



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Sobre as condições de Ricci para imersões de
curvatura média constante de fronteira livre em bolas
de formas espaciais.**

Antonio Deígerson da Costa Lopes

**Maceió-AL
Agosto de 2022**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Sobre as condições de Ricci para imersões de curvatura média
constante de fronteira livre em bolas de formas espaciais.**

por

Antonio Deígerson da Costa Lopes

sob a orientação do

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória

Maceió-AL
Agosto de 2022

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

L864s	<p>Lopes, Antonio Deígerson da Costa. Sobre as condições de Ricci para imersões de curvatura média constante de fronteira livre em bolas de formas espaciais / Antonio Deígerson da Costa Lopes. - 2022. 63 f. : il.</p> <p style="text-align: center;">Orientador: Feliciano Marcílio Aguiar Vitória. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2022.</p> <p style="text-align: center;">Bibliografia: f. 60-63.</p> <p style="text-align: center;">1. Fluxo de Ricci. 2. Isometria (Matemática). 3. Curvatura média constante. 4. Superfícies com fronteira livre (Geometria diferencial). I. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 514.7</p>
-------	--

Aos meus pais.

Agradecimentos

A Deus, pela oportunidade, proporcionando maturidade espiritual e intelectual, me sustentando com a tua graça e misericórdia até aqui.

À minha família, em especial aos meus pais, Deuzanira Rodrigues da Costa e Antonio da Conceição Lopes, por acreditar, apoiar e me fortalecer diante dos desafios proporcionando princípios de uma educação familiar, pois sem eles isso não seria possível.

À minha esposa Laurilene Cordoso da Silva Lopes, pela sabedoria, pelos conselhos que transformam angústias em motivações e vigor, pela paciência e apoio incondicional, por estar sempre ao meu lado.

Agradeço também aos meus tios Adão Lopes (In memorian), Ana Lúcia, Elias Lopes, Raimunda da Conceição, à minha Avó Alzenira, aos meus irmãos Francisco Lopes e Rafael Lopes, e também à minha cunhada Josy T. Lopes. Aos meus novos parentes André Mclelry, Antenor Pereira, Ana B. Uchôa, Adriano Santos, Edrei Lael, Guilherme Harel, Bruna Stefanne, Déborah Thaís, Alícia Eloah, Marlene Cardoso, Adailton Santos e Jozerlene Cardoso pelos incentivos incessantes.

Agradeço aos meus amigos Antonio Luis, Maria Katiane, Cleide Coelho, Plábio Rondinelle, Josué Ribeiro, Elizângela F. Martins, Lélia de Oliveira Cruz, Raimundo N. Corrêa, Celina Amélia, Arinete Feitosa e Francisco das Chagas pelo apoio moral e incentivo.

Ao meu orientador professor Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória pela sua generosa sabedoria, dedicação e paciência durante o desenvolvimento desta dissertação, pelos momentos de ensinamentos que me proporcionaram uma maior visão no campo da pesquisa, que muito vem contribuindo no meu crescimento profissional e pessoal.

Aos professores Newton Luís Santos e Márcio Batista que aceitaram gentilmente ao convite em contribuir fortemente na validação dos escritos da Dissertação como Examinadores.

Aos meus amigos do curso do IM, em especial, ao Rodrigo Costa, Carlos Eduardo Soares, Jandir Tavares e Talita Araújo pela parceria e compartilhamento de experiências, angústias,

alegrias, motivações, superações e vitórias durante todo o processo formativo.

Aos professores do Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática-IM, em especial, Márcio Batista, Renan Medrado, Abraão Mendes, Marcos Ranieri, Gregório Neto, Hilário Alencar, Wagner Rânter e Marcos Petrúcio, pelo compartilhamento de conhecimentos e também experiências, pela paciência e dedicação ao magistério. Agradeço também aos secretários do IM Ana Maria e Felipe Cruz pela disposição em esclarecer gentilmente todas as minhas dúvidas referente a questões burocráticas que surgiram durante esse processo.

Também agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo financiamento durante meu mestrado.

Resumo

Nesta dissertação, investigamos as condições de Ricci para imersões de curvatura média constante de fronteira livre em bolas de formas espaciais. Dada uma variedade Riemanniana Σ^2 com uma métrica ds^2 cuja curvatura Gaussiana é $K_s < H_0^2 + c$, a condição necessária e suficiente de Gregório Ricci-Curbastro para que Σ^2 seja isometricamente imersa como uma superfície de curvatura média constante ou mínima em bolas de formas espaciais é que nova métrica $d\tilde{s}^2 = \sqrt{-K_s + H_0^2 + c} ds^2$ seja plana. No mesmo sentido, vimos que a existência de imersões mínimas em \mathbb{R}^3 , a equação do Tipo Simons, para o caso tridimensional, é equivalente a equação diferencial $K_s \Delta K_s - \|\nabla K_s\|^2 - 4K_s^3 = 0$ com $K_s < 0$ e é generalizada para imersões de curvatura média constante em formas espaciais pela equação:

$$(-K_s + H_0^2 + c_0) \Delta K_s + \|\nabla K_s\|^2 + 4(-K_s + H_0^2 + c_0)^2 K_s = 0.$$

Acrescentando tal condição a uma imersão isométrica mínima $f : \Sigma^2 \rightarrow B^n$, com possíveis pontos de ramificação e sem pontos de umbilicidade, mostramos que após uma possível redução de codimensão, $f(\Sigma^2)$ é *essencial* em \mathbb{R}^3 ou *essencial* em \mathbb{R}^6 . Obtemos assim, uma versão analítica para a imersão mínima f , com possíveis pontos de ramificação, em que $f(\Sigma^2)$ encontra ∂B ortogonalmente, então que $f(\Sigma^2)$ é totalmente umbílica.

Palavras-chaves: Condição de Ricci; Imersão Isométrica; Curvatura Média Constante; Fronteira Livre.

Abstract

In this dissertation, we investigate the Ricci conditions for immersions of constant mean curvature and free boundary on balls of space forms. Given a Riemannian manifold Σ^2 with a metric ds^2 whose Gaussian curvature is $K_s < H_0^2 + c$, the necessary condition and sufficient of Gregorio Ricci-Curbastro so that Σ^2 is isometrically immersed as a surface of constant or minimum mean curvature in balls of space form and that new metric $d\tilde{s}^2 = \sqrt{-K_s + H_0^2 + c} ds^2$ is flat. In the same meaning, we have that the existence of minimum immersions in \mathbb{R}^3 , the Simons Type equation, for the three-dimensional case, is equivalent to the differential equation $K_s \Delta K_s - \|\nabla K_s\|^2 - 4K_s^3 = 0$ with $K_s < 0$ and is generalized for immersions of constant mean curvature in space forms by the equation:

$$(-K_s + H_0^2 + c_0) \Delta K_s + \|\nabla K_s\|^2 + 4(-K_s + H_0^2 + c_0)^2 K_s = 0.$$

Adding such a condition to a minimum isometric immersion $f : \Sigma^2 \rightarrow B^n$, with possible branch points and without umbilicity points, we show that after a possible reduction of codimension, $f(\Sigma^2)$ is essential in \mathbb{R}^3 or essential in \mathbb{R}^6 . We thus obtain an analytical version for the minimum immersion f , with possible branch points, where $f(\Sigma^2)$ meets ∂B orthogonally, so that $f(\Sigma^2)$ is totally umbilical.

Keywords: Ricci condition; Isometric immersion; Constant Mean Curvature; Free Boundary.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Noções Preliminares	4
1.1 Métricas e Conexões.	4
1.2 Curvaturas	10
1.3 Geometria das Subvariedades	13
1.4 Homotopia e o Primeiro Grupo Fundamental.	22
1.5 Característica de Euler-Poincaré	27
1.6 Métricas conformes	29
1.7 Condição de Ricci Generalizada	31
1.7.1 Desigualdade de Simons e a Condição de Ricci.	38
2 Os Resultados do Tipo Lawson-Sakaki.	45
2.1 Exemplos de Imersões Mínimas com a Condição de Ricci.	45
2.2 Imersões mínimas com a condição de Ricci em formas espaciais.	47
3 Imersões de Curvatura Média Constante de Fronteira Livre na Bola de Formas Espaciais.	49
3.1 Outra Demonstração do Teorema de Nitsche	51
3.2 Teorema Principal	58
Referências Bibliográficas	60

Introdução

Fomenko ([15], 2005) obteve uma generalização para a condição de Ricci. Veremos que sob algumas condições, se a imersão for mínima ou de curvatura média constante então a condição de Ricci é satisfeita naturalmente. Dada pelo seguinte Teorema:

Teorema 0.0.1 (Fomenko, 2005). *Uma métrica bidimensional ds^2 de classe C^4 definida em um domínio plano simplesmente conexo pode ser mergulhada isometricamente no espaço $\mathbb{M}_{c_0}^3$ como uma superfície de curvatura média constante H_0 e sem pontos umbílicos se, e somente se, a curvatura K_s satisfaz a condição $K_s < H_0^2 + c_0$, a curvatura K_{τ_α} dada pela métrica $d\tau_\alpha^2 = (-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha ds^2$ é calculada pela fórmula*

$$K_{\tau_\alpha} = \frac{(1 - 2\alpha)K_s}{(-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha}.$$

A imersão isométrica de ds^2 em $\mathbb{M}_{c_0}^3$ é realizada como uma família de 1-parâmetro $\{\Sigma_t(H_0)\}$, $0 \leq t < 2\pi$, de superfícies $\Sigma_t(H_0)$ de curvatura média constante H_0 que são não congruentes aos pares para diferentes valores de t e dependem continuamente de t .

