UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSAFÁ JOAQUIM DA SILVA JÚNIOR

MÉTODO CONFORME APLICADO À ESTABILIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{R}^4$

Maceió, AL
2023

JOSAFÁ JOAQUIM DA SILVA JÚNIOR

MÉTODO CONFORME APLICADO À ESTABILIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{R}^4$

Dissertação de mestrado apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas-PPGMAT-UFAL, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Maceió, AL
2023

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

S586m Silva Júnior, Josafá Joaquim da.
Método conforme aplicado à estabilidade de hipersuperfícies mínimas em R4 / Josafá Joaquim da Silva Júnior. - 2023.
57 f. : il.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 56-57.

1. Métricas conformes. 2. Hipersuperfícies mínimas - Estabilidade. I. Título.

CDU: 514.752.6

Agradecimentos

Primeiramente, sou muito grato a Deus por ter permitido que eu chegasse aqui. Sem Deus nada seria possível. Na realidade, nem imaginável. ELE é a razão de eu estar aqui, pois eu não mereço, mas a sua misericórdia se renova todos os dias sobre a minha vida. Dedico tudo a Ele.

Grato à Deus também pela minha família que me incentivou, apoiou, foi e continua sendo minha base. Sem eles eu não sei onde estaria. Te amo pai, te amo mãe, te amo irmão. Grato à Deus também pelo meu amor, Graziela, que tem sido um pilar na minha caminhada desde o dia em que Deus a colocou em minha vida, ajudando-me a suportar os perrengues de um estudante e a superar as dificuldades. Eu te amo, meu amor. Grato a todos vocês por me ajudarem e por ouvirem meus desabafos quando achava que não conseguiria. Eu amo vocês.

Grato aos meus amigos e colegas do IM, que me auxiliaram e me incentivaram e estão comigo nessa caminhada árdua. Gratidão a galera da sala do mestrado, em especial meus amigos Cícero, Vinícius, Lucas, Max, Vitor, Gleydson e toda a nossa galerinha. Que Deus vos abençoe.

Grato a meu orientador que acreditou no meu potencial e aceitou me orientar. Que Deus abençoe sua vida.

Grato a todos os professores que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu chegasse aqui, à banca e a todos os demais.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Resumo

Neste trabalho, desenvolveremos os cálculos feitos por [3] no qual são usadas técnicas envolvendo métricas conformes e estimativas para mostrar que uma hipersupefície mínima imersa, orientável, completa e estável $M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ tem de ser (isométrica a) um hiperplano.
Palavras-chave: Métricas Conformes; Hipersuperfícies Mínimas; Estabilidade;

Abstract

In this work, we will develop the calculations made by [3] in which techniques involving conformal metrics and estimates are used to show that an immersed complete, orientable and stable minimal hypersurface $M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ must be (isometric a) a hyperplane.

Keywords: Conformal metrics; Minimal hypersurfaces; Stability.

Sumário

Introdução

A teoria das superfícies mínimas no espaço euclidiano tridimensional tem suas raízes no cálculo de variações desenvolvido por Euler e Lagrange no século XVIII e em investigações posteriores de Enneper, Scherk, Schwarz, Riemann e Weierstrass no século XIX. Ao longo dos anos, muitos grandes matemáticos contribuíram para essa teoria. Além dos nomes mencionados que pertencem ao século XIX, encontramos contribuições fundamentais, por exemplo, de Bernstein, Courant, Douglas, Morrey, Morse, Radó, Shiffman, Osserman, etc. Boa parte da atividade na teoria das superfícies mínimas no princípio era focada no problema de Plateau ou em problemas relacionados a EDP's.

A ideia de Lagrange foi procurar dentre as variações em uma região compacta do gráfico de uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a condição tal que a variação minimize área. Para resolver isso, utiliza-se a técnica de Euler-Lagrange (Veja [5]). Mais especificamente, considere $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ em $C^2(\Omega)$. Sabemos que a área de seu gráfico é dada por

$$A_u = \mathrm{Area}(\mathrm{Gr}(u)) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}.$$

Assim, se considerarmos para $\eta \in C_0^2(\Omega)$, as variações $u_t := u + t\eta : \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, em que $u_0 = u$, semelhantemente

$$A_{u_t} = \int_\Omega \sqrt{1 + \nabla(u_t)} = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u + t\nabla\eta|^2}.$$

Logo, ao derivarmos a variação da área, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_{u_t} &= \int_\Omega \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sqrt{1 + |\nabla u + t\nabla\eta|^2} \\
&= \int_\Omega \frac{\langle \nabla u, \nabla \eta \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \\
&= -\int_\Omega \eta \,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right),
\end{aligned}$$

em que a última integral é obtida ao integrarmos por partes e utilizarmos o fato que η tem suporte compacto. Portanto, uma vez que η é arbitrária, o gráfico de u é um ponto crítico para o funcional área se u satisfaz a equação

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0,$$

que é, em termos do divergente, *equação das superfícies mínimas* que também pode ser escrita como

$$(1 + u_y^2)u_{xx} + (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = 0.$$

Alguns exemplos de superfícies mínimas, bem conhecidas na literatura são:

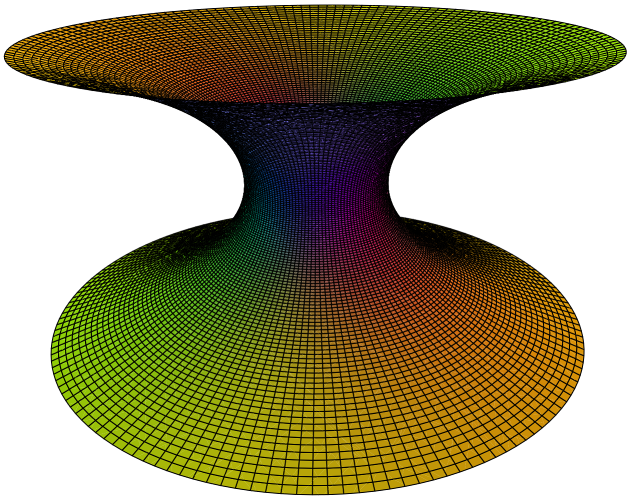

Figura 1 – Catenoide

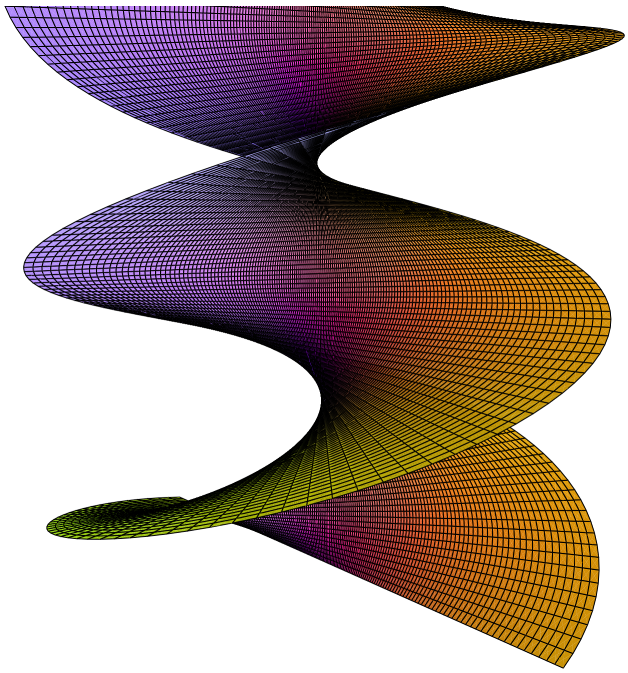

Figura 2 – Helicoide

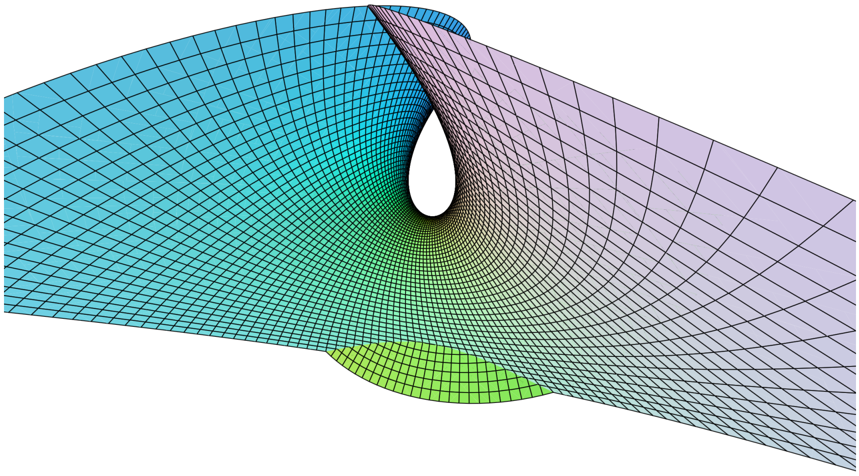

Figura 3 – Enneper

Mais geralmente, se considerarmos $\phi : \Sigma^{n-1} \to M^n$ uma imersão isométrica de Σ orientável em uma variedade Riemanniana orientável M, temos o conceito de variação admissível em que observamos a variação da imersão ϕ, $\Phi : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que para cada t fixo, Φ_t é uma imersão isométrica e que fora de um compacto em Σ, Φ_t é a identidade. Se formos olhar a variação da área, obtemos

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Area}(\Sigma_t) = -\int_\Sigma H \cdot f,$$

em que $f = \langle N, \Psi \rangle \in C_0^\infty(\Sigma)$ e H é a curvatura média de Σ e N normal unitário a Σ em M. Como f pode ser tomada arbitrária, uma vez que dado um campo V sempre existe uma variação Φ de Σ tal que V é seu campo variacional, segue que uma imersão isométrica é mínima (isto é, sua curvatura média é identicamente nula) se, e somente se, é um ponto crítico para o funcional área. Assim, para estudar a natureza de tais pontos críticos, analisar a segunda derivada é um caminho natural, e daí obtemos (veja também Teorema 1, e Teorema 2 nas Preliminares)

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{Area}(\Sigma_t) = -\int_\Sigma f\left(\Delta_\Sigma f + |A|^2 f + \mathrm{Ric}_M(N,N)f\right).$$

$J := \Delta_\Sigma + |A|^2 + \mathrm{Ric}_M(N,N)$ é chamado operador de estabilidade de Σ, com Σ orientável e N normal unitário a Σ definido em M. (Para demonstrações, veja [5]). Donde surge a noção de estabilidade, para efeitos de minimizar a área, e dizemos que Σ é estável quando

$$-\int_\Sigma f\left(\Delta_\Sigma f + |A|^2 f + \mathrm{Ric}_M(N,N)f\right) \geq 0,$$

para toda $f \in C_0^\infty(\Sigma)$.

Um problema bem conhecido na literatura em se tratando de superfícies mínimas é o *problema de Bernstein.*

O problema de Bernstein consiste em mostrar que um gráfico mínimo completo (isto é, definido em todo o plano $\mathbb{R}^2$) em $\mathbb{R}^3$ é necessariamente um plano. Assim surgiu um problema de Bernstein generalizado, para dimensões maiores, que pode ser formulado da seguinte maneira:

Se o gráfico de uma função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma hipersuperfície mínima completa em $\mathbb{R}^{n+1}$, ele é necessariamente um hiperplano?.

Muitos matemáticos trabalharam neste problema. A resposta do mesmo é sim, para $n \leq 7$: Bernstein demonstrou o caso $n = 2$ em 1914; Fleming [12] deu uma nova prova para o caso $n = 2$ em 1962; De Giorgi demonstrou para $n = 3$ em 1965 [6]; Almgren demonstrou para $n = 4$ em 1966 [1] e Simons [17] resolveu para os 3 casos restantes, isto é, $5 \leq n \leq 7$ em 1968, pois Bombieri, De Giorgi e Giusti, em [2], Teorema B, p. 245, mostraram que a partir de uma determinada dimensão, $n \geq 8$, tal não é verdade. Mais precisamente, obtiveram o seguinte resultado:

Teorema (*Bombieri, De Giorgi e Giusti*)**.** *Se $n \geq 8$, então existem gráficos mínimos em $\mathbb{R}^{n+1}$ que não são hiperplanos.*

Uma vez que gráficos mínimos são estáveis, uma generalização do problema de Bernstein pode ser formulada da seguinte maneira:

Se $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície isometricamente imersa mínima, estável, orientável e completa, então M é um hiperplano?

Por volta do mesmo período de tempo, isto é, paralelamente, três autores resolveram o problema generalizado acima para $n = 2$. Do Carmo e Peng em [8], Teorema 1.2, p. 903 obtiveram o seguinte resultado:

Teorema (*Do Carmo, Peng*)**.** *Seja M uma variedade 2-dimensional, orientável, conexa e $x : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima de M no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Se $x : M \to \mathbb{R}^3$ for uma imersão mínima completa estável, então $x(M) \subset \mathbb{R}^3$ é um plano.*

Fisher-Colbrie e Schoen em [10], Teorema 3, p. 206 classificaram as superfícies mínimas em 3-variedades de curvatura escalar não negativa segundo o seguinte resultado:

Teorema (*Fisher-Colbrie, Schoen*)**.** *Sejam N uma 3-variedade completa orientada e com curvatura escalar não negativa e M uma superfície mínima, completa e orientável em N. Existem duas possibilidades:*

i. *Se M é compacta, então M é conformemente equivalente a esfera S^2 ou M é um toro flat totalmente geodésico T^2. Se $S > 0$ em N, onde S é a curvatura escalar, então M é conformemente equivalente a S^2.*

ii. *Se M não é compacta, então M é conformemente equivalente ao plano complexo $\mathbb{C}$, ou ao cilindro A. Se M é um cilindro e a curvatura total absoluta de M é finita, então M é flat e totalmente geodésica. Se a curvatura escalar de N é sempre positiva, então M não pode ser um cilindro com curvatura total finita. Se a curvatura de Ricci de N é não negativa, então a hipótese da finitude da curvatura total não pode ser removida.*

Obtendo assim, como corolário, o teorema de Bernstein:

Corolário (*Corolário 4, p. 207*)**.** As únicas superfícies mínimas, completas, orientáveis e estáveis em $\mathbb{R}^3$ são planos.

Pogorelov em [14] também obteve este resultado para $n = 2$.

Schoen-Simon-Yau em [16], Teorema 1, p. 281, acrescentam uma hipótese sobre crescimento polinomial mostrando o seguinte:

Seja M uma variedade n-dimensional imersa estável em uma $(n+1)$-variedade Riemanniana orientada. Suponha que as curvaturas seccionais de N estão limitadas entre K_1 e K_2, denote a derivada covariante de K_{ijkl}, como tensor de curvatura de N, por $K_{ijkl;m}$ e suponha ainda que

$$\sum_{i,j,k,l,m} K^2_{ijkl;m} \leq c^2.$$

Então,

Teorema (*Schoen, Simon, Yau*)**.** *Para cada $p \in [4, 4+\sqrt{8/n})$ e para cada função suave não-negativa f com suporte compacto em M, temos*

$$\int_M |A|^2 f^2 \leq \beta \int_M \left[|\nabla f|^2 + \left(c^{2/3} + K_1 - K_2 + \max\{-K_2; 0\}\right)^{p/2} f^p \right],$$

em que A é a segunda forma fundamental de M.

No caso particular em que $c = 0$ e $K_1 = K_2 \geq 0$, obtiveram a desigualdade

$$\int_{B_\theta R} |A|^p \leq \frac{\beta}{(1-\theta)^p} R^{-p} |B_R|.$$

Portanto, se $\lim_{R\to+\infty} R^{-p}|B_R| = 0$, para algum $p \in (0, 4+\sqrt{8/n})$, tem-se $|A| = 0$, obtendo assim (Teorema 2, p. 283)

Teorema (*Schoen, Simon, Yau*)**.** *Suponha $K_1 = K_2 \geq 0$, $c = 0$ e $\lim_{\mathbb{R}\to\infty} R^{-p}|B_R| = 0$ para algum $p \in (0, 4+\sqrt{8/n})$. Então, M é totalmente geodésica.*

Comentam ainda que no caso particular em que o ambiente N possui curvatura seccional identicamente nula, deduz-se que $|B_R|$ tem ordem no máximo R^n e consequentemente existe um p satisfazendo as condições do Teorema 2, desde que $n < 4 + \sqrt{8/n}$, isto é, $n \leq 5$. Em particular, deduzindo o Teorema de Bernstein para gráficos mínimos em $\mathbb{R}^{n+1}$, quando $n \leq 5$.

Até recentemente, os casos restantes, $3 \leq n \leq 6$, sem hipóteses adicionais, estavam em aberto. Uma vez que, os resultados de Bombieri, De Giorgi e Giusti [2], juntamente com o resultado de Hardt e Simon [19], mostram que a resposta à generalização é não, se $n \geq 7$. Entretanto, em 2021, Chodosh e Li [4] provaram a conjectura de Schoen (Veja [5], teorema 2.12), isto é,

Teorema (*Chodosh, Li*)**.** *Uma hipersuperfície mínima imersa, completa, orientável e estável $M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ é isométrica a um hiperplano.*

O artigo no qual se baseia este trabalho, *Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces*, de Catino, G. Mastrolia, P. e Roncoroni, A. [3], traz uma demonstração completamente diferente do resultado acima citado. Ele é baseado na deformação conforme da métrica, resultados de comparação e estimativas de integrais.

A ideia é a seguinte: trabalha-se com a desigualdade de estabilidade

$$\int_M |A|^2\varphi^2 dV_g \leq \int_M |\nabla\varphi|^2 dV_g,\ \forall\varphi \in C_0^\infty(M),$$

em que $M^n \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, g)$ é isometricamente imersa, A é a segunda forma fundamental de M^n e N é um vetor normal unitário a M em $\mathbb{R}^{n+1}$. Considera-se uma função positiva $u \in C^\infty(M)$ que é solução de

$$-\Delta_g u = |A|_g^2 u \ \text{ em } M,$$

e trabalha-se com a métrica conforme $\tilde{g} = u^{2k}g$. A estabilidade de M garante a existência de tal u pelo teorema: (Veja [10])

Teorema (*Fisher-Colbrie, Schoen*)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i. $\lambda_1(D) \geq 0$ *para todo domínio limitado* $D \subset M$*;*

ii. $\lambda_1(D) > 0$ *para todo domínio limitado* $D \subset M$*;*

iii. *Existe uma função u positiva satisfazendo a equação $\Delta u - qu = 0$ em M,*

em que q é uma função suave em M e λ_1 é o primeiro autovalor de $\Delta - q$.

Com as fórmulas já conhecidas na literatura que envolvem métricas conformes, uma estimativa de volume e estimativas de integrais, concluí-se que $|A| \equiv 0$ em M, donde M é totalmente geodésica. Sob as hipóteses feitas sobre M, chega-se a conclusão que M deve ser isométrica a um hiperplano.

Este trabalho está dividido em 3 capítulos:

No capítulo 1, introduzimos algumas noções preliminares sobre variedades diferenciáveis, e definições importantes, que serão usadas ao longo de todo o texto.

No capítulo 2, trataremos dos resultados essenciais de métricas conformes, os quais nos dizem como se comportam alguns entes clássicos, como a conexão, os símbolos de Christoffel, o gradiente de uma função, a hessiana e algumas curvaturas ao modificarmos ligeiramente a métrica. Precisaremos dos tais para as estimativas realizadas no artigo, bem como alguns lemas a serem usados, como a completude da métrica e algumas estimativas de volume para a demonstração do resultado principal.

