segundo Pavanello (1993) essa dualidade de tratamento e valorização ainda era reforçada pelo sistema educacional que destinava às classes populares apenas os anos iniciais (nos quais se estudava Aritmética) e às classes dominantes alcançavam o secundário (e o estudo posterior da Geometria) e o ensino superior. De acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), com o advento do Movimento da Matemática Moderna (MMM), por volta dos anos 1950-1960, a Álgebra ganhou notoriedade e primazia visto que se preconizava o ensino a partir das estruturas algébricas e estas organizavam todo o programa de Matemática. Por sua vez, a Geometria enfrentava dificuldades de ser trabalhada, visto que essa se apresentava com vetores e transformações, ou seja, com feições da Álgebra moderna, e ficou, assim, relegada ao segundo plano. Entretanto, os autores chamaram a atenção para o fato de a Álgebra também ter saído prejudicada no período posterior à MM, visto que até seu caráter utilitário para resolução de problemas havia sido perdido, e entre as pesquisas encontradas perceberam uma prevalência na Geometria.

---

[3] A partir da observação dos autores a respeito da produção de trabalhos acadêmicos.

O movimento do pêndulo teria ido de uma valorização maior dada à Geometria até a primeira metade do século XX, ensinada nos «moldes euclidianos» para um «esquecimento» nos anos da MM e, posteriormente, uma nova retomada no pós-MM. O momento pendular então teria iniciado com um enaltecimento do pensar geométrico, passado pela centralidade da Álgebra na MM, e voltado para um maior número de pesquisas na Geometria e manutenção da Álgebra mecanizada e automatizada. Esta oscilação foi compreendida como que causada possivelmente por "uma atitude maniqueísta que acredita poder superar uma dicotomia enfatizando o polo oposto àquele que vem sendo priorizado" (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 53).

O artigo foi resultado também de uma análise crítica que crescia entre o conjunto dos professores que se levantavam contra o MMM desde os meados dos anos 70 e que, na nossa visão, contribuiu para conformar as diferentes correntes de pensamento existentes na atualidade na Educação Matemática. Essa forma de enxergar o período posterior à MM é compartilhada por Valente et al (2016), bem como por Saviani (2013) quando analisa a história das ideias pedagógicas no Brasil no período após o tecnicismo dos anos 1960 e 1970. Dos anos 1990 até os dias atuais novas (e, algumas renovadas) propostas surgiram fruto de pesquisas sobre o ensino de Álgebra e Geometria e por meio de documentos oficiais, tais como os PCN, Programa Nacional de Aprendizagem na Idade Certa (PNAIC), Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil (RECNEI) e, por último, a BNCC.

Para uma busca por respostas alternativas para explicar a «oscilação» entre Geometria e Álgebra ocorrida no século passado entendemos necessário um retorno a ponto nodais da história da educação Matemática brasileira. Diferentemente dos pesquisadores que elaboraram o texto d'O Pêndulo, vamos iniciar num momento anterior ao século XX.

Em fins do século XIX, a educação brasileira baseava-se fortemente no ensino clássico-humanista da tradição católica e, na Matemática, nos manuais das escolas politécnicas francesas. O ensino de Geometria era axiomático-dedutivo, enquanto na Aritmética e na Álgebra havia o caráter prático, eram voltadas à resolução de problemas. Junto à República a Reforma da Educação, proposta por Benjamin Constant, nascia com a influência positivista de Augusto Comte e pretendia romper com o modelo vigente, mas constavam mais de vinte disciplinas nos sete anos destinados ao ensino secundário, sendo, portanto, inviável. O programa de Matemática estava distribuído de modo que abrangia a Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria, Cálculo Diferencial e Integral, e Astronomia. De certo modo, o programa de Matemática estava em conformidade com os clamores de alguns matemáticos estrangeiros (MIORIM, 1998).

O desenvolvimento da Matemática foi grandioso durante o século XIX. Ocorreram progressos no cálculo diferencial e integral, nas geometrias não-euclidianas, na lógica e nas estruturas algébricas, com nomes como Gauss, Cauchy, Lobatchevski, Fourier, Poisson, Abel e Boole entre outros, mas também se apresentou um projeto pedagógico elaborado por um renomado matemático, o Programa de Erlanger de Félix Klein, em 1872 (EVES, 2004).

Com a intensa produção de novos conhecimentos matemáticos do período, vários professores universitários acabaram por sentir um duplo descompasso. Tanto os jovens que chegavam na universidade não reconheciam a Matemática como continuidade da Matemática escolar, quanto os docentes recém-formados no ensino superior chegavam às escolas sem saber como relacionar seus conhecimentos adquiridos com o programa escolar, estabelecendo-se assim um abismo. Disto decorreram insatisfações no que dizia respeito aos conteúdos e aos métodos de ensino trabalhados nas escolas. O descontentamento se fez presente na França, Inglaterra, Estados Unidos e em outros países. Formou-se, assim, o Primeiro Movimento Internacional para Modernização do Ensino de Matemática, o qual ganhou corpo durante os Congressos Internacionais de Matemática, ocorridos entre 1897, em Zurique, e 1928, em Bolonha. Consolidaram-se comissões para estudos das realidades do ensino da Matemática nos mais diversos países. De acordo com Miorim (1998), basicamente as propostas de renovação do ensino da Matemática convergiam para:

a. Redução no excesso de sistematização e lógica dos conteúdos escolares;
b. Valorização do pensamento intuitivo;
c. Inserção de Funções e Cálculo Diferencial e Integral nos programas escolares, visando unificar os diferentes ramos da Matemática;
d. Valorização das aplicações dos conteúdos matemáticos; e
e. Compreensão da necessidade de «fusão» de conteúdos, de modo a impedir a compartimentalização (fragmentação) dos conteúdos curriculares.

Ressaltamos aqui a presença da «valorização do pensamento intuitivo» está ligada às discussões sobre a «Elementarização» que ocorriam no final do século XIX (Valente, 2015). A defesa do trabalho com ênfase no pensamento intuitivo voltaria a aparecer nos trabalhos sobre educação matemática a partir dos anos 1980, e seria consagrado também nos PCN e na BNCC.

A 1ª Guerra Mundial (1914-1919) interrompeu a continuidade dos Congressos, bem como o desenvolvimento e implementação dos programas. Cabe ressaltar que havia representação brasileira nestes debates. A par disto, em 1931, ocorreu a Reforma Francisco Campos. Em parte, e oficialmente, os anseios dos primeiros renovadores do ensino da

Matemática foram correspondidos. A Matemática se unificou em uma disciplina e as recomendações pedagógicas foram no sentido de valorizar tanto o pensamento intuitivo, quanto a aplicabilidade dos conteúdos (VALENTE, 2003).

Porém, Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) verificaram que apesar das recomendações da Reforma Campos e da progressiva substituição dos livros Curso de Álgebra e Curso de Geometria – representantes do ensino de matemática fragmentado – por outros de acordo com a série à qual eram destinados, a Álgebra e a Aritmética permaneceram praticamente inalteradas na forma de apresentação, como mostra este trecho:

> No que se refere particularmente ao ensino de Álgebra Elementar, a análise de livros didáticos de forte penetração em nossas escolas, nos vários momentos do período, bem como a consulta aos programas oficiais ao longo de todo o período republicano, até por volta da metade da década de 60, revelam-nos que, em linhas gerais, os tópicos de Álgebra Elementar que eram objeto de ensino permaneceram praticamente inalterados: cálculo algébrico (compreendendo as operações com polinômios), razões e proporções, equações e inequações do 1º grau a uma incógnita, equações a várias incógnitas, sistemas de equações, radicais (operações e propriedades), equações do 2º grau, o trinômio do 2º grau, equações redutíveis ao 2º grau, problemas do 2º grau e sistema do 2º grau (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 42)

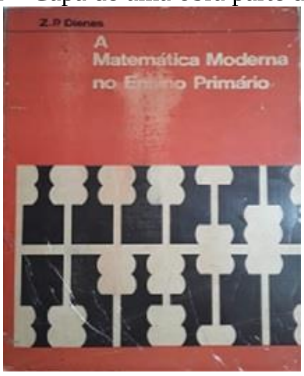
Os autores mostram que a Reforma Campos atendeu apenas em parte aos anseios dos educadores, unificando as matemáticas, assim, se deu margem para que as pugnas pela modernização do ensino de Matemática prosseguissem. Um novo momento para essa renovação se abre no final dos anos 1950.

Em 1957, a União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS) lançou o primeiro foguete no espaço – o *Sputnik* – e vivia-se o período do segundo pós-Guerra (ou Guerra-Fria), no qual se opunham os Estados Unidos e aquele país. Tal fato gerou no governo estadunidense uma insegurança quanto à possibilidade do seu poderio militar e tecnológico fazer frente às forças soviéticas. A partir disto, resolveu alterar todos os seus programas de cursos de Matemática e Ciências. Foi o início do MMM. Retomaram-se as discussões do início do século. Entretanto, havia agora o conhecimento produzido pelos estudos de Piaget (1896 – 1980) e, segundo estes, uma identificação entre as estruturas do pensamento da criança e as estruturas matemáticas (topológicas, algébricas e de relação). Um pouco antes dos Estados Unidos, no Brasil já haviam se iniciado discussões e propostas de reformulações do «currículo tradicional» e as preocupações dos educadores brasileiros tinham começado a ser expostas no 1º Congresso Nacional de Ensino da Matemática, em 1955. A intenção dos educadores brasileiros era a melhoria no processo de ensino-aprendizagem através da atualização dos conteúdos da Educação Matemática no ensino secundário e da introdução dos novos conhecimentos da psicologia, com favorecimento do pensamento intuitivo (MIORIM, 1998). Havia influências do Manifesto escolanovista de 1932 e, conforme Miorim (1998, p. 111):

> Esse novo movimento pode, por um lado, ser considerado uma continuidade em relação ao movimento anterior, uma vez que ambos tinham como objetivo inicial diminuir o descompasso existente entre o ensino da Matemática do curso médio e do curso universitário; este se ligava diretamente aos últimos avanços da Matemática, enquanto aquele se mantinha baseado, quase exclusivamente, na Matemática grega. Portanto, de maneiras diferentes, os dois movimentos tinham como pressuposto básico o slogan defendido por Jean Dieudonné, durante a conferência de Royaumont: Abaixo Euclides!

Duas reivindicações dos primeiros modernizadores do ensino da Matemática se veriam contemplados pelas propostas da MM: a tentativa de aproximar os conteúdos do ensino superior e do ensino básico e a inserção dos conhecimentos atualizados da pedagogia, influenciada pela teoria cognitiva de Jean Piaget (1896 – 1980). Como exemplo dessa influência, a obra de Dienes (1967) na figura 1.

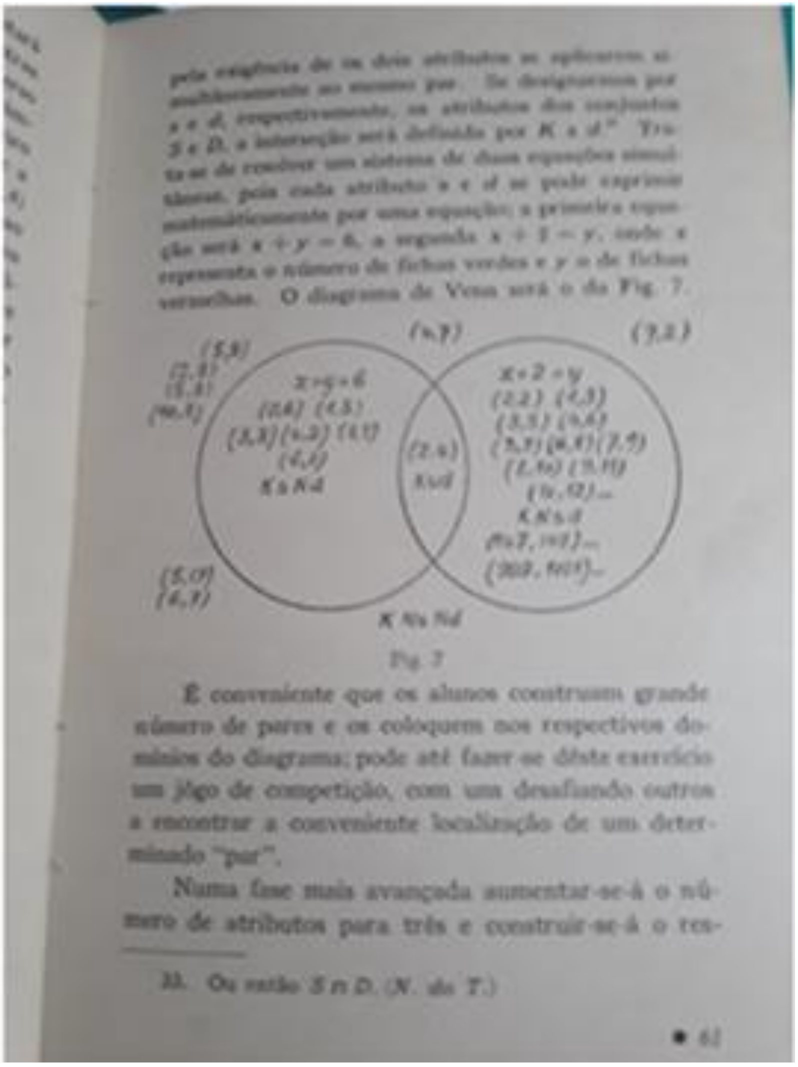
Figura 1 – Capa de uma obra parte do MMM



Fonte: Acervo do Autor

Uma das propostas da Matemática Moderna asseverava que as crianças de sete anos que se iniciavam nos primeiros anos escolares devessem trabalhar Lógica, Relações e Funções, e Geometria como pré-requisitos para a aprendizagem de Números. Entendia-se importante desenvolver a capacidade de «classificação» e «seriação» para depois se construir o conceito de número, deste modo eram necessárias primeiramente atividades com conjuntos (Figura 2), introdução à potenciação e com sistemas de numeração com bases diferentes de 10. Note-se que existia todo um arsenal de materiais desenvolvidos para apresentar às crianças as estruturas da matemática em uma sequência pré-estabelecida. Estas estruturas sobrepondo-se umas às outras se tornariam um tecido (PINHEIRO, 2013).

Figura 2 – Trabalho com Teoria dos Conjuntos na MM



pela exigência de os dois atributos se aplicarem si-
multâneamente ao mesmo par. Se designarmos por
s e d, respectivamente, os atributos dos conjuntos
S e D, a interseção será definida por K s d.[33] Tra-
ta-se de resolver um sistema de duas equações simul-
tâneas, pois cada atributo s e d se pode exprimir
matemàticamente por uma equação; a primeira equa-
ção será $x + y = 6$, a segunda $x + 2 = y$, onde x
representa o número de fichas verdes e y o de fichas
vermelhas. O diagrama de Venn será o da Fig. 7.

Fig. 7

É conveniente que os alunos construam grande número de pares e os coloquem nos respectivos domínios do diagrama; pode até fazer-se dêste exercício um jôgo de competição, com um desafiando outros a encontrar a conveniente localização de um determinado "par".

Numa fase mais avançada aumentar-se-á o número de atributos para três e construir-se-á o res-

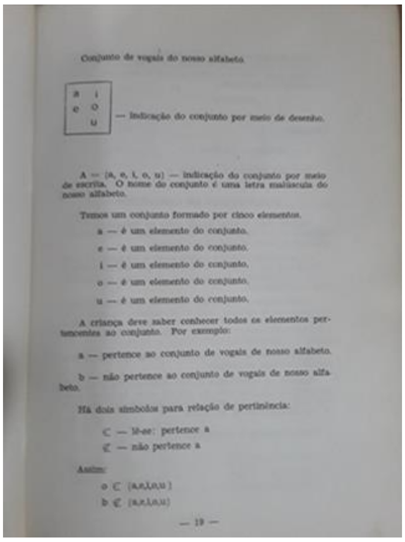
33. Ou então $S \cap D$. (N. do T.)

61

Fonte: Dienes (1967, p. 61)

Enquanto a figura 2 mostra o trabalho com a Teoria dos Conjuntos num livro voltado à formação de professores, elaborado por um pesquisador, as figuras 3, 4 e 5 mostram como as professoras Tosca Ferreira e Henriqueta Carvalho assimilaram essa parte das ideias do MMM e apresentaram em suas obras destinadas ao trabalho em sala de aula. A figura 3 apresenta uma página do livro destinado ao 2º ano do ensino primário.

Figura 3 – Trabalho com Teoria dos Conjuntos na MM



Conjunto de vogais do nosso alfabeto

a i
e o
u

— indicação do conjunto por meio de desenho.

A = {a, e, i, o, u} — indicação do conjunto por meio de escrita. O nome do conjunto é uma letra maiúscula do nosso alfabeto.

Temos um conjunto formado por cinco elementos.

a — é um elemento do conjunto.

e — é um elemento do conjunto.

i — é um elemento do conjunto.

o — é um elemento do conjunto.

u — é um elemento do conjunto.

A criança deve saber conhecer todos os elementos pertencentes ao conjunto. Por exemplo:

a — pertence ao conjunto de vogais de nosso alfabeto.

b — não pertence ao conjunto de vogais de nosso alfabeto.

Há dois símbolos para relação de pertinência:

$\in$ — lê-se: pertence a

$\notin$ — não pertence a

Assim:

$a \in \{a, e, i, o, u\}$

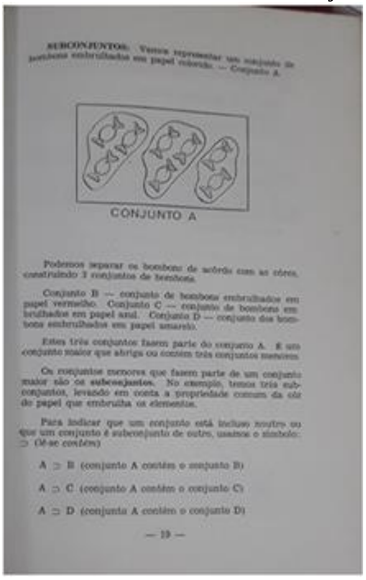
$b \notin \{a, e, i, o, u\}$

— 19 —

Fonte: Ferreira e Carvalho (1967a, p. 19)

As figuras 4 e 5 trazem páginas da coleção Curso Completo de Matemática Moderna para o ensino primário dos volumes para o 3º e 4º anos, respectivamente. Na coleção, apenas o livro do 1º ano não traz os símbolos da Teoria dos Conjuntos, ainda que trabalhe a formação das noções de conjuntos.

Figura 4 – Trabalho com Teoria dos Conjuntos na MM



SUBCONJUNTOS: Vamos representar um conjunto de bombons embrulhados em papel colorido. — Conjunto A.

Podemos separar os bombons de acôrdo com as côres, construindo 3 conjuntos de bombons.

Conjunto B — conjunto de bombons embrulhados em papel vermelho. Conjunto C — conjunto de bombons embrulhados em papel azul. Conjunto D — conjunto dos bombons embrulhados em papel amarelo.

Estes três conjuntos fazem parte do conjunto A. É um conjunto maior que abriga ou contém três conjuntos menores.

Os conjuntos menores que fazem parte de um conjunto maior são os **subconjuntos**. No exemplo, temos três subconjuntos, levando em conta a propriedade comum da côr do papel que embrulha os elementos.

Para indicar que um conjunto está incluso noutro ou que um conjunto é subconjunto de outro, usamos o símbolo: $\supset$ (lê-se contém)

$A \supset B$ (conjunto A contém o conjunto B)

$A \supset C$ (conjunto A contém o conjunto C)

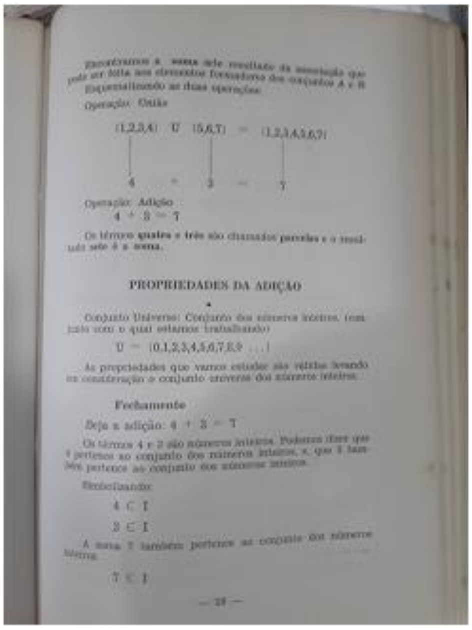
$A \supset D$ (conjunto A contém o conjunto D)

— 19 —

Fonte: Ferreira e Carvalho (1967b, p. 19)

Na Figura 4 vemos o símbolo de contém na relação entre conjuntos. Na Figura 5 aparece a união entre conjuntos, seu símbolo de união, e se estabelece uma relação entre a união e a adição.

Figura 5 – Trabalho com Teoria dos Conjuntos na MM



Operação: União

$\{1,2,3,4\} \cup \{5,6,7\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Operação: Adição

$4 + 3 = 7$

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \ldots\}$

Fechamento

Seja a adição: $4 + 3 = 7$

Simbolizando:

$4 \in I$

$3 \in I$

$7 \in I$

Fonte: Ferreira e Carvalho (1967c, p. 59)

Enquanto na Álgebra elementar não se a vislumbrava mais como uma continuidade da Aritmética, por uma generalização das regras aritméticas, na Geometria alguns livros didáticos tentavam escrever uma nova Geometria, baseada em espaços vetoriais e transformações lineares. Desse modo:

> [...] o novo enfoque proposto para o ensino de Geometria não conseguiu impor-se na prática escolar. O que acabou acontecendo foi a introdução da linguagem dos conjuntos na Geometria, de conceitos topológicos elementares tais como: interior, exterior, e de fronteira, e de alguns tópicos de Geometria das transformações, descaracterizando assim a abordagem axiomática-dedutiva e dando lugar a uma abordagem eclética. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 48)

Os resultados da MM foram malogrados. Ainda que ela tenha sido implementada de modos distintos conforme os países e suas tradições culturais, e mesmo no Brasil, com diferentes interpretações nos estados, houve uma rejeição praticamente generalizada. Para Miorim (1998, p. 115), “[...]a Matemática moderna não conseguiu resolveu o problema do ensino da disciplina. Ao contrário, agravou ainda mais a situação”.

No final dos anos de 1970, grupos que procuravam desenvolver o programa da MM reunidos para avaliar os resultados obtidos teceram uma série de obstáculos que encontraram ao longo da jornada. As objeções listadas consideravam ter havido: falta de uma capacitação adequada, cursos de formação incoerentes com a psicologia e a pedagogia definidas como embasamento teórico, programas e conteúdos inadequados e, inclusive, remuneração insuficiente (PINHEIRO, 2013).

Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 49) assinalam que o movimento modernista era na verdade bastante “difuso e diversificado” devido às diferentes compreensões do projeto. Segundo os pesquisadores brasileiros, foram conduzidos processos diferentes nos EUA, na França, e mesmo no Brasil, de acordo com as tradições culturais locais. Nos EUA teria havido uma influência do pragmatismo; na França, do racionalismo; e no Brasil, devido à conjuntura da época, o tecnicismo teria tangido a MM. Assim, devido ao fracasso da implantação da MM, a Aritmética era quase ininteligível, a Álgebra permaneceu mecanizada e automatizada e a Geometria ou ganhara uma abordagem eclética ou não era trabalhada na prática em sala de aula.

Face a essa situação, o conjunto de reações contrárias à MM foram forçando professores e pesquisadores a buscarem novas alternativas para a organização curricular do programa, bem como novas formas de abordagem para os cursos de Matemática da educação básica. Neste sentido, foi se formando uma diversificada gama de grupos dedicados à melhoria do ensino e da aprendizagem: uns tentaram a trazer a Matemática utilizada no cotidiano para dentro das salas de aula (CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHILIEMANN, 1995); alguns valorizaram as Matemáticas desenvolvidas pelas diferentes culturas, etnias e povos (D’AMBRÓSIO, 1996; D’AMBRÓSIO, 2002; GERDES, 1992); outros procuraram desenvolver a aprendizagem por meio da utilização de jogos e atividades lúdicas (DIENES; GOLDWING, 1969; PERELMAN, 1970), do uso da História da Matemática (MIGUEL, MIORIM, 2004; MIGUEL ET AL, 2009) e da resolução de problemas. Sobre a avaliação do movimento e a herança da MM, Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 50) destacam:

> Não tardariam, porém, a aparecer, a partir do final da década de 70, tentativas de superação dessa situação [de crise], geralmente restritas a correções de distorções e excessos cometidos ao longo da trajetória do movimento modernista. Uma das distorções mais denunciadas – e que passou a ser uma das principais preocupações das novas propostas – foi o esvaziamento do ensino da Geometria. Este “retorno” [na forma de preocupação e pesquisas] à Geometria não consiste nem na retomada pura e simples da Geometria euclidiana, na sua abordagem clássica, nem na reafirmação do papel que ela desempenha no currículo escolar dos períodos anteriores; mantêm-se, sobretudo, conceitos e propriedades fundamentais próprios da Geometria euclidiana numa abordagem inicial que privilegia os aspectos intuitivos e experimentais encaminhando-se, gradativamente, para deduções locais daquelas proposições mais fundamentais. Além disso, a Geometria tende a desempenhar, cada vez com mais frequência, um papel subsidiário na construção de conceitos e na visualização de propriedades aritméticas e algébricas. (grifo dos autores)

Na ideia do Pêndulo, questionamos, como está atualmente? Não temos certeza quanto a uma possível resposta, entretanto, o número de trabalhos sobre o ensino de Álgebra desde 1992 parece ter crescido bastante. Em verificação[4] entrando com a palavra-chave «ensino de Álgebra», na busca por assuntos, junto à página eletrônica dos Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), apenas a partir de 2015 encontram-se registros de 228 trabalhos revisados por pares. Se procurarmos desde 1992, o número ultrapassa os 360 registros. Na mesma página, também na busca por assuntos, entrando com a palavra-chave «pensamento algébrico» encontra-se o registro de 48 trabalhos revisados por pares, desde 2007. Acreditamos que ter havido uma influência do artigo e dos trabalhos empreendidos pelos três pesquisadores brasileiros Antônio Miguel, Dario Fiorentini e Maria Ângela Miorim, bem como do lançamento da tradução no Brasil do livro[5] As idéias da Álgebra, em 1994, do livro Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI (LINS; GIMENEZ, 1997) e também do documento *Principles and Standards for Schoolar Mathematics* do NCTM em 2000, visto a quantidade de citações em artigos sobre pensamento algébrico e ensino de álgebra na página eletrônica da CAPES, bem como a quantidade de citações nos LD de Matemática dos anos iniciais do PNLD 2019.

Deste modo, em relação ao ensino de Álgebra, pudemos identificar um artigo que discute o que diferiria um problema algébrico de um aritmético. Sá e Fossa (2008), defendem que os problemas que são resolvidos em linguagem matemática por expressões numéricas são de ordem aritmética e os resolvidos por equações, de natureza algébrica. Eles afirmam ser necessário maior cuidado a correta distinção, por parte dos docentes, no trabalho com problemas aritmético e algébrico.

Os estudos que dizem respeito à formação de professores e o ensino de Álgebra encontrados foram Araújo (2008), Santos, Pereira e Nunes (2017), e Lemes e Cedro (2015). Araújo (2008) observa ausência de orientações para o ensino de Álgebra na Educação Básica e sugere maior atenção às questões relacionadas à história na formação dos docentes para que o professor tenha melhores condições de desenvolver o pensamento algébrico nos seus aprendizes desde os anos iniciais. Santos, Pereira e Nunes (2017), num experimento com professores, verificaram que a maioria deles apresentava em suas epistemologias espontâneas a perspectiva de Álgebra como Aritmética Generalizada, confirmando outros estudos realizados no México, Espanha, França e Brasil. Os referidos autores deixam como sugestão que se pesquise as influências do livro didático na epistemologia espontânea dos professores. Lemes e Cedro (2015) realizaram uma pesquisa que mostrou a importância de a formação de professores desenvolverem atividades que utilizem a produção de sentidos

[4] Em 14 de junho de 2020.
[5] Produzido originalmente pelo NCTM dos EUA.

para o ensino e aprendizagem de Álgebra, dentro de uma concepção que perceba os conhecimentos matemáticos enquanto produtos histórico-culturais.

Dentre os trabalhos que relacionam a Álgebra aos livros didáticos encontramos Aguiar (2014), Nogueira (2008), e Silva e Resende (2016). Aguiar (2014), utilizando a Teoria da Transposição Didática e a Teoria Antropológica do Didático (TDA) de Chevallard (1999), verificou que para o ensino de Álgebra alguns livros didáticos permanecem enfatizando o treinamento de procedimentos e resoluções, ainda que tenha encontrado outros percursos destinados ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Nogueira (2008), também utilizando a TDA, identificou que todos os tipos de tarefas referentes à resolução de equações se encontravam nas três coleções de livros de 7ª série[6] analisados, bem como averiguou que dentre as tarefas auxiliares a transformação da linguagem natural para a linguagem algébrica é bastante valorizada. Silva e Resende (2016), analisando livros didáticos de Matemática do 8º ano utilizados em Uberaba/MG, perceberam que há uma tendência de não enfatizar o transformismo algébrico bem como contextualizar os conceitos algébricos, contudo tal abordagem vincula-se a uma lógica da generalização empírica, do particular para o geral.

Os trabalhos que abordam as dificuldades dos estudantes com a aprendizagem de Álgebra foram Barbosa, Vale e Palhares (2012), Ribeiro (2001), Lima (2007), Souza (2008), Gil (2008), Elias e Savioli (2013) e Groenwald e Becher (2010). Barbosa, Vale e Palhares (2012) descrevem um estudo que analisou o trabalho de estudantes do 6º ano com tarefas com padrões e generalização. Verificaram que os alunos tendiam a utilizar abordagens numéricas ao invés de visuais. Ribeiro (2001) aplicou e analisou a resolução de questões de Álgebra buscando identificar as origens dos erros mais frequentes. Ele observou que os erros mais cometidos provêm da confusão entre regra de sinais da multiplicação e a regra de sinais da adição algébrica e a inobservância do valor relativo nas operações entre monômios. Lima (2007) estudou as concepções de equações de estudantes do ensino médio sob a ótica do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, e observou que a resolução de equações desses estudantes não utilizava os princípios de equivalência. Para ela os mesmos tipos de pesquisa apresentam resultados similares desde o início dos anos 1980. Souza (2008) trabalhou com estudantes da licenciatura e professores em exercício a abordagem gráfica funcional para a resolução algébrica de inequações à luz da Teoria dos

[6] A Lei n. 10.172/2001 estabeleceu como meta o EF de nove anos, a Lei n. 11.114/2005 tornou obrigatória a matrícula de crianças de seis anos de idade no EF e a Lei n. 11.274/2006 ampliou o EF para nove anos e estabeleceu prazo para implementação até 2010. Assim, no período entre 2006 e 2010 foi ocorrendo a mudança da denominação da subdivisão do EF de séries para anos. E, a criança que antes poderia ser matriculada aos seis anos de idade no último ano destinado à Educação Infantil passou a obrigatoriamente ser inserida no EF.

Registros de Representação Semiótica, e constatou a ausência de aspectos formais e algoritmos em praticamente todos pesquisados. Gil (2008) percebeu que a tradução da linguagem simbólica e a relação entre Aritmética e Álgebra são os principais obstáculos para os alunos de uma turma de 7ª série quando a autora buscou identificar os possíveis motivos para as dificuldades na resolução de problemas algébricos. Elias e Savioli (2013) estudaram as dificuldades de oito graduandos na compreensão da estrutura algébrica grupo, tendo como quadro referencial a Teoria *APOS* (*Action, Process, Object, Schema*). Identificaram 20 diferentes dificuldades relacionadas a conjuntos, funções e grupos. Groenwald e Becher (2010) buscaram compreender com o auxílio do *software* SCOMAX o desenvolvimento do pensamento algébrico com alunos do 1º ano do ensino médio, e identificaram que os estudantes se baseavam mais em conhecimentos prévios de Aritmética e apresentavam melhor desenvolvimento em habilidades relacionadas à manipulação algébrica do que com a generalização e resolução de problemas.

Ainda há análise de propostas didáticas de Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), Pinto e Fiorentini (1997), Bonadiman (2007), Costa (2010), Oliveira e Laudares (2015), e Pavanelo (2004). Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), verificando as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas como prática de ensino, observaram a formação de um contexto rico e desafiador para a sala de aula. Identificaram também a vantagem de ligar a Álgebra ao trabalho de funções, ainda que num nível elementar. Já Pinto e Fiorentini (1997) analisaram os significados produzidos por uma professora e seus estudantes de 7ª série, e notaram a produção de polissemias que geram obstáculos epistemológicos. Bonadiman (2007) elaborou uma proposta para estudantes da 7ª série baseada no uso de letras e na produção de significados, e percebeu a compreensão de propriedades algébricas e progresso na autonomia nos processos de observação, levantamento de hipóteses, elaboração de conclusões e justificativas. Costa (2010) testou o uso de balança de dois pratos para a resolução de equações, e concluiu que tal artefato cultural, posto como artefato instrucional, facilita a compreensão de equivalência algébrica. Oliveira e Laudares (2015) defendem um trabalho integrado entre Álgebra, Aritmética e Geometria. Pavanelo (2004) investigou as reações de alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) numa proposta de desenvolvimento da Álgebra por meio da resolução de situações-problema. A análise se deu considerando o conceito de atividade segundo Leontiev e os resultados apontaram que "[...]ter em mãos um material teórico de qualidade, acompanhado de um trabalho de sala de aula que possibilite criar um ambiente propício à construção do conhecimento do aluno, não é suficiente para que a proposta de trabalho tenha êxito" (PAVANELO, 2004, p. 114).

Rodrigues (2008) investigou a resolução de produtos notáveis com o *software* Aplusix por estudantes do 8º e 9º anos, e constatou uma evolução conceitual e melhora no desempenho destes nas conversões entre os registros figural, algébrico e numérico, bem como no tratamento dos registros numérico e algébrico. Outro trabalho que testou o uso das TDIC foi o de Trevisani (2012), que procurou compreender as estratégias usadas pelos estudantes do 7º ano do EF para generalizar padrões com o *software* MiGen. O pesquisador concluiu que os estudantes utilizaram os padrões pela expressão geral, o que contribuiu para o desenvolvimento do processo de generalização algébrica.

A partir do trabalho com a História da Matemática, Vailati e Pacheco (2008) elaboraram atividades que, segundo os autores, motivaram os alunos, humanizaram a Matemática, conduziram a investigações e contribuíram para a compreensão dos conteúdos. Entretanto, ressaltam que apenas o recurso à História da Matemática não soluciona todos os problemas da Educação Matemática.

Enfatizando a importância do cálculo mental, Pires e Figueiredo (2014) procuraram identificar as relações entre o cálculo mental e o desenvolvimento dos conhecimentos algébricos em estudantes do 6º e 7º anos. Perceberam que a presença prévia de conhecimentos acerca do cálculo mental favoreceu a resolução de problemas algébricos sem a necessidade da realização de manipulações algébricas.

Hanke (2008) apresentou a elaboração de um caderno de atividades de caráter exploratório-investigativo baseado em padrões de regularidades como forma de desenvolver o pensamento algébrico e a aplicação dessas junto a estudantes da 7ª série do EF e 2º ano do ensino médio. Encontramos ainda os trabalhos de Carraher et al. (2006), Vale et al. (2007), Grecco (2008), Oliveira (2008), e Silva e Savioli (2012), que ressaltam a importância de a Álgebra ser tratada a partir do uso de padrões, sejam numéricos ou visuais (gráficos e geométricos). Carraher et al. (2006) estudaram durante 30 meses as condições sob as quais crianças de nove e dez anos poderiam ser iniciadas nos trabalhos com Álgebra. Eles observaram que as crianças usaram letras para representar variáveis de modo significativo, representaram funções e utilizaram conhecimentos sobre mudanças em quantidades para formularem novas expressões. Os referidos autores concluem que a compreensão das estruturas aditivas e dos números negativos são pontos de partida importante para uma «aritmética algebrificada», bem como uma multiplicidade de trabalhos com variáveis, incógnitas, representações em linhas numéricas e as notações espontâneas das crianças. Vale et al. (2007) discutem os múltiplos sentidos que são atribuídos ao termo «padrões», entretanto defendem o seu uso, visto que possibilitaria o estudo da Álgebra desde o pré-escolar. Grecco (2008) elaborou uma sequência didática para introdução de alunos do 7º ano ao estudo da Álgebra a partir da generalização e construção de expressões algébricas a partir de padrões e sequências sob a forma de problemas. Oliveira (2008) apresentou um trabalho com pós-graduandos em que as estratégias com generalização de padrões reduzem a tensão entre o pensamento algébrico a as notações equivalentes. Silva e Savioli (2012) mostram que no trabalho com estudantes de 5º ano, baseado no «*Early Algebra*», foi possível identificar aspectos relacionados ao pensamento algébrico.

Ainda encontramos dois trabalhos que discutem a importância do significado atribuído ao sinal de igualdade. Trivilin e Ribeiro (2015) identificaram as dificuldades dos professores relacionadas aos diferentes significados do sinal de igualdade e as implicações decorrentes desses significados, enquanto Civinski (2015) elaborou atividades com regularidades e padrões para desenvolver a ideia do sinal de igualdade como equivalência.

Outros dois artigos fazem um mapeamento das discussões sobre o próprio ensino de Álgebra. Beck e Silva (2015) identificaram que nos trabalhos sobre pensamento algébrico prevalecem as vertentes apresentadas como Aritmética generalizada e pensamento funcional, de acordo com Blanton e Kaput (2005). Por sua vez, Correio e Correio (2015) mostram a evolução do número de artigos apresentados nos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM), segundo os autores: VII ENEM – cinco artigos; VIII ENEM – nove artigos; IX ENEM – 12 artigos; X ENEM – 23 artigos; e XI ENEM – 23 artigos. Os assuntos mais tratados dentre esses trabalhos, segundo os autores, são a construção de significado em Álgebra; o uso da TDIC; formação de professores; e as representações algébricas. Em resumo, podemos apresentar o Quadro 1.

Quadro 1 – Trabalhos sobre Álgebra

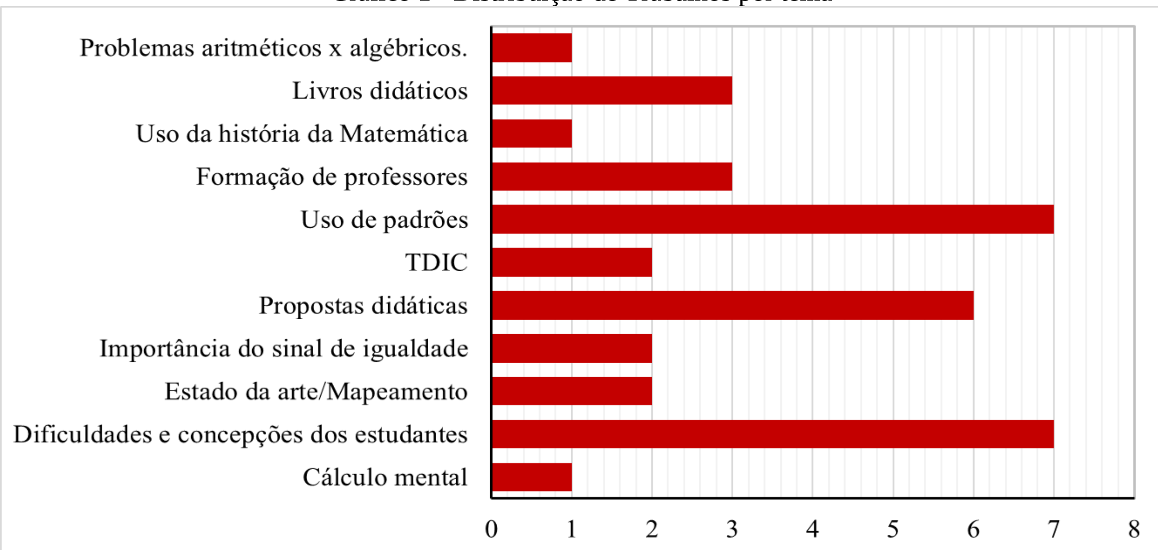
Ênfase	Autores
Problema algébrico x problema aritmético	Sá e Fossa (2008)
Formação de professores	Araújo (2008); Santos, Pereira e Nunes (2017); Lemes e Cedro (2015)
Livros didáticos	Aguiar (2014), Nogueira (2008), Silva e Resende (2016)
Dificuldades e concepções dos discentes	Barbosa, Vale e Palhares (2012), Ribeiro (2001), Lima (2007), Souza (2008), Gil (2008), Elias e Savioli (2013), Groenwald e Becher (2010)
Propostas didáticas	Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), Pinto e Fiorentini (1997), Bonadiman (2007), Costa (2010), Oliveira e Laudares (2015), Pavanelo (2004),
Uso das TDIC	Rodrigues (2008), Trevisani (2012)
Trabalho com a história da Matemática	Vailati e Pacheco (2008)
Cálculo mental	Pires e Figueiredo (2014)

Uso de padrões	Hanke (2008), Carraher et al. (2006), Vale et al, (2007), Trevisani (2012), Grecco (2008), Oliveira (2008), Silva e Savioli (2012)
A importância do sinal de igualdade	Trivilin e Ribeiro (2015), Civinski (2015)
Estado da arte e visão panorâmica da produção sobre a Álgebra	Beck e Silva (2015), Correio e Correio (2015)

Fonte: O Autor (2022)

A distribuição por assuntos, desses trabalhos pode ser representado no Gráfico 1:

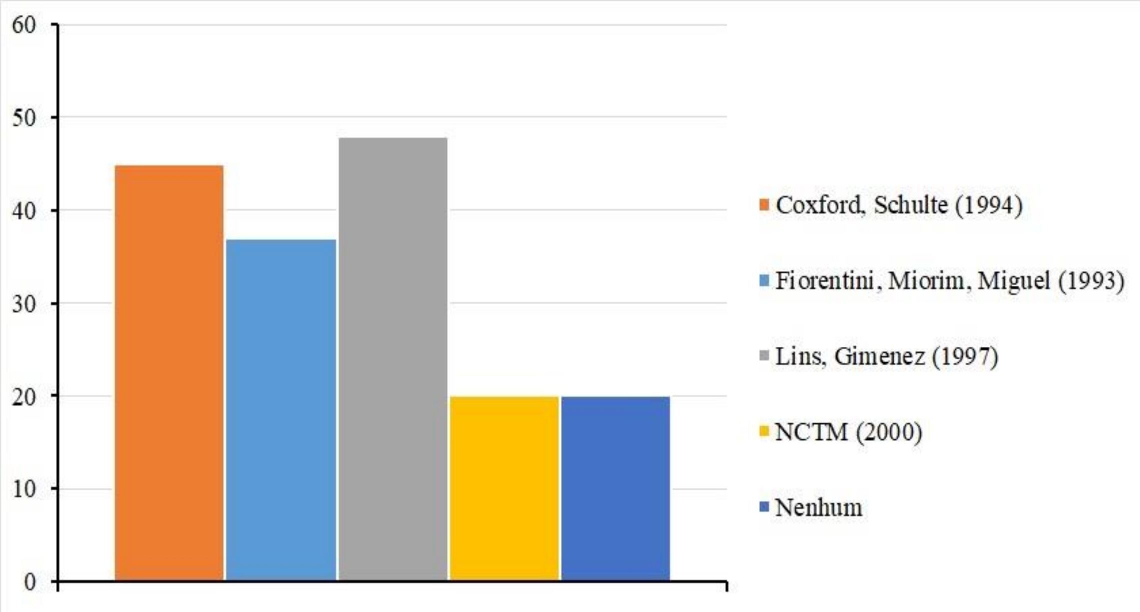
Gráfico 1 - Distribuição de Trabalhos por tema



Fonte: O Autor (2022)

E, desses trabalhos, observando suas referências biliográficas, encontramos presença das obras Coxford e Shulte (1994), Miguel, Fiorentini e Miorim(1992), Lins e Gimenez (1997) e NCTM (2000). A distribuição dessas obras nos trabalhos referidos no Quadro 1 está representada no Gráfico 2. Cabe ressaltar que constatamos que apenas 20% desses trabalhos não fizeram referências a pelo menos alguma das obras.

Gráfico 2 – Percentuais, dentre os trabalhos encontrados, daqueles que citam Coxford, Shulte (1994); Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997) e NCTM (2000)



Fonte: O Autor (2022)

Rodrigues e Pires (2017) encontraram 17 dissertações e três teses sobre Álgebra nos anos iniciais no período entre 2008 e 2017, na página eletrônica do Banco de Teses e Dissertações da CAPES. Nós, na mesma página, entrando na busca por assuntos com as palavras-chave «Álgebra nos livros didáticos dos anos iniciais», «Matemática nos livros didáticos dos anos iniciais» e «pensamento algébrico nos livros didáticos dos anos iniciais», limitando ao período de 2017 a 2022, encontramos[7] sete dissertações e duas teses que atendem a conteúdos de matemática nos LD. Entre os trabalhos que tratam de temas da Matemática em livros didáticos dos anos iniciais, duas dissertações: Golfeti (2017) e Amorim (2017) e uma tese: Santana (2020), discutem a Probabilidade e Estatística; e três dissertações: Costa (2018); Silva (2021); e Silva, A. (2021) se inserem em temas relacionados à Aritmética. Uma das dissertações, Santos (2017), estuda a Educação Financeira nos LD de Matemática dos anos iniciais. Há, ainda, uma dissertação, Milhossi (2017), que investigou a Álgebra nos LD do PNLD 2014 e outra, Paula (2019), aborda um tema específico da Álgebra que é o «conceito de variável», entretanto, ambas as pesquisas estão voltadas os anos finais do ensino fundamental.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) voltaram a publicar outros dois artigos sobre o assunto: Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Escolar e Ressonâncias e Dissonâncias do movimento pendular entre Álgebra e Geometria no currículo escolar brasileiro. No segundo, respondem a questionamentos levantados por colegas pesquisadores, e no primeiro desenvolvem as classificações sobre cinco leituras diferentes acerca do

[7] Em 01 de novembro de 2022.

desenvolvimento histórico da Álgebra, quatro concepções de Álgebra e três diferentes concepções da educação algébrica na história do ensino de Matemática no Brasil. Para os pesquisadores o pensamento algébrico pode se expressar:

> [...]através de linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para este fim, isto é através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1993, p. 88)

Consideram como «elementos caracterizadores do pensamento algébrico» a:

> [...]percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença de processo de generalização (FIORENTINI, MIORIM, MIGUEL, 1993, p. 87)

Já tínhamos indicações para a inserção de uma pré-Álgebra ou fortalecimento de conteúdos ou atividades para o desenvolvimento de um pensamento algébrico nos anos iniciais da escolarização desde os anos 1980 pelo NCTM em As idéias da Álgebra, reforçado no Brasil por Lins e Gimenez (1997) em Perspectivas em Aritmética e Álgebra no século XXI e pelos PCN no mesmo ano de 1997.

Lins e Gimenez (1997) fazem outra divisão, não de cunho histórico, mas sobre as concepções da Álgebra ou do que seria o pensamento algébrico. Para estes pesquisadores existem três grandes linhas de concepções sobre a atividade algébrica, as quais ainda internamente têm subdivisões. Uma destas linhas, talvez hegemônica, caracteriza como algébricas as atividades nas quais aparecem letras, chamam a esta concepção de «letrista». Outra corrente seria a que priorizaria apenas a presença de certos conteúdos (temas), valorizando como Álgebra especialmente as resoluções de equações. A terceira linha considera que *“a atividade algébrica resulta da ação do pensamento”* (grifos no original, LINS e GIMENEZ, 1997, p. 99). A essa terceira forma de Álgebra poderíamos chamar de «Álgebra cognitiva», visto que na interpretação dos autores as atividades podem ou não ser atividades algébricas a depender da direção, e do enfoque dado.

Em 1988, o NCTM publicou uma coletânea de 33 artigos sobre a Álgebra que chegou no Brasil, na tradução de Hygino H. Domingues, em 1994, sob o título As idéias da Álgebra, pela editora Atual. Pesquisas de House (1994); Usiskin (1994); Booth (1994); Thompson (1994); Kieran (1994); Mestre e Lockhead (1994) abordaram as dificuldades do ensino e da aprendizagem da Matemática e da Álgebra. Os resultados obtidos revelaram dificuldades relacionadas ao uso da linguagem matemática e da linguagem algébrica; referentes à abstração e generalização da aritmética; e na transição do pensamento aritmético ao pensamento algébrico (COXFORD; SHULTE, 1994).

O livro As idéias da Álgebra é situado por House (1994) como uma extensão natural de publicações dos anos anteriores e dentro de uma proposta do NCTM de reformulação curricular da Matemática. Entretanto, ela diferiu esta reforma das anteriores pelo fato de que naquele momento a origem do projeto provinha muito mais das “mudanças culturais” (HOUSE, 1994, p.2), e dentre estas a “tecnologia da computação” (idem, p. 3), do que por questões internas à própria disciplina. Ressaltava que apesar da inserção dos computadores nos mais variados campos das atividades humanas, como nas indústrias, comércio e serviços; nas escolas, no ensino e aprendizagem tal não se verificava. Entendia que era necessária uma alteração curricular em Matemática, pois as exigências da vida social estavam se modificando e “o conteúdo da matemática da escola de primeiro e segundo graus em 1988 mantém uma semelhança impressionante com a matemática da escola de primeiro e segundo graus de 1928, 1948 ou 1968” (idem, p. 2). Dentre as recomendações sugeridas estavam: retirar a ênfase atribuída à fatoração de trinômios de segundo grau e às frações algébricas; “incorporação de programas de computador e planilhas eletrônicas”; e uma “reordenação das prioridades” com o acréscimo da “matemática discreta” (idem, p. 3). Neste mesmo livro, no capítulo seis, com o título Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos, Demana e Leitzel (1994, p. 70-71) defenderam a necessidade de uma abordagem que reforçasse os “conceitos-chave da Álgebra num contexto numérico antes de se depararem com esses conceitos em cursos formais dessa matéria”. Para tanto, a recomendação se apoiava no uso intenso de calculadoras. No capítulo sete, denominado O ensino de álgebra para a criança mais nova, Thompson (1994) recomendava o uso de materiais concretos. Seu trabalho se baseou num estudo com crianças do terceiro ao sexto ano, com o uso de cartas coloridas, semelhantes às usadas e recomendadas por Dienes uma década antes, para a resolução de equações de 1º grau. “Os conceitos ensinados compreendiam os inteiros, operações com inteiros e equações do primeiro grau simples, como $3B - 5 = -2$” (THOMPSON, 1994, p. 80).

O capítulo oito A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-Álgebra de Post, Behr e Lesh (1994) descreve o que entendiam por raciocínio com proporções, explicita o porquê o entendiam como sendo importante no aprendizado de Álgebra, os métodos de resolução de problemas envolvendo proporções e defendiam a ideia de que “[...]a introdução da Álgebra deve se basear na noção de que as variáveis podem ser manipuladas de uma maneira que corresponde exatamente a muitos aspectos do mundo real” (POST; BEHR; LESH, 1994, p. 102).

No nono capítulo Kieran (1994) apresenta em “Duas abordagens diferentes entre os principiantes em Álgebra” que “a abordagem corrente [para resolução de equações], adotada na maioria dos programas de matemática, pode ser inadequada” (KIERAN, 1994, p. 109). Segundo a pesquisadora, seu trabalho apontou que é preciso que os estudantes passem por três subníveis diferentes na compreensão da letra numa equação: primeiro, precisa ser vista como ocupando o lugar de um número dentro de uma sequência de operações propostas; em seguida, deve trabalhar com tentativa e erro na substituição da letra por números; e, num terceiro momento, avançar do processo de substituição de valores pela aplicação de operações inversas nos dois membros da equação. Ao fim, conclui “[...]deveríamos considerar a ideia de começar esse processo na escola elementar” (idem, p.110).

Schoen (1994), por sua vez, no décimo segundo capítulo fornece seis recomendações: 1) fundamentar a aprendizagem “no conhecimento e na compreensão que os alunos já têm” (SCHOEN, 1994, p.137); 2) conduzir gradualmente da “verbalização” ao “simbolismo algébrico” (idem, p.138); 3) “introduzir” (idem, p.138) e 4) “ensinar” (idem, p.138) a Álgebra por meio de aplicações; 5) “ensinar e modelar processos heurísticos específicos como auxiliares para a compreensão e resolução de problemas” (idem, p.141); e, 6) “comprometer os alunos com a resolução de problemas” (idem, p. 141). Além de suas recomendações, cabe ressaltar que ele considera que “[...]a geometria métrica proporciona uma boa fonte para um trabalho inicial, pré-Álgebra, com experiências de resolução de problemas e de aplicações”, e sugere outros assuntos que reforçariam a aprendizagem em Álgebra, segundo ele “[...]razões, proporções e porcentagem” (idem, p. 137).

No capítulo 13, Lockhead e Mestre (1994) em Das palavras à Álgebra: corrigindo concepções erradas apontam que “[...]o passo mais difícil na resolução de problemas talvez seja a tradução das palavras para a Álgebra” (LOCKHEAD; MESTRE, 1994, p. 152). Os autores sugerem que são necessárias três compreensões para se desobstruir o caminho: a qualitativa, a quantitativa e a conceitual. Na primeira, procurar-se-ia estabelecer qual a grandeza seria a maior. A segunda compreensão partiria da suposição de uma quantidade para uma das grandezas e o consequente cálculo da quantidade da outra, para verificar se a primeira compreensão estava correta. E, terceira compreensão seria o estabelecimento da relação correta entre as duas grandezas a partir da escrita da equação. Todo esse processo a partir de uma abordagem que, segundo os próprios autores, “[...]assemelha-se a um diálogo socrático” (idem, 1994, p. 152).

Em Desenvolvimento da representação algébrica através de diagramas, capítulo 14, Simon e Stimpson (1994) sugerem que os diagramas poderiam mediar o caminho entre o entendimento concreto que os alunos têm de um problema e as abstrações da Álgebra. Assim, estimulados a resolver um problema eles teriam o foco no problema e usariam uma representação que lhes seria mais familiar. Nas palavras dos autores “[...]quando aprendem uma representação algébrica, passam a considerar como um método mais poderoso e eficaz de resolução de uma classe de problemas com que já estão familiarizados” (SIMON; STIMPSON, 1994, p. 158).

As partes seguintes, cinco e seis, do livro As idéias da Álgebra são repartidas em dezenove artigos sobre o ensino de Álgebra do ensino médio, sendo destes, dez sobre o uso de calculadoras e computadores (parte 5) (COXFORD; SHULTE, 1994).

No desdobramento das partes cinco e seis, House (1994) afirma a necessidade de se reformular o ensino de Álgebra; Usiskin (1994) formula uma classificação interna da Álgebra[8], se desdobrando em “aritmética generalizada”, “meio de resolver problemas”, “estudo de relações” e “estrutura” (USISKIN, 1994, p. 13); Booth (1994) e Markovits et al (1994) analisam as principais dificuldades encontradas pelos estudantes no ensino e aprendizagem da Álgebra e de Função.

Entre as dificuldades destacadas por Booth (1994) estão:

a. “O foco da atividade algébrica e a natureza das respostas” (BOTH, 1994, p.24).

As atividades aritméticas se desenvolvem de modo a que sejam concluídas com um número resultado de uma operação de soma ou subtração, multiplicação ou divisão, potenciação ou radiação. Enfim, de modo que o objetivo final se mostre ao estudante como sendo sempre a obtenção de uma resposta numérica. Assim, acabam por criar esta expectativa de um número. Entretanto, nas atividades algébricas coexistem e se desenvolvem vários transformismos, aplicações de propriedades e generalizações nas quais o resultado final pode ser apenas o estabelecimento de uma relação ou apenas a simplificação da relação inicial exposta. E, essa diferença entre os tipos «resultados» das atividades aritméticas e das atividades algébricas não é muitas vezes compreendida entre os discentes. Com efeito, quando uma resposta deveria ser $4x + 5y$ ou $a+b+c$ podem aparecer as «respostas alternativas» $9xy$ e abc.

b. O uso da notação e da convenção em Álgebra.

Para a compreensão algébrica é necessário que os sinais sejam compreendidos com mais de um significado tanto o sinal de mais pode representar uma operação a ser realizada, quanto uma operação já realizada do mesmo modo o sinal de igual pode representar a igualdade entre uma operação aritmética e seu resultado, bem como uma equivalência entre duas expressões.