Nesse sentido, Lawson, em [23] e [24] resolve o problema completamente para imersões mínimas (de codimensão qualquer) com a condição de Ricci em formas espaciais. Mostrando que essas superfícies ou estão imersas em algum subespaço afim tridimensional ou completamente (essencialmente) em algum subespaço 6-dimensional totalmente geodésico do \mathbb{R}^n , descrito da seguinte forma:

Teorema 0.0.2. *Seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão mínima de uma variedade 2-dimensional Σ simplesmente conexa em \mathbb{R}^n . Suponha que a métrica induzida ds^2 satisfaz a condição de Ricci com relação a $c = 0$ exceto nos pontos isolados onde $K_\Sigma = 0$. Então ou*

- a) $f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$, ou
- b) $f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^6$ e f é dada no Exemplo 2.1.1 para $\varphi \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$.

Esta dissertação descreve um resultado obtido recentemente por Yury Domingos, Roney Santos e Feliciano Vitória ([12], 2022), sobre condições de Ricci para imersões de curvatura média constante de fronteira livre em bolas de formas espaciais. Para isso, os autores citados usaram a clássica Desigualdade de Simons 1.7.3 para fazer a seguinte caracterização,

Teorema 0.0.3. *Seja Σ^2 uma superfície de fronteira livre em B . Se Σ tem curvatura média constante H , então Σ não é totalmente umbílica se, e somente se, $\chi(\Sigma) \leq 0$, onde $\chi(\Sigma)$ denota a característica de Euler. Mais ainda, a igualdade ocorre em (3.14) se, e somente se, Σ é um anel.*

O resultado de Johannes Carl Christian Nitsche (1985) afirma que todo disco topológico bidimensional mínimo de fronteira livre na bola Euclidiana unitária centrada na origem do \mathbb{R}^n é o disco equatorial plano. Por sua vez A. Fraser e R. Schoen ([16], 2014) ampliaram para imersões de qualquer codimensão, como no seguinte resultado:

Teorema 0.0.4 (Ailana Fraser e Richard Schoen, 2014). *Seja $u : D \rightarrow B^n$ uma imersão mínima com pontos de ramificação tal que $u(D)$ encontra ∂B ortogonalmente. Então, $u(D)$ é totalmente umbílica.*

Portanto, apresentaremos e demonstraremos nesta dissertação o seguinte resultado principal:

Teorema 0.0.5 (Teorema Principal). *Seja $f : \Sigma^2 \rightarrow B^n$ uma imersão isométrica com pontos de ramificação de curvatura média constante H e de fronteira livre satisfazendo a condição de Ricci com respeito a curvatura seccional constante c . Então, após uma possível redução de codimensão*

1. $f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$;
2. $f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^6$, onde

$$f = f_{\theta} \cos \varphi \oplus f_{\theta + \frac{\pi}{2}} \sin \varphi,$$

para $\varphi \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$.

No primeiro capítulo deste trabalho, introduzimos as noções preliminares que diz respeito as definições e resultados básicos sobre Geometria Riemanniana. Nas últimas seções deste

capítulo são apresentados os principais pressupostos teóricos auxiliares para os capítulos seguintes. Mais especificamente, sobre a geometria das subvariedades, a Condição de Ricci e a Desigualdade de Simons.

O segundo capítulo, é dedicado aos resultados do tipo Lawson-Sakaki. Inicialmente são apresentados três Exemplos importantes, [2.1.1](#), [2.1.2](#) e [2.1.3](#), e alguns teoremas que caracterizam famílias de imersões mínimas munidas de métricas que satisfazem a condição de Ricci, [2.2.1](#), [2.2.2](#) e [2.2.3](#).

No terceiro capítulo, introduzimos algumas definições, o exemplo do disco mínimo, o catenóide crítico e da calota esférica ($H \neq 0$) com fronteira livre na bola B^{n+1} e as caracterizações de imersões CMC de fronteira livre na bola de formas espacial na perspectiva do trabalho de Yury Domingos, Roney Santos e Feliciano Vitória ([\[12\]](#), 2022).

E finalmente, no quarto capítulo, nos dedicaremos a prova do Teorema Principal, [3.2.1](#), que recorreremos a [\[12\]](#) para mostrar uma prova alternativa sobre condições de Ricci para imersões de curvatura média constante de fronteira livre em bolas de formas espaciais.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste primeiro capítulo apresentaremos as definições, notações e os resultados que serão usados durante toda a dissertação. Embora alguns resultados não sejam demonstrados, deixaremos suas referências bibliográficas.

Indicaremos o símbolo M^n para identificar as variedades Riemannianas simplesmente conexas de classe C^∞ dimensão n , por \langle, \rangle a sua métrica Riemanniana, por $\mathfrak{X}(M^n)$ o conjunto dos campos vetoriais de classe C^∞ em M^n , por ∇ sua conexão Riemanniana e por $T_p M^n$ o espaço tangente a M^n no ponto $p \in M^n$.

1.1 Métricas e Conexões.

Definição 1.1.1 (Do Carmo, 2019). *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M^n e uma família de aplicações biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M^n tais que:*

- a) $\bigcup_\alpha \mathbf{x}(U_\alpha) = M$.
- b) *Para todo par α e β , com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha|_{\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)}$ são diferenciáveis.*
- c) *A família $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$ é a máxima relativamente às condições (a) e (b).*

Um par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ com $p \in \mathbf{x}(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou sistema de coordenadas) de M^n em p ; $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma *vizinhança coordenada* em p . Uma família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ satisfazendo (a) e (b) é chamada uma *estrutura diferenciável* em M^n .

Definição 1.1.2 (Do Carmo, 2019). *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M^n é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno \langle, \rangle_p (isto é, uma forma bilinear simétrica positiva definida) no espaço tangente $T_p M^n$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido:*

Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(e_i)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .

A definição acima independe do sistema de coordenadas escolhido. Também podemos exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana localmente tomando o par X e Y do campo de vetores em uma vizinhança V de p e (M^n, g) .

As funções $g_{ij}(= g_{ji})$ são chamadas expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$.

Definição 1.1.3. *Definimos por variedade Riemanniana um par denotado por (M, g) , onde M é uma variedade diferenciável e g , uma métrica Riemanniana.*

Definição 1.1.4. *Sejam (M, g) e (N, \bar{g}) variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $u|_U : (M, g) \rightarrow (N, \bar{g})$ é chamado uma isometria se*

$$(1.1) \quad \langle v, w \rangle_p = \langle du_p(v), du_p(w) \rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in M, v, w \in T_p M$.

Definição 1.1.5. *Sejam (M, g) e (N, \bar{g}) variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $u : (M, g) \rightarrow (N, \bar{g})$ é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $u : U \rightarrow u(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo a igualdade (1.1).*

Exemplo 1.1.1 (O exemplo quase trivial). $M^n = \mathbb{R}^n$ com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ identificado com $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. A métrica é dada por $\langle e_i, e_i \rangle = \delta_{ij}$ (Delta de Kronecker). \mathbb{R}^n é chamado espaço Euclidiano de dimensão n e a geometria Riemanniana deste espaço é a geometria Euclidiana.

Exemplo 1.1.2 (Variedades imersas). *Seja $u : M^n \rightarrow N^{n+k}$ uma imersão, isto é, u é diferenciável e $(u_p)_* : T_p M^n \rightarrow T_{u(p)} N^{n+k}$ é injetiva ($\ker (u_p)_* = \{0\}$) para todo $p \in M^n$. Se N^{n+k} tem uma estrutura Riemanniana, u induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle v, w \rangle_p = \langle (u_p)_*(v), (u_p)_*(w) \rangle_{f(p)}$, $v, w \in T_p M^n$. A métrica de M^n é chamada então a métrica induzida por u e u é uma imersão isométrica.*

Podemos reescrever esse exemplo considerando a operação *pullback* por meio das seguintes definições

Definição 1.1.6. A aplicação diferenciável $f : (M, g) \longrightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ é chamada de **imersão** se a diferencial $f_* : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} \bar{M}$ é injetiva para todos os ponto $p \in M$. Se, além disto, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset \bar{M}$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por \bar{M} , diz-se que f é um **mergulho**. Se $M \subset \bar{M}$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow \bar{M}$ é um mergulho, diz-se que M é uma **subvariedade** de \bar{M} .

Definição 1.1.7. Uma imersão $f : (M^n, g) \longrightarrow (\bar{M}^{n+k}, \bar{g})$ entre variedades Riemannianas é dita **imersão isométrica** se

$$g(X, Y) = f^* \bar{g}(X, Y) = \bar{g}(f_* X, f_* Y).$$

A métrica em \bar{M} induz uma métrica em M via a operação *pullback*. Isto é, a métrica g é o pullback da \bar{g} segundo a imersão isométrica f , puxando a métrica que está na imagem em \bar{M} para M .

Definição 1.1.8. Se $f : M^n \rightarrow \bar{M}^m$ é uma imersão dizemos que a diferença, $m - n$ ($m \geq n$) é a **codimensão** de f . Em particular, quando a codimensão de uma imersão é um, isto é, $m = n + 1$ dizemos que $f(M) \subset \bar{M}$ é uma **hipersuperfície**.

É usual referir-se a f , ou a imagem $f(M)$, como uma subvariedade mergulhada em \bar{M} , ou simplesmente uma subvariedade de \bar{M} .

Agora, definiremos conexões em variedades diferenciáveis C^∞ considerando o conjunto dos campos vetoriais:

$$\mathfrak{X}(M) = \{X : M \longrightarrow TM; X(p) \in T_p M\}.$$

Definição 1.1.9. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$,
- ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

$$\text{iii) } \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in D(M)$.

