UFAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ CÍCERO FERREIRA TORRES

O ensino do Princípio da Indução Finita no Ensino Médio: uma abordagem através da Torre de Hanói

Maceió
2023

JOSÉ CÍCERO FERREIRA TORRES

O ensino do Princípio da Indução Finita no Ensino Médio: uma abordagem através da Torre de Hanói

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva.

Maceió

2023

.

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Helena Cristina Pimentel do Vale CRB4 - 661

T693e Torres, José Cícero Ferreira.
O ensino do Princípio da Indução Finita no Ensino Médio: uma abordagem através da Torre de Hanói / José Cícero Ferreira Torres. – 2023.
49 f. : il.

Orientador: Marcos Ranieri da Silva.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Curso de Licenciatura em Matemática. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 47-49.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino médio. 3. Princípio da indução finita. 4. Torre de Hanói.I. Título.

CDU: 51:37.046.14

JOSÉ CÍCERO FERREIRA TORRES

O ensino do Princípio da Indução Finita no Ensino Médio: uma abordagem através da Torre de Hanói

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovado em 28 de junho de 2023.

Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva – UFAL (Orientador)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva – UFAL (Examinador Interno)

Profª Drª Elaine Cristine de Souza Silva – UFAL (Examinadora Interna)

À minha mãe, Maria Grinaura Torres, mulher analfabeta que conduziu e incentivou minha educação formal.

À Professora Mestra Elisa Fonseca Sena e Silva, pelos exemplos e contra-exemplos de vida.

(*In Memoriam* de ambas)

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

A todos os integrantes do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, em especial aos professores que contribuíram significativamente para a minha formação.

À Profª Drª Elaine Cristine de Souza Silva e ao Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva pela rápida aceitação do convite para participarem da Banca Examinadora e pelos pertinentes apontamentos que engrandeceram este estudo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva, que aceitou o desafio de orientar este trabalho, mesmo com o curto prazo que tínhamos. De fato, não tenho como expressar minha gratidão diante da sua disponibilidade e vontade em auxiliar no aprimoramento do meu trabalho.

A Silvestre Santos de Farias Júnior, um colega de curso que se transformou, ao longo dos anos, em um irmão. Esteve junto comigo em muitos momentos banais na UFAL, onde rimos, nos desesperamos, passamos dificuldades, mas nunca deixamos de incentivar e acreditar um no outro. Também esteve literalmente ao meu lado quando eu estava internado lutando contra o COVID-19, não me deixando desistir da vida. Logo em seguida, ele estava me dando forças para superar a perda de minha querida mãe. A você, meu grande amigo, eu desejo que sua vida seja tão próspera quanto é seu coração de bons sentimentos.

E a todos meus amigos, que por serem muitos, é impossível citá-los.

Se alguém me perguntasse o que é que todo estudante de Ensino Médio deveria saber de matemática, sem sombra de dúvida, o tema Indução figuraria na minha lista.

É com o conceito de Indução que se estabelece o primeiro contato com a noção de infinito em Matemática, e por isso ele é muito importante; porém, é, ao mesmo tempo, sutil e delicado.

HEFEZ, Abramo.

RESUMO

O método da indução finita é uma ferramenta essencial nas demonstrações de propriedades envolvendo números naturais. Na maioria dos casos, o próprio professor de matemática desconhece ou não domina o tema, causando significativas dificuldades para os estudantes desenvolverem a capacidade de justificar e deduzir resultados. O presente trabalho tem a seguinte proposta: Considerar o ensino do Princípio da Indução no Ensino Médio, utilizando a Torre de Hanói como estratégia didática. O objetivo é mostrar aos estudantes e professores do Ensino Médio que é possível incorporar esse método de demonstração nesse nível de estudo. Para isso, é necessário discutir as demonstrações no Ensino Médio, apresentar o Princípio da Indução e utilizar a Torre de Hanói para resolver "*o problema do fim do mundo*", apresentado na última seção.

Palavras-chave: Princípio da Indução Finita. Demonstrações no Ensino Médio. Torre de Hanói.

ABSTRACT

The method of finite induction is an essential tool in demonstrations of properties involving natural numbers. In most cases, the mathematics teacher himself does not know or does not master the subject, causing significant difficulties for students to develop the ability to justify and deduce results. The present work has the following proposal: To consider teaching the Principle of Induction in High School, using the Tower of Hanoi as a didactic strategy. The goal is to show high school students and teachers that it is possible to incorporate this method of demonstration at this level of study. To do this, it is necessary to discuss demonstrations in High School, present the Principle of Induction, and use the Tower of Hanoi to solve "the end of the world problem", presented in the last section.

Keywords: Principle of Finite Induction. High School Demonstrations. Tower of Hanoi.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As experiências vividas pelos estudantes, aliadas à literatura especializada, confirmam que o ensino de demonstrações matemáticas ainda recebe pouca importância no Ensino Médio. Portanto, é necessário propor atividades que envolvam demonstrações ao longo das aulas de Matemática, a fim de promover o desenvolvimento do raciocínio dedutivo matemático.

Nesse sentido, busca-se abordar o tema de maneira agradável, visando estimular processos mais elaborados de reflexão e abstração nas aulas de Matemática, permitindo aos estudantes desse segmento da educação formular e resolver problemas com maior autonomia e recursos matemáticos.

A escolha desse tema foi motivada pela percepção de que o Princípio da Indução possui aplicação em diversos conteúdos matemáticos e pode ser trabalhado no currículo do Ensino Médio. No entanto, observa-se que pouca ênfase tem sido dada ao assunto, muitas vezes omitindo-o ou apresentando-o de forma incompleta, o que acarreta dificuldades significativas para os estudantes desenvolverem a capacidade de justificar e deduzir resultados.

Assim, o principal objetivo deste trabalho é mostrar aos estudantes e professores da Educação Básica, especialmente do Ensino Médio, que é possível incorporar o Princípio da Indução nesse nível de estudo. Para isso, utilizaremos como estratégia didática um jogo amplamente conhecido pelos matemáticos: a Torre de Hanói. Por meio de um trabalho lúdico, buscamos despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes para compreender e aprender essa técnica de demonstração.

O foco de nossa investigação é como o Princípio da Indução pode auxiliar no ensino e aprendizagem das demonstrações no Ensino Médio. Acreditamos que várias descobertas em Matemática ocorrem por meio de testes que fornecem evidências empíricas. O Princípio da Indução é um método poderoso para comprovar a veracidade de resultados, estabelecendo provas rigorosas em Matemática. Trata-se de um instrumento matemático de grande utilidade em diferentes problemas.

Nessa mesma linha de pensamento, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ressalta que:

> "[...] para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, construção de modelos e resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados" (BRASIL, 2018, p. 529).

Este trabalho segue a perspectiva da pesquisa qualitativa, com um procedimento metodológico baseado em levantamento bibliográfico. Buscaremos artigos científicos, dissertações e teses publicados nos últimos dez anos. Nosso estudo se baseará nos documentos curriculares oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), além das ideias e estudos de autores como Almeida (2020), Freitas (2013), Guirado et al. (2018), Morgado e Carvalho (2013), Silva e Marra Junior (2020) e outros.

Este trabalho está dividido em três partes. No primeiro capítulo, discutiremos as demonstrações no Ensino Médio, abordando sua importância e as principais dificuldades enfrentadas por alunos e professores ao lidar com elas. Apresentaremos também os procedimentos metodológicos adotados neste estudo.

No segundo capítulo, apresentaremos o Princípio da Indução, o Princípio da Indução Generalizada e o Princípio da Boa Ordenação, iniciando com uma breve menção aos axiomas de Peano.

No último capítulo, abordaremos o ensino da indução por meio da Torre de Hanói, discutindo de forma sucinta a utilização desse jogo como estratégia didática para trabalhar as demonstrações nas aulas de Matemática.

1. AS DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

As demonstrações desempenham um papel fundamental no campo da Matemática, permitindo a validação e comprovação de resultados matemáticos. Por meio das demonstrações, é possível estabelecer a veracidade de proposições matemáticas por meio de argumentos lógicos e justificativas ordenadas. Uma prova matemática consiste em uma sequência de proposições logicamente conectadas, que inicia com as hipóteses e culmina na comprovação do teorema.

Dessa forma, a validação de um resultado matemático não se resume à confirmação através de exemplos, mas requer uma prova formal que sustente a proposição (FREITAS, 2013). Neste capítulo, discutiremos a importância das demonstrações no contexto do Ensino Médio, bem como as principais dificuldades enfrentadas por alunos e professores em relação ao seu uso. Além disso, apresentaremos os procedimentos metodológicos adotados em nosso estudo.