No capítulo 3, provaremos o resultado principal, citado acima, utilizando as ferramentas expostas no capítulo 2.

1 Preliminares

1.1 Variedades Diferenciáveis

Praticamente para todos os fatos deste capítulo não serão apresentadas provas. Para algumas, consulte [7] ou [13]

Definição 1. *Um espaço topológico*[1] *M é dito ser uma variedade diferenciável de dimensão n ou uma n-variedade diferenciável*[2] *se*

i. *M é um espaço de Hausdorff, isto é, dados dois pontos quaisquer $x, y \in M$, existem abertos $U, V \subset M$, com $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$;*

ii. *M possui uma base enumerável para a sua topologia;*

iii. *M é localmente difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, isto é, existe uma família de cartas $\{\varphi_\lambda, U_\lambda\}_\lambda$ tal que $M = \cup U_\lambda$ e dadas duas cartas quaisquer nesta família, (φ, U) e (ψ, V), com $U \cap V \neq \emptyset$, a aplicação*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi(U \cap V),$$

é um difeomorfismo C^∞, denominada aplicação mudança de coordenadas. As aplicações (φ, U) acima definidas são denominadas cartas coordenadas (apenas cartas ou parametrizações) e suas aplicações coordenadas, definidas por $\varphi(q) = (x_1(q), \ldots, x_n(q))$, são denominadas coordenadas locais e o conjunto $U \subset M$ é dito vizinhança coordenada.

1.1.1 Aplicações suaves sobre variedades diferenciáveis

Definição 2. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma função $f : M \to \mathbb{R}^k$ é dita ser suave em $p \in M$ se existe uma carta coordenada $\varphi : U \to U_0$ de M com $p \in U$, tal que a aplicação $f \circ \varphi^{-1} : \varphi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^k$ é C^∞ em $\varphi^{-1}(p) \in U_0$. Tal f é dita suave se é suave para cada $p \in M$. A aplicação $\hat{f} := f \circ \varphi^{-1}$ é chamada representação de f em coordenadas locais. Denotaremos por $C^\infty(M)$ o conjunto das funções reais suaves em M, isto é,*

$$C^\infty(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ é suave em } M\}.$$

Tal definição independe da escolha da carta coordenada escolhida. Com efeito, uma vez que, para cada $p \in M$ seja possível encontrar uma carta coordenada φ de sorte

[1] Um conjunto X munido de uma topologia especificada τ, (X, τ), é dito um espaço topológico.
[2] Diferenciável e suave possuem o mesmo significado.

que $f \circ \varphi^{-1}$ seja suave, qualquer que seja outra carta coordenada em M contendo p, o fato da aplicação mudança de coordenadas ser suave garante que seja suave (nos devidos abertos onde a composição faz sentido):

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1}).$$

Definição 3. *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação $F : M \to N$ é suave em $p \in W$ se existe uma carta coordenada de M, $\varphi : U \to U_0$ com $p \in U$, e uma carta coordenada de N, $\psi : V \to V_0$ tal que $F(p) \in V$ e $F(U) \subset V$ tais que a aplicação entre abertos euclidianos*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi\left(F(U) \cap V\right)$$

é suave em $\varphi(p)$. Tal F é dita suave se é suave para cada $p \in M$. A aplicação $\hat{F} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ é chamada representação de F em coordenadas locais, relativamente às cartas coordenadas dadas.

Como anteriormente, tal definição não depende da escolha das cartas coordenadas satisfazendo à definição. Isto vem novamente do fato das mudanças de coordenadas serem suaves nos respectivos pontos, isto é, que se ξ e ζ são, respectivamente, cartas coordenadas em M e em N contendo p e $F(p)$, podemos escrever (nos devidos abertos onde a composição faz sentido)

$$\zeta \circ F \circ \xi^{-1} = (\zeta \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \zeta^{-1}).$$

Definição 4. *Uma aplicação $F : M \to N$ é dita um difeomorfismo se F é bijetiva, suave, e cuja inversa também é suave. Neste caso, M e N são ditas difeomorfas. $F : M \to N$ é dita um difeomorfismo local se para cada $p \in M$ existe U aberto em M contendo p tal que $F(U)$ é um aberto em N contendo $F(p)$ nos quais $F|_U \colon U \to F(U)$ é um difeomorfismo.*

1.1.2 Espaço Tangente

Definição 5. *Seja M uma variedade diferenciável e $p \in M$. Uma aplicação linear $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ é dita uma derivação em p se satisfaz*

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f),$$

para todas $f, g \in C^\infty(M)$.

Definição 6. *O conjunto de todas as derivações de $C^\infty(M)$ em p é um espaço vetorial, denominado o espaço tangente a M em p:*

$$T_pM := \{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid v \text{ é uma derivação}\}.$$

Um elemento $v \in T_pM$ é chamado um vetor tangente a M em p. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, temos que um vetor tangente v satisfaz as propriedades:

i. *Se f é uma função constante, então $v(f) = 0$.*

ii. *Se $f(p) = g(p) = 0$, então $v(fg) = 0$.*

Uma outra forma de caracterizar os vetores tangentes à uma variedade M é através de curvas:

Definição 7. *Seja M uma n-variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : I \to M$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, é dita uma curva (diferenciável) em M.*

Definição 8. *Seja M uma n-variedade diferenciável e $\alpha : I \to M$ uma curva em M tal que $\alpha(t_0) = p \in M$. O vetor tangente à curva α em p é o funcional linear $\alpha'(t_0) = C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$\alpha'(t_0)(f) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (f \circ \alpha)\,,\ f \in C^\infty(M).$$

Um vetor tangente à M em p é qualquer vetor tangente à uma curva diferenciável passando por p.

Note que se (φ, U) é uma carta de M em p, podemos exprimir a função f e a curva α nesta parametrização, de sorte que escrevendo $x_0 = \varphi(p)$, $\alpha(t_0) = p$ e $\tilde{\alpha}(t) = (\varphi \circ \alpha)(t) := (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$, temos em coordenadas

$$\begin{aligned}
\alpha'(t_0)(f) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (f \circ \alpha) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \left(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha\right) \\
&= d(f \circ \varphi^{-1})_{x_0}\left(\tilde{\alpha}(t_0)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_i}{dt}(t_0) \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(x_0).
\end{aligned}$$

1.1.3 A derivada de uma aplicação suave

Definição 9. *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \to N$ uma aplicação suave. Para cada $p \in M$, a diferencial de F em p, $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ é definida da seguinte forma: dado $v \in T_pM$,*

$$dF_p(v)(f) := v(f \circ F),$$

para toda $f \in C^\infty(N)$. $dF_p(v)$ é uma derivação em $F(p)$. Em particular, dada $f \in C^\infty(M)$, $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ é dada por

$$df_p(v) = v(f).$$

Temos que tal definição satisfaz as seguintes propriedades: Sejam $F : M \to N$ e $G : N \to P$ aplicações suaves entre variedades e seja $p \in M$. Então,

i. $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ *é linear;*

ii. $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_pM \to T_{G\circ F(p)}P$*;*

iii. $d(Id_M) = Id_{T_pM} : T_pM \to T_pM$*;*

iv. *Se* F *é um difeomorfismo, então* $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ *é um isomorfismo e* $(dF_p)^{-1} = dF^{-1}_{F(p)}$.

Seja (φ, U) uma carta coordenada em uma variedade diferenciável M. Tem-se, em particular, que φ é um difeomorfismo de U em $\varphi(U)$. Dessa forma, a aplicação $d\varphi_p : T_pM \to \mathbb{R}^n \left(\simeq T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n\right)$ é um isomorfismo (aqui, identificando $T_p\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n$). Assim, a pré-imagem de uma base de $\mathbb{R}^n$ pela aplicação $d\varphi_p$ é uma base de T_pM. Defina, pois, os vetores coordenados associados à carta φ:

Definição 10. *Seja* (φ, U) *uma carta coordenada em uma variedade diferenciável* M*. Os vetores coordenados,* $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ *associados à carta* φ*, definidos por*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p := (d\varphi_p)^{-1}(e_i) = (d\varphi^{-1})_{\varphi(p)}(e_i),$$

em que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *é a base canônica de* $\mathbb{R}^n$*, formam uma base de* T_pM*,*

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\},$$

de sorte que dado qualquer $v \in T_pM$*, podemos escrever*

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p.$$

Desta forma, se $f \in C^\infty(U)$*, então*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) := e_i(f \circ \varphi^{-1}) := \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}.$$

1.1.4 Campo de Vetores

Definição 11. *Dada uma variedade diferenciável* M*, o fibrado tangente de* M*, denotado por* TM*, é a união disjunta dos espaços tangentes a* M*, isto é, denotando por* $\sqcup$ *a união disjunta,*

$$TM := \bigsqcup_{p\in M} T_pM.$$

Note que podemos enxergar os pontos de TM *como sendo* (p, v)*, com* $p \in M$ *e* $v \in T_pM$*.*

Definição 12. *Um campo de vetores X em uma n-variedade diferenciável M é uma aplicação $X : M \to TM$ suave tal que, se $\pi : TM \to M$ é definida por $\pi(p, v) = p$, então $\pi \circ X = Id_M$. Logo, um campo de vetores é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Considerando uma carta (φ, U) de M em p é possível escrever*

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p,$$

em que cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em $U \subset M$, chamadas funções componentes de X, e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right\}$ é a base associada à φ, $i = 1, \ldots, n$. Denotaremos por

$$\mathfrak{X}(M) := \{X : M \to TM \mid X \text{ campo de vetores diferenciável}\}.$$

Tal conjunto é um módulo sobre o anel $C^\infty(M)$.

Definição 13. *Dada M uma n-variedade diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$, sejam $f \in C^\infty(M)$ qualquer, $p \in M$ e (φ, U) uma carta de M em p. Definimos*

$$Xf(p) := X(f)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde, na última igualdade, por abuso de notação, f na realidade representa a expressão de f na carta φ. A função obtida não depende da escolha da carta φ.

Por essa definição, podemos redefinir, de maneira equivalente, um campo de vetores, agora sob o olhar de derivação:

Definição 14. *Um campo de vetores $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ é um operador linear $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que é uma derivação, isto é,*

i. *Para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$,*

$$X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g);$$

ii. *Para todas $f, g \in C^\infty(M)$,*

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

Assim, como pela definição de diferencial,

$$df_p(X(p)) = X(p)(f) := \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

segue que

$$X(f) = df(X).$$

1.1.5 Colchete de Lie

A interpretação de campos de vetores como um operador em $C^\infty(M)$ permite-nos considerar iterados de campos, isto é, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, e $f \in C^\infty(M)$, então fazem sentido as funções $X(Yf)$ (bem como $Y(Xf)$), definida por

$$XY(f) := X(Yf) = X\left(Y(f)\right).$$

Definição 15. *(Colchete de Lie) Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. O Colchete de Lie de X e Y é o campo vetorial $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ definido por*

$$[X, Y] := XY - YX.$$

Logo, dada $f \in C^\infty(M)$,

$$[X, Y](f) := X(Yf) - Y(Xf) = X\left(Y(f)\right) - Y\left(X(f)\right).$$

O *Colchete de Lie* satisfaz às seguintes propriedades: dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$,

i. $[X, Y] = -[Y, X]$ $\quad$ (*anticomutatividade*);

ii. $[aX + bY, Z] = a[X, Y] + b[Y, Z]$ $\quad$ ($\mathbb{R}-$*bilinearidade*);

iii. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ $\quad$ (*Identidade de Jacobi*);

iv. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Note que se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ possuem as expressões

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

em coordenadas, então dada $f \in C^\infty(M)$ (onde, por abuso de notação, f abaixo, à partir das igualdades, na realidade representa a expressão de f nas coordenadas locais)

$$\begin{aligned} X\left(Y(f)\right) &= X\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} X\left(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} X\left(b_j\right) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j X\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}, \end{aligned}$$

e de forma similar,

$$Y\left(X(f)\right) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}.$$

Note que, por termos[3]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i},$$

segue

$$\begin{aligned}
[X,Y](f) &= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j},
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$[X,Y] = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

é a expressão do Colchete em coordenadas. Em particular, se $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$, então $[X,Y] = 0$.

1.2 Tensores

Definição 16. *Seja V um espaço vetorial*[4] *real e considere V^* seu dual. Dados k, l números inteiros não-negativos, um tensor do tipo (k,l) em V é uma aplicação multilinear em V e V^* de k elementos de V e l elementos de V^*:*

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\ \text{cópias}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l\ \text{cópias}} \to \mathbb{R}.$$

O conjunto de todos os tensores de tipo (k,l) em V, denotado por $T^{(k,l)}(V)$, é um espaço vetorial, quando munido das operações usuais.

1.2.1 Produto Tensorial

Definição 17. *Seja V um espaço vetorial real e considere V^* seu dual. Dados k, l, p, q inteiros não-negativos, considere $T \in T^{(k,l)}(V)$ e $S \in T^{(p,q)}(V)$. Define-se o produto tensorial de T por S como sendo a aplicação*

$$T \otimes S : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k+p\ \text{cópias}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l+q\ \text{cópias}} \to \mathbb{R}$$

por

$$T \otimes S(X_1, \ldots, X_{k+p}, \omega_1, \ldots, \omega_{l+q}) := T(X_1, \ldots, X_k, \omega_1 \ldots, \omega_l) S(X_{k+1}, \ldots, X_{k+p}, \omega_{l+1}, \ldots, \omega_{l+q}),$$

em que $X_j \in V$, $\omega_i \in V^*$, $j = 1, \ldots, k+p$, $i = 1, \ldots, l+q$, e o produto no lado direito é simplesmente a multiplicação de números reais. Logo,

$$\otimes : T^{(k,l)}(V) \times T^{(p,q)}(V) \to T^{(k+p,l+q)}(V).$$

[3] Observe que estamos olhando para as parciais de segunda ordem de uma aplicação em $\mathbb{R}^n$ (a expressão de f), donde segue a igualdade por Schwarz.

[4] De dimensão finita, como em todo o texto.

1.2.2 Métricas Riemannianas

Definição 18. *Seja M uma n-variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana em M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $p \mapsto g_p(\,,\,)$, isto é, um tensor do tipo $(2,0)$ (uma forma bilinear, simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente da seguinte forma: se (U,φ) é uma carta coordenada de M em p, as funções*

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \; i,j = 1,\dots,n,$$

variam diferenciavelmente em U.

Proposição 1. *Toda variedade diferenciável M possui uma métrica Riemanniana.*

1.3 Conexões Riemannianas

1.3.1 Conexões Afins

Definição 19. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, que se indica por $(X,Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz às seguintes propriedades: para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$,*

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

ii. $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

iii. $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

Considere (U,φ) uma carta coordenada de M em p. Escreva $\frac{\partial}{\partial x_l} = \partial_l$. Então, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ têm as representações[5]

$$X = a^i \partial_i \;\text{ e }\; Y = b^j \partial_j,$$

então

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{a^i\partial_i} b^j \partial_j \\ &= a^i \left(\partial_i(b^j)\partial_j + b_j \nabla_{\partial_i}\partial_j\right) \end{aligned}$$

que fazendo (por definição) $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$, retorna

$$\nabla_X Y = \left(a^i \partial_i(b^k) + a^i b^j \Gamma_{ij}^k\right) \partial_k \quad (i,j,k = 1,\dots,n).$$

Em $\mathbb{R}^n$, identificando os espaços tangentes com o próprio $\mathbb{R}^n$, vetores tangentes com os próprios vetores de $\mathbb{R}^n$ e campos vetoriais com aplicações suaves $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

[5] Usando a notação de Einstein.

temos que conexão euclidiana $\nabla : C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\nabla_X Y = dY_p(X(p)),$$

isto é, a derivada direcional da aplicação Y em p na direção do vetor $X(p)$, ou seja, se $X = a^i e_i$ e $Y = b^j e_j$,

$$\nabla_X Y = \left(a^i \frac{\partial b^1}{\partial x_i}, \cdots, a^i \frac{\partial b^n}{\partial x_i} \right) = a^i \partial_i (b^j) e_j = a^i \partial_i (b^j) \partial_j = X(b^j) \partial_j.$$

Definição 20. *Seja $\alpha : I \to M$ uma curva diferenciável em uma variedade M. Um campo vetorial V ao longo da curva α é um campo vetorial $V : I \to TM$ tal que*

$$V(t) \in T_{\alpha(t)} M, \ \forall t \in I.$$

Proposição 2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então, existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $\alpha : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$, ao longo de α, denominado derivada covariante de V ao longo de α, tal que:*

i. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;

ii. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt} V + f \frac{DV}{dt}$;

iii. *Se V é induzido por um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) := X(\alpha(t))$, então*

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)} X.$$

1.3.2 Conexão Riemanniana

Definição 21. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é dita compatível com a métrica quando*

$$X\left(g\left(Y, Z\right)\right) = g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(Y, \nabla_X Z\right),$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 22. *Uma conexão afim em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Note que dada uma carta coordenada (U, φ) em uma n-variedade M,

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = [\partial_i, \partial_j] = 0.$$

Proposição 3. *(Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M que é simétrica e é compatível com a métrica.*

Demonstração. Supondo a existência de uma tal conexão, chega-se a conclusão que ela deve satisfazer

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ - g([Y,X],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X), \end{aligned} \tag{1.1}$$

mostrando que tal fica univocamente determinada pela métrica. Portanto, caso exista, será única. Logo, basta definir ∇ por (1.1). ■

A conexão acima é denominada conexão Riemanniana ou conexão de Levi-Civita. Onde usarmos uma conexão será esta conexão, associada à respectiva metrica na variedade. A equação (1.1) é denominada *fórmula de Koszul.* Dada uma carta coordenada (U, φ), as funções Γ_{ij}^k definidas por

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

são os coeficientes da conexão ∇, ou os *símbolos de Christoffel* da conexão.

Definição 23. *(Campo Gradiente) Seja M uma variedade Riemanniana. Dada $f \in C^\infty(M)$ existe um único campo de vetores $\nabla_g f \in \mathfrak{X}(M)$, chamado gradiente de f, tal que dado $X \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$X(f) = df(X) = g\left(\nabla_g f, X\right).$$

Se (U, φ) é uma carta coordenada em M, escrevendo $X = a^i \partial_i$ e $\nabla_g f = b^j \partial_j$, temos que

$$X(f) = g\left(\nabla_g f, X\right) \Leftrightarrow \partial_i(f) = b^j g_{ij}.$$

Multiplicando por g^{im}, e somando em i obtemos

$$b^j \sum_i g_{ij} g^{im} = \sum_i g^{im} \partial_i(f) \Leftrightarrow b^j = \sum_i g^{ij} \partial_i(f)$$

isto é, em coordenadas

$$\nabla_g f = g^{ij} \partial_i(f) \partial_j.$$

Definição 24. *(Hessiana) Seja M uma variedade Riemanniana. A Hessiana de $f \in C^\infty(M)$ é um tensor de tipo (2,0), denotado por $\nabla^2 f$ definido por: dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\nabla^2 f(X,Y) := Y(\nabla_g f(X)) - \nabla_g f(\nabla_Y X) = Y\left(X(f)\right) - \left(\nabla_Y X\right)(f),$$

ou ainda,

$$\nabla^2 f(X,Y) = g\left(\nabla_Y \nabla_g f, X\right),$$

em que ∇ é a conexão de (M, g).