[8] Inclusive muito próxima da contida nos PCN.

c. O significado das letras e das variáveis

O uso das letras em matemática tem diferentes possibilidades: na Aritmética podem designar unidades de comprimento unidades de área ou de volume; na Geometria pode indicar distâncias desconhecidas, vértices de polígonos ou pontos. Assim, 4m poderia significar 4 metros ou 4 vezes m do mesmo modo ABC podem representar um triângulo ou o produto de três medidas ou de três valores desconhecidos. Muitas vezes os alunos ficam presos à ideia de que cada letra distinta deve assumir distintos valores, desse modo as expressões $a + b + c$ e $a + b + d$ necessariamente tenho valores diferentes.

d. Os tipos de relações e métodos usados em Aritmética

A Álgebra precisa ser compreendida como uma abstração, como uma generalização das relações e dos processos aritméticos não há como desprender métodos e relações de um outro lugar para a Álgebra que não seja a partir das atividades aritméticas.

Entendemos que a linguagem algébrica é o resultado de uma expressão do pensamento algébrico, ou seja, é uma generalização a partir das propriedades das operações aritméticas. Desse modo, a Álgebra nasceu da generalização e abstração das propriedades das operações aritméticas e do uso de símbolos que possibilitam a generalização e a abstração destas propriedades. Assim, consideramos como Álgebra tanto a sua linguagem própria, quanto as generalizações e abstrações que levaram a estruturar tal linguagem própria.

Como asseveramos, a Álgebra tem tido inúmeras aplicações, em especial, na informática, visto que ela é a base das linguagens computacionais e mola propulsora da revolução tecnológica proveniente da microeletrônica (STEEN, 1988), entretanto, persistem há décadas sérios problemas no seu processo de ensino e aprendizagem. Os dados obtidos nas avaliações do MEC e expostos por Silva (2008) mostram que há uma queda no desempenho de Matemática entre o quinto e o nono ano do ensino fundamental. Ainda que os mesmos dados demonstrem haver uma melhora gradual nos índices educacionais ano após ano, persiste um descompasso entre o verificado nas séries iniciais e finais desse nível de ensino. Acreditamos que um dos fatores que têm contribuído para essa redução no aproveitamento observado no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) seja devido a deficiências na apreensão da Álgebra. Com essa aprendizagem debilitada poder-se-ia explicar, em parte, o baixo desempenho também obtido no ensino médio, visto que boa parte dos conteúdos desse nível da educação básica tem a Álgebra como pré-requisito, não apenas na Matemática, mas também nas ciências da natureza em situações e conceitos nos quais são necessários trabalhos com fórmulas, equações e funções.

Oficialmente se assume o insucesso do ensino da Álgebra nas escolas brasileiras nos PCN (BRASIL, 1998b, p.115-116):

> [...] a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem um índice de 40 % de acerto em muitas regiões do país.

Se levarmos em conta as afirmações do próprio documento governamental na citação acima e compararmos com a análise feita por Trajano (1905), no prefácio de sua «Algebra Elementar», podemos perceber que as dificuldades com a Álgebra vêm de longa data e pouco se alterou, pois ele também afirmava que excetuando-se uns poucos formados nas áreas que estudavam matemática, quase ninguém mais sabia algo sobre Álgebra. Outro indício do quão pouco se estudava Álgebra no início do século XX no Brasil é o fato de que ela que possui menor número de publicações entre as áreas da Matemática, constantes no Repositório do GHEMAT, referentes a esse período (MENDES, VALENTE; 2017)

Deste modo, somando-se os estudos do NCTM, de Lins e Gimenez (1997) e as indicações dos PCN aos estudos de Oliveira (2008) e Barbosa, Vale e Palhares (2012), que defendem que o desenvolvimento do trabalho com padrões numéricos favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico, parece termos o embasamento usado nas orientações da BNCC.

Com efeito, a compreensão atual do que se tem por Álgebra envolve mais do que a linguagem matemática desenvolvida pela Álgebra, ou pela linguagem algébrica. Considera-se também como parte integrante da Álgebra os pensamentos necessários para as generalizações e abstrações utilizadas para averiguar padrões e uniformidades, definido como «pensamento algébrico».

Quanto ao ensino de Álgebra na escola, as críticas dos documentos oficiais como PCN (BRASIL, 1998a, 1998b) dizem respeito à ênfase dada na utilização das técnicas e no transformismo e que se esquece o trabalho com o pensamento algébrico. Em outras palavras, valoriza-se e trabalha-se excessivamente as aplicações de propriedades, resoluções de equações e pouco na problematização e desenvolvimento do pensamento algébrico. Considera-se que há uma supervalorização na memorização e repetição e pouca atenção ao desenvolvimento de conceitos. Aqui, a crítica parece ser a mesma que a feita ao ensino de Aritmética há alguns anos. Assim como se criticava o «arme e efetue» ao invés da utilização das operações aritméticas na resolução de problemas, existem resistências ao fato que se enfatize demasiadamente a resolução de equações no lugar de, a partir de problemas, se faça a modelagem da situação, descrevendo-a algebricamente, para então a equação, que soluciona o problema, ser resolvida. Indo além do que se afirma usualmente, podemos dizer que a crítica reside no fato de se sobrevalorizar o pensamento dedutivo usado nas resoluções de equações e transformismos sobre os pensamentos intuitivo e indutivo, os quais seriam necessários para a elaboração da escrita algébrica.

2.2. Princípios e normas da Matemática escolar do NCTM

O documento *Standards and Principles for School Mathematics*, do NCTM (2000) se define como resultado de um debate proposto a professores, pesquisadores, formuladores de políticas educacionais e demais interessados na educação matemática. Foi fruto de outros documentos da década anterior acrescidos de um debate proposto à sociedade. O documento é composto de oito capítulos. No primeiro capítulo Uma visão para a matemática escolar apresenta a ideia “altamente ambiciosa[9]” (NCTM, 2000, p. 3) de que todos os estudantes podem aprender matemática com qualidade. Em seguida apresenta seis princípios que devem nortear a Matemática escolar: equidade, currículo, ensino, aprendizagem, avaliação e tecnologia. No terceiro capítulo apresenta uma visão ampla sobre a Matemática escolar desde a pré-escola até o 12º grau, o equivalente ao final do nosso ensino médio brasileiro. Essa visão geral se dá sobre dez «normas»: números e operações; Álgebra; Geometria; medidas; análise de dados e probabilidade; resolução de problemas; raciocínio e provas; comunicação; conexões e representações. As cinco primeiras se referem a especificação dos conteúdos e as cinco seguintes se referem a «normas do processo». Nos capítulos seguintes estas normas são observadas para agrupamentos de três em três anos de estudo. Assim, no capítulo quatro se observa a discussão acerca das mesmas normas no que se refere especificamente ao pré-escolar até o chamado segundo grau (equivalente ao nosso segundo ano do ensino fundamental). No quinto capítulo os itens se referem ao nosso equivalente terceiro ano do fundamental ao quinto ano. Em seguida, do sexto ao oitavo e, por fim, do nono ao décimo segundo ano.

Quadro 2 – Equivalência entre ensino no Brasil e nos Estados Unidos

Brasil	Estados Unidos
Educação Infantil – 2º ano do ensino fundamental	*Prekindengarden* – 2º *grade*
3º – 5º ano do ensino fundamental	3º *grade* – 5º *grade*
6º – 8º ano do ensino fundamental	6º *grade* – 8º *grade*

[9] No original: [...] highly ambitious [...]

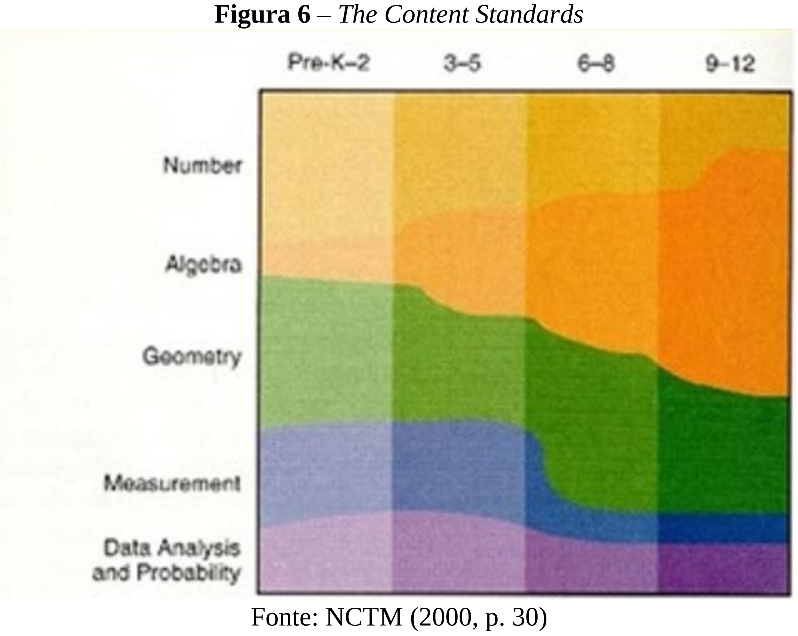
9º ano do ensino fundamental – 3º ano do ensino médio	9º *grade* – 12º *grade*

Fonte: O Autor (2022)

A Figura 6 representa como se idealiza o trabalho com o que seria o equivalente às nossas unidades temáticas da BNCC, ou aos blocos temáticos do PCN. Percebe-se que dividem o ensino de Matemática em cinco áreas: Números, Álgebra, Geometria, Medidas e Análise de Dados e Probabilidade.

Observamos que de um modo geral se aproxima bastante da divisão que a BNCC apresenta em termos de divisão da Matemática por unidades temáticas, como veremos na seção seguinte. Chama a atenção ainda na figura 6, a ideia de que o trabalho de Álgebra parece ter a preocupação de ampliar sua importância com o passar dos anos escolares. Todas as outras áreas parecem perder em algum momento ou outro espaço para a Álgebra, ainda que a Geometria tenha uma relevância semelhante entre o início dos estudos e final da educação básica. A Geometria apresenta certa redução de importância entre o 3º e o 6º *grades*.

Figura 6 – *The Content Standards*



Fonte: NCTM (2000, p. 30)

Especificamente em relação à Álgebra, nas duas primeiras etapas (pre k – 2 e 3 – 5 *grade*) a grande ênfase se dá no trabalho com padrões. Sejam padrões numéricos ou visuais.

No documento do NCTM (2000, p. 91) é indicada a necessidade das crianças desde cedo trabalharem com funções, relações e funções, sendo que do pré-escolar ao 2º ano:

> Os padrões são um modo de os jovens estudantes reconhecerem a ordem e organizarem seu mundo e são importantes em todos os aspectos da matemática

> nesse nível. As crianças em idade pré-escolar reconhecem padrões em seu ambiente e, por meio de experiências na escola, devem se tornar mais hábeis em perceber padrões em arranjos de objetos, formas e números e usar padrões para prever o que vem a seguir na organização. (tradução nossa)[10]

E, aos estudantes do 3º. ao 5º, ano prescreve-se:

> [...] os alunos devem investigar padrões numéricos e geométricos e expressá-los matematicamente em palavras ou símbolos. Eles devem analisar a estrutura do padrão e como ele cresce ou muda, organizar essas informações sistematicamente e usar sua análise para desenvolver generalizações sobre as relações matemáticas no padrão (NCTM, 2000, p.159, tradução nossa)[11]

Para Álgebra, o programa instrucional da pré-escola ao último ano da escola básica prevê ainda que os estudantes sejam capazes de "entender padrões, relações e funções; representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos para representar e entender relacionamentos quantitativos; analisar mudanças em vários contextos"[12] (NCTM, 2000, p. 37, tradução nossa). Com ideias similares às que o NCTM (2000) apresenta, Blanton e Kaput (2005, p. 413) afirmam que:

> Tomamos o raciocínio algébrico como um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de instâncias particulares, estabelecem essas generalizações através do discurso da argumentação e as expressam de maneiras cada vez mais formais e apropriadas à idade. (tradução nossa)[13]

E, ainda que:

> [...] o raciocínio algébrico pode assumir várias formas, incluindo (a) o uso da aritmética como domínio para expressar e concretizar generalizações; (aritmética generalizada); (b) generalizar padrões numéricos para descrever relações funcionais; (c) modelagem como um domínio para expressar e formalizar generalizações; e (d) generalização sobre sistemas matemáticos abstraídos de cálculos e relações (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 414, tradução nossa)[14]

---

[10] No original: Patterns are a way for young students to recognize order and to organize their world and are important in all aspects of mathematics at this level. Preschoolers recognize patterns in their environment and through experiences in school, should become more skilled in noticing patterns in arrangements of objects, shapes, and numbers and using patterns to predict what comes next in the arrangement.

[11] No original: (...) students should investigate numerical and geometric patterns and express them mathematically in words or symbols. They should analyze the structure of the pattern and how it grows or changes, organize this information systematically, and use their analysis to develop generalizations about the mathematical relationships in the pattern.

[12] No original: understand patterns, relations, and functions; represent and analyze mathematical situations and structures using algebraic symbols; use mathematical models to represent and understand quantitative relationships; analyze change in various contexts.

[13] No original: We take algebraic reasoning to be a process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations through the discourse of argumentation, and express them in increasingly formal and age-appropriate ways.

[14] No original: (...) algebraic reasoning can take various forms, including (a) the use of arithmetic as a domain for expressing and fomalizing generalizations; (generalized arithmetic); (b)generalizing numerical patterns to describe functional relationships; (c) modeling as a domain for expressing and formalizing generalizations; and (d) generalizing about mathematical systems abstracted from computations and relations.

Mas, destacam que, para os anos iniciais, o trabalho preponderante para a Álgebra obtém melhores resultados por meio da Álgebra como Aritmética Generalizada – AAG, e Álgebra como Pensamento Funcional - APF (BLANTON; KAPUT, 2005). Os autores ainda subdividem cada uma desta formas de trabalhar a Álgebra em cinco modos distintos. A AAG pode ser observada como[15]:

a. Explorando propriedades e relações de números inteiros;
b. Explorando propriedades e operações em números inteiros;
c. Explorar a igualdade como expressão de uma relação entre quantidades;
d. Tratamento algébrico de número;
e. Resolvendo sentenças numéricas com valor (es) ausente(s).

Por sua vez, a APF pode ser observada como[16]:

a. Simbolizando quantidades e operando com expressões simbolizadas;
b. Representando dados graficamente;
c. Encontrando relações e funções;
d. Prever estados desconhecidos usando dados conhecidos;
e. Identificação e descrição de padrões numéricos e geométricos

E, a partir do lançamento desse documento cresceu o número de publicações e estudo em defesa da ideia da inserção da Álgebra nos anos iniciais da escola. Em especial com o uso de padrões numéricos e visuais, é o chamado *Early Algebra*.

O *Early Algebra*, de acordo com Squalli e Bronner (2017) não deve ser visto como uma antecipação da Álgebra que hoje é ensinada na escola média (anos finais do nosso ensino fundamental e nosso ensino médio), nem como uma preparação para ela, como uma pré-álgebra. Na designação dos autores, essa corrente defende o desenvolvimento do pensamento algébrico desde a escola primária (nossos anos iniciais do EF) sem o uso da linguagem literal. Eles consideram o *Early Algebra* como uma estratégia para oferecer oportunidades de os estudantes aprofundarem os conceitos de operação, igualdade, equação, regularidade, fórmula, variável e variação, entre outros. Ainda, de acordo com Squalli e Bronner (2017, p. 2-3):

> A perspectiva da *Early Algebra* influenciou os currículos de matemática do ensino fundamental e médio em vários países. Assim, seguindo as propostas do *National Council of Teachers for Mathematics* (NCTM) em 2000, os currículos vigentes nos Estados Unidos propõem o desenvolvimento do pensamento algébrico desde

[15] No original: a) exploring properties and relationships of whole numbers; b) exploring properties and operations on whole numbers; c) exploring equality as expressing a relationship between quantities; d) algebraic treatment of number; e) solving missing number sentences.
[16] No original: a) symbolizing quantities and operating with symbolized expressions b) representing data graphically; c) finding functional relationships; d) predicting unknown states using known data; e) identifying and describing numerical and geometric patterns

> o jardim de infância e abordam funções nas turmas do ensino fundamental.[17] (tradução nossa, itálico no original)

Cabe destacar que Ferreira, Leal e Moreira (2020) preferem o uso do próprio termo *Early Algebra*, pois entendem que as traduções possíveis como Álgebra Inicial, Álgebra Precoce ou Álgebra nos Anos Iniciais não consigam abarcar a amplitude do conceito na língua original.

2.3. A Base Nacional Comum Curricular

Na esteira da crescente regulamentação e normatização da educação consequência ainda da LDB 9294/96, a BNCC veio estabelecer as "[...]aprendizagens essenciais" (BRASIL, 2017, p. 7) seguindo os mesmos pressupostos teóricos de "competências e habilidades" já presentes nos PCN de 1997. Vamos tratar da BNCC em duas etapas distintas, uma voltada para sua construção desde a primeira versão em 2015 e outra visando o documento homologado em dezembro de 2017.

2.3.1. A BNCC envolta a turbulências

Da elaboração da BNCC à sua homologação podemos percebemos um país em ebulição, visto que as três versões foram apresentadas, num período de 15 meses, por três diferentes ministros e existem críticas tanto ao processo de construção, quanto às características e aos objetivos do documento. Na primeira versão, disponibilizada em setembro de 2015, o Ministro da Educação era o professor e filósofo Renato Janine Ribeiro[18]; na segunda, em maio de 2016, o ministro era o professor e economista Aloízio Mercadante[19] e; na terceira, homologada em dezembro de 2017, o ocupante da pasta era o administrador José Mendonça Bezerra Filho[20].

Em relação ao processo de elaboração das diferentes versões da BNCC, Neira e Souza Jr. (2016) destacam uma contribuição ampla e diversa de professores e especialistas na elaboração da segunda versão da BNCC, enquanto Neira (2017) critica a pressa e a redução da participação na definição da terceira versão. Silva e Santos (2018) também fazem

---

[17] No original: La perspective Early Algebra a influencé les curriculums des mathématiques à l'école primaire et secondaire dans plusieurs pays. Ainsi, à la suite des propositions du National Council of Teachers fo Mathematics (NCTM) de 2000, les curriculums en vigueur aux États-Unis proposent le développement de la pensée algébrique dès la maternelle et abordent les fonctions dans les classes du primaire.

[18] Ministro da Educação de 6 de abril de 2015 a 1º de outubro de 2015.

[19] Ministro da Educação de 02 de outubro de 2015 a 12 de maior de 2016.

[20] Ministro da Educação de 12 de maio de 2016 a 06 de abril de 2018.

as mesmas observações, registram uma mudança de tratamento da participação dos profissionais da educação entre as versões de 2016 e a de 2017. Micarello (2016), por sua vez, já questionava a desigualdade nas condições de intervenção e contribuição e os diferentes níveis de influência por distintos atores (fundações privadas, estudantes e pesquisadores, entre outros) na elaboração da proposta da 2ª versão da BNCC.

Neira (2017) ainda assinala um retrocesso da versão final em comparação com a segunda, um fortalecimento da racionalidade expressa na taxonomia utilizada e considera prejudicial a retirada dos Objetivos de Aprendizagem e Desenvolvimento.

Quanto ao conteúdo da BNCC, tanto Morgan e Mocarzel (2021), quanto Niz, Tezani e Oja-Persicheto (2020, p. 260) o consideram tecnicista: “[...]o referido documento propõe um currículo tecnicista, já que indica o trabalho com diversas habilidades”, enquanto Morgan e Mocarzel (2021, p. 1061) destacam a BNCC como um projeto que torna “[...]o conhecimento cada vez mais utilitarista, pragmático, tecnicista e voltado a uma pretensa empregabilidade”. Então, por esses autores, temos o estabelecimento de uma relação entre a ênfase no trabalho com as habilidades, considerada uma característica do tecnicismo, com a parte econômica da vida social, a empregabilidade. Niz, Tezani e Oja-Persicheto (2020, p. 259) voltam a relacionar o conteúdo da BNCC com a economia quando afirmam que:

> [...] o ensino por meio de competências, esvazia os aspectos da formação humana e da emancipação dos sujeitos, buscando mascarar problemáticas das políticas de ensino, como a falta de investimento público em Ciências e a formação docente adequada para prática pedagógica do ensino de Ciências.

Ainda que os autores tragam em relevo o ensino de Ciências, entendemos ser possível considerar que não há diferenças substantivas entre os investimentos nas diferentes áreas do conhecimento escolar. Assim, o investimento que falta ao ensino de ciências também falta à educação física e ao ensino de história, de geografia ou de matemática, entre outras. A citação acima traz à cena três problemas observados pelos autores na BNCC: o esvaziamento de múltiplos aspectos da formação humana, a escassez de recursos destinados à educação e o uso do discurso das competências para esconder justamente desses parcos investimentos. Outra questão levantada sobre o conteúdo é apresentada por Ostermann e Rezende (2021) quando ressaltam que no documento a qualidade da educação está muito vinculada aos professores e estudantes e às suas famílias e seus contextos socioculturais.

No entendimento de Silva e Santos (2018), a BNCC sofre uma disputa de agentes públicos e privados com interesses particulares. Dentre os defensores da BNCC, esses autores citam a organização do Movimento Pela Base Nacional Comum, que incluía o MEC, as instituições Roberto Marinho, Instituto Unibanco, Fundação Victor Cívita, Ayrton Senna, Lemann, Natura, Gerdau e Volkswagen, e que teriam tido amplo investimento e publicidade nos meios de comunicação. Ostermann e Rezende (2021, p. 1381) esclarecem sobre as duas distintas posições no embate sobre a BNCC:

> A posição neoliberal, mais alinhada às demandas do mercado e que minimiza o papel do Estado frente às políticas públicas de educação, e a posição crítica, que considera a educação como direito de todos a ser assegurado pelo Estado, têm sido, *grosso modo*, as duas posições em confronto. (grifo no original)

Dessa forma, mais do que posições diferentes são posições antagônicas. Então, os autores citados expõem a oposição existente entre correntes neoliberais e «anti-neoliberais».

Para Hypolito (2019), a BNCC é fruto de uma longa discussão em torno de um currículo nacional único, que se prolongou desde a promulgação da Constituição Federal de 1988, se intensificou a partir dos PCN e sua elaboração está relacionada a uma agenda internacional. O autor cita o *Global Education Reform Movement*[21] (GERM) e documentos do Banco Mundial como defensores de reformas com características que podem ser identificadas nas últimas políticas educacionais brasileiras e, como parte delas, a BNCC. Dentre as orientações para as políticas educacionais propostas pelo GERM estão o estabelecimento de padrões, a descentralização e a prestação de contas. A padronização seria cumprida justamente pela existência de metas de aprendizagens e um currículo nacional. A descentralização seria o deslocar as responsabilidades e atribuições para as administrações estaduais, municipais e gestões escolares, enquanto as avaliações seguiriam em nível nacional como forma de controle. E, essas avaliações serviriam como uma responsabilização dos atores educacionais pelos desempenhos, uma prestação de contas na qual recompensariam os resultados positivos com incentivos na forma de prêmios, recursos financeiros e/ou materiais e os resultados negativos com sanções. A ideia inerente é a geração de uma competição entre escolas, afirma Hypolito (2019). Entretanto, acrescentamos que também se intenta estabelecer competições entre sistemas escolares estaduais ou municipais, entre professores e entre estudantes.

Dentre as características do documento do Banco Mundial sobre Professores excelentes – como melhorar a aprendizagem dos estudantes na América Latina e no Caribe, Hypolito (2019) apresenta que: (i) a educação é entendida como solução aos problemas econômicos e sociais; (ii) a região é vista de modo uniforme cuja receita pode ser a mesma; (iii) é possível por meio de testes padronizados averiguar o desempenho dos estudantes e melhorar a educação na região; (iv) a composição do magistério deve ser alterada tendo em

---

[21] Movimento Global de Reforma da Educação

vista o tempo de ensino, o que caracterizaria uma baixa qualidade docente; e, (v) que os sindicatos prejudicam a implementação das propostas transformadoras. A outra leitura apresentada por Hypolito (2019) é de um documento do Banco Mundial, especificamente sobre nosso país, intitulado Um ajuste justo – análise da eficiência e equidade do gasto público no Brasil, de 2017, cujo objetivo das orientações era tornar nosso sistema educacional mais eficiente, reduzindo os custos em torno de 1% do Produto Interno Bruto (PIB). Para tanto, o Banco sugere o acréscimo da razão de número de alunos por professor, com a não reposição de professores aposentados, e tornar as «experiências positivas» como exemplos. E, tais experiências notáveis seriam: (i) nomeação de diretores, bem como pagamento de bônus a professores e técnicos, de acordo com os desempenhos das suas escolas; (ii) destacar escolas com melhores desempenhos; e, (iii) a terceirização, ou dito de outro modo, a contratação de empresas privadas, sendo, para isso, necessárias alterações legais à permissão desses contratos e de Parcerias Público-Privadas. Ou seja,

> [...] a BNCC altera não apenas a configuração dos currículos de redes e escolas, mas também requer novos materiais didáticos, novas formações para docentes, gestores escolares e educacionais e novas estruturas físicas nas escolas, o que requer intensos investimentos por parte dos governos e mesmo das instituições privadas. Algumas dessas fundações estão diretamente ligadas a grupos com interesses editoriais e consultivos, como a Fundação Lemann a Fundação Roberto Marinho e o Instituto Ayrton Senna (MORGAN; MOCARZEL, 2021, p. 1051)

Entre essas parcerias do terceiro setor e o setor público no âmbito da educação, podemos citar o caso da Fundação Itaú Social (FIS). Morgan e Mocarzel (2021) mostram a atuação da FIS em ações de formação de gestores e professores voltadas à implementação da BNCC. Os autores inicialmente demonstram as alterações na concepção de filantropia. Na questão política, a filantropia deixa de prover para passar a atuar na concepção, promoção e negociação de processos de políticas em todas as áreas dos serviços públicos. Empresários passam, assim, a compartilhar responsabilidades com as ONG, fundações, filantropos individuais, dentre outros agentes, mas o Estado segue sendo o responsável pelo financiamento, mas não obrigatoriamente pela provisão dos recursos. Citam a formulação do conceito de um «filantropo-capitalismo», que se baseia nas ideias de que é possível «fazer o bem e buscar maximização de lucros» e de que a iniciativa privada, por seu sucesso nos negócios, também é capaz de ser mais eficiente do que o Estado no empreendimento das ações para a educação, saúde ou outro setor qualquer. E, uma terceira mudança, que poderíamos chamar de "globalismo", pois no rastro da chamada globalização econômica também se formam redes internacionais de instituições filantrópicas que buscam soluções gerais, indiferentemente de questões e especificidades locais. A esse imiscuir-se de instituições privadas em meio às atividades das políticas públicas, Ostermann e Rezende

(2021, p. 1831) definem como “[...]uma coalizão entre políticos, mídia, empresários, empresas educacionais, institutos e fundações privadas e pesquisadores alinhados com a ideia de que a iniciativa privada tem uma proposta mais adequada para ‘consertar’ a educação” (grifo das autoras).

Morgan e Mocarzel (2021) citam o entrelaçamento de 23 instituições e duas Secretarias Municipais de Educação (SME) que se envolveram atividades conjuntas, sendo elas: FIS, Fundação Lemann, Associação Nova Escola, Movimento pela Base, Fundação Volkswagen, Fundação Nestlé, Instituto Unibanco, *Imaginable Futures*, Fundação Maria Cecília Souto Vidigal, *Google.org*, Fundação Vale, Instituto Conceição Moura, *Kindernothilfe*, CCR Metrô Bahia, Instituto *Intercement*, Fundação José Luiz Egydio Setúbal, Fundação Socioambiental Casa, H Fundo Brasil, Instituto Alana, Instituto Natura, Porticus, SME Salvador, SME Maceió, e Avante Educação. Assim,

> As conexões dessas redes são constituídas a partir de origens distintas, mas são sustentadas por meios de comunicação instantânea e, principalmente, por viagens de pessoas e entidades filantrópicas, que fortalecem os vínculos a partir dos encontros internacionais, seminários, conferências, simpósios, dentre outros, financiados e promovidos por programas e instituições filantrópicas globais (MORGAN; MOCARZEL, 2021, p. 1041)

Os referidos autores ainda descrevem as contradições entre os objetivos anunciados pela FIS e a sua atuação, analisam como setores empresariais vêm buscando influenciar na formulação, implementação e avaliação das políticas de Estado e concluíram que a FIS contribui para a continuidade de uma concepção dualista e elitista da educação. De modo geral, sobre as instituições filantrópicas de novo tipo, afirmam:

> [...] esta nova filantropia, em última instância, colabora para que o papel do Estado seja deslocado de suas funções passando-o a entidades que estão comprometidas com interesses particulares cujo poder pode desafiar o poder do Estado, obrigando-o a redirecionar sua agenda política (MORGAN; MOCARZEL, 2021, p. 1041-1042)

Morgan e Mocarzel (2021) destacam números referentes a FIS na atuação junto à BNCC. Em relação aos programas destinados à formação de professores e gestores, apenas em 2019, os investimentos alcançaram 23,5 milhões de reais e, nesse mesmo ano, somente no período de agosto a dezembro a plataforma Polo atendeu 17 mil pessoas.

A 2ª e a 3ª versões da BNCC apresentaram o documento como uma necessidade legal imposta tanto pela CF88, quanto pela LDB e pelo Plano Nacional de Educação de 2014. Como ficou a versão final de 2017 será visto a seguir.

2.3.2. A terceira versão da BNCC

Introdutoriamente, o documento apresenta seus marcos legais, os fundamentos pedagógicos que o embasam e propõe um pacto junto aos estados e municípios para sua implementação. Em seguida, a BNCC se subdivide por etapas da educação básica: educação infantil, ensino fundamental e ensino médio. Exceção feita à educação infantil, que se subdivide em campos de experiências, objetivos e transição da Educação Infantil para o Ensino Fundamental; nas partes do documento referentes às demais etapas da educação básica há uma divisão pelas áreas do conhecimento. As áreas se subdividem nos seus respectivos componentes curriculares, a Matemática tem uma área própria, diferente dos demais componentes curriculares, a Matemática é simultaneamente área e componente curricular. Para cada componente curricular, de acordo com o nível de ensino há competências específicas e, ainda, no ensino fundamental, o tratamento dado pela BNCC é de fazer uma subdivisão entre anos iniciais e anos finais. O componente curricular de Matemática é composto por cinco unidades temáticas: (i) Números, (ii) Álgebra, (iii) Geometria, (iv) Grandezas e Medidas, e (v) Probabilidade e Estatística. Entre as páginas 278 e 297, apresentam-se quadros com as unidades temáticas de cada ano escolar, subdivididas em objetos do conhecimento, os quais por sua vez têm habilidades correspondentes (figura 7).

Figura 7 – Quadro da BNCC com UT, objetos do conhecimento e habilidades

MATEMÁTICA – 1º ANO

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Contagem de rotina Contagem ascendente e descendente Reconhecimento de números no contexto diário: indicação de quantidades, indicação de ordem ou indicação de código para a organização de informações	**(EF01MA01)** Utilizar números naturais como indicador de quantidade ou de ordem em diferentes situações cotidianas e reconhecer situações em que os números não indicam contagem nem ordem, mas sim código de identificação.
	Quantificação de elementos de uma coleção: estimativas, contagem um a um, pareamento ou outros agrupamentos e comparação	**(EF01MA02)** Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias como o pareamento e outros agrupamentos. **(EF01MA03)** Estimar e comparar quantidades de objetos de dois conjuntos (em torno de 20 elementos), por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois) para indicar "tem mais", "tem menos" ou "tem a mesma quantidade".
	Leitura, escrita e comparação de números naturais (até 100) Reta numérica	**(EF01MA04)** Contar a quantidade de objetos de coleções até 100 unidades e apresentar o resultado por registros verbais e simbólicos, em situações de seu interesse, como jogos, brincadeiras, materiais da sala de aula, entre outros. **(EF01MA05)** Comparar números naturais de até duas ordens em situações cotidianas, com e sem suporte da reta numérica.
	Construção de fatos básicos da adição	**(EF01MA06)** Construir fatos básicos da adição e utilizá-los em procedimentos de cálculo para resolver problemas.
	Composição e decomposição de números naturais	**(EF01MA07)** Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo.
	Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar)	**(EF01MA08)** Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
Álgebra	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências	**(EF01MA09)** Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
	Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)	**(EF01MA10)** Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
Geometria	Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado	**(EF01MA11)** Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás. **(EF01MA12)** Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial.
	Figuras geométricas espaciais: reconhecimento e relações com objetos familiares do mundo físico	**(EF01MA13)** Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico.
	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais	**(EF01MA14)** Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.

Fonte: Brasil (2017, p. 278-279)

Na BNCC, a Matemática aparece como importante na formação dos indivíduos, mas também com um caráter pragmático-utilitário, qual seja: O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação dos cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais (BRASIL, 2017, p. 265)

Assim, a Matemática é justificada por suas possibilidades de aplicação na vida social e de desenvolvimento individual. Cabe sublinhar que o texto apresenta duetos que abarcam características opostas – determinação e incerteza; abstrato – físico e, dedução – indução; como mostram os excertos da página 265 (BRASIL, 2017):

> [...]a Matemática não se restringe à quantificação de fenômenos determinísticos [...] também estuda a incerteza"; "a matemática cria sistemas abstratos [...] associados ou não a fenômenos do mundo físico"; e "apesar da matemática ser por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva [...], mas "essa área [...] precisa garantir que os alunos relacionem observações [...] fazendo induções e conjecturas".

A BNCC defende o letramento matemático, de modo que o ensino de Matemática deve possibilitar aos estudantes [...] raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente de modo a fornecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemática (BRASIL, 2017, p. 266).

Ou seja, mais do que a formação do indivíduo, a concepção de letramento matemático reforça o lado pragmático da Matemática, visto que todo o desenvolvimento da disciplina é voltado à sua utilização na vida cotidiana.

A finalidade atribuída à unidade temática de Álgebra no EF é "[...]o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – o pensamento algébrico" (BRASIL, 2017, p. 270). Como meio para se atingir tal fito elencam o que caracteriza esse pensamento especial:

> [...]identificar regularidades e padrões'[...]; estabelecer 'leis matemáticas que expressem relações numéricas e não-numéricas' e 'relações de interdependências', 'interpretar e transitar entre representações gráficas e simbólicas', e 'resolver equações e inequações'[...]. Assim, definem que [...]as ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade (idem, p. 270, grifo nosso).

Para os anos iniciais destacam as "[...]ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade" (idem, p. 270).

Estabelecendo um paralelo entre as atividades que devem ser desenvolvidas para se constituir o pensamento algébrico e as atividades destinadas aos anos iniciais, veremos que praticamente excetua-se apenas a «resolução de equações e inequações». O que se encontra aqui é a retomada de uma antiga discussão do século XIX sobre como fazer a

Elementarização, ou dito de outro modo, o que deve estar presente nos anos iniciais e como encaminhar os estudos. Mas, retomaremos essa discussão adiante.

Assim, a compreensão de Álgebra que se apresenta na BNCC é de que ela seja necessária para a modelagem matemática, bem como para a compreensão das estruturas matemáticas por meio do uso da sua linguagem. Entende, também a BNCC que para desenvolver o pensamento algébrico é preciso que os estudantes identifiquem regularidades e padrões desde os anos iniciais do EF.

Desse modo, são apresentados doze objetos de conhecimento e dezesseis habilidades. Os objetos do conhecimento se subdividem em dois objetos para o primeiro, segundo, terceiro e quinto anos e quatro objetos para o quarto ano. As habilidades são duas para o primeiro e terceiro anos, três para o segundo ano, quatro para o quinto ano e cinco para o quarto ano.

Para termos uma ideia do contexto em que se insere as habilidades referentes à Álgebra conforme o previsto na BNCC, elaboramos o Quadro 3 e o gráfico 3 com as habilidades destinadas a cada unidade temática em cada ano de ensino. No quadro 3, apresentamos o número de habilidades previsto para cada ano inicial do EF, enquanto no gráfico 3 mostramos o percentual das habilidades de cada UT referente ao total de habilidades previstas para cada ano.

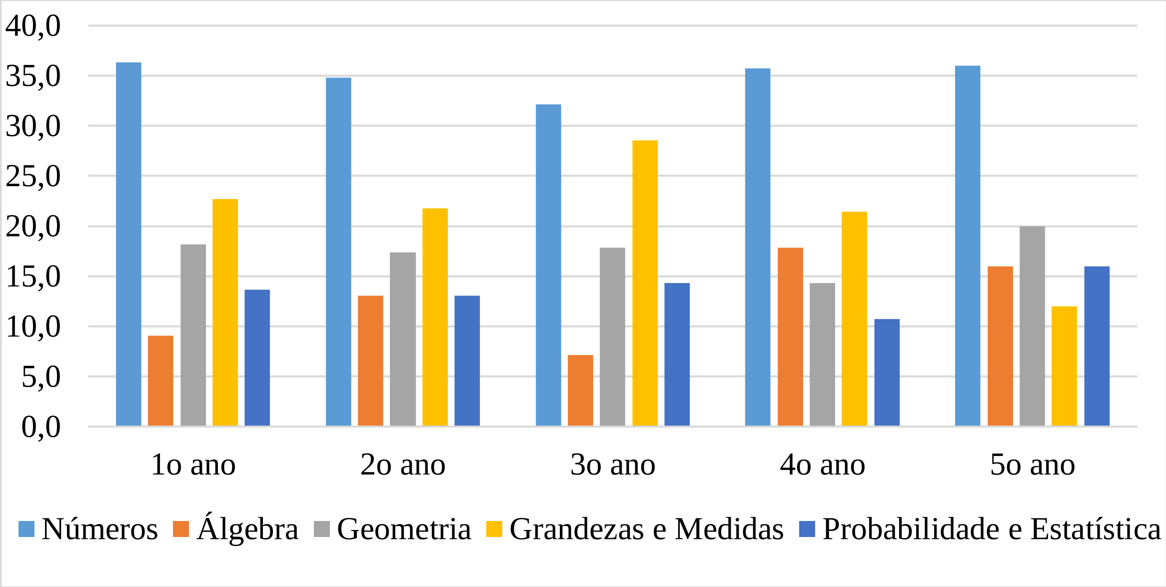
Quadro 3 – Distribuição das Habilidades das UT por ano do EF (1º ao 5º)

Quantidade de Habilidades dos Anos do Ensino Fundamental						
Unidades Temáticas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	Total
Números	8	8	9	10	9	44
Álgebra	2	3	2	5	4	16
Geometria	4	4	5	4	5	22
Grandezas e Medidas	5	5	8	6	3	27
Probabilidade e Estatística	3	3	4	3	4	17
Total	22	23	28	28	25	126

Fonte: O Autor (2017)

No Quadro 3 observamos que a Álgebra possui o menor número de habilidades entre as UT, enquanto os Números têm maior relevo. Objetivando melhorar a visualização, nos gráficos, mas agora com os respectivos percentuais que representam cada UT em cada ano de ensino e em seguida, com os percentuais na forma de área empilhada, que facilita uma comparação com a figura 6, a qual apresentou a proposta do NCTM.

Gráfico 3 – Distribuição percentual das UT por ano de ensino (1º ao 5º ano)

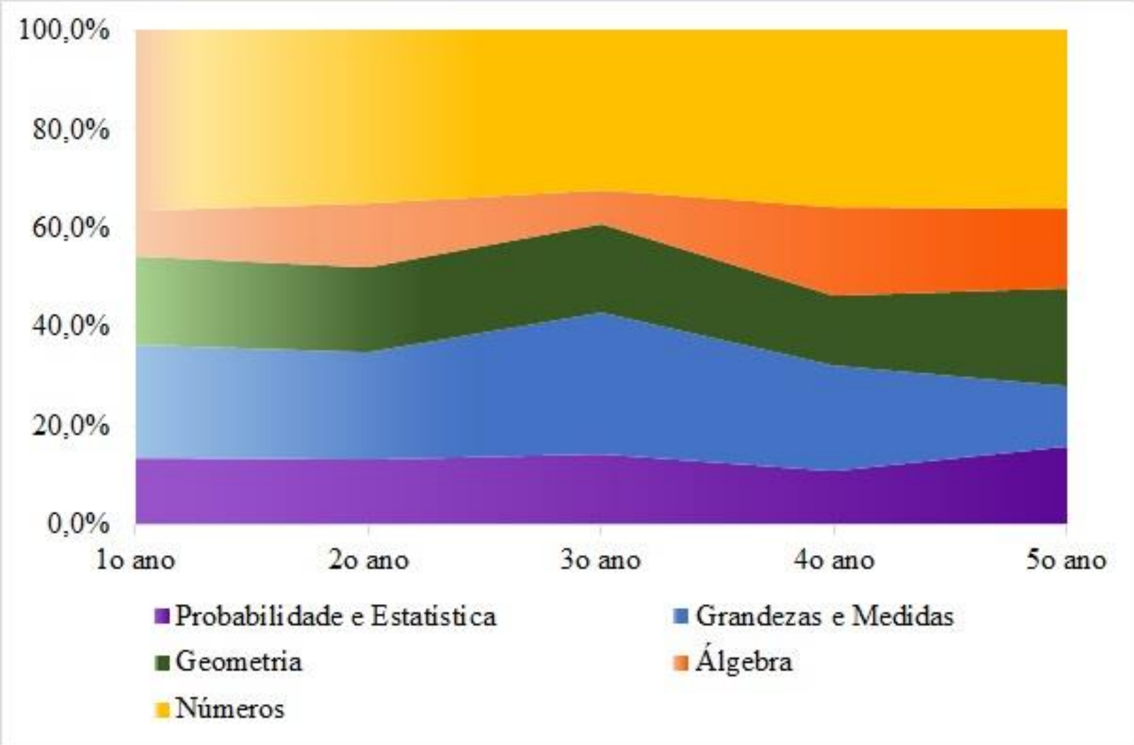


Fonte: O Autor (2017)

No Gráfico 3 fica visível a predominância da UT Números nos cinco anos iniciais do EF, bem como a importância dada à Grandezas e Medidas que no 3º ano se aproxima bastante na quantidade de habilidades atribuídas, mas que curiosamente se reduz ao menor número de habilidades no 5º ano. Por outro lado, é possível perceber uma certa estabilidade no percentual de habilidades destinadas ao trabalho com Geometria, permanecendo nos cinco anos entre segunda e quarta unidade em percentuais.

O Gráfico 4 mostra que, ao menos em termos de proposição de quantidade de habilidades destinadas à Álgebra pela BNCC, há bastante diferença se comparamos à figura 6 que se referia ao trabalho com a Álgebra nos anos iniciais proposto pelo NCTM. Na proposta dos NCTM, exposta nos *Principles and Standards* para o período equivalente da Educação Infantil ao 5º ano, os trabalhos com Números e Geometria claramente se reduziam enquanto com a Álgebra crescia.

Gráfico 4 - Distribuição das habilidades das UT em cada ano do EF (1º ao 5º ano)



Fonte: O Autor (2017)

No Gráfico 4 podemos observar bastante constância na distribuição das habilidades para cada UT ao longo dos anos iniciais, percebendo-se as maiores alterações justamente com a Álgebra e a drástica redução para Grandezas e Medidas no 5º ano, como citamos acima. No geral, a quantidade de habilidades destinadas à Álgebra começa com pouca participação no 1º ano, com apenas duas habilidades representando menos de 10% e, no 5º ano tem 16%. No Quadro 4 seguem os percentuais.

Quadro 4 - Distribuição das Habilidades por UT nos Anos do EF

Habilidades por Unidade Temática nos Anos do Ensino Fundamental (%)					
Unidades Temáticas	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano
Números	36,4	34,8	32,1	35,7	36
Álgebra	9,1	13,0	7,1	17,9	16
Geometria	18,2	17,4	17,9	14,3	20
Grandezas e Medidas	22,7	21,7	28,6	21,4	12
Probabilidade e Estatística	13,6	13,0	14,3	10,7	16

Fonte: O Autor (2017)

Com base no Quadro 4 podemos calcular uma média dos percentuais ocupados pelas habilidades destinadas à Álgebra nos cinco anos do EF e é de apenas 12,62%. Mas, estes são aspectos quantitativos da destinação elaborada pela BNCC ao desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricas em relação às demais UT. Vejamos questões referentes aos objetos do conhecimento e às habilidades propriamente pensadas pelo documento para a Álgebra.

Os objetos do conhecimento são: (i) padrões figurais e numéricos; (ii) investigação de regularidades ou padrões em sequências; (iii) sequências recursivas; (iv) observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo); (v) construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas; (vi) identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência; identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas; (vi) relação de igualdade; (vii) sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural; (viii) sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero; (ix) relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão; (x) propriedades da igualdade; (xi) propriedades da igualdade e noção de equivalência e grandezas diretamente proporcionais; e (xii) problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais.

A BNCC estabelece para a Álgebra os seguintes objetos do conhecimento e habilidades para os cinco primeiros anos do EF (Quadro 5).

Quadro 5 – Objetos de Conhecimento e Habilidades segundo a BNCC

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades (Nível de ensino /ano /disciplina /número da habilidade)
1º	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
1º	Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
2º	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
2º	Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

3º	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.
3º	Relação de igualdade	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença
4º	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
4º	Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
4º	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
4º	Propriedades da igualdade	(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que uma igualdade não se altera quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a seus dois termos. (EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
5º	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que uma igualdade não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir seus dois membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
5º	Grandezas diretamente proporcionais Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais,

		tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: Adaptado de Brasil (2017)

Analisando os doze objetos de conhecimento e dezesseis habilidades identificamos que podemos separar os objetos em dois grupos que correspondem ao que Blanton e Kaput (2005) organizaram como Aritmética generalizada e pensamento funcional. Dentre as habilidades, parte delas também poderiam ser enquadradas nessas duas categorias. Os objetos do conhecimento que poderíamos enquadrar como Aritmética generalizada são: (i) a relação de igualdade, no 3º ano; (ii) as relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão e propriedades da igualdade, no 4º ano; e (iii) as propriedades da igualdade e noção de equivalência, no 5º ano. Todos os demais objetos de conhecimento, em número de oito, estabelecidos pela BNCC nos parecem estariam relacionados ao pensamento funcional. Nas habilidades, a maior parte nos parece se referir ao desenvolvimento da APF, mais particularmente como padrões, são assim todas as habilidades referentes ao 1º e 2º anos. No terceiro ano, "identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes" (BRASIL, 2017, p. 286) também diz respeito ao pensamento funcional. Enquanto, a habilidade de "compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença" (IDEM, IDEM, p. 286) está relacionada à AAG. No 4º ano, também, apenas as habilidades dos objetos de conhecimentos sobre propriedades da igualdade e relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão se referem à AAG. No quinto ano, os objetos do conhecimento parecem claramente se dividirem com um deles correspondendo à AAG e outro como APF. As habilidades parecem se destinarem do mesmo modo que seus objetos de conhecimento. O objeto de conhecimento que se relacionam com uma AAG apresenta também habilidades com a mesma abordagem; e os que se ligam a um trabalho de APF têm para si estabelecidas habilidades que a tratam do mesmo modo.

Em síntese, temos oito objetos de conhecimento que se destinam a um trabalho da APF e quatro de AAG e as habilidades seguem a orientação dos respectivos objetos do conhecimento. De outro modo, se o objeto do conhecimento tem tal abordagem para a Álgebra, as habilidades devem seguir essa abordagem. Mas, esta parece ser uma orientação da BNCC, pode acontecer de que nos livros didáticos não se verifique tal correspondência visto o que Lins e Gimenez (1997) afirmam que as atividades dependem dos significados que lhes são atribuídos.

Assim, apenas analisando o tratamento dado à Álgebra nos livros didáticos do PNLD 2019 para os anos iniciais do ensino fundamental, poderemos verificar o quanto ou não das habilidades referentes à Álgebra estão sendo utilizadas no componente curricular Matemática nos anos iniciais em consonância com o que exige a BNCC.

Em conformidade com nosso objetivo geral de averiguar como a Álgebra se faz presente nos livros didáticos do PNLD 2019, se está em conformidade com a proposta da BNCC e em que medida é valorizada vamos iniciar por analisar a avaliação realizada pelo MEC presente no Guia do PNLD (BRASIL, 2018).

2.3.3. O ensino de Álgebra na BNCC

Pela BNCC poderíamos ter obtido o entendimento de que as habilidades deveriam ser as categorias. Entretanto, pela leitura nos livros didáticos, observando as atividades, nem sempre seria possível definir a qual habilidade se referia cada uma delas. Mesmo que na parte do manual do professor constem as habilidades presentes nos capítulos, nas seções ou nas páginas, nem sempre as atividades correspondem às habilidades descritas pelos autores.

Identificadas as atividades sob as categorias APF ou AAG, vamos buscar identificar agrupamentos possíveis para cada uma das categorias. Assim, teremos uma observação mais próxima e precisa das diferentes formas como os autores de livros didáticos de Matemática no Brasil compreendem a Álgebra e o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos.

De acordo com a BNCC, as habilidades foram construídas a partir de três elementos, mais especificamente:

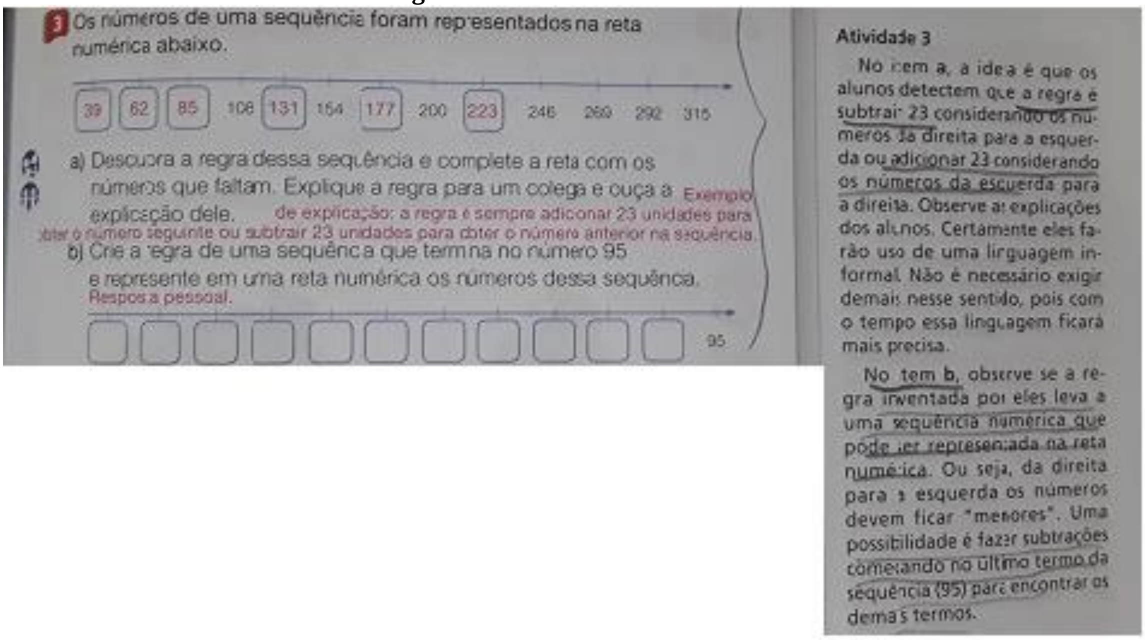
> [...] um verbo ou verbos que explicitariam os processos cognitivos envolvidos[...], um complemento dos verbos que explicitam os objetos de conhecimento mobilizados[...] e um modificador dos verbos ou dos complementos dos verbos que explicitariam o contexto e/ou uma maior especificação da aprendizagem esperada (BRASIL, 2017, p. 29).

O fato de poder haver mais de um verbo na habilidade, por vezes, faz com que um autor de livro só considere a habilidade que contempla um deles enquanto outro autor só considera a habilidade satisfeita se contemplar os dois verbos da descrição. Por exemplo, a habilidade EF03MA10, que possui os verbos identificar, descrever e determinar.

> Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes (BRASIL, 2018, p. 287)

Na figura 8, apresentamos a atividade 3 da página 87 do livro de Silveira (2017b), na qual podemos observar que o autor se esmera em tentar cumprir a habilidade 10 na sua integralidade, o que não se observará em todas as atividades de todas as obras analisadas. Na figura 9 poderemos observar essa diferença.

Figura 8 – Habilidade EF03MA10



3 Os números de uma sequência foram representados na reta numérica abaixo.

39 62 85 108 131 154 177 200 223 246 269 292 315

a) Descubra a regra dessa sequência e complete a reta com os números que faltam. Explique a regra para um colega e ouça a explicação dele. Exemplo de explicação: a regra é sempre adicionar 23 unidades para obter o número seguinte ou subtrair 23 unidades para obter o número anterior na sequência.

b) Crie a regra de uma sequência que termina no número 95 e represente em uma reta numérica os números dessa sequência. Resposta pessoal.

95

Atividade 3

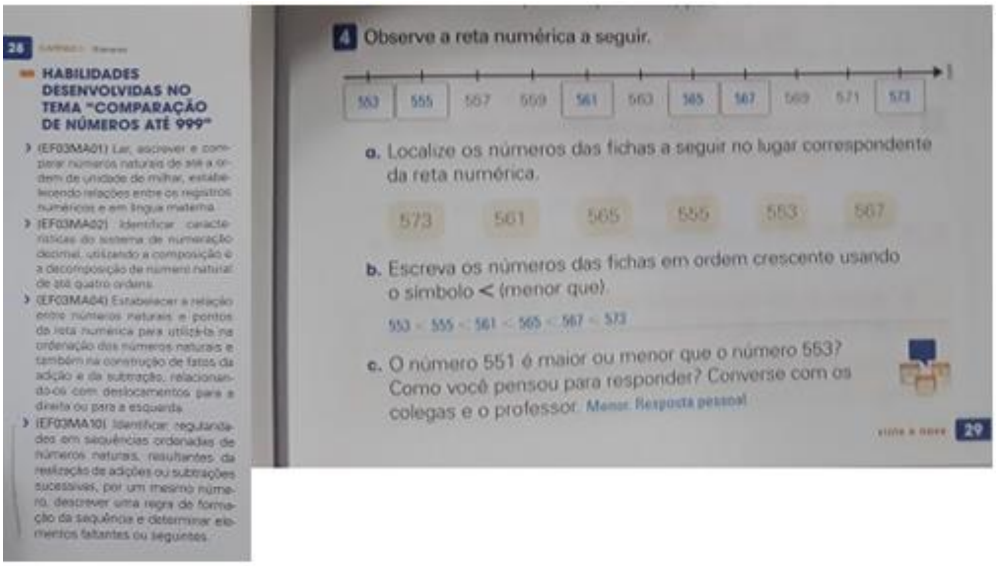
No item a, a ideia é que os alunos detectem que a regra é subtrair 23 considerando os números da direita para a esquerda ou adicionar 23 considerando os números da esquerda para a direita. Observe as explicações dos alunos. Certamente eles farão uso de uma linguagem informal. Não é necessário exigir demais nesse sentido, pois com o tempo essa linguagem ficará mais precisa.

No item b, observe se a regra inventada por eles leva a uma sequência numérica que pode ser representada na reta numérica. Ou seja, da direita para a esquerda os números devem ficar "menores". Uma possibilidade é fazer subtrações começando no último termo da sequência (95) para encontrar os demais termos.

Fonte: Silveira (2017b, p. 87)

Como assinalamos acima, nem todos os autores se detiveram em procurar cumprir as habilidades completamente. Na atividade 4 da página 29 do livro de Taboada e Leite (2017a), como mostramos na figura 9, as autoras se contentaram com a "determinação dos elementos faltantes" sendo que a habilidade EF01MA10 é definida como "Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras" (BRASIL, 2017, p. 279)

Figura 9 – Habilidade EF01MA10


28

HABILIDADES DESENVOLVIDAS NO TEMA "COMPARAÇÃO DE NÚMEROS ATÉ 999"

- (EF03MA01) Ler, escrever e comparar números naturais de até a ordem de unidade de milhar, estabelecendo relações entre os registros numéricos e em língua materna.
- (EF03MA02) Identificar características do sistema de numeração decimal, utilizando a composição e a decomposição de número natural de até quatro ordens.
- (EF03MA04) Estabelecer a relação entre números naturais e pontos da reta numérica para utilizá-la na ordenação dos números naturais e também na construção de fatos da adição e da subtração, relacionando-os com deslocamentos para a direita ou para a esquerda.
- (EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.

4 Observe a reta numérica a seguir.

553 555 557 559 561 563 565 567 569 571 573

a. Localize os números das fichas a seguir no lugar correspondente da reta numérica.

573 561 565 555 553 567

b. Escreva os números das fichas em ordem crescente usando o símbolo < (menor que).

553 < 555 < 561 < 565 < 567 < 573

c. O número 551 é maior ou menor que o número 553? Como você pensou para responder? Converse com os colegas e o professor. Menor. Resposta pessoal.