Conexão afim é uma maneira de derivar campos vetoriais e por equanto a conexão depende da estrutura diferenciável. Esta definição não é tão transparente quanto a de estrutura Riemanniana. A seguinte proposição, no entanto, deverá esclarecer um pouco a situação.

Proposição 1.1.1. *Seja M um variedade diferenciável com a conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial ao longo de γ , denominado derivada covariante de V ao longo de γ , tal que:*

$$\text{a) } \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt},$$

$$\text{b) } \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt},$$

$$\text{c) } \textit{Se } V \textit{ é induzido por um campo de vetores } Y \in \mathfrak{X}(M), \textit{ i.e., } V(t) = Y(\gamma(t)), \textit{ então}$$

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Y.$$

Demonstração. Ver [10]. □

A última linha de (c) faz sentido, pois $\nabla_X Y$ depende só do valor de $X(p)$ e do valor da restrição de Y ao longo de uma curva tangente diferenciável γ a X em p .

Escolhendo um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) em torno de p e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_j y_j X_j,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, e teremos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) \\ &= \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_{ij} X_i(y_j) X_j. \end{aligned}$$

Fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, concluímos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

o que mostra que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p)$ e $y_k(p)$ e das suas derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X .

Definição 1.1.10. *Seja M uma variedade diferenciável com conexão afim ∇ . um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado **paralelo** quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$*

Definição 1.1.11. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A conexão é dita **compatível** com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c , tivermos $\langle P, P' \rangle = \text{const.}$*

Proposição 1.1.2. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Demonstração. Ver [10]. □

Corolário 1.1.0.1. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração. Ver [10]. □

Definição 1.1.12. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita **simétrica** quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Em um sistema de coordenadas (U, x) , o fato de ser ∇ simétrica implica que para todo $i, j = 1, \dots, n$,

$$(1.2) \quad \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j], \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

equivale a dizer que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Definição 1.1.13. As funções Γ_{ij} definidas numa restrição U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ são os coeficientes da conexão ∇ em U ou os símbolos de Christoffel da conexão.

Teorema 1.1.1. (Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

- a) ∇ é simétrica.
- b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Definição 1.1.14. A conexão dada pelo teorema acima é denominada conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de M . Ou seja, satisfaz as seguintes condições:

- a) $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$
- b) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

Agora, definiremos os operadores especiais que usaremos durante o texto.

Definição 1.1.15. Considere uma variedade Riemanniana (M^n, g) e uma função suave $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) O $\nabla f(p)$ denota o gradiente de f em $p \in M$ segundo a métrica g , onde para todo $X \in T_p(M^n)$ temos

$$g(\nabla f(p), X) = X(f)(p).$$

- b) O Hessiano $\nabla^2 f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ de f segundo a métrica g em $p \in M$ é definida por

$$\nabla^2 f(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y) = XY(f) - \nabla_X Y(f).$$

- c) O Laplaciano $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de f segundo g é definido por

$$\Delta f = \text{tr}(\nabla^2 f).$$

1.2 Curvaturas

Definição 1.2.1. A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ o operador (curvatura) $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, se indicarmos por $Z = (z_1, \dots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do \mathbb{R}^n , obteremos que

$$\begin{aligned} \nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n) &= \left(\frac{\partial z_1}{\partial X}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial X} \right), \\ \nabla_Y \nabla_X Z &= (YXz_1, \dots, YXz_n) \\ &= \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial Y \partial X}, \dots, \frac{\partial^2 z_n}{\partial Y \partial X} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial X \partial Y}, \dots, \frac{\partial^2 z_n}{\partial X \partial Y} \right), \end{aligned}$$

o que implica que

$$(1.3) \quad R(X, Y)Z = 0.$$

Tendo em vista a comutatividade de $[X, Y]$ em \mathbb{R}^n , obtemos o que havíamos afirmado. Podemos, portanto, pensar em R como uma maneira de medir o quanto M deixa de ser Euclidiana.

Segue alguns resultados inerentes sobre o tensor curvatura R de uma variedade Riemanniana tais que, para mais detalhes, o leitor pode consultar [10].

Proposição 1.2.1. A curvatura R de uma variedade Riemanniana satisfaz as seguintes propriedades:

a) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2). \end{aligned}$$

b) Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear, isto é,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W, \\ R(X, Y)fZ &= fR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

$$f \in \mathfrak{D}(M), Z, W \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposição 1.2.2 (Primeira Identidade de Bianchi).

$$(1.4) \quad R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Proposição 1.2.3. Para quais quer campos $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ valem:

- a) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle = 0$;
- b) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(Y, X)T, Z \rangle$;
- c) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(Z, T)X, Y \rangle$.

O tensor curvatura R de uma variedade Riemanniana M em um sistema de coordenadas (U, \mathbf{x}) em torno de $p \in M$ indicaremos por $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Assim,

$$(1.5) \quad R(X_i, X_j)X_k = \sum_m R_{ijk}^m X_m.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j) X_k &\stackrel{(1.2.1)}{=} \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k + 0 \\ &\stackrel{(1.1.13)}{=} \nabla_{X_j} \left(\sum_m \Gamma_{ik}^m X_m \right) - \nabla_{X_i} \left(\sum_m \Gamma_{jk}^m X_m \right) \\ &\stackrel{(1.1.9)}{=} \sum_m \nabla_{X_j} (\Gamma_{ik}^m) X_m - \sum_m \nabla_{X_i} (\Gamma_{jk}^m) X_m \\ &\stackrel{(1.1.9)}{=} \sum_m \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^m) X_m + \sum_m \Gamma_{ik}^m \nabla_{X_j} X_m \\ &\quad - \sum_m \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^m) X_m - \sum_m \Gamma_{jk}^m \nabla_{X_i} X_m \\ &\stackrel{(1.1.13)}{=} \sum_s \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^s) X_s + \sum_m \Gamma_{ik}^m \left(\sum_s \Gamma_{jm}^s X_s \right) \\ &\quad - \sum_s \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^s) X_s - \sum_m \Gamma_{jk}^m \left(\sum_s \Gamma_{im}^s X_s \right). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\sum_s R_{ijk}^s X_s = \sum_s \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^s) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^s) + \sum_m (\Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^s - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^s) \right] X_s.$$

Sabendo que os campos X_s são linearmente independentes, então

$$(1.6) \quad R_{ijk}^s = \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^s) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^s) + \sum_m (\Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^s - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^s)$$

depende da segunda derivada da métrica, como visto na Equação (??).

Fazendo

$$\begin{aligned} \langle R(X_i, X_j) X_k, X_s \rangle &= \sum_s R_{ijk}^s \langle X_s, X_m \rangle \\ &= \sum_m R_{ijk}^m g_{ms} \\ &=: R_{ijks}, \end{aligned}$$

poderemos reescrever as simetrias do operador curvatura R como

$$\begin{aligned} R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kij s} &= 0 \\ R_{ijks} &= -R_{jik s} \\ R_{ijks} &= -R_{ijsk} \\ R_{ijks} &= R_{ksij}. \end{aligned}$$

Intimamente relacionado com o operador curvatura está a curvatura seccional (ou Riemanniana), que passamos a definir.

Dado um espaço vetorial V, a expressão

$$|\mathbf{x} \times \mathbf{y}| = \sqrt{|\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}$$

representa a área do paralelogramo bidimensional determinado pelo para de vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Proposição 1.2.4. *Seja $\Gamma \subset T_p M$ um subespaço bidimensional do espaço tangente $T_p M$ e sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma$ dois vetores linearmente independentes. Então,*

$$(1.7) \quad K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2},$$

onde $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle R(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ e $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ independe do par $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Gamma$.

Demonstração. Ver [10, p. 74] □

Definição 1.2.2. *Chamamos de curvatura seccional de Γ em $\mathbf{p} \in M$ de um subespaço bidimensional $\Gamma \subset T_p M$ o número real $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K(\Gamma)$, onde $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ é uma base qualquer de Γ .*

Além do fato de que a curvatura seccional tem interessantes interpretações geométricas, sua importância provém do fato de que o conhecimento de $K(\Gamma)$, para todo Γ , determina completamente a curvatura R.

1.3 Geometria das Subvariedades

Sejam $M = M^n$ e $\bar{M} = \bar{M}^m$ variedades diferenciáveis de dimensão n e m , respectivamente.

Seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k=m}$ uma imersão. Então para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U_p \subset M$ tal que $f(U_p) \subset \bar{M}$ é uma subvariedade de \bar{M} . Significando que existem uma vizinhança $\bar{U}_{f(p)}$ e um difeomorfismo $\varphi : \bar{U}_{f(p)} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ em um aberto V do \mathbb{R}^k , tais que φ aplica difeomorficamente $f(U_p) \cap \bar{U}_{f(p)}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p \bar{M}$ decompõe $T_p \bar{M}$ na soma direta

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus T_p^\perp M,$$

onde $T_p^\perp M$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \bar{M}$.

Dada a variedade Riemanniana M^n suave com ou sem fronteira, definimos

Definição 1.3.1. *O fibrado tangente de M , denotado por TM , é a união disjunta dos espaços tangentes em todos os pontos de M :*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Os elementos desta união disjunta com um par ordenado (p, v) , com $p \in M$ e $v \in T_p M$. O fibrado tangente vem equipado com uma aplicação projeção $\pi : TM \rightarrow M$ definido por $\pi(p, v) = p$ que envia cada vetor de $T_p M$ ao ponto p no qual é tangente.

Se $v \in T_p \bar{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^\perp, \quad v^T \in T_p M, \quad v^\perp \in T_p^\perp M.$$

Denominamos v^T a componente tangencial de v e v^\perp a componente normal de v . Tal decomposição é evidentemente diferenciável no sentido que as aplicações de TM em \bar{M}^\perp dadas por

$$(p, v) \longrightarrow (p, v^T) \quad \text{e} \quad (p, v) \longrightarrow (p, v^\perp)$$

são diferenciáveis.