1.1. A importância das demonstrações no Ensino Médio

A Matemática desempenha um papel fundamental na sociedade, pois possui diversas aplicações práticas no dia a dia e contribui para a construção de conhecimentos em outras áreas do currículo. No entanto, a compreensão dos conceitos matemáticos ainda é um desafio enfrentado nas escolas em todo o Brasil.

Geralmente, a Matemática é apresentada nas salas de aula de forma complexa, com uma linguagem repleta de regras e símbolos, e pouca ênfase na motivação e compreensão. Além disso, os estudantes muitas vezes não conseguem visualizar a aplicabilidade da Matemática em suas vidas cotidianas, nem estabelecer relações com outras disciplinas do currículo. Isso faz com que a Matemática seja uma das matérias mais temidas e cause dificuldades de aprendizagem, reprovação e evasão escolar.

No contexto do Ensino Médio, o ensino e aprendizagem da Matemática se tornam ainda mais complexos, marcados por deficiências, desinteresse e falta de motivação dos estudantes. Os professores, por sua vez, sentem-se desafiados em cumprir sua tarefa de forma eficiente, formando alunos críticos e capazes de raciocinar objetivamente em qualquer situação.

Infelizmente, o ensino da Matemática nas escolas brasileiras ainda é fragmentado e descontextualizado, priorizando a abstração, memorização e mecanização em detrimento de uma aprendizagem significativa, que possibilitaria aos estudantes refletir e analisar situações concretas e relacionadas ao mundo real.

Embora ainda exista uma parcela significativa de estudantes com habilidades matemáticas limitadas e dificuldades em resolver questões básicas da disciplina, observa-se uma mudança significativa na prática docente em sala de aula, destacando a importância do desenvolvimento intelectual, pessoal e social do aluno. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM 2000) enfatizam que:

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (BRASIL, 2000, p. 40).

Embora não haja uma fórmula definitiva para superar a desmotivação e as dificuldades no ensino e aprendizagem da Matemática, a literatura especializada destaca que uma prática docente reflexiva e consciente pode ajudar a mitigar esses problemas e facilitar a aprendizagem. É fundamental que os professores adotem uma abordagem que leve em consideração as necessidades específicas dos estudantes e proponham mecanismos de ensino que favoreçam a aprendizagem de todos de maneira efetiva.

Ainda segundo os PCNEM (2000), os alunos do Ensino Médio já estão em condições de utilizar e ampliar os conhecimentos matemáticos vivenciados no Ensino Fundamental, podendo desenvolver de modo mais amplo a capacidade de abstração, raciocínio, resolução de problemas, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.

Cabe então ao professor de Matemática do Ensino Médio apresentar novas informações e instrumentos necessários aos alunos para que estes continuem a desenvolver a autonomia e a capacidade de pesquisa, o que se dará por meio de um processo lento e trabalhoso através de resoluções de problemas, elaborações de conjecturas, capacidade de argumentação e interpretação.

De acordo com Silva e Marra Junior (2020, p. 205),

> a abordagem de demonstrações matemáticas em sala de aula na Educação Básica é importante viés de compreensão de propriedades e conexão de ideias entre os conceitos, suas definições e suas articulações na resolução de exercícios e problemas. Ainda que essa abordagem se concretize de modo diferente do uso formal das demonstrações nos cursos superiores, explorar caminhos de transposição didática para apresentá-las durante a Educação Básica permite romper com certo vício de passividade que envolve muitos de nossos estudantes.

O uso de demonstrações matemáticas na Educação Básica pode ser um fator crucial para um melhor desempenho matemático dos estudantes. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio colocam como um dos propósitos da formação matemática na Educação Básica "compreender que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações" (BRASIL, 2006, p. 69).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC 2018) enfatiza que, para desenvolver habilidades relacionadas ao raciocínio, é preciso investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, enfatizando os processos de argumentação matemática para justificar o raciocínio utilizado.

> Com relação à competência de argumentar, seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar (BRASIL, 2018, p. 530).

A competência específica 5 para a área da Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio diz que:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando

> a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

De acordo com a BNCC (2018), o desenvolvimento dessa competência pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas, como as induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos.

> ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais 'formais', incluindo a demonstração de algumas proposições. Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância (BRASIL, 2018, p. 540).

Isso significa que, por meio do desenvolvimento da competência específica 5, o estudante compreende que a atividade matemática é uma construção humana que envolve busca, conjecturas, exemplos e aplicações.

Segundo Abril (2016), a aprendizagem de demonstrações proporciona aos estudantes uma nova visão da Matemática, deixando de lado aspectos de intuição e verificação experimental e adentrando na teoria matemática, tornando a capacidade de abstração necessária e útil para o desenvolvimento intelectual.

Conforme a definição de Bueno (1996, p. 186), em seu Minidicionário da Língua Portuguesa, o termo "demonstrar" significa provar por meio de um raciocínio sólido; manifestar; exibir; descrever; indicar. Para Silva e Marra Junior (2020, p. 208), a "demonstração consiste em um encadeamento bem articulado de raciocínios lógicos, argumentos convincentes e rigorosos, a fim de validar uma tese, sendo tudo isso sustentado por um sistema axiomático". Por considerarmos essa definição mais simples e abrangente, a utilizaremos em nosso trabalho.

Nesse contexto, um dos objetivos da Matemática é descobrir e provar a veracidade ou falsidade de proposições, e para isso são utilizadas técnicas de demonstração, incluindo demonstrações diretas, demonstrações por contrapositiva, demonstrações por redução ao absurdo e demonstrações por indução finita, também conhecida como Princípio ou Método da Indução, que é o foco de nossos estudos.

A demonstração por indução finita é um argumento dedutivo utilizado para provar que uma sequência de proposições é verdadeira, sem a necessidade de provar cada uma individualmente. O princípio da indução finita funciona da seguinte forma: se podemos mostrar que a proposição é verdadeira para o caso base (geralmente o número 1) e que, se ela for verdadeira para um número natural qualquer, então também será verdadeira para o próximo número natural, então podemos concluir que a proposição é verdadeira para todos os números naturais.

Silva (2015) acredita que o uso do princípio da indução finita no Ensino Médio pode ser uma ferramenta eficaz e viável para responder a perguntas do tipo: "Será que isso sempre é verdade?". Segundo Silva e Almeida (2022), o princípio da indução é uma ferramenta muito útil para estabelecer provas rigorosas em Matemática, desvendando a veracidade de resultados. Trata-se de uma importante ferramenta para os matemáticos modernos, pois não apenas comprova resultados, mas também oferece novos métodos, ferramentas, estratégias e conceitos que apontam para novas direções matemáticas. De acordo com De Villiers (2002) citado por Santos (2015, p. 28-29), as principais funções das demonstrações são:

> i) **verificação:** convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;
> ii) **explicação:** compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;
> iii) **descoberta:** de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura;
> iv) **comunicação:** negociação do significado de objetos matemáticos;
> v) **desafio intelectual:** satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;
> vi) **sistematização:** organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

Para muitos especialistas, a observação e a demonstração são fundamentais para o raciocínio científico. Na sala de aula, é essencial que o professor busque a participação ativa dos estudantes por meio de atividades que envolvam demonstrações conectadas com a realidade. Ao apresentar exemplos práticos e utilizar uma linguagem clara, o professor desperta a atenção e curiosidade dos alunos. As demonstrações são importantes para a construção do conhecimento matemático e, quando inseridas no contexto do Ensino Médio, tornam-se relevantes para os estudantes, desde que estes consigam compreender todo o processo envolvido na demonstração (SILVA; MARRA JUNIOR, 2020, p. 208-209).

Medeiros (2019) compartilha de uma visão semelhante sobre a utilização das demonstrações matemáticas no Ensino Médio. Segundo a autora, essa abordagem é eficaz na construção do conhecimento matemático, permitindo que os estudantes superem as dificuldades iniciais de compreensão, muitas vezes decorrentes da formalização da linguagem. Gradualmente, os alunos vão construindo e utilizando esse meio de conhecimento, não se limitando apenas a memorizar fórmulas, mas compreendendo o porquê de sua existência.

No entanto, concordamos com Silva e Marra Junior (2020) que as demonstrações ainda geram inquietação e desconforto, não apenas entre os estudantes da Educação Básica, mas também entre os próprios professores. Muitos alunos relatam dificuldades devido à falta de experiência com demonstrações, e muitos professores atribuem suas dificuldades à formação recebida durante seus cursos de graduação, principalmente em relação à forma como as provas eram abordadas.