29

Fonte: Taboada e Leite (2017a, p. 28 – 29)

Na BNCC observamos que no 1º e 2º anos há uma ênfase na APF, enquanto a AAG se distribui a partir do 3º ano tendo predominância no 5º ano na quantidade de habilidades dos objetos de conhecimento referentes à Álgebra. No 4º ano há igual distribuição entre habilidades destinadas à AAG e APF. Assim, organizamos novos quadros que relacionam os objetos de conhecimento e respectivas habilidades às categorias AAG e APF na BNCC (Quadros 6 e 7).

Quadro 6 – Objetos do Conhecimento e Habilidades de acordo com as categorias

Categorias	Objetos do Conhecimento	Habilidades
APF	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
	Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas	(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.
	Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência	(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos. (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em

		sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.
	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes. .
	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
AAG	Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero	(EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.
	Grandezas diretamente proporcionais	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.
	Relação de igualdade	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença
	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.
	Propriedades da igualdade	(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que uma igualdade não se altera quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a seus dois termos. (EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
AAG	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que uma igualdade não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou

		dividir seus dois membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido. .
	Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais	(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.

Fonte: O autor, adaptado de Brasil (2017)

Observemos que o objeto de conhecimento Grandezas diretamente proporcionais/Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais ficou subdividido em dois «objetos do conhecimento»: Grandezas diretamente proporcionais e Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais, pois um tem características de APF e outro tem características de AAG. O mesmo terá de acontecer para o próximo quadro também (quadro 7), quando relacionamos apenas os objetos do conhecimento e nossas categorias.

Quadro 7– Objetos do Conhecimento de acordo com as categorias por ano de ensino

Objetos do Conhecimento por ano do ensino fundamental					
Categorias	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano
APF	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural. Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por	Grandezas diretamente proporcionais

	numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)			um mesmo número natural diferente de zero	
AAG			Relação de igualdade	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão Propriedades da igualdade	Propriedades da igualdade e noção de equivalência Problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais

Fonte: O Autor (2021)

O quadro 8, a seguir, apresenta as habilidades de acordo com as categorias.

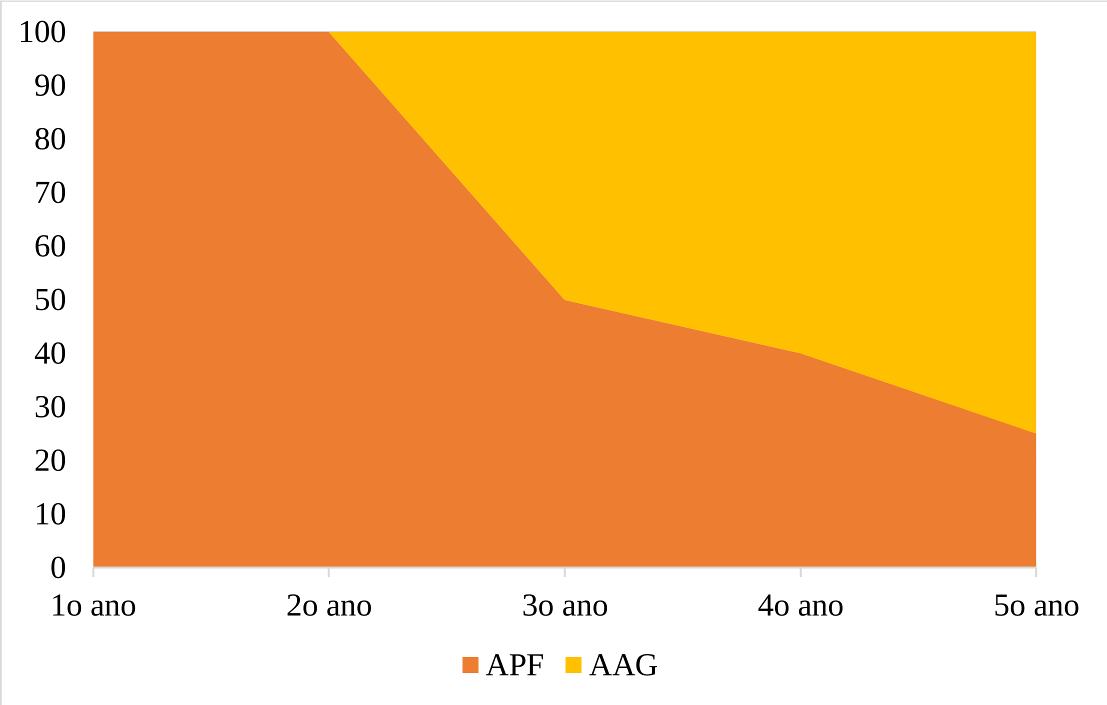
Quadro 8 – Habilidades de Álgebra de acordo com as categorias

Habilidades de Álgebra por ano do EF					
Categorias	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano
APF	EF01MA09 EF01MA10	EF02MA09 EF02MA10 EF02MA11	EF03MA10	EF04MA11 EF04MA12	EF05MA12
AAG			EF03MA11	EF04MA13 EF04MA14 EF04MA15	EF05MA10 EF05MA11 EF05MA13

Fonte: O Autor (2021)

Vamos atribuir a cada habilidade um igual espaço no ano de referência e distribuir com cores distintas as categorias AAG e APF para observar como ficaria graficamente (Gráfico 5).

Gráfico 5 - Distribuição da AAG e APF dentre as habilidades previstas nos anos iniciais pela BNCC



Fonte: O Autor (2021)

No gráfico 5 observamos que, nas habilidades propostas pela BNCC, ocorre do 1º ao 5º ano um deslocamento da centralidade da APF para a AAG. Ou seja, é visível que se passa de um predomínio do trabalho com o APF para a AAG do início ao fim dos anos iniciais do EF. Como essas habilidades de APF se referem a objetos de conhecimento ligados a «sequências», supomos que esse trabalho esteja diretamente vinculado com a unidade temática Números, a qual as crianças estão aprendendo nesses primeiros anos do EF. Mas, a APF deve ser mais do que ligado a sequências numéricas, deve estar relacionado também com a Geometria, com padrões geométricos. E, de acordo com Blanton e Kaput (2005), o desenvolvimento da APF tem, ao menos, cinco formas de ser trabalhada.

Na próxima seção, observamos os diferentes livros com Álgebra que passaram por nosso país, algumas contribuições estrangeiras, e como se desenvolveram os programas que ao longo dos anos permitiram aos estudantes brasileiros o acesso a LD até chegarmos ao atual PNLD. A próxima seção é interessante, em especial, àqueles que acham que «a Matemática é assim e sempre foi assim e nunca vai mudar», como se fosse a personagem Gabriela, de Jorge Amado, narrada em versos por Dorival Caymmi (1975).

3. OS LIVROS DIDÁTICOS COM ÁLGEBRA

A criação de novas técnicas tem por objetivo dar respostas às necessidades do ser humano no seu processo de produção e reprodução das condições materiais de existência. Contudo, o surgimento de novas técnicas não invalida necessária e obrigatoriamente as anteriores. Neste sentido, ainda que vivamos um momento em que tudo parece convergir unicamente à utilização das TDIC, os LD continuam representando um significativo recurso utilizado na educação.

Historicamente se utiliza livros didáticos mesmo antes da criação da imprensa. Contudo, a invenção de Gutemberg, no século XV, facilitou a publicação e disseminação de livros, uma vez que até então as cópias eram manuscritas uma a uma; ainda possibilitou o seu uso mais frequente nas aulas; e deu início às discussões acerca da didática, visto que se tornara plausível reduzir e até extinguir as longas leituras públicas e anotações.

Um dos primeiros defensores do uso de livros didáticos foi Comenius (1592 – 1670), na sua obra Didática Magna. Comenius (2011) pensa em uma educação para todos, no qual todos possam aprender de tudo um pouco, e para tal fim sugere o uso de LD, até como modo de economia de recursos. O trecho em que afirma "quanto menos os outros livros ocuparem os olhos tanto mais os didáticos ocuparão os espíritos" (COMENIUS, 2011, p. 216) é um dos motivos de objeção aos livros didáticos por parte de pesquisadores, como se pode verificar em Paniago (2013).

Conforme Schubring (2003), há diferença entre livro didático e livro-texto. Livros-textos seriam referentes à ciência propriamente dita, enquanto os livros didáticos são destinados ao ensino. Os livros didáticos ou manuais escolares surgem a partir da Revolução Francesa, momento em que se desenvolve uma preocupação em difundir as ciências e o ensino às mais amplas camadas da população. Quando à utilização dos livros didáticos em larga escala se consolidou como uma política de estado, na França, a principal discussão que ocorreu foi sobre o que deviam conter esses manuais para os anos iniciais da escolarização.

Decorreu, desde então, a discussão sobre quais seriam os elementos das ciências a serem ensinados nos primeiros anos escolares. Tal debate ficou conhecido no século XIX como a discussão sobre a Elementarização. Formaram-se duas correntes: os «republicanos» e os «pedagogos». Os primeiros, influenciados pelos enciclopedistas, defendiam que os elementos deviam ser aqueles básicos necessários para o desenrolar dos demais elos da ciência. Os pedagogos preocupavam-se mais na educação como formação do cidadão, do homem adulto, e assim, lhes importava mais o que seria possível da criança aprender e o como ela aprenderia do que a ciência em si. Claramente, um grupo centrava mais suas atenções no conteúdo científico, enquanto o outro preocupava-se na forma com que o estudante desenvolveria sua aprendizagem. Dito de outro modo, os republicanos defendiam uma visão sintética, dividindo a ciência em partes a serem estudadas e enfatizando o pensamento dedutivo para formar a totalidade, ao passo que os pedagogos privilegiavam o pensamento indutivo e visão analítica, seguindo do todo à formação das partes, do conjunto da ciência. Em resumo, de um lado, os ditos republicanos defendiam o uso da razão, do pensamento dedutivo e do desenvolvimento dos conteúdos a partir de sua própria lógica, sob influência das ideias iluministas e de outro, os chamados pedagogos privilegiavam a forma como a criança aprendia, valorizavam o empirismo, o pensamento indutivo sob a influência do naturalismo (VALENTE, 2015).

Acerca dos LD se encontram desde pesquisas que tratam de questões que envolvem a sua mercantilização e produção (PANIAGO, 2013), as especificidades, as metodologias e os conteúdos das diferentes disciplinas escolares, sejam na contemporaneidade ou no decurso da história, até estudos que fazem leituras sobre o dito nas suas entrelinhas (VERÇOSA, 1999; NOSELLA, 1978). Entretanto, o recente desenvolvimento de trabalhos sobre os LD não foi uma exclusividade brasileira. Países como Alemanha, França, Grã-Bretanha, Noruega, Espanha, Canadá e Argentina desde a década de 1970 criaram centros e grupos de pesquisas no assunto (MUNAKATA, 2012).

Cabe destacar que a chegada de livros didáticos no Brasil remonta ao período colonial, bem como a legislação sobre eles. Apenas em 1985 foi estabelecido o PNLD, vindo a se fortalecer de modo consistente no final dos anos 1990, quando se encaminhou para suprir tanto o ensino fundamental, quanto o médio (MUNAKATA; 2012)

Segundo dados do Portal do FNDE (2022), foram distribuídos cerca de um bilhão de livros didáticos no Brasil na última década tornando o país o segundo maior consumidor mundial, atrás apenas da China. Munakata (2012) aponta que nos anos 1970 e 1980 o número de investigações sobre o tema era em torno de 50 e que um crescimento vertiginoso vem ocorrendo nos últimos anos.

Uma característica marcante dos primeiros estudos sobre livros didáticos, segundo alguns autores (VERÇOSA, 1999; MUNAKATA, 2012), era de que abordavam e questionavam a ideologia que os permeava e que esses estariam a serviço da manutenção da divisão em classes do capitalismo, ou seja, a serviço dos interesses das classes dominantes. As restrições, neste período anterior aos anos 1990, parece não se limitavam aos pesquisadores brasileiros. Nas obras A Estrutura das Revoluções Científicas (KUHN, 2011), originalmente publicada em 1962, e Conceitos Fundamentais de Matemática (CARAÇA, 1952) aparecem críticas diferentes, mas em ambas o direcionamento está relacionado ao fato de que os livros didáticos e livros-texto não apresentam, de fato, como surgiram os conhecimentos científicos.

Schirmer e Sauerwein (2015) também registram um acréscimo nos estudos sobre livros didáticos quando revisam as atas dos Encontros Nacionais de Pesquisa em Educação em Ciências (ENPEC) entre os anos de 1997 e 2013. Ainda que os autores assinalem que o crescimento do número de trabalhos sobre livros didáticos (três no I ENPEC para 49 no IX ENPEC) acompanham o número total de trabalhos (128 para 1029), cabe ressaltar que percentualmente as investigações sobre livros didáticos mais que dobraram passando de 2,3% para 4,8% dos trabalhos apresentados.

Sobre este aspecto, Munakata (2012) levanta a hipótese de que o aumento no número de pesquisas sobre livros didáticos talvez tenha decorrido do fato de que, em 1999, no I Encontro Internacional sobre Manuais Escolares: Manuais Escolares – Estatuto, Funções, História em Portugal, tenha tido a participação de vários brasileiros. Ele registra que nos anos 1990 alguns trabalhos talvez tenham colaborado para o desenvolvimento das investigações sobre o tema.

Essa renovação temática tinha como referência autores como Chervel, Goodson, Choppin e Chartier, que efetivavam, desde os anos 1970, discussões sobre o currículo, as disciplinas escolares, a cultura escolar, a história cultural e a história do livro e da leitura (MUNAKATA, 2012).

Observamos nos estudos sobre livros didáticos um deslocamento de discussões acerca de questões macroeconômicas e ideológicas, que se situavam nas chamadas teorias crítico-reprodutivistas, para indagações internas às disciplinas, de caráter mais didático-pedagógico.

O artigo História das disciplinas escolares de Chervel (1990, p. 181) trouxe a definição de que a pedagogia não é “[...]encarregada de lubrificar os mecanismos e de fazer girar a máquina”. Na sua visão nem apenas as ciências emprestam parte do seu conteúdo à escola, nem a pedagogia seria um mero «lubrificante» para esse conteúdo ser ingerido, há uma criação das disciplinas escolares pela própria escola. Óbvio que a criação não é livre, é condicionada, sofre influências e tem uma história. Estas influências e todo o contexto que envolve o desenvolvimento das disciplinas escolares é o que torna possível o estudo das disciplinas escolares.

Essa história se assemelha ao ritual da História da Ciência pensada por Thomas Kuhn (2011) em A Estrutura das Revoluções Científicas. Enquanto o autor cita períodos alternados que chama de «ciência normal» e períodos «revolucionários» ou de crise da ciência, que ocorrem quando há um questionamento sobre os paradigmas da ciência; Chervel

(1990) observa que há períodos em que as disciplinas permanecem com os mesmos currículos, conteúdos e opções pedagógicas, nos quais as produções pedagógicas e didáticas dizem quase a mesma coisa. Ainda, para o autor, ao longo do tempo quando há alterações nas concepções pedagógicas essas se expressam também em mudanças nos conteúdos.

Por sua vez, o trabalho de Belhoste (1998) traz o estudo da história das disciplinas escolares de Chervel (1990) para a Matemática. A partir do exemplo de três países França, Alemanha e Inglaterra ele aborda três temas:

> O primeiro tema, já bem estudado, faz parte da história institucional: diz respeito ao papel desempenhado pelo ensino na organização do campo disciplinar, na profissionalização do ambiente matemático e na padronização de carreiras. O segundo tema diz respeito ao estudo de representações que regulam a atividade didática em matemática, ajudando assim a estruturar todo o campo disciplinar e a orientar o trabalho intelectual. Como terceiro e último tema, manterei a contribuição das atividades didáticas para o desenvolvimento e a disseminação das próprias práticas matemáticas (BELHOSTE, 1998, p. 290 - tradução nossa)[22]

Assim, o autor aborda o mundo do professor, o ensino, as representações matemáticas, as práticas de ensino e as práticas de pesquisa se consolidam de modo diferente em diferentes países por existirem contextos distintos entre os séculos XVIII e XIX (BELHOSTE, 1998).

Chervel (1990) trouxe à cena a história cultural e a história das disciplinas escolares. Seu trabalho abriu caminho para o estudo das diferentes disciplinas escolares por meio das produções pedagógicas, dentre as quais os livros didáticos. Paralelamente a isso, as teorias crítico-reprodutivistas nas quais se baseavam parte significativa dos estudos sobre livros didáticos entraram em declínio neste período.

No final dos anos 1990, o PNLD ampliou seu alcance e seus investimentos, assim, a política governamental realçou a importância do livro didático e de trabalhos acerca do mesmo. Ao mesmo tempo em que foram ocorrendo transformações nos trabalhos e pesquisas sobre os LD, a sua utilização no país também foi sendo alterada, e, no caso, para uma ampliação do seu alcance.

Dante (1996) apresenta características desejáveis de um livro didático quanto aos temas, aspectos físicos, conteúdos, aspectos metodológicos, correção de conceitos, manual do professor e às linguagens materna e matemática. Também aborda sobre a seleção, os perigos do mau uso e como usar adequadamente dos livros didáticos.

---

[22] No original: Le premier thème, dèja bien étudié, relève de l'historie institutionelle: il concerne le rôle joué par l'enseignement dans l'organisation du champ disciplinaire, la professionalisation du milieu mathématique et la standardisation des carrières. Le second thème porte sur l'études représentations qui régulent l'activité didactique en mathématiques, contribuant ainsi à structurer l'ensemble du champ disciplinaire et à y orienter le travail intelectuel. Comme troisième et derneir thème, je retiendrai la contribution des activités didactiques au développement et à la diffusion des pratiques mathématiques elles-mêmes.

Tanto Dante (1996), quanto Choppin (2004) apresentam três funções importantes dos livros didáticos: como referencial, fornecendo um programa a ser seguido; instrumental, visto que fornece ao docente uma metodologia, exercícios e atividades; e a possibilidade de o estudante desenvolver o senso crítico. Enquanto Choppin (2004) ainda percebe o livro didático como transmissor ideológico e cultural, Dante (1996) observa que ele pode ser um complemento ao professor com formação inicial insuficiente, mas também como, talvez, o único recurso didático disponível na escola.

A importância das investigações sobre livros-textos ou didáticos de Matemática ganha relevo no Brasil quando, por exemplo, Valente (1999) mostra que as primeiras aulas de Matemática no nosso país ocorreram na escola militar, ainda no século XVIII. No mesmo trabalho, demonstra como a Matemática foi consolidando seu currículo e se transformando em disciplina escolar e, ainda, apresenta a transformação que ocorreu na utilização dos livros-textos que ao longo do tempo os tornaram livros didáticos. Cabe ressaltar que havia um trânsito de ideias e relação entre as produções europeias e os autores de livros no Brasil. Os manuais franceses influenciaram os livros brasileiros nos séculos XVIII e XIX (VALENTE, 1999).

3.1. A Álgebra nos Livros Didáticos do passado brasileiro

Para analisar a Álgebra presente nos livros didáticos dos anos iniciais da atualidade discutiremos também a Álgebra nos livros didáticos do passado, as noções e as concepções dessa área da Matemática, e como ela se inseriu e se expôs no Brasil. Porém, vamos subdividir em dois momentos. Primeiramente, com uma visão panorâmica da obra de Wagner Valente Uma história da matemática escolar no Brasil, de 1999, na qual o pesquisador analisa inúmeras obras com conhecimentos matemáticos do período entre 1730 e 1930; e, na sequência com obras às quais tivemos acesso e que cobrem desde o início do século XX ao século XXI.

3.1.1. A Álgebra dentre os saberes matemáticos nos primeiros livros do Brasil

Luiz e Lancillotti (2021) dividem a história do ensino de Matemática em terras brasileiras, no período anterior à Proclamação da República, em três períodos. Um período inicial, marcado pela presença jesuítica, a catequização, a presença de professores vindos de Portugal e os primeiros registros de aulas e livros publicados. Segundo as autoras, “[...]desde a chegada ao Brasil até a criação do Curso de Artes, vários colégios jesuíticos foram fundados (...) os jesuítas ensinavam as quatro operações matemáticas" (LUIZ; LANCILLOTTI, 2021, p. 78). Ainda nesse período, são citadas as aulas militares de fortificações e de artilharia e os livros de Alpoim, no início do século XVIII. O segundo momento do ensino de Matemática no Brasil teria sido a transição do século XVIII ao XIX, na época posterior às Reformas Pombalinas de 1759. As matemáticas foram valorizadas pela presença nos cursos da Academia dos Guardas Marinhas (1808) e da Academia Real Militar (1810) e na Aula Pública de Economia (1809). Destacaram-se nessa época os livros de Geometria de Bernard Bélidor e de Aritmética e Álgebra de Etienne Bézout. O terceiro período corresponde ao Brasil Império, marcado pela fundação do Colégio Pedro II que contribuiu para estruturar, ampliar e expandir o ensino das matemáticas. Caracteriza essa época, ainda, a continuidade da influência dos manuais franceses de Sylvestre Lacroix, Charles Giulmin, Pierre Bourdon e Alexandre Vincent, mas também a presença das obras brasileiras de Cristiano Ottoni (LUIZ, LANCILLOTTI, 2021).

Valente (1999) se dispôs a escrever uma história da escolarização dos saberes matemáticos desde o período colonial ao início do século XX, em tempos anteriores à chegada da Escola Nova. Apesar de encontrar e discorrer sobre sete diferentes momentos ao longo do trabalho, todos marcados por obras utilizadas nas terras brasileiras, ao fim ele identificou três diferentes fases. A primeira delas teria sido aquela na qual foi necessário buscar os conhecimentos matemáticos úteis às práticas militares. A obra que marcou foram os livros de Alpoim, escritos na forma de perguntas e respostas, com a narração das ações e pensamentos necessários. A segunda fase Valente (1999, p. 194) denomina de "escolar institucional" e corresponderia ao período no qual o exército português precisou se reorganizar. Os conteúdos matemáticos foram sequenciados, e se buscou uma Elementarização dos saberes matemáticos, contudo ainda voltados à formação e capacitação para as armas. As obras que marcaram essa fase teriam sido Bézout e Lacroix. A fase terceira se iniciou quando ocorreu uma apropriação brasileira das obras francesas, o ensino das matemáticas se expandiu e com seu desenvolvimento alcançou também as escolas.

Cabe destacar que Valente (1999) considera que a escola dos jesuítas não deixou legado que pudesse ser aproveitado para a elaboração de uma história da matemática escolar no Brasil, assim, o autor tomou as aulas militares como ponto de partida. Luiz e Lancellotti (2021) suscitam a presença de homens que teriam vindo ao país, enviados pelo reino português, com outras missões como de cartógrafo, astrônomo ou engenheiro, mas que findaram não apenas lecionando como ainda escrevendo livros didáticos. Essas pesquisadoras, por sua vez consideram o ensino jesuítico como marco inicial da matemática escolar brasileira. Entretanto, ambos os trabalhos citam a obra de Christopher Clavius[23] (1537 – 1612) como livro usado pelos jesuítas. De acordo com Valente (1999) dos cinco tomos nos quais se dividiam o trabalho[24] de Clavius, o segundo deles era o que continha os assuntos de Álgebra. Esse seria assim, o primeiro livro didático destinado à Álgebra adotado em solo brasileiro, ainda no período colonial.

Importante ressaltar que o trabalho de Valente (1999) se destinou a observar como os programas e os livros destinados aos saberes matemáticos, usados ao longo da história, foram construindo o currículo e a sequência didática que conformaram a Matemática escolar tradicional. Para tanto, o autor considerou o período entre 1730 e 1930. Desse modo, em conformidade com seus objetivos, as primeiras obras analisadas foram as de autoria de Jozé Fernandes Pinto Alpoim (1700 – 1765): Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros. Ambos os «manuaes escolares»” são desenvolvidos na forma de perguntas e respostas, sem preocupações com demonstrações. O primeiro remete à Aritmética e Geometria e o segundo à Geometria e Trigonometria, assim, os saberes matemáticos desses livros corresponderiam na atualidade a assuntos dos anos iniciais no Exame de Artilheiros e do ensino médio no Exame de Bombeiros, além das construções e práticas próprias dos ofícios militares. Porém, nenhum deles abordava os saberes matemáticos relacionados à Álgebra.

Na sequência, o trabalho de Valente (1999) aborda o livro Curso de Matemáticas de Bernard Forest de Bélidor (1697 – 1761). A obra inicialmente encomendada para reorganização do exército francês recebe encomenda de tradução para a língua portuguesa para em Portugal servir ao mesmo fito, e em consequência chega a uso no Brasil. Valente (1999) analisa duas versões da obra em francês, uma de 1725 e outra 1757 e observa que na primeira o texto contém menos rigor matemático que a segunda, em especial na geometria, porém, se detém a descrever a análise sobre a tradução de Manoel de Sousa, de 1764, sobre a segunda versão. O livro é voltado à formação de artilheiros e engenheiros militares. Segundo Valente (1999, p. 70), “[...]muitas vezes o que escreve [Bélidor] como demonstração de teoremas se transforma em aplicações numéricas ou em construções geométricas”, pois “[,,,]o que interessa em realidade é que seus alunos saibam onde e como aplicar os teoremas”. A obra tem 656 páginas subdividida em dezesseis capítulos,

[23] Em Valente (1999) aparece como Clavio. Sendo representante do ensino jesuítico e devido ao fato do latim ser o idioma adotado pela Igreja Católica na época preferimos a designação apresentada por Luiz e Lancellotti (2021): Clavius.
[24] Contudo, não tivemos acesso a essa obra, bem como outras dos séculos XVIII e XIX. Assim, nos basearemos nos estudos de Valente (1999) para o período que antecede à chegada do século 20.

denominados «livros», sendo desses os treze primeiros destinados aos saberes matemáticos atualmente encontrados no ensino fundamental e médio, dentre eles, a Álgebra.

Mesmo que o nome dado por Bélidor ao primeiro capítulo seja Introdução à Geometria, Valente (1999, p. 71) assevera que o autor "[...]organizou a primeira parte do livro procurando dar os primeiros elementos de álgebra, após ter definido todos os termos de que a geometria se serve e os termos mais comuns por ela utilizados", os quais são teorema, axioma, problema, reta, quadrado e linha, entre outros. Segundo Valente (1999), Bélidor argumenta que a superioridade da Álgebra sobre a Aritmética se dá pelo uso de letras, ao invés de números, para as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão potenciação e radiciação, Para Bélidor, a equação é a igualdade entre duas quantidades algébricas, uma potência é a multiplicação de uma letra por ela mesma e a quantidade de vezes que ocorrer será indicada por um número posto à esquerda superior dessa letra. Conforme Valente (1999) há ainda o trabalho com propriedades das potências, exemplificações numéricas para a explicação da adição algébrica, produto de quantidades algébricas negativas, o uso da geometria para explicação de produtos notáveis, divisão algébrica, frações algébricas. Os capítulos seguintes não foram detalhados por Valente (1999) como o primeiro, mas, no título do segundo estão as equações do 1º e 2º graus. O livro de Bélidor é voltado para problemas de artilharia e fortificações, assim toda a Geometria necessária se faz presente bem como a Álgebra, o Desenho Geométrico e a Trigonometria na medida necessária para a consecução dos objetivos. As explicações são longas e detalhadas.

O livro seguinte analisado por Valente (1999) é a «Aritmética»" de Étienne Bézout (1739 – 1783), traduzida por Monteiro da Rocha em 1773, o qual teve edições e reimpressões até 1826. A sequência do índice apresentava: Os números e as quatro operações fundamentais, Frações, Números complexos, Raiz quadrada e cúbica, Razões, proporções e regra-de-três, Progressões aritmética e geométrica, e Logaritmos. A obra de Bézout trata a Aritmética como a ciência dos números, assim, todos os esforços foram voltados à explicação pormenorizada da realização de cálculos, muitos deles derivados do sistema de pesos e medidas utilizados na época. Os denominados "«números complexos» nada mais eram do que medidas expressas em suas unidades e subdivisões. Segundo Valente (1999, p. 85) "[...]o autor não usa nenhuma notação literal, não emprega nenhum formulário algébrico (...). Diferentemente de Bélidor, que num único volume enfeixa todo um curso de matemática e lança mão de recursos algébricos". Os logaritmos são abordados como números em progressão aritmética relacionados a números em progressão geométrica, tudo organizado unicamente com o intuito de facilitar cálculos e, calcular era entendido como um ato de compor e decompor números de diferentes formas.

Na compreensão de Valente (1999), Bélidor e Bézout produziram manuais escolares, dialogando com a produção matemática, sem o maior rigor matemático, mas com independência em relação ao curso militar, sendo adotado por vários cursos não-militares, liceus e colégios na Europa, EUA e Brasil. Assim, os livros de Bézout e Bélidor marcaram a separação entre Aritmética e Geometria e a semente dessas disciplinas no interior das escolas, ficando a Álgebra a ser inserida mais adiante.

Na sequência, os matemáticos destacados por Valente (1999), e cujas obras influenciaram o ensino das matemáticas no Brasil, são os franceses Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) e Sylvestre-François Lacroix (1765 – 1843). Os Elementos de Geometria de Legendre foram traduzidos por Manoel Ferreira de Araújo Guimarães e sua publicação, em 1809, é uma das primeiras na Imprensa Régia. A marca dessa obra é uma retomada à Geometria axiomática ao modo de Euclides, a substituição do trabalho de Bézout, com um fortalecimento do «rigor» e uma redução do intuitivo. A Geometria de Lacroix, traduzida por José Vitorino dos Santos e Souza em 1812, apresentava uma aproximação tanto ao rigor quanto ao aceite de verdades evidentes. Do mesmo autor, as suas Aritmética e Álgebra foram traduzidas por Francisco Cordeiro da Silva Torres em 1810 e 1812, respectivamente. A Aritmética se diferenciou do trabalho de Bézout por levar para a Álgebra assuntos mais difíceis como extração de raízes e logaritmos. A inserção de números decimais como frações específicas facilitou o trabalho com os sistemas de unidades de medidas decimais. A obra inovou ao trabalhar com dízimas periódicas e ao definir o conjunto dos racionais como união de decimais exatos e dízimas periódicas. Valente (1999, p. 104) assevera que Lacroix "[...]inaugura a sequência didática de ensino das matemáticas no Brasil dada por Aritmética-Álgebra-Geometria[...] e foi a primeira obra didática para escolarização do novo sistema métrico francês".

A Álgebra de Lacroix, de acordo com Valente (1999) reunia os conteúdos: Noções preliminares sobre a passagem da Aritmética para a Álgebra, Equações, Da resolução das equações do primeiro grau a uma só incógnita, Métodos para efetuar operações com quantidades literais, Adição de quantidades algébricas, Subtração de quantidades algébricas, Multiplicação, Divisão, Frações algébricas, Questões a duas incógnitas e quantidades negativas, Resolução de um número qualquer de equações do primeiro grau com número igual de incógnitas, Fórmula geral para resolução de equações do primeiro grau, Equações do segundo grau a uma incógnita, Extração da raiz quadrada das quantidades algébricas, Formação de potências dos monômios e extração de suas raízes, Formação de potências das quantidades complexas, Extração de raízes das quantidades complexas, Cálculo de radicais, Resolução por aproximação das equações numéricas, Proporções e progressões e Teoria das quantidades exponenciais e logaritmos.

Estabelecidos os conteúdos do ensino superior como consequência decorrem as definições dos conhecimentos necessários para o ingresso nos cursos superiores. A escola primária havia se consolidado com as tarefas de ensinar a ler, escrever e fazer contas (quatro operações fundamentais da Aritmética). Desse modo, os cursos preparatórios para o ensino superior se constituíram nas escolas secundárias. Se os cursos de engenharia eram notadamente de cunho técnico e passaram ao longo do tempo a exigir conhecimentos mínimos de Matemática, como Aritmética e Geometria, os demais cursos como Direito e Medicina também o fizeram nos anos 1830 (VALENTE, 1999).

Em 1838, a criação do Imperial Colégio de D. Pedro II, conforme Valente (1999), tinha por objetivo ser parâmetro de ensino secundário. O currículo apresentava a Aritmética nos três primeiros anos, Geometria no quarto e quinto anos e Álgebra no sexto. Ainda, segundo pesquisador, a previsão de Matemática no sétimo e oitavo anos na verdade se tratava de assuntos de Trigonometria e Mecânica. Então, por essa época se apresentavam duas sequências para o estudo das matemáticas: Aritmética – Geometria – Álgebra, de Bézout e Aritmética – Álgebra – Geometria, de Lacroix. Bézout apresentava dois argumentos em defesa da sua opção, um referente à pouca utilidade da Álgebra e outro de que os iniciantes precisariam estar “[...]exercitados nos raciocínios matemáticos para sentirem a força das demonstrações algébricas mesmo que elas sejam mais simples que as demonstrações sintéticas” (BÉZOUT apud VALENTE, 1999, p. 120). Por sua vez, Lacroix defendia que não havia motivo para inserir a Geometria entre a Aritmética e a Álgebra visto que enquanto uma se detinha ao cálculo das grandezas, a outra era a universalização da primeira. A sequência Aritmética – Geometria – Álgebra estava presente na Academia Real dos Guardas-Marinha e no Imperial Colégio D. Pedro II. Contudo, na primeira reforma dos estudos, em 1841, o Colégio D. Pedro II estabeleceu a sequência Aritmética – Álgebra – Geometria.

Por volta dos anos 1830, surgiram as primeiras obras produzidas por autores brasileiros. Dentre essas, a Aritmética de Cândido Baptista de Oliveira, de1832, voltada aos professores do ensino primário e continha os conteúdos: Operações com números inteiros, fracionários, decimais, complexos; Proporções e fórmulas (equações do 1º grau); Quadrado e raiz quadrada; Regra de três; e Metrologia. A obra foi pioneira na apresentação do sistema de pesos e medidas francês para o ensino primário. A edição de 1863 se dispôs ao uso do ensino secundário e, para tanto, são adicionados temas da Álgebra: Teoria dos Logaritmos;

Progressões e suas propriedades; Resoluções das equações do 1º e 2º graus; e Fórmulas de Juros simples e composto. O Compêndio de Matemáticas Elementares de Pedro d'Alcântara Bellegarde, de 1838, agrupou num único exemplar os livros de Aritmética, Álgebra, Geometria, Geometria Analítica, Desenho Geométrico e Metrologia. Na Aritmética apresenta as operações com inteiros, frações números decimais e regra de três, e na Álgebra os temas foram as quantidades literais, equações do 1º grau, potências e raízes, equação do 2º grau, proporções e logaritmos. Com o passar do tempo, a obra foi subdividida em volumes específicos de Aritmética, Álgebra e Geometria (VALENTE, 1999).

Em síntese a esse período, Valente (1999) observa que houve duas fontes de inspiração para os autores brasileiros: Bézout, para os escritores que tiveram ligação com a Academia da Marinha e Lacroix, aos que passaram pela Academia Militar, visto que essas instituições baseavam seu ensino nas obras desses matemáticos franceses, respectivamente.

Na segunda metade do século XVIII ocorre uma atualização das obras nacionais baseadas no que se passa pela Europa e, assim, aparece a primeira referência nacional para os didáticos: Cristiano Benedito Ottoni. As obras de Ottoni começam a ser indicadas para o Colégio D. Pedro II em 1856 e permanecem em 1857, 1865, 1870, 1876, 1879, 1881 e 1888, sendo desse modo referência nacional até 1898 quando finalmente deixam o programa desse mesmo colégio. Os didáticos de Ottoni vão se basear na Geometria de Vincent[25] e na Aritmética e na Álgebra de Bourdon[26]. Para seu livro de Geometria, a tradução de Ottoni, de 1853, foi feita sobre 5ª edição da obra de Vincent, quando essa já havia deixado de ser destinada às escolas técnico-militares e com as alterações que a tornaram de uso do ensino secundário francês. Entre a versão francesa e a compilação do autor brasileiro foi observado a supressão de construções geométricas, do estudo das cônicas, de problemas com cálculos numéricos e de princípios da geometria descritiva. Na Aritmética, traduzida em 1852, a mesma novidade trazida na obra de Bourdon que foi o tratamento inicial apenas com métodos aritméticos e uma segunda parte com propriedades gerais dos números, potências, raízes, razões, proporções, progressões e logaritmos com o uso de formas algébricas. De acordo com Valente (1999), essa separação é o germinar do ensino seriado da Matemática escolar. A Álgebra de Bourdon foi utilizada para tradução em 1852 por Ottoni, segundo o próprio, para que houvesse uma uniformidade, ou seja, uma unidade didática em relação à Aritmética. Assim, o didático brasileiro contém as operações e cálculos algébricos, equações e problemas do 1º grau, do 2º grau a uma incógnita, aplicações do binômio de Newton, progressões e logaritmos. Porém, o didático francês seguia com a teoria geral das equações

[25] Alexandre Joseph Hidulphe Vincent (1797 – 1868) (VIGLAS, 2012).
[26] Louis Pierre Marie Bourdon (1779 – 1854)

e, essa parte, Ottoni admitiu deixar para o 2º ano, visto que ele ensinava apenas o 1º ano, e não incluiu em seu trabalho. Tal opção acabaria por demarcar em tempos futuros o limite entre os assuntos de Álgebra no ensino secundário brasileiro e no ensino superior (VALENTE, 1999).

Nas últimas décadas do século XIX, professores de liceus e colégios e, também, de academias militares se dedicam à produção de didáticos. Para Valente (1999), a escrita advinda de civis e militares poderia explicar a dualidade de tendências da Matemática escolar brasileira da época.

A Aritmética do maranhense João Antônio Coqueiro, formado na Politécnica de Paris, foi publicada em 1860 e adotada pelo Colégio D. Pedro II para o 1º e 2º anos em 1879. Contudo, desde 1870 a 1ª parte do seu Curso Elementar de Matemáticas já era indicada para o 1º ano, enquanto a obra de Ottoni se incumbia de servir ao 2º ano. O trabalho de Coqueiro cobria das quatro operações fundamentais às frações decimais e o didático de Ottoni de razões e proporções aos logaritmos. A partir de 1879, o Tratado de Aritmética de Coqueiro se caracterizou por inserir assuntos como Teoria dos Limites e aplicações à Geometria e à Física, fazer uso de notações algébricas quando necessário e um acréscimo didático que foi a inclusão de exercícios resolvidos e por resolver ao fim de cada capítulo (VALENTE, 1999).

A Aritmética e a Álgebra do professor português José Adelino Serrasqueiro foram, a partir de 1891, obras indicadas pelo programa do Colégio D. Pedro II. Serrasqueiro parece ter baseado seu trabalho na obra do matemático e professor francês Joseph Louis François Bertrand (1822 – 1900) e apresenta praticamente os mesmos conteúdos presentes no livro de Ottoni, excetuando os «Números Incomensuráveis». Contudo, apresenta a vantagem didática de exercícios propostos ao fim de cada item de um conteúdo diferentemente de Ottoni que nem sequer tinha exercícios. Ottoni continha exemplos numéricos no desenvolver da teoria (VALENTE, 1999).

Os Elementos de Aritmética, de 1883, de João José Luiz Vianna foi adotado inicialmente pela Escola Militar e, depois, entre 1895 e 1898 apareceu entre as indicações do programa para o Ginásio Nacional (Colégio D. Pedro II) para os dois primeiros anos do curso. A obra se assemelhava à de Ottoni, ao trazer notações algébricas após o estudo de divisibilidade. Os exercícios voltaram ao final do livro. Outro livro também indicado ao Ginásio Nacional conjuntamente ao de Vianna foi o Curso Elementar de Matemática dos irmãos Aarão e Lucano Reis, que trazia como diferencial a defesa das ideias de August Comte. Como outros livros trazia alguns anacronismos, assuntos que não mais apareciam nos exames como «números incomensuráveis». Apresentava um texto não voltado aos alunos, seguia a sequência de teoria e exemplo numérico (VALENTE, 1999).

Desse período das décadas finais do século XIX, Valente (1999) ainda destaca dois livros de Álgebra. O professor do 3º ano do Colégio Pedro II, Luís Pedro Drago apresentou sua obra como baseada no programa. O programa e o livro apresentavam operações algébricas e equações do 1º e 2º graus, contudo o didático seguia com razões, proporções, progressões e logaritmos, os quais apareciam na grade curricular como pertencentes à Aritmética. Definições, problemas e regras eram numerados e sequenciados. A obra de Drago foi recomendada entre 1876 e 1881, em substituição aos livros de Ottoni. A Álgebra de Serrasqueiro fica indicada para o Ginásio Nacional de 1891 a 1923. Ela introduz novos temas para a Álgebra como teoria dos determinantes e aplicação de determinantes à resolução e discussão de um sistema de equações do primeiro grau. Entretanto, Valente (1999) destaca que, de fato, muito pouco de Álgebra foi trabalhado ao longo do século XIX tendo em vista que até 1854 não havia exigência dessa área da Matemática no ensino superior. Quando houve, o conteúdo se restringia ao limite das equações do 1º grau (VALENTE, 1999).

Valente (1999) observa que após as obras de Ottoni se apresentaram duas tendências nos livros didáticos. Uma primeira corrente que o critica, afirmando que seus livros precisam de atualizações. Em geral, são trabalhos que não são voltados aos alunos e buscam se referenciar nos círculos da intelectualidade e buscam inserir novos assuntos e reestruturar os conteúdos. A outra tendência era das obras voltadas aos alunos, com a inclusão de exercícios e muitas vezes advindas de apostilas de uso dos preparatórios. Seguem uma tendência internacional do final do século XIX. O pesquisador ainda analisa os livros das coleções de congregações católicas como exemplos de livros que adentram o século XX demonstrando a fusão dessas duas tendências.

Em resumo, desse modo os cursos preparatórios contribuíram na passagem do saber técnico, próprio das academias, para a cultura escolar com a discussão sobre os programas. Nos dizeres de Valente (1999, p. 197):

> (...) o menu de conteúdos já elaborados para as Academias vai entrando na formação daqueles que desejam iniciar estudos superiores.
>
> Movimento inverso vai se dando na Academia Militar, depois Escola Militar. No processo de transformação da Escola em curso superior de Engenharia, a matemática escolar dos primeiros anos, a escola secundária, vai saindo da Escola e passando aos preparatórios.

Ou seja, entre 1730 e 1930 houve desde o ensino superior uma «descida»” de conteúdos em direção ao ensino secundário. O primário era a escola de ler, escrever e fazer contas, e esse «fazer contas» nada mais era que a Aritmética mais elementar. Consequentemente, podemos averiguar que ao fim do primário e da sua Aritmética mais elementar, o currículo vai encontrar uma Aritmética mais elaborada e com maior rigor vinda do ensino superior, que viria a compor o ensino secundário.

Valente ainda chama atenção para a mudança didática que ocorre no encontro da escola com o colégio:

> O livro de matemática escolar passará obrigatoriamente, no desenvolvimento de seu texto, a incluir não mais exercícios como uma espécie de anexo. Os exercícios integrarão o próprio andamento da teoria escolar. A *forma expositiva* de apresentação da teoria escolar oriunda dos colégios dará lugar à *forma redundante*. Isto é, a pedagogia da escola, da prática dos exercícios, rompe com a forma expositiva, que se caracteriza por evitar a redundância, a repetição. O texto escolar dos colégios traz consigo a herança da *forma precisa*; com ela, não havia necessidade de retomada de assuntos, de repetição por exercícios (VALENTE, 1999, p. 199-200)

Desse modo, não apenas os conteúdos foram sendo alterados, mas a forma foi se alterando. Com o passar do tempo, foram se mesclando características dos livros da Matemática dos colégios e das escolas, a forma que primava pelo rigor e o desenvolvimento expositivo com o exercitar próprio das escolas. A princípio, exercícios ao final das obras; depois, com a exaltação do número de exercícios que já vinham ao final dos capítulos e/ou temas.

3.1.2. A Álgebra nos Livros Didáticos do Brasil republicano

Os trabalhos do GHEMAT têm se baseado nas vagas pedagógicas identificadas na história da Educação Matemática, de acordo com os estudos de Chervel (1990), para estudar a Aritmética (VALENTE et al., 2016), os manuais escolares (MENDES; VALENTE, 2017) e os saberes matemáticos elementares dos anos iniciais (COSTA; VALENTE, 2014; PINTO; VALENTE, 2016). Esse grupo divide a história de 1890 a 1970 nos períodos de Ensino Ativo ou Intuitivo (ou ainda, Lição das coisas); Educação Ativa ou Escolanovista e Matemática Moderna (VALENTE, 2003; MENDES; VALENTE, 2017; PINTO; VALENTE, 2016; COSTA; VALENTE, 2014; VALENTE et al, 2016). Os trabalhos de Valente (2015) e Valente et al (2016) consideram o período posterior à MM como a fase da Educação Matemática.

Por sua vez, Saviani (2013) em História das Ideias Pedagógicas no Brasil faz uma longa divisão considerando desde o período colonial. Entretanto, na parte atinente ao Brasil, enquanto país independente, divide em três períodos os quais se subdividem em outras sete fases distintas. Ele considera momentos marcantes na educação brasileira para efetuar tal divisão temporal: 1827 – lei que institui as Escolas de Primeiras letras; 1932 – Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova; 1947 – Anteprojeto da LDB; !961 – LDB; 1969

– Lei 5540 da Reforma Universitária; 1980 – Realização da 1ª Conferência Brasileira de Educação (CBE) e 1991 – Realização da sexta e última CBE. Os três grandes períodos para o Brasil independente foram caracterizados assim por Saviani (2013, p. 19):

> 1º) Coexistência entre as vertentes religiosa e leiga da pedagogia tradicional (1759 – 1932); teria sido marcado, entre 1827 e 1932, pelo que denominou de "Desenvolvimento da pedagogia leiga" caracterizado pelo ecletismo, liberalismo e positivismo.
> 2º) Predominância da pedagogia nova (1932 – 1969), com a subdivisão em três fases. Uma delas, entre 1932 e 1947, com equilíbrio entre as pedagogias tradicional e nova; uma intermediária, de 1947 a 1961, tendo predomínio da influência da pedagogia nova; e a terceira, de 1961 a 1969, marcada pela crise da pedagogia nova e articulação da pedagogia tecnicista.
> 3º) Configuração da concepção pedagógica produtivista (1969 – 2001), subdividido em outros três períodos. De 1969 a 1980 com o "predomínio da pedagogia tecnicista, manifestações da concepção analítica de filosofia da educação e concomitante desenvolvimento da visão crítico reprodutivistas (grifo no original).

Entre 1980 e 1991, um intervalo de emergência contra hegemônica com as pedagogias da «educação popular», da prática, crítica-social dos conteúdos e histórico-crítica. E, a fase final abarcada pelo estudo de Saviani, de 1991 a 2001, com o que ele denominou de "neoprodutivismo e suas variantes: neoescolanovismo, neoconstrutivismo e neotecnicismo" (SAVIANI, 2013, p. 20).

Para o GHEMAT, o ensino intuitivo ou método de «lição das coisas» se fortalece no Brasil na segunda metade do século XIX e se divulga amplamente a partir das publicações de Rui Barbosa para reformar a instrução primária no Rio de Janeiro, segundo Pinto e Valente (2016, p. 16) como "[...]uma conjunção das ideias herbatianas com o intuicionismo pestalozziano". A proposição registrava a necessidade de se ensinar as crianças a partir do que elas conhecem para aprender o que não conhecem, do que está perto e é simples e fácil ao que está longe, complexo e difícil. Tais ideias se manifestavam no manual «Primeiras Lições de Coisas» de Norman Allison Calkins e que foram traduzidas e adaptadas por Rui Barbosa. Entre as orientações aos docentes estava a valorização da observação e do estímulo ao uso dos sentidos (PINTO; VALENTE, 2016). Ainda, segundo os autores, "[...]a intuição nessa obra [de Calkins] é então decomposta em seus elementos constitutivos: os sons falados e cantados; a forma na geometria, na caligrafia e no desenho; e o número na contagem e no cálculo". Essa metodologia pode ser observada ainda durante as duas primeiras décadas do século XX (PINTO; VALENTE, 2016, p. 21).

Vejamos exemplares de livros de Álgebra ou livros de Matemática que eram responsáveis pelo trabalho inicial dos alunos com a Álgebra. O ensino desta disciplina chegou no Brasil Colônia devido à necessidade de formação nos quadros do exército português, após a vinda de Dom João VI com a família real. Valente (1999, p. 168), identifica que “[...]muito pouco de álgebra foi efetivamente trabalhado nas escolas durante o século XIX”.

Na Algebra Elementar, de Trajano (1905) as definições são numeradas quase contando parágrafo a parágrafo. Assim, os primeiros parágrafos apresentam:

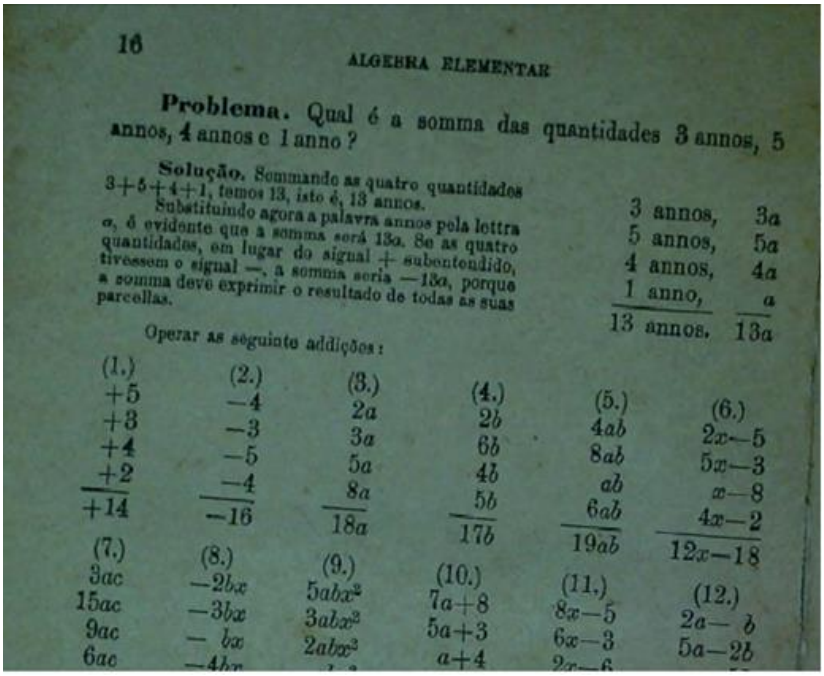
> **1. Algebra** é a parte das mathematicas que resolve os problemas, e demonstra os theoremas quando as quantidades são representadas por lettras.
> **2. Symbolos algebricos** são lettras, numeros e signaes com que se exprimem as quantidades, e effectuam as operações.
> **3. Problema** é uma questão que requer uma ou mais quantidades desconhecidas que se teem de obter por meio de quantidades conhecidas,
> As quantidades conhecidas chamam-se **dados** do problema; as quantidades desconhecidas chamam-se **incognitas**, e o processo por meio do qual se acham as quantidades desconhecidas, chama-se **solução** (TRAJANO, 1905, p. 5, grifos no original)

Em seguida, os tópicos seguem com definições de quantidades algébricas, teorema e sinais algébricos, isso seria a título de uma introdução aos assuntos, os capítulos[27] que seguem são as operações algébricas (adição, subtração, multiplicação e divisão algébricas), teoremas, divisores e múltiplos, máximo divisor comum, frações algébricas, equações do 1º grau, problemas, demonstrações algébricas, generalização, formas de solução, discussão dos problemas, desigualdade, formação das potências, extração de raiz quadrada, equações do 2º grau, equações biquadradas, razão e proporção e progressões. O último parágrafo a ser numerado tem o número 397 e explica como achar um meio geométrico entre dois números. O livro se encerra com problemas para o exame e o índice, nas páginas 183 e 184.

Interessante notar que para a introdução das adições algébricas tomava-se a letra inicial do que se estava somando para inserir as letras nas adições, como mostra a figura 10.

Figura 10 – Problema de adição algébrica

[27] Não fica claro o que são capítulos e seções. Tomamos como sendo capítulos os títulos centralizados e em caixa alta e, as seções como os títulos apenas centralizados.



16 ALGEBRA ELEMENTAR

Problema. Qual é a somma das quantidades 3 annos, 5 annos, 4 annos e 1 anno?

Solução. Sommando as quatro quantidades 3+5+4+1, temos 13, isto é, 13 annos.
Substituindo agora a palavra annos pela lettra *a*, é evidente que a somma será 13*a*. Se as quatro quantidades, em lugar do signal + subentendido, tivessem o signal —, a somma seria —13*a*, porque a somma deve exprimir o resultado de todas as suas parcellas.

3 annos,	$3a$
5 annos,	$5a$
4 annos,	$4a$
1 anno,	a
13 annos.	$13a$

Operar as seguinte addições:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)
$+5$	-4	$2a$	$2b$	$4ab$	$2x-5$
$+3$	-3	$3a$	$6b$	$8ab$	$5x-3$
$+4$	-5	$5a$	$4b$	ab	$x-8$
$+2$	-4	$8a$	$5b$	$6ab$	$4x-2$
$+14$	-16	$18a$	$17b$	$19ab$	$12x-18$

(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)	(12.)
$3ac$	$-2bx$	$5abx^2$	$7a+8$	$8x-5$	$2a-b$
$15ac$	$-3bx$	$3abx^2$	$5a+3$	$6x-3$	$5a-2b$
$9ac$	$-bx$	$2abx^2$	$a+4$		
$6ac$					

Fonte: Trajano (1905, p. 16)

Esse fato destacado não será observado em todas as obras daqui em diante. Outro momento que merece atenção é quando a equação é definida por Trajano (1905, p. 76) assim "[...]é uma igualdade entre duas quantidades algébricas. Assim, $x – 5 = 3$ é uma equação que mostra que, se 5 for subtrahido de *x*, o resultado será 3". Depois, segue definindo os membros da equação, diferenciando o uso das letras iniciais e finais do alfabeto para quantidades conhecidas e desconhecidas, respectivamente; e definindo equação numeral, equação literal, equação idêntica, equação do 1º grau e do 2º grau.

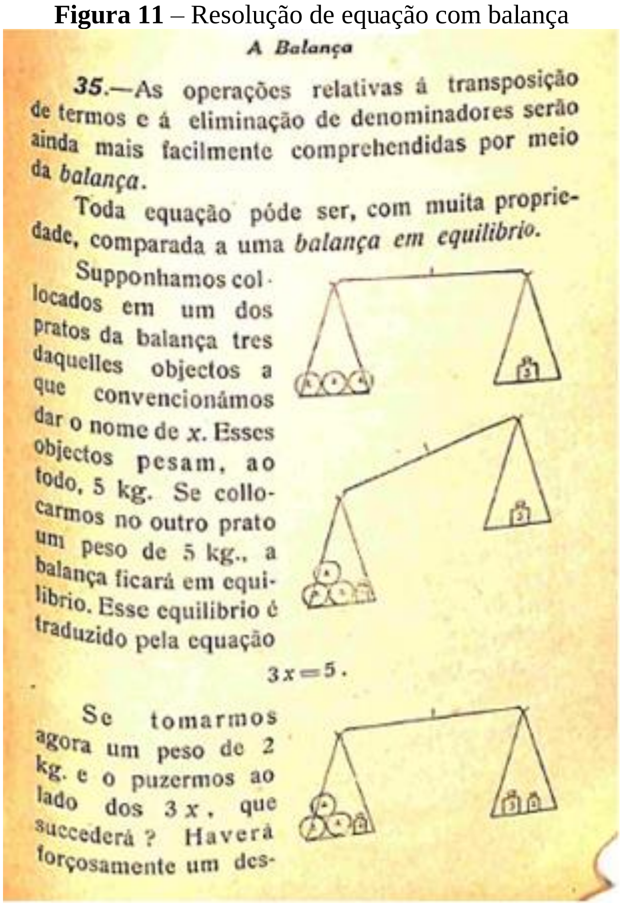
Em Algebra – primeiros passos, de Reis (1919), o prefácio de trinta páginas já tinha apresentado o uso de letras para resolução de problemas, entretanto a introdução começa com:

> Para habituar o alumno á idéa de representar por meio de letras os objectos ou, em geral, as quantidades, e os numeros, acreditamos util uma introducção, regularmente amena e bem simples, conforme suggerir a pratica do proprio professor.
> É preciso, e essencial, que não se comece por dar uma série de definições, com que tantos livros logo ás primeiras paginas espantam, apavoram e opprimem a seus indefesos leitores, mas, ao contrario, ir contornando as difficuldades e supprimindo as asperezas (REIS, 1919, p. 1)

No prefácio o autor defende o ensino do «método algébrico» no ensino primário. A introdução de Reis (1919) se desenvolve simulando a enumeração e contagem de uma coleção de objetos, sendo estes inicialmente representados por palavras e depois por abreviações.