Indicaremos a conexão Riemanniana de \bar{M} por $\bar{\nabla}$. Se os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são campos locais de vetores em M restrita a uma vizinhança U no ponto $p \in M$ temos campos, que \bar{X}, \bar{Y} são extensões locais a \bar{M} , definimos a conexão Levi-Civita em M por

$$(1.8) \quad \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T.$$

Com efeito, o valor do campo $\nabla_X Y$ depende somente do vetor $X(p) \in T_p M$ e do valor de Y ao longo de qualquer curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \bar{M}$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X(p)$. Isto é, se $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ satisfaz $\bar{X}(p)|_{\mathcal{U}} = X(p)$, então $(\nabla_{\bar{X}} Y)(p) = (\nabla_X Y)(p)$ e se $\bar{Y} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ satisfazendo $\bar{Y}|_{\gamma} = Y|_{\gamma}$, então $(\nabla_X \bar{Y})(p) = (\nabla_X Y)(p)$. Dessa forma, a conexão $\nabla_X Y$ está bem definida onde Y é definido ao longo de uma subvariedade e X tangente a essa subvariedade.

A compatibilidade de ∇ com métrica em \mathcal{U} é dada por

$$X\langle Y, Z \rangle = \bar{X}\langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} \rangle.$$

Pela conexão Levi-Civita definida na igualdade (1.8), temos

$$(1.9) \quad X\langle Y, Z \rangle = \bar{X}\langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = \langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T, \bar{Z} \rangle + \langle \bar{Y}, (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z})^T \rangle.$$

A simetria da conexão na vizinhança de \mathcal{U} em p também é satisfeita e é dada por

$$(1.10) \quad [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T - (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X})^T = [\bar{X}, \bar{Y}]|_{\mathcal{U}},$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ e $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$.

Teorema 1.3.1. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{U})^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Ver Do Carmo [10], p. 97. □

Fixaremos a seguinte notação $\alpha(X, Y) = B(X, Y)$ para representar a segunda forma fundamental de uma imersão.

Seja $p \in M$ e $\eta \in T_p^\perp M$. A aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle \alpha(x, y), \eta \rangle$$

para todo $x, y \in T_p M$, pelo Teorema 1.3.1, H_η é uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.3.2. *A forma quadrática II_η definida em $T_p M$ por*

$$II(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η .

Às vezes se utiliza também a expressão *segunda forma fundamental* para designar a aplicação α que em cada ponto $p \in M$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $T_p^\perp M$. Dada qualquer forma bilinear H_η fica associada um operador linear autoadjunto. A menos de uma orientação η , tem-se uma extensão local a M como se segue.

Definição 1.3.3. *Seja $f : (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ uma imersão isométrica. Definimos a aplicação bilinear H_η de f segundo p associada a aplicação autoadjunta $S_\eta : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(\bar{M})^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle \alpha(x, y), \eta \rangle.$$

Proposição 1.3.1 (Operador de Weingarten). *Seja $p \in M$, $x \in T_p M$ e $\eta \in T_p M^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M . Então*

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^\top.$$

Demonstração. Seja $y \in T_p M$ e X, Y extensões locais de x, y , respectivamente, e tangentes a M . Então $\langle N, Y \rangle = 0$, e portanto

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(X, Y)(p), N \rangle = \langle \bar{\nabla}_x Y - \nabla_x Y, N \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_x Y, N \rangle(p) = -\langle \bar{\nabla}_x N \rangle(p) = \langle -\bar{\nabla}_x N, y \rangle, \end{aligned}$$

para todo $y \in T_p M$. Portanto, $S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^\top$. □

No caso de hipersuperfície, cuja codimensão é um, η é a única direção e é usual omiti-lo.

Sejam $p \in M$, $\eta \in T_p^\perp M$ e $|\eta| = 1$. Como $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ com autovalores reais k_1, \dots, k_n , isto é, $S_\eta(e_j) = k_j e_j$, $1 \leq j \leq n$.

Se M e \bar{M} são ambas orientáveis e estão orientadas, então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base na orientação de M , $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de \bar{M} . Neste caso, denominamos os e_j *direções principais* e k_j *curvaturas principais* da imersão f . Por exemplo:

$$\det S_\eta = k_1 \dots k_n \quad , \quad \frac{1}{n} (k_1 + \dots + k_n)$$

denominadas *curvatura de Gauss-Kronecker* e *curvatura média* de f , respectivamente.

Exemplo 1.3.1 (O Toro de Clifford). *Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por*

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\theta), \text{sen}(\theta), \cos(\varphi), \text{sen}(\varphi)).$$

A aplicação f é uma imersão de \mathbb{R}^2 na esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, cuja imagem $f(\mathbb{R}^2)$ é um toro $\mathbb{T}^2 = S^1_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times S^1_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ com curvatura seccional zero na métrica induzida.

Com efeito, f é diferenciável e a diferencial f_ é gerada pelos vetores coluna*

$$\begin{aligned} f_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\text{sen}(\theta), \cos(\theta), 0, 0) \\ &e \\ f_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -\text{sen}(\varphi), \cos(\varphi)), \end{aligned}$$

então f_ tem posto 2, logo f é uma imersão. Por um simples cálculo, computamos $\bar{\nabla}$, a conexão Riemanniana do \mathbb{R}^4 :*

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{f_\theta} f_\varphi &= 0, \\ \bar{\nabla}_{f_\theta} f_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos(\theta), -\text{sen}(\theta), 0, 0), \\ \bar{\nabla}_{f_\varphi} f_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -\cos(\varphi), -\text{sen}(\varphi)), \end{aligned}$$

veja que $\bar{\nabla}_{f_\theta} f_\theta$ e $\bar{\nabla}_{f_\varphi} f_\varphi$ pertence ao espaço normal $(T_{f(\theta, \varphi)}\mathbb{T}^2)^\perp$, logo

$$(1.11) \quad (\bar{\nabla}_{f_\theta} f_\theta)^\top = 0 = (\bar{\nabla}_{f_\varphi} f_\varphi)^\top.$$

Sabemos que o \mathbb{R}^4 possui curvatura seccional constante igual a zero, segue da equação (1.8) e da Proposição 1.3.2 que

$$\begin{aligned} K_g(f_\theta, f_\varphi) - \bar{K}_{\bar{g}}(f_\theta, f_\varphi) &= \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle - |\alpha(x, y)|^2 \\ &= \langle (\bar{\nabla}_{f_\theta} f_\theta)^\perp, (\bar{\nabla}_{f_\varphi} f_\varphi)^\perp \rangle - |(\bar{\nabla}_{f_\theta} f_\varphi)^\perp|^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle (\cos(\theta), \text{sen}(\theta), 0, 0), (0, 0, \cos(\varphi), \text{sen}(\varphi)) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo a imagem de f é um toro bidimensional $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^4$ com curvatura seccional constante nula.

Considere os vetores

$$\begin{aligned} E_1 &= (-\text{sen}(\theta), \cos(\theta), 0, 0), \\ E_2 &= (0, 0, -\text{sen}(\varphi), \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

e

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos(\theta), -\text{sen}(\theta), \cos(\varphi), \text{sen}(\varphi)).$$

Note que $\{E_1, E_2\}$ é uma base ortonormal para o espaço tangente $T_p\mathbb{T}^2$ e η é uma direção normal do espaço tangente de $T_p\mathbb{T}^2$ em relação ao espaço tangente de $T_p\mathbb{S}^3$, $p \in \mathbb{T}^2$. Denotemos por b_{ij} a matriz da segunda forma fundamental do toro em relação ao campo normal η . Cada entrada da matriz é dada por

$$b_{11} = \langle S(E_1), E_1 \rangle$$

$$b_{12} = \langle S(E_1), E_2 \rangle$$

$$b_{21} = \langle S(E_2), E_1 \rangle$$

$$b_{22} = \langle S(E_2), E_2 \rangle,$$

onde S é dado por

$$S(X) = -(\bar{\nabla}_X \eta)^T$$

para qualquer vetor tangente ao toro \mathbb{T}^2 . Temos que

$$S(E_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{sen}(\theta), -\cos(\theta), 0, 0)$$

$$S(E_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, \text{sen}(\varphi), -\cos(\varphi))$$

Por um simples cálculo, usando os termos definido de (b_{ij}) , obtemos que

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_{12} = b_{21} = 0 \quad \text{e} \quad b_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Assim,

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Note que o $\text{tr}(S) = 0$. Logo a imersão do toro \mathbb{T}^2 na esfera unitária $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ induzida por f é uma imersão mínima. (Ver [10], exercícios 2 e 8, p. 105).

Podemos relacionar também a aplicação bilinear e simétrica do teorema (1.3.1) com a curvatura média para caracterizar as subvariedades totalmente geodésicas descritas em [24].

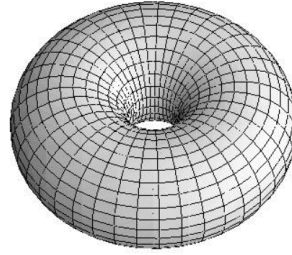


Figura 1.1: O toro de Clifford.

Definição 1.3.4. Dizemos que uma variedade M é totalmente geodésica de uma variedade Riemanniana \bar{M} quando a sua segunda forma fundamental α é sempre nula.