1.2. As dificuldades de alunos e professores acerca das demonstrações

As dificuldades relacionadas às demonstrações matemáticas no contexto educacional são amplamente reconhecidas. Apesar da importância da Matemática como base para outras áreas do conhecimento científico, ainda existe uma lacuna no reconhecimento adequado das demonstrações no currículo do Ensino Médio, resultando em poucos estudantes desenvolvendo uma noção sólida de demonstração matemática ao concluírem o Ensino Básico.

O ensino da Matemática enfrenta desafios no desenvolvimento da capacidade de raciocínio dos estudantes. Silva e Marra Junior (2020) destacam a falta de interesse na dedução ou construção do raciocínio matemático, com ênfase na manipulação automática de conceitos e na falta de discussões aprofundadas. Muitas vezes, o foco está apenas em saber a fórmula final e sua aplicação, sem explorar o raciocínio por trás dela.

Isso ocorre porque os estudantes são frequentemente expostos a atividades que enfatizam a memorização de conceitos, representações e procedimentos rotineiros, levando-os a enxergar a Matemática como um conjunto de regras desconectadas e sem utilidade prática. O ensino atual muitas vezes prioriza resultados imediatos, sem a preocupação em validar esses resultados. Os conteúdos matemáticos são contextualizados com a vida cotidiana dos alunos, mas o aspecto estrutural e formal da Matemática é negligenciado. Como resultado, os estudantes não são estimulados a expressar suas ideias, nem estão habituados a provar ou demonstrar seus resultados.

> A experiência docente em Matemática tem nos ensinado que tratar a demonstração, em geral, é desafiador. Sobretudo na Educação Básica, percebemos muitas barreiras a serem rompidas, e em muitas situações detectamos uma aversão prévia diante de argumentações que visem a generalização. Encontramos relatos de dificuldades relacionadas a esse tipo de atividade, seja pelo fato dela exigir alta capacidade de argumentação e linguagem própria, seja porque ela tem sido pouco (raramente/nunca) empregada pelos professores em sala de aula (SILVA; MARRA JUNIOR, 2020, p. 207).

É verdade que muitos estudantes tendem a utilizar a Matemática de forma mecânica, seguindo regras e fórmulas decoradas sem questionar seu significado ou sentido. Eles resolvem as atividades apresentadas pelo professor ou pelo livro didático sem buscar uma compreensão mais profunda. Isso pode ser atribuído à crença na autoridade do professor e do material didático. Como resultado, falta a oportunidade de observação e exploração que permitiria aos estudantes iniciar um processo de indução e formulação de conjecturas, que poderiam ser posteriormente comprovadas por meio do raciocínio dedutivo.

Abril (2016) destaca que algumas demonstrações são de difícil compreensão para os estudantes do Ensino Médio, o que pode gerar efeitos negativos e distanciá-los das deduções. O alto grau de abstração exigido por algumas demonstrações leva os professores a acreditar que seus alunos não estão preparados para elas. Muitos professores não veem as demonstrações como um elemento importante no ensino da Matemática e, portanto, não dedicam tempo em suas aulas para ensiná-las.

No entanto, existe um consenso entre os educadores matemáticos de que as demonstrações são essenciais para o desenvolvimento e comunicação do conhecimento matemático. A introdução tardia das demonstrações na sala de aula pode criar dificuldades no pensamento dedutivo, tanto em tarefas que requerem raciocínio dedutivo quanto em outros problemas matemáticos. A falta de ensino das demonstrações matemáticas limita os estudantes e compromete sua base matemática, como menciona Medeiros (2019).

Outro problema significativo relacionado ao uso de demonstrações nas salas de aula do Ensino Médio está relacionado à formação dos professores. Muitos professores concluem a graduação sem adquirir habilidades de demonstração matemática e sem compreender a maior parte das demonstrações apresentadas durante o curso, como apontam Silva e Marra Junior (2020, p. 207).

> Muitos professores passam pelos cursos de graduação sem conseguir suprir alguns problemas provenientes de sua formação básica, eles próprios não compreenderem grande parte das demonstrações que lhes são apresentadas, gerando falta de motivação em utilizá-las e pouco convencimento de que elas são importantes no processo de ensino e aprendizagem. Portanto, sentem-se inseguros ou não preparados para explorar as demonstrações em sua prática docente.

Muitos professores enfrentam dificuldades ao organizar uma demonstração matemática utilizando o raciocínio lógico-dedutivo. Essas dificuldades podem incluir a identificação correta da hipótese e da tese, assim como a verificação das condições necessárias ou suficientes presentes na proposição. Essas lacunas deixadas pelos cursos de graduação acabam gerando obstáculos que levam os professores a abandonar o uso das demonstrações.

Por outro lado, acreditamos que os professores não devem ocultar as dificuldades inerentes ao processo de demonstração matemática, mas sim buscar maneiras de superar esses obstáculos. É importante que os professores recebam formação adequada que os capacite a compreender e organizar demonstrações matemáticas de forma clara e eficaz. Além disso, é fundamental que haja espaço para discussões e trocas de ideias entre os professores, a fim de compartilhar experiências, estratégias e superar as dificuldades encontradas.

Os obstáculos no uso das demonstrações não devem ser encarados como uma razão para abandoná-las, mas como um desafio a ser enfrentado e superado. Com o apoio adequado, os professores podem adquirir as habilidades necessárias para ensinar as demonstrações de forma efetiva, proporcionando aos estudantes a oportunidade de desenvolver seu pensamento dedutivo e compreender o valor das demonstrações na construção do conhecimento matemático.

1.3. Procedimentos metodológicos

Do ponto de vista de seus objetivos, este Trabalho de Conclusão de Curso é uma pesquisa exploratória, pois tem como finalidade proporcionar mais informações sobre o ensino do Princípio da Indução através da utilização da Torre de Hanói, com ênfase na resolução de problemas.

A metodologia utilizada tem natureza qualitativa, uma vez que há "um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números" (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 70).

Para o desenvolvimento deste estudo, foi realizada uma revisão bibliográfica, ou seja, obtivemos os dados a partir de material já publicado, constituído principalmente de livros e publicações em periódicos, impressas ou eletrônicas, na interpretação e análise crítica do autor, com o objetivo de entrar em contato direto com material já escrito sobre o tema desta pesquisa.

Para essa revisão, foi realizada uma busca por artigos científicos, dissertações e teses nas bases de dados Google Acadêmico, Scielo e Periódicos Capes. Além dessa busca, também foram realizadas pesquisas em sites e bibliotecas. As buscas ocorreram no mês de maio do corrente ano e as palavras-chave utilizadas na busca foram: Princípio da Indução, Uso de demonstrações no Ensino Médio e Torre de Hanói.

Como critério de inclusão dos materiais literários neste estudo, definiu-se o período de publicação dos últimos 10 (dez) anos pela possibilidade de poder ser encontrado um maior número de materiais sobre o tema. Além disso, incluíram-se apenas livros, artigos científicos, dissertações e teses disponibilizados em português. Como critérios de exclusão, foram rejeitados os materiais literários que não tinham relação direta com o tema proposto pelo trabalho.

Após ser realizada a busca, os materiais que atenderam aos critérios de inclusão e exclusão foram analisados qualitativamente nos seguintes aspectos: a importância das demonstrações no Ensino Médio, as principais dificuldades de alunos e professores acerca das demonstrações, o Princípio da Indução, a lógica do jogo Torre de Hanói e o seu contexto histórico, e como esse jogo pode ser utilizado para ensinar o Princípio da Indução no Ensino Médio.

2. O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Para empregar as noções primitivas de forma adequada, é necessário dispor de vários princípios que disciplinem seu uso. Na Matemática, chamamos esses princípios básicos de axiomas ou postulados. Giuseppe Peano (1858-1932) foi o matemático responsável por estabelecer a axiomática necessária para descrever com precisão o conjunto dos números naturais. Seu último axioma, conhecido como Axioma de Indução, serve como base para o método da demonstração por indução (FREITAS, 2013). Neste capítulo, apresentaremos uma breve abordagem dos axiomas de Peano, do Princípio da Indução, do Princípio da Indução Generalizado e do Princípio da Boa Ordenação

2.1. Axiomas de Peano

O matemático Giuseppe Peano nasceu em 27 de agosto de 1858 em Piemonte, Itália, e faleceu em 20 de abril de 1932 em Turim, Itália. Em 1889, ele formulou uma definição mais precisa e concisa para os números naturais, por meio da enumeração de quatro princípios conhecidos como Axiomas de Peano, que permitiram o desenvolvimento de todas as definições e propriedades dos números naturais.