O primeiro capítulo de Algebra – primeiros passos (REIS, 1919, p. 5) se denomina "Emprego da letra X na indicação das operações", e afirma que do mesmo modo que podemos fazer anotações abreviadamente também é possível empregar letras para representar quantidades e números. E, Reis (1919, p. 5, itálico no original) afirma “a letra *x* é particularmente usada para representar uma quantidade que não se conhece, um número desconhecido, uma *incognita”.* Segue-se uma dezena de exemplos de situações nas quais quantidades desconhecidas são representadas por *x*. Nesse capítulo são trabalhadas as operações com monômios apenas em *x*. No Capítulo II, Parentheses, são trabalhadas as operações com binômios, trinômios e polinômios, tendo as operações com números como exemplos iniciais. Na figura 11, uma das formas que será sugerida para a compreensão da resolução de equações.

Figura 11 – Resolução de equação com balança



A Balança

35.—As operações relativas á transposição de termos e á eliminação de denominadores serão ainda mais facilmente comprehendidas por meio da *balança*.

Toda equação póde ser, com muita propriedade, comparada a uma *balança em equilibrio*.

Supponhamos collocados em um dos pratos da balança tres daquelles objectos a que convencionámos dar o nome de *x*. Esses objectos pesam, ao todo, 5 kg. Se collocarmos no outro prato um peso de 5 kg., a balança ficará em equilibrio. Esse equilibrio é traduzido pela equação

$$3x = 5.$$

Se tomarmos agora um peso de 2 kg. e o puzermos ao lado dos 3 *x*, que succederá? Haverá forçosamente um des-

Fonte: Reis (1919, p. 59)

O capítulo sobre Equações, vai introduzir as equações usando um sinal de interrogação no lugar da incógnita “Se eu escrever 3 + ? = 10, logo se entende que desejo saber – qual o numero que, sommado com 3, dá 10, e mentalmente se responde: 7” (REIS, 1919, p. 33). Esse tipo de exemplo se repete com as outras operações até que mostra que o “*?*” pode ser substituído por “*x*” em cada um deles. E, define equação como uma “[...]expressão como essas” e que resolver a equação é encontrar o valor de *x*. Mais adiante, esclarece sua visão: “Toda equação resulta de um *problema*; é a traducção, em linguagem algebrica, da relação que existe entre os *dados* desse problema e a *incógnita*. Resolvida, acha-se o numero que satisfaz a todas as condições do enunciado” (REIS, 1919, p. 35, itálico no original). Esse capítulo sobre equações e problemas resolvidos por elas vai da página 33 até a página 120. O livro segue com breves capítulos sobre números inteiros, problemas e equações com duas incógnitas até a página 135. A última página, a de número 136 se resume a dar os conceitos de sistemas de mais de duas equações e equações do 2º grau.

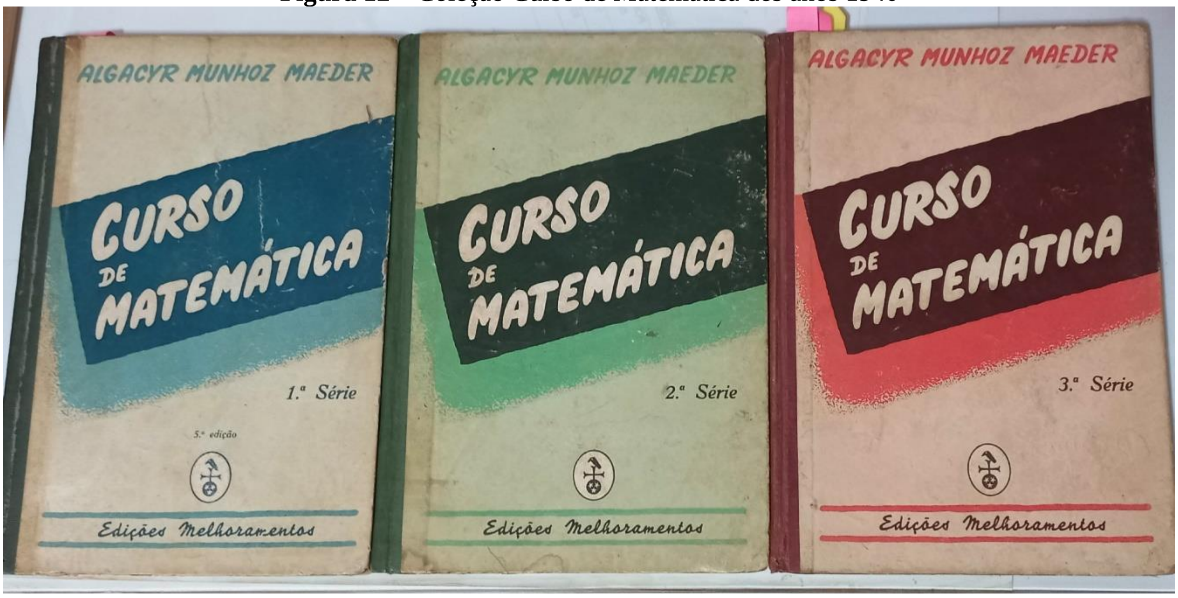
Valente et al. (2016) destacam que esse período é marcado pela influência dos primeiros estudos de psicologia; por uma luta contra a memorização, esta identificada na tabuada; e pelo uso por parte do professor das Cartas de Parker e de «coisas», tais como palitinhos, torninhos e grãos. Assim, ele diferencia esse período de predomínio do ensino intuitivo/lição das coisas do período seguinte – Escola Nova – por meio de um jogo de palavras; o período do final do século XIX e início do século XX é designado como tempo de «ensinar ativamente a aritmética ao aluno», enquanto na Escola Nova é para «ensinar aritmética ao aluno ativo». Ou seja, a atividade passa do professor ao aluno.

Noutro momento, em decorrência da Revolução de 1930, parte das propostas dos escolanovistas foram assumidas pelo Governo Vargas. Em consequência, alterações significativas se consolidaram no ensino de Matemática como a sua unificação em uma só disciplina.

O estudante como centro das atividades foi a principal e mais presente característica quando Pinto e Valente (2016) analisaram revistas pedagógicas do período da Escola Nova. Nos textos encontrados pelos pesquisadores do GHEMAT foi ainda observado que são enfatizadas a resolução de problemas e a preparação para a vida. Assim, os conteúdos deviam estar ligados a situações do cotidiano da criança e não a preparar para assuntos e temas dos estudos futuros. Havia defesa do uso de jogos e que as crianças propusessem problemas ou escolhessem o tema de aula. Dessa forma, como no período do ensino intuitivo também verificaram a presença da psicologia como embasamento das propostas, mas, agora, no aspecto quantificador de acertos e erros na resolução de itens (PINTO; VALENTE, 2016).

Como já havia anunciado no seu prefácio do volume da 1ª série ginasial, a coleção Curso de Matemática (Figura 12), de Maeder (1946; 1945; 1944) começa o primeiro livro dividido em uma parte de Geometria, que vai da página 11 até 53; e outra parte de Aritmética, da página 54 até a 219, sucedida de um apêndice com uma tabela de números primos de 1 a 10 000. O volume dedicado à 2ª série do Ginásio (MAEDER, 1945) se apresenta de certo modo subdividido em três partes. A primeira delas com geometria nos capítulos de áreas e volumes; outra com o que hoje seria chamado de grandezas e medidas[28], nos capítulos de sistema métrico e de problemas e exercícios sobre o sistema métrico; e a terceira parte com a aritmética, nos capítulos sobre potências, raízes, razões e proporções, médias, grandezas proporcionais, divisão proporcional, regra de três, porcentagem e juros simples. O apêndice apresentava quadrados e raízes quadradas, e cubos e raízes cúbicas de números entre 1 e 1000. O terceiro volume (MAEDER, 1944) tem no primeiro capítulo um trabalho sobre números relativos entre as páginas 9 e 26. O segundo capítulo inicia o trabalho com expressões algébricas que segue com capítulos sobre as operações com monômios e polinômios, fatoração, e frações algébricas, para então chegar em um capítulo sobre equações do 1º grau e outro sobre resoluções de equações com uma incógnita, e essa parte ocupa da página 27 à página 125.

Figura 12 – Coleção Curso de Matemática dos anos 1940



Fonte: Acervo do Autor

O Capítulo II – Expressões Algébricas (MAEDER, 1944, p. 27) inicia com a definição de símbolos algébricos “[...]as letras podem ser usadas para designar números”. E segue com a explicação de que as letras iniciais do alfabeto usualmente são utilizadas para representar números conhecidos, enquanto as letras finais, para números incógnitos. No Capítulo VIII – Equações do 1º grau (MAEDER, 1944, p. 96, itálico no original), o primeiro tópico é a noção de equação “[...]consideremos o problema seguinte: *Qual é o número que se deve somar a 7 para se obter o total de 12?* Se designarmos por x o número procurado, podemos escrever, abreviadamente, $7 + x = 12$”. E, conclui que a igualdade que contenha

[28] Em “Curso Elementar de Mathematica” de Reis e Reis (1892) esse trabalho com o sistema de medidas foi chamado de Metrologia. Ainda assim, os autores o colocavam como parte da Aritmética.

uma incógnita se chama de equação. Segue com a procura do valor do *x*, mostrando que para obtê-lo é necessário saber a definição de subtração.

> Procuremos, agora, o valor de *x*, isto é, o número que, colocado no lugar de *x*, torna o primeiro membro da equação igual ao segundo.
> Sendo conhecida a soma de dois números e um dêles, temos, de acôrdo com a definição de subtração, $x = 12 - 7$ (MAEDER, 1944, p. 96)

A definição de subtração de inteiros está no volume da 1ª série ginasial (MAEDER, 1946, p. 77) quando afirma que "[...]subtração é a operação que tem por fim, conhecendo a soma de duas parcelas e uma delas, determinar a outra". Depois, em continuidade vem outro exemplo de equação e sua resolução, e as definições de igualdades e de identidades, para em seguida chegar ao tópico equações. Antes do conceito, apresenta duas igualdades que envolvem *x* e mostra que, em ambos os casos, apenas alguns valores existe a igualdade entre os membros. Segundo Maeder (1944, p. 98, itálico no original) "[...]equação é tôda igualdade que sòmente se verifica para determinados valores de certas letras que nela se contêm, letras essas denominadas *incógnitas".* O capítulo prossegue com as definições e conceitos de equações equivalentes, classificação das equações conforme o seu grau, se numéricas ou literais, racionais ou irracionais, inteiras ou fracionárias e completas ou incompletas. Para que se resolvam as equações antes há a apresentação de dois princípios[29] e suas consequências. Em síntese, eles afirmam que se adicionando ou subtraindo-se valores iguais em ambos os lados de uma igualdade, a igualdade estará mantida e, que o mesmo vale para multiplicar ou dividir ambos os membros por um mesmo valor. Como as equações são igualdades, esses princípios têm como consequência que equações equivalentes às primeiras podem ser obtidas aplicando-se esses princípios, e assim, se resolverem as equações. Entretanto, a resolução de equações numéricas é um tópico apenas no capítulo seguinte:

> *Para resolver uma equação do primeiro grau com uma incógnita, eliminam-se os denominadores, se os houver; transpõem-se os têrmos que contêm a incógnita para o primeiro membro e os que não a contêm para o segundo; reduzem-se os têrmos semelhantes; dividem-se ambos os membros pelo coeficiente da incógnita*. (MAEDER, 1944, p. 109, itálico no original)

Como esse método é considerado válido para todas as equações do 1º grau sejam numéricas ou literais e fracionárias ou inteiras, na sequência são dados exemplos para o uso desse método em todos esses casos. Os capítulos que seguem em Maeder (1944) são sobre Geometria e incluem ângulos, triângulos, paralelismo, soma de ângulos de polígonos,

[29] Tais princípios serão denominados em livros posteriores como princípios de equivalência.

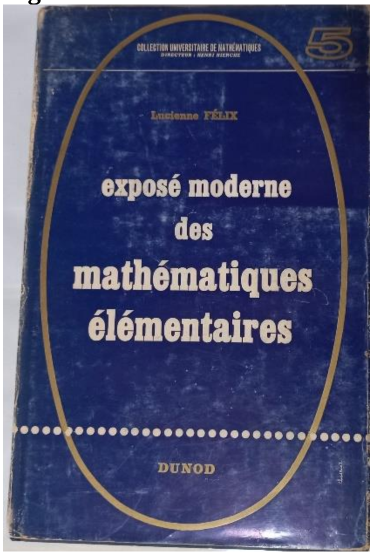
quadriláteros, construções geométricas, círculo e circunferência, e relações entre arcos e ângulos.

Valente et al. (2016, p. 24) exemplificam as diferenças entre os problemas de Aritmética do período do ensino intuitivo e da Escola Nova. No exemplo, no primeiro desses momentos, os problemas podem aparecer com nomes de pessoas fictícias, enquanto no segundo momento o professor deve promover a articulação entre a situação problemática para a criança e a aritmética necessária para a solução.

O período da Matemática Moderna (1960 – 1980) na visão do GHEMAT é marcado pelo «estruturalismo»[30] e pelo «tecnicismo». Nas palavras de Valente et al. (2016), o estruturalismo se fortaleceu como método de análise, como tratamento das relações entre as partes e o todo, as relações com prioridade sobre os entes e a totalidade prevalecendo sobre as partes. Acrescenta ainda, a estrutura oculta era mais relevante do que o evidente, o simbolismo mais importante do que o simbolizado. Um exemplo disso aparece em "Exposé Moderne des Mathématiques Élémentaires" (figura 13) de Lucienne Félix (1966, p. 2):

> A matemática moderna se preocupa menos com os objetos de estudo do que com a estrutura das relações entre esses objetos: assim, quase toda a geometria tradicional aparece como *Álgebra* definida como uma teoria das operações; as figuras tornam-se inúteis senão perigosas para a exposição das demonstrações, ficando o leitor naturalmente livre para apoiar a sua intuição com esboços (tradução nossa)[31].

Figura 13 – Livro francês da MM



Fonte: Acervo do Autor

---

[30] Ver mais em Correia (2015).

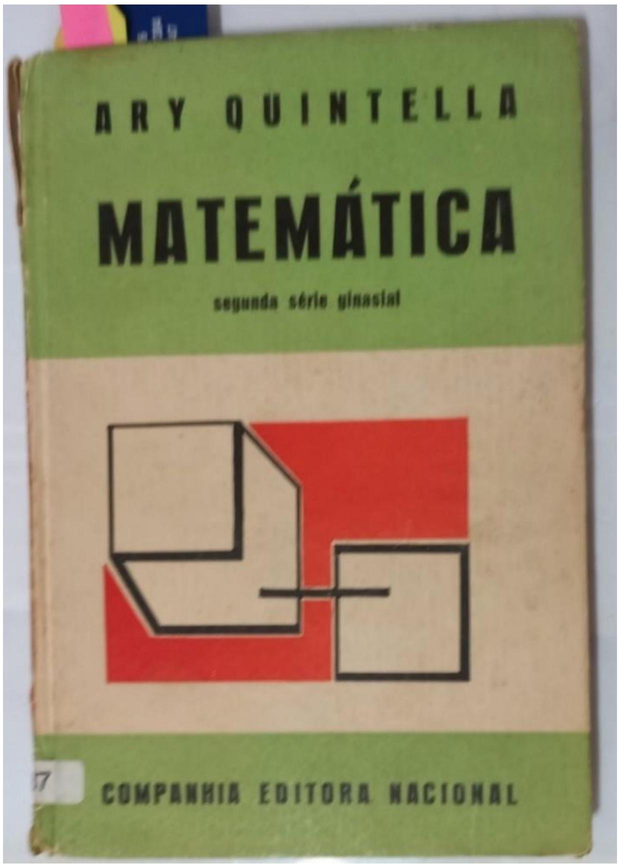
[31] No original: *Les Mathématiques modernes se préoccupent moins des objets de l'étude que de la structure des relations entre ces objets: ainsi presque toute la géométrie traditionelle apparaît comme de l'Algèbre définie comme théorie des opérations; les figures deviennent inutiles sinon dangereuses pour l'exposé des démonstrations, le lecteur restant naturellement libre de soutenir son intuition par des esquisses*.

O estruturalismo perpassava praticamente todas as ciências em meados do século XX. Desde 1935, o trabalho do grupo Bourbaki[32] havia apresentado as estruturas matemáticas e Jean Piaget (1896-1980) vai identificá-las com os estágios e processos de desenvolvimento da inteligência das crianças. Com o tempo, os estudos de Piaget se transformam em propostas didáticas e, no Brasil, essas aparecem formuladas por, entre outros, Zoltan Paul Dienes. Segundo Valente et al. (2016), o entendimento de Dienes é de que para a criança aprender um conceito matemático existem seis estágios e a proposta de um programa deve seguir simultânea e paralelamente quatro caminhos: algébrico, aritmético, lógico e geométrico. O trajeto designado como algébrico, é exemplificado com o ensino do sistema de numeração, o qual deveria começar pelas noções de conjuntos e o uso de diagramas. Valente et al. (2016) afirmam que no período da Matemática Moderna a Álgebra está antes da Aritmética.

O livro Matemática (Figura 14) de Quintella (s/d)[33] destinado à segunda série ginasial é dividido em três unidades. A primeira denominada Potências e Raízes; Expressões Irracionais, uma seguinte Cálculo Literal; Polinômios e a terceira Equações e Inequações do Primeiro Grau com uma Incógnita; Sistemas Lineares com Duas Incógnitas.

Figura 14 – A Matemática de Ary Quintella

[32] Nicolas Bourbaki foi o nome usado por um conjunto de matemáticos reunidos na França para apresentar trabalhos sobre a organização estrutural da Matemática (CORRY, 2009).
[33] Na primeira página do livro tem a assinatura, talvez, do primeiro dono com a data de março de 1962.



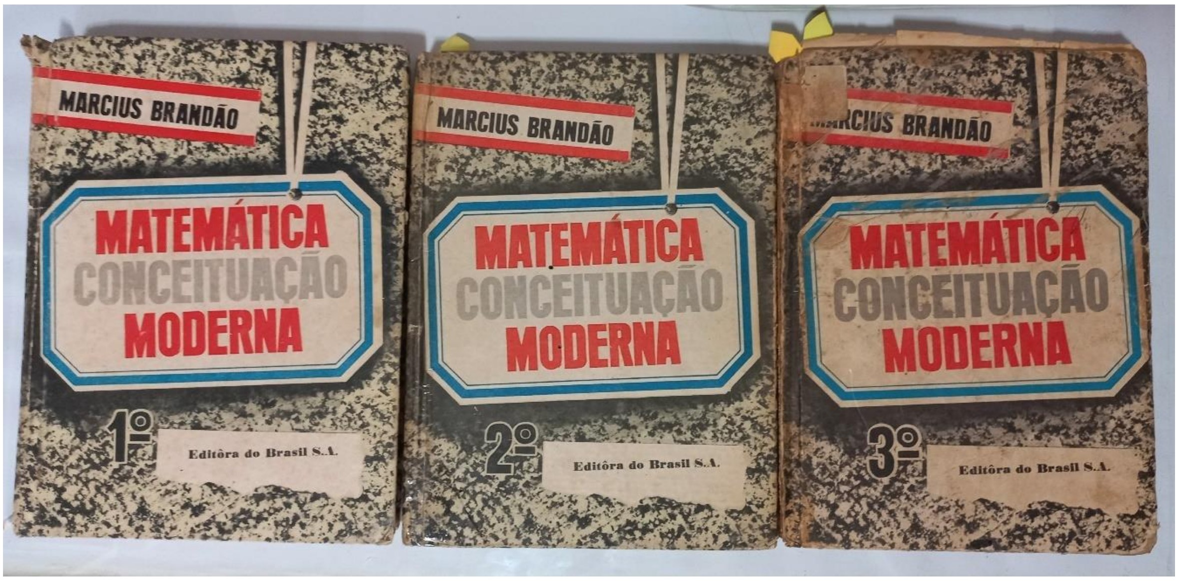
Fonte: Acervo do Autor

Na segunda unidade, o primeiro capítulo é destinado às expressões algébricas. Antes que sejam definidas tais expressões há a explicação do que sejam os símbolos algébricos e o tópico "Generalização das soluções. Fórmula (QUINTELLA, s/d, p. 45). Nesse ponto, Quintella afirma que "[...]o emprego das letras apresenta a vantagem de serem traduzidos de um modo geral os enunciados dos problemas e generalizadas as soluções". Isso lhe possibilita dar exemplos demonstrando que fórmulas podem ser utilizadas para expressar um número qualquer de dois algarismos; representar a idade de uma pessoa há cinco anos mesmo sem saber a idade dela hoje; e escrever o cálculo do valor gasto na compra de um produto, mesmo sem saber o preço do produto e a quantidade adquirida. Em seguida o autor define expressão algébrica como sendo qualquer indicação de operações com números e letras. A continuidade do capítulo explica o valor numérico, classifica as expressões algébricas, trabalha os conceitos de monômios e polinômios e trata da ordenação de um polinômio. Os demais capítulos da unidade abordam as operações com expressões algébricas, desde adição de monômios até divisão de polinômios por polinômios; fatoração de polinômios; frações literais e suas operações.

A terceira unidade, tem o seu primeiro capítulo denominado Equações do Primeiro Grau com Uma Incógnita, mas antes de defini-la apresenta os conceitos de igualdade e de identidade. Uma igualdade é um conjunto de duas expressões ligadas pelo sinal de igual, enquanto a identidade é uma igualdade para quaisquer que sejam os valores das letras das expressões, apresenta inclusive o símbolo ≡ para identidade. O conceito de equação parte da igualdade, “[...]a igualdade é uma *equação*, quando é verdadeira apenas para valores de certas letras que nela figuram e se denominam *incógnitas*. A equação é, portanto, uma igualdade *condicional*” (QUINTELLA, s/d, p. 98, itálicos no original). Seguem exemplos, o conceito de raízes, a classificação das equações e equações equivalentes, até alcançar os princípios que serão usados na resolução de equações. Uma das consequências recebem destaque ao ponto de afirmar “[...]pode-se transpor um têrmo de um membro para outro de uma equação, trocando seu sinal” (idem, p. 101). Para a resolução das equações de 1º grau são enumerados cinco passos: 1) expelir os denominadores, se houver (como consequência do 2º princípio); 2) remover os parênteses efetuando as multiplicações; 3) transpor os termos com incógnita para o 1º membro e os termos sem para o 2º; 4) reduzir os termos semelhantes em ambos os membros; e 5) dividir os membros pelo coeficiente. Na sequência são apresentadas as resoluções para equações fracionárias e literais. O capítulo dois dessa unidade trata das desigualdades e inequações, o terceiro capítulo aborda os sistemas lineares com duas incógnitas e o último capítulo trabalha com problemas do primeiro grau com uma e com duas incógnitas.

A coleção Matemática Conceituação Moderna (Figura 15), de Marcius Brandão (s/da; 1968; s/db) no primeiro volume, destinado à 1ª série ginasial, apresenta sete unidades, respectivamente: Conjunto, Conceito de Número, Sistemas de Numeração, Operações com Números Inteiros Naturais, Propriedades Elementares dos Números, Números Racionais, e Sistemas de Unidades de Medir.

Figura 15 – Coleção de Matemática dos anos 1960



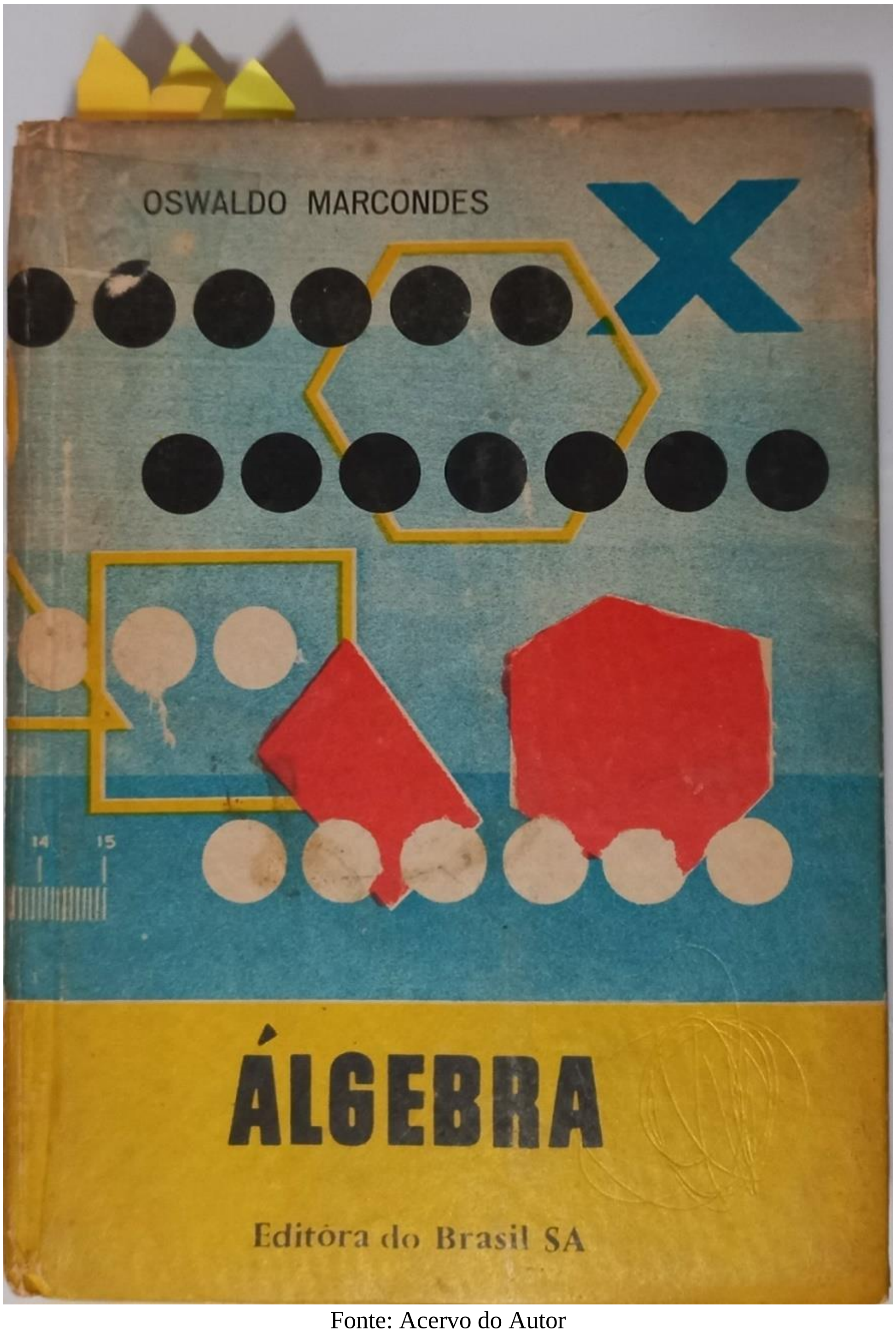
Fonte: Acervo do Autor

O volume referente à 2ª série ginasial (BRANDÃO, 1968) também apresenta sete unidades, que são nomeadas de: Razão e Proporção, Conjunto de Números Proporcionais, Grandezas Proporcionais, Números Racionais Relativos, Potências e Raízes, Equação e Inequação do Primeiro Grau, e Sistemas de Duas Equações Simultâneas com Duas Incógnitas. Cabe destacar que na sexta unidade, antes de chegar ao conceito de equação, há uma seção sobre conjunto universo e conjunto verdade que apresenta os tópicos sobre sentença declarativa, sentença aberta, conjunto-universo, conjunto-verdade e (duas) observações. Após o conceito de identidade, uma igualdade é definida como uma equação "[...]quando seu conjunto-verdade é subconjunto próprio do conjunto-universo" (BRANDÃO, 1968, p. 177). Os termos da equação, as raízes de uma equação, as equações equivalentes e os princípios de equivalência antecedem a explicação da resolução de uma equação, sendo que após o primeiro princípio de equivalência é afirmado que "[...]pode-se mudar um têrmo de um membro para outro numa equação. Para isto, suprime-se o têrmo nesse membro e escreve-se no outro, com o sinal trocado" (BRANDÃO, 1968, p. 179). A resolução de uma equação é descrita como procurar um conjunto-verdade num conjunto-universo usando os princípios de equivalência. A unidade segue tratando de problemas do primeiro grau, desigualdades e suas propriedades, inequações e suas resoluções, quantificadores, sentenças compostas aditivas e disjuntivas.

No terceiro volume de Matemática Conceituação Moderna (BRANDÃO, s/db) apresenta seis unidades. A primeira delas destinada ao estudo do conjunto dos números reais e às estruturas de grupo, de anel e de corpo. A unidade seguinte trata de cálculo algébrico e a terceira complementa o estudo das equações e sistemas. Em cálculo algébrico, antes de ser conceituada a expressão algébrica há os tópicos “Generalidade” (BRANDÃO, s/db, p. 31) e “Constante. Variável” (idem, p. 31). Em Generalidade aparecem as afirmações de que a letra é empregada como um símbolo matemático e exemplifica que $a + b + c$ indica a soma de números e que a multiplicação a x b x c pode ser escrita como abc. No tópico “Constante. Variável”, Brandão (s/db, p. 31) assevera que uma letra pode expressar um elemento de um conjunto ou que ela é uma variável indeterminada de um conjunto. E, ainda que diz que se o conjunto for unitário, então a letra é uma constante. Depois, informa que as letras iniciais do alfabeto são utilizadas para as constantes e as finais para variável, indeterminada ou incógnita. Em seguida, a expressão algébrica foi definida como uma expressão que indica operações entre números reais relativos com números e letras ou apenas com letras. A unidade continua com os tópicos valor numérico, termo algébrico, monômio, polinômio racional inteiro, operações com monômios e polinômios, fatorações e frações algébricas. As três unidades seguintes do 3º volume trabalham com Geometria.

O livro Álgebra de Marcondes (1969) (Figura 16), tem quinze capítulos cujos títulos fazem referências a números relativos, cálculo literal e polinômios, fatorações, frações, equações, inequações, sistemas de equações, problemas do primeiro grau, radicais, equações do segundo grau e as relações entre raízes e coeficientes, problemas do segundo grau, gráficos, trinômios e equações biquadradas e irracionais. Nessa obra, o segundo capítulo, aquele referente ao cálculo literal e polinômios, apresenta dois tópicos antes de definir as expressões algébricas. Inicialmente, aborda o uso de letras citando que em aritmética e geometria elas significam números, que estas substituições possibilitam a criação de fórmulas para resolver de modo simples problemas similares. O autor afirma que a expressão $a + b + c$ indica a soma de números e que a multiplicação a x b x c pode ser escrita como abc. A definição de expressão algébrica diz que “é uma expressão que indica operações entre «números relativos» representados por meio de letras e números ou sòmente letras” (MARCONDES, 1969, p. 24, grifos no original). O capítulo segue com a classificação das expressões algébricas, operações algébricas, produtos notáveis e divisão.

Figura 16 – Livro de Álgebra dos anos 1960

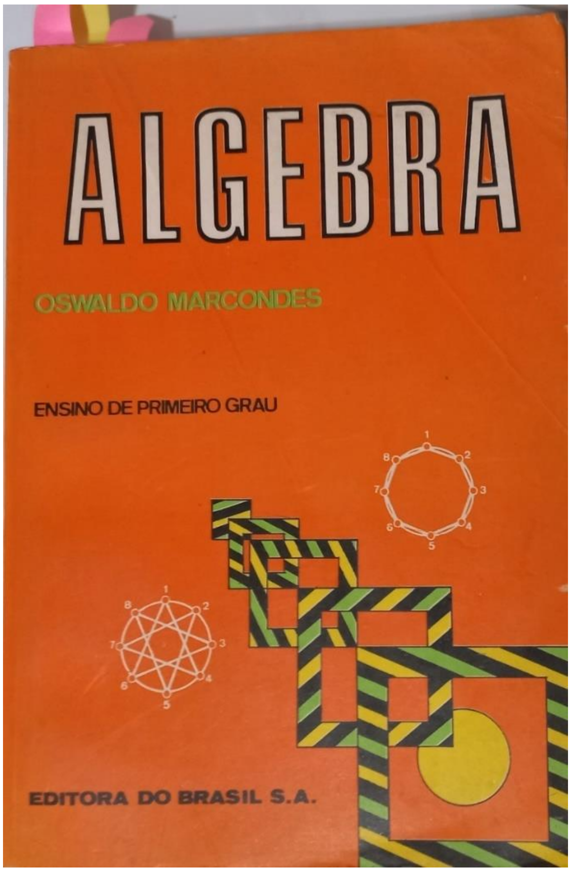


Fonte: Acervo do Autor

No quinto capítulo, antes da definição de uma equação, são dados os conceitos de identidade e identidade algébrica; a identidade como sendo uma igualdade e as identidades algébricas como aquelas que sempre se transformam em igualdades numéricas, para quaisquer valores dados às letras. A equação foi conceituada como uma igualdade entre expressões algébricas que se transformam em identidades numéricas apenas para um ou mais valores dados às letras. O capítulo prossegue com a definição das raízes, dos membros, da forma normal da escrita, do grau e da classificação das equações, e os princípios de equivalência para alcançar a explicação da resolução das equações. Há o destaque para a consequência do primeiro princípio, que afirma que “[...]pode-se mudar um têrmo de um membro para outro numa equação. Para isto, suprime-se o têrmo nesse membro e escreve-se no outro, com o sinal trocado” (MARCONDES, 1969, p. 81). Os passos para resolução das equações são descritos em quatro momentos: a) se a equação tiver termos fracionários, eliminar os denominadores pelo 2º princípio; b) isolar os termos que têm incógnita num dos membros; c) reduzir os termos semelhantes; e d) dividir os membros pelo coeficiente, novamente pelo 2º princípio.

O livro Álgebra: ensino de 1º grau de Marcondes (1975) (Figura 17), se desenvolve por oito capítulos cujos títulos fazem referências a conjuntos numéricos; expressões algébricas; conjuntos universo e verdade; sistemas de equações; radicais; equações do segundo grau; equações biquadradas e trinômios do segundo grau. Nesse compêndio, o capítulo dois, que compreende o trabalho com as expressões algébricas, apresenta três tópicos antes de definir as expressões algébricas racionais. Inicialmente, trata da utilização de letras em aritmética e geometria representando números, e que estas substituições permitem a criação de fórmulas para resolver de modo simplificado problemas semelhantes, com a vantagem da generalização. Os exemplos dados pelo autor são $5 \times a \times a \times a \times b \times b = 5a^3b^2$ e $9 \times m \times m \times x \times x \times x = 9m^2x^3$. No segundo tópico afirma que se a letra *x* pode ser de um conjunto ela será dita variável de desse conjunto, o qual será dito domínio da variável *x*. Assevera ainda que se o conjunto for unitário a letra então será chamada de constante, pois só pode assumir um valor. Retoma ainda que as letras iniciais do alfabeto são usadas como constantes e as finais como variáveis ou incógnitas. O tópico anterior às expressões algébricas racionais é sobre os termos algébricos, os quais são conceituados como um número real relativo, um produto ou um quociente de números reais relativos com o uso de números e letras ou apenas entre letras. A definição de expressão algébrica racional diz que ela é racional “[...]quando os expoentes das suas variáveis são inteiros relativos” (MARCONDES, 1975, p. 33). O capítulo segue com o trabalho com monômios, polinômios, operações, fatoração, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, expressões algébricas fracionárias e suas operações.

Figura 17 – Livro de Álgebra dos anos 1970



Fonte: Acervo do Autor

O capítulo terceiro aborda o tema das equações. Antes da definição de uma equação são dados os conceitos de sentença lógica, sentença aberta, conjunto-universo, conjunto-verdade e identidade. A equação foi conceituada como uma sentença aberta que tem o seu conjunto-verdade como subconjunto do próprio conjunto universo. O capítulo prossegue com a definição dos membros, das raízes, de equações equivalentes, da forma normal, do grau e da classificação das equações, e os princípios de equivalência para se chegar à explicação da resolução. Há novamente o destaque para a consequência do primeiro princípio que afirma que "[...]pode-se mudar um termo de um membro para outro numa equação. Para isto, suprime-se o termo nesse membro e escreve-se no outro, com o sinal trocado" (MARCONDES, 1975, p. 90). Os passos para resolução das equações são descritos em quatro momentos: a) se a equação tiver termos fracionários, eliminar os denominadores pelo 2º princípio; b) isolar os termos que têm incógnita num dos membros; c) reduzir os termos semelhantes; e d) dividir os membros pelo coeficiente, novamente pelo 2º princípio.

O período posterior à MMM, que Valente et al. (2016) denominam de Educação Matemática, tem momentos a serem destacados dentre os quais a publicação em português do livro de Morris Kline, O fracasso da Matemática Moderna, em 1976; o primeiro Encontro Nacional de Educação Matemática, em 1987; e a criação da Sociedade Brasileira de

Educação Matemática (SBEM), em 1988. Esse período é caracterizado por propostas com ênfase na resolução de problemas, valorização do sujeito que aprende, do uso da informática, do cálculo mental e aproximado, da geometria e das medidas, da probabilidade e estatística e da aritmética. Nas palavras de Valente et al. (2016, p. 40):

> Os dias presentes são herdeiros de todo esse passado da aritmética nos primeiros anos escolares. O aluno em atividade, o respeito ao desenvolvimento individual de cada aprendiz, a valorização dos conteúdos matemáticos, a resolução de problemas como lema do trabalho didático-pedagógico e tantos outros elementos reelaborados que chegam às referências atuais colocadas, por exemplo, nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Parece-nos claro que, no entendimento de Valente et al. (2016), os PCN servem como uma síntese do pensamento da Educação Matemática no período posterior à MMM.

Ainda no século passado, nos anos 1980 se encerrou a Ditadura Militar e se elaborou uma nova Constituição. Em termos educacionais fez brotar a LDBEN de 1996 e os PCN em seguida (1997/1998). Assim, até a chegada da BNCC as propostas oficiais vigentes para o ensino de Matemática estavam contidas nos PCN e se refletiam nos livros didáticos aprovados pelo PNLD, nas provas do SAEB e no ENEM.

No decorrer do tempo os livros didáticos mudaram no formato, no material, nas concepções, nas metodologias e no conteúdo. Transformações sociais, políticas e econômicas muitas vezes alteraram políticas educacionais, sistemas de ensino, currículos e, por consequência, os livros didáticos.

Nos LD, até pela busca de imposição no mercado editorial, muitas vezes se apresentam as inovações didáticas antes mesmo dos documentos oficiais. Com a BNCC não foi diferente, ela foi aprovada recentemente e os LD aprovados pelo PNLD 2019 têm de estar de acordo com suas diretrizes, entretanto, as edições aprovadas datam de 2017. Ou seja, antes mesmo de ser aprovada a BNCC[34], os livros já estavam prontos.

Nos PCN (BRASIL, 1998a, 1998b) já aparecia a sugestão de que nos anos iniciais fossem trabalhadas algumas ideias de introdução à Álgebra, mas muito timidamente, quase *en passant*. Em 2000, um grupo de pesquisadores do NCTM havia lançado o documento *Standards*[35], o qual impulsionou um movimento chamado «*Early Algebra*». A BNCC trouxe como novidade em Matemática aos anos iniciais do EF a inserção da Álgebra como um dos blocos temáticos, agora denominados unidades temáticas. Até os PCN em Matemática se vislumbravam apenas quatro blocos temáticos: Números e operações. Grandezas e Medidas, Formas e Espaço e Tratamento da Informação.

---

[34] Aprovada pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) em 15 de dezembro de 2017 e homologada pelo MEC em 20 de dezembro de 2017.

[35] "Principles and Standards for School Mathematics” (NCTM, 2000)

Ainda que difiram nos seus objetivos, PCN e BNCC são documentos oficiais que acabam por direcionar a produção dos livros didáticos. Os PCN alteraram as abordagens utilizadas nos livros didáticos desde seu surgimento em 1997, e o mesmo deve ocorrer após a BNCC. Nesse sentido, a nova geração de livros didáticos pode ser acompanhada de pesquisa para se observar em que medida sofrerão alterações, quais e em que quantidade, qual será a valoração destinada à Álgebra.

Como tentativa de melhorar a aprendizagem em Matemática, em especial em Álgebra, o MEC inseriu na BNCC a educação algébrica nos anos iniciais do ensino fundamental, conforme preconizavam os PCN (BRASIL, 1998a, 1998b) e o NTCM (2000). A intenção é um caminho mais sólido para a futura aprendizagem de Álgebra no sétimo ano, quando se inicia tradicionalmente o trabalho com incógnitas, equações e inequações; desenvolvendo intencional e sistematicamente desde cedo o pensamento algébrico.

Analisaremos os limites e as possibilidades das atividades algébricas a partir da inserção da Álgebra pela BNCC nos livros didáticos dos anos iniciais do PNLD 2019. Antes, porém, visualizaremos algumas obras estrangeiras que nos chegaram e um histórico sobre a distribuição de livros didáticos em nosso país.

3.2. A Álgebra nos Livros didáticos de outros países

Valente (1999) demonstrou a influência dos manuais franceses nos livros publicados no Brasil na chegada das aulas de Matemática no Brasil no século XIX. E, Miorim (1998) mostrou a participação dos matemáticos brasileiros no primeiro movimento internacional para modernização do ensino de Matemática ocorrido entre fins do século XIX e começo do século XX. Assim, Estados Unidos e França são países que historicamente influenciaram na nossa educação matemática. Por outro lado, somos um país que teve colonizações de diferentes povos desde portugueses, alemães e italianos. Ressaltamos ainda que nos últimos anos, com os Congressos Ibero-americanos de Educação Matemática temos recebido novas influências da península ibérica. Assim, buscamos obras desses diferentes países, de diferentes épocas. Não obtivemos êxito na obtenção de livros didáticos da Espanha e da Alemanha. Contudo, cinco livros didáticos estrangeiros nos chegaram. Desse modo, nessa seção apresentamos obras estrangeiras às quais tivemos acesso. Apresentamos aqui:

a) *Cours de Mathématiques*, de Charles de Comberousse de 1899 ;
b) *Algebra Elementare*, de Federico Boari de 1956;
c) *Elementary Algebra*, de Barnett Rich de 1960;

d) *Algebra per la Scuola Media: con elementi di statistica e geometria analitica*, de Bergna e Valentini, de 1985; e,
e) Plim: Matemática – 1° ano, de Gonçalves e Mestre de 2019.

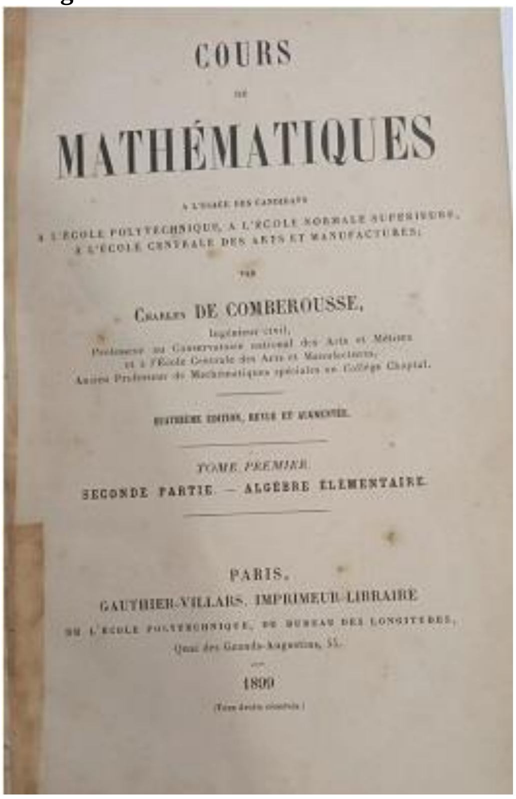
Buscamos apresentar em cada caso o primeiro contato possível do estudante com a Álgebra em cada país, em cada época. As primeiras definições de Comberousse (1899) acerca das diferenças entre a Aritmética e a Álgebra é característica de seu tempo, e perdurou muito tempo. Comberousse (1899, p. 295) escreveu sobre o objetivo da Álgebra: "[...]na Aritmética, operamos com números, ou seja, com símbolos particulares com um valor determinado; em Álgebra, usamos símbolos gerais, ou seja, letras que podem representar todos os valores possíveis"[36]. Outra afirmação que é representativa de um longo período, inclusive no Brasil é quando ele afirma que a passagem da Aritmética à Álgebra decorre da introdução dos números negativos. Os capítulos de seu livro seguem a seguinte ordem: noções preliminares, adição e subtração, multiplicação, quantidades negativas, divisão, frações algébricas, cálculo dos valores aritméticos dos radicais – expoentes fracionários e negativos, equações do 1º grau, discussão da fórmula geral de resolução de equação do 1º grau com uma incógnita, resolução de uma quantidade equações do 1º grau com igual quantidade de incógnitas [sistemas de equações lineares], formação e discussão de fórmulas gerais de equações do 1º grau, noções de teoria dos determinantes, discussão de problemas – interpretação de soluções negativas, teoria das inequações, quadrado e raiz quadrada de quantidades algébricas, resolução de equações do 2º grau com uma incógnita, propriedades das equações do 2º grau, problemas resolvidos por equações do 2º grau, equações de grau superior cuja solução se reduz ao 2º grau, sistemas de equações com muitas incógnitas com ao menos uma equação de grau maior que o primeiro, problemas que levam a sistemas de equações de grau superior ao primeiro, teoria elementar de máximo e mínimo e primeiras noções sobre o estudo das variações de funções. Depois, o livro segue com um conjunto de capítulos sobre progressões e logaritmos. As últimas 47 páginas são destinadas a problemas propostos. O primeiro desses problemas pede para encontrar dois números cuja soma é 4282 e a diferença é 1876.

No primeiro capítulo, nas suas noções preliminares Comberousse (1899, p. 298) para realçar a importância do uso das letras, apresenta a equação do movimento $e = v \times t$, também mostra a relação de igualdade entre as áreas de dois círculos e os quadrados dos valores dos seus raios. Sobre o monômio ele diz que é uma expressão algébrica na qual não

[36] No original : *En Arithmétique, on opère sur des nombres, c'est-à-dire sur des symboles particuliers ayant une valeur déterminée ; en Algèbre, on emploie des symboles généraux, c'est-à-dire des lettres qui peuvent représenter toutes les valeurs possibles*

há nem sinal de mais, nem de menos. Depois define que a soma ou a subtração entre dois monômios é chamada de polinômio, que os diferentes monômios do polinômio são ditos termos do polinômio e em seguida define trinômio. Passa por todas as operações entre monômios e polinômios, inclusive os produtos notáveis, para então chegar ao conceito de equação. Comberousse (1899, p. 365) define equação como uma igualdade que contém quantidades desconhecidas. Na figura 18, apresentamos a foto da 2ª capa do livro.

Figura 18 – Livro francês do século XIX



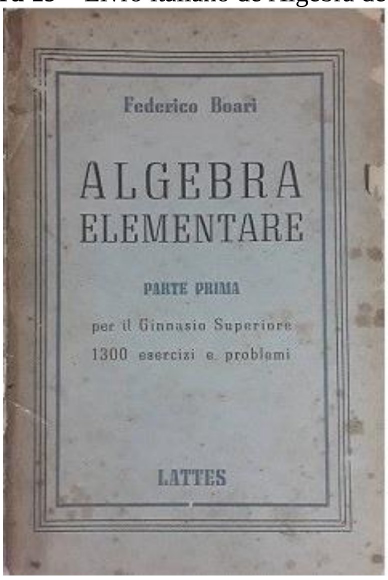
Fonte: Acervo do Autor

O livro *Algebra Elementare* de Federico Boari (1956) (Figura 19), se destinava aos alunos da escola de nível médio. No prefácio, o autor afirma que sua obra está em conformidade com o novo programa do governo, que o livro se inicia com uma revisão de Aritmética prática, pois, segundo ele, é "[...]sempre útil para lembrar aos alunos as noções tão necessárias ao estudo da Álgebra" (BOARI, 1956, p. VII). O autor afirma ainda que procurou apresentar a matéria de modo fácil, procurando eliminar dificuldades acima das possibilidades de alcance dos alunos, justificando assim a não exposição do Teorema de Ruffini.

O livro é dividido em três partes: números inteiros, números fracionários e Álgebra. A sequência dos capítulos da primeira parte da obra de Boari (1956) apresenta operações com números inteiros e divisibilidade. A parte dos números fracionários tem definições, propriedades e transformações, operações com frações, frações e números decimais e razões e proporções. A parte específica de Álgebra retoma no primeiro capítulo uma recapitulação dos números relativos, em seguida o capítulo de cálculo literal, para chegar nas equações.

A definição de expressão algébrica do autor é “[...]um conjunto de símbolos numéricos ou literais ligados entre si por sinais de operações” (BOARI, 1956, p. 45). Para equação ele designa como “[...]uma igualdade entre duas expressões se é satisfeita por valores especiais atribuídos a letras que são chamadas incógnitas, enquanto os valores a serem atribuídos a elas são chamados de soluções ou raízes da equação” (BOARI, 1956, p. 77).

Figura 19 – Livro italiano de Álgebra de 1956

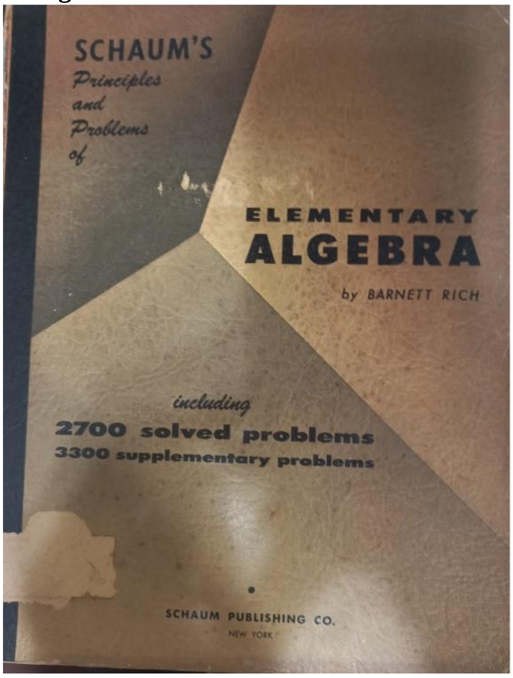


Fonte: Acervo do Autor

O último capítulo é sobre os sistemas de equações do 1º grau com várias incógnitas. Entre a página 111 e 202 estão propostos exercícios. Um dos problemas pede para calcular a idade do pai e de seus dois filhos. As informações dadas são de que o pai tem o quádruplo da idade do filho maior e esse tem o triplo da idade do irmão menor.

O livro *Elementary Algebra*, de Barnett Rich (1960) anuncia no prefácio que “[...]o aprendizado de álgebra é de importância crucial. Sem uma base sólida em álgebra, todo o trabalho subsequente em matemática fica seriamente prejudicado”. A sequência dos capítulos apresenta: da Aritmética à Álgebra, equações simples e suas soluções, números com sinais, monômios e polinômios, equações do 1º grau em uma incógnita, fórmulas, gráficos de equações lineares, equações de 1º grau com duas incógnitas, produtos notáveis, frações, raízes e radicais, equações quadráticas com uma incógnita, a variável: variação direta, inversa, conjunta e de potência, medição indireta, teorema de Pitágoras, proporções e triângulos semelhantes, trigonometria, tópicos complementares, revisando a aritmética. Na figura 20, vemos a capa do livro de Rich (1960), período marcado pelo início da MM.

Figura 20 – Livro estadunidense de 1960



Fonte: Acervo do Autor

A definição de equação em Rich (1960, p. 17) é "[...]uma igualdade na qual a incógnita ou incógnitas podem ter um valor particular ou muitos. Uma equação é uma igualdade condicional". Os exemplos de resoluções de equações apresentam o uso de operações inversas. Os exercícios não estão posicionados ao final do livro, mas sim entre as suas seções e capítulos.

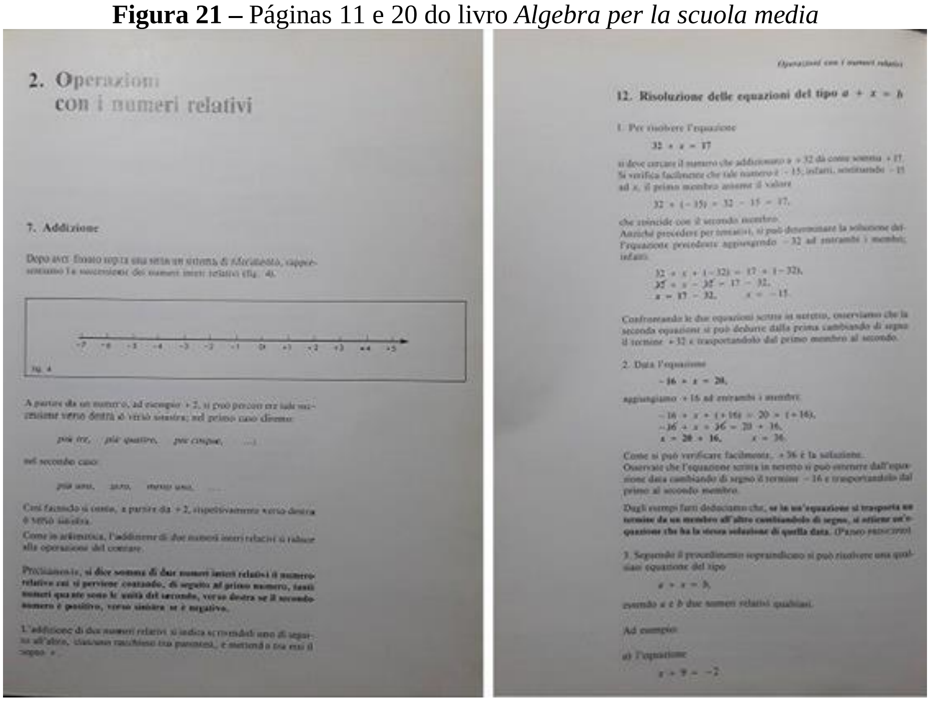
Contudo, nem todos os países passaram pelo MMM. É o caso da Itália, segundo Miorim (1998). O livro de Valentini e Bergna (1985) destinava-se à escola média, a qual tinham passado por uma reforma nos anos 1960 com as leis L. nº 685/1961 e L. nº. 1859/1962 (SCHIZZEROTTO; ABBIATI; VERGOLINI, 2018) e pelas reformas de 1979, que segundo Bussi (2001) contaram com a integração entre professores universitários e da escola básica.

A sequência de capítulos inicia com: números relativos, operações com os números relativos, plano cartesiano, elementos de cálculo literal, elementos de estatística, probabilidade, frequência relativa, e termina com: as calculadoras eletrônicas, que na verdade apresenta o funcionamento básico de um computador.

No segundo capítulo o conceito de equação surge a partir de um exemplo de uma igualdade literal sobre a qual foi testado um valor atribuído a *x*. Equação, em Valentini e

Bergna (1985, p. 19) é “[...]uma igualdade entre duas expressões que contenham a incógnita *x* que é satisfeita apenas pelo valor particular atribuído a *x*”. Na figura 21, mostramos as páginas 11 e 20, em que aparecem a introdução aos números inteiros com o trabalho na reta numerada e a resolução de equação do 1º grau, respectivamente.

Figura 21 – Páginas 11 e 20 do livro *Algebra per la scuola media*


2. Operazioni con i numeri relativi

7. Addizione

12. Risoluzione delle equazioni del tipo $a + x = b$

Fonte: Valentini e Bergna (1985, p. 11 e 20)

O livro Plim: Matemática – 1° ano, de Gonçalves e Mestre (2019), já dos tempos atuais, apesar de não ser destinado à Álgebra está inserido no *Early Algebra*. O livro se divide em 10 unidades, dessas, em nove aparecem sempre o que a nossa BNCC chama de unidades temáticas. As unidades são:

1 – Geometria e medida/ Números e operações

2 – Organização e tratamento de dados/ Números e operações

3 – Números e operações

4 – Organização e tratamento de dados/ Geometria e medida/ Números e operações

5 – Números e operações/ Geometria e medida

6 – Números e operações/ Geometria e medida

7 – Números e operações/ Organização e tratamento de dados

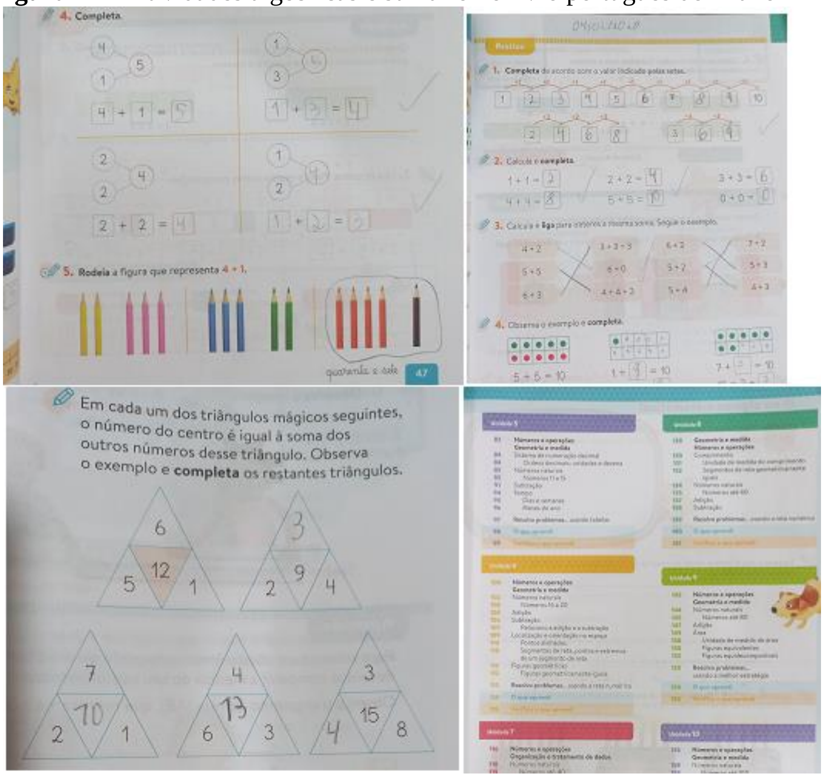
8 – Geometria e medida / Números e operações

9 – Números e operações / Geometria e medida

10 – Números e operações / Geometria e medida

Ainda que não apareça a Álgebra, podemos percebê-la nas atividades da figura 22.