As subvariedades totalmente geodésicas são caracterizadas do seguinte modo. Seja M uma subvariedade de uma variedade Riemanniana \bar{M} . Então M é totalmente geodésica se, e somente se, toda geodésica em uma estrutura Riemanniana induzida em M é também geodésica \bar{M} . Isso segue imediatamente do fato que qualquer campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vale

$$(1.12) \quad \alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = 0.$$

Em relação a estrutura Riemanniana, as subvariedades geodésicas são as mais naturais. Infelizmente, de modo geral, tais subvariedades não existem, exceto em dimensão um. No entanto, nos espaços mais agradáveis, espaços simétricos, existem muitas dessas subvariedades de dimensões superiores.

No \mathbb{R}^n , as subvariedades totalmente geodésicas são os espaços afins

$$\{x + c; x \in \mathbb{R}^k\},$$

onde \mathbb{R}^k é um subespaço linear e $c \in \mathbb{R}^n$.

Em \mathbb{S}^n , as subvariedades totalmente geodésicas são as esferas máximas

$$\mathbb{S}^k = \mathbb{S}^n \cap \mathbb{R}^{k+1} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

onde \mathbb{R}^{k+1} é um subespaço linear.

No n -espaço projetivo complexo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ com a métrica adequada, as subvariedades totalmente geodésicas são os subespaços lineares $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$, $k = 1, \dots, n$ e o espaço real projetivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^k$, $k = 1, \dots, n$.

Agora, explicitaremos algumas definições e as equações fundamentais para imersões que, por sua vez, são inerentes e importantes para as caracterizações dessas aplicações.

Proposição 1.3.2 (Fórmula de Gauss para hipersuperfícies). *Sejam $\mathbf{p} \in M$, x, y vetores ortonormais de $T_{\mathbf{p}}M$ e $f : (M, g) \longrightarrow (\overline{M}, \overline{g})$ uma imersão. Então*

$$(1.13) \quad K_g(x, y) - \overline{K}_{\overline{g}}(x, y) = \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle - |\alpha(x, y)|^2.$$

Demonstração. Ver Do Carmo [10], p.99. □

Em formas espaciais temos que em \overline{M}

$$\overline{K}(x, y) = c(|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2)$$

onde c é a curvatura de \overline{M} .

Para codimensão um, temos que a proposição 1.3.2 é dada por:

$$(1.14) \quad K(e_i, e_j) = \pm k_i k_j + c,$$

onde (e_1, e_2, \dots, e_n) é uma base ortonormal que diagonaliza o operador autoadjunto S .

Definição 1.3.5. *Uma imersão $f : (M^n, g) \longrightarrow (\overline{M}, \overline{g})$ é mínima se para todo $\mathbf{p} \in M$ tem $\text{tr } S_{\eta} = 0$.*

Escolhendo um referencial ortonormal E_1, \dots, E_m de vetores em \mathfrak{X}^{\perp} , onde U é uma vizinhança de \mathbf{p} na qual f é um mergulho, podemos escrever, em \mathbf{p} ,

$$\alpha(x, y) = \sum_{j=1}^m H_j(x, y) E_j, \quad x, y \in T_{\mathbf{p}}M,$$

onde $H_j = H_{E_j}$.

Definição 1.3.6. *Sejam $f : (M^n, g) \longrightarrow (\overline{M}, \overline{g})$ uma imersão para cada $\mathbf{p} \in M$, o vetor dado por*

$$H(\mathbf{p}) = \frac{1}{n} \sum_j^n (\text{tr } S_j) E_j,$$

onde $S_j = S_{E_j}$, não depende do referencial E_j escolhido. O vetor H é chamado curvatura média da imersão f . É claro que é mínima se, e só se, $H(\mathbf{p}) = 0$, para todo $\mathbf{p} \in M$.

Definição 1.3.7. *Sejam $f : (M^n, g) \longrightarrow (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ uma imersão e S seu operador de Weingarten. O tensor de umbilicidade ϕ de M sem traço associado a segunda forma fundamental α é a aplicação $\phi : \mathfrak{X}(M^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(M^n)$ definida por*

$$\phi = S - \frac{H}{n} I,$$

onde I é o tensor identidade de M^n . Quando $\phi \equiv 0$ em todo ponto de M^n , dizemos que f é totalmente umbílica.

Em codimensões maiores, dizemos que uma imersão $f : M^n \rightarrow M^{n+p}$ é umbílica em $x_0 \in M$ quando $S_\xi = k_\xi I$ para todo $\xi \in T_{x_0}^\perp M$, onde $k_\xi \in \mathbb{R}$ e I é o tensor identidade em $T_{x_0} M$. A imersão f é *totalmente umbílica* quando for umbílica em todo ponto de M .

Pode-se ver que as normas do tensor de umbilicidade ϕ e do operador de Weingarten S de uma imersão que tem curvatura média H se relacionam por

$$|\phi|^2 = |S|^2 - \frac{H^2}{n}.$$

Agora, apresentaremos as equações fundamentais para imersões. Dada uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$, a sua geometria decompõe-se: uma geometria do fibrado tangente e uma geometria do fibrado normal. Estas geometrias se relacionam com a segunda forma fundamental da imersão por meio de expressões que generalizam as clássicas equações de Gauss e Codazzi da teoria de superfícies. São elas:

Teorema 1.3.2. *As seguintes equações se verificam:*

a) *Equação de Gauss.*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle \alpha(Y, T), \alpha(X, Z) \rangle + \langle \alpha(X, T), \alpha(Y, Z) \rangle.$$

b) *Equação de Codazzi.*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\bar{\nabla}_Y \alpha)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X \alpha)(Y, Z, \eta).$$

Demonstração. Ver [10]. □

Se o espaço ambiente \bar{M}^n tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se reduz a:

$$(\bar{\nabla}_X \alpha)(Y, Z, \eta) = (\bar{\nabla}_Y \alpha)(X, Z, \eta)$$

Se, além disto, a codimensão da imersão é 1, $\nabla^\perp \eta = 0$, donde

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \alpha(Y, Z, \eta) &= X \langle S_\eta(Y), Z \rangle - \langle S_\eta, (\nabla_X^\perp Y), Z \rangle - \langle S_\eta(Y), \nabla_X Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X (S_\eta(Y)), Z \rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y), Z \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, a equação de Codazzi se escreve

$$\nabla_X(S_\eta(Y)) - \nabla_Y(S_\eta(X)) = S_\eta([X, Y]).$$

Além desses resultados, recorreremos aos Teoremas da Divergência, Primeira Variação de Área e ao clássico Teorema de Gauss-Bonnet que são inerentes à geometria das subvariedades estudadas.

Teorema 1.3.3 (Divergência). *Sejam (M, g) uma variedade compacta orientável com bordo ∂M . Se $X : M \rightarrow TM$ é um campo de vetores de classe C^k . Então*

$$(1.15) \quad \int_{\partial M} g(X, \nu) \, dS = \int_M \operatorname{div} X \, dM$$

onde ν o campo de vetores unitário ortogonal à ∂M que aponta na direção exterior de M .

Definição 1.3.8. *Uma variação da imersão $f : (M^k, g) \rightarrow (\bar{M}^n, \bar{g})$ é uma família de imersões $f_t : (M^k, g_t) \rightarrow (\bar{M}^n, \bar{g})$ que varia diferencialmente com $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que $f_0 = f$. O campo variacional $X \in \mathfrak{X}(M)$ de uma variação é definido por*

$$X = \left. \frac{\partial f_t}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Quando o volume da métrica Riemanniana que está sendo perturbada é finito, temos associado a esta variação o seguinte funcional.

Definição 1.3.9. *Definimos o funcional área $\mathcal{A} : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ de M (uma superfície compacta) induzida pela família f_t definido por*

$$\mathcal{A}(t) = \int_M dM_t,$$

onde dM_t é o elemento de área de M_t .

Definição 1.3.10. *Considere uma variação $f_t : (M^n, g_t) \rightarrow (\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$, da imersão $f : (M^n, g) \rightarrow (\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$. Se (M^n, g) tem volume finito e $d\bar{s}$ denota o elemento de volume de (\bar{M}^{n+1}, \bar{g}) , definimos o funcional volume $\mathcal{V} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dessa variação definido por*

$$(1.16) \quad \mathcal{V}(t) = \int_{M \times [-\epsilon, \epsilon]} f^* d\bar{s}.$$

Dizemos que f preserva volume se $\mathcal{V}'(t) = 0$, para todo t .

Associado ao campo variacional X de uma variação f_t temos a Primeira Variação de Área e Primeira Variação de Volume.

Teorema 1.3.4 (Primeira Variação para Área). *Sejam $f : (M^n, g) \rightarrow (\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$ uma imersão com vetor curvatura média H , onde M^n é compacta, e $f_t : (M_t^n, g_t) \rightarrow (\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, uma variação de f . Se \mathcal{A} denota o funcional área associado a f_t , então*

$$\mathcal{A}'(0) = - \int_{M^n} g(X, H) d\sigma + \int_{\partial M^n} g(X, \nu) ds$$

em que ν é o campo normal unitário exterior a ∂M^n e tangencia a M^n (caso $\partial M^n \neq \emptyset$), $d\sigma$ é o elemento de volume de M^n e ds é o elemento de área de ∂M^n . Se $\partial M^n = \emptyset$, uma imersão mínima é o ponto crítico do funcional área.

Teorema 1.3.5 (Primeira Variação de Volume). *Sejam $f : (M^n, g) \rightarrow (\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$ uma imersão, onde M^n é compacta, e $f_t : (M_t^n, g_t) \rightarrow (\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, uma variação de f . Se \mathcal{V} denota o funcional volume da variação, então*

$$(1.17) \quad \mathcal{V}'(0) = - \int_{M^n} g(X, \eta) ds,$$

onde X é o campo variacional da variação e η é um campo unitário normal a $f(M^n)$.