Definição 25. *(Divergente) Seja M uma variedade Riemanniana. Dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, o divergente de X com respeito à métrica g de M é definido como*

$$\mathrm{div}_g(X) = \mathrm{tr}_g\left(Y \mapsto \nabla_Y X\right) = \sum_{i,l} g^{il} g\left(\nabla_{\partial_i} X, \partial_l\right).$$

Definição 26. *(Laplaciano) Dada $f \in C^\infty(M)$, o Laplaciano de f com respeito à métrica g é definido como*

$$\Delta_g f := \mathrm{div}\left(\nabla_g f\right) = \mathrm{tr}_g\left(\nabla^2 f\right) = \sum_i \nabla_i \nabla_i f,$$

em que $\nabla_k \nabla_l f := \nabla^2 f(\partial_k, \partial_l)$.

1.3.3 Geodésicas

Definição 27. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$ é uma geodésica se*

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) \equiv 0.$$

Definição 28. *Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se para todo $p \in M$ as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

1.4 Curvaturas

1.4.1 Curvatura

Definição 29. *O tensor de curvatura de uma variedade Riemanniana M é um tensor de tipo $(3,1)$ $R : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ definido por*

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

em que ∇ é a conexão Riemanniana de M associada à métrica. Observe que se $M = \mathbb{R}^n$, $R = 0$. De fato, escrevendo $Z = c^k \partial_k$,

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &= \nabla_X \left(Y(c^k)\partial_k\right) - \nabla_Y \left(X(c^k)\partial_k\right)\\ &= (XY - YX)(c^k)\partial_k\\ &= \nabla_{[X,Y]} Z.\end{aligned}$$

Tal satisfaz às propriedades: para todos(as) $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$,

i. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$;

ii. $R(fX + gY, Z) = fR(X,Z) + gR(Y,Z)$ e $R(X, fY + gZ) = fR(X,Y) + gR(X,Z)$;

iii. $R(X,Y)(fZ+gW) = fR(X,Y)Z + gR(X,Y)W$;

iv. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$;

v. $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$;

vi. $R(X,Y,Z,W) = R(Z,T,X,Y)$,

em que, por definição, $R(X,Y,Z,W) := g\left(R(X,Y)Z,W\right)$.

Dada uma carta (U,φ) em M, pondo por definição de R^l_{ijk},

$$R(\partial_i,\partial_j)\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l,$$

vem que para quaisquer $X = a^i\partial_i, Y = b^j\partial_j$ e $Z = c^k\partial_k$ em $\mathfrak{X}(M)$,

$$R(X,Y)Z = a^ib^jc^kR^l_{ijk}\partial_l.$$

Também, pondo por definição, temos

$$R(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_s) = g\left(R(\partial_i,\partial_j)\partial_k,\partial_s\right) = R^l_{ijk}g_{ls} =: R_{ijks}.$$

1.4.2 Curvatura Seccional

Definição 30. *Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\sigma \subset T_pM$ um plano de T_pM. Se $\{x,y\}$ geram σ, define-se a curvatura seccional de M em σ (ou de σ em p) como sendo*

$$K(\sigma;p) = K(\sigma) = K_\sigma = K(x,y) := \frac{R\left(x,y,y,x\right)}{|x|^2|y|^2 - g(x,y)^2}.$$

Tal não depende da escolha da base de σ. Pois se $\{z,w\}$ é outra base para σ, e B é a matriz de mudança de base, teremos

$$R(x,y,y,x) = (\det B)^2 R(z,w,w,z)$$
$$|x|^2|y|^2 - g\left(x,y\right)^2 = (\det B)^2\left[|z|^2|w|^2 - g\left(z,w\right)^2\right],$$

donde $K(x,y) = K(z,w)$.

1.4.3 Tensor de Ricci e Curvatura de Ricci

Considere M uma variedade Riemanniana. Sejam $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ e considere a aplicação

$$b_{X,Y} : (Z,W) \mapsto g\left(R(X,Z)W,Y\right),\ Z,W \in \mathfrak{X}(M).$$

Definição 31. *Dados $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, o tensor de Ricci é o tensor de tipo (2,0) definido por*

$$\mathrm{Ric}(X,Y) := \mathrm{tr}\left(b_{X,Y}\right) = g^{ij}R(X,\partial_i,\partial_j,Y) = \sum_i R(X,e_i,e_i,Y),$$

estas últimas igualdades em coordenadas e em uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$, respectivamente. Suas componentes em coordenadas são

$$R_{ij} := R(\partial_i, \partial_j) = g^{kl} R_{iklj}.$$

1.4.4 Imersões Isométricas

Sejam (M, g), (Σ, h) variedades Riemannianas com suas respectivas métricas.

Definição 32. *Uma aplicação $\Psi : (\Sigma, h) \to (M, g)$ é dita uma imersão quando $d\Psi_p$ é uma aplicação injetiva, para todo $p \in \Sigma$. Ψ é dita uma imersão isométrica quando, além de ser uma imersão, tem-se*

$$g_{\Psi(p)}\left(d\Psi_p(v), d\Psi_p(w)\right) = h_p(v, w), \ \forall v, w \in T_p\Sigma.$$

Também podemos obter uma imersão isométrica à partir de uma imersão, e definindo a métrica em Σ de forma induzida.

Definição 33. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $\Sigma^{n-1} \subset (M^n, g)$. Σ é dita hipersuperfície (Riemanniana) quando a inclusão $i : \Sigma \to M$ é uma imersão isométrica, em que a métrica de Σ é definida de forma induzida por:*

$$h_p(v, w) := g_{\Psi(p)}\left(d\Psi_p(v), d\Psi_p(w)\right).$$

Definição 34. *Uma variedade M é dita orientável quando existe uma família de parametrizações $\{\varphi_\lambda, U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ tal que o determinante da mudança de coordenadas, $\det(\varphi_\lambda^{-1} \circ \lambda_\beta) > 0$, é positivo para todos $\lambda, \beta \in L$. Dada uma imersão isométrica $\Psi : \Sigma^{n-1} \to M^n$, com M orientável, Σ^{n-1} ser orientável equivale a existência de um campo normal (unitário) suave global.*

Considere uma imersão isométrica orientável $\Psi : \Sigma^{n-1} \to M^n$, com (M^n, g) Riemanniana; ou seja, existe um campo normal (unitário) global N, tal que $N(p) \in (T_pM)^\perp$, $\forall p \in M$. Associado a este campo, podemos definir a aplicação linear simétrica, para cada $p \in M$, $A : T_pM \to T_pM$ dada por $Av := -dN \cdot v$ e a partir desta, podemos considerar a aplicação bilinear simétrica $B : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, definida por $B(u, v) = g(Au, v)$. Observe que em uma base ortonormal $\{e_i\}$,

$$\begin{aligned}
|B|^2 &= \sum_{i,j} B(e_i, e_j)^2 = \sum_{i,j} g(Ae_i, e_j)^2 = \sum_i \left(\sum_j g(Ae_i, Ae_j) g(Ae_i, Ae_j) \right) \\
&= \sum_i |Ae_i|^2 = \sum_i \langle Ae_i, Ae_i \rangle \\
&= \sum_i \langle A^2 e_i, e_i \rangle \\
&= \operatorname{tr}(A^2) = |A|^2.
\end{aligned}$$

Denote por $\overline{\nabla}$ a conexão de M associada à métrica g e por ∇ a conexão de Σ associada à métrica h, definida acima. Denotando $d\Psi_* X = \Psi_* X$, obtemos (pela *fórmula de Koszul* (1.1)) que para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$g\left(\left(\overline{\nabla}_{\Psi_* Y}\Psi_* X\right)^T, \Psi_* Z\right) = h\left(\nabla_Y X, Z\right) = g(\Psi_*(\nabla_Y X), \Psi_*(Z)),$$

obtendo, portanto,

Proposição 4. *Se $\Psi : (\Sigma^{n-1}, h) \to (M^n, g)$ é uma imersão isométrica (h induzida), então*

$$\Psi_*\left(\nabla_X Y\right) = \left(\overline{\nabla}_{\Psi_*(X)}\Psi_*(Y)\right)^\top, \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Notação: $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T$. Assim,

$$\overline{\nabla}_{\Psi_* X}\left(\Psi_* Y\right) = \Psi_*\left(\nabla_X Y\right) + \left(\overline{\nabla}_{\Psi_* X}\left(\Psi_* Y\right)\right)^\perp,$$

equivale a (codimensão 1)

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g\left(\overline{\nabla}_X Y, N\right) N = \nabla_X Y + g\left(AX, Y\right) N = \nabla_X Y + B(X, Y)N$$

A equação

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)N, \ X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{1.2}$$

é denominada equação de Gauss.
Considere ainda $\Psi : \Sigma^{n-1} \to (M^{n+1}, g)$ imsersão isométrica. Sejam $\overline{R}$ o tensor de curvatura de M e R o tensor de curvatura de Σ. Então, podemos escrever a equação de Gauss como: para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\overline{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) + B(Y, W)B(X, Z) - B(X, W)B(Y, Z) - g\left(AX, W\right);$$

ou ainda, em termos da curvatura seccional: dados X, Y linearmente independentes,

$$K(X, Y) = \overline{K}(X, Y) + g(Au, u)g(Av, v) - g(Au, v)^2.$$

Definição 35. *O vetor curvatura média da imersão $\Psi : \Sigma^{n-1} \to (M^n, g)$ é definido por*

$$H := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(e_j, e_j) = \frac{1}{n}(\operatorname{tr} A)\eta,$$

em que $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, \eta\}$ é um referencial ortonormal adaptado de T_pM.

Definição 36. *Uma imersão isométrica $\Psi : \Sigma^{n-1} \to M^n$ é dita **mínima** se $H \equiv 0$. E é dita **totalmente geodésica** quando $A = 0$.*

Considere agora uma imersão isométrica $\phi : \Sigma^{n-1} \to M^n$ com Σ orientável em uma variedade Riemanniana orientável M.

Definição 37 (*Variação Admissível*). *Dizemos que $\Phi : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma variação admissível (ou variação) de ϕ se:*

i. *Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\Phi_t : \Sigma \to M$ definida por $\Phi_t(p) := \Phi(p,t)$ é uma imersão isométrica, com $\Phi_0 = \phi$. Denote $\Sigma_t = \Phi_t(\Sigma)$;*

ii. *$\Phi_t(p) = p$, se $p \in \Sigma - K$, onde K é compacto (ou seja, há alteração apenas numa região compacta).*

O campo $\Psi(p) := \frac{\partial \Phi}{\partial t}(p, 0)$ é dito campo variacional.

Teorema 1 (*Primeira Variação da Área*).

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Area}(\Sigma_t) = -\int_\Sigma H \cdot f,$$

em que $f = \langle N, \Psi \rangle \in C_0^\infty(\Sigma)$ e H é a curvatura média de Σ e N normal unitário a Σ em M.

Teorema (*Segunda Variação da Área*).

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{Area}(\Sigma_t) = -\int_\Sigma f\left(\Delta_\Sigma f + |A|^2 f + \mathrm{Ric}_M(N,N) f\right).$$

$J := \Delta_\Sigma + |A|^2 + \mathrm{Ric}_M(N,N)$ é chamado operador de estabilidade de Σ, com Σ orientável e N normal unitário a Σ definido em M.

Definição 38. *Diz-se que uma imersão isométrica mínima $\Psi : \Sigma^{n-1} \to M^n$, com Σ orientável, é estável quando*

$$-\int_\Sigma f J f dA \geq 0, \ \forall f \in C_0^\infty.$$

Proposição 5 (*Desigualdade de Simons*). *Suponha que $\Sigma^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície mínima. Então*

$$\nabla_\Sigma |A|^2 \geq -2|A|^4 + 2\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)|\nabla_\Sigma |A||^2,$$

ou, equivalentemente,

$$|A|\Delta_\Sigma |A| + |A|^4 \geq \frac{2}{n-1}\left|\nabla_\Sigma |A|\right|^2. \tag{1.3}$$

Demonstração. Seja E_i, para $i = 1, \ldots, n$, um referencial ortonormal em uma vizinhança de algum ponto $x \in \Sigma$ tal que E_n é normal a Σ (isto é, um referencial normal adaptado). Denote por $a := H_{E_n}$ o (2,0)-tensor simétrico em Σ definido por

$$a(X,Y) = g\left(A(X,Y), E_n\right) = g\left(\nabla_X Y, E_n\right) = -g\left(\nabla_X E_n, Y\right),$$

e ponha $a_{ij} = a(E_i, E_j) = -g\left(\nabla_{E_i} E_n, E_j\right)$, isto é, se $X = \alpha^i E_i$ e $Y = \beta^j E_j$,

$$a(X,Y) = a(\alpha^i E_i, \beta^j E_j) = -g\left(\nabla_{\alpha^i E_i} E_n, \beta^j E_j\right) = a_{ij}\Theta_i \otimes \Theta_j(X,Y),$$

donde

$$a = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\Theta_i \otimes \Theta_j,$$

em que Θ_i é o respectivo referencial dual. Sejam $a_{..,k}$ e $a_{ij,k}$ definidos pela igualdade

$$a_{..,k} = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij,k}\Theta_i \otimes \Theta_j = \nabla_{E_k} a.$$

Como a é um (2,0)-tensor simétrico, segue que $a_{..,k}$ também o é. Note ainda que como a curvatura de $\mathbb{R}^n$ é identicamente nula,

$$\begin{aligned}
a_{ij,k} &= (\nabla_{E_k} a)(E_i, E_j) \\
&= E_k a(E_i, E_j) - a(\nabla^T_{E_k} E_i, E_j) - a(E_i, \nabla^T_{E_k} E_j) \\
&= -E_k g(\nabla_{E_i} E_n, E_j) + g\left(\nabla_{\nabla^T_{E_k} E_i} E_n, E_j\right) + g\left(\nabla_{E_i} E_n, \nabla_{E_k} E_j\right) \\
&= -g\left(\nabla_{E_i} \nabla_{E_k} E_n, E_j\right) + g\left(\nabla_{\nabla^T_{E_i} E_k} E_n, E_j\right) \\
&= a_{kj,i}.
\end{aligned}$$

Portanto, considere $a_{..,.}$ o (3,0)-tensor simétrico definido por

$$a_{..,.} = \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij,k}\Theta_i \otimes \Theta_j \otimes \Theta_k.$$

Deste, definimos um (3,0)-tensor simétrico, $a_{..,.l}$ dado por

$$a_{..,.l} = \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij,kl}\Theta_i \otimes \Theta_j \otimes \Theta_k = \nabla_{E_l} a_{..,.}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
a_{ij,kl} &= \nabla^T_{E_l} a_{..,.}(E_i, E_j, E_k) \\
&= E_l a_{..,.}(E_i, E_j, E_k) - a_{..,.}\left(\nabla^T_{E_l} E_i, E_j, E_k\right) - a_{..,.}\left(E_i, \nabla^T_{E_l} E_j, E_k\right) - a_{..,.}\left(E_i, E_j, \nabla^T_{E_l} E_k\right) \\
&= E_l a_{..,k}(E_i, E_j) - a_{..,k}\left(\nabla^T_{E_l} E_i, E_j\right) - a_{..,k}\left(E_i, \nabla^T_{E_l}\right) - \nabla^T_{\nabla^T_{E_l} E_k} a(E_i, E_j) \\
&= E_l E_k a(E_i, E_j) - E_l a\left(\nabla^T_{E_k} E_i, E_j\right) - E_l a(E_i, \nabla^T_{E_k} E_j) - E_k a\left(\nabla^T_{E_l} E_i, E_j\right) \\
&\quad + a\left(\nabla^T_{E_k} \nabla^T_{E_l} E_i, E_j\right) + a\left(\nabla^T_{E_l} E_i, \nabla^T_{E_k} E_j\right) - E_k a\left(E_i, \nabla^T_{E_l} E_j\right) + a\left(\nabla^T_{E_k} E_i, \nabla^T_{E_l} E_j\right) \\
&\quad + a\left(E_i, \nabla^T_{E_k} \nabla^T_{E_l} E_j\right) - \nabla^T_{E_l} E_k a(E_i, E_j) + a\left(\nabla^T_{\nabla^T_{E_l} E_k} E_i, E_j\right) + a\left(E_i, \nabla^T_{\nabla^T_{E_l} E_k} E_j\right) \\
&= a_{ij,lk} + \sum_{m=1}^{n-1} R_{klim} a_{mj} + \sum_{m=1}^{n-1} R_{kljm} a_{mi}.
\end{aligned}$$

Lembre que pela equação de Gauss (1.2),

$$R_{ijkl} = a_{jk} a_{il} - a_{ik} a_{jl},$$

e, portanto, podemos escever

$$\begin{aligned}
a_{ik,jk} &= a_{ik,kj} + \sum_{m=1}^{n-1} R_{jkim} a_{mk} + \sum_{m=1}^{n-1} R_{jkkm} a_{mi} \\
&= a_{ik,kj} + \sum_{m=1}^{n-1} (a_{ki}a_{jm} - a_{ji}a_{km}) a_{mk} + \sum_{m=1}^{n-1} (a_{kk}a_{jm} - a_{jk}a_{km}) a_{mi}.
\end{aligned}$$

Daí, podemos obter a equação de Simon:

$$\begin{aligned}
\Delta_\Sigma |A|^2 &= 2 \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \Delta_\Sigma a_{ij} + 2 \sum_{i,j=1}^{n-1} |\nabla_\Sigma a_{ij}|^2 \\
&= 2 \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij} a_{ij,kk} + 2 \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij,k}^2 \\
&= 2 \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij} a_{ik,jk} + 2 \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij,k}^2 \\
&= 2 \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij} a_{kk,ij} + 2 \sum_{i,j,k,m=1}^{n-1} a_{ij} (a_{ki}a_{jm} - a_{ji}a_{km}) a_{mk} \\
&+ 2 \sum_{i,j,k,m=1}^{n-2} a_{ij} (a_{kk}a_{jm} - a_{jk}a_{km}) a_{mi} + 2 \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij,k}^2 \\
&= -2 \sum_{i,j,k,m=1}^{n-1} a_{ij}^2 a_{km}^2 + 2 \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij,k}^2.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a equação de Simons,

$$\Delta_\Sigma |A|^2 = -2|A|^4 + 2 \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij,k}^2. \tag{1.4}$$

Vamos obter a desigualdade a partir desta. Primeiramente, observe que como a é simétrico, podemos escolher E_i, $i = 1, \ldots, n$, tais que em x temos $a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Daí, por *Cauchy-Schwarz*,

$$4|A|^2 |\nabla |A||^2 = |\nabla |A|^2|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^2 \right)_k \right]^2 = 4 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii,k} a_{ii} \right)^2 \leq 4|A|^2 \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ii,k}^2.$$

Consequentemente,

$$|\nabla |A||^2 \leq \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ii,k}^2.$$

Portanto, pela minimalidade,

$$
\begin{aligned}
|\nabla|A||^2 &\leq \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ii,k}^2 = \sum_{i\neq k} a_{ii,k}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii,i}^2 \\
&= \sum_{i\neq k} a_{ii,k}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{i\neq j} a_{jj,i} \right)^2 \\
&\leq \sum_{i\neq k} a_{ii,k}^2 + (n-2) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i\neq j} a_{jj,i}^2 \\
&= (n-1) \sum_{i\neq k} a_{ii,k}^2 \\
&= (n-1) \sum_{i\neq k} a_{ik,i}^2 \\
&= \frac{n-1}{2} \left(\sum_{i\neq k} a_{ik,i}^2 + \sum_{i\neq k} a_{ki,i}^2 \right).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) |\nabla|A||^2 &\leq \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ii,k}^2 + \sum_{i\neq k} a_{ik,i}^2 + \sum_{i\neq k} a_{ki,i}^2 \\
&\leq \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij,k}^2,
\end{aligned}
$$

donde, por (1.4),

$$
\begin{aligned}
\Delta_\Sigma |A|^2 &= -2|A|^4 + 2 \sum_{i,j,k=1}^{n-1} a_{ij,k}^2 \\
&\geq -2|A|^4 + 2\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) |\nabla_\Sigma |A||^2.
\end{aligned}
$$

Observe que como $\Delta_\Sigma |A|^2 = \operatorname{div}(\nabla |A|^2) = \operatorname{div}(2|A|\nabla|A|) = 2|A|\Delta|A| + 2|\nabla|A|^2$, obtemos (1.3) diretamente da última desigualdade acima. ■

2 Métricas conformes

2.1 Alguns resultados sobre métricas conformes

Nesta seção provaremos alguns resultados sobre métricas conformes (a ser definida abaixo) que serão necessários para a demonstração do teorema principal.