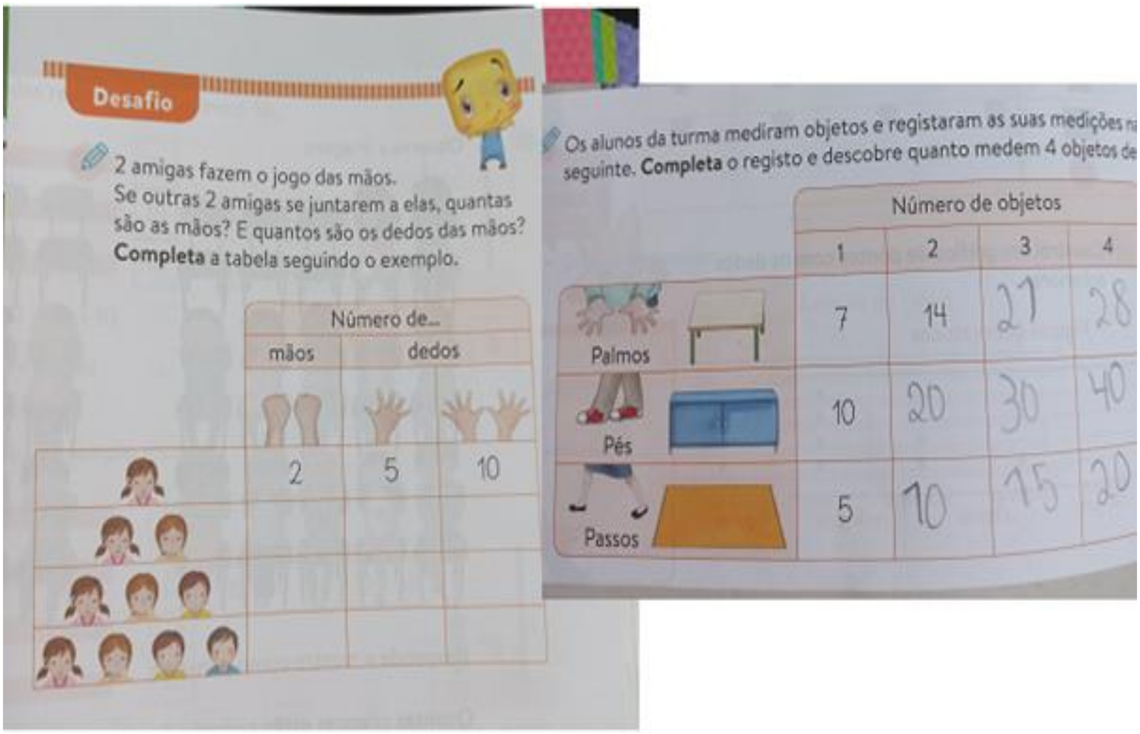
Figura 22 – Atividades algébricas e sumário no livro português de 1º ano Plim



Fonte: Gonçalves e Mestre (2016, pp. 7, 47, 57, 129)

Na figura 22, aparecem exercícios com sequência de números, outra com necessidade de descobrir a regra para preencher os valores nos triângulos e trabalha com diferentes somas que resultam num mesmo valor, ou seja, trabalha sobre as propriedades do sinal de igualdade. E, na figura 23, há também o trabalho com proporcionalidade estabelecendo relação entre grandezas. No livro português destinado às crianças do 1º ano, mesmo que não haja a palavra Álgebra, parece evidente que há um trabalho que satisfaça o desenvolvimento do pensamento algébrico seja no entendimento de AAG, seja como APF.

Figura 23 – Atividades algébricas no livro português de 1º ano Plim



Fonte: Gonçalves e Mestre (2016, p. 117 e 128)

Na próxima subseção voltamos nossa atenção ao Guia do PNLD. Para tanto, voltamos no tempo, aos primeiros programas que buscaram disseminar livros didáticos pelo país,

3.3. O Programa Nacional do Livro Didático

As origens do PNLD remontam à criação do Instituto Nacional do Livro (INL). Pelo Decreto-lei no. 93, de 21 de dezembro de 1937, ao INL competiam as atribuições que eram de responsabilidade de três diferentes seções técnicas. Para a Seção de Enciclopédia e do Dicionário cabia organizar e publicar a Enciclopédia Brasileira e o Dicionário da Língua Nacional; a Seção das Publicações tinha a designação de editar obras de interesse nacional e editar livros no país e facilitar importação de estrangeiros; e, para a Seção das Bibliotecas ficava a responsabilidade de organizar e auxiliar a manutenção de bibliotecas em todo o território brasileiro. Quanto à distribuição e destinação dos livros o artigo 6º. definia que as publicações eram destinadas gratuitamente apenas às bibliotecas públicas. Ao público em geral, as obras seriam postas à venda por preços que compensassem total ou parcialmente os custos.

Pelo Decreto-lei nº. 1.006, de 30 de dezembro de 1938, foi criada a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) que tinha seus sete membros designados pelo

Presidente da República, sendo especialistas em metodologias de idiomas (dois membros), de ciências (três membros) e de técnicas (dois membros). Esses não poderiam ter relação com editoras nem poderiam requerer autorização para livros didáticos. À Comissão cabia examinar e avaliar as obras apresentadas, estimular a produção de livros, indicar livros estrangeiros para tradução, bem como orientar suas importações, além de promover e organizar exposições das obras autorizadas.

Esse decreto afirmava a liberdade de produção e de importação de livros didáticos e os classificava em duas categorias: os compêndios, que podiam conter parte ou toda a matéria do programa escolar; e os livros de leitura de classe, os quais eram destinados ao uso dos alunos em sala de aula. Ainda sobre os livros didáticos, a lei não se aplicava aos livros do ensino superior; mesmo os livros editados pelo poder público necessitavam de autorização do Ministério da Educação; os poderes públicos na escolha não poderiam restringir nem priorizar livros. Dentre as obras autorizadas, nas escolas pré-primárias e primárias a escolha seria realizada pelos diretores e pelos professores nas escolas secundárias, normais ou profissionais. O conteúdo dos compêndios não poderia ser ditado em salas. Os livros adotados poderiam ser utilizados por vários anos, mas nunca em período inferior a um ano. Às crianças que não tivessem condições de adquirir os livros era recomendado um mecanismo de solidariedade chamado caixas escolares.

Para o requerimento de autorização do livro didático se fazia necessário que o pedido fosse realizado pelo autor, editor, vendedor ou importador junto com três exemplares impressos, ou datilografados. Se as obras fossem apresentadas datilografadas, as imagens e figuras deveriam acompanhar o exemplar, em caso de aprovação, receberiam as orientações para a impressão e posteriormente necessitaria ser reapresentado à Comissão.

As obras analisadas poderiam ser aprovadas com ou sem restrição, ou reprovadas, mas apenas com unanimidade de decisão dos membros da Comissão. Não havendo consenso, caberia recurso ao Ministro da Educação que decidiria após ouvir o Conselho Nacional de Educação. Em caso de reprovação da obra, o requerente poderia recorrer da decisão. Na condição de obra aprovada com restrição, a Comissão deveria apresentar as sugestões de alteração. Após realizadas as alterações o livro deveria ser reapresentado à Comissão.

Nas reedições de livros autorizados, se as mudanças fossem pontuais era preciso avisar a Comissão da nova edição, caso houvesse alterações significativas se fazia necessário novo requerimento de autorização. Após a aprovação pela Comissão, a obra era registrada e numerada, constando as indicações referentes e um sumário da matéria. Ao Ministério da Educação caberia a cada mês de janeiro publicar a relação das obras autorizadas segundo graus e ramos de ensino, em ordem alfabética, com a numeração, as indicações da Comissão e o sumário. Passado o processo de autorização os livros didáticos aprovados deveriam ser impressos contendo na capa o número de registro e os dizeres "Livro de uso autorizado pelo Ministério da Educação" (Art. 19).

O que poderia impedir a autorização de um livro didático eram em dois níveis: um primeiro nível em uma mistura de questões de ordem política, moral e ética; e outro nível de ordem técnica. No artigo 20, a recusa dos pedidos se daria em casos de que os livros didáticos demonstrassem: ataque à unidade, independência ou honra nacional; proselitismo ideológico ou sugestão de violência ao regime político; ofensas ao presidente, às autoridades, às instituições ou às forças armadas; desprezo das tradições nacionais ou de heróis da pátria; indução ao pessimismo relativo ao poder e ao destino da raça brasileira; propagação de superioridade ou inferioridade de pessoas de uma região do país quando comparadas às demais; incitação do ódio contra raças e nações estrangeiras; a oposição e a luta de classes; descriminação religiosa; contrariedade à instituição família; desamor à virtude, indução ao sentimento de inutilidade do esforço individual. No artigo 21, eram apresentadas as condições técnicas para a desautorização dos livros didáticos. Essas restrições diziam respeito a erros linguísticos e gramaticais, exageros de regionalismos e gírias, obscuridade do estilo, erros de natureza científica ou técnica, contrariedade a preceitos pedagógicos, desacordo com normas didáticas oficiais, impressão com poluição visual e ausência da autoria e do preço de venda. Ainda ficavam vedadas autorizações a livros destinados ao ensino primário escritos em língua estrangeira e a livros que não adotassem a ortografia estabelecida pela lei. Por outro lado, o decreto-lei impedia que qualquer livro didático fosse desautorizado por motivo de sua orientação religiosa.

Quanto à adoção de livros didáticos, professores, diretores e qualquer autoridade escolar ficavam impedidos de trabalhar, respectivamente, em suas classes, escolas e na circunscrição de sua jurisdição com as próprias obras, com exceção daquelas editadas pelos poderes públicos. Professores, diretores e autoridades escolares tampouco poderiam se tornar agentes ou representantes de autores, editores ou livreiros para venda, ou propaganda de livros didáticos. Também eram proibidas propagandas favoráveis ou contrárias aos livros didáticos dentro das escolas, entretanto ficava permitido que autores, editores e livreiros ou representantes fornecessem exemplares, circulares, prospectos ou folhetos aos professores e diretores das escolas.

Havia previsão de penalidades para autores e editores que, após a autorização dos livros didáticos, alterassem os preços sem permissão prévia da Comissão Nacional do Livro Didático, bem como aos que utilizassem uma obra não autorizada, aos que publicassem uma obra não autorizada como sendo autorizada e às instituições que não afastassem profissionais infratores. Os livros didáticos que se fizessem passar por autorizados sem terem sido deveriam ser apreendidos.

Após, a 2ª Guerra Mundial, em 1945, o Decreto-lei no. 8460 de 26 de dezembro reforçou o de 1938, pouco o alterando. A produção e a importação de livros didáticos, que não continham restrições, passaram a ser impedidas quando estes estivessem escritos parcial ou totalmente em língua estrangeira e destinados ao uso dos estudantes das escolas primárias. A CNLD passou de uma composição de sete membros com especialidades metodológicas definidas para quinze membros sem especialidades pré-determinadas, porém mantendo a necessidade de notório preparo pedagógico e reconhecido valor moral. Os membros da Comissão seguiram sendo indicados pelo Presidente da República. Dentre as atribuições da CNLD se lhe excluíram a promoção e a organização de exposições nacionais de livros didáticos. Quanto ao requerimento de autorização para livros didáticos, este que era impedido aos membros da Comissão, pela legislação de 1938, passou a ser possível e o parecer seria submetido a dois catedráticos de escolas superiores, os quais já fariam parte de uma lista elaborada para esta finalidade. Diferentemente do Decreto-lei no. 1006 de 1938, no decreto de 1945 não havia a previsão de uma decisão não-unânime da CNLD. A publicação das obras autorizadas deixava de ser no primeiro mês do ano para serem divulgadas semestralmente. E, como o Ministério da Educação passara a incluir a saúde, os dizeres obrigatórios na capa foram atualizados para “Livro de uso autorizado pelo Ministério da Educação e Saúde” (Art. 24).

Dentre as causas passíveis de reprovar autorização às obras apenas palavras e expressões foram alteradas. Se, na versão anterior, o decreto-lei impedia que o livro didático atentasse “contra o regime político adotado” (art. 20, alínea b), a versão de 1945 apresentava que não era permitido posicionamento “contra o regime democrático” (art. 26, alínea b). No trecho que tratava da indução ao pessimismo quanto ao futuro da raça brasileira, esse termo «raça brasileira» foi substituído por «povo brasileiro» e onde abordava a oposição entre classes sociais foi acrescido o termo raças, ficando, assim, as obras impedidas de incitarem ou despertarem a oposição entre classes sociais e também entre as raças. As obras que não poderiam ter a autorização negada por questões religiosas no decreto anterior, a partir de 1938 também não poderiam ser desautorizadas por questões pedagógicas. As penalidades a quem descumprisse os decretos-leis de 1938 e de 1945 estavam previstas nas disposições transitórias em ambos e de um ao outro houve somente a atualização dos valores pecuniários.

Desse modo, o país passou do surgimento do Instituto Nacional do Livro e da preocupação com a produção e importação de obras, organização e manutenção de bibliotecas para a criação de uma legislação dedicada à elaboração e utilização dos livros didáticos e de uma comissão nacional atenta especificamente à autorização das obras. Por um lado, o incentivo à produção de livros didáticos iniciada em 1937 é uma expressão da política econômica nacionalista de Getúlio Vargas, do outro lado, o impedimento de que as obras atentassem contra o «regime democrático»" em 1945 é a representação do fim do Estado Novo.

Segundo o Ministério da Educação (Portal do FNDE 2022), um acordo entre o MEC e a *United States – Agency for Development International* (*USAID*)[37] em 1966, foi que possibilitou recursos financeiros suficientes para a distribuição de 51 milhões de livros didáticos e a continuidade do programa. A coordenação da produção, edição e distribuição dos livros ficou a cargo da Comissão do Livro Técnico e Didático (Colted).

Através da Portaria no. 35 de 11 de março de 1970, visando melhorar os acervos das bibliotecas, reduzir os preços e facilitar o acesso de um maior número de leitores, o MEC estabeleceu um sistema de coedição de livros com editoras nacionais. Era vedado convênio com autores, as editoras deviam ter sede no Brasil, porém a coedição poderia envolver mais de uma editora para uma mesma obra. As editoras deveriam submeter o original à Comissão de Leitura e Aquisição de acordo com a área referente e sendo aprovado seria encaminhado à Seção de Publicações. O editor do livro preliminarmente aceito deveria encaminhar ao INL a relação de custos, tiragem, distribuição e o preço de venda. Estabelecido o convênio, a editora teria 180 dias para a publicação, o INL compraria, ao menos, um quinto da edição e esta não poderia ser inferior a 5000 exemplares. Se a iniciativa de coedição partisse do INL, essa teria prioridade sobre as propostas recebidas. As reedições deveriam passar por novo convênio. As obras publicadas deveriam expor na folha de rosto que a edição se deu por meio de convênio com o INL e, no verso da segunda capa, o preço de venda ao público. Ao INL as obras coeditadas deveriam ter 40% (quarenta por cento) de desconto sobre este preço. Para as obras que já houvessem caído em domínio público haveria um tratamento diferenciado e um estudo específico. Os convênios estabelecidos não poderiam ser transferidos de uma editora a outra. As obras de autores nacionais deveriam ter preferência no regime de coedição.

Em 1971, segundo o Portal do FNDE 2022, o INL assumiu as atribuições da Colted por meio do Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (Plidef). Com o fim do convênio MEC/USAID, as unidades federadas passaram a participar com a destinação de recursos financeiros para o Fundo do Livro Didático. Em 1976, por meio do

[37] Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional

Decreto no. 77107 de 4 de fevereiro, as atividades de edição e distribuição de livros textos passaram do INL para a Fundação Nacional do Material Escolar (FENAME), bem como os recursos do Programa de Colaboração Financeira para a Edição de Livros Textos também lhes foram transferidos. De acordo com o Portal do FNDE, assim, o governo teria assumido a compra de boa parte dos livros a serem distribuídos para escolas e Unidades da Federação. Ainda, segundo o MEC, em 1983, a FENAME foi substituída pela Fundação de Assistência ao Estudante (FAE) que incorporou o Plidef e o grupo de trabalho que estudava questões referentes aos livros didáticos propunha participação dos professores na escolha dos livros didáticos e ampliação do programa para demais séries do ensino fundamental.

No ano de 1985, por meio do Decreto no. 91542, de 19 de agosto, foi criado o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) substituindo o Plidef. Tal legislação se justificava com o propósito de melhorar o ensino de 1º grau, a necessidade de valorizar o magistério e o objetivo de reduzir os gastos familiares com educação. O PNLD se destinou a distribuir livros escolares aos estudantes das escolas públicas do 1º grau e se propunha a envolver a participação dos professores na análise e escolha das obras. A seleção deveria ser realizada por escola, série e componente curricular e respeitando as particularidades regionais. As avaliações, com o fito de aprimorar o processo seletivo, deveriam ser permanentes. A qualidade do material deveria ser tal que os livros pudessem ser reutilizáveis. Entendia-se que a reutilização deveria permitir a formação de bancos de livros didáticos. O PNLD ficava sob responsabilidade da FAE que junto com as secretarias de educação das unidades federadas, dos municípios e associações comunitárias realizariam a seleção, aquisição e distribuição das obras bem como o acompanhamento e controle. A formulação, supervisão e avaliação da política do livro didático ficaria a cargo da Secretaria de Ensino de 1º e 2º graus (SEPS) do MEC.

Segundo o Portal do FNDE, nos anos que se seguem após o surgimento do PNDL, o programa não mudaria mais de nome. Em 1992, a restrição orçamentária se refletiu no programa e a distribuição se limitou até a 4ª série do ensino de 1º grau. No ano seguinte, fixaram-se verbas suficientes para regularizar a compra e a distribuição de livros didáticos aos estudantes das escolas públicas, bem como se iniciou o estabelecimento de critérios para a avaliação das obras num consórcio entre MEC, FAE e UNESCO. A partir de 1995, voltou-se à iniciativa de universalização do atendimento a todas as séries do 1º grau e no ano seguinte foi lançado o primeiro Guia de Livros Didáticos de 1ª a 4ª série e as obras que apresentassem erros conceituais, induções a erros, desatualizações e preconceitos ou discriminações de qualquer tipo não foram aceitas. Em 1997, o programa começou a adquirir de modo sistemático “[...]livros didáticos de alfabetização, língua portuguesa, matemática, ciências, estudos sociais, história e geografia para todos os alunos" (FNDE, 2022, p.2) de todas as séries do 1º grau das escolas públicas, a FAE foi extinta, e o PNLD foi transferido para responsabilidade do FNDE.

A partir dos anos 2000 começam a ser distribuídos dicionários, livros didáticos em braile e atlas geográficos para as escolas. Ocorrem ainda as implementações do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), do Programa Nacional do Livro Didático para Alfabetização de Jovens e Adultos (PNLA EJA), do Programa Nacional do Livro Didático para a Educação de Jovens e Adultos (PNLD EJA), e do Siscort, sistema que permite registrar e controlar a distribuição, bem como realocar os livros. Outras características do período são a ampliação dos componentes curriculares atendidos pelos programas – incluindo as línguas estrangeiras, filosofia, sociologia, a preocupação com a reposição e complementação das quantidades das obras destinadas às escolas e o processo de informatização, tanto no controle, por meio do Siscort, quanto com a produção de livros em Libras no formato de *CD-Rom* e na versão *MacDaisy* para alunos surdos e a passagem do Guia de Livros Didáticos para a internet.

De modo geral, podemos dizer que o programa de distribuição de livros didáticos se desenvolveu alcançando os diferentes níveis e modalidades da educação e obteve crescente regularidade e controle. Com atenção inicial aos anos iniciais de escolarização passou a incluir todo o ensino fundamental, posteriormente o ensino médio, a educação de jovens e adultos desde a sua alfabetização e os alunos com deficiências visuais e auditivas. Atualmente, nos limites da educação básica, apenas a educação infantil não é contemplada pelo PNLD. O programa foi aperfeiçoado e teve diferentes nomes de execução. Com 85 anos, é o mais antigo dos programas voltados à distribuição de obras didáticas aos estudantes da rede pública de ensino brasileira.

3.3.1. O Edital e o Guia PNLD 2019

Pelo Edital do PNLD 2019 (BRASIL, 2018)[38], todos os livros didáticos devem respeitar leis, incluindo a Constituição, decretos, diretrizes e pareceres, num total de 25 ordenamentos jurídicos (Idem, p. 29) e a observância do respeito à ética, ao espírito democrático e republicano e às diversidades étnica, religiosa e de gênero (Idem, pp. 30-31). É também solicitado que exista "[...]coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica assumida pela obra, no que diz respeito à proposta didático-pedagógica

---

38 Disponível em https://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/consultas/editais-programas-livro/item/10521-pnld-2019 - Acessado em 25 abr 2021.

explicitada e aos objetivos visados" (Idem, p. 31), "[...]correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos" (Idem, p. 32), "[...]adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico aos objetivos didático-pedagógicos da obra" (Idem, p. 32-33), e a "[...]observância de temas contemporâneos no conjunto dos conteúdos da obra" (Idem, p.33). Além dessas exigências o Edital explicita outros 17 itens denominados [...]"outros critérios comuns" (Idem, pp.33-34), especificamente:

> a) Apresentar, de forma contextualizada, propostas e/ou sugestões para que professores e alunos acessem outras fontes de informações (...), fora dos limites do próprio livro didático;
> b) Contribuir para o desenvolvimento da autonomia de pensamento, o raciocínio crítico e a capacidade de argumentar do aluno;
> c) Propor situações-problema que estimulem a busca de reflexão antes de explicações teóricas;
> d) Propor uso de laboratórios virtuais, simuladores, vídeos, filmes e demais tecnologias da 34 informação e comunicação;
> e) Estimular a manifestação do conhecimento que o aluno já detém ao chegar à sala de aula e estabelecer nexos entre esse conhecimento e o conhecimento novo;
> f) Propor atividades que estimulem a interação entre os alunos, o convívio social, o reconhecimento da diferença junto à comunidade escolar, as famílias e a população;
> g) Abordar a diversidade da experiência humana e a pluralidade social, com respeito e interesse;
> h) Propor atividades, de campo e de visitas a museus, centros de ciências, parques zoo-botânicos, universidades, laboratórios e a outros espaços que favoreçam o processo educacional;
> i) Oferecer orientações claras e precisas sobre eventuais riscos na realização dos experimentos e atividades propostos visando a garantir a integridade física de alunos, professores e demais pessoas envolvidas no processo educacional;
> j) Aproximar gradativamente os principais processos, práticas e procedimentos de análise e investigação, por meio de propostas de atividades que estimulem observação, curiosidade, experimentação, interpretação, análise, discussões de resultados, criatividade, síntese, registros e comunicação;
> k) Inserir leituras complementares de fontes reconhecidas e atualizadas, acompanhadas de referências bibliográficas, nota de rodapé ou outras formas adequadas, que ampliem conceitos e informações e sejam, de fato, coerentes com o texto principal, evitando textos herméticos, mesmo que sejam de pensadores consagrados;
> l) Destacar discussões e renovações, mostrando-se atualizados em relação aos avanços teórico metodológicos recentes aceitos pela comunidade científica e incorporados à corrente de pensamento que for adotada pela coleção ou livro didático;
> m) Evitar reducionismos e estereótipos no tratamento das questões sociais e naturais;
> n) Apresentar e discutir as diferenças políticas, econômicas, sociais e culturais de povos e países, sem discriminar ou tratar negativamente os que não seguem o padrão hegemônico, evitando visões distorcidas da realidade e a veiculação de ideologias antropocêntricas e políticas, ou ambas;
> o) Representar a pluralidade social e cultural do Brasil, por meio de textos e ilustrações isentos de preconceitos e estereótipos em relação a gênero, idade, religião, outras regiões do país e nações do mundo;
> p) Retratar a miscigenação da população brasileira, por meio de textos e ilustrações, destacando a diversidade étnico-racial como ela existe na realidade;
> q) Promover positivamente a imagem de afrodescendentes e descendentes das etnias indígenas brasileiras, considerando sua participação em diferentes trabalhos, profissões e espaços de poder, não restringindo o seu estudo ao

> início da ocupação do território brasileiro ou a exemplos de agricultura tropical produzida com mão-de-obra escrava.

Consta no Edital a obrigatoriedade de conter o manual do professor que é composto pela parte anterior àquela dedicada aos estudantes, denominada «orientações gerais» e em formato de U ao redor do que é o livro do estudante, chamada de «orientações em curso». Nesse manual há ainda a necessidade de expressar, segundo o mesmo edital, nas orientações gerais (idem, p. 38):

> [...]visão geral da proposta desenvolvida no livro do aluno [...], a proposta teórico-metodológica adotada [...], a correspondência do conteúdo com os objetos de conhecimento e habilidades [...], a relação desses conhecimentos com os conhecimentos anteriores e posteriores [...], o referencial teórico-metodológico da proposta de avaliação [...] e a estrutura da obra.

Nas orientações em curso se exige que constem as respostas dos exercícios, orientações gerais sobre as atividades a serem trabalhadas no livro do estudante e alerta ao “professor para os pontos essenciais constantes naquela parte específica do livro, correlacionando o conteúdo proposto com o desenvolvimento das habilidades” (idem, p.38).

O Guia do PNLD 2019 apresenta em seus capítulos a sua equipe de avaliação, o porquê ler o guia, a visão sobre a Matemática, os princípios e critérios de seleção, as características gerais das coleções aprovadas e resenhas específicas sobre cada uma das coleções. Entre os critérios apresenta outros seis além dos presentes no edital do PNLD 2019 (BRASIL, 2018). Estes seis critérios são o respeito a legislação; a observância de princípios éticos e democráticos; a coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica; a correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos; adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico; e observância de temas contemporâneos e, ainda:

> - Contribui para o desenvolvimento da autonomia de pensamento, do raciocínio e da capacidade argumentativa do estudante;
> - Propõe situações-problema que estimulem a busca de reflexão do estudante;
> - Aproxima gradativamente os principais processos, práticas e procedimentos de análise e investigação, por meio de atividades que estimulem observação, curiosidade, experimentação, interpretação, análise, discussões de resultados, criatividade, síntese, registros e comunicação;
> - Estimula a manifestação de conhecimento que o estudante já detém ao chegar à sala de aula e estabelece nexos entre esses conhecimentos e o conhecimento novo;
> - Propõe atividades que estimulam a interação dos estudantes, o convívio social, o reconhecimento da diferença junto à comunidade escolar, às famílias e à população;
> - Oferece orientações claras e precisas a respeito de eventuais riscos na realização dos experimentos e atividades propostos, visando garantir a integridade física dos estudantes, professores e demais partícipes no processo educacional;
> - Apresenta, de forma contextualizada, propostas e sugestões para que o(a) professor(a) e alunos(as) acessem outras formas, fontes de informação (rádio, TV, internet etc), além do próprio livro didático;
> - Propõe o uso de laboratórios virtuais, simuladores, vídeos, filmes e demais tecnologias da informação e comunicação;

> - Propõe atividades de campo e de visitas a museus, centros de ciências, parques zoobotânicos, universidades, laboratórios e as [sic] outros espaços que favoreçam o processo educacional (BRASIL, 2018, p. 17)

Na parte referente às coleções aprovadas trata da abordagem metodológica, da exploração de recursos didáticos, da abordagem dos conteúdos matemáticos, das unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística). Na parte referente à Álgebra o texto traz pouco mais de meia página. Há ainda partes referente à exploração da coleção e tarefas complementares. A partir daí seguem-se as resenhas de cada uma das coleções. Para cada uma das coleções há uma avaliação sobre uma visão geral, o manual do professor, o livro do estudante e o manual do professor digital (BRASIL, 2018).

Os LD possuem uma parte referente ao manual do professor, nesta apresenta-se aos professores a distribuição dos objetos do conhecimento e habilidades, estabelecidos pela BNCC, que compõem cada livro referente a um dos primeiros cinco anos do ensino fundamental (figura 24).

Figura 24 – Manual do Professor com a distribuição das habilidades numa coleção

Quadros contendo as habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) previstas para cada ano

	Habilidades previstas pela BNCC para o 1º ano	Unidades do volume			
		1	2	3	4
NÚMEROS	(EF01MA01) Utilizar números naturais como indicador de quantidade ou de ordem em diferentes situações cotidianas.	X	X	X	X
	(EF01MA02) Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias como o pareamento e outros agrupamentos.	X	X	X	X
	(EF01MA03) Estimar e comparar quantidades de objetos de dois conjuntos (em torno de 20 elementos), por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois) para indicar "tem mais", "tem menos" ou "tem a mesma quantidade".	X	X	X	X
	(EF01MA04) Contar a quantidade de objetos de coleções até 100 unidades e apresentar o resultado por registros verbais e simbólicos, em situações de seu interesse, como jogos, brincadeiras, materiais da sala de aula, entre outros.	X	X	X	X
	(EF01MA05) Comparar números naturais de até duas ordens em situações cotidianas, com e sem suporte da reta numérica.	X	X	X	X
	(EF01MA06) Construir fatos fundamentais da adição e utilizá-los em procedimentos de cálculo para resolver problemas.		X	X	
	(EF01MA07) Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo.			X	X
	(EF01MA08) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.	X	X	X	X
ÁLGEBRA	(EF01MA09) Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.		X		X
	(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.	X	X	X	X
GEOMETRIA	(EF01MA11) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás.	X			
	(EF01MA12) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial.	X			X
	(EF01MA13) Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico.	X		X	X
	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.		X	X	X
GRANDEZAS E MEDIDAS	(EF01MA15) Comparar comprimentos, capacidades ou massas, utilizando termos como mais alto, mais baixo, mais comprido, mais curto, mais grosso, mais fino, mais largo, mais pesado, mais leve, cabe mais, cabe menos, entre outros, para ordenar objetos de uso cotidiano.	X	X		X
	(EF01MA16) Relatar em linguagem verbal ou não verbal sequência de acontecimentos relativos a um dia, utilizando, quando possível, os horários dos eventos.				X
	(EF01MA17) Reconhecer e relacionar períodos do dia, dias da semana e meses do ano, utilizando calendário, quando necessário.	X			X
	(EF01MA18) Produzir a escrita de uma data, apresentando o dia, o mês e o ano, e indicar o dia da semana de uma data, consultando calendários.	X			
	(EF01MA19) Reconhecer e relacionar valores de moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações simples do cotidiano do estudante.			X	

XXXI

Fonte: Santos (2017, p. XXXI)

Nas resenhas referentes às coleções por nós analisadas, observamos que à maioria delas o Guia do PNLD 2019 destaca algum ponto negativo referente à Álgebra. Sobre a coleção Aprender Juntos, o documento diz que apesar do título de algumas seções fazerem menções a habilidades algébricas, não há capítulo destinado especificamente e geralmente a Álgebra surge em capítulos destinados a unidade temática dos números, e, em menor quantidade, junto à Geometria. Sobre a coleção Ápis, o documento afirma que há pouca ênfase. Na coleção Aquarela, a leitura realizada pelo MEC foi de que nos livros do 1º ao 3º ano há menor ênfase na Álgebra do que o destinado no 4º e 5º ano. Na coleção Novo

Bem-me-quer, também aparece o termo «tímido» para qualificar o trabalho com a Álgebra. Para a coleção Eu Gosto, a avaliação lamenta que foi destinada uma menor atenção à Álgebra, e ressalta o livro destinado ao 3º ano. À coleção Ligamundo, a ressalva feita é que nos livros do 4º e 5º ano são poucas as atividades que possam desenvolver as habilidades referentes à igualdade entre dois termos. Quanto às coleções A Conquista da Matemática, Novo Pitanguá e Vem voar, só há descrição do trabalho, sem elogios ou restrições. O caso da coleção Buriti Mais é curioso, porque a resenha do Guia não cita em momento algum a Álgebra, nem críticas, nem referência de que a coleção cumpra os objetivos. A única coleção que recebeu elogios, sem alguma restrição foi a coleção Aprender e Relacionar com "[...]a Álgebra permeia o trabalho em todas as demais unidades temáticas" (BRASIL, 2018, p. 67).

Na próxima seção apresentamos os caminhos pensados e percorridos, os procedimentos metodológicos. Com base nas informações dadas pelos Manuais dos Professores pudemos realizar o levantamento de quantos capítulos ou unidades previam o trabalho com as habilidades e objetos de conhecimento referentes à Álgebra. Verificando nos capítulos, ou nas unidades, quantos desses são de fato destinadas a este trabalho com Álgebra. Isto nos permitiu averiguar parcialmente a importância dada pelos livros do 1º ano de cada coleção a esta unidade temática da BNCC. Desse modo, partiremos do que é definido pela BNCC como sendo objeto de conhecimento e de habilidades referentes à unidade temática Álgebra. Verificaremos onde se encontram esses objetos e habilidades segundo os autores dos livros e se, de fato, correspondem ou não, por completo ou parcialmente, ao que é proposto pela BNCC. Assim, teremos averiguado os limites das atividades algébricas.

Para encontrarmos as possibilidades, buscaremos ainda verificar se outras atividades a princípio relacionadas a outras unidades temáticas, a outros objetos do conhecimento e a outras habilidades não poderiam ser consideradas atividades algébricas ainda que envolvam outras concepções do que é Álgebra além das definições da BNCC. Serão as atividades propostas nos livros didáticos que analisaremos, uma a uma, nos livros de cada uma das 11 coleções aprovadas, em mais de, pelo PNLD 2019 que nos chegaram às mãos.

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nessa seção apresentamos a metodologia de investigação. A Álgebra que hoje nos chega é, por um lado, o resultado de uma longa evolução das produções humanas na área de Matemática. O veículo pelo qual ela nos chega da mesma forma. Assim, tanto a Álgebra sofreu transformações ao longo da história, quanto os próprios meios que a veiculam. As escolas têm currículos, que são determinados por documentos oficiais, os quais podem ser influenciados por pesquisas e novas descobertas. Mas, a Álgebra por meio das aulas, com os professores e professoras e os livros didáticos ou não, chegam até nós. Desse modo, documentos oficiais, currículos escolares, diários de classe, cadernos escolares, pesquisas, professores, estudantes e livros didáticos poderiam ser nossas fontes para pesquisa. Optamos por compreender a inserção da Álgebra nos anos iniciais por meio dos livros didáticos.

Assim, o nosso estudo é fruto de uma pesquisa documental na perspectiva qualitativa que se utiliza da Análise de Conteúdo a análise dos dados coletados. Fizemos a escolha por uma pesquisa documental, pois concordamos com Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009) no que concerne à riqueza de informações que podemos extrair de documentos. Ainda hoje são feitas publicações abordando a Carta de Pero Vaz de Caminha, por exemplo Lehnen (2020). Num documento escrito existem linhas e entrelinhas, portanto o espaço amostral praticamente dobra de volume. Por vezes, entrevistas podem render entre meia hora ou até três horas de conversa, mas, dificilmente, conseguiremos ler um livro no mesmo tempo, ou seja, os livros podem nos dizer muito. Se nas respostas aos questionários pode haver muito de texto, nos livros há textos e pode haver imagens.

Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009, p.2) ainda citam a questão do tempo, falando em um tipo de pesquisa que pode mostrar a maturação de pessoas, coletivos, conceitos, “[...]conhecimentos, comportamentos, mentalidades e práticas” e nenhum desses seria o nosso caso. Podemos acrescentar que na pesquisa documental o tempo está a favor do pesquisador, que durante a investigação também ele pode amadurecer ideias e perceber nos mesmos documentos algo que antes não percebera. Enfim, estamos também em acordo que:

> Quando um pesquisador utiliza documentos objetivando extrair dele informações, ele o faz investigando, examinando, usando técnicas apropriadas para seu manuseio e análise; segue etapas e procedimentos; organiza informações a serem categorizadas e posteriormente analisadas; por fim, elabora sínteses, ou seja, na realidade, as ações dos investigadores – cujos objetos são documentos – estão impregnadas de aspectos metodológicos, técnicos e analíticos (SÁ-SILVA; ALMEIDA; GUINDANI, 2009, p. 2)

A opção pela perspectiva ou enfoque qualitativo se deu pelo fato de permitir uma dinâmica mais flexível tanto no delineamento da pesquisa, quanto na formulação de perguntas e hipóteses, conforme nos mostram Yin (2016) e Sampieri, Collado e Lucio (2013).

Cabe ressaltar que nossas perguntas iniciais diziam respeito a qual Álgebra estaria se inserindo nos LD dos anos iniciais, com o andar da pesquisa pudemos aperfeiçoar nossos questionamentos transferindo a busca para as formas pelas quais a AAG e a APF estavam se expressando nas atividades dos livros didáticos. Outro aspecto positivo citado por Sampieri, Collado e Lucio (2013) é a consideração de que nesse enfoque prevalece a procura da amplitude dos dados e informações sobre as concentrações, os focos. Isso nos permitiu observar a variedade das atividades nos livros didáticos.

Bauer e Gaskell (2015, p. 27) consideram a pesquisa qualitativa como um "pesadelo didático" por apresentar "[...]pouca clareza e orientação na literatura para seus procedimentos" e, em certa medida, são apoiados por Yin (2016, p. 8) quando este afirma que "[...]ainda que uma metodologia de pesquisa qualitativa formal possa não existir". Por esses motivos e na busca de procedimentos e padrões claros, nós nos voltamos para a Análise de Conteúdo.

Para Franco (2018, p. 9) o desgaste da Análise de Conteúdo frente aos pesquisadores se deveu a "[...]confusão conceitual (...) entre questões de método, metodologia e procedimentos metodológicos". A autora não observa obstáculo que impeça a Análise de Conteúdo ser um procedimento de pesquisa que atenda aos padrões necessários de qualidade e ao mesmo tempo tenha uma abordagem metodológica crítica, que tenha a capacidade de sistematização e generalização dos dados e simultaneamente considere a atividade individual na produção do conhecimento. No plano epistemológico com dois modelos: representacional e instrumental. No modelo representacional, o analista observa o que os itens lexicais dizem independentemente do contexto. O modelo instrumental focaliza o que a mensagem carrega junto de si devido às circunstâncias e contextos. Houve também, ainda segundo a autora, divisões no plano metodológico entre a abordagens qualitativa e quantitativa.

Conforme Bardin (2016) a Análise de Conteúdo serve tanto a um estudo de caráter exploratório, quanto na busca da confirmação de hipóteses, e nesse trajeto podem emergir novos procedimentos, técnicas e hipóteses dependendo do trânsito entre as leituras sistemáticas e os retornos aos fundamentos teóricos. Nas palavras da autora "é um método muito empírico, dependendo do tipo de 'fala' a que se dedica e do tipo de interpretação que se pretende como objetivo" (BARDIN, 2016, p. 36, grifo no original). Já para Klippendorf

(1980, p. 21) a “[...]análise de conteúdo é uma técnica de pesquisa para fazer inferências de dados replicáveis e válidas para o seu contexto”[39]. Ou seja, enquanto uma técnica de pesquisa, ela é uma ferramenta com procedimentos específicos, um guia para a ação na busca do conhecimento, de uma representação dos fatos e, para ser confiável, a qualquer momento em que o mesmo estudo seja reaplicado deve oferecer idênticos resultados.

Para Sampieri, Collado e Lucio (2013) na Análise de Conteúdo os próprios pesquisadores são os instrumentos de coleta de dados, pois são eles que usando métodos e técnicas coletam os dados. No nosso caso, a partir das técnicas e métodos propostos por Bardin (2016), trabalhamos em três fases: pré-análise, exploração do material e o tratamento dos resultados.

Para a pré-análise, Bardin (2016) propõe a seleção dos documentos e a elaboração das hipóteses e objetivos, bem como a definição dos indicadores. Ressalta que as tarefas são interdependentes e não necessariamente sequenciais. Desse modo, a pré-análise é o momento de organização do trabalho vindouro, mas que ainda precisa ser precedido pelo que a autora chama de leitura flutuante, uma leitura necessária para conhecimento dos documentos a serem selecionados, do levantamento de hipóteses, objetivos, e mesmo dos indicadores. Tendo em vista nossa leitura sobre a história das disciplinas escolares (CHERVEL, 1988) e a grande produção de documentos e pesquisas recentes que tratam da «*Early Algebra*» (NCTM, 2000; BRASIL, 2017; BECK, SOUZA, 2015; BLANTON, KAPUT, 2005; KAPUT, CARRAHER, BLANTON, 2014; MALARA, 2015) buscamos averiguar nos livros didáticos como se daria essa inserção da Álgebra nos anos iniciais do EF. Ou seja, quando tratamos da história das disciplinas escolares de Chervel (1988) estamos nos baseando na possível formação de uma vulgata na atualidade. Nas vulgatas existem procedimentos e concepções educacionais semelhantes e também os livros didáticos possuem grandes similaridades.

Nossa opção pelos LD aprovados pelo PNLD 2019 (BRASIL, 2018) se deveu ao fato de esses serem os primeiros a se propor a atender aos critérios requisitados pelo MEC na implementação da BNCC com a inserção da Álgebra nos anos iniciais. Esses livros respondem às exigências de exaustividade, representatividade, homogeneidade, pertinência postas por Bardin (2016). Visto que buscamos a todas as dezesseis coleções aprovadas pelo MEC, nossa amostra de onze coleções obtidas é representativa e homogênea para o universo das dezesseis coleções aprovadas, sendo ainda, as coleções pertinentes aos objetivos propostos. Segundo o Portal do FNDE, as coleções A Aventura do Saber (E) e Odisseia (O)

[39] No original: Content analysis is a research technique for making replicate and valid inferences from data to their context.

não foram adquiridas pelo Ministério. As outras três coleções não foram possíveis de serem obtidas.

Em relação ao acesso aos livros didáticos, cabe lembrar que há um protocolo que estabelece que os livros didáticos aprovados no PNLD não podem ser vendidos. Assim sendo, entramos em contato com as editoras por *e-mail* e por telefone. Algumas nos recomendaram contatar com seus representantes na cidade de Maceió e assim procedemos. Dessa forma, obtivemos as onze coleções. Por telefonema, uma editora nos informou da impossibilidade de fornecer os livros, as outras não nos deram retorno. Para efeitos de registros, os 55 livros didáticos foram relacionados a um código alfanumérico composto por uma letra referente e um algarismo que indica o ano do ensino fundamental a que se destina o livro. Assim, por exemplo, o livro F4 vai se referir ao livro didático do 4º ano da coleção Novo Bem-me-quer da Editora do Brasil, como mostrado no quadro 9. Estarão ausentes em nossa análise as coleções correspondem àquelas que não foram negociadas com o MEC (E e O) e às que não obtivemos acesso (K, L e M).

Quadro 9 – Codificação das coleções aprovadas no PNLD 2019

Código	**Coleção**	**Autor/Editor responsável**	**Editora**
A	Aprender Juntos	Andrezza Guarsoni Rocha	SM
B	Aprender e Relacionar	Ênio Silveira	Moderna
C	Ápis	Luiz Roberto Dante	Ática
D	Aquarela	Lourisnei Fortes Reis Helena Martins Susana França Katiani Loureiro	Kit's
E	A Aventura do Saber	Iracema Mori	SEI
F	Novo Bem-me-quer	Ana Lúcia Bordeaux Cléa Rubinstein Elizabeth França Elizabeth Ogliari Vânia Miguel	do Brasil
G	Buriti Mais	Carolina Maria Toledo	Moderna
H	A Conquista da Matemática	José Ruy Giovanni Jr.	FTD
I	Eu Gosto	Ainda Ferreira Munhoz Helenalda Nazareth Marília Toledo	IBEP
J	Ligamundo	Eliane Reame	Saraiva
K	Matemática com Saladim	Eduardo Sarquis Soares Denise Alves de Araújo	Dimensão
L	Meu Livro	Antonio Nicolau Youssef Oscar Guelli Neto	AJS

M	Nosso Livro de Matemática	Antonio Lucas Carolino Pires Ivan Cruz Rodrigues Célia Maria Carolino Pires	ZAPT
N	Novo Pitanguá	Jackson Ribeiro Karina Pessôa	Moderna
O	Odisseia	Jose Roberto Bonjorno Regina de Fatima Souza Azenha Bonjorno Maria Ribeiro Soares Tania Cristina Rocha Silva Gusmão	SEI
P	Vem voar	Julio Cesar Augustus de Paula Santos	Scipione

Fonte: O Autor, adaptado de Brasil (2018)

Tendo sido estas, as coleções aprovadas, demonstradas no quadro 9, apresentamos o quadro 10 com as quantidades de livros compradas de cada coleção, bem como o valor pago pelo Governo Federal para o total de livros de cada coleção. Para ressaltar as coleções mais vendidas, as dispusemos em ordem decrescente de vendas.

Quadro 10 - Quantidade de livros e valores[40] pagos nas coleções do PNLD2019 - Matemática

Código	Coleção	Quantidade de livros	Valor por coleção
C	Ápis Matemática	3.000.908	25.259.999,54
G	Buriti Mais - Matemática	2.892.519	23.699.563,72
H	A Conquista Da Matemática	1.653.918	14.193.988,42
F	Novo Bem-Me-Quer Matemática	1.099.021	13.773.033,88
A	Aprender Juntos Matemática	1.091.928	12.160.357,41
M	Nosso Livro De Matemática	661.670	7.289.329,11
P	Vem Voar Matemática	605.142	6.972.748,39
L	Meu Livro De Matemática	582.628	6.899.447,50
N	Novo Pitanguá - Matemática	451.917	4.280.876,92
J	Ligamundo Matemática	335.748	4.571.205,71
I	Eu Gosto - Matemática	323.382	4.622.988,19
B	Ar- Aprender E Relacionar: Matemática	247.333	2.533.070,56
D	Aquarela Matemática	56.637	1.392.334,24
K	Matemática Com Saladim	54.325	2.298.229,02
Total		13.057.076	129.947.172,61

Fonte: O Autor, adaptado de Portal do FNDE

[40] Na planilha de negociação do MEC estão dispostos separadamente quantidade de livros destinados aos alunos e aos professores, aqui apresentamos as quantidades somadas, bem como os valores.

Considerando que dedicaremos atenção aos livros destinados ao primeiro ano do EF, no Quadro 11 apresentamos as quantidades e os valores referentes a esses. A sequência das coleções não se altera.

Quadro 11 - Quantidade de livros e valores[41] pagos nos livros dos 1os anos do Ensino Fundamental do PNLD2019 - Matemática

Código	Coleção	Quantidade de livros	Valor por coleção
C	Ápis Matemática	554.146	4.484.602,75
G	Buriti Mais - Matemática	519.966	3.794.879,30
H	A Conquista Da Matemática	294.856	2.078.638,94
F	Novo Bem-Me-Quer Matemática	202.601	2.199.325,03
A	Aprender Juntos Matemática	198.249	1.836.868,23
M	Nosso Livro De Matemática	123.352	1.241.840,31
P	Vem Voar Matemática	110.884	950.921,32
L	Meu Livro De Matemática	103.941	1.188.887,73
N	Novo Pitanguá - Matemática	80.907	686.893,36
J	Ligamundo Matemática	61.373	670.879,21
I	Eu Gosto - Matemática	58.500	754.491,18
B	Ar- Aprender E Relacionar: Matemática	44.430	352.322,45
D	Aquarela Matemática	9.985	233.249,95
K	Matemática Com Saladim	9.781	362.534,08
Total		2.372.971	20.836.333,84

Fonte: O Autor, adaptado do Portal do FNDE

Passada a exposição dos motivos para escolha dos documentos – LD de Matemática aprovados pelo PNLD 2019 (BRASIL, 2018) aos anos iniciais do EF – voltamo-nos agora à exposição da elaboração das nossas hipóteses e objetivos, e a definição dos indicadores. Nosso objetivo inicial era averiguar como a Álgebra tinha sido inserida nos anos iniciais do EF por meio dos LD. Nossa hipótese é de que essa inserção ocorre de acordo com a visão que têm Blanton e Kaput (2005) sobre o tratamento da Álgebra para os anos iniciais, ou seja, se subdividindo em APF ou AAG. Assim, a princípio nossas categorias de análise são essas duas formas de trabalhar a Álgebra. Mas, cabe desenvolver, como cada uma dessas possíveis categorias se apresenta nas atividades dos livros didáticos?

Para Bardin (2016, p. 137) a unidade de contexto “corresponde ao segmento da mensagem, cujas dimensões (superiores às da unidade de registro) são ótimas para que se

[41] Na planilha de negociação do MEC estão dispostos separadamente quantidade de livros destinados aos alunos e aos professores, aqui apresentamos as quantidades somadas, bem como os valores.

possa compreender o significado exato da unidade de registro". Nossas unidades de contexto serão as atividades ou exercícios propostos. Assim, com as unidades de contexto dentro dos capítulos poderemos observar com quais outras unidades temáticas a Álgebra se relaciona. Nossas unidades de registro, que nas palavras de Bardin (2016, p. 134) "é a unidade de significação codificada e corresponde ao segmento de conteúdo considerado unidade de base, visando a categorização e a contagem frequencial", serão os trechos significativos das atividades que envolvem o tema «Álgebra». Todas as coleções usam imagens na abertura dos capítulos e retiram perguntas introdutórias a partir delas. Desse modo, consideraremos estas também como atividades, mesmo quando não numeradas como exercícios e ou atividades.

Partindo desses pressupostos construímos tabelas nas quais dispomos as atividades especificando a ação solicitada, o conteúdo trabalhado, a seção na qual se inseria no livro, a página e o livro qual pertencia. Dentre as atividades que tratavam de habilidades previstas para o primeiro ano do EF encontramos nove diferentes ações, como apresentamos no Quadro 12.

Quadro 12 – Ações encontradas nas Unidades de Registro

Ação
Completar
Continuar
Identificar
Explicar
Organizar
Ordenar
Construir
Ordenar e organizar
Representar

Fonte: O Autor (2022)

Nos conteúdos trabalhados encontramos além dos previstos padrões figurais e numéricos, uma combinação de ambos, os padrões cujos quais denominamos padrões numérico-figurais, como mostra o Quadro 13.

Quadro 13 – Conteúdos nas Unidades de Registro

Conteúdo
Padrão Figural
Padrão Numérico-figural
Padrão Numérico

Fonte: O Autor (2022)

Entretanto, encontramos também atividades com habilidades não-previstas para o primeiro ano. Para essas construímos uma tabela apresentando o livro, a página, a seção e o objeto de conhecimento trabalhado.

Na próxima seção apresentamos a nossa análise dos dados. Observamos diferenças nos Manuais dos Professores entre as distintas coleções. Em seguida, descrevemos e listamos as diferentes atividades propostas nos livros didáticos que pudessem desenvolver o pensamento algébrico, seja por meio da APF ou da AAG, seja porque os autores assim assinalaram nas margens dos livros ou seja por encontrarmos vestígios de que aquelas atividades envolvem uma das habilidades descritas pela BNNC como atinentes à Álgebra.

5. ALÉM DOS PADRÕES DA BNCC

Nessa seção apresentamos a nossa análise dos dados após termos lidos todos os livros destinados aos primeiros anos do EF. Faremos distinções entre as diferentes coleções a partir da nossa leitura dos Manuais dos Professores de cada coleção. Em seguida, observaremos todas as atividades propostas nos livros didáticos que pudessem desenvolver o pensamento algébrico, seja por meio do que os autores entendem como uma possível atividade ligada a uma das habilidades descritas pela BNCC ou por meio da leitura e entendimento de APF ou AAG (BLANTON; KAPUT, 2005).

5.1. Acerca das Coleções do PNLD 2019 (ou o que elas dizem de si mesmas)

Podemos iniciar diferenciando as coleções pelos seus manuais do professor, a parte inicial dos livros. Algumas coleções apresentam todos os volumes com o mesmo manual, como a Coleção A e F. Outras mantém quase todo manual, alterando apenas a parte referente às habilidades conforme o ano ao qual se destina, por exemplo as coleções H e B. Um terceiro grupo, ainda traz os textos de apoio diferentes para cada volume, como a coleção G.

Uma outra forma de diferenciarmos as coleções pode ser observando nas referências bibliográficas quais obras trazem indicação de obras e trabalhos cujos títulos contenham os termos «Álgebra», «pensamento algébrico» ou «padrões», visto que são os novos temas obrigatórios dos anos iniciais. A esse respeito a coleção C apresenta quatro títulos, as coleções D e G trazem duas referências bibliográficas; a coleção P, uma referência, e as coleções A, B, F, H, I, J e N não fazem citação alguma a um artigo ou a um livro sobre um dos três temas. A coleção C indica o trabalho do NCTM, As ideias da Álgebra, organizado por Coxford e Shulte (1994), O romance das equações algébricas de Garbi (2006), Descobrindo padrões em mosaicos de Barbosa (2006) e Álgebra: das variáveis às equações e funções, de Souza e Diniz (s/d). A coleção D faz referência a obra As ideias da Álgebra organizado por Coxford e Shulte (1995), e Aprenda álgebra brincando de Perelman (2001) e G faz referência a Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI de Lins e Gimenez (1997), Descobrindo padrões em mosaicos de Barbosa (2001). A coleção P traz a indicação de Perspectivas em Aritmética e Álgebra pra o século XXI de Lins e Gimenez (1997).

Na figura 25, apresentamos uma composição das imagens das capas e lombadas dos livros destinados aos primeiros anos das coleções. Tanto nas capas, quanto nas lombadas, os livros foram identificados pela coleção e ano a que se destinam. Assim, os adesivos afixados nas capas e lombadas contêm os códigos A1, B1, C1, D1, F1, G1, H1, I1, J1, N1 e P1.

Figura 25 – Imagens dos livros do PNLD 2019

Fonte: Acervo do Autor

O Quadro 14, apresenta as quantidades de capítulos ou unidades que são prometidos pelos autores das onze coleções em cada uma das habilidades em cada coleção de acordo com seus respectivos manuais do professor. Podemos perceber que todas as coleções já tratam da unidade temática Álgebra. Apenas uma das coleções traz em todos seus cinco volumes dos anos iniciais uma unidade destinada para a unidade temática Álgebra. E, tão somente a Coleção G não se propôs a trabalhar a habilidade EF03MA11.

Quadro 14 - Frequência de capítulos/unidades com as habilidades de Álgebra

	Coleções											
Habilidades	**A**	**B**	**C**	**D**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**N**	**P**	**Total**
EF01MA09	1	1	2	2	1	3	5	3	3	1	2	24
EF01MA10	2	3	7	2	3	5	3	1	5	3	4	38
EF02MA09	3	2	7	1	2	4	3	1	6	1	2	32
EF02MA10	4	3	4	1	2	3	1	1	5	3	3	30
EF02MA11	3	3	5	1	2	5	2	1	6	4	4	36
EF03MA10	1	2	6	2	4	2	2	1	8	2	4	34

EF03MA11	1	1	3	1	2	-	1	1	4	1	3	18
EF04MA11	1	1	1	1	3	2	1	1	3	1	1	16
EF04MA12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
EF04MA13	2	2	2	3	2	2	2	1	5	2	1	24
EF04MA14	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	3	14
EF04MA15	3	2	3	1	2	1	3	1	6	1	2	25
EF05MA10	3	1	2	1	1	1	2	1	3	1	2	18
EF05MA11	2	1	2	1	1	1	3	1	4	2	3	21
EF05MA12	1	1	3	1	2	4	2	2	4	3	2	25
EF05MA13	1	1	2	1	1	1	1	1	3	1	3	16
Total	30	26	52	21	30	36	33	19	67	28	40	360

Fonte: O Autor (2021)

A partir do Quadro 14, observamos que cada uma das dezesseis habilidades aparece, em média, dois capítulos/unidades das coleções. A coleção J é a que apresenta maior número de vezes as habilidades referentes à Álgebra. Nela, em média, cada habilidade aparece em cerca de quatro capítulos. A coleção I é a que menor número de vezes -19 - está presente a Álgebra. A coleção G é a única a omitir uma das habilidades (EF03MA11). Em cerca de 40% (42,6%) dos casos as habilidades são abordadas apenas uma unidade/capítulo em cada coleção e em 65% dos casos em até duas unidades ou capítulos.