Para mais detalhes sobre as primeiras variações de Área e Volume o leitor pode consultar [8]. E, para os problemas variacionais de superfícies com curvatura média constante no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , o leitor pode consultar [26].

1.4 Homotopia e o Primeiro Grupo Fundamental.

Sabemos que um caminho num espaço M é uma aplicação contínua $f : I \rightarrow M$, onde I o intervalo unitário $[0, 1]$. A noção de deformar continuamente um caminho, mantendo seus extremos fixados torna-se preciso na seguinte definição:

Definição 1.4.1. *Uma homotopia de caminhos em M é uma família $f_t : I \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$ tal que*

- a) *os pontos finais $f_t(0) = x_0$ e $f_t(1) = x_1$ independe de t ;*
- b) *a aplicação associada $H : I \times I \rightarrow M$ definida por $H(s, t) = f_t(s)$ é contínua.*

Definição 1.4.2. *Dois caminhos $f_0, f_1 : I \rightarrow M$ são homotópicos em M quando existe uma homotopia $H(s, t) = f_t$. A notação para isso é $f_0 \simeq f_1$.*

Exemplo 1.4.1 (Homotopias Lineares). *Para quaisquer caminhos $f_0, f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tendo os mesmos pontos finais x_0 e x_1 são homotópicos através da homotopia*

$$f_t(s) = (1 - t)f_0(s) + tf_1(s).$$

Nesta homotopia, cada ponto $f_0(s)$ percorre ao longo do segmento de reta até $f_1(s)$ com velocidade contante. Isso ocorre porque a linha que passa por $f_0(s)$ e $f_1(s)$ é parametrizada linearmente como

$$(1.18) \quad f_0(s) + t[f_1(s) - f_0(s)] = (1 - t)f_0(s) + tf_1(s),$$

sempre que $t \in [0, 1]$. Se $f_0(s) = f_1(s)$ esse segmento degenera num ponto e $f_t(s) = f_0(s)$ para todo $t \in [0, 1]$. Isso ocorre, em particular, para $s = 0$ e $s = 1$, cada f_t é um caminho de x_0 a x_1 . A continuidade da homotopia f_t como uma aplicação $I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ segue da continuidade de f_0 e f_1 , desde que as operações algébricas de adição vetorial e multiplicação por escalar na fórmula para f_t são contínuas.

Esta construção mostra que todo subespaço convexo $X \subset \mathbb{R}^n$, todos os caminhos em X determinados pelos pontos finais x_0 e x_1 são homotópicos, pois, se f_0 e f_1 estão em X , o mesmo acontece com a homotopia f_t .

A classe de um caminho f sob a relação de equivalência de homotopia será denotada por $[f]$ e chamada de classe de homotopia de f .

Proposição 1.4.1. *A relação de homotopias em caminhos com extremidades fixas em qualquer espaço topológico é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Ver [17]. □

Definição 1.4.3. *Dados dois caminhos $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ tal que $\alpha(1) = \beta(0)$ são caminhos homotópicos se existe uma composição $\alpha \circ \beta$ que percorre primeiro α e depois β , definido por*

$$(1.19) \quad \alpha \circ \beta = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2s - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases},$$

sempre que $t \in [0, 1]$.

Os caminhos α e β são percorridos duas vezes mais rápidos para que $\alpha \circ \beta$ seja percorrido no tempo 1. Essa operação respeita as classes de homotopia, pois se $\alpha_0 \simeq \alpha_1$ e $\beta_0 \simeq \beta_1$ via homotopias f_t e g_t e $\alpha_0(1) = \beta_0(0)$ para que $\alpha_0 \circ \beta_0$ esteja definido, então $f_t \circ g_t$ está definido e nos fornece uma homotopia $\alpha_0 \circ \beta_0 \simeq \alpha_1 \circ \beta_1$.

Em particular, se restringirmos aos caminhos $\alpha : I \rightarrow M$ com o mesmo ponto inicial e final $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \in M$. Esses caminhos são chamados de laços e o ponto inicial e final comum x_0 é referido como o ponto base. Ou de outra maneira, definimos

Definição 1.4.4. *Seja $\alpha : I \rightarrow M$ um caminho fechado em M tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Então α é chamada homotopicamente nula em M , quando α é homotópica ao caminho constante $\beta(t) = x_0$.*

O conjunto de todas as classes de homotopias $[\alpha]$ de laços $\alpha : I \rightarrow M$ no ponto base x_0 é denotado por $\pi_1(M, x_0)$.

Definição 1.4.5. *O grupo $\pi_1(M, x_0)$ é chamado de grupo fundamental de M no ponto base x_0 .*

O $\pi_1(M, x_0)$ é o primeiro em uma sequência de grupos de $\pi_n(M, x_0)$ chamados grupos de homotopia que são definidos de maneira semelhante usando cubos n -dimensionais I^n em vez de I .

Segue também alguns resultados e definições importantes para caracterizar ambientes simplesmente conexos (cf. [35]).

Definição 1.4.6. *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um subconjunto aberto de \mathbb{C} , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in U$ e $\|\cdot\|$ uma norma arbitrária em \mathbb{C} .*

- *A função f é chamada é diferencialmente complexa em z_0 , se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, z_0) > 0$ e uma aplicação linear*

$$f'(z_0) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

tal que existe um disco $D(\delta)$ de modo que a desigualdade

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| < \epsilon.$$

é satisfeita sempre que $h \in D(\delta)$ (exceto possivelmente para $h = 0$).

- Dizemos que f é uma função holomorfa, se f é diferenciavelmente complexa em todo $z_0 \in \mathcal{U}$. Isto é, a função f é holomorfa no ponto $z_0 \in \mathcal{U}$ se o quociente

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

converge para um limite quando $h \rightarrow 0$.

O limite do quociente, quando existe, é denotado por $f'(z_0)$ e é chamado a derivada de f em z_0 :

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Agora, considerando a função f definida no aberto \mathcal{U} , podemos escrevê-la em termos de suas partes real e imaginária

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

É razoável perguntar o que significa a condição de diferenciabilidade em termos de u e v . O leitor pode consultar [21] para os detalhes da análise no Capítulo VIII, mas tanto por uma questão de tradição, como porque há alguma necessidade psicologicamente para ver imediatamente qual é a resposta, derivamos o condições equivalentes em u , v para f ser holomórfico.

Em um $z \in \mathcal{U}$ fixo, seja $f'(z) = a + bi$. Seja $w = h + ik$, com $h, k \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$f(z + w) - f(z) = f'(z)w + \sigma(w)w,$$

onde $\sigma(w) \rightarrow 0$, sempre $w \rightarrow 0$. Então,

$$f'(z)w = (a + bi)(h + ik) = ah - bk + i(bh + ak).$$

Por outro lado, seja

$$\begin{aligned} F: \mathcal{U} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

uma aplicação tal que F é chamada de campo vetorial de f . Então

$$F(x + h, y + k) - F(x, y) = (ah - bk, bh + ak) + \sigma_1(h, k)h + \sigma_2(h, k)k,$$

onde $\sigma_1(h, k)$ e $\sigma_2(h, k)$ tendem a zero quando (h, k) tendem a $(0, 0)$. Portanto, se assumirmos que f é holomorfa, concluímos que F é diferenciável no sentido de variáveis reais, e que sua derivada é representada pela matriz jacobiana

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Mostrando que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

em que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Essas equações são chamadas de **Equações de Cauchy-Riemann**.

Reciprocamente, sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ duas funções que satisfazem a Equações de Cauchy-Riemann, e continuamente diferenciáveis no sentido de funções reais. Então, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ é imediatamente verificado invertendo os passos acima que f é complexamente diferenciável, ou seja, holomórfica (cf. [35], Teorema 2.4).

Teorema 1.4.1 (Versão Homotópica do Teorema de Cauchy). *Seja $U \subset \mathbb{C}$ aberto, α e β dois caminhos homotópicos em U . Então para toda função holomorfa $h : U \rightarrow \mathbb{C}$*

$$\int_{\alpha} h(w) dw = \int_{\beta} h(w) dw$$

Definição 1.4.7. *Uma região U do plano complexo é chamada de simplesmente conexa quando quaisquer dois pares de curvas em U com os mesmos pontos finais são homotópicos.*

Teorema 1.4.2. *Toda função holomorfa em um domínio simplesmente conexo tem uma primitiva.*

Proposição 1.4.2. *Se $\alpha : I \rightarrow \Omega$ é um caminho fechado em Ω homotopicamente nulo, então para qualquer função holomorfa $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ temos*

$$\int_{\alpha} h(w) dw = 0.$$

Corolário 1.4.2.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω é uma região simplesmente conexa, então para todo caminho fechado α em Ω e para qualquer função holomorfa $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ temos*

$$\int_{\alpha} h(w) dw = 0.$$

1.5 Característica de Euler-Poincaré

Sabe-se que o francês Henri Poincaré (1854-1912) contribuiu significativamente em muitas áreas de estudos da Matemática e, em particular, obteve contribuições importantes quando deu origem ao conceito de *homologia*, que tem grande relevância no estudo da topologia das variedades. Não é a intenção discutir densamente a teoria de homologia na sua versão n -dimensional, mas discutir intuitivamente algumas idéias com relação à homologia unidimensional, em superfícies (superfícies simplesmente conexas). O leitor pode consultar [25] para uma leitura aprofundada e por uma abordagem histórica, consultar [31].

O matemático Leonard Euler (1707-1783) obteve classificações de um poliedro $P \subset \mathbb{R}^3$ a partir dos números de vértices (V), arestas (A) e faces (F) dada pela soma alternada destes números cuja fórmula de Euler

$$(1.20) \quad \chi(P) = V - A + F.$$

(cf. [25], p.48) Um poliedro P é formado por simplexos. Um simplexo de dimensão zero é um ponto, de dimensão 1 é um segmento de reta, de dimensão 2 é um triângulo, de dimensão 3 é um tetraedro.