Definição 39. *(Métricas conformes) Duas métricas g e $\tilde{g}$ em uma variedade diferenciável M são ditas conformes se existe uma função suave positiva f tal que $\tilde{g} = fg$. O conjunto de todas as métricas conformes a uma métrica g é denotado por $[g]$. Note que se $\tilde{g} \in [g]$, então podemos escrever $\tilde{g} = e^u g$.*

Nosso primeiro objetivo é calcular a curvatura de Ricci de $\tilde{g}$ em termos de g.

Proposição 6. *Se $\tilde{g} = e^{2f} g$, então para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X,Y)\nabla_g f \tag{2.1}$$

e

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + A_{ij}^k, \tag{2.2}$$

em que

$$A_{ij}^k = \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta_{jk} + \frac{\partial f}{\partial x_j}\delta_{ki} - \frac{\partial f}{\partial x_l} g^{kl} g_{ij}.$$

Demonstração. Pela *fórmula de Koszul* (1.1), para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = {} & X(\tilde{g}(Y,Z)) + Y(\tilde{g}(X,Z)) - Z(\tilde{g}(Y,X)) - \tilde{g}([Y,X],Z) - \tilde{g}([X,Z],Y) \\ & - \tilde{g}([Y,Z],X). \end{aligned}$$

Substituindo $\tilde{g} = e^{2f} g$, obtemos

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= X(e^{2f} g(Y,Z)) + Y(e^{2f} g(X,Z)) - Z(e^{2f} g(Y,X)) \\ &\quad - e^{2f} g([Y,X],Z) - e^{2f} g([X,Z],Y) - e^{2f} g([Y,Z],X) \\ &= 2e^{2f} X(f) g(Y,Z) + e^{2f}(g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)) + 2e^{2f} Y(f) g(X,Z) \\ &\quad + e^{2f}(g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z)) - 2e^{2f} Z(f) g(Y,X) \\ &\quad - e^{2f}(g(\nabla_Z Y, X) + g(Y, \nabla_Z X)) - e^{2f} g(\nabla_Y X - \nabla_X Y, Z) \\ &\quad - e^{2f} g(\nabla_X Z - \nabla_Z X, Y) - e^{2f} g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X) \\ &= 2e^{2f} X(f) g(Y,Z) + 2e^{2f} Y(f) g(X,Z) - 2e^{2f} Z(f) g(Y,X) \\ &= 2e^{2f} X(f) g(Y,Z) + 2e^{2f} Y(f) g(X,Z) - 2e^{2f} g(\nabla_g f, Z) g(Y,X) \\ &= 2\tilde{g}(X(f)Y + Y(f)X - g(Y,X)\nabla_g f, Z). \end{aligned}$$

Como Z é arbitrário,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X,Y)\nabla_g f.$$

Em particular, tomando $X = \partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$,

$$\begin{aligned}\sum_k \tilde{\Gamma}_{ij}^k \partial_k &= \tilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_i}\partial_j + \partial_i(f)\partial_j + \partial_j(f)\partial_i - g_{ij}\nabla_g f \\ &= \sum_k \left\{ \Gamma_{ij}^k + \partial_i f \delta_{jk} + \partial_j(f)\delta_{ik} - \sum_l g^{kl} g_{ij}\partial_l(f) \right\} \partial_k.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \partial_i f \delta_{jk} + \partial_j(f)\delta_{ik} - \sum_l g^{kl} g_{ij}\partial_l(f).$$

■

Como consequência, obtemos as seguintes expressões para o gradiente e o laplaciano na métrica $\tilde{g}$ para uma função $h \in C^\infty(M)$, que se relacionam com os mesmos entes referentes à métrica g e à função f, expoente da métrica conforme $\tilde{g} = e^{2f}g$.

Corolário 1. *Se $h \in C^\infty(M)$ e $\tilde{g} = e^{2f}g$, então*

$$\begin{aligned}\nabla_{\tilde{g}} h &= e^{-2f}\nabla_g h; \\ \tilde{\nabla}^2 h := \nabla^2_{\tilde{g}} h &= \nabla^2_g h - (df \otimes dh + dh \otimes df) + g(\nabla_g f, \nabla_g h) g.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Demonstração. Primeiramente, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$g(\nabla_g h, X) = X(h) = \tilde{g}(\nabla_{\tilde{g}} h, X) = e^{2f} g(\nabla_{\tilde{g}} h, X).$$

Portanto, para todo X

$$g(e^{-2f}\nabla_g h, X) = g(\nabla_{\tilde{g}} h, X).$$

Logo,

$$\nabla_{\tilde{g}} h = e^{-2f}\nabla_g h.$$

Para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}\nabla^2_{\tilde{g}} h(X,Y) &= \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_X \nabla_{\tilde{g}} h, Y\right) = e^{2f} g\left(\tilde{\nabla}_X (e^{-2f}\nabla_g h), Y\right) \\ &= e^{2f} g\left(-2e^{-2f} X(f)\nabla_g h + e^{-2f}\tilde{\nabla}_X \nabla_g h, Y\right) \\ &= -2X(f)Y(h) + g\left(\tilde{\nabla}_X \nabla_g h, Y\right).\end{aligned}$$

Pela Proposição 6, temos que

$$\begin{aligned}g\left(\tilde{\nabla}_X \nabla_g h, Y\right) &= g\Big(\nabla_X \nabla_g h + X(f)\nabla_g h + \nabla_g h(f) X - g(X, \nabla_g h)\nabla_g f, Y\Big) \\ &= \nabla^2_g h(X,Y) + X(f)Y(h) - X(h)Y(f) + g\left(\nabla_g h, \nabla_g f\right) g(X,Y).\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\nabla^2_{\tilde{g}} h(X,Y) = \nabla^2_g h(X,Y) - [X(f)Y(h) + X(h)Y(f)] + g(\nabla_g h, \nabla_g f) g(X,Y),$$

isto é,

$$\nabla^2_{\tilde{g}} h = \nabla^2_g h - (df \otimes dh + dh \otimes df) + g(\nabla_g f, \nabla_g h) g.$$

■

Por conseguinte, obtemos expressões que relacionam a curvatura na métrica $\tilde{g}$ com a curvatura na métrica g mais alguns termos que envolvem a função f, expoente da métrica conforme $\tilde{g} = e^{2f}g$.

Proposição 7. *Se $\tilde{g} = e^{2f}g$, então*

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z &+ \nabla^2 f(X,Z)Y - \nabla^2 f(Y,Z)X + Y(f)Z(f)X \\ &- X(f)Z(f)Y - g(Y,Z)\nabla_X\nabla_g f + g(X,Z)\nabla_Y\nabla_g f \\ &- g(Z,Y)|\nabla_g f|^2 X + g(Z,X)|\nabla_g f|^2 Y + g(Z,Y)X(f)\nabla_g f - g(Z,X)Y(f)\nabla_g f,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}e^{-2f}\tilde{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) &+ \nabla^2 f(X,Z)g(Y,W) + \nabla^2 f(Y,W)g(X,Z) \\ &- \nabla^2 f(Y,Z)g(X,W) - \nabla^2 f(X,W)g(Y,Z) + Y(f)Z(f)g(X,W) \\ &+ X(f)W(f)g(Z,Y) - X(f)Z(f)g(Y,W) - Y(f)W(f)g(X,Z) \\ &+ [g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)]|\nabla_g f|^2.\end{aligned}$$

Demonstração. Pela Proposição 6, obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z &= \tilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + Y(f)Z + Z(f)Y - g(Y,Z)\nabla_g f) \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z + X(f)\nabla_Y Z + (\nabla_Y Z(f))X - g(X,\nabla_Y Z)\nabla_g f \\ &\quad + X(Y(f))Z + Y(f)\nabla_X Z + X(f)Y(f)Z + Y(f)Z(f)X \\ &\quad - Y(f)g(X,Z)\nabla_g f + X(Z(f))Y + Z(f)\nabla_X Y + X(f)Z(f)Y \\ &\quad + Z(f)Y(f)X - Z(f)g(X,Y)\nabla_g f - g(\nabla_X Y, Z)\nabla_g f \\ &\quad - g(Y,\nabla_X Z)\nabla_g f - g(Y,Z)\nabla_X\nabla_g f - g(Y,Z)|\nabla_g f|^2 X,\end{aligned} \tag{2.4}$$

e também que

$$\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + [X,Y](f)Z + Z(f)[X,Y] - g([X,Y],Z)\nabla_g f \tag{2.5}$$

Assim, das equações (2.4) e (2.5)

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z &= \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z \\ &= \{\nabla_X\nabla_Y Z + X(f)\nabla_Y Z + (\nabla_Y Z(f))X - g(X,\nabla_Y Z)\nabla_g f + X(Y(f))Z \\ &+ Y(f)\nabla_X Z + X(f)Y(f)Z + Y(f)Z(f)X - Y(f)g(X,Z)\nabla_g f + X(Z(f))Y \\ &+ Z(f)\nabla_X Y + X(f)Z(f)Y + Z(f)Y(f)X - Z(f)g(X,Y)\nabla_g f \\ &- g(\nabla_X Y,Z)\nabla_g f - g(Y,\nabla_X Z)\nabla_g f - g(Y,Z)\nabla_X\nabla_g f - g(Y,Z)|\nabla_g f|^2 X\} \\ &- \{\nabla_Y\nabla_X Z + Y(f)\nabla_X Z + (\nabla_X Z(f))Y - g(Y,\nabla_X Z)\nabla_g f + Y(X(f))Z \\ &+ X(f)\nabla_Y Z + Y(f)X(f)Z + X(f)Z(f)Y - X(f)g(Y,Z)\nabla_g f + Y(Z(f))X \\ &+ Z(f)\nabla_Y X + Y(f)Z(f)X + Z(f)X(f)Y - Z(f)g(Y,X)\nabla_g f \\ &- g(\nabla_Y X,Z)\nabla_g f - g(X,\nabla_Y Z)\nabla_g f - g(X,Z)\nabla_Y\nabla_g f - g(X,Z)|\nabla_g f|^2 Y\} \\ &- \{\nabla_{[X,Y]}Z + ([X,Y](f))Z + Z(f)[X,Y] - g([X,Y],Z)\nabla_g f\}.\end{aligned}$$

Organizando e utilizando as definições,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z = &\{\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\} + X(f)\nabla_Y Z - X(f)\nabla_Y Z + (\nabla_Y Z(f))X\\
&- g(X,\nabla_Y Z)\nabla_g f + g(X,\nabla_Y Z)\nabla_g f + X(Y(f))Z + Y(f)\nabla_X Z - Y(f)\nabla_X Z\\
&+ X(f)Y(f)Z - X(f)Y(f)Z + Y(f)Z(f)X - Y(f)Z(f)X - Y(f)g(X,Z)\nabla_g f\\
&+ X(Z(f))Y + Z(f)\nabla_X Y + X(f)Z(f)Y - X(f)Z(f)Y + Z(f)Y(f)X\\
&- Z(f)g(X,Y)\nabla_g f + Z(f)g(X,Y)\nabla_g f - g(\nabla_X Y,Z)\nabla_g f - g(Y,\nabla_X Z)\nabla_g f\\
&+ g(Y,\nabla_X Z)\nabla_g f - g(Y,Z)\nabla_X\nabla_g f - g(Y,Z)|\nabla_g f|^2 X - (\nabla_X Z(f))Y\\
&- Y(X(f))Z + X(f)g(Y,Z)\nabla_g f - Y(Z(f))X - Z(f)\nabla_Y X - Z(f)X(f)Y\\
&+ g(\nabla_Y X,Z)\nabla_g f + g(X,Z)\nabla_Y\nabla_g f + g(X,Z)|\nabla_g f|^2 Y - ([X,Y](f))Z\\
&- Z(f)[X,Y] + g([X,Y],Z)\nabla_g f\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y,Z) + (\nabla_Y Z(f))X + X(Y(f))Z - Y(f)g(X,Z)\nabla_g f + X(Z(f))Y\\
&+ Z(f)\nabla_X Y + Z(f)Y(f)X - g(\nabla_X Y,Z)\nabla_g f - g(Y,Z)\nabla_X\nabla_g f\\
&- g(Y,Z)|\nabla_g f|^2 X - (\nabla_X Z(f))Y - Y(X(f))Z + X(f)g(Y,Z)\nabla_g f\\
&- Y(Z(f))X - Z(f)\nabla_Y X - Z(f)X(f)Y + g(\nabla_Y X,Z)\nabla_g f + g(X,Z)\nabla_Y\nabla_g f\\
&+ g(X,Z)|\nabla_g f|^2 Y - [X(Y(f)) - Y(X(f))]Z - Z(f)[\nabla_X Y - \nabla_Y X]\\
&+ g(\nabla_X Y - \nabla_Y X,Z)\nabla_g f\\
&= R(X,Y,Z) + g(\nabla_Y Z,\nabla_g f)X - Y(f)g(X,Z)\nabla_g f + Xg(Z,\nabla_g f)Y\\
&+ Z(f)Y(f)X - g(Y,Z)\nabla_X\nabla_g f - g(Y,Z)|\nabla_g f|^2 X - g(\nabla_X Z,\nabla_g f)Y\\
&+ X(f)g(Y,Z)\nabla_g f - (Yg(Z,\nabla_g f))X - Z(f)X(f)Y + g(X,Z)\nabla_Y\nabla_g f\\
&+ g(X,Z)|\nabla_g f|^2 Y,\end{aligned}$$

pela definição de gradiente e pela simetria. Daí, pela compatibilidade da métrica, segue

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z &+ g(Z,\nabla_X\nabla_g f)Y - g(Z,\nabla_Y\nabla_g f)X + Y(f)Z(f)X\\
&- Z(f)X(f)Y - g(Y,Z)\nabla_X\nabla_g f + g(X,Z)\nabla_Y\nabla_g f - g(Y,Z)|\nabla_g f|^2 X\\
&+ X(f)g(Y,Z)\nabla_g f - Y(f)g(X,Z)\nabla_g f + g(X,Z)|\nabla_g f|^2 Y,\end{aligned} \tag{2.6}$$

uma vez que

$$\begin{aligned}g(Z,\nabla_Y\nabla_g f) &= Y(g(Z,\nabla_g f)) - g(\nabla_Y Z,\nabla_g f)\\
g(Z,\nabla_X\nabla_g f) &= X(g(Z,\nabla_g f)) - g(\nabla_X Z,\nabla_g f).\end{aligned}$$

Portanto, pela definição de Hessiana, segue de (2.6) que

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z =&R(X,Y)Z + \nabla^2 f(X,Z)Y - \nabla^2 f(Y,Z)X + Y(f)Z(f)X - X(f)Z(f)Y\\
&- g(Y,Z)\nabla_X\nabla_g f + g(X,Z)\nabla_Y\nabla_g f - g(Z,Y)|\nabla_g f|^2 X + g(Z,X)|\nabla_g f|^2 Y\\
&+ g(Z,Y)X(f)\nabla_g f - g(Z,X)Y(f)\nabla_g f.\end{aligned}$$

Por definição,

$$\tilde{R}(X,Y,Z,W) := \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y,Z),W) = e^{2f}g(\tilde{R}(X,Y,Z),W).$$

Assim,

$$\begin{aligned} e^{-2f}\tilde{R}(X,Y,Z,W) &= g(R(X,Y)Z,W) + g(\nabla^2 f(X,Z)Y,W) - g(\nabla^2 f(Y,Z)X,W) \\ &+ Y(f)Z(f)g(X,W) - X(f)Z(f)g(Y,W) - g(Y,Z)g(\nabla_X\nabla_g f,W) \\ &+ g(X,Z)g(\nabla_Y\nabla_g f,W) - g(Z,Y)|\nabla_g f|^2 g(X,W) + g(Z,X)|\nabla_g f|^2 g(Y,W) \\ &+ g(Z,Y)X(f)g(\nabla_g f,W) - g(Z,X)Y(f)g(\nabla_g f,W) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{-2f}\tilde{R}(X,Y,Z,W) &= R(X,Y,Z,W) + \nabla^2 f(X,Z)g(Y,W) - \nabla^2 f(Y,Z)g(X,W) \\ &+ Y(f)Z(f)g(X,W) - X(f)Z(f)g(Y,W) - g(Y,Z)\nabla^2 f(W,X) \\ &+ g(X,Z)\nabla^2 f(W,Y)[g(Y,W)g(Z,X) - g(Z,Y)g(X,W)]|\nabla_g f|^2 \\ &+ g(Z,Y)X(f)W(f) - g(Z,X)Y(f)W(f) \end{aligned}$$

■

Por fim, das proposições referentes a métricas conformes, obtemos uma expressão que relaciona o Ric na métrica $\tilde{g}$, denotado por $\tilde{\mathrm{Ric}}$ com o Ric na métrica g, juntamente com o gradiente, laplaciano e hessiana de f, bem como a métrica g, em que $\tilde{g} = e^{2f}g$.