As habilidades EF01MA10, EF02MA11, EF03MA10, EF02MA09 e EF02MA10 são as de maior frequência, apresentadas cerca de três vezes, em média, por coleção. A habilidade EF04MA12 é a única que em todas as coleções aparece apenas em uma unidade ou capítulo.

É visível no Quadro 14 que as habilidades do 1º e 2º ano (EF01MA09, EF01MA10, EF02MA09, EF02MA10, EF02MA11) têm uma frequência maior, inclusive a EF03MA10 referente ao 3º ano. A frequência média destas é de três capítulos por coleção. Ou seja, pelos nossos registros de habilidades/capítulo observamos que as habilidades referentes à APF se fizeram mais presente visto que essas eram as habilidades cujos manuais didáticos mais apresentaram capítulos. Entretanto, para termos uma justa noção desses números e o quanto eles representam é preciso verificar quanto capítulos/unidades há em média em cada livro didático, como mostra o Quadro 15.

Quadro 15 – Quantidade de capítulos/unidades por livro

Coleção	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	Total de capítulos/unidades por coleção
A	8	8	8	8	8	40

B	10	12	10	10	10	52
C	8	8	8	8	8	40
D	4	4	4	4	4	20
F	5	12	11	10	11	49
G	8	8	8	8	8	40
H	15	9	9	9	9	51
I	11	11	10	12	10	54
J	9	9	9	9	9	45
N	8	9	10	12	11	50
P	4	4	4	4	4	20
Total	90	94	91	94	92	461

Fonte: o Autor

Agora, comparando os quadros 14 e 15 podemos perceber, por exemplo, que segundo o Manual do Professor, o livro A1 tem oito capítulos e as habilidades EF01MA09 e EF01MA10 devem aparecer apenas em um e dois capítulos, respectivamente. Da mesma forma, o livro B1 tem dez capítulos e as mesmas habilidades só devem aparecer em um e três capítulos, respectivamente.

Apenas uma das coleções de LD apresenta capítulo destinado exclusivamente para a Álgebra. Assim, nos perguntamos se nos outros capítulos não há atividade alguma que se relacionasse às habilidades algébricas, além dos apontados pelos manuais didáticos? Nem como APF, nem com a AAG? E, nas outras coleções, as habilidades algébricas se inserem em que capítulos de quais assuntos, em capítulos destinados prioritariamente aos Números, à Geometria, às Grandezas e Medidas, à Probabilidade e Estatística? Nestes capítulos onde estão as habilidades algébricas, quais são os assuntos centrais? De outro modo, em meio ao que se insere a Álgebra?

Por ora, é possível perceber que embora a Álgebra seja um dos cinco blocos temáticos propostos pela BNCC sua inserção ainda não atinge cerca de 20% do volume das obras. Assim, ainda que a Álgebra esteja presente nos livros didáticos, na maioria recebeu algum tipo de crítica por parte da avaliação do MEC constante no Guia do PNLD2019. Até o momento se confirma nossa ideia inicial de que a maior parte do trabalho com Álgebra não apenas é referente ao pensamento funcional, como a ênfase maior parece mesmo ser no trabalho com padrões.

5.2. As atividades com padrões em Livros Didáticos do 1º ano

Pela BNCC as habilidades previstas para o trabalho com Álgebra no 1º ano são a EF01MA09 – Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida – e a EF01MA10 – Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras. Aqui residem problemas já citados anteriormente. A habilidade 9 tem dois verbos «organizar e ordenar», alguns autores sentem necessidade de inserir atividades de «apenas de ordenar» ou «apenas de organizar» figuras e/ou números como parte do trabalho inicial de Álgebra, ainda que dentre as habilidades não exista tal especificidade.

Após o levantamento de todas as atividades que entendemos poderem ser atribuídas ao desenvolvimento do pensamento algébrico e/ou da linguagem algébrica, presentes nos livros didáticos destinados ao 1º ano do EF das onze coleções, elencamos os diferentes tipos de atividades encontradas. O tipo de atividade mais encontrada nos livros didáticos foi daquelas destinadas a completar sequências numéricas, como pode ser observado no Quadro 16. Todas as coleções usaram esse tipo de atividade.

Quadro 16 - Atividades de completar padrão numérico

Ação	Conteúdo	Seção	Atividade proposta	L	P
Completar	Padrão Numérico	Sequência numérica	Seguindo a sequência de números mostrada acima, complete os quadradinhos com os números que faltam em cada caso.	A1	75
Completar	Padrão Numérico	Sequência numérica	Descubra a regra de cada sequência e complete-a	A1	76
Completar	Padrão Numérico	Números até 40	Complete cada sequência com os números que faltam.	A1	123
Completar	Padrão Numérico	Mais números	Complete cada sequência de acordo com a regra de cada caso. a) 95...(+1)... b) 26...(+2)... c) 50...(+5)...	A1	134
Completar	Padrão Numérico	O número 100	Descubra a regra da sequência abaixo e complete-a com os números que estão faltando. a) pinte o caminho com todos os números da sequência acima para descobrir qual é o animal favorito de André.	A1	136
Completar	Padrão Numérico	Os números de 20 a 40	Complete a sequência de vinte a vinte e nove.	B1	106
Completar	Padrão Numérico	Números até 10	Sequências e números a) comece do zero (0) e complete a sequência de 1 em 1 até chegar	C1	50

			ao oito (8). b) agora faça o caminho inverso (do 8 ao 0)		
Completar	Padrão Numérico	Números até 10	Escreva as sequências (do 0 ao 9 e depois do 9 ao 0). a) b)	C1	52
Completar	Padrão Numérico	Vamos ver de novo?	Pense na sequência de números de 0 a 10 e complete partes dela, escrevendo os números que faltam. a) b) c) d) e) f)	C1	136
Completar	Padrão Numérico	Os números de 10 a 12	Complete a sequência numérica de 0 a 12	C1	168
Completar	Padrão Numérico	Os números de 20 a 29	Complete a sequência numérica mantendo a regularidade	C1	181
Completar	Padrão Numérico	Os números até 99 e depois o 100 (cem)	Descubra o padrão e complete a sequência	C1	193
Completar	Padrão Numérico	Mais atividades	Leia a tirinha. Complete a sequência com o número que vem imediatamente antes de 23 e com o número que vem imediatamente depois de 25.	C1	199
Completar	Padrão Numérico	Contando de 11 a 20	Complete a sequência com os números que estão faltando a) b) c) d)	D1	47
Completar	Padrão Numérico	Sequência de adições	Encontre a regra para formar a sequência e complete-a. a) b) c)	D1	90
Completar	Padrão Numérico	Completar	Siga as indicações das setas e complete os quadros com a soma ou com a diferença. a) b) c)	D1	126
Completar	Padrão Numérico	Vamos jogar	A turma do 1o. Ano participará do jogo do zoológico. Preencha os espaços do tabuleiro com os números que faltam. Recorte o dado, os peões e os animais do material de apoio (página 189). Depois, monte o dado e cole os animais no tabuleiro. Aproveite para jogar com os amigos, utilizando o dado para sortear por quantas casas cada jogador deve movimentar seu peão.	D1	157
Completar	Padrão Numérico	Sequência numérica	Ajude Bruno a completar outras tirinhas. a) b) c) d) e) f) g) h)	F1	57
Completar	Padrão Numérico	Sequência numérica	Para cada número, escreva o número que vem imediatamente antes e o que vem imediatamente depois. a) b) c) d) e) f)	F1	58
Completar	Padrão Numérico	Números de 20 a 29	Complete com os números que faltam.	F1	126

Completar	Padrão Numérico	Números de 30 a 39	Desafio. Escreva os números 25, 35, 5 e 15 no lugar certo, completando a sequência.	F1	129
Completar	Padrão Numérico	Números de 30 a 39	Complete a sequência de 0 a 39.	F1	129
Completar	Padrão Numérico	Números de 40 a 49	A trilha abaixo leva chapeuzinho até a casa do vovô. Complete com os números que faltam.	F1	130
Completar	Padrão Numérico	Números de 40 a 49	Dois amigos resolveram jogar usando o tabuleiro da página anterior [jogo de trilha]. Veja a posição dos dois antes da última jogada: complete: a) Renato estava na casa 47. A cor do marcador usado por ele era.... b) Eduardo estava na casa de número ..., e seu marcador era vermelho.	F1	131
Completar	Padrão Numérico	Números de 50 a 59	Complete a sequência.	F1	136
Completar	Padrão Numérico	Números de 50 a 59	Complete com os números que faltam.	F1	136
Completar	Padrão Numérico	Números até 100	Complete as sequências. a) b)	F1	144
Completar	Padrão Numérico	Números até 100	Complete com os números que faltam. a) b) c) d)	F1	144
Completar	Padrão Numérico	Números até 100	Em cada item, descubra uma regra e complete. a) b)	F1	144
Completar	Padrão Numérico	Números até 100	Complete as sequências. a) b)	F1	145
Completar	Padrão Numérico	Números até 100	Complete com os números que faltam. a) b) c) d)	F1	145
Completar	Padrão Numérico	Números até 100	Complete de acordo com a indicação das setas. a) +1 b) - 1	F1	145
Completar	Padrão Numérico	Sequências	Descubra quais os números estão faltando nas bolinhas de sabão e complete a sequência dos números de 0 a 10.	G1	38
Completar	Padrão Numérico	Números até 20	Descubra quais os números estão faltando nas portas e complete a sequência de números do 11 ao 20.	G1	41
Completar	Padrão Numérico	Números até 20	Complete a sequência.	G1	41
Completar	Padrão Numérico	Aprendendo mais números	Descubra o "segredo" das sequências e complete-as.	G1	100
Completar	Padrão Numérico	De dez em dez	Complete a sequência de números que você pintou	G1	104
Completar	Padrão Numérico	De dez em dez	Complete a sequência abaixo sabendo que seus números	G1	107

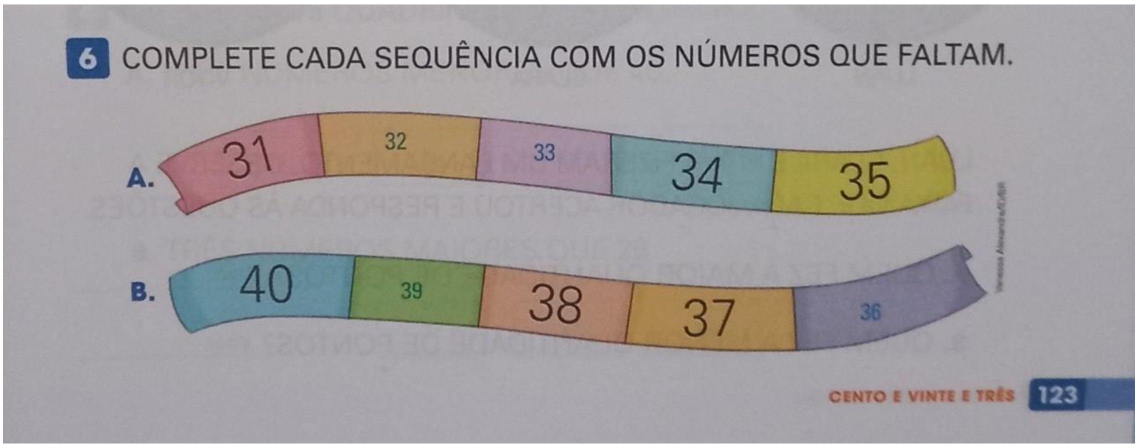
			diminuem de 10 em 10. qual é o menor número dessa sequência?		
Completar	Padrão Numérico	Números de 0 a 9	Complete as sequências numéricas (de 0 a 9)	H1	92
Completar	Padrão Numérico	Números de 0 a 9	Mariana e Lucca estão brincando de saltar casas da trilha, de uma em uma. Mariana está na casa de que número? escreva na trilha o número da próxima casa que ela deve saltar. agora, escreva na trilha o número da próxima casa que Lucca deve saltar.	H1	94
Completar	Padrão Numérico	Dez	Agora é com você. Descubra os números que estão faltando na letra da cantiga e escreva-os.	H1	128
Completar	Padrão Numérico	Quarenta	Nos balões estão faltando alguns números para completar a sequência dos números naturais de 30 a 39, indo do menor para o maior (ordem crescente). Complete os quadradinhos com o número que deve estar em cada um dos balões a seguir.	H1	150
Completar	Padrão Numérico	Quarenta	Theo foi a um acampamento de férias. Ele e seus amigos ficaram em barracas. Numere as barracas de acordo com a sequência.	H1	150
Completar	Padrão Numérico	Quarenta	Na trilha a seguir, está escrita a sequência dos números de 40 a 49, indo do menor para o maior. Alguns pinos estão encobrindo os números desta trilha. Escreva que números são esses.	H1	151
Completar	Padrão Numérico	Quarenta	Continue numerando as cadeiras do teatro.	H1	152
Completar	Padrão Numérico	Números até 50	Cada pessoa recebeu uma senha. Observe. escreva o número das senhas conforme a cor.	I1	92
Completar	Padrão Numérico	Mais atividades	Use o quadro para completar as sequências	I1	150
Completar	Padrão Numérico	Contar, comparar e registrar	Alguns alunos estão fazendo sanfonas de números até 20. Continue escrevendo os números nas partes que aparecem na sanfona de cada um deles.	J1	46
Completar	Padrão Numérico	Contar e registrar	Escreva os números que faltam nas partes que aparecem na sanfona de cada criança	J1	78
Completar	Padrão Numérico	Números até 99	Complete o esquema.	N1	109

Completar	Padrão Numérico	Comparação	No esquema os números estão organizados em certa ordem. Complete.	N1	121
Completar	Padrão Numérico	O calendário	Complete o quadro abaixo com o ano atual, o nome do mês em que você faz aniversário e os dias desse mês. Em seguida, pinte, com a cor de sua preferência, o quadradinho que representa o dia de seu aniversário.	N1	179
Completar	Padrão Numérico	Escrita dos números	Complete as sequências com os números que faltam. a) [trenzinho] b) [centopeia] c) [bandeirinhas juninas]	P1	19
Completar	Padrão Numérico	Números de 1 a 30	Complete cada sequência com os números que faltam. a) [10 a 1, hexágonos] b) [23 a 30, quadrados]	P1	51
Completar	Padrão Numérico	Sequências e padrões	Em cada item, descubra a regra e complete a sequência com os números que faltam. a) [25 a 16, 1 a 1]; b)[31 a 49, 2 a 2]; c)[50 a 5, 5 a 5]; d)[4 a 40, 4 a 4]; e) [30 a 3, 3 a 3]	P1	86
Completar	Padrão Numérico	Números de 1 a 100	Complete com o número que: a) vem imediatamente antes b) vem logo depois c) está entre os dois números	P1	102

Fonte: o Autor (2022)

Um exemplo dessas atividades de completar sequências numéricas é encontrada na página 123 do Livro A1 (ROCHA, 2017), apresentado na figura 26. Em geral, as sequências são progressões aritméticas de razão +1 ou – 1. Na atividade em questão há uma progressão crescente e uma decrescente.

Figura 26 – Atividade de completar padrão numérico



Fonte: Rocha (2017, p. 123)

Ainda que não esteja sendo solicitado «a explicitação do padrão», como requeria a habilidade EF01MA10, os autores têm considerado tal habilidade contemplada nessas atividades do Quadro 16 e da figura 26. Além dessas atividades de completar sequências de números há outras com o apoio de uma reta numerada (Quadro 23) ou de um número como referência, como no caso dos números vizinhos (Quadro 17).

Assim como as atividades de completar sequências de números nem sempre solicitavam a «explicitação do padrão», as atividades de «completar vizinhos» também não exigem. No Quadro 17 vemos essas atividades, ainda que nem sempre o verbo da atividade seja «completar», na prática é essa a tarefa posta e não há a necessidade de explicitar a regra ou o padrão. Seis coleções usam esse tipo de atividade.

Quadro 17 – Atividades de completar números vizinhos

Ação	**Conteúdo**	**Seção**	**Atividade proposta**	**L**	**P**
Completar vizinhos	Padrão Numérico	Contando até 80	Complete com os números que vêm imediatamente antes ou depois.	D1	132
Completar vizinhos	Padrão Numérico	Números de 20 a 29	Descubra o número que vem logo depois. a) b) c) d) e) f) g) h)	F1	126
Completar vizinhos	Padrão Numérico	Números de 20 a 29	Descubra o número que vem imediatamente antes. a) b) c) d) e) f) g) h)	F1	126
Completar vizinhos	Padrão Numérico	Números de 20 a 29	Complete com o número que fica entre: a) b) c) d) e) f)	F1	126
Completar vizinhos	Padrão Numérico	Números de 30 a 39	Escreva os números que vêm antes e depois. a) b) c) d) e) f) g) h) i)	F1	129
Completar vizinhos	Padrão Numérico	Números de 40 a 49	Escreva o número que fica entre: a) b) c) d) e) f)	F1	131

Completar vizinhos	Padrão Numérico	Números até 20	Agora, faça o que se pede: qual número está entre o 16 e 0 18? quais números estão entre 14 e 17? qual número está entre o 11 e o 13? qual número está entre o 18 e o 20?	G1	41
Completar vizinhos	Padrão Numérico	Números naturais de 0 a 9	Em cada folha escreva o número que vem imediatamente depois.	H1	93
Completar vizinhos	Padrão Numérico	Números naturais de 0 a 9	Em cada avião, escreva o número que vem imediatamente antes.	H1	93
Completar vizinhos	Padrão Numérico	Reta numérica	Contando de 1 em 1, quem vem antes e quem vem depois? Complete.	I1	147
Completar vizinhos	Padrão Numérico	Reta numérica	Contando de 10 em 10, quem vem antes e quem vem depois?	I1	148
Completar vizinhos	Padrão Numérico	Mais atividades	Agora, imagine a reta numérica e complete.	I1	151
Completar vizinhos	Padrão Numérico	Contar, comparar e registrar	Agora, observando a reta numérica, escreva em cada ficha a seguir o número que vem imediatamente antes e o que vem imediatamente depois de cada número colorido. Depois, pinte de azul o maior número de cada ficha.	J1	92

Fonte: O Autor (2022)

Chamamos atividades de «completar vizinhos» às atividades nas quais os alunos são requisitados a preencher espaços anteriores e posteriores a um número, indicando, assim, qual o número imediatamente anterior e qual o número imediatamente posterior a um número natural dado. Ou, dito de outro modo, chamamos atividades de «completar vizinhos» àquelas nas quais são solicitados os números naturais imediatamente menor e imediatamente maior a um número natural indicado, como mostrado na figura 27.

Figura 27 – Atividade de completar vizinhos com padrão numérico

4. COMPLETE COM OS NÚMEROS QUE VÊM IMEDIATAMENTE ANTES OU DEPOIS.

IMEDIATAMENTE ANTES	NÚMERO	IMEDIATAMENTE DEPOIS
64	65	66
70	71	72
78	79	80

Fonte: Reis et al (2018, p. 132)

Enquanto as tarefas «completar» dizem respeito a atividades nas quais os números que se pede podem ser «internos» nas sequências, as atividades de «continuar» necessariamente os números a serem inseridos na sequência são posteriores aos que já estão demonstrados nas questões (Quadro 18). Sete coleções usaram esse tipo de atividade. Tal tipo de atividade não deixa de ser um tipo específico de atividades de completar uma sequência de números.

Quadro 18 – Atividades de continuar padrões numéricos

Ação	Conteúdo	Seção	Atividade proposta	L	P
Continuar	Padrão Numérico	Números até 20	Imagine que o sapo estava na pedra de número 1 e vai atravessar o lago saltando de 2 em 2 pedras. Continue o percurso, marcando com um x as pedras em que o sapo vai pisar para chegar ao outro lado.	A1	84
Continuar	Padrão Numérico	O número 100	Complete a contagem regressiva para o lançamento desse foguete. 10, 9, 8, 7, ..., ..., ..., ..., ..., ..., ...	B1	65
Continuar	Padrão Numérico	Contando até 100	A professora fez uma brincadeira de pular corda: os alunos devem pular e contar do 50 para frente, de 5 em 5, em voz alta e seguir pulando até 90 sem errar. Escreva a sequência de números que esses alunos deverão falar em voz alta para participar da brincadeira.	D1	154

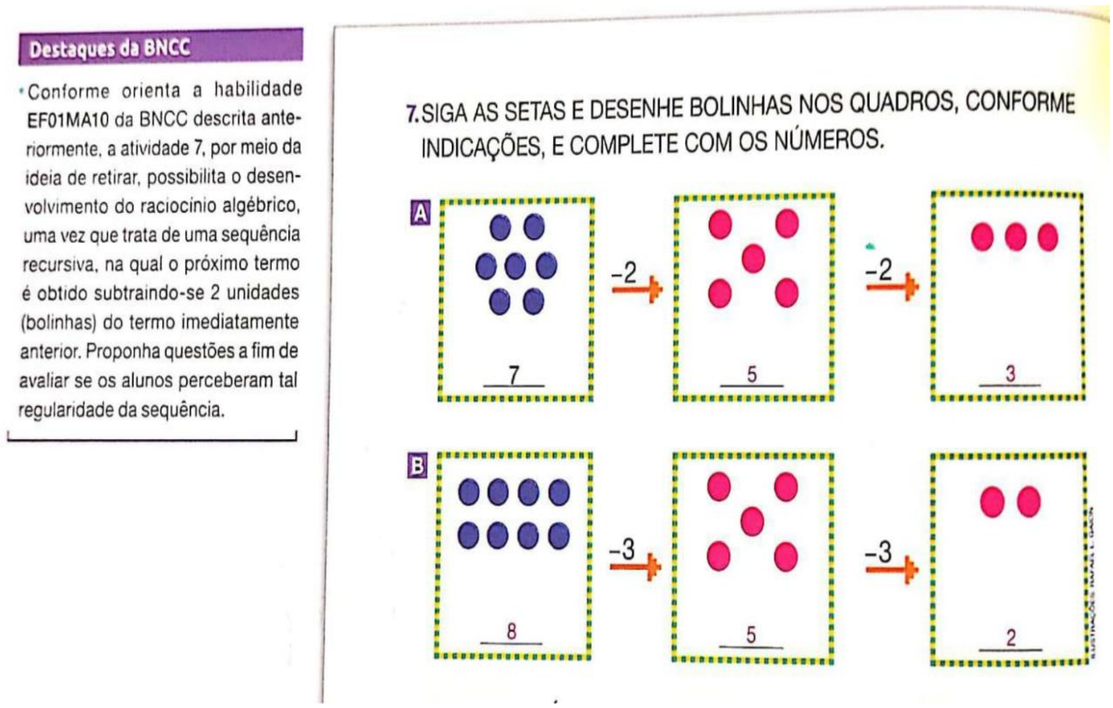
Continuar	Padrão Numérico	Números de 40 a 49	Desafio. Se o tabuleiro tivesse mais uma casa, que número seria?	F1	131
Continuar	Padrão Numérico	Números de 50 a 59	Em cada item, descubra uma regra e complete. a) b)	F1	136
Continuar	Padrão Numérico	De dez em dez	Qual é o esporte que Rodolfo pratica? Marque com um x. Para saber, sempre acrescente 10, partindo do 0 (zero), e pinte os números que descobrir. agora,	G1	104
Continuar	Padrão Numérico	Contar e registrar	Descubra a regra usada para formar a sequência de números. Depois, escreva os quatro próximos números.	J1	78
Continuar	Padrão Numérico	Contar e calcular	As meninas estão pulando corda e contando os pulos de 1 em 1. Complete a contagem das meninas. a) b) c)	J1	130
Continuar	Padrão Numérico	Contar e calcular	Tales está brincando de andar de costas. Ele escolheu um número e conta para trás os passos que dá, de 1 em 1. Complete cada contagem de passos de Tales. a) b) c)	J1	130
Continuar	Padrão Numérico	Contar e calcular	Descubra a regra de cada sequência e escreva os números que faltam. a) b)	J1	153
Continuar	Padrão Numérico	Estudando a adição	Efetue os cálculos e complete de acordo com a indicação.	N1	70
Continuar	Padrão Numérico	Estudando a subtração	Siga as setas e desenhe bolinhas nos quadros, conforme indicações, e complete com os números.	N1	76
Continuar	Padrão Numérico	Ler e entender	Complete a sequência escrevendo os números até 10.	P1	35
Continuar	Padrão Numérico	Rever ideias	Imagine que a Peg vai continuar a contar de 1 em 1 até 10. Complete a contagem abaixo.	P1	37
Continuar	Padrão Numérico	Números de 1 a 100	Numere os 5 vagões do trem seguindo a sequência dos números, do menor para o maior, começando	P1	103

			pelo 27. Depois, faça o que se pede.		

Fonte: O Autor (2022)

Os autores de livros reconhecem os exercícios de continuar sequências de números como satisfazendo a habilidade EF01MA10, mesmo que não seja exigido explicitar o padrão ou a regularidade. As figuras 28 e 29 apresentam essa opção. Na atividade da figura 28 os autores Ribeiro e Pessoa (2017, p.76) consideram a atividade satisfazendo a habilidade 10, já na atividade semelhante na figura 29, os autores do mesmo livro (N1) não citam a habilidade 10.

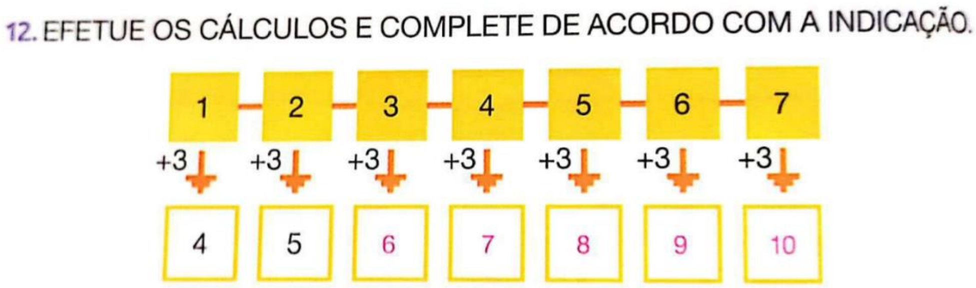
Figura 28 – Atividade de continuar padrão numérico (com reconhecimento)



Fonte: Ribeiro e Pessoa (2017, p. 76)

Semelhante à atividade mostrada na figura 28, a atividade da figura 29 também pede a continuidade da sequência, indicando os valores a serem subtraídos, mas os autores do livro N1 não citaram que a habilidade 10 estava sendo contemplada.

Figura 29– Atividade de continuar padrão numérico (sem reconhecimento)



Fonte: Ribeiro e Pessoa (2017, p. 70)

Dentro do trabalho com padrões numéricos há possibilidade de construir, explicar, identificar e ordenar sequências numéricas, são as atividades que apresentamos no Quadro 19. Construir aqui, usamos no sentido de o aluno precisar elaborar uma sequência com determinado padrão numérico por ele idealizado. Atividades de explicar são aquelas referentes às que requisitam a explicitação dos padrões numéricos. As atividades de identificar são aquelas que solicitam que o aluno identifique ou elemento da sequência a seguir ou identifiquem a própria sequência.

Quadro 19 – Atividades com padrões numéricos

Ação	Conteúdo	Seção	Atividade proposta	L	P
Construir	Padrão Numérico	Sequências e padrões	Agora é a sua vez! Pense em uma regra e escreva uma sequência numérica obedecendo a essa regra. Troque de livro com um colega para que ele descubra a regra da sequência que você criou.	P1	86
Explicar	Padrão Numérico	Sequências	Como você descobriu os números que estavam faltando nessa sequência?	G1	38
Identificar	Padrão numérico	Sequência numérica	Para descobrir aonde Fabiana está indo, pinte o caminho em que os números estão organizados do maior número para o menor número.	A1	76
Identificar	Padrão numérico	Números até 20	Marque com um x o intruso em cada sequência	A1	89
Identificar	Padrão numérico	Os números de 20 a 29	Os alunos da turma de André foram ao parque de diversões. Eles se divertiram muito nestes três brinquedos. De qual brinquedo André gostou mais? Descubra pintando os quadrinhos que formam a sequência de 1 a 20. Depois, contorne o brinquedo.	C1	182

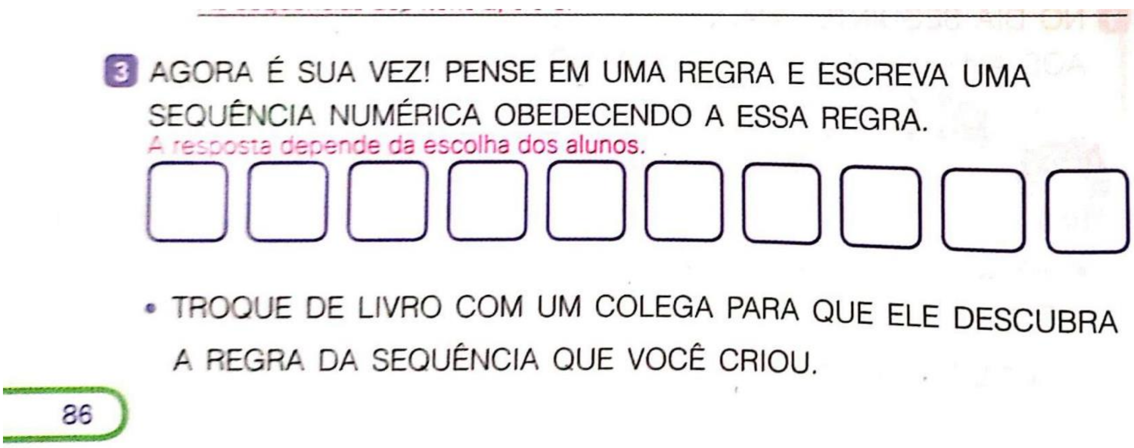
Identificar	Padrão Numérico	Números de 1 a 20	Que número aparece: a) entre as casas 9 e 11? b) entre as casas 12 e 14? c) duas casas depois da casa 10?	F1	111
Identificar	Padrão Numérico	Mais adições	Observe o calendário abaixo e faça o que se pede. Marque o número que está entre 27 e 29.	G1	43
Identificar	Padrão Numérico	Mais adições	Observe o calendário abaixo e faça o que se pede. Marque o número que está entre 27 e 29.	G1	59
Identificar	Padrão numérico	Números de 0 a 9	Pinte o caminho com a sequência dos números de 9 a 0 para descobrir aonde juliana vai. aonde juliana vai? qual é o primeiro número da sequência por onde juliana vai passar. qual é o último número que juliana deve passar para chegar ao seu destino? leia em voz alta a sequência dos números desse caminho.	H1	95
Identificar	Padrão numérico	Sequências	Leve a gata até seu filhote pelo caminho em que os números estão em ordem crescente	N1	52
Identificar	Padrão Numérico	O número 100	De acordo com as informações, trace o caminho de cada explorador e leve-os até o baú. a) comece pelo 10 e adicione 1 dezena para o número seguinte. b) comece pelo 100 e subtraia 1 unidade para o número seguinte. c) comece pelo 84 e adicione 1 unidade para o número seguinte. d) comece pelo 100 e subtraia 1 dezena para o número seguinte.	N1	117
Identificar	Padrão Numérico	Sequências e padrões	Observe os itens acima e responda. a) quais sequências vão do menor número para o maior? b) quais sequências vão do maior para o menor número?	P1	86
Identificar	Padrão Numérico	Números de 1 a 70	Agora, faça o que se pede. a) escreva todos os números que estão entre 50 e 70. d) escreva todos os números terminados em 5 que estão entre 1 e 70	P1	91
Identificar	Padrão Numérico	Jogos e brincadeiras	Sequência misteriosa. Um dos jogadores fala uma sequência de 10 números, de acordo om uma regra, mas em algum momento ele erra de propósito	P1	124

			um número da sequência. Os outros jogadores devem descobrir o erro. Se o erro for descoberto, o jogador que falou a sequência é eliminado, e o outro jogador deve falar uma nova sequência, mas, se o erro não for descoberto, o jogador que falou a sequência é o vencedor. Pensando sobre o jogo. c) no desafio sequência misteriosa foram faladas as sequências abaixo. Marque com um x o erro em cada uma delas. [4 sequências]		
Ordenar	Padrão Numérico	Números em ordem crescente ou decrescente	Observe novamente o jogo da cena de abertura da unidade 2. c) agora, escreva os números que aparecem nesse jogo na ordem do menor para o maior e do maior para o menor.	C1	72
Ordenar	Padrão Numérico	Sequência numérica	Estas fichas estão todas misturadas. a) pinte de vermelho os números menores que 5. b) pinte de azul os números maiores que 5. c) agora arrume as fichas do número maior para o menor.	F1	58

Fonte: O Autor (2022)

Essas atividades registradas no Quadro 19 são as que apresentamos nas figuras 30, 31 e 32 apesar de elas não utilizarem nenhum verbo daqueles utilizados nas habilidades 9 ou 10. Os verbos construir e elaborar não fazem parte das habilidades 9 e 10, os verbos explicar, identificar não estão constando nessas habilidades. São atividades que têm esses sentidos que apresentamos nas figuras 30, 31 e 32.

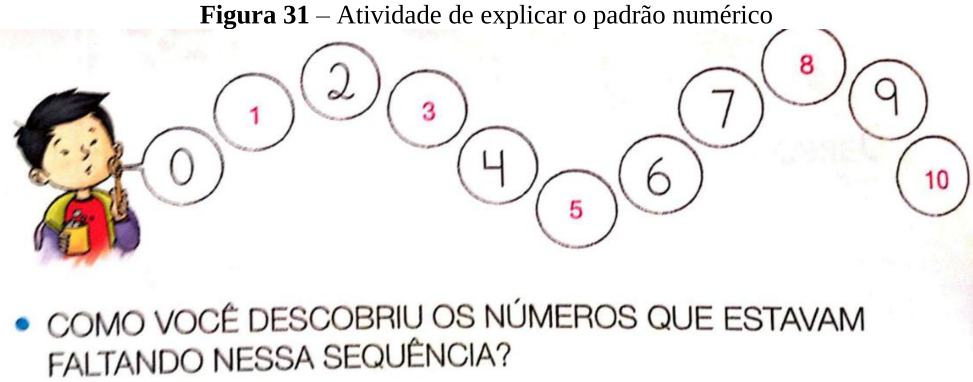
Figura 30 – Atividade de construir padrão numérico



Fonte: Santos (2017, p. 86)

Na atividade da figura 31, após a atividade anterior, no livro, solicitar que completasse a sequência, a atividade pede que o aluno explique como descobriu os números ausentes, ou seja, pede que o aluno explicite o padrão numérico existente na sequência.

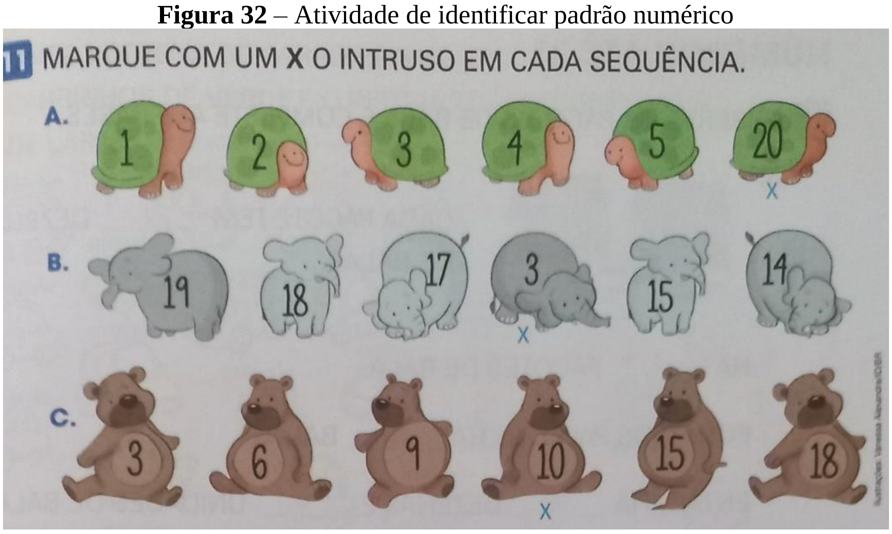
Figura 31 – Atividade de explicar o padrão numérico



Fonte: Toledo (2017, p. 38)

Na atividade da figura 32, do livro A1, há uma sequência estabelecida e um elemento que não deveria estar presente e, assim, é solicitado ao aluno que identifique o elemento «intruso». Ou seja, é preciso que o aluno entenda o padrão, reconheça-o, e a partir de então encontre o elemento numérico, apesar das figuras, que não corresponde a esse padrão e que, portanto, não poderia estar presente na sequência. Ressaltamos que, apesar da presença das figuras, elas não interferem no fato de que as sequências em questão sejam numéricas e não fazem parte de um padrão figural ou geométrico. Tal fato tanto é verdadeiro, que as figuras poderiam ser outras que não interfeririam no elemento a ser marcado, o que determina a atividade se dá sobre os números e não sobre as figuras, meramente ilustrativas nesse caso.

Figura 32 – Atividade de identificar padrão numérico



Fonte: Rocha (2017, p. 89)

Depois de apresentarmos o trabalho com os padrões numéricos, iniciamos a demonstração das atividades que os livros apresentam com padrões figurais. Preferimos nos referir a «figurais» ao invés de geométricos, pois há questões em que é solicitado aos estudantes que pintem figuras. Desse modo, nos parece mais amplo falar em padrões figurais do que em padrões geométricos. Os quadros que seguem apresentam essas propostas de trabalho. O Quadro 20 apresenta o tipo de atividade mais frequente com padrões figurais. Oito coleções usaram esse tipo de atividade.

Quadro 20 – Atividades de completar padrões figurais

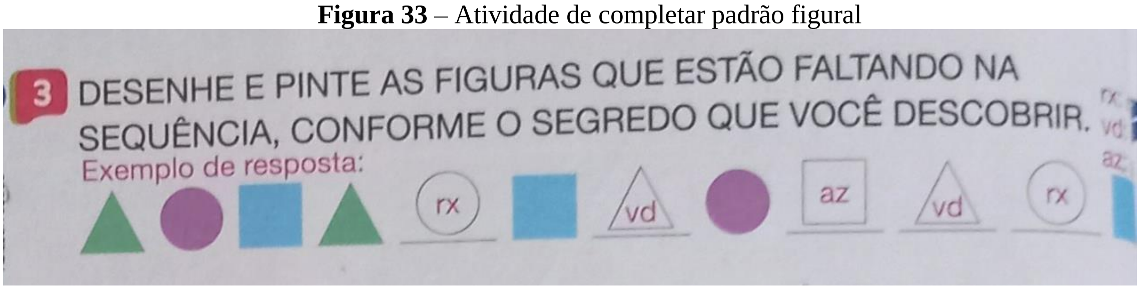
Ação	Conteúdo	Seção	Atividade proposta	L	P
Completar	Padrão Figural	Sequência	Desenhe e pinte as figuras que estão faltando na sequência, conforme o segredo que você descobrir.	B1	28
Completar	Padrão Figural	Sequência	Maria e Joana estão fazendo pulseiras. Descubra o padrão, desenhe e pinte as formas respeitando a sequência das cores, ajudando a fazer uma pulseira para as meninas.	D1	52
Completar	Padrão Figural	Sequência	Pinte os quadradinhos de acordo com o padrão estabelecido.	D1	53
Completar	Padrão Figural	Sequências geométricas	Observe o padrão de figuras e cores no quadro a seguir. Depois, preencha os espaços com as figuras corretas.	D1	113
Completar	Padrão Figural	Sequências	Descubra o segredo de cada sequência e desenhe a figura que completa cada uma. a) b) c)	F1	25
Completar	Padrão Figural	Sequências	Descubra uma regra em cada sequência e desenhe a figura que está faltando. a) b)	F1	25
Completar	Padrão Figural	O número 3	Descubra a regra de cada sequência e complete-a.	F1	36
Completar	Padrão Figural	Números até 20	Depois, pinte de acordo com o padrão.	G1	41
Completar	Padrão Figural	Classificação e sequências	Desenhe as figuras que estão faltando em cada sequência. a) b)	H1	54
Completar	Padrão Figural	Classificação e sequências	Observe as bandeirinhas desta ilustração. agora, pinte	H1	55

			as bandeirinhas com a mesma sequência de cores da ilustração acima.		
Completar	Padrão Figural	Classificação e sequências	Desenhe o que falta na última figura de cada sequência.	H1	55
Completar	Padrão Figural	Sequências	Observe as sequências e descubra o segredo de cada uma delas. Depois, desenhe. a) b)	I1	27
Completar	Padrão Figural	Mais atividades	Descubra o segredo e pinte as figuras. a) b) c)	I1	32
Completar	Padrão Figural	Padrões geométricos	Descubra a regra usada para desenhar cada sequência de figuras geométricas. Depois, desenhe a próxima figura em cada uma das sequências a seguir;	J1	65
Completar	Padrão Figural	Contar e registra	Conte de 1 em 1 e complete os espaços indicados na reta numérica até 50.	J1	78
Completar	Padrão Figural	Cabe mais, cabe menos	Desenhe uma linha em volta do novelo que Eduardo deverá colocar após o 1o. (primeiro) novelo.	J1	147
Completar	Padrão Figural	Sequências e padrões	Descubra a regra de cada item e continue colorindo as figuras. a) [triângulos azuis e verdes] b) [quadrados em cruz vermelhos e amarelos]	P1	87
Completar	Padrão Figural	Sequências e padrões	Complete o tabuleiro ao lado desenhando as figuras que faltam.	P1	87

Fonte: O Autor (2022)

Como aconteceu com o trabalho de padrões numéricos, nas atividades com os padrões figurais também um dos modos mais frequentes de aparecer o trabalho com atividades de «completar» como observamos no Quadro 20 e um exemplo desse tipo de atividade está na figura 33.

Figura 33 – Atividade de completar padrão figural



Fonte: Silveira (2017, p. 28)

Um dos tipos de atividade mais proposta pelos livros didáticos para os padrões figurais é, assim como no trabalho com padrões numéricos, de continuar as sequências (Quadro 21), ou seja, um tipo específico de atividade de completar padrões figurais, apenas com a diferença de que não há elementos «interiores» à sequência, os elementos ausentes na sequência são após o estabelecimento do padrão. Nove coleções usaram esse tipo de atividade.

Quadro 21 – Atividades de continuar padrões figurais

Ação	Conteúdo	Seção	Atividade proposta	L	P
Continuar	Padrão Figural	Padrões	A pintura desse tabuleiro do jogo de damas apresenta um padrão: preto, branco, preto, branco... Continue pintando o tabuleiro abaixo de acordo com esse padrão.	A1	104
Continuar	Padrão Figural	Padrões	Observe a sequência das figuras abaixo. essa sequência de figuras apresenta um padrão. Azul, vermelha, azul, vermelha... Se essa sequência tivesse mais uma figura do lado direito, de que cor ela seria?	A1	105
Continuar	Padrão Figural	Padrões	Em cada caso, continue pintando as figuras de acordo com o padrão.	A1	105
Continuar	Padrão Figural	Aprender sempre	Maíra está fazendo uma faixa para decorar o caderno. Continue seguindo o padrão e termine de pintar a faixa.	A1	119
Continuar	Padrão Figural	Sequência	Pinte os quadrinhos seguindo a sequência	B1	28
Continuar	Padrão Figural	Sequência	Mário está organizando uma festa junina. Descubra o segredo da sequência de cores das bandeirinhas e continue pintando-as conforme esse segredo.	B1	28
Continuar	Padrão Figural	Sequência	Em cada caso descubra um segredo e, depois, desenhe e pinte as seis figurinhas de cada sequência. a) b) c)	B1	28
Continuar	Padrão Figural	Sequências e padrões	Observe como começou cada sequência. Descubra um padrão (ou regularidade) e continue pintando usando o mesmo padrão. Depois,	C1	23

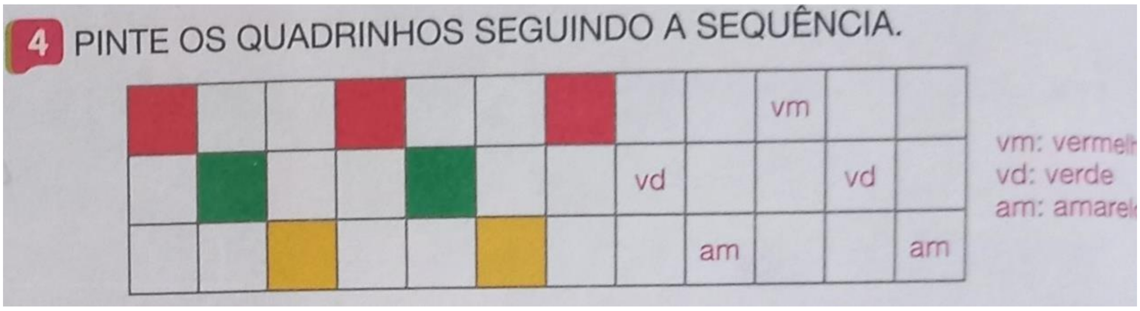
			explique para um colega o padrão (ou regularidade) que você descobriu. a) o chapéu dos palhaços. b) as jangadas. c) os balões.		
Continuar	Padrão Figural	Vamos ver de novo?	Observe como começou a sequência de quadradinhos e complete mantendo um padrão (ou regularidade).	C1	28
Continuar	Padrão Figural	Números até 6	Observe como começou a sequência de cores. Descubra um padrão (ou regularidade) e continue pintando usando o mesmo padrão. Depois, conte para os colegas qual padrão (ou regularidade) você descobriu.	C1	38
Continuar	Padrão Figural	Figuras geométricas planas	Quantos [quadrados] há em cada figura? E quantos [triângulos]? Descubra um padrão (ou regularidade) nestas construções. Depois, faça a quarta construção usando o mesmo padrão	C1	91
Continuar	Padrão Figural	Vamos ver de novo?	Descubra um padrão para a sequência e pinte a última figura.	C1	136
Continuar	Padrão Figural	Tecendo saberes	Descubra uma regularidade na sequência de cores destas pipas e pinte a última pipa.	C1	159
Continuar	Padrão Figural	Sequências geométricas	Circule a figura geométrica que completa a sequência abaixo:	D1	112
Continuar	Padrão Figural	Sequências geométricas	Desenhe e pinte para completar a sequência com a cor e a figura correta	D1	112
Continuar	Padrão Figural	Classificação e sequências	Continue a pintar a sequência em cada malha. a) b)	H1	58
Continuar	Padrão Figural	Assim também se aprende	Artesanato. Veja nesta imagem a sequência de cores usada no cinto feito pelo artesão indígena. pinte a faixa a seguir usando a mesma sequência de cores utilizada pelo artesão.	H1	59
Continuar	Padrão Figural	Sequências	Há um segredo no modo de pintar esses pregadores. Descubra-o e continue pintando.	I1	25
Continuar	Padrão Figural	Sequências	Observe o desenho. Há um segredo no modo de pintar os	I1	28

			vagões. Descubra-o e continue pintando.		
Continuar	Padrão Figural	Sequências	Descubra o segredo desta fila. agora, pinte da mesma maneira estas figuras. Nesta fila, continue pintando as figuras da mesma maneira.	I1	28
Continuar	Padrão Figural	Sequências	Descubra o segredo e desenhe a figura que falta na sequência.	I1	28
Continuar	Padrão Figural	Sequências	Observe a sequência. Descubra o segredo e pinte o último termo.	I1	28
Continuar	Padrão Figural	Mais atividades	Laura começou a formar uma fila com suas fichas. Complete as 4 fichas que faltam.	I1	33
Continuar	Padrão Figural	Padrões geométricos	Agora, peça a um colega que desenhe a próxima figura da sua sequência.	J1	65
Continuar	Padrão Figural	Lateralidade	Agora, imagine que você vai entrar em cada uma dessas filas depois da criança de camisa amarela, seguindo a regra, como você deverá ficar em cada fila?	J1	86
Continuar	Padrão Figural	Estudando a adição	Desenhe bolinhas nos quadros, conforme as indicações nas setas, complete com os números.	N1	67
Continuar	Padrão Figural	Reconhecendo figuras geométricas planas	Observe a sequência de figuras. desenhe as próximas duas figuras geométricas planas nos espaços acima seguindo o padrão da sequência.	N1	95
Continuar	Padrão Figural	Sequências e padrões	Observe a sequência de figuras abaixo e desenhe a figura 6. [quadrados em malha quadriculada, 1, 4,9,16,25...]	P1	87

Fonte: O Autor (2022)

Na figura 34 observamos que o padrão vermelho, verde e amarelo, em quadrados contínuos numa sequência descendente está estabelecido, resta ao aluno completar os próximos elementos. Sendo para isso necessário identificar o local correto e a cor adequada ao padrão.

Figura 34 – Atividade de continuar padrão figural



Fonte: Silveira (2017, p. 28)

O trabalho de construir sequências, explicar e identificar sequências de figuras são atividades do Quadro 22. Entendemos como construir uma sequência ou padrão figural, quando é solicitado ao aluno que crie ou elabore um padrão ou uma sequência. A diferença entre explicar uma sequência e identificar está no fato de que para «identificar», tal sequência já existe, está presente a opção que define o padrão ou regularidade da sequência. Nenhum desses verbos, construir e identificar, está presente na habilidade 9 que trata dos padrões figurais. O verbo explicar, indiretamente está presente, pois explicar um padrão numérico é justamente explicitar o padrão numérico. Mas, a habilidade 9 afirma que a criança deve ordenar e organizar figuras após a explicitação do padrão, o que não acontece nas atividades. Usamos o verbo «explicar» para a definição das atividades visto que ele aparece nos livros ao invés do verbo «explicitar». Nós optamos por acolher os três tipos de atividades, mesmo que possam ser entendidas como habilidades «incompletas».

Quadro 22 – Atividades com padrões figurais

Ação	Conteúdo	Seção	Atividade proposta	L	P
Construir	Padrão Figural	Sequência	Agora, crie uma sequência na malha abaixo	B1	28
Construir	Padrão Figural	Formando grupos	c) use o espaço abaixo para formar dois ou mais grupos. Você escolhe como vai agrupar.	C1	25
Construir	Padrão Figural	Jogo	Dominó de associação de ideias	G1	20
Construir	Padrão Figural	Jogo	Dominó geométrico	G1	78
Construir	Padrão Figural	Classificação e sequências	Agora é com você. Invente e inicie uma sequência pintando os primeiros quadradinhos da malha abaixo. Depois, peça a um colega que termine de pintar a sequência que você inventou.	H1	58

Construir	Padrão Figural	Assim também se aprende	agora, invente uma sequência de cores para esta faixa. Depois, mostre aos colegas	H1	59
Construir	Padrão Figural	Padrões geométricos	Escolha duas figuras geométricas planas. Depois, crie uma regra para desenhar uma sequência de figuras geométricas usando as figuras que você escolheu. a) desenhe a sua sequência abaixo.	J1	65
Construir	Padrão Figural	Padrões geométricos	Agora, pense em um padrão com três cores diferentes para criar um tapete e pinte o desenho abaixo	J1	66
Construir	Padrão Figural	Círculos e esferas	Você consegue fazer uma pilha com mais bolinhas seguindo uma regra?	J1	112
Explicar	Padrão Figural	Classificação	Explique para os colegas.	I1	21
Explicar	Padrão Figural	Classificação	Observe estas fichas, Ana arrumou as fichas em 4 caixas: sua irmã Júlia pensou em outra arrumação, diferente da de Ana. E Júlia fez assim: a) Explique: Como Ana pensou para fazer sua arrumação em quatro caixas? Como Júlia pensou para separar em 2 caixas?	I1	22
Explicar	Padrão Figural	Sequências	Explique como foi feita essa fila.	I1	25
Explicar	Padrão Figural	Sequências	Veja como cada aluno fez. Quem representou corretamente? Por quê? Comente com os colegas e o professor.	I1	26
Explicar	Padrão Figural	A forma de um objeto	Que outras maneiras existem para separar essas caixas em dois grupos? Troque ideias com os colegas e o professor.	I1	107
Explicar	Padrão Figural	Padrões geométricos	Peça a um colega que explique o padrão que você criou ao pintar o desenho.	J1	66
Explicar	Padrão Figural	Padrões geométricos	A sequência de cores do tapete segue uma regra, ou um padrão. Qual padrão é esse?	J1	66

Explicar	Padrão Figural	Problemateca	Veja a criação artística de Talita. b) Talita pensou em regras para recortar e colar os papéis. Qual regra você acha que ela usou para fazer essa composição?	J1	67
Explicar	Padrão Figural	Conectando saberes	Você percebe algum padrão no desenho no corpo da jovem do povo krahô?	J1	69
Explicar	Padrão Figural	Conectando saberes	Como são as linhas e os desenhos dos traçados dos cestos?	J1	69
Explicar	Padrão Figural	Lateralidade	Observe e descubra qual foi a regra que as crianças usaram para formar cada fila.	J1	86
Explicar	Padrão Figural	Círculos e esferas	Descubra qual foi a regra usada para construir a pilha de bolinhas [do exercício anterior].	J1	11 2
Explicar	Padrão Figural	Cabe mais, cabe menos	a) qual foi a regra que Roberta usou para organizar os copos?	J1	14 7
Explicar	Padrão Figural	Cabe mais, cabe menos	Eduardo fez uma sequência com novelos de lã. A) qual foi a regra que Eduardo usou para formar a sequência de novelos?	J1	14 7
Explicar	Padrão Figural	Cabe mais ou cabe menos	Observe a sequência dos nomes desses objetos e descubra a ordem em que eles foram organizados [piscina/banheira/balde/jarra /copo]	P1	59
Identificar	Padrão Figural	Padrões	Ester coloriu a malha quadriculada abaixo seguindo um padrão, mas cometeu um engano. Observe. marque com um x o quadradinho que Ester coloriu por engano.	A1	10 5
Identificar	Padrão Figural	Sequência	As crianças estão sentadas uma ao lado da outra e mexem com os braços de acordo com uma regra. Descubra a regra e marque com um x de qual das maneiras abaixo Ana deve posicionar os seus braços para se sentar ao lado de Mário.	B1	29

Identificar	Padrão Figural	Iguais ou diferentes	Cerque com uma linha o brinquedo diferente em cada quadro.	B1	32
Identificar	Padrão Figural	Iguais ou diferentes	Pinte de [laranja] as flores iguais.	B1	32
Identificar	Padrão Figural	Iguais ou diferentes	Bruno está ajudando a separar em cestos as frutas que seu tio vai vender. Cada cesto tem um só tipo de fruta. Ligue cada fruta ao seu cesto.	B1	32
Identificar	Padrão Figural	Iguais ou diferentes	Encontre e marque com um x as 6 diferenças que há nas cenas abaixo	B1	33
Identificar	Padrão Figural	Sequências geométricas	quantas vezes o mesmo padrão é repetido nessa sequência? se continuarmos essa sequência, que forma geométrica aparecerá na próxima posição?	D1	111
Identificar	Padrão Figural	Sequências geométricas	Observe o padrão de figuras e cores no quadro a seguir. Depois, preencha os espaços com as figuras corretas. a) agora responda: a) no quadro foram usados quantos tipos de figuras geométricas diferentes? Circule sua resposta. b) na sequência foram usadas quantas cores diferentes? Circule sua resposta. c) circule o padrão usado na sequência.	D1	113
Identificar	Padrão Figural	Jogo	É a vez de Aline jogar. Cerque com uma linha a carta que ela pode colocar no jogo.	G1	21
Identificar	Padrão Figural	Jogo	Agora é a vez de Diego em outro jogo. Ele só tem uma carta na mão. Ele poderá ganhar o jogo nesta rodada?	G1	21
Identificar	Padrão Figural	Jogo	Veja como está o jogo. É a vez de João jogar. Agora, observe as peças de João e cerque com uma linha cada uma das peças que ele pode colocar o jogo acima.	G1	79
Identificar	Padrão Figural	Jogo	Depois de João, é a vez de Carla jogar. Veja abaixo a peça que ela quer encaixar no jogo da atividade	G1	79

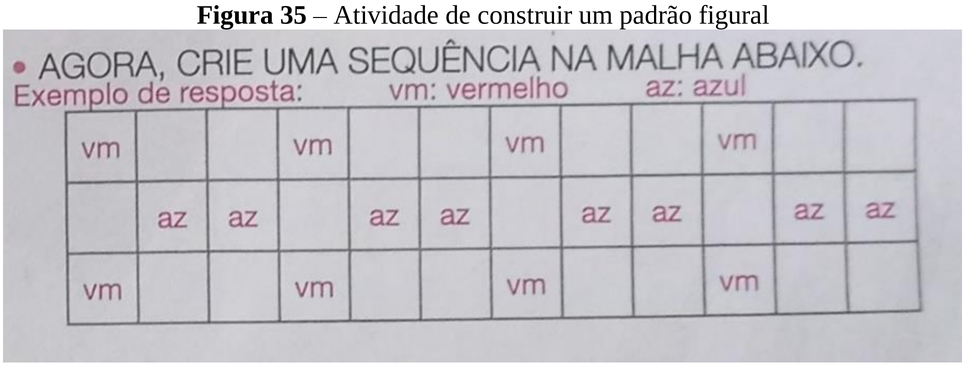
			anterior. é possível a Carla encaixar a peça?		
Identificar	Padrão Figural	Figuras geométricas não-planas	Observe esta sequência de figuras. agora, marque com um x a próxima figura dessa sequência.	G1	82
Identificar	Padrão Figural	Figuras geométricas planas	Desafio. Analise a sequência de figuras abaixo. Quais são as três próximas figuras que podem continuar a sequência acima?	G1	85
Identificar	Padrão Figural	Padrões	Observe a sequência. Cerque com uma linha o próximo borrão da sequência. marque com um x o que está variando na sequência.	G1	16 9
Identificar	Padrão Figural	Classificação e sequências	Observe esta sequência de figuras: qual das figuras abaixo você acha que pode ser a próxima da sequência ilustrada acima? Contorne essa figura.	H1	57
Identificar	Padrão Figural	Classificação e sequências	Siga a sequência [bola, pera, tomate] e descubra qual é o animal de estimação de Lucca.	H1	57
Identificar	Padrão Figural	Classificação	b) Veja essa nova ficha. Pela arrumação de Ana, em qual caixa você deve colocar essa ficha? Por quê?	I1	23
Identificar	Padrão Figural	Sequências	Observe o varal em que as meias estão organizadas. Para responder a cada pergunta a seguir, marque um x. Que cor deve ter o par de meias A? que cor deve ter o par de meias B? que cor deve ter o par de meias C?	I1	25
Identificar	Padrão Figural	Sequências	Observe o varal com os uniformes de trabalho que Marcos lavou. Marcos pendura as roupas em uma ordem. Que ordem é essa? Se Marcos quiser continuar pendurando roupas na mesma ordem, qual das peças deve escolher? Marque um x.	I1	25
Identificar	Padrão Figural	Sequências	Observe a sequência. O professor pediu aos alunos	I1	26

			que representassem essa sequência usando as letras a, no lugar de um avião, e b no lugar de uma bola. Veja como cada aluno fez. Quem representou corretamente?		
Identificar	Padrão Figural	Mais atividades	Observe cada grupo de objetos. Em cada grupo há um elemento estranho que não deveria estar lá. Identifique-o.	I1	30
Identificar	Padrão Figural	Mais atividades	Responda às questões a seguir. a) nesta fila de peixes está faltando um. Qual é o peixe que falta? Assinale com um x. b) observe. Agora, está faltando outro peixe. Qual é o peixe que falta? Assinale com um x.	I1	31
Identificar	Padrão Figural	Mais atividades	Descubra o segredo de cada fila e pinte as figuras. Fila a. Fila b.	I1	31
Identificar	Padrão Figural	A forma de um objeto	Depois, de organizadas as duas prateleiras, indique em qual delas você colocaria cada uma das novas embalagens.	I1	10 7
Identificar	Padrão Figural	Cabe mais, cabe menos	Desenhe uma linha em volta do copo que ela deverá colocar após o 4o. copo.	J1	14 7

Fonte: o Autor (2022)

Diferentemente das atividades de completar ou continuar um padrão figural, na atividade de construir um padrão figural a malha está vazia e a única limitação é de espaço. O padrão deverá ser elaborado dentro de tal espaço, como na figura 35, uma atividade do livro B1.