Definição 1.5.1. *Um simplexo s de dimensão n no espaço Euclidiano \mathbb{R}^m ($m \geq n$) é determinado por $n+1$ -vértices $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ tais que os vetores $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0$ sejam linearmente independentes.*

Definição 1.5.2. *Um poliedro P no espaço \mathbb{R}^m é uma coleção finita de simplexos em \mathbb{R}^m tais que:*

1. *Se s é um simplexo de P , então toda face de s também o é;*
2. *Se s' e s'' são simplexos de P então a interseção $s' \cap s''$ é uma face comum a s' e s'' (ou é vazia).*

Segundo Poincaré, se $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots \pm \alpha_n$ são os *números de Betti* do poliedro P , vale a igualdade

$$(1.21) \quad \chi(P) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots (-1)^n \alpha_n.$$

Esta generalização do número de Euler ou característica de Euler para espaços n -dimensionais, chama-se atualmente a *característica de Euler-Poincaré* de P . Em Lima (cf. [25], p.49) o leitor pode consultar as definições complementares que não foram incluídas nesta seção.

Por simplicidade, recorreremos a Do Carmo ([9], p.325) para apresentar definições e resultados sobre *triangulação* em superfícies regulares para caracterizar o invariante topológico, a característica de Euler-Poincaré.

Seja Σ uma superfície regular. Dizemos que uma região conexa $D \subset \Sigma$ é regular se D é compacta e a sua fronteira ∂D é uma reunião finita de curvas regulares por partes fechadas e simples. Por conveniência, vamos considerar uma superfície compacta como uma região regular, cuja fronteira é o conjunto vazio. Para mais detalhes

Definição 1.5.3. *Uma triangulação de uma região regular $D \subset \Sigma$ é uma família finita de \mathcal{T} de triângulos T_i , $i = 1, \dots, n$, tal que*

1. $\bigcup_{i=1}^n T_i = D$
2. Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou um vértice comum de T_i e T_j .

Dada uma triangulação \mathcal{T} de uma região regular $D \subset \Sigma$ de uma superfície Σ , denota-se por F , o número de triângulos (faces), por A , o número de arestas (lados), e por V , o número de vértices da triangulação. O número explicito na Equação (1.20) é a característica de Euler-Poincaré da triangulação.

Teorema 1.5.1. *Toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulação.*

Proposição 1.5.1. *Se $D \subset \Sigma$ é uma região regular de uma superfície Σ , a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação de D . Convém, portanto, denotá-la por $\chi(D)$.*

Exemplo 1.5.1. *A característica de Euler-Poincaré da esfera S^2 e do toro T^2 são, respectivamente, $\chi(S^2) = 2$ e $\chi(T^2) = 0$.*

Definição 1.5.4. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana com a conexão Levi-Civita. Sejam $\gamma : I \rightarrow M^n$ tal que $g(\gamma', \gamma') = 1$ e $\nu \in T_\gamma M^n$ um campo unitário normal a γ . A curvatura geodésica de γ na direção de ν é a função $k_g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$(1.22) \quad k_g = g(\nabla_{\gamma'} \gamma', \nu).$$

Quando k_g é identicamente nula em I , dizemos que γ é uma geodésica de (M^n, g) .

Teorema 1.5.2 (Gauss - Bonnet). *Seja (M, g) uma superfície Riemanniana orientada e sejam C_1, \dots, C_n as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira ∂M de M . Suponha que cada C_i é orientada positivamente e sejam $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ o conjunto de ângulos externos das curvas C_1, \dots, C_n . Se K é a curvatura Gaussiana relativamente à métrica g e k_g é a curvatura geodésica de ∂M na direção normal interior unitária de M ao longo de ∂M .*

Então

$$(1.23) \quad \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_M K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi \chi(M),$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i , $\chi(M)$ é a característica de Euler e a integral sobre C_i significa a soma das integrais em todos os arcos regulares de C_i .

Demonstração. Ver [9]. □

1.6 Métricas conformes

Para cada métrica Riemanniana g em uma variedade diferenciável M , se existe uma função φ suave positiva da variedade M em \mathbb{R} , verifica-se que a nova métrica nesse mesmo espaço $\tilde{g} = e^{2\varphi} g$, também define uma métrica Riemanniana em M .

Definição 1.6.1. *Dizemos que duas métricas Riemannianas g e \tilde{g} em uma variedade diferenciável M são métricas conformes se existe uma função positiva diferenciável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{g} = \mu g$ e $\mu(\varphi) = e^{2\varphi}$ é a mudança conforme. As variedades munidas com as respectivas métricas, (M, g) e (M, \tilde{g}) , são ditas conformes e φ é o fator de conformidade da métrica g para \tilde{g} .*

Definição 1.6.2. *Seja \mathbb{B}_R uma bola aberta Euclidiana com raio $0 < R \leq \infty$ centrada na origem do espaço vetorial \mathbb{R}^{n+1} e $\varphi : \mathbb{B}_R \rightarrow \mathbb{R}$ suave e positiva. Dizemos que a*

variedade Riemanniana $M = (\mathbb{B}_R, \tilde{g})$, onde $\tilde{g} = e^{2\varphi} g$ tal que g é a métrica usual de \mathbb{R}^{n+1} , é conformemente Euclidiana.

Exemplo 1.6.1 (Conexão Riemanniana de uma variedade conformemente Euclidiana). Seja B_R uma bola Euclidiana com raio $0 < R \leq \infty$ centrada na origem de \mathbb{R}^{n+1} e $\varphi : B_R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função radial, significando que existe uma função suave $u : [0, R^2) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = u(|x|^2)$. Observe que,

$$(1.24) \quad \nabla \varphi = 2u'(|x|^2) x,$$

onde $\nabla \varphi$ denota o gradiente de φ . Consideramos a métrica $\bar{g} = e^{2\varphi} g$ em que g é uma métrica Euclidiana, e escrevemos $M = (B_R, \bar{g})$. Denote por ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões Riemannianas de g e \bar{g} , respectivamente. Para todos os campos $X \in \mathfrak{X}(B_R)$, temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X X &= \nabla_X X + g(\nabla \varphi, X)X + g(\nabla \varphi, X)X - g(X, X)\nabla \varphi \\ &= X + 2u'(|x|^2)(g(X, X)X + |x|^2 X - g(X, X)X) \\ &= X + 2u'(|x|^2)|x|^2 X \\ &= \mu(x)X, \end{aligned}$$

onde $|\cdot|$ denota a norma induzida por g e $\mu(x) = 1 + 2u'(|x|^2)|x|^2$ é chamada de função potencial de x .

Exemplo 1.6.2 (Formas Espaciais). Sejam $c \in \mathbb{R}$ e uma função indexada $\varphi_c : \mathbb{B}_R \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_c(x) = \log \frac{1}{1 + \frac{c}{4}|x|^2},$$

onde $R = \infty$, se $c \geq 0$, e $R = \frac{2}{\sqrt{-c}}$, se $c < 0$. Nessa situação, temos que $\mathbb{R}^{n+1} = (\mathbb{B}_R, e^{2\varphi_{c=0}} g)$ é o espaço Euclidiano, $S_c^{n+1} \setminus \{p\} = (\mathbb{B}^{n+1}, e^{2\varphi_c} g)$ é a esfera unitária retirando um dos pólos se $c > 0$ e $\mathbb{H}_c^{n+1} = (\mathbb{B}_R, e^{2\varphi_c} g)$ é o espaço hiperbólico com curvatura seccional constante $c < 0$.

Exemplo 1.6.3. Considerando o semi-espaço do \mathbb{R}^n dado por

$$\mathbb{H}_{-1}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_{n+1} > 0\},$$

e introduzindo em \mathbb{H}_{-1}^{n+1} a métrica

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{x_{n+1}^2} \delta_{ij}.$$

Temos que em $(\mathbb{H}_{-1}^{n+1}, g_{ij})$, tal métrica é conforme à métrica usual g_{ij} de \mathbb{R}^{n+1} , tendo em vista que existe uma função suave e positiva em $F : \mathbb{H}_{-1}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ onde a mudança conforme é dada por $\log F = \varphi$ tal que $F^2 = \frac{1}{x_{n+1}^2}$.

1.7 Condição de Ricci Generalizada

Seja $ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$, onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental.

Definição 1.7.1. *Seja (M, ds^2) uma variedade Riemanniana com uma métrica ds^2 de classe C^4 . Dizemos que em (M, ds^2) satisfaz a condição de Ricci se a curvatura Gaussiana K_s dessa métrica é negativa, $K_s < 0$, e se $(M, d\sigma)$ com a nova métrica $d\sigma^2 = \sqrt{-K_s} ds^2$ é plana, isto é, se $K_\sigma = 0$.*

Ricci foi pioneiro a descobrir que cada métrica ds^2 satisfazendo essa condição pode ser imersa em \mathbb{R}^3 como superfície mínima. A recíproca dessa afirmação também é verdadeira, ou seja, cada métrica ds^2 de uma superfície mínima de curvatura gaussiana negativa em \mathbb{R}^3 satisfaz a condição de Ricci.

Em seguida, antes de enunciar e demonstrar o teorema do Fomenko (2005), eleamos do ponto de vista histórico, os percursos dos autores relacionados aos estudos acerca da Condição de Ricci.