Partiremos do pressuposto de que o leitor já esteja familiarizado com os números naturais

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$$

juntamente com as operações de adição $(a, b) \mapsto a + b$ e de multiplicação $(a, b) \mapsto a.b$ (ou $(a, b) \mapsto ab$). O leitor pode rever estas duas operações e as propriedades básicas dos números naturais em **Elementos de Aritmética**, de Abramo Hefez, 2ª edição, 2006, p. 1-13.

Os Axiomas de Peano são formalizados de maneira rigorosa na matemática e podem ser apresentados da seguinte forma:

P_1 *– Existe uma função s: N → N que associa cada n ∈ N a um elemento s(n) ∈ N, chamado de sucessor de n.*

A definição da função *s: N → N* prova que cada número natural possui um único sucessor, e que cada sucessor também é um número natural.

P_2 *– A função s: N → N é injetiva.*

O fato de a função *s: N → N* ser injetiva garante que números naturais diferentes possuem sucessores diferentes, pois a função *s* atribui imagens distintas a elementos distintos.

P_3 *– Existe um único elemento 1 no conjunto N tal que 1 ≠ s(n) para todo n ∈ N.*

Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro, isto é, não existe um número natural que o anteceda. Este número é denominado *número um* e representado pelo símbolo 1.

P_4 *– Se um subconjunto X ⊂ N é tal que 1 ∈ X e s(X) ⊂ X, então X = N.*

Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com *N*, isto é, contém todos os naturais. Esta propriedade é chamada de *Axioma da Indução*.

Observe que *N* é o conjunto dos números naturais, logo a notação *n ∈ N* significa que *n* é um número natural.

O uso apropriado dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 nos permite representar todos os números naturais e a notação *s*(*n*) para representar o sucessor do número *n*. Portanto, teremos *2 = s(1), 3 = s(2), 4 = s(3), 5 = s(4), ..., n + 1 = s(n)*. Assim, aplicando sucessivas vezes o procedimento de tomar o sucessor *s(n)*, obtém-se todos os números naturais (COSTA: 2015).

Com esses quatro axiomas podemos mostrar todas as demonstrações de propriedades envolvendo os números naturais. Provas que fazem uso exclusivamente quarto axioma de Peano são chamadas de *Provas por Indução* (FREITAS, 2013).

2.2. Princípio da Indução

Como podemos observar no tópico anterior, o último axioma de Peano (P_4) possui uma natureza distinta dos demais e pode ser reescrito da seguinte forma:

***P_4**: Seja S um subconjunto de N ($S \subset N$) que satisfaz às seguintes condições:*

1) *1 pertence a S ($1 \in S$);*
2) *Para todo número natural n, $n \in S$ implica em $(n + 1) \in S$.*
Então S é o próprio conjunto N dos números naturais, isto é, $S = N$.

Em outras palavras, o único subconjunto de *N* que satisfaz às condições (1) e (2) é o próprio *N*. A ideia por trás do Axioma da Indução é a de que todos os números naturais podem ser obtidos a partir do número *1* através de repetidas aplicações da operação de tomar o sucessor. E a sua importância resulta do fato que ele pode ser utilizado como um método de demonstração para proposições referentes aos números naturais (FREITAS, 2013).

O método de demonstração, inspirado no axioma da indução, é denominado *Princípio da Indução, Princípio da Indução Matemática* ou, ainda, *Princípio da Indução Finita*. Assim, temos que o Princípio da Indução é dado pelo seguinte Teorema:

Teorema 1 (Princípio da Indução): Seja $P(n)$ uma sentença aberta em n. Se $P(n)$ satisfaz às condições:

i) $P(1)$ é verdadeira;
ii) Para todo $n \in N$, se $P(n)$ é verdadeira, implica $P(n + 1)$ é verdadeira.
Então a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in N$.

Demonstração:

Para comprovarmos que o Princípio da Indução é verdadeiro, utilizaremos por hipótese os Axiomas de Peano. Então, seja uma propriedade P que cumpra as proposições (i) e (ii) acima, considere o conjunto X dos números naturais n para os quais a proposição $P(n)$ é verdadeira, ou seja, $X = \{n \in N; P(n)$ é verdadeira$\}$. Pelo item (i) temos que $P(1)$ é verdadeira, então $1 \in X$. Pelo item (ii), temos que para todo número natural n, se $n \in X$, então $(n + 1) \in X$. Logo, o conjunto X satisfaz às duas condições do Axioma da Indução e, portanto, $X = N$.

O item (i) é chamado de *caso base* e o item (ii), *passo de indução*. A fórmula que será demonstrada, quando aplicada no passo de indução, é chamada de *hipótese de indução* (SENA, 2018, p. 25).

Conforme mencionado por Freitas (2013), a Indução Matemática é utilizada essencialmente para estabelecer verdades matemáticas válidas em subconjuntos infinitos de N. Portanto, não se trata de mostrar que uma determinada sentença aberta é verdadeira para muitos casos, mas sim de provar que essa sentença é verdadeira para todos os números naturais $n \geq a$, onde $a \in N$.

2.3. Princípio da Indução Generalizado

Também pode ocorrer de uma determinada proposição ser verdadeira a partir de um determinado $k \in N$, e não necessariamente para valores menores do que k. Casos assim podem ser demonstrados a partir do Princípio da Indução Generalizado:

Teorema 2 (Princípio da Indução Generalizado): Seja k um número natural e $P(n)$ uma proposição referente a cada número natural $n \geq k$ e que satisfaz às seguintes condições:

i) $P(k)$ é verdadeira;
ii) Para todo $n \geq k$, se $P(n)$ é verdadeira, implica $P(n + 1)$ também é verdadeira.
Então a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq k$.

Demonstração:

Seja X o conjunto de todos os números naturais n para os quais a proposição $P(k + n - 1)$ é verdadeira, ou seja, em que $X = \{n \in N; P(k + n - 1)$ é verdadeira$\}$. Pelo item (i), $P(k) = P(k + 1 - 1)$, é verdadeira, portanto $1 \in X$. Pelo item (ii), se $P(k + n - 1)$ é verdadeira, então $P[(k + n - 1) + 1) = P[k + (n + 1) - 1]$, também é verdadeira. Logo, se $n \in X$, então $n + 1 \in X$. Portanto, pelo Axioma da Indução, $X = N$, ou seja, $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq k$, como queríamos demonstrar.

Ao utilizar o Princípio da Indução Generalizada, podemos estabelecer a validade de uma proposição para todos os números naturais maiores ou iguais a um determinado valor específico. Isso amplia o escopo do método de indução e oferece uma abordagem flexível para demonstrar propriedades matemáticas em contextos mais específicos.

2.4. Princípio da Boa Ordenação

Outra forma de provar sentenças abertas referentes aos números naturais é utilizando o *Princípio da Boa Ordenação* que pode ser enunciado como se segue:

Teorema 3 (Princípio da Boa Ordenação): Todo subconjunto não-vazio $A \subset N$ possui um menor elemento.

Demonstração:

Seja $I_n = \{p \in N; 1 \leq p \leq n\}$. Consideremos o conjunto $X \subset N$, formado pelos números $n \in N$ tais que $I_n \subset N - A$. (Assim, dizer que n pertence X significa afirmar que n não pertence A e que todos os números naturais menores do que n também não pertencem a A). Se tivermos $1 \in A$, o teorema estará demonstrado pois 1 será o menor elemento de A. Porém, se $1 \notin A$ então $1 \in X$.

Por outro lado, temos $X \neq N$, pois $X \subset N - A$ e $A \neq \emptyset$. Assim, X cumpre a primeira parte da hipótese do Princípio da Indução (contém 1) mas não satisfaz a sua conclusão (não é igual a N). Logo não pode cumprir a segunda parte da hipótese do Princípio da Indução. Isto quer dizer: deve existir algum $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$. Seja $a = n + 1$. Então todos os inteiros desde 1 até n pertencem ao complementar de A mas $a \in A$. Desta maneira, $n + 1$ é menor elemento do conjunto A, o que demonstra o teorema (LIMA, 2014).

Convém destacar aqui que há uma equivalência entre o Princípio da Boa Ordenação e o Princípio da Indução, ou seja, podemos provar um assumindo a validade do outro. O Teorema “Boa Ordenação = Indução” diz que: “Vale o Princípio da Boa Ordenação se, e somente se, vale o Princípio da Indução”. A demonstração deste teorema pode ser verificada no livro **Curso de Análise Real**, dos autores Cassio Neri e Marco Cabral, 2ª edição, 2011, p. 16.

Também do Princípio da Boa Ordenação decorre um teorema conhecido como o Segundo Princípio da Indução, cuja demonstração pode ser observada em **Curso de Análise Real (vol. 1)**, de Elon Lages Lima, 2014, p. 40.