Figura 35 – Atividade de construir um padrão figural



Fonte: Silveira (2017, p. 28)

Na atividade de construir um padrão figural, havia espaço em branco a ser preenchido pelo aluno, nas atividades de explicar os padrões a imagem vem plena e cabe ao aluno explicá-la. Nas atividades de explicar um padrão as figuras são apresentadas e às crianças caberá encontrar o padrão e explicitá-lo. Esse tipo de atividade está exemplificado na figura 36, uma atividade do livro B1.

Figura 36 – Atividade de explicar padrão figural


CESTARIA E CERÂMICA

OS POVOS INDÍGENAS PRODUZEM CESTOS DOS MAIS VARIADOS TIPOS TRANÇANDO FIBRAS VEGETAIS. EM GERAL, OS CESTOS SERVEM PARA TRANSPORTAR OU GUARDAR ALIMENTOS.

CESTOS CONFECCIONADOS POR INDÍGENA DA ETNIA BANIWA, DO AMAZONAS.

CESTO CONFECCIONADO POR INDÍGENA DA ETNIA GUARANI MBYA, DE SÃO PAULO.

ELEMENTOS NÃO PROPORCIONAIS ENTRE SI.

ALGUMAS CERÂMICAS PRODUZIDAS PELOS INDÍGENAS SÃO USADAS PARA ARMAZENAR ÁGUA E ALIMENTOS. ELES TAMBÉM ENFEITAM ESSES UTENSÍLIOS COM DESENHOS.

CERÂMICA PRODUZIDA POR INDÍGENA DA ETNIA KADIWÉU, DE MATO GROSSO DO SUL.

FONTE DOS DADOS: **MUSEU DO ÍNDIO**. DISPONÍVEL EM: <www.museudoindio.org.br/arte-indigena-pinturas-ceramicas-e-plumagem/>. ACESSO EM: 26 OUT. 2017.

1 VOCÊ PERCEBE ALGUM PADRÃO NO DESENHO NO CORPO DA JOVEM DO POVO KRAHÔ? Espera-se que os alunos, em linguagem própria, descrevam a presença de desenhos que representam triângulos justapostos e traços inclinados e verticais que se repetem formando um padrão.

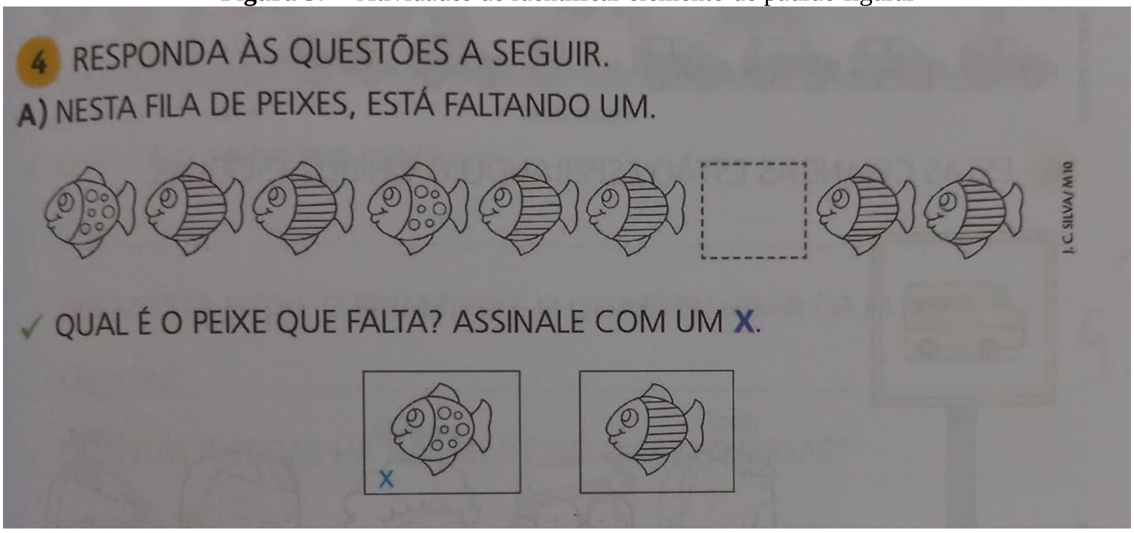
2 COMO SÃO AS LINHAS E OS DESENHOS DOS TRANÇADOS DOS CESTOS? Espera-se que os alunos, em linguagem própria, descrevam a repetição de desenhos e padrões nos cestos, como as linhas em zigue-zague.

SESSENTA E NOVE 69

Fonte: Reame (2017, p. 69)

Como explicamos anteriormente, nas atividades de identificar no padrão figural há duas formas de ocorrência. Em uma delas o aluno precisa identificar o padrão estabelecido entre opções disponíveis à escolha; em outra, o elemento ausente na figura que apresenta um padrão está disponível entre outras opções para o aluno escolher sua resposta. Apresentamos na figura 37, uma atividade na qual o elemento ausente na sequência que tem um padrão figural, está entre as opções a ser escolhida pelo aluno. Assim, a atividade expõe uma sequência alternada de dois tipos de peixes com preenchimentos diferentes e um desses tipos aparece como alternativa para a criança responder à questão. É uma atividade do livro I1.

Figura 37 – Atividades de identificar elemento de padrão figural



Fonte: Munhoz; Nazareth; Toledo (2017, p. 31)

Se as atividades de construir ou identificar um padrão figural não estavam previstas pela habilidade 9, os verbos organizar e ordenar estavam presentes. Mas, para cumprir a habilidade 9 seria preciso que a criança organizasse e ordenasse as figuras, após a explicitação do padrão. Encontramos diversas atividades que solicitavam do aluno uma ou outra dessas ações. No Quadro 23, apresentamos as atividades em que uma ou outra dessas ações foram solicitadas, isoladamente.

Quadro 23 – Atividades de ordenar e de organizar padrão figural

Ação	Conteúdo	Seção	Atividade proposta	L	P
Ordenar	Padrão Figural	Comparando comprimentos	Usando os números de 1 a 4, indique a ordem dos livros do mais fino para o mais grosso.	A1	165
Ordenar	Padrão Figural	Sequência	Durante as férias, Roberto e Lara ajudaram sua tia rose a cuidar do jardim plantando algumas flores. Rose registrou com fotografias o que aconteceu em diversos momentos. Porém, ao receberem as fotos,	D1	51

			perceberam que elas estavam todas fora de ordem. Observe: qual atividade as crianças fizeram primeiro? numere cada fotografia de acordo com a ordem em que elas foram tiradas pela tia de Roberto e Lara.		
Ordenar	Padrão Figural	Sequência	Numere cada figura de acordo com a ordem dos acontecimentos. a) b) c)	D1	52
Ordenar	Padrão Figural	Classificação e sequências	Recorte as imagens da página 191 e cole-as nos espaços abaixo. Na sequência da construção de uma oca. Agora, invente uma história sobre essa sequência e conte a um colega.	H1	56
Ordenar	Padrão Figural	Qual é a massa? Quanto cabe?	Enumere as jarras abaixo começando pela que cabe menos suco e terminando pela que cabe mais suco.	H1	168
Ordenar	Padrão Figural	Comparando: capacidade, comprimento e "peso"	Observe a figura e imagine cada um destes animais. organize os nomes dos animais no quadro abaixo, do mais pesado para o mais leve. Siga o sentido da seta.	I1	16
Ordenar	Padrão Figural	Noções de tempo	Organize os quadros na ordem em que cada cena aconteceu. Escreva os números de 1 a 6.	I1	154
Ordenar	Padrão Figural	Ordinais	As seis velas têm a mesma espessura e a mesma altura. As velas foram acesas em momentos diferentes e nenhuma delas se apagou. c. Escreva nos quadradinhos acima a ordem em que as velas foram acesas (1a., 2a., 3a., 4a., 5a., 6a.)	N1	58
Ordenar	Padrão Figural	Leitura de imagem	Numere os quadros abaixo de acordo com a ordem dos acontecimentos. [creme na escova/escovação/enxágue]	P1	65
Organizar	Padrão Figural	Vamos organizar objetos?	Observe os brinquedos que Ivone tem. Ivone começou a organizar os brinquedos por tipo. Recorte os brinquedos da página 197 e ajude Ivone	A1	102

			a terminar de organizar seus brinquedos.		
Organizar	Padrão Figural	Vamos organizar objetos?	Observe as caixas que Rodrigo tem. Pinte as caixas abaixo para ajudar Rodrigo a organizá-las de acordo com a cor.	A1	102
Organizar	Padrão Figural	Vamos organizar objetos?	Observe os copos, as canecas e as xícaras de Vanessa. a) recorte os copos, as canecas e as xícaras da página 197, depois, organize-os da maneira que preferir, colando-os nas prateleiras.	A1	103
Organizar	Padrão Figural	Classificação	O avô de Bruno foi à feira comprar frutas. Marque com um x as frutas.	B1	30
Organizar	Padrão Figural	Classificação	Ligue com uma linha as roupas que têm a mesma cor.	B1	30
Organizar	Padrão Figural	Classificação	As figuras geométricas podem ser parecidas e ter medidas diferentes. Recorte as figuras da página 159. Depois, cole-as abaixo de modo que as figuras que são parecidas fiquem uma ao lado da outra.	B1	31
Organizar	Padrão Figural	Classificação	Cerque com uma linha os objetos que são materiais escolares.	B1	31
Organizar	Padrão Figural	Formando grupos	A turma de amigos está reunida. Vamos separá-los em grupos? Registre o nome das crianças em cada grupo. a) em um grupo ficam as crianças com boné e no outro ficam as crianças sem boné. b) agora devem ser três grupos. Siga a cor das camisetas.	C1	25
Organizar	Padrão Figural	Reconhecendo algumas figuras planas	Recorte as figuras da página 181 e cole-as abaixo de acordo com a forma e a cor indicadas	F1	22
Organizar	Padrão Figural	Organização	Recorte as imagens da página 203, separando-as assim: objetos que são usados na cozinha dos que são usados no banheiro.	G1	24

			Depois, cole-as no espaço adequado.		
Organizar	Padrão Figural	Comparando capacidades	Leia as dicas e ligue cada criança a uma garrafa. Dicas: A garrafa de Fábio é aquela em que cabe mais água. A garrafa de Laura é aquela que cabe menos água.	G1	123
Organizar	Padrão Figural	Classificação	Observe os brinquedos. Esses brinquedos devem ser separados nas caixas abaixo. Você pode usar as 4 caixas ou menos. a) separe os brinquedos que ficarão em cada caixa. Escreva a letra de cada brinquedo na caixa em que ele vai ficar, do jeito que você organizou. b) quantas caixas você usou?	I1	21
Organizar	Padrão Figural	Classificação	Na escola de Jonas, existe uma caixa com peças assim: organize essas peças em grupos, desenhando as peças nos quadros ou descrevendo-as. Forme 4 grupos. Forme 3 grupos. Forme dois grupos.	I1	24
Organizar	Padrão Figural	A forma de um objeto	João tem uma loja de embalagens para presentes. Ele quer arrumar duas prateleiras de sua loja. Veja os tipos de embalagens que ele pretende organizar nessas prateleiras. Observe a forma de cada caixa e ajude João a fazer a separação em dois grupos. Atenção: cada caixa só pode ficar em uma das prateleiras.	I1	107
Organizar	Padrão Figural	Leitura de imagem	Complete o quadro abaixo com o nome de cada produto acima de acordo com a sua finalidade [limpeza/higiene].	P1	64

Fonte: O Autor (2022)

Um exemplo de atividade de ordenar padrão figural está na figura 38. Uma atividade do livro H1.

Figura 38 – Atividade de ordenar padrão figural

Fonte: Giovanni Jr. (2017, p. 168)

Um exemplo de atividade de organizar objetos, o que configuraria organizar padrão figural está na figura 39, que é uma atividade do livro P1.

Figura 39 – Atividade de organizar padrão figural

LEITURA DE IMAGEM

LIMPEZA E SAÚDE

ENTRE AS FOTOGRAFIAS ABAIXO HÁ PRODUTOS DE LIMPEZA E PRODUTOS DE HIGIENE PESSOAL.

AS IMAGENS NÃO ESTÃO REPRESENTADAS EM PROPORÇÃO

OBSERVE

SABONETE

LIMPA-VIDROS

DETERGENTE

PAPEL HIGIÊNICO

DESINFETANTE

ÁGUA SANITÁRIA 5 LITROS

DESODORANTE

SABÃO EM PÓ 2 kg

1. COMPLETE O QUADRO ABAIXO COM O NOME DE CADA PRODUTO ACIMA DE ACORDO COM A SUA FINALIDADE.

PRODUTOS DE LIMPEZA	PRODUTOS DE HIGIENE PESSOAL
Água sanitária.	Sabonete.
Limpa-vidros.	Creme dental.
Desinfetante.	Desodorante.
Sabão em pó.	Papel higiênico.
Detergente.	Xampu.

64

Fonte: Santos (2017, p. 64)

Se todo o trabalho de Álgebra nos anos iniciais é compreendido como uma aproximação de conhecimentos, habilidades e competências que terão de ser mobilizadas nos anos finais do Ensino Fundamental e, desse modo todas as atividades previstas teriam esse objetivo, encontramos a ocorrência de duas atividades que, em certa medida, se antecipam e inserem o uso de letras em sequências para representar um padrão figural. São as atividades que estão no Quadro 24 e, uma delas, na figura 40.

Quadro 24 – Atividades de representar padrão figural

Ação	Conteúdo	Seção	Atividade proposta	L	P
Representar	Padrão Figural	Sequências	Observe a sequência de bandeirinhas. represente essa mesma sequência usando letras. Use L para laranja e A para azul.	I1	27
Representar	Padrão Figural	A forma de um objeto	Indique, pela letra de cada caixa, como vai ficar cada prateleira.	I1	107

Fonte: O Autor (2022)

O uso de letras está previsto para os anos finais do Ensino Fundamental, contudo as usaram para representar as cores das bandeiras. A atividade faz parte do livro I1.

Figura 40 – Atividade de representar padrão figural

Fonte: Munhoz; Nazareth; Toledo (2017, p. 27)

Se o uso de letras pode ser compreendido como uma antecipação de atividade que deveria ocorrer apenas nos anos finais do Ensino Fundamental, a habilidade 9 expunha justamente a necessidade de o aluno ordenar e organizar objetos ou figuras tendo por base um padrão figural. As atividades do Quadro 25 contemplam essas ações. Encontramos essas atividades em quatro coleções.

Quadro 25 – Atividades de organizar e ordenar padrão figural

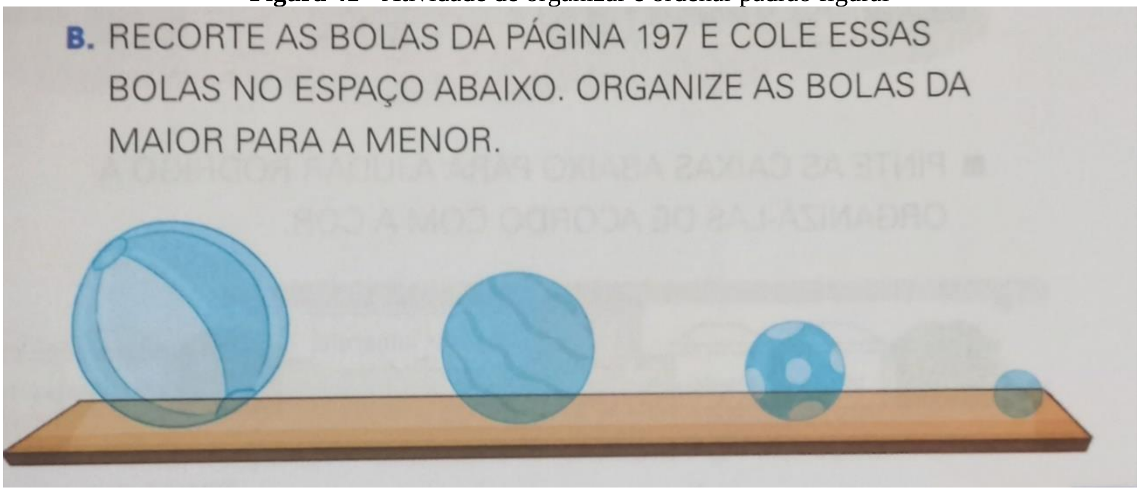
Ação	Conteúdo	Seção	Atividade proposta	L	P
Organizar e ordenar	Padrão Figural	Vamos organizar objetos?	Álvaro tem algumas bolas em casa. Observe como ele organizou as bolas ao guardá-las. b) recorte as bolas da página 197 e cole essas bolas no espaço abaixo. Organize as bolas da maior para a menor.	A1	101
Organizar e ordenar	Padrão Figural	Sequência	Recorte as figuras dos patinhos e dos girassóis da	B1	29

			página 161. Cole os patinhos do mais baixo para o mais alto. Cole os girassóis do mais alto para o mais baixo.		
Organizar e ordenar	Padrão Figural	Organização	Recorte as imagens de bonecas matrioskas da página 207. Depois, cole-as no espaço abaixo, uma ao lado da outra, da menor boneca para a maior.	G1	24
Organizar e ordenar	Padrão Figural	Comparando capacidades	Observe como estes copos foram organizados. agora, marque com um x a sequência de copos que está organizada do copo cheio para o vazio.	G1	123
Organizar e ordenar	Padrão Figural	Noções de medida	Recorte e cole nos locais indicados as figurinhas da página 191. Cole as figurinhas dos novelos de lã, do fio mais fino para o fio mais grosso.	H1	18
Organizar e ordenar	Padrão Figural	Noções de medida	Cole as figurinhas dos vestidos, do mais comprido para o mais curto.	H1	18
Organizar e ordenar	Padrão Figural	Noções de medida	Cole as figurinhas das bonecas russas, da mais baixa para a mais alta.	H1	18

Fonte: O Autor (2022)

Uma dessas atividades de organizar e ordenar está na figura 41. A atividade faz parte do livro A1.

Figura 41 - Atividade de organizar e ordenar padrão figural



Fonte: Rocha (2017, p. 101)

O uso do apoio de uma reta para a resolução da tarefa de completar sequências numéricas também foi realizado por seis coleções. O Livro I1 foi aquele que mais recorreu a essa utilização, como podemos observar no Quadro 26.

Quadro 26 – Atividades de completar padrão numérico com reta

Ação	Conteúdo	Seção	Atividade proposta	L	P
Completar	Padrão Numérico e reta	Comparações	Em cada reta numérica. Complete os quadradinhos com o número correspondente e, depois, responda às questões.	B1	133
Completar	Padrão Numérico e reta	Contando até 50	Observe e preencha a reta numérica com números: responda: a) que número corresponde à letra e? b) que letra representa o número 30?	D1	81
Completar	Padrão Numérico e reta	Contando até 50	Coloque os números abaixo no local que devem ocupar na reta numérica. 4, 8, 12, 20, 28, 36, 44	D1	81
Completar	Padrão Numérico e reta	Completar	Em cada uma das retas numéricas, conte as dezenas para trás a fim de encontrar os números que estão faltando e efetue as subtrações.	D1	126
Completar	Padrão Numérico e reta	Contando até 80	Complete cada reta numérica com os valores que faltam. a) b) c)	D1	130
Completar	Padrão Numérico e reta	Contando até 100	Preencha as retas numéricas com os números que estão faltando. a) b) c)	D1	152
Completar	Padrão Numérico e reta	Mais adições	Observe uma reta numérica com números que aumentam de 1 em 1 unidade. Agora, complete estas outras retas numéricas com os números que estão faltando. os números aumentam de 4 em 4 unidades. os números aumentam de 5 em 5 unidades.	G1	59

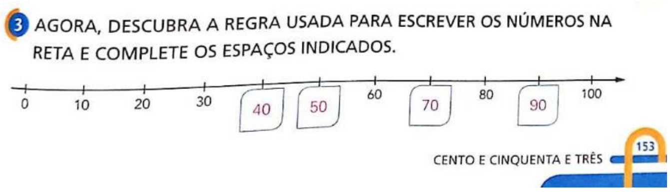
Completar	Padrão Numérico e reta	Números naturais de 0 a 9	Observe a sequência de números de 0 a 9 representada em uma reta numérica. complete a reta numérica escrevendo os números de 1 em 1. complete a reta numérica escrevendo os números de 2 em 2.	H1	96
Completar	Padrão Numérico e reta	Vinte	Escreva os números de um em um.	H1	144
Completar	Padrão Numérico e reta	Quarenta	Complete, de dois em dois, esta sequência	H1	149
Completar	Padrão Numérico e reta	Os números e a reta numérica	Observe personagens do game preferido de João. Sky caminha na pista numerada. complete com os números que faltam.	I1	96
Completar	Padrão Numérico e reta	Os números e a reta numérica	Observe o caminho numerado e complete os números que faltam.	I1	97
Completar	Padrão Numérico e reta	Mais atividades	Complete os espaços vazios neste caminho	I1	102
Completar	Padrão Numérico e reta	Reta numérica	Dim está dando passos de 1 em 1 no caminho numerado. a) observe um trecho do caminho e complete os números que estão faltando.	I1	146
Completar	Padrão Numérico e reta	Reta numérica	Observe a reta numérica e complete-a. contando de 5 em 5, qual vem antes e qual vem depois? Complete.	I1	148
Completar	Padrão Numérico e reta	Mais atividades	Observe o trecho da reta numérica e complete o quadro.	I1	151
Completar	Padrão Numérico e reta	Contar e registrar	Conte de 1 em 1 e complete os espaços indicados na reta numérica até 50.	J1	78
Completar	Padrão Numérico e reta	Contar, comparar e registrar	Escreva na reta numérica os números que vêm antes de 46 e depois de 39.	J1	92
Completar	Padrão Numérico e reta	Contar, comparar e registrar	Agora, conte de 1 em 1 de 40 até 52. Escreva os números nos espaços	J1	93

			indicados na reta numérica.		
Completar	Padrão Numérico e reta	Rever ideias	Agora, conte de 2 em 2 e complete a contagem abaixo.	P1	37
Completar	Padrão Numérico e reta	Contar e calcular	Agora, descubra a regra usada para escrever os números na reta e complete os espaços indicados.	J1	153

Fonte: O Autor (2022)

Uma atividade que exemplifica todas as atividades expostas no quadro 26 é apresentada na figura 42. Ela pertence ao livro J1.

Figura 42 – Atividade de completar padrão numérico com reta



Fonte: Reame (2017, p. 153)

No Quadro 27 e na figura 43 apresentamos a única atividade que solicitou a identificação de um padrão numérico numa situação que apresentava uma reta numérica. É uma atividade do livro N1.

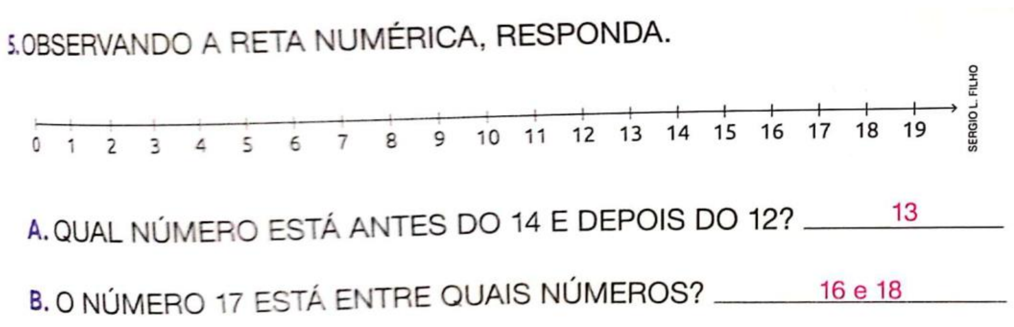
Quadro 27 – Atividade de identificar padrão numérico com reta

Ação	Conteúdo	Seção	Atividade proposta	L	P
Identificar	Padrão Numérico e reta	Comparação	Observando a reta numérica responda: a) qual número está antes do 14 e depois do 12? b) o número 17 está entre quais números?	N1	121

Fonte: O Autor (2022)

Consideramos essa atividade como identificar, pois os números que respondem aos questionamentos dos itens a e b estão disponíveis não entre opções a escolher, mas na própria reta numérica. Desse modo, mesmo que não seja uma questão de assinalar, como nas atividades de identificar padrão figural ou identificar padrão numérico, as respostas às questões propostas estão expostas aos alunos.

Figura 43 – Atividade de identificar elemento de padrão numérico com reta



Fonte: Ribeiro e Pessoa (2017, p. 121)

Se nos quadros 26 e 27 o auxílio para completar e identificar padrões numéricos é uma reta, as atividades apresentadas no quadro 25 estão inseridas num contexto no qual há um quadro. Desse modo, a construção da sequência não se dá apenas em uma dimensão, mas em duas.

Quadro 28 – Atividades com quadro de números

Ação	Conteúdo	Seção	Atividade proposta	L	P
Completar	Quadro de números	Números até 20	Complete o quadro com os números que faltam	A1	88
Completar	Quadro de números	Números até 31	Observe o calendário, depois, responda às questões. a) escreve em que dia será: a aula de música / o jogo de futebol / o passeio ao parque a festa de aniversário de Ana	A1	92
Completar	Quadro de números	Números até 40	Complete a sequência de números do quadro abaixo. agora, complete os quadros com o número que vem imediatamente antes e com o número que vem logo depois.	A1	122
Completar	Quadro de números	Mais números	Complete o quadro abaixo com os números que estão faltando.	A1	134
Completar	Quadro de números	Os números de 13 a 19	Complete o quadro com a sequência de 0 a 19	C1	175
Completar	Quadro de números	Os números de 20 a 29	Quadro de números. A) complete o quadro com a sequência de números de 0 a 29. B) pinte a segunda linha de vermelho e responda: qual é a característica comum a todos os números dessa linha? C) escolha uma coluna e faça um contorno em volta dela. Depois, responda: qual é a	C1	185

			característica comum a todos os números dessa coluna?		
Completar	Quadro de números	Os números até 99 e depois o 100 (cem)	Continue escrevendo os números em ordem até completar o quadro.	C1	196
Completar	Quadro de números	Contando até 80	Preencha o quadro com os números que estão faltando. ,	D1	132
Completar	Quadro de números	Contando até 100	Preencha os espaços com os números que estão faltando e termine a pintura do quadro.	D1	156
Completar	Quadro de números	Números de 1 a 59	Descubra os números escondidos pelas fichas. Depois, complete o quadro.	F1	137
Completar	Quadro de números	Números até 100	Complete o quadro.	F1	146
Completar	Quadro de números	Jogo	prepare sua cartela para jogar marque 10, para isso, complete-a com os números que faltam.	G1	160
Completar	Quadro de números	Números na arquibanca da	Muitas pessoas compraram bilhetes numerados para assistir a um jogo de basquete, mas algumas cadeiras da arquibancada não estão numeradas. Vai ser uma confusão na hora de cada um encontrar o lugar. ajude a evitar essa confusão, numerando os assentos que estão sem número.	G1	170
Completar	Quadro de números	Para terminar	Observe o quadro numérico e complete com os números que estão faltando nele.	G1	175
Completar	Quadro de números	Números de 0 a 9	Escreva os números que faltam em cada quadro para obter a sequência de 0 a 9 do maior número para o menor número.	H1	96
Completar	Quadro de números	Números até 50	Complete este quadro com os números de 1 até 50.	I1	95
Completar	Quadro de números	Números até 100	Complete o quadro	I1	145
Completar	Quadro de números	Mais atividades	Observe o quadro e complete-o.	I1	150
Completar	Quadro de números	Contar e registrar	Fabiano escreveu a sequência numérica de 1 até 40, mas cobriu alguns números. escreva a seguir o número que ficou escondido embaixo de cada cartão colorido.	J1	77

Completar	Quadro de números	Contar, comparar e registrar	Conte, em voz alta, de 1 em 1 e complete o quadro com os números que faltam.	J1	92
Completar	Quadro de números	Contar e calcular	Conte de 1 em 1 e complete o quadro com os números que faltam	J1	128
Completar	Quadro de números	Contar e calcular	Escreva os números das figurinhas que Ana colou: a) na página 6 b)na página 7	J1	129
Completar	Quadro de números	Contar e calcular	Escreva o número das figurinhas que Ana colou: a) na página 8; b)na página 9	J1	129
Completar	Quadro de números	Contar e calcular	Ajude Laís escrevendo os números que faltam no quadro de números até 100.	J1	152
Completar	Quadro de números	Números de 1 a 30	Complete o quadro abaixo com os números que estão faltando. Depois, faça o que se pede. a) forme dupla com um colega e recortem os cartões da página 143 do material complementar. b) localize no quadro o número correspondente a cada cartão. Cole os cartões no quadro, começando do número maior até chegar ao número menor.	P1	50
Completar	Quadro de números	Números de 1 a 50	Amanda está observando o quadro numérico na lousa. Veja: a) complete o quadro com os números que faltam.	P1	62
Completar	Quadro de números	Números de 1 a 100	Complete o quadro a seguir com os números que faltam.	P1	102
Construir	Quadro de números	Medindo tempo	Vamos aprender um pouco mais sobre o calendário? Com ele, podemos registrar os dias e os meses do ano. complete o calendário do mês em que estamos.	G1	125
Continuar	Quadro de números	Mais adições	Complete o calendário do mês de maio.	G1	43
Continuar	Quadro de números	Contar e calcular	Em cada quadro pinte de acordo com a regra indicada. a) continue contando e pintando de 2 em 2. b) continue contando e pintando de 5 em 5,	J1	153
Continuar	Quadro de números	Números de 1 a 50	Para aumentar uma linha no final desse quadro, quais números você precisa escrever?	P1	62

Explicar	Quadro de números	Números de 1 a 50	Quais são os números da primeira coluna? O que se repete em todos eles? c) como os números aumentam em cada linha do quadro?	P1	62
Explicar	Quadro de números	Números de 1 a 50	Agora, observe a última coluna. Como os números aumentam de uma linha para a próxima?	P1	62
Identificar	Quadro de números	Jogo	Telma pintou seis números em sua cartela. Descubra quais são. Para isso, ouça as dicas que seu professor vai ler e escreva os números. 1º número: é maior que dez e menor que doze. 2º número: vem imediatamente antes do vinte e cinco. 3º número: vem imediatamente depois do quarenta e nove. 4º número: é maior que vinte e menor que 22. 5º número: vem imediatamente antes do quarenta. 6º número: está entre o nove e o onze.	G1	161
Identificar	Quadro de números	Números de 1 a 50	Observe o quadro da página 62. Pense na sequência dos números e complete as frases abaixo. a) o número que está imediatamente antes do 45 é o... b) o número que está logo depois do 27 é o... c) os números que estão entre 41 e 45 são...	P1	63
Identificar	Quadro de números	Números de 1 a 100	Pinte de azul todos os números terminados em 9.	P1	102
Identificar	Quadro de números	Números de 1 a 100	Contorne os números do quadro terminados em 6.	P1	102

Fonte: o Autor (2022)

As figuras 44 e 45 ilustram as atividades expostas no Quadro 28. A figura 44 apresenta uma atividade do livro P1.

Figura 44 – Atividade de completar quadro de números

Fonte: Santos (2017, p. 62)

A figura 45 é uma atividade do livro G1. O que diferencia as atividades das figuras 44 e 45 é o fato de que na primeira delas já estão presentes vários números da sequência de 1 a 50, faltando alguns a serem completados enquanto na segunda dessas só há o primeiro número da sequência. Ou seja, na atividade de completar os números a serem postos pelos alunos vão «preencher» espaços entre outros números já escritos, enquanto na atividade de continuar, o limite para o preenchimento é apenas espacial, o limite é dado pela quantidade de quadrinhos dispostos dentro do calendário.

Figura 45 – Atividade de continuar quadro de números

Fonte: Toledo (2017, p. 43)

As habilidades dizem respeito a padrões figurais, como no caso da habilidade 9, e a respeito de padrões numéricos, aos quais a habilidade 10 se refere como «sequência recursiva». Assim, a BNCC não previu que se pudesse ter atividades que combinassem padrões numéricos e padrões figurais. O Quadro 29 apresenta atividades que combinaram o desenvolvimento de padrão numérico com elementos figurais, ou ao contrário, padrão figural com auxílio de sequências de números, denominamos tais atividades como atividades com padrões numérico-figurais.

Quadro 29 – Atividades com padrões numérico-figurais

Ação	Conteúdo	Seção	Atividade proposta	L	P
Completar	Padrão Numérico-figural	Os números de 10 a 12	Continue a numerá-los de acordo com a ordem dos meses e descubra.	C1	169
Completar	Padrão Numérico-figural	Sequência de adições	Preencha os espaços em branco com os valores corretos conforme a sequência. a) b) c)	D1	89
Completar	Padrão Numérico-figural	Sequências de adições	Complete cada espaço com a quantidade de dedos que há em cada figura.	D1	89
Completar	Padrão Numérico-figural	Sequências de adições	Em cada saquinho surpresa há 6 unidades de doces. Complete a sequência anotando o número de doces de cada figura e desenhe as balas nos saquinhos.	D1	90
Completar	Padrão Numérico-figural	Nosso dinheiro	Complete a sequência. 10, 20, 30...	F1	170
Completar	Padrão Numérico-figural	Números até 50	Vamos contar de 5 em 5.	I1	94
Completar	Padrão Numérico-figural	Números até 50	Observe os grupos de 10 e complete.	I1	95
Completar	Padrão Numérico-figural	Números até 100	Vamos escrever a sequência dos números de 10 em 10.	I1	143
Completar	Padrão Numérico-figural	Sequências	Marcela desenhou bolinhas seguindo as setas. Complete com os números que faltam, de acordo com a quantidade de bolinhas.	N1	51
Completar	Padrão Numérico-figural	Sequências	Agora veja as bolinhas que Luciano desenhou e complete com os números correspondentes.	N1	51

Completar	Padrão Numérico-figural	Sequências	Complete os quadradinhos com os números em ordem decrescente, de acordo com a quantidade de dedos levantados.	N1	52
Completar	Padrão Numérico-figural	Sequências	Você já brincou de amarelinha? É muito divertido. a) complete a amarelinha com os números que faltam.	N1	54
Completar	Padrão Numérico-figural	Contagem de 1 a 10	Na parlenda acima [a galinha do vizinho], desenhe os ovos que faltam para completar a quantidade indicada em cada linha	P1	13
Continuar	Padrão Numérico-figural	Sequência numérica	Em cada casa desta trilha foram deixadas pedras. Complete a trilha desenhando em cada casa a quantidade de pedras indicada no cartão.	A1	74
Continuar	Padrão Numérico-figural	Mais números	Observe a reta numérica, leia o que Luci está dizendo e responda às questões. c) se aumentarmos essa reta numérica, quais seriam os três próximos números?	A1	133
Continuar	Padrão Numérico-figural	Números de 10 a 15	Observe a sequência. Depois, complete as escritas. como você acha que foram organizados os quadradinhos em cada grupo dessa sequência?	I1	87
Continuar	Padrão Numérico-figural	Números até 50	Observe os grupos de quadradinhos e complete as escritas.	I1	91
Continuar	Padrão Numérico-figural	Números até 100	Escreva o número de quadradinhos que há em cada grupo.	I1	138
Continuar-proporcionalidade	Padrão Numérico-figural	Cabe mais ou cabe menos	Lucas abriu uma caixa de suco e esvaziou o conteúdo dela enchendo completamente 4 copos, como se vê ao lado. Quantos copos Lucas conseguiria encher se usasse mais caixas como essa? Complete o quadro abaixo.	P1	59
Continuar - proporcionalidade	Padrão Numérico-figural	Vamos resolver	Cláudia foi com os amigos andar de bicicleta no parque. Se 1 bicicleta tem 2 rodas, complete: a) 2 bicicletas	P1	113

			têm... b) 3 bicicletas têm... c) 4 bicicletas têm... d) 5 bicicletas têm..		
Explicar	Padrão Numérico-figural	Números até 31	a) como você fez para ligar os pontos?	A1	92
Identificar	Padrão Numérico-figural	Números até 31	Continue a ligar os pontos e responda às questões:	A1	92
Identificar	Padrão Numérico-figural	Números até 40	Ligue os pontos de 1 a 40 para completar o desenho. Em seguida, pinte o desenho como você preferir.	A1	121
Identificar	Padrão Numérico-figural	O número 100	Ligue todos os pontos, de 1 em 1, e responda à questão. Qual foi a figura formada?	A1	137
Identificar	Padrão Numérico-figural	Os números até 39	Quem sou eu? Descubra lendo os versos ao lado. Depois, confira ligando os pontos na sequência de 1 a 39.	C1	190
Identificar	Padrão Numérico-figural	Números de 20 a 29	Uma os pontos começando pelo número 1	F1	126
Identificar	Padrão Numérico-figural	Números de 1 a 70	Complete este liga-pontos. Depois, pinte o desenho que formar.	P1	90

Fonte: o Autor (2022)

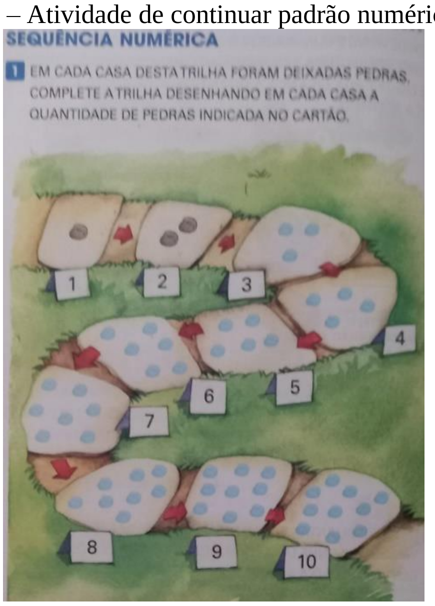
Para exemplificar a maioria das atividades com padrões numérico-figurais apresentamos as figuras 46 e 47. A figura 46 apresenta uma atividade do livro C1.

Figura 46 – Atividade de completar padrão numérico-figural

Fonte: Dante (2017, p. 169)

A atividade da figura 46 pedia ao aluno para completar os números, mas com o apoio de imagens referentes aos meses do ano, apoiando com imagens que diziam respeito às estações do ano. A atividade da figura 47 é do livro A1.

Figura 47 – Atividade de continuar padrão numérico-figural



Fonte: Rocha (2107, p. 74)

A atividade da figura 47 solicita aos alunos que continuem a preencher com pedras as casas seguintes. Apesar de usar o verbo completar, entendemos como atividade de continuar, uma vez que não há outras casas preenchidas com pedras além das casas iniciais.

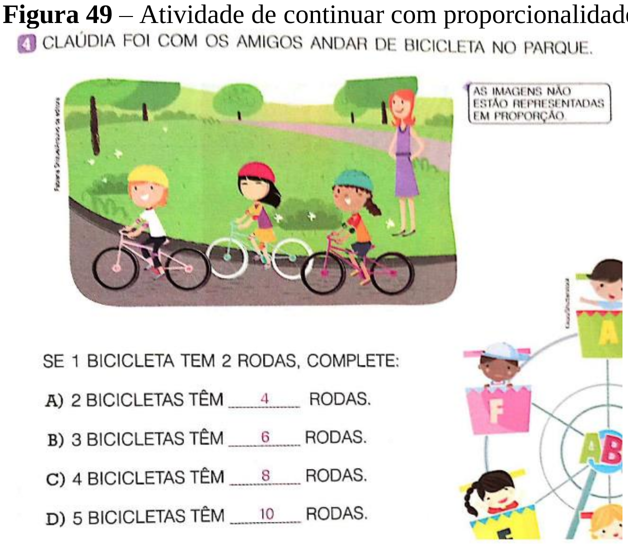
Destacamos as atividades que usam proporcionalidade ao tempo em que solicitam ao aluno que continue a sequência do padrão. Ambas as atividades são do livro P1 (Figura 48 e figura 49).

Figura 48 – Atividade de continuar com proporcionalidade

Fonte: Santos (2017, p. 59)

Entendemos o padrão como numérico-figural, pois há a combinação das caixas de suco e os quatro copos com a sequência de números que precisa ser preenchida abaixo. O mesmo ocorre na figura 49, na qual a atividade apresenta cada bicicleta relacionada com o par de rodas e a relação tem de expressa na sequência numérica, ainda que na vertical.

Figura 49 – Atividade de continuar com proporcionalidade



Fonte: Santos (2017, p. 113)

A partir dos quadros 16 a 29 estabelecemos as unidades de registro nas quais podem ser enquadradas as atividades dos livros didáticos dos primeiros anos cujos autores puderam referendar como sendo da UT Álgebra. No Quadro 30 reunimos apenas as atividades de acordo com os conteúdos, independentemente das ações. Àquelas atividades as quais se utilizavam de retas ou quadros numéricos preferimos não enquadrar nem como padrão numérico nem como padrão figural, as incluímos como padrão numérico-figural.

Quadro 30 – Recorrência dos conteúdos nas Unidades de Registro

Conteúdo	f	fr(%)
Padrão Figural	128	40,6%
Padrão Numérico-figural	87	27,6%
Padrão Numérico	100	31,7%
Total	315	100%

Fonte: O Autor (2022)

No Quadro 31 reunimos as unidades de registro de acordo com as ações, independentemente dos conteúdos.

Quadro 31 – Recorrência das ações nas Unidades de Registro

Ação	f	fr (%)
Completar	148	47,0%
Continuar	54	17,1%
Identificar	49	15,6%
Explicar	19	6,0%
Organizar	15	4,8%
Ordenar	11	3,5%
Construir	10	3,2%
Ordenar e organizar	7	2,2%
Representar	2	0,6%
Total	315	100,00%

Fonte: O Autor (2022)

No quadro 32 apresentamos a distribuição das atividades de acordo com a UT principal à qual se destinavam a seção do livro.

Quadro 32 – Recorrência das atividades de acordo com o tema da seção

UT	fr (%)
Números	47,62%
Grandezas e medidas	5,40%
Álgebra	19,37%
Geometria	7,94%
Sem UT prioritária	19,68%
Total	100,00%

Fonte: O Autor (2022)

Tendo observado as atividades propostas no conjunto dos livros dos primeiros anos das onze coleções com foco naquelas que pudessem atender às habilidades 9 e 10. Contudo, encontramos também atividades que podem ser identificadas com o pensamento algébrico que não necessariamente fossem ligadas à APF, mas sim com AAG. Tais atividades estão apresentadas na próxima seção.

5.3. As atividades com aritmética generalizada em livros didáticos do 1º ano

Como no 1º ano ambas as habilidades 9 e 10 dizem respeito ao desenvolvimento da APF e essa se baseia em padrões numéricos e figurais, assim, podemos observar a preferência dos livros didáticos entre o trabalho com padrões figurais, numéricos ou numérico-figurais. Entretanto, há uma série de atividades presentes nos livros didáticos dos primeiros anos que poderiam ser entendidas e direcionados ao trabalho com Álgebra e que não foram ou percebidos ou entendidos como tais (Quadro 33).

Quadro 33 – Atividades algébricas não previstas para o 1º ano

L	P	Seção	Atividade proposta	Objeto do conhecimento
A1	58	Adições na malha quadriculada	Marcos fez outras representações de adições com resultado 4. Complete as adições que ele representou em cada linha.	Relação de Igualdade
A1	59	Adições na malha quadriculada	Escreva as adições representadas em cada linha da malha quadriculada.	Relação de Igualdade
A1	59	Adições na malha quadriculada	Use o lápis de cor azul e o de cor amarela para representar diferentes adições com resultado 6. Depois, complete as adições.	Relação de Igualdade/ Propriedades da Igualdade
A1	59	Adições na malha quadriculada	Observe e complete o esquema abaixo. [nove retângulos. Oito preenchidos com adições, sete delas incompletas, uma delas com 5+2, ligados ao retângulo central que apresenta o número 7.]	Relação de Igualdade/ Propriedades da Igualdade
B1	83	As ideias da adição	Bruno e Iaci tinha alguns brinquedos e acrescentaram outros às suas coleções. Registre a quantidade total de brinquedos em cada caso. [ambas as somas de brinquedos são 6]	Relação de Igualdade
B1	84	As ideias da adição	Complete as adições conforme a quantidade de quadradinhos de cada cor. [em todas as cinco barras de quadradinhos a soma é 9]	Relação de Igualdade
B1	110	Os números de 20 a 40	Veja como Ana, Bruno e Isabela contaram e registraram a quantidade de pecinhas que a professora entregou. [Ana:22+3; Bruno:18+7;Isabela:10+15]	Relação de Igualdade

B1	123	Dezenas exatas	Na rabiola de cada pipa há 10 fitinhas. Quantas fitinhas há no total? [10+10+...+...+...=50]	Propriedades da Igualdade
B1	123	Dezenas exatas	No estoque de uma loja há 6 caixas de lápis de cor. Quantos lápis de cor há no estoque da loja, no total? [....+....+....+....+....+....+...=60]	Propriedades da Igualdade
C1	118	Representação da adição	Vamos construir **o murinho do 5**? Ele serve para escrever todas as possibilidades de obter 5 com uma ou 2 barrinhas.[0+5=0; 1+4=5;...+....=;...+...=...];	Relação de Igualdade
C1	118	Representação da adição	Usem as barrinhas coloridas e descubram outras 3 possibilidades de obter 10. Indiquem, cada um em seu livro, as adições correspondentes. [...+...=10;....+...=10;....+....=10]	Relação de Igualdade
C1	121	Maneiras de efetuar a adição	Agora você "anda" na reta numerada e depois escreve o resultado da adição. A) 3+6 B)6+3	Relação de Igualdade
D1	70	Juntar ou acrescentar	Adicione os números dos quadrados amarelos com os números dos quadrados azuis e preencha a tabela com os resultados [0 a 5 na linha e na coluna - todas combinações que somam até 5]	Relação de Igualdade
D1	73	Juntar ou acrescentar	Complete os espaços em branco e a tabela de adições com as somas [3 a 5 na linha; 6 a 8 na coluna]	Relação de Igualdade
D1	73	Juntar ou acrescentar	Complete as lacunas com as parcelas da soma 10. [nove retângulos para completar de 1 a 10, ligados a um retângulo central com o 10]	Relação de Igualdade
D1	75	Juntar ou acrescentar	Escreva várias adições que resultem nos números indicados. Utilize as cores das barrinhas do material cuisinaire para representar as parcelas. A) 9 b) 6 c) 12 d) 11	Relação de Igualdade
D1	76	Juntar ou acrescentar	Complete os saltos do grilo e os valores que faltam para a soma se igual a 12. Acompanhe o exemplo.	Relação de Igualdade/ Propriedades da Igualdade
D1	121	Diferença	Escreva a diferença e pinte as figuras de acordo com o código de cores [0, 1, 2, 3, 4, 5]	Relação de Igualdade
D1	127	Completar	Pinte o foguete de acordo com os resultados e as cores pedidas pelo astronauta [13, 14, 15 e 16]	Relação de Igualdade
F1	77	O sinal de +	Pinte apenas os quadros que têm contas com soma 7. [de 10 retângulos com somas, seis resultam em 7]	Relação de Igualdade
F1	77	O sinal de +	Coloque os números que faltam nas contas a seguir, de modo que a soma seja sempre 5. [5 pétalas de uma flor]	Propriedades da Igualdade
F1	81	O sinal de +	Pinte, de acordo com o modelo, a quantidade de [quadrado] que representa cada soma. Depois, escreva o total de	Relação de Igualdade

			[quadrado] que foram pintados. Veja, 7+3=10. a) b) c) d) e)	
F1	81	O sinal de +	Pinte apenas os retângulos que têm contas com resultado 10.	Relação de Igualdade
F1	83	Adição com três números	Pinte os [quadrado] como indica a legenda. Depois, descubra quantos [quadrado] você pintou ao todo em cada item. [a, b, c, d - 3 resultados são 9]	Relação de Igualdade
F1	84	Adição com três números	Observe a cena: [fiz duas peças vermelhas farei mais seis peças vermelhas. Com quantas ficarei?]. Pinte de vermelho os cartões com as adições que podem ser feitas para descobrir com quantas peças vermelhas Josué ficará. [das 4 opções, uma é 2+6 e outra 6+2]	Relação de Igualdade
F1	102	O sinal de -	Resolva as contas e pinte cada região de acordo com a legenda. [azul-região com contas de resultado 1/vermelho-região com contas de resultado 3/amarelo-região com contas de resultado 2/verde-região com contas de resultado 4]	Relação de Igualdade
F1	111	Números de 1 a 20	Antônia está na casa 17. Maria está na casa 13. Quanto falta para maria chegar à casa de Antônia	Propriedades da Igualdade
F1	133	Contagem por agrupamento	Pinte somente as fichas cujas adições têm resultado igual a 50	Relação de Igualdade
F1	133	Contagem por agrupamento	Descubra o número escondido pelo cartão	Propriedades da Igualdade
F1	145	Números até 100	Resolva as contas. c) 80+...=87 g) 90+...=96	Propriedades da Igualdade
G1	58	Mais adições	Calcule e registre os resultados: 3+7/7+3/5+5/1+9/9+1/10+0. Escreva as outras adições com resultado igual a 10:	Relação de Igualdade
G1	61	Subtração com números até 10	Complete: 7-1/9-3/8-2/6-1/8-...=5/9-4	Relação de Igualdade/ Propriedades da Igualdade
G1	64	Mais subtrações	Na festa junina da escola, Daniel brincou do jogo de derrubar latas. Na segunda rodada, ele fez 14 pontos. Agora, Daniel está com 22 pontos. Quantos pontos Daniel fez na primeira rodada?	Elemento desconhecido
G1	65	Resolvendo problemas com adição e subtração	Em um jogo de basquete, ao fazer uma cesta de 3 pontos, o time de Laura totalizou 31 pontos. O time de Bianca fez 4 pontos a menos que o total de pontos do time de Laura. Quantos pontos tinha o time de Laura antes de fazer a cesta de pontos? Qual foi o total de pontos do time de Bianca?	Propriedades da Igualdade
G1	65	Resolvendo problemas com adição e subtração	Tainá e Maurício têm junto 30 figurinhas. Sabendo que Tainá tem 17 figurinhas, quantas figurinhas tem Maurício? Quantas figurinhas Tainá tem a menos que Maurício?	Propriedades da Igualdade

G1	72	Para terminar	Pinte as fichas com o resultado indicado em cada quadro. Resultado 10 [9 retângulos/6 resultados =10]/resultado 14 [9 retângulos/ 6 resultados=14]	Relação de Igualdade e restos
G1	73	Para terminar	Complete com o número que falta em cada caso. 7+...=10/...-7=3/4+...=7/4+...=9	Propriedades da Igualdade
G1	99	Jogo	O marcador [de um jogador] estava na casa 14, para chegar a casa 17, quantos pontos ele tirou no dado?	Propriedades da Igualdade
G1	102	Aprendendo mais números	Em cada caixa, há laranjas. Há quantas laranjas no total? ...+...+...+...+....=50	Propriedades da Igualdade
G1	114	Para terminar	Pinte com a mesma cor os pares de números que, ao serem adicionados, formam uma dezena.	Relação de Igualdade
G1	130	Cédulas e moedas do brasil	Ligue os quadros que contêm a mesma quantia [6 reais/10 reais/20 reais]	Relação de Igualdade
G1	157	Para terminar	Descubra e complete o quadro com o número que falta	Propriedades da Igualdade
G1	169	Desafio	Sabendo que o resultado da adição 47+39 é 86, qual é o resultado da adição 39+47?	Relação de Igualdade
H1	111		Observe as adições que podemos representar usando as peças vermelhas e as azuis. agora é a sua vez de escrever as adições: [4+2/1+5/3+3]	Relação de Igualdade
H1	112	Agora é com você!	Você conhece o jogo de dominó? Nesse jogo, cada peça é dividida em duas partes e os pontos de cada parte são representados por bolinhas. Faça as adições usando os números representados em cada peça de dominó. [3+1=4/2+2/4+0/4+1/3+2/5+0/3+3/4+2/5 +1/6+1/4+3/5+2]	Relação de Igualdade
I1	44	Jogo das sete argolas	Atenção, no pino só cabem 7 argolas. a) quantas são vermelhas? Quantas são azuis? Quantas são ao todo? B) c) d) e) quantas a v cabem? f) quantas aa cabem?	Relação de Igualdade
I1	56	Mais atividades	Observe a malha quadriculada. a) pinte 9 quadradinhos usando 2 cores diferentes. compare sua resposta com a de outros colegas. b) agora, pinte 9 quadradinhos usando 3 cores diferentes. compare sua resposta com a de outros colegas.	Relação de Igualdade
I1	89	Composição e decomposição de números	Complete: [9retângulos que tem somas (2 completas sendo 1+9 e 9+1 e 7 faltando uma das parcelas) - com duas parcelas - ligados a um círculo no qual tem o número dez	Relação de Igualdade
I1	90	Composição e decomposição de números	Pinte as figuras e complete as representações [para somar 6]. a) cinco skates pintados e um branco b) uma pera pintada e cinco brancas c) quatro sorvetes coloridos e dois brancos d) duas rosas pintadas e quatro brancas e) três balões azuis e três brancos f) seis caracóis pintados	Relação de Igualdade

I1	99	Jogo "mais perto de 10"	Daniel e Alice fizeram, cada um 12 pontos, eles mostraram uma ficha para os amigos. Qual é a ficha escondida de cada um? Complete. [ele tem 6 e ela tem 5/ele se completa com 6 e ela com 7]	Relação de Igualdade/ Propriedades da Igualdade
I1	100	Mais atividades	1) pinte todas as bandeiras, algumas de azul e as outras de vermelho. quantas você pintou de azul? quantas você pintou de vermelho? quantas bandeirinhas você pintou ao todo?/se perguntasse "compare com as respostas dos seus colegas"?	Relação de Igualdade
I1	100	Mais atividades	2) quantos botões há ao todo? Complete. A)5v+5a b)3v+7a c)9v+1a	Relação de Igualdade
I1	100	Mais atividades	3) quantas fichas há ao todo? Complete. a)6vo+5ve/9vo+2ve/8vo+3ve/7vo+4ve/10 vo+1ve	Relação de Igualdade
I1	101	Mais atividades	Juntando 4 fichas com 9 fichas, podemos obter 13 fichas. Mas também podemos obter 13 juntando outras quantidades. [juntando... Com...]	Relação de Igualdade
I1	101	Mais atividades	Podemos obter 15 fichas:[juntando.... Com...]	Relação de Igualdade
I1	101	Mais atividades	Separe cada quantidade abaixo em 2 grupos. Veja uma opção e escreva outras.a)[soma 14]... E.7. ... E.... b) [soma 20].... E 7 .... E.... ....e....	Relação de Igualdade
I1	182	Mais atividades	Observe o trecho do tabuleiro de um jogo de trilha, que é jogado com dois dados. [pino no 64] a) imagine que na casa 56 há um pino verde. Quantas casas ele deve percorrer para alcançar o pino vermelho? b) quantas casa o pino vermelho deve percorrer para chegar a casa 70?	Propriedades da Igualdade
J1	113	Formando 5	É a sua vez! Com um colega, escolha duas cores e pinte os 5 vagões de cada trem. Depois, completem as adições. [três trens com 5 vagões a serem pintados]	Relação de Igualdade
J1	154	Formando 10	Ligue dois números de cores diferentes, que adicionados resultem em 10. Depois, escreva as adições correspondentes. [números de 0 a 5 em azul e de 6 a 10 em amarelo] duas adições já foram calculadas. Observe: 2+8 ou 8+2=10/restam preencher as demais somas	Relação de Igualdade
J1	154	Formando 10	Em cada linha, pinte três cartões de números que juntos formam o total 10. a) 1, 3, 4, 2, 6. b) 9, 7, 8, 2, 1.	Relação de Igualdade
N1	69	Estudando a adição	Assim como Lucas, obtenha o resultado das adições: b.4+3= c. 5+2= d.2+5=	Relação de Igualdade
N1	78	Estudando a subtração	Assim como Alice, resolva as subtrações. a.5-1= d.6-2= e.7-3=	Relação de Igualdade
N1	155	Adição	Ligue as fichas cujos cálculos tenham o mesmo resultado [11+11->10+12/10+13->11+12/13+13->14+12/13+12->11+14/14+13=10+17]	Relação de Igualdade

N1	156	Adição com mais de dois números	Tânia e bruno efetuaram 3+7+2 de maneiras diferentes [Tânia:(3+7)=2=10+2=12/Bruno3+(7+2)= 3+9=12]. Agora, efetue cada cálculo de duas maneiras diferentes, a)8+3+4/b)9+2+4/c)11+5+2/d)6+5+8	Relação de Igualdade
N1	156	Adição com mais de dois números	Complete o esquema com os números das fichas, de maneira que o resultado de cada adição dos números indicados nas setas seja 18.[9,10,4,3 -> preencher as pontas de uma cruz cujo número central seja 5]	Relação de Igualdade

Fonte: o Autor (2022)

Essas atividades acima estão presentes nos livros didáticos dos primeiros anos, entretanto não constam pelos autores e editores dos livros didáticos como atividades algébricas. Contudo, é possível encontrá-las em livros didáticos do 3º ou até do 5º ano e lá elas serão compreendidas como atividades algébricas.