Proposição 8. *Se $\tilde{g} = e^{2f}g$, então*

$$\tilde{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric} - (n-2)\nabla_g^2 f - (\Delta_g f + (n-2)|\nabla_g f|^2)g + (n-2)df \otimes df. \tag{2.7}$$

Demonstração. Primeiramente, observe que $\tilde{g}^{ij} = e^{-2f}g^{ij}$. De fato,

$$1 = \tilde{g}^{ij}\cdot\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}^{ij}e^{2f}g_{ij} \Longleftrightarrow e^{-2f}g^{ij} = \tilde{g}^{ij}g^{ij}g_{ij} = \tilde{g}^{ij}.$$

Assim, pela Proposição 7,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{jk} &:= \sum_{i,l}\tilde{g}^{il}\tilde{R}_{ijkl} = \sum_{i,l}g^{il}e^{-2f}\tilde{R}_{ijkl} \\ &= \sum_{i,l}g^{il}\{R_{ijkl} + \nabla_i\nabla_k f g_{jl} + \nabla_j\nabla_l f g_{ik} - \nabla_j\nabla_k f g_{il} - \nabla_i\nabla_l f g_{jk} + \nabla_j f\nabla_k f g_{il} \\ &+ \nabla_i f\nabla_l f g_{jk} - \nabla_i f\nabla_k f g_{jl} - \nabla_j f\nabla_l f g_{ik} + (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})|\nabla_g f|^2\} \\ &= R_{jk} + \sum_{i,l}\{\nabla_i\nabla_k f g^{il}g_{jl} + \nabla_j\nabla_l f g^{il}g_{ik} - \nabla_j\nabla_k f g^{il}g_{il} - \nabla_i\nabla_l f g^{il}g_{jk} \\ &+ \nabla_j f\nabla_k f g^{il}g_{il} + \nabla_i f\nabla_l f g^{il}g_{kj} - \nabla_i f\nabla_k f g^{il}g_{jl} - \nabla_j f\nabla_l f g^{il}g_{ik} \\ &+ g^{il}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})|\nabla_g f|^2.\} \end{aligned}$$

Daí, distribuindo,

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{jk} &= R_{jk} + \sum_i \nabla_i\nabla_k f \sum_l g^{il}g_{jl} + \sum_l \nabla_j\nabla_l f \sum_i g^{il}g_{ik} - \sum_l \nabla_j\nabla_k f \sum_i g^{il}g_{il}\\ &- \sum_i \nabla_i\nabla_l f \sum_l g^{il}g_{jk} + \sum_l \nabla_j f\nabla_k f \sum_i g^{il}g_{il} + \sum_{i,l} \nabla_i f\nabla_l f g^{il}g_{kj}\\ &- \sum_i \nabla_i f\nabla_k f \sum_l g^{il}g_{jl} - \sum_l \nabla_j f\nabla_l f \sum_i g^{il}g_{ik} + \Big[\sum_l \big(\sum_i g^{li}g_{ik}g_{jl}\\ &- \sum_i g^{li}g_{il}g_{jk}\big)\Big]|\nabla_g f|^2\end{aligned}$$

Como $\sum_* g^{i*}g_{*j} = \delta_{ij}$,

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{jk} &= R_{jk} + \sum_i \nabla_i\nabla_k f\delta_{ij} + \sum_l \nabla_j\nabla_l f\delta_{lk} - \sum_l \nabla_j\nabla_k f\delta_{ll} - \sum_{i,l} \nabla_i\nabla_l f g^{il}g_{jk}\\ &+ \sum_l \nabla_j f\nabla_k f\delta_{ll} + \sum_{i,l} \nabla_i f\nabla_l f g^{il}g_{kj} - \sum_i \nabla_i\nabla_k f\delta_{ij} - \sum_l \nabla_j f\nabla_l f\delta_{lk}\\ &+ \Big[\sum_l (\delta_{lk}g_{jl} - \delta_{ll}g_{jk})\Big]|\nabla_g f|^2.\end{aligned}$$

Note que (veja definição 23)

$$\nabla_g f = \sum_i a_i\partial_i \Longrightarrow a_i = \sum_j g^{ij}\nabla_j f \Longrightarrow |\nabla_g f|^2 = \sum_{i,j} \nabla_i f\nabla_l f g^{il},$$

e

$$\Delta_g f := \operatorname{div}(\nabla_g f) = \sum_{i,l} g^{il}g\left(\nabla_{\partial_i}\nabla_g f, \partial_l\right) = \sum_{i,l} g^{il}\nabla_i\nabla_l f$$

Logo,

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{jk} &= R_{jk} + 2\nabla_j\nabla_k f - n\nabla_j\nabla_k f - \Delta_g f g_{jk} + n\nabla_j f\nabla_k f + |\nabla_g f|^2 g_{jk} - 2\nabla_j f\nabla_k f\\ &+ (1-n)g_{jk}|\nabla_g f|^2\\ &= R_{jk} - (n-2)\nabla_j\nabla_k f + (n-2)\nabla_j f\nabla_k f - [\Delta_g f + (n-2)|\nabla_g f|^2]g_{jk}.\end{aligned}$$

Portanto, uma vez que $df \otimes df(X,Y) = g(\nabla_g f, X)g(\nabla_g f, Y)$, segue que

$$\tilde{\operatorname{Ric}} = \operatorname{Ric} - (n-2)\nabla_g^2 f - (\Delta_g f + (n-2)|\nabla_g f|^2)g + (n-2)df \otimes df.$$

■

O primeiro dos lemas a seguir, trata de uma cota inferior para o tensor de curvatura modificado 2-Bakry-Emery-Ricci de $\tilde{g}$. Em particular, este resultado implica a não negatividade do tensor 2-Bakry-Emery-Ricci de $\tilde{g}$ para um k adequado.

Lema 1. *Sejam u positiva e $f := k(n-2)\ln(u)$, em que u é uma solução positiva de $-\Delta_g u = |A|_g^2 u$. Então, o tensor de Ricci da métrica $\tilde{g} = u^{2k}g$ satisfaz*

$$\operatorname{Ric}_{\tilde{g}} + \nabla_{\tilde{g}}^2 f - \frac{1-k(n-2)}{k(n-2)^2}df \otimes df \geq \left(k - \frac{n-1}{n}\right)|A|_g^2 g, \tag{2.8}$$

no sentido de formas quadráticas. Em particular, se $n = 3$ e $k = \frac{2}{3}$, então o tensor 2-Bakry-Emery-Ricci

$$\mathrm{Ric}_{\tilde{g}}^{2,f} := \mathrm{Ric}_{\tilde{g}} + \nabla_{\tilde{g}}^2 f - \frac{1}{2} df \otimes df,$$

satisfaz

$$\mathrm{Ric}_{\tilde{g}}^{2,f} \geq 0.$$

Demonstração. Pela Proposição 8, sendo $\varphi \in C^\infty(M)$ positiva, temos que

$$\tilde{\mathrm{Ric}} := \mathrm{Ric}_{\tilde{g}} = \mathrm{Ric}_g - (n-2)\nabla^2\varphi - (\Delta_g\varphi + (n-2)|\nabla_g\varphi|^2)g + (n-2)d\varphi \otimes d\varphi. \quad (2.9)$$

Neste caso, para que $\tilde{g} = u^{2k}g$, tomamos $\varphi = k\ln u$. Assim,

$$\nabla_g\varphi = \frac{k}{u}\nabla_g u; \quad \nabla_g^2\varphi = -\frac{k}{u^2}du \otimes du + \frac{k}{u}\nabla_g^2 u; \quad \Delta_g\varphi = -\frac{k}{u^2}|\nabla_g u|^2 + \frac{k}{u}\Delta_g u. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.9), obtemos

$$\mathrm{Ric}_{\tilde{g}} = \mathrm{Ric}_g - (n-2)\left[\left(-\frac{k}{u^2}du \otimes du + \frac{k}{u}\nabla_g^2 u\right) - \frac{k^2}{u^2}du \otimes du)\right] - \left[\left(-\frac{k}{u^2}|\nabla_g u|^2 + \frac{k}{u}\Delta_g u\right) + (n-2)\frac{k^2}{u^2}|\nabla_g u|_g^2\right]g.$$

Note que sendo $f = k(n-2)\ln(u)$, obtemos

$$\nabla_g f = \frac{k(n-2)}{u}\nabla_g u; \qquad \nabla_g^2 f = k(n-2)\left(\frac{\nabla_g^2 u}{u} - \frac{du \otimes du}{u^2}\right);$$

$$\Delta_g f = k(n-2)\left(\frac{\Delta u}{u} - \frac{|\nabla_g u|^2}{u^2}\right).$$

Substituindo tais informações em (2.3), com $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$, vem

$$\nabla_{\tilde{g}}^2 f = k(n-2)\left(\frac{\nabla_g^2 u}{u} - \frac{du \otimes du}{u^2}\right) - 2\frac{k^2(n-2)}{u^2}du \otimes du + \frac{k^2(n-2)}{u^2}|\nabla_g u|^2 g.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_{\tilde{g}} + \nabla_{\tilde{g}}^2 f &= \mathrm{Ric}_g - (n-2)\left[\left(-\frac{k}{u^2}du \otimes du + \frac{k}{u}\nabla_g^2 u\right) - \frac{k^2}{u^2}du \otimes du)\right] - \left[\left(-\frac{k}{u^2}|\nabla_g u|^2\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{k}{u}\Delta_g u\right) + (n-2)\frac{k^2}{u^2}|\nabla_g u|_g^2\right]g + k(n-2)\left(\frac{\nabla_g^2 u}{u} - \frac{du \otimes du}{u^2}\right) \\
&\quad - 2\frac{k^2(n-2)}{u^2}du \otimes du + \frac{k^2(n-2)}{u^2}|\nabla_g u|^2 g \\
&= \mathrm{Ric}_g - \frac{k^2(n-2)}{u^2}du \otimes du - \frac{k}{u}(\Delta_g u)g + \frac{k}{u^2}|\nabla_g u|^2 g \\
&= \mathrm{Ric}_g - \frac{\left[\frac{k(n-2)}{u}du\right] \otimes \left[\frac{k(n-2)}{u}du\right]}{n-2} - \frac{k}{u}(\Delta_g u)g + \left|\frac{k(n-2)}{u}\nabla_g u\right|^2 \frac{1}{k(n-2)^2} \\
&= \mathrm{Ric}_g - \frac{df \otimes df}{n-2} + k|A|_g^2 g + \frac{g}{k(n-2)^2}|\nabla_g f|^2,
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathrm{Ric}_{\tilde{g}} + \nabla^2_{\tilde{g}} f = \mathrm{Ric}_g - \frac{df \otimes df}{n-2} + k|A|^2_g g + \frac{g}{k(n-2)^2}|\nabla_g f|^2. \tag{2.11}$$

Note que, por *Cauchy-Schawrz*, vale (no sentindo de formas quadráticas)

$$|\nabla_g f|^2 g \geq df \otimes df. \tag{2.12}$$

Com efeito, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$df \otimes df(X,X) = g(\nabla_g f, X) g(\nabla_g f, X) \leq |\nabla_g f|^2 |X|^2 = |\nabla_g f|^2 g(X,X).$$

Também, veja que como $tr(A) = 0$,

$$A^2 \leq \frac{n-1}{n}|A|^2_g g. \tag{2.13}$$

De fato, sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ autovetores associados aos autovalores $k_1, \ldots, k_n$, respectivamente, de A, isto é, $Ae_j = k_j e_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Então, sendo A auto-adjunta,

$$|A|^2_g = tr(A^2) = \sum_i g(A^2 e_i, e_i) = \sum_i k_i^2.$$

Assim, sendo $tr(A) = 0$, $k_i = \sum_{j \neq i} k_j$. Por Cauchy-Schwarz,

$$k_i^2 = \left(\sum_{j \neq i} k_j \right)^2 \leq \sum_{j \neq i} 1^2 \sum_{j \neq i} k_j^2 \leq (n-1)(|A|^2_g - k_i^2);$$

donde, deduzimos

$$k_i^2 \leq \frac{n-1}{n}|A|^2_g.$$

Por outro lado, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, escrevendo $X = \sum_i x_i e_i$, vemos

$$\begin{aligned}
|AX|^2_g = g(AX, AX) = g\left(A \sum_i x_i e_i, A \sum_j x_j e_j \right) &= \sum_{i,j} x_i x_j g(Ae_i, Ae_j) = \sum_{i,j} x_i x_j k_i k_j \delta_{ij} \\
&= \sum_i x_i^2 k_i^2 \\
&\leq \sum_i x_i^2 \frac{n-1}{n}|A|^2_g \\
&= \frac{n-1}{n}|A|^2_g |X|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$A^2 \leq \frac{n-1}{n}|A|^2_g g.$$

Por fim, em nosso caso, $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, pela Equação de Gauss,

$$R(X,Y,Z,W) = g(AX,Z)g(AY,W) - g(AX,W)g(AY,Z).$$

Daí, tomando $X = e_i = W$, temos

$$R(e_i, Y, Z, e_i) = g(Ae_i, Z)g(AY, e_i) - g(Ae_i, e_i)g(AY, Z).$$

Somando em i, vem que

$$-\operatorname{Ric}_g(Y, Z) = -Hg(AY, Z) + g(AY, AZ) = -Hg(AY, Z) + g(A^2Y, Z).$$

Como M é mínima, obtemos, portanto,

$$\operatorname{Ric}_g = -A^2. \tag{2.14}$$

Substituindo as informações de (2.12), (2.13) e (2.14) em (2.11), resulta que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}_{\tilde{g}} + \nabla^2_{\tilde{g}} f &= \operatorname{Ric}_g - \frac{df \otimes df}{n-2} + k|A|^2_g g + \frac{g}{k(n-2)^2}|\nabla_g f|^2 \\
&\geq \operatorname{Ric}_g - \frac{df \otimes df}{n-2} + k|A|^2_g g + \frac{df \otimes df}{k(n-2)^2} \\
&= \operatorname{Ric}_g + \frac{1-k(n-2)}{k(n-2)^2} df \otimes df + k|A|^2_g g \\
&= -A^2 + \frac{1-k(n-2)}{k(n-2)^2} df \otimes df + k|A|^2_g g \\
&\geq -\frac{(n-1)}{n}|A|^2_g g + \frac{1-k(n-2)}{k(n-2)^2} df \otimes df + k|A|^2_g g \\
&= \frac{1-k(n-2)}{k(n-2)^2} df \otimes df + \left(k - \frac{(n-1)}{n}\right)|A|^2_g g.
\end{aligned}$$

E, por fim,

$$\operatorname{Ric}_{\tilde{g}} + \nabla^2_{\tilde{g}} f - \frac{[1-k(n-2)]}{k(n-2)^2} df \otimes df \geq \left(k - \frac{(n-1)}{n}\right)|A|^2_g g.$$

■

2.2 Completude da Métrica

De agora em diante, nesta seção, iremos tomar $n = 3$, $k = \frac{2}{3}$ e $u \in C^\infty(M)$ uma solução positiva de

$$-\Delta_g u = |A|^2_g u \text{ em } M. \tag{2.15}$$

A estabilidade de M garante a existência de tal u pelo teorema (em nosso caso, $q = -|A|^2_g$): (Veja [10])

Teorema 2 (*Fisher-Colbrie, Schoen*)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i. $\lambda_1(D) \geq 0$ *para todo domínio limitado* $D \subset M$*;*

ii. $\lambda_1(D) > 0$ *para todo domínio limitado* $D \subset M$*;*

iii. *Existe uma função u positiva satisfazendo a equação $\Delta u - qu = 0$ em M,*

em que q é uma função suave em M e λ_1 é o primeiro autovalor de $\Delta - q$.

No que se segue, vamos mostrar a completude da métrica conforme $\tilde{g} = u^{\frac{4}{3}}g$. Para o teorema principal, é necessário que possamos tomar comprimentos arbitrariamente grandes na métrica conforme $\tilde{g}$ a seguir, portanto é de suma importância que a mesma seja completa.

Lema 2. *A métrica $\tilde{g} = u^{\frac{4}{3}}g$ é completa.*

Demonstração. É sabido da existência de uma geodésica que minimiza o comprimento na métrica $\tilde{g} = u^{2k}g$, $\gamma(s)$, em que s é o comprimento de arco na métrica g, de sorte que dada qualquer outra curva divergente α (escapa de compactos) satisfaz $l(\gamma) \leq l(\alpha)$(Veja [11], teorema 1).
Logo, para provar a completude de $\tilde{g}$ é suficiente mostrar que o comprimento de tal curva γ é infinito, isto é,

$$\int_0^\infty u^k\left(\gamma(s)\right) ds = \infty. \tag{2.16}$$

De fato,

$$\begin{aligned} l_{\tilde{g}}(\gamma) &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \sqrt{\tilde{g}(\gamma'(s),\gamma'(s))}ds = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \sqrt{u^{2k}(\gamma(s))g(\gamma'(s),\gamma'(s))}ds \\ &= \int_0^\infty u^k(\gamma(s))ds, \end{aligned}$$

pois em g tal curva está parametrizada pelo comprimento de arco.

Como γ é uma geodésica minimizante, tomando o traço na expressão da segunda variação de energia para uma família de campos adequados, juntamente com a equação de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned} (n-1)\int_0^\infty (\varphi_s)^2 u^{-k} ds \geq &\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k}\left(k|A|^2 - A_{11}^2 - \sum_{j=2}^n A_{1j}^2\right) ds \\ &- k(n-2)\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k}(\ln(u))_{ss} ds + k\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k}\frac{|\nabla u|^2}{u^2} ds, \end{aligned} \tag{2.17}$$

para toda φ com suporte compacto em $(0,+\infty)$ e para todo $k > 0$. (Veja [9], teorema 1 com $H = 0$).

Como $\operatorname{tr} A = 0$,

$$0 = \sum_{i=1}^n A_{ii} \implies -A_{11} = \sum_{i=2}^n A_{ii}.$$

Além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, vem

$$\left(\sum_{i=2}^n A_{ii}\right)^2 = \left(\sum_{i=2}^n A_{ii}\cdot 1\right)^2 \leq \sum_{i=2}^n 1^2 \cdot \sum_{i=2}^n A_{ii}^2 = (n-1)\sum_{i=2}^n A_{ii}^2.$$

Por fim,

$$|A|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2 \geq A_{11}^2 + A_{22}^2 + \cdots + A_{nn}^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2.$$

Dessas considerações, segue que

$$\begin{aligned} |A|^2 &\geq A_{11}^2 + \frac{1}{(n-1)}\left(\sum_{i=2}^{n} A_{ii}\right)^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \\ &= A_{11}^2 + \frac{1}{(n-1)}(-A_{11})^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \\ &= \frac{n}{n-1}A_{11}^2 + 2\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Daí, de (2.18),

$$\begin{aligned} k|A|^2 - A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 &\geq \frac{kn}{n-1}A_{11}^2 + 2k\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 - A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \\ &= \left(\frac{kn}{n-1} - 1\right) A_{11}^2 + (2k-1)\sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2. \end{aligned}$$

Em particular, se $k \geq (n-1)/n$, então $kn/(n-1) \geq 1$ e $2k - 1 \geq [2(n-1)/n] - 1 = (n-2)/n \geq 0$, para $n \geq 2$; isto é,

$$k|A|^2 - A_{11}^2 - \sum_{j=2}^{n} A_{1j}^2 \geq 0. \tag{2.19}$$

Substituindo (2.19) em (2.17), resulta

$$(n-1)\int_0^{\infty} (\varphi_s)^2 u^{-k} ds \geq -k(n-2)\int_0^{\infty} \varphi^2 u^{-k}(\ln(u))_{ss} ds + k\int_0^{\infty} \varphi^2 u^{-k}\frac{|\nabla u|^2}{u^2} ds, \tag{2.20}$$

para toda φ com suporte compacto em $(0, +\infty)$, para todo $n \geq 2$ e $k \geq (n-1)/n$.