O Princípio da Indução possui diversas aplicações na Matemática e é fundamental para estabelecer teoremas importantes e amplamente reconhecidos. Entre as várias aplicações desse princípio encontradas em diversos conteúdos matemáticos da Educação Básica, podemos destacar as seguintes:

1. Aplicações algébricas:

1.1. Progressões aritméticas e geométricas;
1.2. Teoremas Binomiais;
1.3. Desigualdades algébricas;
1.4. Somatórios;
1.5. Propriedades do determinante de uma matriz.

2. Aplicações geométricas:

2.1. Pizza de Steiner;

2.2. Diagonais de um polígono convexo;

2.3. Soma dos ângulos internos de um polígono convexo;

2.4. Relação de Euler.

3. Aplicações aritméticas:

3.1. Teorema Fundamental da Aritmética;

3.2. Pequeno Teorema de Fermat;

3.3. Algoritmo de Euclides;

3.4. Princípio de Dirichlet (ou Princípio das gavetas);

3.5. Propriedades na sequência de Fibonacci.

4. Aplicações no mundo material:

4.1. O problema da franquia postal;

4.2. O problema da loteria;

4.3. O Problema da moeda falsa;

4.4. Os coelhos de Fibonacci;

4.5. Torre de Hanói e o problema do fim do mundo (o objeto de estudo do capítulo 3).

A seguir, utilizaremos o Princípio da Indução para provar a veracidade de duas proposições.

Proposição 1: *A soma dos n primeiros números naturais é dada por* $S_n = [(1 + n)n]/2$.

Demonstração:

Passo base:

S(1): $1 = [(1 + 1)1]/2 = [2.1]/2 = 2/2 = 1$

Portanto, o passo base está verificado.

Passo indutivo:

Suponhamos que *S(n)* seja verdadeira para algum *n*, isto é, que $S_n = [(1 + n)n]/2$ para algum número natural. Devemos, então, mostrar que a validade de *S(n)* para algum *n* implica a validade *S(n + 1)*, ou seja, que se $S_n = [(1 + n)n]/2$ for verdadeira para algum *n*, então $S_{n+1} = [(1 + (1 + n))(n + 1)]/2$ é também verdadeira.

De fato,

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + (1 + n)\\
&= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n + (1 + n)\\
&= \mathbf{[(1 + \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}]/2} + (1 + n) \qquad\qquad (\textbf{Hipótese de indução})\\
&= [(1 + n)n]/2 + [2(1 + n)]/2\\
&= [(n + 2)(n + 1]/2\\
&= [(1 + (1 + n))(n + 1)]/2
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo Princípio da Indução, a soma dos *n* primeiros números naturais é dada por $S_n = [(1 + n)n]/2$.

Proposição 2: *O maior número de partes em que se pode dividir o plano (ou pizza de Steiner) com n cortes retos é dado por* $P_n = [(1 + n)n]/2 + 1$.

Demonstração:

Passo base:

P(1): $2 = [(1 + 1)1]/2 + 1 = [2.1]/2 + 1 = 2/2 + 1 = 1 + 1 = 2$

Portanto, o passo base é verdadeiro.

<u>Passo indutivo:</u>

Admitamos agora que, para algum valor de n, a fórmula para P_n seja verdadeira. Vamos mostrar que a fórmula para P_{n+1} é também verdadeira. Ou seja, mostraremos que se $P_n = [(1 + n)n]/2 + 1$ for verdadeira, então $P_{n+1} = [(1 + (1 + n)(n + 1)]/2 + 1$ é também verdadeira.

De fato,

$$
\begin{aligned}
P_{n+1} &= P_n + (1 + n) \\
&= \mathbf{[(1 + n)n]/2 + 1} + (1 + n) \qquad \textbf{(Hipótese de indução)} \\
&= [(1 + n)n]/2 + 2/2 + [2(1 + n)]/2 \\
&= [(n + 2)(n + 1]/2 + 1 \\
&= [(1 + (1 + n))(n + 1)]/2 + 1,
\end{aligned}
$$

mostrando que a fórmula é verdadeira para $n + 1$ cortes.

Portanto, pelo Princípio da Indução, o maior número de partes em que se pode dividir o plano (ou pizza de Steiner) com n cortes retos é dado por $P_n = [(1 + n)n]/2 + 1$.

Essas são apenas algumas das aplicações mais comuns do Princípio da Indução na Matemática. Esse princípio é uma ferramenta poderosa que permite estabelecer resultados sobre conjuntos infinitos de números naturais de forma elegante e concisa.

3. ENSINO DA INDUÇÃO ATRAVÉS DA TORRE DE HANÓI

No capítulo 2, vimos que os Axiomas de Peano fornecem uma base apropriada para estabelecer as propriedades essenciais do conjunto *N* dos números naturais e, em particular, que o Axioma da Indução fornece um método para demonstrar que uma determinada proposição *P(n)* é válida para todo *n* natural, método esse conhecido como Princípio da Indução (MORGADO; CARVALHO, 2013). Agora, neste capítulo, discutiremos sucintamente a utilização de jogos como estratégia didática nas aulas de Matemática e apresentaremos uma situação que usa o Princípio da Indução. Como estratégia didática, utilizaremos o jogo Torre de Hanói.

3.1. Jogos como estratégia didática

Aprender Matemática é frequentemente considerado uma tarefa difícil pela maioria dos estudantes, principalmente devido à abordagem tradicional de ensino adotada em muitas escolas. Nesse modelo, o ensino prioriza a apresentação da teoria de forma isolada, seguida pela resolução de exercícios com soluções algorítmicas que carecem de conexão com o mundo real.

Na realidade, muitas escolas brasileiras ainda adotam um ensino fragmentado e descontextualizado da Matemática, enfatizando a mecanização, a memorização e a abstração em detrimento de uma aprendizagem significativa que permita aos estudantes refletir e analisar situações concretas ou relacionadas ao seu cotidiano.

Diante desse cenário, surgem várias abordagens e tendências no ensino da Matemática, como a Etnomatemática, a Modelagem, a Resolução de Problemas, o uso de Tecnologias de Informação e Comunicação, bem como a utilização de Materiais e Jogos Didáticos, entre outros. Conforme destaca Grando (2000, p. 15):

> A busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo para o aluno, que lhe proporcione um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, enfim, à construção e que lhe possibilite um prazer em aprender, não pelo utilitarismo, mas pela investigação, ação e participação coletiva de um "todo" que constitui uma sociedade crítica e atuante, leva-nos a propor a inserção do jogo no ambiente educacional, de forma a conferir a esse ensino espaços lúdicos de aprendizagem.

Os jogos são amplamente reconhecidos como uma opção para auxiliar no ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Enquanto os estudantes estão envolvidos em jogos, eles são desafiados a resolver problemas, explorar possibilidades, analisar regras e estabelecer relações entre os elementos do jogo e os conceitos matemáticos. À medida que jogam, eles percebem que a atividade não se limita apenas a um jogo em si, mas é um instrumento que facilita a compreensão dos conteúdos e a superação das dificuldades.

Etimologicamente, o termo "jogo" deriva do latim "locu", que significa brincadeira ou zombaria. De acordo com Guirado et al. (2018, p. 13), a noção de jogo tem múltiplos significados, mas na concepção científica, refere-se à "atividade lúdica". Além disso, os jogos também podem ser vistos como "brinquedos", nos quais certos objetos são designados como jogos, implicando o uso da ludicidade e a presença de regras estabelecidas (jogos de sociedade) ou o próprio uso do material (jogos de habilidade, jogos de construção).

Embora o uso de jogos como estratégia didática não seja algo novo, sua aplicação oferece um leque de possibilidades para o ensino e a aprendizagem de diversos conteúdos. Nas aulas de Matemática, os jogos podem contribuir para que tanto o professor quanto os alunos saiam um pouco do ensino tradicional, favorecendo o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, formulação de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao raciocínio lógico (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 9).

Nesse sentido, os jogos nas aulas de Matemática, dependendo da abordagem adotada, podem aproximar os estudantes e torná-los agentes ativos na construção do conhecimento matemático. Ao jogar, os estudantes interagem entre si, expressando seus pensamentos e dúvidas de forma espontânea, o que permite ao professor fazer questionamentos e intervenções adequadas, criando momentos propícios para o exercício do pensamento e busca de soluções para os problemas.

Dessa forma, os jogos proporcionam um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e participativo, estimulando o interesse dos estudantes e promovendo a construção de conhecimentos matemáticos de maneira significativa. Além disso, os jogos ajudam a desenvolver habilidades sociais, como trabalho em equipe, comunicação e resolução de conflitos, contribuindo para uma formação integral dos estudantes.