No Quadro 34 mostramos a quantidade dessas atividades com habilidades não-previstas de acordo com os objetos de conhecimento envolvidos, chamaremos «atividades não-previstas».

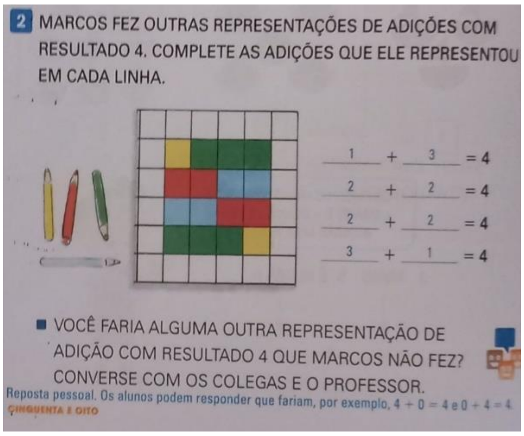
Quadro 34 – Recorrência das atividades não-previstas de acordo com o Objeto de Conhecimento

Objeto de conhecimento	**f**	**fr**
Relação de Igualdade	46	70,8%
Propriedades da Igualdade	13	20,0%
Elemento desconhecido	1	1,5%
Relação de Igualdade/Propriedades da Igualdade	5	7,7%
Total	65	100,0%

Fonte: O Autor (2022)

As atividades não-previstas se relacionam com a EF03MA11 – Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença, e com cálculo de elemento desconhecido da EF04MA15. A figura 50 apresenta um exemplo dessas atividades que poderiam ser compreendidas como satisfatória para a habilidade EF03MA11.

Figura 50 – Atividade sobre relação de igualdade



Fonte: Rocha (2017, p. 58)

A atividade da figura 50 trabalha justamente o que pede a habilidade EF03MA11 pois são formas distintas de adição de dois números naturais que resultam na mesma soma. A figura 51 pode ser compreendida como correspondendo à habilidade EF04MA15 visto que solicita números desconhecidos para tornarem verdadeiras as igualdades.

Figura 51 – Atividade sobre propriedades da igualdade

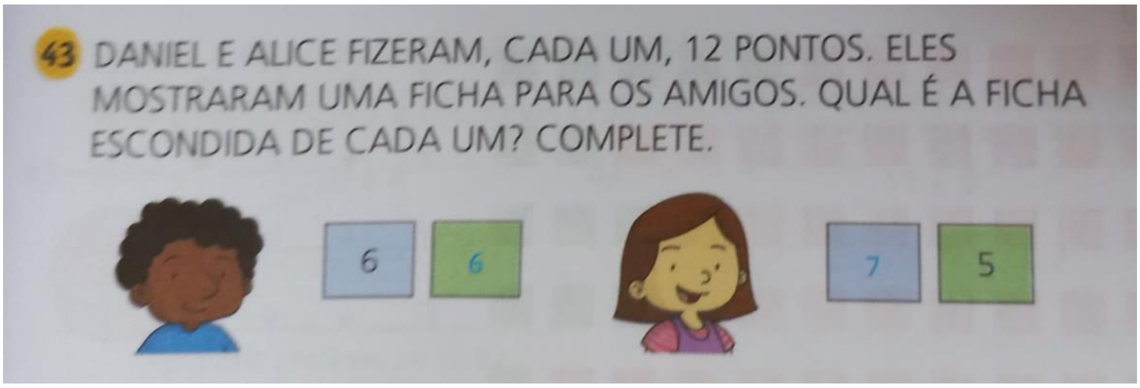
3 DESCUBRA E COMPLETE O QUADRO COM O NÚMERO QUE FALTA.

NÚMERO	NÚMERO ADICIONADO	RESULTADO
49	20	69
64	24	88
56	12	68
83	15	98
Exemplo de resposta: 65	12	77

Fonte: Toledo (2017, p. 157)

Ainda que nas linhas terceira e quarta o número desconhecido pudesse ser entendido como apenas um número que fosse resultado das adições, fica claro que na primeira, segunda e quinta linhas do quadro, os números necessários muito bem poderiam ser substituídos por incógnitas. A figura 52 apresenta uma atividade que não apenas trabalharia com a habilidade EF03MA11 como também com a habilidade EF04MA15.

Figura 52 – Atividade com duas habilidades



Fonte: Munhoz; Nazareth; Toledo (2017, p. 99)

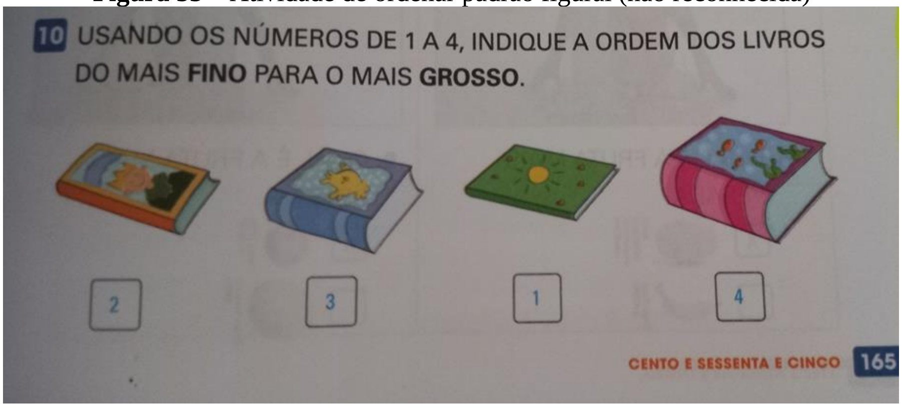
A atividade da figura 52 tanto trabalha com duas adições cujas somas são iguais, quanto pede que os alunos encontrem os valores para os quais as somas das duas crianças sejam 12. O detalhe, é que cada uma das habilidades é de um ano diferente. Assim, se a atividade estivesse num livro do 3º ano ela corresponderia à habilidade EF03MA11 e se ela estivesse num livro do 4º ano estaria relacionada à habilidade EF04MA15.

Essas atividades acima (figuras 51 e 52) estão presentes nos livros didáticos dos primeiros anos por nós analisados. Entretanto, não constam como atividades algébricas, não estão relacionadas pelos autores dos LD como relacionadas a alguma habilidade da UT Álgebra. Contudo, é possível encontrá-las em livros didáticos do 3º, 4º ou até do 5º ano e lá estas atividades serão compreendidas como atividades algébricas. As atividades (figuras 51 e 52) acima se relacionam com a EF03MA11 que trata de "compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença" (BRASIL, 2017, p. 286), e com cálculo de elemento desconhecido da EF04MA15. Poderiam ser classificadas como referentes a habilidades citadas pela BNCC em outro ano letivo, diferente das citadas para os primeiros anos. Por exemplo, atividades que têm diferentes somas e diferentes subtrações como resultados poderiam ser enquadradas como habilidade EF03MA11 ou, por vezes, como EF04MA15, quando uma das parcelas está ausente a ser descoberta pelo estudante; ou numa subtração quando está ausente ou o minuendo ou o subtraendo.

Em geral, nos LD analisados atividades de «completar padrões numéricos» são as mais frequentes. Aparecem também, atividades de «continuar padrões numéricos», «continuar padrões figurais», principalmente com a pintura de figuras e /ou malhas quadriculadas ou triangulares e «completar» e «continuar» «padrões numérico-figurais». Distinguimos «continuar» e «completar» sequências pelo fato de que «completar» entendemos há elementos a serem preenchidos pelos estudantes entremeados com elementos já citados/expostos na atividade. Como «continuar» sequências entendemos aquelas atividades em que um, dois ou três elementos iniciais da sequência são citados ou expostos e aos estudantes cabe a continuidade de um ou mais elementos.

Nas atividades dos livros dos primeiros anos nem todas as atividades que poderiam ser entendidas como desenvolvimento das habilidades de Álgebra estão sendo consideradas pelos autores como atividades correspondentes às habilidades do texto da BNCC. Atividades semelhantes (ou muito similares, ou até iguais, apenas considerando-se a troca dos números) são vistas por diferentes autores como sendo referentes a habilidades diferentes. Atividades com a reta numérica, por exemplo. As figuras 42 e 43 apresentam atividades na reta numérica, contudo, a autora do livro J1, no qual está a atividade da figura 42 considera estar desenvolvendo uma habilidade relacionada à Álgebra, enquanto os autores do livro N1, da atividade da figura 43, consideram como desenvolvimento de uma habilidade relacionada à UT dos Números. Um outro exemplo, enquanto na atividade da figura 38, o autor do livro H1 reconhece que na seção «Qual é a massa? Quanto cabe?» há atividades que se relacionam com a Álgebra, a atividade da figura 53 não é reconhecida como uma atividade de ordenar padrão figural.

Figura 53 – Atividade de ordenar padrão figural (não reconhecida)



Fonte: Rocha (2107, p. 165)

Para a autora do livro A1 considera que no capítulo 8 «Grandezas e Medidas» se propõe apenas ao trato das habilidades EF01MA12, EF01MA15 e EF01MA19, que trabalham com descrever localizações, comparação de comprimentos, massas e volumes e reconhecimento e relacionamento de valores de moedas e cédulas do sistema monetário, respectiva e suscintamente. Na atividade da figura 53, parece-nos que mais do que comparar volumes (mais grosso/mais fino) de livros, o exercício solicita que os ponha em ordem do mais fino ao mais grosso, a partir da enumeração deles.

Na compreensão de Blanton e Kaput (2005) as formas mais trabalhadas nos anos iniciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico são a AAG e APF. As possibilidades expostas por Blanton e Kaput (2005) para o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da APF são:

- Simbolizar quantidades e operar com expressões simbólicas;
- Representar dados graficamente;
- Encontrar relações e funções;
- Prever dados/estados desconhecidos usando os conhecidos; e,
- Identificar e descrever padrões numéricos e geométrico.

Para o trabalho com «simbolizar quantidades e operar com expressões simbólicas», por exemplo, podemos reunir grupos de crianças da sala e criar uma regra «L + B», na qual «L» representará o número de lápis de cada grupo e «B» representará o número de borrachas de cada grupo. Assim, L + B, para cada grupo de crianças terá um valor, um número diferente.

Na «representação de dados graficamente», o objetivo é estabelecer relações entre duas grandezas, prática que será comum no trabalho com funções. Pode-se, por exemplo, estabelecer relação diária entre a quantidade de crianças que comeu verduras e/ou legumes no dia anterior. Essa contagem pode ser feita diariamente, e ao chegar na sexta-feira, a professora vai poder expor às crianças um gráfico com os cinco dias da semana e quantas crianças comeram legumes/verduras a cada dia da semana.

O trabalho de «encontrar relações e funções» pode ser realizado como as atividades das figuras 48 e 49, que relacionavam as caixas de suco e a quantidade de copos e o número de bicicletas com o número de rodas. Ainda que a BNCC tenha o entendimento de que a proporcionalidade só deva ser trabalhada no 5º ano.

Na «previsão de situações, dados, estados futuros com os dados conhecidos», Blanton e Kaput (2005) exemplificam com a brincadeira de aperto de mãos. Os alunos descobriram quantos apertos de mão haveria em grupos com seis, sete ou oito pessoas, caso todos se cumprimentassem mutuamente. A partir daí puderam encontrar caso o grupo aumentasse para onze ou doze pessoas. Blanton e Kaput (2005) trabalharam com crianças de 3º ano. No caso, para o 1º ano, basta diminuir o grupo de pessoas amigas, para estabelecer as relações e «prever as situações futuras», com um número maior de amigos.

O trabalho com a quinta forma de trabalhar a APF, de acordo com Blanton e Kaput (2005) é a mais comum e mais usada nos LD analisados, a «identificação e descrição de padrões numéricos e geométricos». O exemplo trazido por Blanton e Kaput (2005) para essa forma de APF foi solicitar aos alunos que generalizassem e encontrassem uma forma de prever o aperto de mão para um número «n» qualquer de pessoas.

Tendo exposto as atividades algébricas encontradas em onze coleções de LD do PNLD2019 e tendo brevemente exemplificado as cinco formas como Blanton e Kaput (2005) entendem que a Álgebra pode ser trabalhada mesmo considerando-se apenas com APF, na seção seguinte, apresentamos nossas considerações finais.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O percurso a que nos propusemos era de avaliar os livros didáticos de Matemática dos anos iniciais em relação à presença da Álgebra. Para tanto, buscamos ao longo do trabalho demonstrar as diferentes formas, tanto com as quais as crianças e adolescentes tiveram no passado, quanto com as quais estão tendo e ainda como poderão ter seu primeiro contato com a Álgebra por meio dos LD.

Se por um lado a educação pode ser esperança, e conforme Marcílio (2005) o Brasil saltou de 0,1% da população nos bancos escolares em 1749 para cerca de 45 milhões de brasileiros na virada dos anos 2000, também é verdade que esse processo tem sido demorado e cheio de percalços. Em 1997, os PCN incluíram na lista das causas dos insucessos das propostas de renovação do ensino a falta de compreensão por parte dos professores. Desse modo, parecia adequado nos debruçarmos sobre as novas propostas e averiguar o que elas dizem, o que prometem, como lidamos com as mudanças, porque, querendo ou não, as alterações curriculares acontecem à margem dos desejos da maioria dos indivíduos.

Sobre a influência do NCTM na elaboração da BNCC, fazemos tal defesa, porque temos indícios históricos. Observamos em situações anteriores a influência dos pensamentos político, econômico e pedagógico de outros países no que diz respeito às políticas educacionais e às concepções pedagógicas. Durante os primeiros anos da nossa independência ainda estávamos sob influência portuguesa e muitos dos livros e do pensar a educação brasileira provinham de além-mar. Após a influência de Portugal, muitos livros de Matemática ou provinham da França ou eram impressos sob influência dos manuais franceses. Com a Proclamação da República, nossa Reforma Benjamin Constant sofreu influência do positivismo de August Comte e mesmo livros de Matemática fizeram citação ao pensador francês. Na segunda metade do século XX, o ensino de Matemática no Brasil (e em grande parte dos países alinhados aos Estados Unidos no 2º pós-guerra) foi alterado devido a interesses estadunidenses, foi o período da Matemática Moderna (MM).

Em 1997, o Brasil lançou os PCN, após a divulgação do Relatório Jacques Delors, em 1996, documento da UNESCO que marca a entrada da Pedagogia das Competências em nosso país. Desde os anos 1980, o *National Council of Teachers of Mathematics* vem dando atenção e desenvolvendo estudos acerca do ensino e da aprendizagem de Álgebra. Em meio à década de 1990 chegaram ao Brasil estudos do NCTM acerca da Álgebra escolar sob o título As idéias da Álgebra (COXFORD; SHULTE, 1994) e desde o ano 2000 tem circulado os novos estudos do NCTM, os *Principles and Standards*. E, desde então tem se alastrado por diversos países o movimento denominado «*Early Algebra*». Outro indício que temos dessa influência é o fato de justamente desse documento do NCTM dividir o ensino de Matemática nos mesmos cinco ramos que a BNCC brasileira fraciona o ensino de Matemática, as mesmas cinco denominações dadas às nossas Unidades Temáticas (UT). James Kaput, já falecido, fazia parte e Maria Blanton faz parte do NCTM, assim, seus estudos se inserem nas produções do NCTM bem como no movimento *Early Algebra*.

Na revisão histórica pudemos perceber que a primeira notícia que se tem de proposta para inserção da Álgebra nos anos iniciais partiu de Reis, em 1919. Num segundo momento, ainda que de forma diferente do que hoje entendemos por inserção da Álgebra, ela esteve presente nos anos iniciais (ensino primário, na época) por meio da MM com sua Teoria dos Conjuntos. No Brasil, a chegada da MM alterou a sequência dos conteúdos e incluiu outros, mudou definições, pudemos observar a mudança no conceito de equação em Marcondes (1969) para Marcondes (1975). Nos Estados Unidos, em 1960, local e período de início da MM, a inserção de novos assuntos tratou da incluir o ensino de funções. A Itália que não teve a MM também passou por alteração no seu currículo de Álgebra. Enquanto o livro de Boari (1956) era muito parecido, inclusive nas dimensões, com o livro de Trajano (1905) no Brasil, o livro de Valentini e Bergna (1985) não só já tinha inserido o estudo de funções na escola média (que equivale ao nosso período de anos finais do EF) como trazia informações sobre o funcionamento dos computadores e a presença da Álgebra neles. Tanto em Rich (1960), quanto em Valentini e Bergna (1985) observamos que a introdução do conceito de equação se dá no começo do livro, sem antes passar por todo o estudo das expressões algébricas, monômios e polinômios.

Em termos de pesquisas, mantemos a opinião de que os professores-pesquisadores da Unicamp, Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) jogaram papel importante quando levantaram a questão do abandono da Álgebra, ainda que em termos de pesquisas. Mas, há também uma confluência de fatores como alertou House (1994) sobre as forças que atuam sobre a Álgebra na escola média, a força da tecnologia da computação. Se entendemos como Saviani (1991, 2000) que a escola é determinada e não determinante, podemos entender o porquê da necessidade de trabalharmos mais e melhor o ensino da Álgebra. As TDIC precisam que mais pessoas entendam a Álgebra, tanto para mais operar com TDIC como para mais TDIC ser produzida. Desse modo, é compreensível que essa necessidade da sociedade acabe se impondo à escola, e nela se busque um trabalho ampliado com a Álgebra. (E, o mesmo vale não apenas para a Álgebra, mas também para o trabalho de Probabilidade e Estatística, que vem sendo recomendado aos anos iniciais desde os PCN. Mas, por motivos óbvios não nos detemos nesse assunto.)

No entanto, a forma como a BNCC está disposta deixa dúvidas quanto aos reais efeitos que ela poderá trazer para a educação brasileira. Se ela é plena de páginas, são 600, com belos e entusiasmantes textos, o fato dela se encerrar, para cada componente curricular, em linhas soltas, como as habilidades, possibilita que ao invés de haver todo um debate acerca dos textos, do conteúdo real – ou do que deveria ser o real conteúdo; a prática nas escolas, com professores que em boa parte trabalham três turnos em locais diferentes, pode se tornar uma opção para que o planejamento se volte única e exclusivamente para as habilidades. Para cada aula, pode vir a haver o trabalho sobre uma das habilidades. Com a pressão dos interesses de grupos de instituições privadas, que vislumbram a privatização, mesmo que por meio de terceirização, dos serviços públicos como a educação, nada impede que em breve as aulas, referentes a cada uma das habilidades, estejam sendo vendidas para governos, escolas e professores.

Na análise da inserção da Álgebra nos novos livros didáticos é possível perceber que embora a Álgebra seja um dos cinco blocos temáticos propostos pela BNCC, sua inserção parece ter sido feita às pressas para algumas dessas coleções. Há coleções que expõem a indicação das habilidades no início do capítulo e depois não fica claro qual atividade corresponde a qual habilidade, enquanto há outras que indicam seção a seção a presença de uma ou de outra habilidade, de modo que não restem dúvidas. Uma das coleções chegou a imprimir três páginas do documento nacional. Como em tantas outras propostas de reformulações curriculares novamente o discurso oficial foi de que o documento foi elaborado por especialistas e que as dez competências serão a garantia da construção de dias melhores para nossos estudantes.

A Álgebra destinada pela BNCC para o 1º ano concentrou-se em apenas dois objetos do conhecimento, padrões figurais e sequências recursivas (numéricas) e duas habilidades, sendo essas relacionadas apenas à APF e entendendo como excluída de qualquer possibilidade o trabalho da AAG. Na prática, os autores e editores de livros acabaram por trabalhar também com a combinação de padrões numéricos com padrões figurais, o que denominamos como padrões numérico-figurais. Assim, os livros recorrem a utilização da combinação de padrão numérico com o auxílio de retas ou de quadros de números para completarem ou continuarem sequências numéricas, ainda que com menor recorrência do que o uso de padrões figurais ou numéricos.

Para as habilidades previstas pela BNCC para o 1º ano, que tratavam apenas de «organizar e ordenar» padrões figurais e «descrever elementos ausentes em sequências recursivas», os autores dos LD acabaram por mostrar que é possível ampliar o trabalho com Álgebra utilizando tarefas de «identificar», «construir», «explicar» e até mesmo «representar» sequências. Não por acaso, habilidades muitas vezes previstas (como APF) para os anos seguintes, como a EF02MA09 «construir sequências de números naturais», como EF02MA10 «descrever um padrão de sequências repetitivas e de sequências recursivas» ou como EF02MA11 «descrever os elementos ausentes em sequências» foram utilizadas nos LD do 1º ano. As atividades expostas nas figuras 48 e 49 classificamos como atividades de «continuar padrões numéricos figurais», entretanto, visivelmente tais poderiam ser relacionadas à habilidade prevista para o 5º ano, a EF05MA12 que aborda sobre «resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta».

Em contraposição ao «esquecimento» do MEC quanto ao trabalho com AAG no 1º ano, ao menos, os autores de 10 das 11 coleções mostraram que é possível o trabalho com a «relação de igualdade» e com as «propriedades da igualdade», objetos do conhecimento previstos pela BNCC apenas para o 3º e 4º anos. Assim, algumas atividades poderiam ser classificadas como referentes a habilidades citadas pela BNCC em outro ano letivo, diferente das citadas para os primeiros anos. Por exemplo, atividades que têm diferentes somas e diferentes subtrações como resultados poderiam ser enquadradas como habilidade EF03MA11 ou, por vezes, como EF04MA15, quando uma das parcelas está ausente a ser descoberta pelo estudante; ou numa subtração quando está ausente ou o minuendo ou o subtraendo.

Na compreensão de Blanton e Kaput (2005) as formas mais trabalhadas nos anos iniciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico são a AAG e APF. Enquanto AAG, entendem que pode ocorrer pela exploração das propriedades e relações de números inteiros, pela exploração das propriedades e operações com inteiros, tratamento algébrico do número, resolvendo sentenças numéricas com valores ausentes e exploração da igualdade como expressões de uma relação entre quantidades. Nenhuma atividade semelhante a uma dessas possibilidades poderia estar incluída nos livros do 1º ano do EF pela rigidez e engessamento que a BNCC causa. As possibilidades expostas por Blanton e Kaput (2005) para o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da APF estão relacionadas a simbolização de quantidades e operação com expressões simbólicas, representação de dados graficamente, estabelecimento de relações e funções, previsão de dados desconhecidos usando dados conhecidos e identificação e descrição de padrões numéricos e geométricos. A BNCC restringiu o trabalho com a Álgebra do 1º. ano do EF e, provavelmente, tenha ocorrido o mesmo nos anos seguintes do EF.

Ainda que a Álgebra esteja presente nos livros didáticos, ainda parece insipiente, há uma repetição em praticamente todas as obras e uma concentração em atividades de completar e continuar. O trabalho privilegia a Álgebra conectada ao trato dos Números, esquecendo das potencialidades das figuras para além da Geometria. Pelos títulos das seções anotados conseguimos identificar cerca de 47% das atividades estão relacionadas a seções que privilegiam o trabalho com Números, 19% dentro da própria Álgebra, 8% com Geometria e cerca de 5% junto ao trabalho com Grandezas e Medidas. Praticamente não há trabalho com gráficos ou tabelas, diferente do livro português, de Gonçalves e Mestre (2019). Entendemos que se confirmou nossa ideia inicial de que a maior parte do trabalho com Álgebra não apenas é referente ao pensamento funcional, como a ênfase maior é mesmo no trabalho com padrões. Se a BNCC tem 600 páginas, o ensino de Álgebra no 1º ano do EF não poderia ficar baseado em duas habilidades. Esse direcionamento, toda essa exatidão acaba por restringir o trabalho de Álgebra reduzindo a amplitude da proposta e limitando as possibilidades de aprendizagem.

O trabalho para a melhoria do ensino e da aprendizagem de Matemática, da Álgebra, em particular estão longe de se concluir, contudo esperamos ter contribuído para o debate. Sabemos das limitações do nosso estudo no que se refere a termos observado apenas os livros do 1º ano. Como está a Álgebra nos livros do 2º, 3º, 4º e 5º anos do EF, é tarefa que fica em aberto para futuros estudos. Também fica pendente a pergunta sobre quais formas a AAG poderia ser trabalhada desde o 1º ano, mesmo que a BNCC não preveja essa possibilidade.

Ao fim do nosso trabalho, as perspectivas de retomada da atenção à educação parecem ressurgir. Talvez o MEC repense não apenas o Ensino Médio, mas talvez a própria BNCC. O certo, pelo que estudamos de história da educação, é que com novos momentos, novos ciclos políticos e econômicos, novas reformas da educação virão. Lutamos para que a tendência seja da ampliação dos estudos sobre como melhorar o ensino e a aprendizagem e não com pesquisas sobre como investir menos com a educação pública.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, M. **O percurso da didatização do pensamento algébrico no ensino fundamental uma análise a partir da transposição didática e da teoria antropológica do didático.** Tese de doutorado. USP. São Paulo - SP. 2014.

AMORIM, N. D. **O PNLD e o currículo de estatística em livros didáticos de matemática no ciclo de alfabetização**. Dissertação de Mestrado. UFPE. Recife – PE, 2017. Disponível em https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/33181- Acesso em 06 mar 2022.

ARAÚJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. **Revista Educação Matemática e Pesquisa,** São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões em mosaicos.** São Paulo: Atual, 2001.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões em mosaicos.** São Paulo: Atual, 2006.

BARBOSA, A.; VALE, I.; PALHARES, P. Pattern Tasks: thinking processes used by 6th grade students. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa – Relime**. vol. 15, n. 3, p. 273 – 293, 2012.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** Edições 70, Lisboa: 2016.

BAUER, M. W.; GASKELL, G. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som:** um manual prático. Tradução Pedrinho Guareschi. Petrópolis: Vozes, 2015.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education.** Vol. 36. No. 5 p. 412 – 446. 2005.

BECK, V. C.; SILVA, J. A. O estado da arte das pesquisas sobre o pensamento algébrico com crianças. **Revemat**. Florianópolis Vol. 10 No. 2 pp. 197 – 208. 2015

BELHOSTE, B. Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'historie des mathématiques. **Revue d'histoire des mathématiques**. vol 4, p. 289 – 304. Paris, 1998.

BOARI, F. **Algebra Elementare:** parte prima. Torino: S. Lattes & C., 1956.

BONADIMAN, A. **Álgebra no Ensino Fundamental**: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas. Dissertação de Mestrado. UFRGS. Porto Alegre – RS. 2007. Disponível em https://lume.ufrgs.br/handle/10183/11228 - Acesso em 06 mar 2022.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 23 – 36.

BORDEAUX, A. L.; RUBINSTEIN, C.; FRANÇA, E. OGLIARI, E. MIGUEL, V. **Novo bem-me-quer matemática, 1º ano.** 4ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2017.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998a.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998b.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2017.

_______________. **PNLD 2019: Matemática** – guia de livros didáticos - Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica - Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2018.

BRANDÃO, M. **Matemática Conceituação Moderna.** Primeiro volume, São Paulo: Editôra do Brasil, s/da.

BRANDÃO, M. **Matemática Conceituação Moderna.** Segundo volume, São Paulo: Editôra do Brasil, 1968.

BRANDÃO, M. **Matemática Conceituação Moderna.** Terceiro volume, São Paulo: Editôra do Brasil, s/db.

BUSSI, M. G. B. Ricerca in didattica della matematica: alcuni studi italiani. **La Matematica nella società e nella cultura.** Bolletino U. M. I. Serie VIII, Vol. IV – A, p. 117 – 150, aprile, 2001. Disponível in: http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2001_8_4A_1_117_0 – Acesso em 02 jan 2022.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática, 2ª ed. 1952.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHILIEMANN, A, **Na vida dez, na escola zero.** São Paulo: Cortez, 1995.

CARRAHER, D. W; SCHLIEMANN, A. D.; BRIZUELA, B.M.; EARNEST, D. Arithmetic and algebra in early mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education.** Vol. 37. No. 2, p. 87 – 115. 2006.

CHARTIER, R. **A aventura do livro**: do leitor ao navegador. Tradução de Reginaldo de Moraes. São Paulo: UNESP/Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 1999.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação.** Vol. 2. P. 177 – 229. São Paulo, 1990.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, v. 30, n. 3, p. 549-566, set/dez, São Paulo, 2004.

CIVINSKI, D. D. **Introdução ao estudo da aritmética e da álgebra no ensino fundamental.** URB. Dissertação de Mestrado. Blumenau – SC. 2015.

COMBEROUSSE, C. **Cours de Mathématiques.** 4a ed. Paris : Gauthier-Villars, 1899.

COMENIUS, **Didática Magna.** São Paulo: WMF Martins Fontes, 2011.

CORREIA, C. E. F. **O Estruturalismo em livros didáticos:** SMSG e Matemática – Curso Moderno. Tese de doutorado. Unesp-Rio Claro, 2015.

CORREIO, M. C. M.; CORREIO, J. R. A. Parâmetros balizadores da pesquisa em educação matemática no Brasil: pesquisa em educação algébrica. **Revista Educação Matemática e Pesquisa.** Vol. 3. No. 17. p. 541 – 555. São Paulo – SP. 2015.

CORRY, L. Writting the ultimate mathematical textbook: Nicolas Bourbaki's éléments de mathematique, p. 565-588, in: ROBSON, E. et al, **Handbook of the History of Mathematics**, Oxford, Oxford University Press. 2009. Disponível em https://tau.ac.il – Acesso em 22 fev 2022.

COSTA, D. A.; VALENTE, W. R.(orgs). **Saberes matemáticos no curso primário**: o que, como e por que ensinar? São Paulo: Livraria da Física, 2014.

COSTA, E. V. Um estudo de Álgebra Elementar com balança de dois pratos. **Revista Psicologia: Reflexão e Crítica.** Vol 23. No. 3. Pp 456 – 465. UFRPE. Recife – PE. 2010.

COSTA, J. S. C. **O cálculo mental em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais.** Dissertação de Mestrado. UFMS. Campo Grande – MS, 2018.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

DANTE, L. R. Livro didático de Matemática: uso ou abuso? **Em Aberto.** Ano 16, n. 69, jan/mar, Brasília. 1996.

_______________. **Ápis matemática, 1º ano:** ensino fundamental, anos iniciais. 3ª. ed. São Paulo: Ática, 2017.

DEMANA, F.; LEITZEL, J. Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos. In: In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 70 – 78.

DIENES, Z. P. **A Matemática Moderna no ensino primário.** Tradução de A. Simões Neto. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura AS, 1967.

DIENES, Z. P.; GOLDING, E. W. **Os primeiros passos em Matemática:** lógica e jogos lógicos**.** Tradução Euclides José Dotto. São Paulo: Herder, 1969.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.
_______________. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

ELIAS, H. R.; SAVIOLI, A. M. P. das D. Dificuldades de graduandos em Matemática na compreensão de conceitos que envolvem o estudo da estrutura algébrica grupo**. Revista Educação Matemática e Pesquisa.** Vol. 15. No. 1. pp 51 – 82. São Paulo – SP. 2013.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** São Paulo: Unesp, 2004.

FÉLIX, L. **Exposé moderne des mathématiques élémentaires.** 3a. ed. Paris : DUNOD, 1966.

FERREIRA, W. C., LEAL, M. R., MOREIRA, G. E. *Early Algebra* e a Base Nacional Comum Curricular: desafios aos professores que ensinam matemática. Florianópolis: **REVEMAT**, v. 15, n. 1, p. 01 – 21, 2020.

FERREIRA, T.; CARVALHO, H. **Curso completo de Matemática Moderna para o ensino primário**: metodologia e didática. 2º. Ano. São Paulo: Renovação Ltda, 1967a.

____________. **Curso completo de Matemática Moderna para o ensino primário**: metodologia e didática. 3º. Ano. São Paulo: Renovação Ltda, 1967b.

____________. **Curso completo de Matemática Moderna para o ensino primário**: metodologia e didática. 4º. Ano. São Paulo: Renovação Ltda, 1967c.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2005. Disponível em https://scholar.google.com.br/citations?user=W86cFn4AAAAJ&hl=pt-BR&oi=sra - Acesso em 31 dez 2017.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. In: **Pro-Posições.** Campinas. Vol 4, p. 78-91, no. 1, março, 1993.

FRANCO, M. L. P. B. **Análise de Conteúdo.** Campinas: Autores Associados, 2018.

GARBI, G.G. **O romance das equações algébricas.** São Paulo: Livraria da Física, 2006

GERDES, P. **Sobre o despertar do pensamento geométrico.** Curitiba: Editora da UFPR, 1992.

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra.** Dissertação de Mestrado. PUC-RS. 2008.

GIOVANNI JR., J. R. **A conquista da matemática, 1° ano:** componente curricular matemática: ensino fundamental, anos iniciais. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2018.

GOLFETI, S. M. **Análise de livro didático dos anos iniciais do Ensino Fundamental**: conteúdos de Estatística descritiva e o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP). Dissertação de Mestrado. PUC. São Paulo - SP, 2017.

GOMES, L. P. S. **Introdução à álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental**: uma análise a partir da teoria da objetivação. Tese de Doutorado. UFRN. Natal – RN, 2020.

GONÇALVES, H.; MESTRE, C. **Plim:** Matemática – 1º ano. Lisboa: Texto, 2019.

GRECCO, E. C. S. **O uso de padrões e sequências**: uma proposta de abordagem para introdução à álgebra para alunos do 7º. ano do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado. PUC-SP. São Paulo – SP. 2008.

GROENWALD, C. L. O.; BECHER, E. L. Características do Pensamento Algébrico de estudantes do 1º ano do ensino médio. **Revista Educação Matemática e Pesquisa.** vol. 12. No. 2. pp. 242 – 270. São Paulo – SP. 2010.

HANKE, T. A. F. **Padrões de regularidades**: uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico. Dissertação de Mestrado. PUC-MG. Belo Horizonte – MG. 2008.

HENRI, P.; MOSCOVICI, S. Problèmes de l'analyse de contenu. **Languages**, n. 11, pp 36 – 60, 1968. Disponível em https://www.persee.fr/doc/lgge_0458-726x_1968_num_3_11_2900 - Acesso em 11 mar 2022.

HYPOLITO, A.M. BNCC, agenda global e formação docente. **Retratos da Escola.** Vol. 13, n. 25, p. 187-201, jan/mai. Brasília, 2019. Disponível em http//www.esforce.org.br – Acesso em 11 nov 2022.

HOUSE, P. A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 1 – 8.

KAPUT, J. J.; CARRAHER, D. W.; BLANTON, M. L. **Algebra in the early grades.** New York: Routledge, 2014.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 104 – 110.

KLINE, M. **O Fracasso da Matemática Moderna.** São Paulo: IBRASA, 1976.

KLIPPENDORF, K. **Content analysis:** an introduction to its methodology. Newbury Park – CA/USA: SAGE, 1980.

KUHN, T. **A estrutura das revoluções científicas.** São Paulo: Perspectiva, 2011

LEHNEN, L. Entre a usina e a democracia: as crônicas de Eliane Brum e a desconstrução da democracia brasileira. **Veredas:** Revista da Associação Internacional de Lusitanistas, pp. 69 – 85, n. 32, jul/dez, 2019. Disponível em https://revistaveredas.org/index.php/ver/article/view/602/468 - Acesso em 11 mar 2022.

LEMES, N. dos S.; CEDRO, W. Professores de matemática em atividade de ensino de álgebra apropriações da teoria histórico cultural. **Revista Portuguesa de Educação**, pp. 133 -154, Universidade do Minho – Portugal. 2015.

LIMA, R. N. de. **Equações algébricas no ensino médio uma jornada por diferentes mundos da matemática.** Tese de Doutorado. PUC-SP. São Paulo – SP. 2007.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética a álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LOCKHEAD, J.; MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 144 – 154.

LUIZ, E. C., LANCILLOTTI, S. S. P. Uso de livros didáticos para o ensino de matemática: da origem colonial à difusão no Brasil Império. Interfaces na educação, Parnaíba, v. 12, n. 36, p a , 2021

MAEDER, A. M. **Curso de Matemática.** 3ª série. 2ª edição. São Paulo: Edições Melhoramentos, 1944.

MAEDER, A. M. **Curso de Matemática.** 2ª série. 3ª edição. São Paulo: Edições Melhoramentos, 1945.

MAEDER, A. M. **Curso de Matemática.** 1ª série. 5ª edição. São Paulo: Edições Melhoramentos, 1946.

MALARA, N. A. **Innovazioni nell'insegnamento dell'algebra.** Modena, 2015. (Disponível em http://www.progettoaral.it/2016/07/15/malara-nicolina-a-2016-innovazioni-nellinsegnamento-dellalgebra/ Acesso em 25 ago 2021.)

MANACORDA, M. A. **História da Educação.** São Paulo: Cortez, 2006

MARCÍLIO, M. L. **História da escola em São Paulo e no Brasil.** São Paulo: Imprensa Oficial, 2005.

MARCONDES, O. **Álgebra.** São Paulo: Editôra do Brasil, 1969.

MARCONDES, O. **Álgebra**: ensino de primeiro grau. São Paulo: Editora do Brasil, 1975.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B. S.; BRUCKHEIMER, M. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 49 – 69.

MEYER, J. W.; KAMENS, D. H.; BENAVOT, A. **School Knowledge for the masses**: World Models and National Primary Curricular Categories in the Twentieth Century. New York – NY/USA: Routledge. 2017.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J.; CARVALHO, D. L. C.; MENDES, I. A. **História da Matemática em Atividades Didáticas.** São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MIGUEL. A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM M. A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-posições**, vol. 3, no. 1 (7), março de 1992.

MILHOSSI, C. N. **Apresentação da álgebra por livros didáticos aprovados no PNLD 2014.** Dissertação de Mestrado. USP. São Paulo – SP, 2017.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A.; FIORENTINI D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Revista Zetetiké**. Ano 1. n. 1. p. 1 – 39. Unicamp. Campinas – SP. 1993.

MENDES, I. A.; VALENTE, W. R. **A Matemática dos Manuais Escolares**: Curso Primário, 1890 – 1970. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

MICARELLO, H. A. L. S. A BNCC no contexto de ameaças ao Estado Democrático de Direito. **Eccos Revista Científica.** n. 41, p. 61-75. set/dez. São Paulo: 2016. Disponível em **https://doi.org/10.5585/eccos.n41.6801** - Acesso em 11 nov 2022.

MORGAN, K., MOCARZEL, M. Formação para conformação? Uma análise das redes da Fundação Itaú Social na implementação da BNCC. **Interfaces da Educação.** Vol. 12, n. 35, p. 1039 – 1064, Parnaíba, 2021.

MUNAKATA, K. O livro didático: alguns temas de pesquisa. **Revista Brasileira de História da Educação.** v. 12, n. 3 (30), p. 179 – 197, set/dez, Campinas – SP: 2012

MUNHOZ, A. F.; NAZARETH, H.; TOLEDO, M. **Matemática:** 1º ano. 1ª ed. Cajamar: IBEP, 2017. (Coleçao Eu gosto)

NCTM. **Principles and standards for school Mathematics.** Reston – USA: 2000.

NEIRA, M. G., SOUZA JÚNIOR, M. A educação física na BNCC: procedimentos, concepções e efeitos. **Motrivivência**, v. 28, n. 48, p. 188-206, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/motrivivencia/article/view/2175-8042.2016v28n48p188

NEIRA, M. G. Terceira visão da BNCC: retrocesso político e pedagógico. **Democracia e Emancipação**: Desafios para a Educação Física e Ciências do Esporte na América Latina. In: XX CONBRACE_VII CONICE. 17 a 21 de set. Goiânia, 2017.

NOGUEIRA, R. C. S.; **A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental uma análise praxeológica**. Dissertação de Mestrado. UFMS. Campo Grande/MS. 2008. Disponível em https://repositorio.ufms.br:8443/bitstream/123456789/1543/1/Rosane%20Corsini.pdf – Acesso em 03 mar 2022.

NOSELLA, M. L. C. D. **As belas mentiras:** a ideologia subjacente aos textos didáticos. São Paulo: Moraes, 1979.

NIZ, C. A. F., TEZANI, T. C. R., OJA-PERSICHETO, A. J. Alfabetização e Letramento científico na Base Nacional Comum Curricular (BNCC): refletindo sobre os anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Communistas.** Vol. 4, n. 8, p. 250 – 263. jul-dez de 2020.

OLIVEIRA, G. P. Generalização de padrões pensamento algébrico e notações o papel das estratégias didáticas com interfaces computacionais. **Educação Matemática Pesquisa.** v. 10. n.2. São Paulo, p. 295-312, 2008.

OLIVEIRA, S. C. de; LAUDARES, J. L. **Pensamento algébrico**: uma relação entre álgebra, aritmética e geometria. 2015. Disponível em http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/PENSAMENTO-ALG%C3%89BRICO-UMA-RELA%C3%87%C3%83O-ENTRE-%C3%81LGEBRA-ARITM%C3%89TICA-E-GEOMETRIA.pdf - Acesso em 31 dez 2017.

OSTERMANN, F. e REZENDE, F. **BNCC, Reforma do Ensino Médio e BNC-Formação**: um pacote privatista, utilitarista minimalista que precisa ser revogado. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 38, n. 3, p. 1381-1387, dez. 2021. Disponível em https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/236760/001137187.pdf?sequence=1

PANIAGO, M. L. **"Livro" didático:** a simplificação e a vulgarização do conhecimento. São Paulo: Instituto Lukács, 2013.

PAULA, J. P. S. **O conceito de variável**: o Modelo 3UV nos exercícios de uma coleção de livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado. PUC. São Paulo – SP, 2019.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetétike**, Ano I, nº1, p. 7 –17. Campinas, SP: Unicamp. 1993.

PAVANELO, E. **Resistências e contribuições em relação a uma proposta de trabalho para o ensino de álgebra elementar junto a alunos da Educação de Jovens e Adultos.** Dissertação de Mestrado. Unesp Rio Claro – SP. 2004.

PERELMAN, J. **Aprenda álgebra brincando.** Trad. Milton da Silva Rodrigues. São Paulo: Hemus, 1970.

PIAGET, J. GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências.** Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

PINHEIRO, N. V. L. **Escolas de práticas pedagógicas inovadoras:** Intuição, Escolanovismo e Matemática Moderna nos primeiros anos escolares. Dissertação de Mestrado. Unifesp – Garulhos – SP. 2013

PINTO, R. A.; FIORENTINI, D. Cenas de uma aula de Álgebra: produzindo e negociando significados para "a coisa". **Zetetiké**. FE/Unicamp. Vol. 5. No. 8 – jul/dez. 1997.

PINTO, N. B.; VALENTE, W. R.(orgs.) **Saberes Elementares Matemáticos em Circulação no Brasil**: dos documentos oficiais às revistas pedagógicas 1890 – 19070. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

PIRES, C. M. C.; FIGUEIREDO, T. M. DE F. Q. Competências de cálculo mental e iniciação algébrica: algumas relações. **Amazônia Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**. V. 11 (21) Jul-dez 2014. p. 16 – 30.

POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 89 – 103.

QUINTELLA, A. **Matemática**. Segunda série ginasial. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 67ª. ed. s/d.

REAME, E. **Ligamundo:** matemática, 1º ano: ensino fundamental, anos iniciais. 1ª ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

REIS, L. F.; MARTINS, H.; FRANÇA, S.; LOUREIRO, K. **Aquarela Matemática:** manual do professor. São Paulo, Kit's, 2018.

REIS, O. S. **Algebra** – primeiros passos. Rio de Janeiro: Livraria Drummond, 1919. Disponível em https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/159574 - Acesso em 11 fev de 2022.

REIS, A.; REIS, L. **Curso Elementar de Mathematica.** 2ª. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves & Cia., 1892. Disponível em https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/127570 - Acesso em 20 fev 2022.

RIBEIRO, A. J. **Analisando o desempenho dos alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base nos dados do SARESP.** Dissertação de Mestrado. PUC-SP. São Paulo – SP. 2001.

______________. **Equações e seus multisignificados no Ensino de Matemática**: contribuições de um estudo epistemológico. Tese de Doutorado. PUC-SP. São Paulo – SP. 2007.

RIBEIRO, J.; PESSÔA, K. **Novo Pitangá:** matemática: manual do professor. 1º vol. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2017.

RICH, B. **Elementary Algebra.** New York: Schaum, 1960.

ROCHA, A. G. **Aprender Juntos Matemática, 1º ano**: ensino fundamental. 6a. ed. São Paulo: Moderna, 2017.

RODRIGUES, S. **Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com o auxílio do programa Aplusix**. Dissertação de Mestrado. PUC-SP. São Paulo – SP. 2008.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SÁ, P. F.; FOSSA, J. Uma distinção entre problemas aritméticos e algébricos. **Revista Educação em Questão**, Natal, vol. 33. N. 19, p. 253 – 278, set./dez. 2008.

SÁ-SILVA, J. R.; ALMEIDA, C.D; GUINDANI, J. F. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. In: **Revista Brasileira de História e Ciências Sociais.** Ano I. no.1, julho/2009.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, M. P. B. **Metodologia da Pesquisa.** Tradução de Daisy Vaz de Moraes, 5ª ed. Porto Alegre: Penso, 2013.

SANTANA, M. R. M. **Produções e usos de livros didáticos no ensino de probabilidade nos anos iniciais**. Tese de Doutorado. UFPE. Recife – PE, 2020.

SANTOS, A. B. C.; PEREIRA, J. C. S.; NUNES, J. M. V. Concepções de professores de matemática do ensino básico sobre a álgebra escolar. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.1, 81-103, 2017.

SANTOS, C. C. S. **O pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental**: a percepção de regularidades e o pensamento relacional. Dissertação de Mestrado. UNIVERSIDADE SÃO FRANCISCO. ITATIBA – SP, 2017.

SANTOS, J. C. **Vem voar:** matemática, 1º ano: ensino fundamental, anos iniciais. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2017.

SANTOS, L. G. **Introdução do pensamento algébrico um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo Vitória, 2007.

SANTOS, L. T. B. **Educação Financeira em livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental**: quais as atividades sugeridas nos livros dos alunos e as orientações presentes nos manuais dos professores? Dissertação de Mestrado. UFPE. Recife – PE, 2017.

SAVIANI, D. **Educação e questões da atualidade.** São Paulo: Livros do Tatu/Cortez, 1991.

_____________. **Pedagogia histórico-crítica:** primeiras aproximações. 7ª. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2000.

_____________. **História das ideias pedagógicas no Brasil.** Campinas, SP: Autores Associados, 2013.

SAVIANI, D. et al. **O legado educacional do século XIX.** Campinas, SP: Autores Associados, 2014.

SCHIRMER, S. B.; SAUERWEIN, I. P. S. Um mapeamento dos trabalhos sobre Livros Didáticos nos ENPEC. **Anais.** X Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências. Águas de Lindóia, SP. 2015. (Disponível em http://www.abrapecnet.org.br/enpec/x-enpec/anais2015/resumos/R0540-1.PDF - Acesso em 07 mar 2022.

SCHIZZEROTTO, A.; ABBIATI, G.; VERGOLINI, L. Espansioni econtrazioni della partecipazione scolastica in Italia dall'inizio del XXsecolo ad oggi. Il ruolo delle riforme scolastichee delle vicende economiche. **La Società Italiana e le Grandi Crisi Economiche 1929 – 2016.** Roma: Istituto Nazionale Di Statistica, 2018.

SCHOEN, H. L. A resolução de problemas em álgebra. In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 135 – 143.

SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de matemática**: notas de aula. (tradução Maria Laura Magalhães Gomes). Campinas, SP: Autores Associados, 2003.

SILVA, A. F. **A concepção da habilidade de resolução de problemas aritméticos em livros didáticos dos anos iniciais**: um olhar a concepção Histórico-Culturalista. Dissertação de Mestrado. UFRN. Natal – RN, 2012.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I**. Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, SP: UFSCAR, v. 6, no. 1, p. 206 – 222, mai 2012

SILVA, J. D. **Problemas do campo conceitual multiplicativo nos livros didáticos do 1º ao 3º anos do ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado. UFPR. Curitiba – PR, 2021.

SILVA, J. T.; RESENDE, M. R. Livro didático e apropriação de conceitos algébricos: uma análise na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural**. Perspectivas em Educação Matemática**. Vol. 9. No. 20. pp. 388 – 408. UFMS. Campo Grande – MS. 2016.

SILVA, M. V., SANTOS, J. M. C. T. **A BNCC e as implicações para o currículo da Educação Básica**. In: CONADIS, 2018. Disponível em http://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conadis/2018/TRABALHO_EV116_MD1_SA13_ID786_08102018110158.pdf

SILVA, S. R. **Livros didáticos de matemática**: investigando critérios para adoção de manuais no século XIX. Dissertação de Mestrado. UFF. Niterói – RJ, 2019.

SILVA, V. A. Relação com o saber na aprendizagem matemática: pesquisa de campo, uma contribuição para a reflexão didática sobre as práticas educativas. **Revista. Brasileira da Educação**. [online] , vol.13, n.37, pp.150-161, 2008. Disponível em http: http://www.anped.org.br/sites/default/files/gt04-1886.pdf - Acesso em 07 mar 2022.

SILVEIRA, E. **AR:** aprender e relacionar: matemática: anos iniciais: manual do professor. 1º vol. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2017.

SIMON, M. A.; STIMPSON, V. C. Desenvolvimento da representação algébrica através de diagramas. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994, p. 155 – 161.

SOUZA, V. H. G. **O uso de vários registros na resolução de inequações**: uma abordagem funcional gráfica. Tese de Doutorado. PUC-SP. São Paulo – SP. 2008.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. **Álgebra**: das variáveis às equações e funções. São Paulo: Caem-USP, s/d.

STEEN, L. A. The science of patterns. **Science.** Vol 240, april, p. 611 – 616. Washington: AAAS, 1988. Disponível em https://www.science.org/doi/10.1126/science.240.4852.611 - Acesso em 07 mar 2022.

SQUALLI, H.; BRONNER, A. Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du langage algébrique conventionnel. **Nouveaux cahiers de la recherche en éducation.** Vol. 20, n. 3, p. 01 – 08. Sherbrooke-Canada, 2019. Disponível em https://id.erudit.org/iderudit/1055725ar. – Acesso em 30 nov 2022.

TABOADA, R.; LEITE, A. **Aprender juntos matemática, 1º ano:** ensino fundamental. 6ª ed. São Paulo: SM, 2017a.

______________. **Aprender juntos matemática, 3º ano:** ensino fundamental. 6ª ed. São Paulo: SM, 2017b.

THOMPSON, F. M. O ensino de álgebra para a criança mais nova. In: **As idéias da Álgebra.** COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. 1994. Atual Editora.

TOLEDO, C. M. **Buriti mais.** São Paulo: Moderna, 2017.

TRAJANO, A. **Algebra Elementar.** Rio de Janeiro: Companhia Typographica do Brazil, 1905. Disponível em https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/160598 - Acesso em 07 mar 2022.

TREVISANI, F. de M. **Estratégias de generalização de padrões matemáticos.** Dissertação de Mestrado. UNESP/Rio Claro. São Paulo. 2012.

TRIVILIN, L. R.; RIBEIRO, J. R. Conhecimento matemático para o ensino de diferentes significados do sinal de igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Bolema**, Rio Claro (SP), vol. 29, n. 51, p. 38 – 59, abr. 2015.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: **As ideias da Álgebra.** COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. São Paulo: Atual Editora. 1994, p. 9 – 22.

VAILATI, J. de S.; PACHECO, E. R. **Usando a história da matemática no ensino de álgebra.** UNICENTRO/PR – UNESP/Rio Claro – SP. 2008. Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/702-4.pdf - Acesso em 31 dez 2017.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. Os padrões no ensino e aprendizagem de Álgebra. In: VALE et al. **Números e Álgebra** (p. 193 – 211) Lisboa: SEM-SPCE. 2007.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930.** São Paulo: Annablume/Fapesp, 1999.

VALENTE, W. R. A elaboração de uma nova vulgata para a modernização do ensino de Matemática: aprendendo com a história da Educação Matemática no Brasil. **Bolema.** Vol. 15, no. 17. Rio Claro-SP: UNESP, 2002.

VALENTE, W. R. **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil.** São Paulo: Zapt, 2003.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké.** V. 16, n. 30. Campinas-SP, 2008.

VALENTE, W. R.; BERTINI, L. F.; CARNEIRO, R. F.; FAYOL, M. **A aritmética nos primeiros anos escolares**: história e perspectivas atuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

VALENTE, W. R.(org) **Cadernos de Trabalho:** Elementar. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

VALENTINI, A.; BERGNA, G. **Algebra per la scuola media:** con elementi di statistica e geometria analitica. Brescia: La Scuola, 1985.

VERÇOSA, E. de G. **A propósito dos textos didáticos na prática escolar**: uma abordagem sociopolítica da ação docente. Maceió: Edições Catavento, 1999.

VIGLAS, K. Alexandre Joseph Hidulphe Vincent on George Gemistos Plethon. **Anistoriton Journal of History, Archaeology and ArtHistory.** Vol. 13, n. 1, p.01-12. London – CA: University of Western Ontario, 2012. Disponível em https://philarchive.org/rec/VIGAJH - Acesso em 08 jan 2023.

YIN, R. K. **Pesquisa qualitativa:** do início ao fim. Tradução de Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2016.