Perceba que

$$u_s = \frac{d}{ds}u\Big(\gamma(s)\Big) = g\Big(\nabla u(\gamma(s)), \gamma'(s)\Big) \leq |\nabla u(\gamma(s))|_g |\gamma'(s)|_g = |\nabla u(\gamma(s))|_g; \tag{2.21}$$

e ao integrarmos por partes a primeira integral do lado direito em (2.20), obtemos (lembrando que estamos aplicando em $\gamma(s)$)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varphi^2 u^{-k}(\ln(u))_{ss} ds = \lim_{t\to\infty}\left[\varphi^2 u^{-k}(\ln(u))_s\Big|_0^t\right] - 2\int_0^{\infty} (\ln(u))_s \varphi\varphi_s u^{-k} ds \\ + k\int_0^{\infty} (\ln(u))_s \varphi^2 u^{-k-1} u_s ds. \end{aligned}$$

Uma vez que φ tem suporte compacto em $(0, +\infty)$, não se anula apenas em algum intervalo fechado $[t_1, t_2]$, em que é zero nos extremos. Logo, ficamos com

$$\lim_{t\to\infty}\left[\varphi^2 u^{-k}(\ln(u))_s\Big|_0^t\right] = 0,$$

e, portanto, sendo $(\ln(u))_s = u_s/u$,

$$\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k}(\ln(u))_{ss} ds = -2\int_0^\infty u_s\varphi\varphi_s u^{-k-1} ds + k\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k-2}u_s^2 ds. \tag{2.22}$$

Assim, usando (2.21) e (2.22) em (2.20), vem

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^\infty (\varphi_s)^2 u^{-k} ds \geq -k(n-2)\Big[&-2\int_0^\infty u_s\varphi\varphi_s u^{-k-1} ds \\ &+ k\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k-2}u_s^2 ds\Big] + k\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k-2}u_s^2 ds,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^\infty (\varphi_s)^2 u^{-k} ds \geq\ & 2k(n-2)\int_0^\infty \varphi\varphi_s u^{-k-1}u_s ds \\ &+ k[1-k(n-2)]\int_0^\infty \varphi^2 u^{-k-2}u_s^2 ds.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Escolha $\varphi = u^k\psi$, com ψ suave e suporte compacto em $(0,+\infty)$. Temos

$$\begin{aligned}\varphi^2 u^{-k} &= u^k\psi^2; \\ \varphi_s &= ku^{k-1}u_s\psi + u^k\psi_s; \\ (\varphi_s)^2 u^{-k} &= k^2\psi^2 u^{k-2}u_s^2 + u^k\psi_s^2 + 2k\psi\psi_s u^{k-1}u_s.\end{aligned}$$

Substituindo em (2.23), obtemos

$$\begin{aligned}&(n-1)\int_0^\infty k^2\psi^2u^{k-2}u_s^2 + u^k\psi_s^2 + 2k\psi\psi_s u^{k-1}u_s ds \\ &\geq 2k(n-2)\int_0^\infty u^k\psi\left(ku^{k-1}u_s\psi + u^k\psi_s\right)u^{-k-1}u_s ds + k[1-k(n-2)]\int_0^\infty u^{2k}\psi^2u^{-k-2}u_s ds \\ &= 2k(n-2)\int_0^\infty ku^{k-2}\psi^2u_s^2 + u^{k-1}\psi\psi_s u_s ds + k[1-k(n-2)]\int_0^\infty u^{k-2}\psi^2 u_s ds \\ &= 2k^2(n-2)\int_0^\infty u^{k-2}\psi^2u_s^2 ds + 2k(n-2)\int_0^\infty u^{k-1}\psi\psi_s u_s ds \\ &\quad + k[1-k(n-2)]\int_0^\infty u^{k-2}\psi^2 u_s ds\end{aligned}$$

Isolando o termo $u^k\psi_s^2$ no lado esquerdo da desigualdade, vem

$$\begin{aligned}(n-1)\int_0^\infty u^k\psi_s^2 ds \geq\ & 2k^2(n-2)\int_0^\infty u^{k-2}\psi^2u_s^2 ds + 2k(n-2)\int_0^\infty u^{k-1}\psi\psi_s u_s ds \\ &+ k[1-k(n-2)]\int_0^\infty u^{k-2}\psi^2 u_s ds \\ &- k^2(n-1)\int_0^\infty \psi^2u^{k-2}u_s^2 ds - 2k(n-1)\int_0^\infty \psi\psi_s u^{k-1}u_s ds \\ =\ & [2k^2(n-2) + k - k^2(n-2) - k^2(n-1)]\int_0^\infty \psi^2u^{k-2}u_s^2 ds \\ &+ [2k(n-2) - 2k(n-1)]\int_0^\infty \psi\psi_s u^{k-1}u_s ds \\ =\ & (k-k^2)\int_0^\infty \psi^2u^{k-2}u_s^2 ds - 2k\int_0^\infty \psi\psi_s u^{k-1}u_s ds.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Denote
$$I = \int_0^\infty \psi\psi_s u^{k-1} u_s ds = \frac{1}{k}\int_0^\infty \psi\psi_s (u^k)_s ds.$$
Integrando por partes e notando mais uma vez que ψ possui suporte compacto em algum intervalo compacto em $(0, +\infty)$, vem
$$\begin{aligned} I &= \cancelto{0}{\frac{1}{k}\lim_{t\to\infty}\left[\psi\psi_s u^k\Big|_0^t\right]} - \frac{1}{k}\int_0^\infty \psi_s^2 u^k + \psi\psi_{ss} u^k ds \\ &= -\frac{1}{k}\int_0^\infty \psi_s^2 u^k ds - \frac{1}{k}\int_0^\infty \psi\psi_{ss} u^k ds. \end{aligned}$$
A desigualdade de *Young* diz que se $1 < p < \infty$ e q é tal que $(1/p) + (1/q) = 1$ (iremos nos referir a p e q como conjugados), então para quaisquer $a, b \neq 0$
$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \tag{2.25}$$
Em particular, para todo $\varepsilon > 0$, ao escolhermos $\sqrt{\varepsilon}\cdot a$, $b/\sqrt{\varepsilon}$ e $p = 2$ em (2.25),
$$|ab| \leq \frac{a^2\varepsilon}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}. \tag{2.26}$$
Dessa forma, escolha
$$\begin{aligned} a &= \psi u_s u^{\frac{k-2}{2}}; \\ b &= \psi_s u^{\frac{k}{2}}. \end{aligned}$$
Substituindo em (2.26),
$$\left|\psi\psi_s u^{k-1} u_s\right| \leq \frac{\psi^2 u_s^2 u^{k-2}\varepsilon}{2} + \frac{\psi_s^2 u^k}{2\varepsilon}. \tag{2.27}$$
Para todo $t > 1$ e para todo $\varepsilon > 0$ podemos escrever
$$\begin{aligned} 2kI &= 2ktI + 2k(1-t)I \\ &= -2t\int_0^\infty \psi_s^2 u^k ds + \psi\psi_{ss} u^k ds + 2k(1-t)\int_0^\infty \psi\psi_s u^{k-1} u_s ds \\ &\leq -2t\int_0^\infty \psi_s^2 u^k ds + \psi\psi_{ss} u^k ds + k(t-1)\int_0^\infty \psi^2 u_s^2 u^{k-2}\varepsilon + \frac{\psi_s^2 u^k}{\varepsilon} ds. \end{aligned}$$
Assuma que $k < 1$ e tome $\varepsilon := (1-k)/(t-1)$. Então,
$$\begin{aligned} 2kI &\leq -2t\int_0^\infty \psi_s^2 u^k ds + \psi\psi_{ss} u^k ds + k(1-k)\int_0^\infty \psi^2 u_s^2 u^{k-2} ds + \frac{k(t-1)^2}{1-k}\int_0^\infty \psi_s^2 u^k ds \\ &= \left[-2t + \frac{k(t-1)^2}{1-k}\right]\int_0^\infty \psi_s^2 u^k ds - 2t\int_0^\infty \psi\psi_{ss} u^k ds + k(1-k)\int_0^\infty \psi^2 u_s^2 u^{k-2} ds. \end{aligned}$$
Usando (2.24), segue que
$$\begin{aligned} 2kI &\leq \left[-2t + \frac{k(t-1)^2}{1-k}\right]\int_0^\infty \psi_s^2 u^k ds - 2t\int_0^\infty \psi\psi_{ss} u^k ds \\ &\quad + (n-1)\int_0^\infty u^k \psi_s^2 ds + 2k\int_0^\infty \psi\psi_s u^{k-1} u_s ds \\ &= \left[-2t + \frac{k(t-1)^2}{1-k} + (n-1)\right]\int_0^\infty \psi_s^2 u^k ds - 2t\int_0^\infty \psi\psi_{ss} u^k ds + 2kI, \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\left[-2t+\frac{k(t-1)^2}{1-k}+(n-1)\right]\int_0^\infty \psi_s^2 u^k ds-2t\int_0^\infty \psi\psi_{ss}u^k ds\geq 0, \tag{2.28}$$

para todo $t>1$, $n\geq 2$ e $(n-1)/n\leq k<1$, onde ψ tem suporte compacto em $(0,+\infty)$.

Ponha

$$P(t)=-2t+\frac{k(t-1)^2}{1-k}+(n-1).$$

Escolhendo $n=3$ e $k=(n-1)/n=2/3$, podemos ver que $P(t)$ é negativo para algum $t>1$. De fato,

$$P(t)=-2t+\frac{\frac{2}{3}(t-1)^2}{1-\frac{2}{3}}+2=-2(t-1)+2(t-1)^2=-2(t-1)(2-t),$$

e se $t=3/2$,

$$P(3/2)=-2\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(2-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2},$$

donde para $n=3$, $k=2/3$ e $t=3/2$ em (2.28) (multiplicando por 2),

$$-\int_0^\infty \psi_s^2 u^{\frac{2}{3}}ds-6\int_0^\infty \psi\psi_{ss}u^{\frac{2}{3}}ds\geq 0, \tag{2.29}$$

para toda ψ com suporte compacto em $(0,+\infty)$. Fazendo agora $\psi=s\cdot\eta$,

$$\psi_s=\eta+s\eta_s \text{ implica que } (\psi_s)^2=\eta^2+2s\eta\eta_s+s^2\eta_s^2$$
$$\psi_{ss}=2\eta_s+s\eta_{ss} \text{ implica que } \psi\psi_{ss}=2s\eta\eta_s+s^2\eta\eta_{ss},$$

que substituindo em (2.29), resulta

$$-\int_0^\infty \left(\eta^2+2s\eta\eta_s+s^2\eta_s^2\right)u^{\frac{2}{3}}ds-6\int_0^\infty\left(2s\eta\eta_s+s^2\eta\eta_{ss}\right)u^{\frac{2}{3}}ds\geq 0,$$

donde ao isolarmos $u^{\frac{2}{3}}\eta^2$,

$$\int_0^\infty u^{\frac{2}{3}}\eta^2 ds\leq -\int_0^\infty\left(14s\eta\eta_s+6s^2\eta\eta_{ss}+s^2\eta_s^2\right)u^{\frac{2}{3}}ds.$$

Escolha η tal que $\eta\equiv 1$ em $[0,R]$, $\eta\equiv 0$ em $[2R,\infty)$ e com $|\eta_s|\leq C/R$, $|\eta_{ss}|\leq C/R^2$, para

$R \leq s \leq 2R$. Então

$$\begin{aligned}
\int_0^R u^{\frac{2}{3}} ds &= \int_0^R u^{\frac{2}{3}} \eta^2 ds \\
&\leq \int_0^\infty u^{\frac{2}{3}} \eta^2 ds \\
&\leq \int_0^\infty \left(-14s\eta\eta_s - 6s^2\eta\eta_{ss} - s^2\eta_s^2\right) u^{\frac{2}{3}} ds \\
&= \int_0^R \left(-14s\eta\eta_s - 6s^2\eta\eta_{ss} - s^2\eta_s^2\right) u^{\frac{2}{3}} ds \\
&\quad + \int_R^{2R} \left(-14s\eta\eta_s - 6s^2\eta\eta_{ss} - s^2\eta_s^2\right) u^{\frac{2}{3}} ds + \int_{2R}^\infty \left(-14s\eta\eta_s - 6s^2\eta\eta_{ss} - s^2\eta_s^2\right) u^{\frac{2}{3}} ds \\
&\leq \int_R^{2R} \left(28R\frac{C}{R} + 24R^2\frac{C}{R^2} + 4R^2\frac{C^2}{R^2}\right) u^{\frac{2}{3}} ds \\
&\leq \int_R^\infty \left(28R\frac{C}{R} + 24R^2\frac{C}{R^2} + 4R^2\frac{C^2}{R^2}\right) u^{\frac{2}{3}} ds \\
&= C' \int_R^\infty u^{\frac{2}{3}} ds,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

para algum $C' > 0$ independende de R, uma vez que em $[0, R]$ e $[2R, +\infty)$ a função η é constante. Dessa forma, concluí-se que

$$\int_0^\infty u^{\frac{2}{3}} ds = \infty,$$

caso contrário, se a integral convergisse, da última desigualdade em (2.30), isto é,

$$\int_0^R u^{\frac{2}{3}} ds \leq C' \int_R^\infty u^{\frac{2}{3}} ds,$$

teríamos

$$\int_0^\infty u^{\frac{2}{3}} ds = 0,$$

o que não pode acontecer, pois o integrando é positivo, logo a integral diverge. ■

Em [15], temos o seguinte resultado sobre estimativas de volumes:

Teorema 3 (*Qian*)**.** *Seja* $\mathrm{Ric}_h^\alpha \geq C^2$ *e seja* $R \geq r > 0$*. Então*

$$\mathrm{Vol}_h\left(B_p(R)\right) \leq \frac{n-1}{n+\alpha-1} e^{h(p)} \mathrm{Vol}(S^{n-1}) \int_0^R g_{c,n+\alpha}(t)^{n+\alpha-1} dt,$$

em que $g_{\zeta,\beta}$ *é solução da E.D.O.*

$$g''(s) + \frac{1}{\beta - 1}\zeta^2 g(s) = 0, \quad g(0) = 1, \quad g'(0) = 1.$$

Em [18], podemos encontrar generalizações de tal teorema de comparação. Para o resultado a seguir, toma-se $C = 0$, $n = 3$ e $\alpha = 2$. Os dois lemas que provamos também são utilizados para demonstrar o corolário abaixo, que nos dá uma estimativa de volume.

Corolário 2. *Seja $x_0 \in M^3$. Então, para todo $R > 0$, existe $C > 0$ tal que o f-volume*

$$\mathrm{Vol}_f\, B_R^{\tilde{g}}(x_0) := \int_{B_R^{\tilde{g}}(x_0)} e^{-f} dV_g \leq CR^5,$$

em que $f = \frac{2}{3}\ln u$. Equivalentemente, em termos de u e da forma de volume de g,

$$\int_{B_R^{\tilde{g}}(x_0)} u^{\frac{4}{3}} dV_g \leq CR^5. \tag{2.31}$$

2.3 Algumas estimativas de volume

A seguir, demonstraremos uma desigualdade do tipo Poincaré. Tal é utilizada para obtemos uma estimativa para a integral sobre M de $|A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{\delta}{3}}$ para uma escolha adequada de ψ.

Lema 3. *Para todo $0 < \delta < \frac{1}{100}$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} \psi^{5+\delta} dV_g \leq C \int_M u^{-2-\frac{2\delta}{3}} |\nabla \psi|^{5+\delta} dV_g, \ \forall\ \psi \in C_0^\infty(M). \tag{2.32}$$

Demonstração. Alguns cálculos serão feitos para termos arbitrários, como n, e à medida que for necessário, serão feitas as escolhas específicas. Temos que para todo $p \in [4, 4 + \sqrt{8/n})$ e para alguma constante $C(n,p) > 0$, vale

$$\int_M |A|^p f^2 \leq C \int_M |A|^{p-2} |\nabla f|^2, \ \forall f \in C_0^\infty(M). \tag{2.33}$$

Com efeito, a desigualdade de estabilidade diz que

$$\int_M \left[|A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(N,N)\right] \varphi^2 dV_g \leq \int_M |\nabla \varphi|^2 dVg \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(M),$$

onde A é a segunda forma fundamental de $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, N é um vetor normal unitário à M em $\mathbb{R}^{n+1}$ e dV_g é a forma de volume de g (Observe que $\overline{\mathrm{Ric}} = 0$, uma vez que o ambiente é $\mathbb{R}^{n+1}$). Pondo $\varphi = |A|^{1+q}\psi$, $q \geq 0$, e com $\psi \in C_0^\infty(M)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{4+2q}\psi^2 &\leq \int_M |\nabla(|A|^{1+q}\psi)|^2 \\
&= \int_M |(1+q)|A|^q \psi \nabla |A| + |A|^{1+q} \nabla \psi|^2 \\
&\leq \int_M \left[(1+q)|A|^q \psi |\nabla |A|| + |A|^{1+q} |\nabla \psi|\right]^2
\end{aligned}$$

Usando (2.25), obtemos que, para todo $\varepsilon > 0$ e toda $\psi \in C_0^\infty(M)$,

$$2(1+q)|A|^q \psi |\nabla |A|| |A|^{1+q} |\nabla \psi| \leq |A|^{2q} \psi^2 |\nabla |A||^2 \varepsilon + \frac{(1+q)^2}{\varepsilon} |A|^{2+2q} |\nabla \psi|^2,$$

donde

$$\int_M |A|^{4+2q}\psi^2 \leq \left[(1+q)^2+\varepsilon\right]\int_M |A|^{2q}|\nabla|A||^2\psi^2 + \left[\frac{(1+q)^2}{\varepsilon}+1\right]\int_M |A|^{2+2q}|\nabla\psi|^2. \quad (2.34)$$

Multiplicando a desigualdade de Simons (1.3) por $|A|^{2q}\psi^2$,

$$|A|^{2q+1}\psi^2\Delta|A| + |A|^{4+2q}\psi^2 \geq \frac{2}{n}|A|^{2q}\psi^2|\nabla|A||^2,$$

integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{2q+1}\psi^2\Delta|A| &= -\int_M \langle\nabla(|A|^{2q+1}\psi^2), \nabla|A|\rangle\\ &= -\int_M \langle(2q+1)|A|^{2q}\psi^2\nabla|A| + 2|A|^{2q+1}\psi\nabla\psi, \nabla|A|\rangle\\ &= -\int_M (2q+1)|A|^{2q}\psi^2|\nabla|A||^2 + 2|A|^{2q+1}\psi\langle\nabla\psi, \nabla|A|\rangle,\end{aligned}$$

obtemos

$$-\int_M (2q+1)|A|^{2q}\psi^2|\nabla|A||^2 + 2|A|^{2q+1}\psi\langle\nabla\psi,\nabla|A|\rangle + \int_M |A|^{4+2q}\psi^2 \geq \int_M \frac{2}{n}|A|^{2q}\psi^2|\nabla|A||^2,$$

que equivale a

$$\begin{aligned}\int_M (2q+1)|A|^{2q}\psi^2|\nabla|A||^2 &\leq \int_M 2|A|^{2q+1}\psi\left(-\langle\nabla\psi,\nabla|A|\rangle\right) + \int_M |A|^{4+2q}\psi^2 - \int_M \frac{2}{n}|A|^{2q}\psi^2|\nabla|A||^2\\ &\leq \int_M 2|A|^{2q+1}\psi|\nabla\psi||\nabla|A|| + \int_M |A|^{4+2q}\psi^2 - \int_M \frac{2}{n}|A|^{2q}\psi^2|\nabla|A||^2.\end{aligned}$$

Utilizando (2.25), temos,

$$\begin{aligned}2|A|^{2q+1}\psi|\nabla\psi||\nabla|A|| &= \sqrt{2}|A|^q\psi|\nabla|A||\sqrt{2}|A|^{q+1}|\nabla\psi|\\ &\leq |A|^{2q}\psi^2|\nabla|A||^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}|A|^{2q+2}|\nabla\psi|^2,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\int_M (2q+1)|A|^{2q}\psi^2|\nabla|A||^2 \leq& \int_M |A|^{2q}\psi^2|\nabla|A||^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}|A|^{2q+2}|\nabla\psi|^2 + \int_M |A|^{4+2q}\psi^2\\ &- \int_M \frac{2}{n}|A|^{2q}\psi^2|\nabla|A||^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\frac{2}{n}+1+2q-\varepsilon\right)\int_M |A|^{2q}|\nabla|A||^2\psi^2 \leq \int_M |A|^{4+2q}\psi^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{2+2q}|\nabla\psi|^2. \quad (2.35)$$