De acordo com Guirado et al. (2018), os jogos podem ser classificados em jogos de azar, jogos de destreza (jogo intelectual ou jogo físico) e jogos mistos (que combinam elementos de azar e destreza). No entanto, ao utilizar jogos no contexto educativo, é importante que os objetivos sejam mais abrangentes, pois simplesmente jogar não garante a aprendizagem ou a fixação de conceitos. Portanto, do ponto de vista pedagógico, é fundamental que o jogo envolva habilidades de investigação, formulação de hipóteses e a utilização de tentativa e erro. Somente assim, o professor poderá ensinar conteúdos e aprofundar conhecimentos, permitindo que os alunos aprendam não apenas Matemática, mas também outras disciplinas curriculares.

Conforme mencionado pelos autores citados, a proposta metodológica deve contemplar jogos que priorizem não apenas a memorização ou a fixação de conceitos, fórmulas ou técnicas relacionadas à Matemática, mas também jogos que desenvolvam o raciocínio lógico e nos quais o fator sorte não deve interferir nas escolhas feitas durante o jogo.

Assim, os jogos de treinamento e estratégia podem ser utilizados como facilitadores da aprendizagem, oferecendo possibilidades para a construção de conceitos e a memorização de processos, uma vez que sua repetição é mais agradável do que a resolução de uma extensa lista de exercícios desconexos com o mundo real. Mesmo um jogo simples, como a Torre de Hanói, pode desenvolver habilidades e competências que favorecem o processo de aprendizagem.

Portanto, ao selecionar jogos para serem utilizados em contextos educativos, o professor deve considerar a adequação dos jogos aos objetivos de aprendizagem, buscando jogos que estimulem a reflexão, o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a aplicação de conceitos matemáticos, proporcionando uma experiência significativa e envolvente para os estudantes.

A Torre de Hanói é um exemplo de jogo que envolve a resolução de problemas, uma vez que os jogadores precisam elaborar estratégias, testar hipóteses e refletir sobre suas ações e as do adversário para vencer o jogo. Esse processo de aprendizagem, mediado pelo professor, também pode incluir o registro e a análise das etapas do jogo. Os princípios envolvidos na resolução de problemas são os mesmos aplicados durante o jogo, pois ele representa uma situação-problema com regras específicas, e o jogador busca constantemente encontrar soluções por meio da elaboração de estratégias e procedimentos.

Portanto, os jogos podem ser uma estratégia didática eficiente para a construção do conhecimento matemático, desde que sejam bem planejados e alinhados aos objetivos de aprendizagem. Eles proporcionam aos alunos a oportunidade de vivenciar situações desafiadoras, estimulando o pensamento crítico, a tomada de decisões e a aplicação dos conhecimentos matemáticos de forma prática e significativa.

3.2. Breve histórico da Torre de Hanói

O jogo da Torre de Hanói tem sua origem atribuída ao matemático francês François Edouard Anatole Lucas e foi incluído em sua obra *Récréations Mathématiques*, publicada em 1883. Embora seja conhecido como Torre de Hanói, o jogo também recebe os nomes de "Torre de bramanismo" ou "Jogo do fim do mundo" devido à lenda hindu associada a ele.

Embora tenha origem em Hanói, Vietnã, o jogo se tornou muito popular na China e no Japão. Na época, foi oferecida uma quantia considerável em dinheiro para quem resolvesse o problema da Torre de Hanói com 64 discos.

A Torre de Hanói é um jogo amplamente conhecido entre os matemáticos devido aos diferentes níveis de dificuldade que podem ser alcançados, dependendo do número de discos envolvidos. Por esse motivo, pode ser aplicado em todos os níveis de ensino, desde a Educação Infantil até o Ensino Superior. O jogo pode ser adquirido em lojas de brinquedos ou facilmente fabricado pelos estudantes.

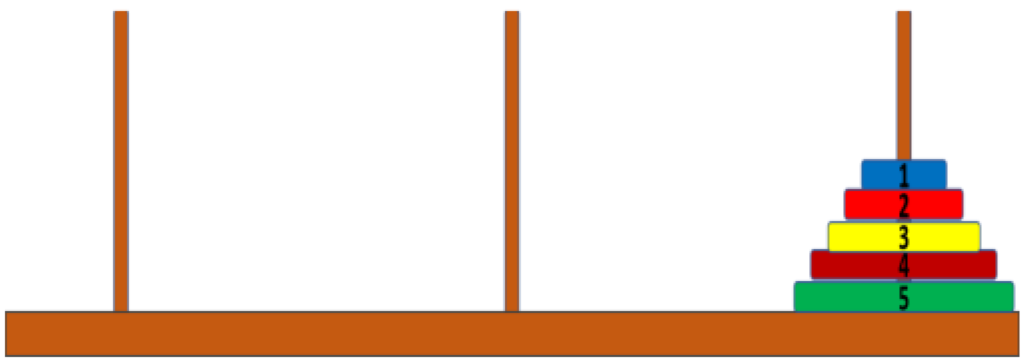
As regras do jogo são simples, mas ele estimula diversas habilidades mentais, como concentração, planejamento de ações, diferenciação de formas geométricas, percepção de tamanho e forma. Além disso, o jogo também promove o estabelecimento de estratégias para a transferência das peças, a contagem dos movimentos e o uso do raciocínio indutivo e das relações de recorrência.

A Torre de Hanói contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e, implicitamente, aborda conceitos como contagem, potenciação, áreas, função exponencial e noções do Princípio da Indução. É uma ferramenta pedagógica interessante para o ensino da matemática, permitindo uma abordagem prática e lúdica dos conteúdos (ALMEIDA, 2020).

3.3. A forma de jogar a Torre de Hanói

Trata-se de um quebra-cabeça composto por discos de diâmetros diferentes, com um furo no centro, e três hastes verticais. Os discos são empilhados em uma das hastes, do menor para o maior, formando uma torre, conforme a figura a seguir:

Figura 1 – Torre de Hanói.



Fonte: NASCIMENTO; SILVA; SILVA, 2020.

O objetivo do jogo é transferir todos os discos para outra haste, seguindo as regras estabelecidas:

1. Apenas um disco pode ser movido por vez.
2. Um disco maior nunca pode ficar em cima de um disco menor.
3. Os discos só podem ser movidos da haste em que estão para uma haste vazia ou para cima de um disco maior.

O desafio está em encontrar a sequência correta de movimentos para transferir todos os discos da haste inicial para uma das outras hastes, respeitando as regras mencionadas. A Torre de Hanói é um jogo que envolve estratégia, raciocínio lógico e planejamento, sendo um exercício interessante para desenvolver habilidades matemáticas e cognitivas.

3.4. A Torre de Hanói e o problema do fim do mundo

De acordo com Hefez (2009, p. 34-35), François Edouard Anatole Lucas, para adicionar um toque especial à sua criação, inventou a seguinte lenda:

No início dos tempos, em um templo oriental, Deus colocou 64 discos de ouro puro, perfurados no centro, ao redor de uma das três colunas de diamante. Ele ordenou um grupo de sacerdotes a moverem os discos de uma coluna para outra, respeitando as regras explicadas anteriormente. A lenda dizia que quando todos os 64 discos fossem transferidos para outra coluna, o mundo terminaria.

Ao conhecer a Torre de Hanói e sua forma de jogar, surgem naturalmente as seguintes perguntas:

1. A Torre de Hanói com n discos tem uma solução para cada valor de $n \in N$?
2. Em caso afirmativo, qual é o número mínimo de movimentos, representado por M_n, para resolver o quebra-cabeça com n discos?

A seguir, serão apresentadas as proposições e suas respectivas demonstrações que respondem a essas perguntas.

Convenientemente, nas figuras e demonstrações a seguir, chamaremos a haste da esquerda de torre A, a haste do meio de torre B e a haste da direita de torre C.

Proposição 1: A Torre de Hanói com n discos tem solução para cada $n \in N$.

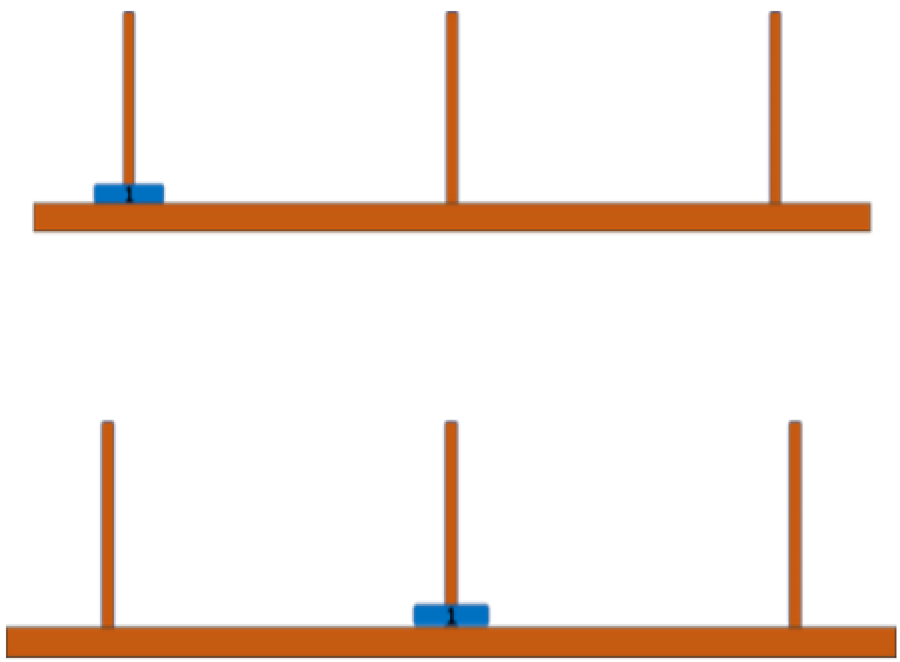
Demonstração:

Vamos provar nossa tese utilizando o Princípio da Indução.

Passo base:

Para $n = 1$, certamente o jogo tem solução, pois basta transportar o único disco de uma torre (haste) para outra.

Figura 2 – Movimento com um único disco.

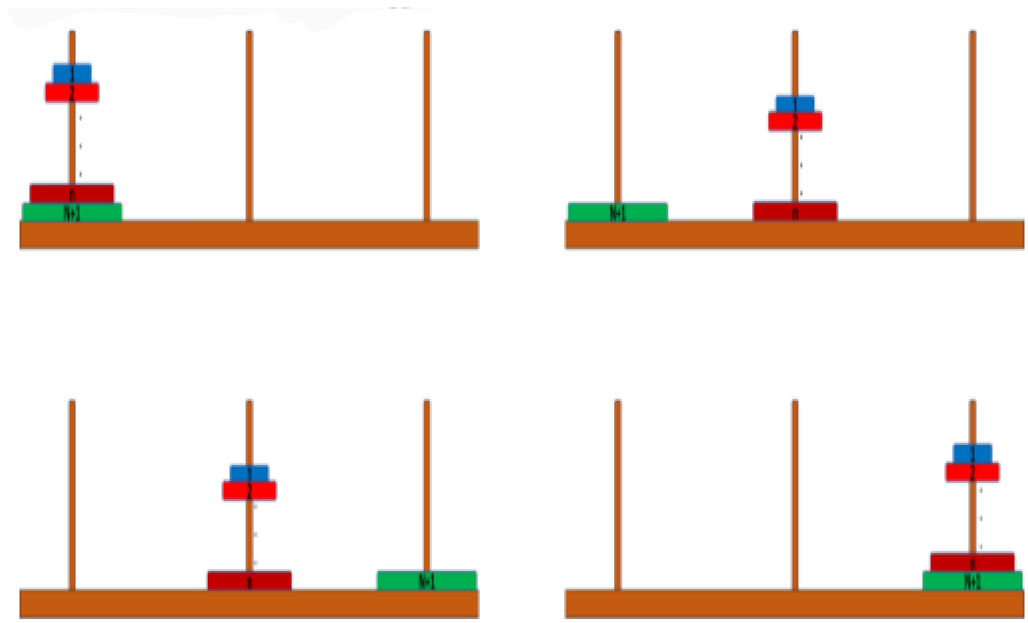


Fonte: NASCIMENTO; SILVA; SILVA, 2020.

Passo indutivo:

Suponhamos que, para algum $n \in N$, o quebra-cabeça com n discos possa ser solucionado. Então, mostraremos que ele também pode ser solucionado com $n + 1$ discos. De fato, digamos que os $n + 1$ discos estejam, inicialmente, dispostos na torre A. Por hipótese de indução, sabemos mover os n discos menores para a torre B. Com um único movimento, podemos agora mover o disco maior da torre A para a torre C. Utilizando novamente a hipótese de indução, podemos mover os *n* discos que estavam na torre B para a torre C. Portanto, pelo Princípio da Indução, o quebra-cabeça tem solução para todo $n \in N$.

Figura 3 – Movimento com n discos.



Fonte: NASCIMENTO; SILVA; SILVA, 2020.

Para resolver a segunda questão, precisamos obter uma fórmula que estabeleça um número de movimentos para solucionar o quebra-cabeça e, ainda, garantir que ela forneça a quantidade mínima de movimentos. Sendo assim, consideremos M_n número mínimo de movimentos que resolve o jogo com *n* discos.

Proposição 2: O número mínimo de movimentos (M_n) que resolve a Torre de Hanói com n discos satisfaz $M_n = 2M_{n-1} + 1$.

Demonstração:

<u>Passo base:</u>

Para $n = 1$, temos: $M_1 = 2M_{1-1} + 1 = 2M_0 + 1 = 1$. E 1 é certamente o número mínimo de movimentos que resolve o quebra-cabeça com um disco.

Passo indutivo:

Consideremos a Torre de Hanói com *n* discos. Para movimentar o maior dos discos, necessariamente, todos os outros $n - 1$ discos menores devem ser removidos de cima dele, sendo necessário, no mínimo, M_{n-1} movimentos. Agora, com um único movimento, podemos mover o disco maior. E finalmente, com mais M_{n-1} movimentos, no mínimo, podemos mover os $n - 1$ discos menores de volta para cima do disco maior.

Portanto, precisamos de, no mínimo, $M_{n-1} + 1 + M_{n-1} = 2M_{n-1} + 1$ para resolver a torre com *n* discos. Ou seja, o número mínimo de movimentos para solucionar a torre é dada pela igualdade $M_n = 2M_{n-1} + 1$, como tínhamos afirmado.

Por outro lado, podemos obter uma relação que forneça diretamente o valor de M_n em função do número *n* de movimentos. Observe que a tabela a seguir mostra como conjecturar que a quantidade mínima de movimentos necessários para resolver a torre com *n* discos é de $2^n - 1$ movimentos.

Tabela 1 – Número mínimo de movimentos.

Número de discos	**Número mínimo de movimentos**	**2^n**	**$2^n - 1$**
1	1	2	1
2	3	4	3
3	7	8	7
4	15	16	15
5	31	32	31
6	63	64	63

Fonte: Autor, 2023.

Por fim, vamos utilizar novamente o Princípio da Indução para demonstrar que:

Proposição 3: O número mínimo de movimentos que resolve a Torre de Hanói com n discos é de $2^n – 1$ movimentos.

Demonstração:

Passo base:

Para $n = 1$, temos: $2^1 – 1 = 2 – 1 = 1$ e, de fato, precisamos apenas de um movimento para resolver a torre com um disco.

Passo indutivo:

Suponhamos que, para algum $n \in N$, a torre com n discos é solucionada com, no mínimo, $2^n – 1$ movimentos. Para isso, vamos mostrar que se a torre tiver com $n + 1$ discos, então precisaremos de, no mínimo, $2^{n+1} – 1$ movimentos. De fato, tomemos agora a torre com $n + 1$ discos. Precisamos mover os n discos menores da torre A para a outra B, o que pela hipótese de indução é feito com, no mínimo, $2^n – 1$ movimentos. Precisamos, agora, mover o disco maior para a torre C, o que é feito, obviamente, com um único movimento. Utilizando novamente a hipótese de indução, com, no mínimo, mais $2^n – 1$ movimentos, movemos os outros n discos menores para cima do disco maior, resolvendo assim a torre com $n + 1$ discos. Dessa forma, o número mínimo de movimentos é $2^n – 1 + 1 + 2^n – 1 = 2.\ 2^n – 1 = 2^{n+1} – 1$.

Portanto, pelo Princípio da Indução, a Torre de Hanói com n discos é resolvida com $2^n – 1$ movimentos, sendo este valor o menor possível.

Para concluir, voltemos agora ao problema do fim do mundo enunciado na lenda. Supondo que a cada segundo, um sacerdote movesse um disco, o tempo mínimo para que ocorresse a fatalidade seria de $2^{64} – 1$ segundos, o que demoraria exatamente

18.446.744.073,709.551.615 segundos, ou seja, aproximadamente 584 bilhões de anos, ilustrando a magnitude do desafio envolvido nesse jogo para muitos discos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do levantamento bibliográfico que realizamos, por meio de uma busca por artigos científicos, dissertações e teses no período de publicação dos últimos dez anos, este trabalho pretendeu mostrar que o Princípio da Indução possui aplicação em muitos conteúdos matemáticos e é factível de ser trabalhados no currículo do Ensino Médio, a fim de estimular nas aulas de Matemática processos mais elaborados de reflexão e abstração que permitam aos estudantes desse segmento da educação formular e resolver problemas com mais autonomia e recursos matemáticos.