Substituindo (2.35) em (2.34) vem

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{4+2q}\psi^2 &\leq [(1+q)^2+\varepsilon]\frac{\left(\frac{2}{n}+1+2q-\varepsilon\right)}{\left(\frac{2}{n}+1+2q-\varepsilon\right)}\int_M |A|^{2q}|\nabla|A||^2\psi^2 \\
&+ \left[\frac{(1+q)^2}{\varepsilon}+1\right]\int_M |A|^{2+2q}|\nabla\psi|^2 \\
&\leq [(1+q)^2+\varepsilon]\left(\frac{2}{n}+1+2q-\varepsilon\right)^{-1}\int_M |A|^{4+2q}\psi^2 \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}[(1+q)^2+\varepsilon]\left(\frac{2}{n}+1+2q-\varepsilon\right)^{-1}\int_M |A|^{2+2q}|\nabla\psi|^2 \\
&+ \left[\frac{(1+q)^2}{\varepsilon}+1\right]\int_M |A|^{2+2q}|\nabla\psi|^2,
\end{aligned}$$

que reescrevendo retorna

$$\begin{gathered}
\left\{1-[(1+q)^2+\varepsilon]\left(\frac{2}{n}+1+2q-\varepsilon\right)^{-1}\right\}\int_M |A|^{4+2q}\psi^2 \leq \\
\left\{\frac{(1+q)^2+\varepsilon}{\varepsilon\,[(2/n)+1+2q-\varepsilon]}+\left[\frac{(1+q)^2}{\varepsilon}+1\right]\right\}\int_M |A|^{2+2q}|\nabla\psi|^2.
\end{gathered}$$

Sendo $q \geq 0$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$\left\{1-[(1+q)^2+\varepsilon]\left(\frac{2}{n}+1+2q-\varepsilon\right)^{-1}\right\}\int_M |A|^{4+2q}\psi^2 \leq C\int_M |A|^{2+2q}|\nabla\psi|^2.$$

Seja $q := (p-4)/2$. Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, nós temos

$$1-[(1+q)^2+\varepsilon]\left(\frac{2}{n}+1+2q-\varepsilon\right)^{-1} > 0,$$

donde se $p \in [4, 4+\sqrt{8/n})$, obtém-se

$$\int_M |A|^p\psi^2 \leq C\int_M |A|^{p-2}|\nabla\psi|^2, \quad \forall\psi \in C_0^\infty(M).$$

Tome em (2.33) $f = u^\alpha\psi$, com ψ suave e com suporte compacto, u solução positiva de $-\Delta u = |A|_g^2 u$ e $\alpha < 0$. Note que $\nabla(u^\alpha\psi) = \psi\nabla u^\alpha + u^\alpha\nabla\psi$. Daí, por *Cauchy-Schwarz*,

$$\begin{aligned}
|\nabla(u^\alpha\psi)|^2 = |\psi\nabla u^\alpha + u^\alpha\nabla\psi|^2 &= \psi^2|\nabla u^\alpha|^2 + u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2 + 2\psi u^\alpha\langle\nabla\psi,\nabla u^\alpha\rangle \\
&\leq \psi^2|\nabla u^\alpha|^2 + u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2 + 2\psi u^\alpha|\nabla\psi||\nabla u^\alpha|.
\end{aligned}$$

Em (2.25), tomando os conjugados iguais a 2,

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{2}\psi|\nabla u^\alpha| \\
b &= \sqrt{2}u^\alpha|\nabla\psi|,
\end{aligned}$$

obtemos que

$$2\psi u^\alpha|\nabla\psi||\nabla u^\alpha|\leq \psi^2|\nabla u^\alpha|^2+u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2,$$

e, portanto,

$$|\nabla(u^\alpha\psi)|^2\leq 2\psi^2|\nabla u^\alpha|^2+2u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2; \tag{2.36}$$

assim, substituindo (2.36) em (2.33), vem

$$\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 \leq 2C\left[\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 + \int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2\right],\ \forall\psi\in C_0^\infty(M). \tag{2.37}$$

Note que ao integrarmos por partes,

$$\begin{aligned}
-\int_M |A|^{p-2}\psi^2u^\alpha\Delta u^\alpha &= \int_M \left\langle\nabla\left(|A|^{p-2}\psi^2u^\alpha\right), \nabla u^\alpha\right\rangle \\
&= \int_M \left\langle\psi^2u^\alpha\nabla|A|^{p-2}+2|A|^{p-2}\psi u^\alpha\nabla\psi + |A|^{p-2}\psi^2\nabla u^\alpha, \nabla u^\alpha\right\rangle \\
&= \int_M u^\alpha\psi^2\langle\nabla|A|^{p-2}, \nabla u^\alpha\rangle + 2\int_M |A|^{p-2}\psi u^\alpha\langle\nabla\psi, \nabla u^\alpha\rangle \\
&+ \int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 = &-\int_M |A|^{p-2}\psi^2u^\alpha\Delta u^\alpha - \int_M u^\alpha\psi^2\langle\nabla|A|^{p-2}, \nabla u^\alpha\rangle \\
&-2\int_M |A|^{p-2}\psi u^\alpha\langle\nabla\psi, \nabla u^\alpha\rangle.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Sendo $\nabla u^\alpha = \alpha u^{\alpha-1}\nabla u$, temos que[1]

$$\begin{aligned}
|\nabla u^\alpha|^2 &= \alpha^2u^{2\alpha-2}|\nabla u|^2 \\
\Delta u^\alpha &= \alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}|\nabla u|^2+\alpha u^{\alpha-1}\Delta u
\end{aligned}$$

que em (2.38) retorna

$$\begin{aligned}
\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 &= -\int_M |A|^{p-2}\psi^2u^\alpha\left[\alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}|\nabla u|^2+\alpha u^{\alpha-1}\Delta u\right] \\
&- \int_M u^\alpha\psi^2\langle\nabla|A|^{p-2}, \nabla u^\alpha\rangle - 2\int_M |A|^{p-2}\psi u^\alpha\langle\nabla\psi, \nabla u^\alpha\rangle \\
&= -\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 - \alpha\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha-1}\psi^2\Delta u \qquad (2.39)\\
&- \int_M u^\alpha\psi^2\langle\nabla u^\alpha, \nabla|A|^{p-2}\rangle - 2\int_M |A|^{p-2}u^\alpha\psi\langle\nabla u^\alpha, \nabla\psi\rangle.
\end{aligned}$$

Para a última integral, por *Cauchy-Schwarz*, tem-se

$$-2\int_M |A|^{p-2}u^\alpha\psi\langle\nabla u^\alpha, \nabla\psi\rangle \leq 2\int_M |A|^{p-2}u^\alpha\psi|\nabla u^\alpha||\nabla\psi|.$$

[1] uma vez que $\operatorname{div}(fX) = \langle\nabla f, X\rangle + f\operatorname{div} X$

Dado $\varepsilon > 0$, tome em (2.25) os conjugados iguais a 2 e

$$a = \sqrt{2\varepsilon}\psi|\nabla u^\alpha|$$
$$b = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}u^\alpha|\nabla\psi|,$$

donde resulta

$$-2u^\alpha\psi|\nabla u^\alpha||\nabla\psi| \leq \varepsilon\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 + \frac{u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2}{\varepsilon},$$

e, portanto,

$$-2\int_M |A|^{p-2}u^\alpha\psi\langle\nabla u^\alpha, \nabla\psi\rangle \leq \int_M |A|^{p-2}\left[\varepsilon\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 + \frac{u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2}{\varepsilon}\right]. \tag{2.40}$$

Substituindo (2.40) em (2.39), obtemos

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \leq & -\alpha\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha-1}\psi^2\Delta u - \frac{\alpha-1}{\alpha}\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2\\ & - \int_M u^\alpha\psi^2\langle\nabla u^\alpha, \nabla|A|^{p-2}\rangle + \varepsilon\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2\\ & + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2,\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$ e $\psi \in C_0^\infty(M)$.

Como $-\Delta u = |A|^2 u$ em M, podemos reescrever

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \leq & \alpha\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha}\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2\\ & - \int_M u^\alpha\psi^2\langle\nabla u^\alpha, \nabla|A|^{p-2}\rangle + \varepsilon\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2\\ & + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2,\end{aligned}$$

ou ainda, (note que dois termos do lado direito possuem o mesmo integrando que o lado esquerdo)

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{\alpha-1}{\alpha} - \varepsilon\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \leq & \alpha\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 - \int_M u^\alpha\psi^2\langle\nabla u^\alpha, \nabla|A|^{p-2}\rangle\\ & + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2.\end{aligned} \tag{2.41}$$

Por *Cauchy-Schwarz*,

$$-\int_M u^\alpha\psi^2\langle\nabla u^\alpha, \nabla|A|^{p-2}\rangle \leq \int_M u^\alpha\psi^2|\nabla u^\alpha||\nabla|A|^{p-2}|,$$

e como

$$\nabla|A|^{p-2} = (p-2)|A|^{p-3}\nabla|A| = (p-2)|A|^{\frac{p-2}{2}}|A|^{\frac{p-4}{2}}\nabla|A|,$$

para todo $t_1 > 0$, em (2.25) tome os conjugados iguais a 2 e

$$a = \sqrt{t_1(p-2)}u^\alpha\psi|A|^{\frac{p-4}{2}}|\nabla|A||$$
$$b = \sqrt{\frac{p-2}{t_1}}\psi|\nabla u^\alpha||A|^{\frac{p-2}{2}};$$

então,

$$\left|u^\alpha\psi^2|\nabla u^\alpha||\nabla|A|^{p-2}|\right| \leq \frac{(p-2)u^{2\alpha}\psi^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2 t_1}{2} + \frac{(p-2)\psi^2|\nabla u^\alpha|^2|A|^{p-2}}{2t_1},$$

donde

$$-\int_M u^\alpha\psi^2\langle\nabla u^\alpha, \nabla|A|^{p-2}\rangle \leq \frac{(p-2)t_1}{2}\int_M u^{2\alpha}\psi^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2 + \frac{p-2}{2t_1}\int_M \psi^2|\nabla u^\alpha|^2|A|^{p-2}.$$

Substituindo em (2.41), ficamos com

$$\left(1+\frac{\alpha-1}{\alpha}-\varepsilon\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \leq \alpha\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 + \frac{(p-2)t_1}{2}\int_M u^{2\alpha}\psi^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2$$
$$+\frac{p-2}{2t_1}\int_M \psi^2|\nabla u^\alpha|^2|A|^{p-2} + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2,$$

ou seja,

$$\left(1-\varepsilon+\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{p-2}{2t_1}\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \leq \alpha\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2$$
$$+\frac{(p-2)t_1}{2}\int_M u^{2\alpha}\psi^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2, \tag{2.42}$$

para todos $t_1, \varepsilon > 0$ e $\psi \in C_0^\infty(M)$. Por (1.3), multiplicando por $|A|^{p-4}f^2$, em que $f \in C_0^\infty(M)$, vem

$$|A|^{p-3}f^2\Delta|A| + |A|^p f^2 \geq \frac{2}{n}|\nabla|A||^2|A|^{p-4}f^2$$

que equivale a

$$|A|^p f^2 \geq \frac{2}{n}|\nabla|A||^2|A|^{p-4}f^2 - |A|^{p-3}f^2\Delta|A|.$$

Integrando por partes o último termo, tem-se

$$\int_M -|A|^{p-3}f^2\Delta|A| = \int_M \langle\nabla\left(|A|^{p-3}f^2\right), \nabla|A|\rangle$$
$$= \int_M \langle(p-3)|A|^{p-4}f^2\nabla|A| + 2|A|^{p-3}f\nabla f, \nabla|A|\rangle$$
$$= (p-3)\int_M |A|^{p-4}f^2|\nabla|A||^2 + 2\int_M |A|^{p-3}f\langle\nabla f, \nabla|A|\rangle,$$

e, portanto,

$$\int_M |A|^p f^2 \geq \int_M \left(\frac{2}{n} + p - 3\right) |\nabla|A||^2 |A|^{p-4} f^2 + 2\int_M |A|^{p-3} f \langle \nabla f, \nabla|A|\rangle.$$

Para a última integral, por *Cauchy-Schwarz*,

$$\int_M 2|A|^{p-3} f\langle \nabla f, \nabla|A|\rangle \leq \int_M 2|A|^{p-3} f|\nabla f||\nabla|A||.$$

Por (2.25), temos, para todo $t_2 > 0$,

$$\begin{aligned}\left|2|A|^{p-3} f|\nabla f||\nabla|A||\right| &= \left| \left(\sqrt{2t_2} f|A|^{\frac{p-4}{2}}|\nabla|A||\right)\left(\sqrt{\frac{2}{t_2}}|A|^{\frac{p-2}{2}}|\nabla f|\right)\right| \\ &\leq f^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2 t_2 + \frac{|A|^{p-2}|\nabla f|^2}{t_2},\end{aligned}$$

consequentemente, podemos afirmar que

$$-\int_M 2|A|^{p-3} f\langle\nabla f, \nabla|A|\rangle \leq \int_M f^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2 t_2 + \frac{|A|^{p-2}|\nabla f|^2}{t_2},$$

isto é,

$$\int_M 2|A|^{p-3} f\langle\nabla f, \nabla|A|\rangle \geq -\int_M f^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2 t_2 + \frac{|A|^{p-2}|\nabla f|^2}{t_2},$$

donde, concluí-se que

$$\begin{aligned}\int_M |A|^p f^2 &\geq \int_M \left(\frac{2}{n} + p - 3\right)|\nabla|A||^2|A|^{p-4} f^2 - \int_M f^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2 t_2 + \frac{|A|^{p-2}|\nabla f|^2}{t_2} \\ &= \left(\frac{2}{n} + p - 3 - t_2\right)\int_M |A|^{p-4} f^2|\nabla|A||^2 - \int_M \frac{|A|^{p-2}|\nabla f|^2}{t_2}, \end{aligned} \tag{2.43}$$

para todo $t_2 > 0$. Escolhendo $f = u^\alpha\psi$ em (2.43), em que $\psi \in C_0^\infty(M)$, resulta

$$\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 \geq \left(\frac{2}{n} + p - 3 - t_2\right)\int_M |A|^{p-4} u^{2\alpha}\psi^2|\nabla|A||^2 - \int_M \frac{|A|^{p-2}|\nabla(u^\alpha\psi)|^2}{t_2}. \tag{2.44}$$

Note que por (2.25), para todos $t_2, \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}2u^\alpha\psi|\nabla u^\alpha||\nabla\psi| &= \sqrt{2t_2\varepsilon}\psi|u^\alpha|\sqrt{\frac{2}{t_2\varepsilon}}u^\alpha|\nabla\psi|^2 \\ &\leq t_2\varepsilon\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 + \frac{1}{t_2\varepsilon}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}|\nabla(u^\alpha\psi)|^2 &\leq \psi^2|\nabla u^\alpha|^2 + u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2 + 2u^\alpha\psi|\nabla u^\alpha||\nabla\psi| \\ &\leq \psi^2|\nabla u^\alpha|^2 + u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2 + t_2\varepsilon\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 + \frac{1}{t_2\varepsilon}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2 \\ &= (1 + t_2\varepsilon)\,\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 + \left(1 + \frac{1}{t_2\varepsilon}\right)u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2,\end{aligned}$$

que substituindo em (2.44) gera

$$\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 \geq \left(\frac{2}{n}+p-3-t_2\right)\int_M |A|^{p-4}u^{2\alpha}\psi^2|\nabla|A||^2 - \int_M \frac{|A|^{p-2}\Big(\left(1+t_2\varepsilon\right)\psi^2|\nabla u^\alpha|^2+\left(1+\frac{1}{t_2\varepsilon}\right)u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2\Big)}{t_2},$$

isto é,

$$\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 \geq \left(\frac{2}{n}+p-3-t_2\right)\int_M |A|^{p-4}|\nabla|A||^2u^{2\alpha}\psi^2 - \left(\frac{1}{t_2}+\varepsilon\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 - \frac{1}{t_2}\left(1+\frac{1}{t_2\varepsilon}\right)\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2, \tag{2.45}$$

para todos $t_2 > 0, \varepsilon > 0$ e $\psi \in C_0^\infty(M)$.
Sendo $\alpha < 0$,

$$\alpha\int_M |A|^p u^{2\alpha}\psi^2 \leq \alpha\left(\frac{2}{n}+p-3-t_2\right)\int_M |A|^{p-4}|\nabla|A||^2u^{2\alpha}\psi^2 - \alpha\left(\frac{1}{t_2}+\varepsilon\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u|^2 - \frac{\alpha}{t_2}\left(1+\frac{1}{t_2\varepsilon}\right)\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2,$$

que substituindo em (2.42) resulta

$$\begin{aligned}\left(1-\varepsilon+\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{p-2}{2t_1}\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \leq{}& \alpha\left(\frac{2}{n}+p-3-t_2\right)\int_M |A|^{p-4}|\nabla|A||^2u^{2\alpha}\psi^2\\ &-\alpha\left(\frac{1}{t_2}+\varepsilon\right)\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u|^2\\ &-\frac{\alpha}{t_2}\left(1+\frac{1}{t_2\varepsilon}\right)\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2\\ &+\frac{1}{\varepsilon}\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2\\ &+\frac{(p-2)t_1}{2}\int_M u^{2\alpha}\psi^2|A|^{p-4}|\nabla|A||^2,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\left[1+(\alpha-1)\varepsilon+\frac{\alpha-1}{\alpha}-\frac{(p-2)}{2t_1}+\frac{\alpha}{t_2}\right]\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^\alpha|^2 \leq{}& \left[\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\alpha}{t_2}\left(1+\frac{1}{t_2\varepsilon}\right)\right]\int_M |A|^{p-2}u^{2\alpha}|\nabla\psi|^2\\ &+\left[\frac{(p-2)}{2}t_1+\alpha\left(\frac{2}{n}+p-3-t_2\right)\right]\int_M |A|^{p-4}|\nabla|A||^2u^{2\alpha}\psi^2.\end{aligned}$$

Dado $\delta > 0$, tomando $\alpha = -1-(\delta/3)$, ficamos com

$$\begin{aligned}\left[1-(2+(\delta/3))\varepsilon+\frac{2+(\delta/3)}{1+(\delta/3)}-\frac{(p-2)}{2t_1}-\frac{(1+(\delta/3))}{t_2}\right]\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^{-1-\frac{\delta}{3}}|^2 \leq{}& \left[\frac{(p-2)t_1}{2}-\left(1+\frac{\delta}{3}\right)\left(\frac{2}{n}+p-3-t_2\right)\right]\int_M |A|^{p-4}|\nabla|A||^2u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\psi^2\\ &+\left[\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1+(\delta/3)}{t_2}\left(1+\frac{1}{t_2\varepsilon}\right)\right]\int_M |A|^{p-2}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^2,\end{aligned}$$

que, reorganizando, resulta em

$$\left[1-(2+(\delta/3))\varepsilon+\frac{2+(\delta/3)}{1+(\delta/3)}-\frac{(p-2)}{2t_1}-\frac{(1+(\delta/3))}{t_2}\right]\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^{-1-\frac{\delta}{3}}|^2 \leq$$
$$+\left[\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1+(\delta/3)}{t_2}\left(1+\frac{1}{t_2\varepsilon}\right)\right]\int_M |A|^{p-2}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^2$$
$$+\left[\frac{(p-2)t_1}{2}-\frac{2+(2\delta/3)}{n}-(1+(\delta/3))p+3+\delta(1+(\delta/3))t_2\right]\int_M |A|^{p-4}|\nabla|A||^2u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\psi^2, \tag{2.46}$$

para todos $\varepsilon, t_1, t_2 > 0$ e $\psi \in C_0^\infty(M)$. Tome

$$n=3, \quad p=5+\delta, \quad t_1=\frac{2(5+3\delta)}{9} \quad \text{e} \quad t_2=1.$$

Então, denotando por

$$C_1=\frac{(p-2)t_1}{2}-\frac{2+(2\delta/3)}{n}-(1+(\delta/3))p+3+\delta(1+(\delta/3))t_2; \quad \text{e}$$
$$C_2=1+\frac{2+(\delta/3)}{1+(\delta/3)}-\frac{(p-2)}{2t_1}-\frac{(1+(\delta/3))}{t_2},$$

temos

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{(3+\delta)(5+3\delta)}{9}-\frac{(2+(2\delta/3))}{3}-\left(1+\frac{\delta}{3}\right)(5+\delta)+3+\delta+1+\frac{\delta}{3}\\
&= \frac{15+14\delta+3\delta^2}{9}-\frac{(6+2\delta)}{9}-5-\delta-\frac{5\delta}{3}-\frac{\delta^2}{3}+3+\delta+1+\frac{\delta}{3}\\
&= \frac{9+12\delta+3\delta^2}{9}-1-\frac{4\delta}{3}-\frac{\delta^2}{3}\\
&= \frac{9+12\delta+3\delta^2}{9}-\frac{9+12\delta+3\delta^2}{9}\\
&= 0;
\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}
C_2 &= 1+\frac{2+(\delta/3)}{1+(\delta/3)}-\frac{(3+\delta)}{\frac{4(5+3\delta)}{9}}-1-\frac{\delta}{3}\\
&= \frac{6+\delta}{3+\delta}-\frac{9(3+\delta)}{4(5+3\delta)}-\frac{\delta}{3}\\
&= \frac{12(5+3\delta)(6+\delta)-27(3+\delta)^2-4\delta(3+\delta)(5+3\delta)}{12(3+\delta)(5+3\delta)}\\
&= \frac{12(30+23\delta+3\delta^2)-27(9+6\delta+\delta^2)-4\delta(15+14\delta+3\delta^2)}{12(15+14\delta+3\delta^2)}\\
&= \frac{360+276\delta+36\delta^2-243-162\delta-27\delta^2-60\delta-56\delta^2-12\delta^3}{180+168\delta+36\delta^2}\\
&= \frac{117+54\delta-47\delta^2-12\delta^3}{180+168\delta+36\delta^2},
\end{aligned}$$

e, portanto, em (2.46), retorna

$$\left[\frac{117+54\delta-47\delta^2-12\delta^3}{180+168\delta+36\delta^2}-(2+(\delta/3))\varepsilon\right]\int_M |A|^{p-2}\psi^2|\nabla u^{-1-\frac{\delta}{3}}|^2 \leq \left[\frac{1}{\varepsilon}+\left(1+\frac{\delta}{3}\right)\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\int_M |A|^{p-2}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^2,$$

para todo $\varepsilon > 0$ e $\psi \in C_0^\infty(M)$. Escolhendo $0 < \delta < \frac{1}{100}$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos:

$$\int_M |A|^{3+\delta}\psi^2|\nabla u^{-1-\frac{\delta}{3}}|^2 \leq C\int_M |A|^{3+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^2, \tag{2.47}$$

para algum $C > 0$. Substituindo (2.47) em (2.37), obtemos que

$$\begin{aligned}\int_M |A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\psi^2 &\leq 2\tilde{C}\left[\int_M |A|^{3+\delta}\psi^2|\nabla u^{-1-\frac{\delta}{3}}|^2+\int_M |A|^{3-\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^2\right]\\ &\leq C'\int_M |A|^{3+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^2.\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, seja $\varepsilon' = \frac{3+\delta}{5+\delta}\varepsilon$. Então, $\varepsilon' > 0$ é também qualquer. Em (2.25), tome $p = \frac{5+\delta}{3+\delta}$ e $q = \frac{5+\delta}{2}$ e

$$\begin{aligned}a &= |A|^{3+\delta}\psi^{\frac{2(3+\delta)}{5+\delta}}\varepsilon^{\frac{3+\delta}{5+\delta}}\\ b &= |\nabla\psi|^2\psi^{-\frac{2(3+\delta)}{5+\delta}}\varepsilon^{-\frac{(3+\delta)}{5+\delta}}.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}|A|^{3+\delta}|\nabla\psi|^2 &\leq \frac{|A|^{5+\delta}\psi^2\varepsilon(3+\delta)}{5+\delta}+\frac{|\nabla\psi|^{5+\delta}|\psi|^{-3-\delta}2\varepsilon^{\frac{-3-\delta}{2}}}{5+\delta}\\ &\leq |A|^{5+\delta}\psi^2\varepsilon'+\frac{C''}{\varepsilon'}|\nabla\psi|^{5+\delta}|\psi|^{-3-\delta},\end{aligned}$$

para alguma constante $C'' < 1$, já que

$$\frac{2\varepsilon^{\frac{-3-\delta}{2}}}{5+\delta} \leq \frac{C''}{\varepsilon'} \Longleftrightarrow C'' \leq \frac{1}{pq\varepsilon^{\frac{1+\delta}{2}}}.$$

Logo, (renomeando a constante)

$$\int_M |A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\psi^2 \leq \varepsilon'\int_M |A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\psi^2+\frac{C}{\varepsilon'}\int_M u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^{5+\delta}|\psi|^{-3-\delta},$$

para todo $\varepsilon' > 0$ e toda $\psi \in C_0^\infty(M)$. Que tomando $\varepsilon' > 0$ adequado resulta em

$$\int_M |A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\psi^2 \leq C_1\int_M u^{-2-\frac{2\delta}{3}}|\nabla\psi|^{5+\delta}|\psi|^{-3-\delta},\ \forall\psi \in C_0^\infty(M).$$

Perceba que

$$\left|\nabla\psi^{\frac{2}{5+\delta}}\right|^{5+\delta} = \left|\frac{2}{5+\delta}\psi^{\frac{2}{5+\delta}-1}\nabla\psi\right|^{5+\delta} = \left(\frac{2}{5+\delta}\right)^{5+\delta}|\psi|^{-3-\delta}|\nabla\psi|^{5+\delta},$$

donde

$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} \psi^2 \leq C_2 \int_M u^{-2-\frac{2\delta}{3}} |\nabla \psi^{\frac{2}{5+\delta}}|^{5+\delta}, \ \forall \psi \in C_0^\infty(M),$$

que substituindo ψ por $\psi^{\frac{2}{5+\delta}}$, vem (renomeando novamente a constante)

$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} \psi^{5+\delta} \leq C \int_M u^{-2-\frac{2\delta}{3}} |\nabla \psi|^{5+\delta}, \ \forall \psi \in C_0^\infty(M). \tag{2.48}$$

■

3 Hipersuperfícies mínimas, imersas, orientáveis e estáveis são planos

3.1 Problema de Bernstein

O problema de Bernstein questiona:

Uma hipersuperfície mínima $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, com $n < 7$, que é um gráfico inteiro sobre um hiperplano $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um hiperplano?

Muitos matemáticos trabalharam neste problema (bem como generalizações e adicionando determinadas hipóteses), com resultados mostrando que em algumas dimensões isto é verdade, como, por exemplo, DO CARMO e PENG em [8], FISHER-COLBRIE e SCHOEN em [10] e POGORELOV em [14] enquanto outros, BOMBIERI, DE GIORGI e GIUSTI, em [2] mostraram que a partir de uma determinada dimensão, $n \geq 8$, tal não é verdade.

O artigo no qual se baseia este trabalho traz uma demonstração de um resultado semelhante a este último, sendo agora $\Sigma^3 \subset \mathbb{R}^4$, que na realidade é uma prova da conjectura de Schoen (Veja [5], teorema 2.12), a qual foi originalmente verificada por CHODOSH e LI, em [4].

3.2 Resultado

Agora, mostraremos, com o apoio dos resultados estabelecidos anteriormente, em particular a desigualdade do tipo Poincaré, que a integral sobre M de $|A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}$ é não negativa. Uma vez que u é solução positiva de $-\Delta u = |A|^2 u$, e $|A| \geq 0$, isto nos força a concluir que $|A|$ é identicamente nula sobre M, ou seja, que M é totalmente geodésica. Com isso, juntamente com as hipóteses feitas sobre M, podemos concluir que M é um hiperplano.

Teorema 4. *Uma hipersuperfície mínima imersa, completa, orientável e estável $M^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ é isométrica a um hiperplano.*

Demonstração. Note que, pela definição de gradiente,

$$\nabla_g \psi = g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(f)\frac{\partial}{\partial x_i} \text{ e}$$
$$\nabla_{\tilde{g}} \psi = \tilde{g}^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(f)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Como $\tilde{g} = u^{\frac{4}{3}} g$, temos que $\tilde{g}^{ij} = u^{-\frac{4}{3}} g^{ij}$; donde

$$\begin{aligned}\nabla_{\tilde{g}}\psi &= \tilde{g}^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(f)\frac{\partial}{\partial x_i}\\ &= u^{-\frac{4}{3}}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(f)\frac{\partial}{\partial x_i}\\ &= u^{-\frac{4}{3}}\nabla_g\psi.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}|\nabla_{\tilde{g}}\psi|^2_{\tilde{g}} = u^{\frac{4}{3}}g\left(\nabla_{\tilde{g}}\psi, \nabla_{\tilde{g}}\psi\right) = u^{\frac{4}{3}}g\left(u^{-\frac{4}{3}}\nabla_g\psi, u^{-\frac{4}{3}}\nabla_g\psi\right) = u^{-\frac{4}{3}}|\nabla_g\psi|^2_g\\ \Longrightarrow |\nabla_g\psi|^{5+\delta}_g = u^{\frac{2(5+\delta)}{3}}\left|\nabla_{\tilde{g}}\psi\right|^{5+\delta}_{\tilde{g}}.\end{aligned}$$

Que substituindo em (2.48)

$$\int_M |A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\psi^{5+\delta} \leq C\int_M u^{-2-\frac{2\delta}{3}+\frac{2(5+\delta)}{3}}|\nabla_{\tilde{g}}\psi|^{5+\delta}_{\tilde{g}},\ \forall\psi\in C_0^\infty(M),$$

isto é,

$$\int_M |A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\psi^{5+\delta} \leq C\int_M u^{\frac{4}{3}}|\nabla_{\tilde{g}}\psi|^{5+\delta}_{\tilde{g}},\ \forall\psi\in C_0^\infty(M). \tag{3.1}$$

Seja $x_0 \in M$ e considere $\tilde{r}$ a função distância à partir de x_0 com respeito à métrica $\tilde{g} = u^{\frac{4}{3}}g$. Escolha em (3.1) $\psi := \eta(\tilde{r})$, com $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ em $[0, R]$, $\eta \equiv 0$ em $[2R, +\infty)$ e $|\eta'| \leq C/R$ em $[R, 2R]$, para alguma constante $C > 0$ e algum $R > 0$. Então, para algum $0 < \delta < 1/100$,

$$\begin{aligned}\int_{B_R^{\tilde{g}}(x_0)}|A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}dV_g = \int_{B_R^{\tilde{g}}(x_0)}|A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\eta(\tilde{r})^{5+\delta}dV_g \leq \int_M|A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}\eta(\tilde{r})^{5+\delta}dV_g\\ \leq C\int_M u^{\frac{4}{3}}|\nabla_{\tilde{g}}\eta(\tilde{r})|^{5+\delta}_{\tilde{g}}.\end{aligned}$$

Como $|\nabla_{\tilde{g}}\tilde{r}|_{\tilde{g}} \equiv 1$,

$$|\nabla_{\tilde{g}}\psi|_{\tilde{g}} = |\eta'(\tilde{r})\nabla_{\tilde{g}}\tilde{r}|_{\tilde{g}} = |\eta'(\tilde{r})| \leq \frac{C}{R},$$

em $[R, 2R]$. Logo, podemos considerar apenas $B_{2R}^{\tilde{g}}(x_0)$, donde

$$\begin{aligned}\int_{B_R^{\tilde{g}}(x_0)}|A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}dV_g &\leq \tilde{C}\int_M u^{\frac{4}{3}}|\nabla_{\tilde{g}}\eta(\tilde{r})|^{5+\delta}_{\tilde{g}}\\ &\leq \frac{C'}{R^{5+\delta}}\int_{B_{2R}^{\tilde{g}}(x_0)}u^{\frac{4}{3}}dV_g\\ \overset{(2.31)}{} &\leq \frac{C'C''(2R)^5}{R^{5+\delta}}\\ &= \frac{C'''}{R^\delta}.\end{aligned}$$

Como a métrica $\tilde{g}$ é completa, podemos fazer R crescer tanto quanto quisermos. Uma vez que estamos considerando a bola com respeito à métrica $\tilde{g}$, fazendo $R \to +\infty$, obtemos

$$\int_M |A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}dV_g = \lim_{R\to\infty}\int_{B_R^{\tilde{g}}(x_0)}|A|^{5+\delta}u^{-2-\frac{2\delta}{3}}dV_g \leq \lim_{R\to\infty}\frac{C'''}{R^\delta} = 0,$$

logo
$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} dV_g \leq 0.$$
Por outro lado, $|A| \geq 0$ e $u^{-2-\frac{2\delta}{3}} > 0$, donde
$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} dV_g \geq 0.$$
Portanto,
$$\int_M |A|^{5+\delta} u^{-2-\frac{2\delta}{3}} dV_g = 0 \implies |A| \equiv 0, \text{ em } M.$$
Dessa forma, M é totalmente geodésica. Concluí-se, portanto, que M é isométrica a um hiperplano, uma vez que $A = 0$ implica que o campo normal é localmente constante, implicando que a hipersuperfície seja a união de abertos em $\mathbb{R}^{n+1}$. Como tal é conexa e completa, este aberto tem de ser um hiperplano, isto é, M é isométrica a um hiperplano em $\mathbb{R}^4$.

$\blacksquare$

Convenção da Soma de Einstein

Em vez de utilizarmos o sinal de somatório Σ para denotar as somas, a convenção de Einstein utiliza do seguinte artifício: é convencionado que sempre que uma expressão aparecer com o mesmo símbolo como **subíndice** e **superíndice** existe uma soma neste índice, por exemplo:

$$v = v^i e_i \Leftrightarrow v = \sum_i v^i e^i$$
$$R_{ij} = g^{kl} R_{kijl} \Leftrightarrow R_{ij} = \sum_{k,l} g^{kl} R_{kijl}$$
$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l \Leftrightarrow R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l R^l_{ijk}\partial_l$$
$$R(X,Y)Z = a^i b^j c^k R^l_{ijk}\partial_l \Leftrightarrow R(X,Y)Z = \sum_{i,j,k,l} a^i b^j c^k R^l_{ijk}\partial_l.$$

Referências

[1] ALMGREN, F. J. **Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem**, Ann. of Math. Volume 84, p. 277–292, 1966. Disponível em: ⟨https://www.math.stonybrook.edu/~bishop/classes/math638.F20/Almgren_Int_Regularity.pdf⟩

[2] BOMBIERI, E. GIORGI E., GIUSTIE, E. **Minimal cones and the Bernstein problem**. Inventiones mathematicae, Volume 7, p.243-268, Setembro, 1969. Disponível em: ⟨https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN356556735_0007?tify=%7B%22pages%22%3A%5B253%5D%2C%22view%22%3A%22info%22%7D⟩

[3] CATINO, Giovanni. MASTROLIA, Paolo. RONCORONI, Alberto. **Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces**. preprint: 2022. Disponível em:⟨http://cvgmt.sns.it/paper/5721/⟩.

[4] CHODOSH, Otis. LI, Chao. **Stable minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$**. 2021. Disponível em: ⟨https://arxiv.org/pdf/2108.11462.pdf⟩

[5] COLDING, Tobias H.; MINICOZZI, William P. **A Course in Minimal Surfaces**. United States: American Mathematical Society, 2011. ISBN 978-08-218-5323-8.

[6] DE GIORGI, Ennio. **Una estensione del teorema di Bernstein**. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze Fisiche e Matematiche, Serie 3, Volume 19 (1965) no. 1, p. 79-85. Disponível em: ⟨http://www.numdam.org/item/ASNSP_1965_3_19_1_79_0.pdf⟩

[7] DO CARMO, Manfredo. **Geometria Riemanniana**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. ISBN 978-85-244-0493-1.

[8] DO CARMO, Manfredo. PENG, C.K. **Stable minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ are planes**. American Mathematical Society, Volume 1, Number 6, November 1979. Disponível em: ⟨https://www.ams.org/journals/bull/1979-01-06/S0273-0979-1979-14689-5/S0273-0979-1979-14689-5.pdf⟩

[9] ELBERT, M.F. NELLI, B. ROSENBERG, H. **Stable constant mean curvature hypersurfaces**. Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 135, no.10, p. 3359-3366, 2007. Disponível em: ⟨https://www.ams.org/journals/proc/2007-135-10/S0002-9939-07-08825-9/S0002-9939-07-08825-9.pdf⟩

[10] FISHER-COLBRIE, Doris. SCHOEN, Richard. **The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature**. Communications of Pure and Applied Mathematics, Volume 33, p. 199-211, 1980. Disponível em: ⟨https://math.jhu.edu/~js/Math748/fischer-colbrie-schoen.pdf⟩

[11] FISHER-COLBRIE, Doris. **On complete minimal surfaces with finite Morse index in three manifolds**. Inventiones mathematicae, Volume 82, p. 121-132, 1985.

Disponível em:⟨https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF01394782.pdf?pdf=inline%20link⟩

[12] FLEMING, Wendell H. **On the oriented Plateau Problem**. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Volume 11, p. 69–90, Janeiro 1962. Disponível em: ⟨https://link.springer.com/article/10.1007/BF02849427⟩

[13] LEE, John M. **Introduction to Smooth Manifolds**. Germany: Springer New York, 2013. ISBN 978-14-419-9982-5.

[14] POGORELOV, Aleksei V. **On the stability of minimal surfaces**. Sovieth Math. Dokl, Volume 24, p. 274-276. Disponível em:⟨https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=44703&option_lang=rus⟩

[15] QIAN, Zhongmin. **Estimates for Weighted volumes and applications**. The Quarterly Journal of Mathematics, Volume 48, Issue 2, Junho, 1997, p 235–242. Disponível em: ⟨https://academic.oup.com/qjmath/article/48/2/235/1550926⟩

[16] SCHOEN, R. SIMON, L. YAU, S.T. **Curvature estimates for minimal hypersurfaces**. Acta Mathematica, Volume 134, p. 275-288, Julho, 1975. Disponível em: ⟨https://projecteuclid.org/journals/acta-mathematica/volume-134/issue-none/Curvature-estimates-for-minin 10.1007/BF02392104.full⟩

[17] SIMONS, James. **Minimal Varieties in Riemannian Manifolds**. Annals of Mathematics, vol. 88, no. 1, 1968, p. 62–105. Disponível em:⟨https://www.jstor.org/stable/1970556⟩

[18] WYLIE, Will. WEI, Guofang. **Comparison Geometry for the Bakry-Emery Ricci Tensor**. Journal of Differential Geometry, Junho, 2007. Disponível em:⟨https://arxiv.org/pdf/0706.1120.pdf⟩

[19] HARDT, R. SIMON, L. **Area minimizing hypersurfaces with singularities**. J. Reine Angew. Math, Vol. 362, 1985, p. 102-109.