O principal objetivo deste trabalho foi alcançado, pois conseguimos mostrar que por meio de um trabalho lúdico, os professores de Matemática da Educação Básica podem despertar o interesse e a curiosidade de seus alunos para o entendimento e aprendizado do Princípio da Indução, contribuindo, assim, para a superação de suas dificuldades de desenvolverem a capacidade de justificar e deduzir resultados.

Para atingirmos essa compreensão, discutimos sobre as demonstrações no Ensino Médio, abordando sua importância e as principais dificuldades de alunos e professores na sua abordagem. Depois, a partir da menção dos axiomas de Peano, apresentamos o Princípio da Indução, o Princípio da Indução Generalizado e o Princípio da Boa Ordenação, trazendo algumas reflexões pertinentes. Por fim, conseguimos solucionar os dois questionamentos básicos da Torre de Hanói, ou seja, utilizando o Princípio da Indução, demonstramos que a Torre de Hanói com n discos tem solução para cada $n \in \mathbb{N}$ e conjecturamos uma relação que obtém o número mínimo Mn de movimentos para resolver o quebra-cabeça com n discos.

Com isso, a hipótese deste trabalho de que o Princípio da Indução é um método muito poderoso para desvendar a veracidade de resultados, estabelecendo provas rigorosas em Matemática se confirmou, mostrando que esse método é um instrumento matemático que tem muita utilidade em diferentes problemas.

Sendo assim, o Princípio da Indução pode auxiliar no ensino e aprendizagem das demonstrações no Ensino Médio que as demonstrações proporcionam à expansão do conhecimento dos estudantes, atuando, principalmente, nos pensamentos abstratos, ajudando-os a entender o encadeamento lógico dos argumentos que cercam a verificação dos resultados, bem como elas contribuem para um entendimento mais profundo acerca do conteúdo que estiver sendo estudado.

Os instrumentos de coleta nos permitiram entender que, embora o uso das demonstrações seja um suporte fundamental para o desenvolver, gerar e transmitir os conhecimentos matemáticos, em qualquer nível escolar, a sua ausência (das demonstrações) nas aulas se dá em virtude de um conjunto de fatores que vão desde a falta de conhecimento por parte do professor, de um modelo de ensino que privilegia resultados imediatos, fórmulas matemáticas prontas e estudantes que devem memorizá-las para então aplicá-las em um determinado contexto. Por isso, se faz necessário propor, no decorrer das aulas de Matemática, atividades que envolvam demonstrações a fim de proporcionar o desenvolvimento do raciocínio dedutivo matemático.

Devido à impossibilidade de um tempo maior para a realização deste trabalho, não foi possível realizar um estudo de campo para que pudéssemos apontar o posicionamento de professores e alunos quanto à importância das demonstrações matemáticas no Ensino Médio, bem como o comportamento dos mesmos sobre a utilização ou não delas (as demonstrações) em sala de aula. Todavia, tal limitação pode ser superada em pesquisas futuras.

Parece-nos coerente sugerir que professores de Matemática incluam nos seus planos de aula um período reservado ao ensino das demonstrações matemáticas, mais especificamente aquelas que envolvem o Princípio da Indução, a fim de tornar seu ensino mais sistemático. Parece-nos ser útil a criação de uma lista contendo as fórmulas matemáticas e teoremas com suas respectivas demonstrações. Neste trabalho apresentamos alguns que podem ser trabalhados não somente no Ensino Médio, mas na Educação Básica.

Por fim, esperamos nossa pesquisa contribua para resgatar o ensino da Matemática em que se utilizam provas e demonstrações recorrendo ao Princípio Indução e à utilização de jogos como estratégia didática.

REFERÊNCIAS

ABRIL, R. H. Fundamentação teórica. In: _____. **Demonstrações de fórmulas matemáticas no ensino médio**. 167 f. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2016. p. 19-44. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1700>. Acesso em: 02 maio 2023.

ALMEIDA, L. M. S. Os jogos matemáticos como recurso didático no processo de ensino-aprendizagem da matemática. In: _____. **Jogos matemáticos como recurso didático no ensino médio**. 91 f. 2020. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande, 2020. p. 7-27. Disponível em: <http://mat.ufcg.edu.br/profmat/wp-content/uploads/sites/5/2020/09/Dissertacao-Lucielma-versao-para-a-coordenacao.pdf>. Acesso em: 02 maio 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 02 maio 2023.

_____. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, v. 2. Brasília, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 02 maio 2023.

_____. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio, Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 02 maio 2023.

BUENO, F. S. **Minidicionário da língua portuguesa**. São Paulo: FTD, 1996. p. 186.

COSTA, A. C. L. Princípio da indução. In: _____. **O estudo de induções e recorrências:** uma abordagem para o ensino médio. 53 f. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2015. p. 1-16. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/8064?locale=pt_BR>. Acesso em: 02 maio 2023.

FREITAS, N. C. B. **Princípio da indução matemática:** fundamento teórico e aplicações na educação básica. 97 f. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=766&id2=32027>. Acesso em: 02 maio 2023.

GRANDO, R. C. A inserção do jogo nos processos de ensino-aprendizagem da matemática. In: _____. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** 2000. 239f. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas,

2000. p. 9-18. Disponível em: <http://matpraticas.pbworks.com/w/file/fetch/124818583/tese_grando%281%29.pdf>. Acesso em: 02 maio 2023.

_____. O jogo no ensino da matemática. In: GRANDO, R. C. **O jogo suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem na matemática**. 1995. 194 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995. p. 98-131. Disponível em: <file:///D:/Users/ibge/Downloads/Grando_ReginaCelia_M.pdf>. Acesso em: 02 maio 2023.

GUIRADO, J. C.; et. al. Pressupostos teóricos, pedagógicos e metodológicos. In: _____. **Jogos matemáticos na educação básica:** a magia de ensinar e aprender. Campo Mourão: Fecilcam, 2018. p. 13-17.

HEFEZ, A. Indução e mundo material. In: _____. **Indução matemática** (Apostila). 2009. p. 31-44. Disponível em: <https://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf>. Acesso em: 02 maio 2023.

LIMA, E. L. Conjuntos finitos, enumeráveis e não-enumeráveis. In: _____. **Curso de análise:** volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. p. 32-58.

MEDEIROS, T. K. S. Breve resumo histórico e aspectos relevantes sobre a utilização das demonstrações matemáticas. In: _____. **A utilização das demonstrações matemáticas no ensino médio**. 63 f. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Centro de Ensino Superior do Seridó, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Caicó, 2019. p. 19-27. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/36677>. Acesso em: 02 maio 2023.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. O método da indução. In: _____. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. p. 15-34.

NASCIMENTO, J. B.; SILVA, F. T.; SILVA, V. D. **O uso do axioma de indução matemática com o auxílio do jogo torre de Hanói**. 2020. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/73997>. Acesso em: 02 maio 2023.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. Pesquisa científica. In:_____. **Metodologia do trabalho científico:** métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2ª ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. p. 41-118.

SANTOS, M. C. Capítulo 1. In: _____. **Investigando provas e demonstrações matemáticas por alunos do ensino médio:** realidades e necessiades. 145 f. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 2015. p. 20-36. Disponível em: <https://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/2344>. Acesso em: 02 maio 2023.

SENA, C. O. R. Fundamentos da lógica matemática. In: _____. **Demonstrações no ensino médio**. 88 f. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2018. p. 10-30. Disponível em: <https://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/10669>. Acesso em: 02 maio 2023.
SILVA, B. T. Indução matemática: discussão teórica. **Indução matemática:** discussão teórica e uma proposta de ensino. 87 f. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2015. p. 3-18. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/19744>. Acesso em: 02 maio 2023.

SILVA, R. L; ALMEIDA, R. L. S. O poderoso princípio da indução matemática. **C. Q. D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 22, n. 1, Edição Iniciação Científica, p. 63-72, jul. 2022. Disponível em: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/274>. Acesso em: 02 maio 2023.

SILVA, J. C.; MARRA JUNIOR, E. D. Demonstrações matemáticas no ensino médio: o que pensam e sentem os estudantes. **UNIÓN**, ano XVI, n. 59, p. 204-226, ago, 2020. Disponível em: <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/137>. Acesso em: 02 maio 2023.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. Os jogos nas aulas de matemática. In: _____. **Cadernos do Mathema:** Jogos de matemática de 6º a 9º ano. Porto Alegre: Artmed, 2007. p. 9-22.