Aminov [4] mencionou sem prova que uma afirmação semelhante vale para superfícies de curvatura média constante $H = H_0$ (constante): "Se (S, ds^2) superfície de curvatura média constante H_0 munida da métrica ds^2 em \mathbb{R}^3 , então a métrica $d\sigma^2 = \sqrt{H_0^2 - K_s} ds^2$ é plana."

Já Pinl [30] mostrou que em \mathbb{R}^4 existem superfícies mínimas em que a condição de Ricci não é satisfeita.

Ao mesmmo tempo, Lawson em [22] e [23]) obteve o seguinte resultado: *Se a curvatura Gaussiana K_s da métrica ds^2 de classe C^4 definida num plano satisfaz a condição $K_s < \frac{1}{r^2}$ para alguma constante $r > 0$ e se a métrica $d\sigma^2 = \sqrt{\frac{1}{r^2} - K_s} ds^2$ for plana, então o par (M, ds^2) pode ser imerso isometricamente como uma família contínua a 1-parâmetro de superfícies mínimas numa esfera euclidiana $S^3(r)$ de curvatura $K_\sigma = \frac{1}{r^2}$.*

Outra condição que pode ser considerada uma análoga à condição de Ricci é a condição de Norden, enuciada da seguinte maneira: *Dizemos que a métrica ds^2 satisfaz a condição de*

Norden, se a curvatura da métrica é negativa, $K_s < 0$, e se a curvatura K_τ da nova métrica $d\tau^2 = -K_s ds^2$ é identicamente igual a 1, $K_\tau \equiv 1$. Norden provou que no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , qualquer superfície de classe C^4 com a métrica satisfazendo tal condição é localmente uma superfície mínima.

Nessa secção, daremos a condição generalizada das condições de Ricci, Norden e Lawson, que são condições necessárias e suficientes para um par (M, ds^2) , onde ds^2 é uma métrica bidimensional de classe C^4 definida num domínio simplesmente conexo, ser isometricamente imerso em um espaço Riemanniano tridimensional $\mathbb{M}_{c_0}^3$ de curvatura seccional c_0 constante como uma superfície de curvatura média constante $H = H_0$. Além disso, estaremos provando o teorema de Fomenko [15], cuja condição de Ricci generalizada é uma consequência imediata dessa afirmação.

Usaremos $\mathbb{M}_{c_0}^3$ para designar uma variedade Riemanniana tridimensional de curvatura seccional constante c_0 , uma forma espacial, H_0 curvatura média constante e α um número real dado.

Teorema 1.7.1 (Fomenko). *Uma métrica ds^2 de classe C^4 definida em um domínio plano simplesmente conexo pode ser mergulhado isometricamente no espaço $\mathbb{M}_{c_0}^3$ como uma superfície com curvatura média constante H_0 e sem pontos umbílicos se, e somente se, a curvatura K_Σ satisfaz a condição $K_\Sigma < H_0^2 + c_0$, a curvatura K_{τ_α} da nova métrica $d\tau_\alpha^2 = (-K_\Sigma + H_0^2 + c_0)^\alpha ds^2$ é calculada pela fórmula*

$$(1.25) \quad K_{\tau_\alpha} = \frac{(1 - 2\alpha)}{(-K_\Sigma + H_0^2 + c_0)^\alpha} K_\Sigma.$$

Essa imersão isométrica de ds^2 em $\mathbb{M}_{c_0}^3$ é realizada, a menos de isometrias, como uma família de 1-parâmetro $\{\Sigma_t(H_0)\}$, $0 \leq t < 2\pi$, de superfícies $\Sigma_t(H_0)$ com curvatura média constante H_0 que são não congruentes aos pares para diferentes valores de t e depende continuamente de t .

Demonstração. Necessidade. Seja $\Sigma(H_0)$ uma superfície CMC H_0 , sem pontos umbílicos, relativa as linhas de curvatura (x, y) (tendo em vista a segunda forma fundamental diagonalizada). Como a superfície $\Sigma(H_0)$ não tem pontos umbílicos, então $K_\Sigma < H_0^2 + c_0$. Ou seja, sendo k_1 e k_2 as curvaturas principais, temos

$$\begin{aligned} 0 < (k_1 - k_2)^2 &= k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2 \\ &= k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2 - 2k_1k_2 - 2k_1k_2 \\ &= (k_1 + k_2)^2 - 4k_1k_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 < \frac{1}{4} (k_1 - k_2)^2 &= \frac{1}{4} [(k_1 + k_2)^2 - 4k_1k_2] \\
 0 < \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 &= \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)^2 - k_1k_2 \\
 &= H_0^2 - \det A \\
 &= H_0^2 - K_\Sigma + c_0.
 \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que é válido a desigualdade $K_\Sigma < H_0^2 + c_0$ fora dos pontos umbílicos.

As formas quadráticas da superfície $S(H_0)$ relativa as linhas de curvaturas (x, y) são da forma

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2, \\
 II &= b_{11}dx^2 + b_{22}dy^2.
 \end{aligned}$$

Denotamos por k_1 e k_2 as curvaturas principais da superfície $\Sigma(H_0)$, de modo que

$$(1.26) \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix},$$

e calculamos

$$(1.27) \quad A = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}^{-1}.$$

E identificaremos, portanto,

$$(1.28) \quad A(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{b_{11}}{g_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{b_{22}}{g_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

é o operador de Weingarten associado a segunda forma fundamental de $\Sigma(H_0)$.

Temos as fórmulas

- a) $k_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}}$ e $k_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}}$;
- b) $K = \det A$ e $H_0 = \frac{1}{2}\text{tr}A$;
- b) $K = K_s - c_0$, $H_0^2 - K = \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2$, onde K é a curvatura extrínseca da superfície $\Sigma(H_0)$.

Por outro lado, denote por G_{ij} os coeficientes da forma quadrática

$$(1.29) \quad d\tau_\alpha^2 = (-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha ds^2.$$

Dessa forma, veja que os coeficientes da nova métrica satisfazem $G_{ij} = (-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha g_{ij}$, sempre que $i = j$ e $G_{ij} = 0$, $i \neq j$ quando $i \neq j$. Verifica-se que $(H_0 - k_1)^{2\alpha} = (H_0 - k_2)^{2\alpha} = (-K_s + H_0^2 + c_0)^\alpha$.

Então temos,

$$\begin{aligned} G_{11} &= (H_0 - k_1)^{2\alpha} g_{11} \\ G_{22} &= (H_0 - k_2)^{2\alpha} g_{22} \\ G_{12} &= 0 = G_{21}. \end{aligned}$$

A curvatura K_{τ_α} (9, Exercício 1 e 2, p. 283) da métrica $d\tau_\alpha^2$ é calculada usando a fórmula

$$K_{\tau_\alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{G_{11}G_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G_{11}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{G_{11}G_{22}}} \frac{\partial G_{22}}{\partial x} \right) \right\}.$$

Por simplicidade, faremos o uso da equação de Mainardi-Codazzi (cf. [9]), dadas por

$$\begin{aligned} e_y &= \frac{E_y}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right), \\ g_x &= \frac{G_x}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right), \end{aligned}$$

que assumem a forma

$$\begin{aligned} (b_{11})_y &= \frac{(g_{11})_y}{2} (k_1 + k_2), \\ (b_{22})_x &= \frac{(g_{22})_x}{2} (k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Como os coeficientes da *primeira e segunda formas fundamentais* são funções diferenciáveis, então as curvaturas principais também são diferenciáveis. Desenvolvendo as respectivas derivadas do lado esquerdo das igualdades acima, temos

$$\frac{\partial k_1}{\partial y} = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial y} (k_2 - k_1),$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial x} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x} (k_1 - k_2).$$

Derivando adequadamente e substituindo os termos encontrados na fórmula de $K_{\tau\alpha}$, obtemos:

$$\begin{aligned} K_{\tau\alpha} &= -\frac{1}{2} \frac{(1-2\alpha)}{(-K_{\Sigma} + H_0^2 + c_0)^\alpha \sqrt{g_{11}g_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial g_{11}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x} \right] \right\} \\ &= \frac{(1-2\alpha)K_{\Sigma}}{(-K_{\Sigma} + H_0^2 + c_0)^\alpha}, \end{aligned}$$

onde

$$(1.30) \quad K_{\Sigma} = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial g_{11}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x} \right\}.$$

Completando o que queríamos provar. Por outro lado, o leitor pode consultar a prova da recíproca do Teorema em [15].

Suficiência. Seja a métrica ds^2 em coordenadas isotérmicas. Podemos escrever $ds^2 = E(x, y)(dx^2 + dy^2)$, $(x, y) \in D$, onde D é um certo domínio plano paramétrico simplesmente conexo.

Aqui b_{11} , b_{12} e b_{22} são funções desconhecidas, elas serão os coeficientes da segunda forma quadrática. Por essa razão, defina $\Phi : D \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\Phi(z) = M_0 + i\Lambda_0$, onde $z = x + iy$ e $i^2 = -1$. De maneira esperta, defina também os coeficientes b_{ij} relacionados pela equação

$$(1.31) \quad b_{11} + b_{22} = 2H_0E,$$

de modo que tais coeficientes são configurados da seguinte forma: $b_{11} = \Lambda_0 + H_0E$, $b_{12} = M_0$ e $b_{22} = -\Lambda_0 + H_0E$.

Afirmção: a função Φ é holomorfa. Com efeito, tal função numa vizinhança do domínio não se anula, zeraria nos pontos umbílicos, mas eles não existem. Note que

$$(1.32) \quad |\Phi(z)|^2 = M_0^2 + \Lambda_0^2 := E^2(-K_s + H_0^2 + c_0).$$

Então $\Phi(z)$ é sempre positiva. Como do lado direito é uma relação conhecida, ela pode ser o quadrado do módulo de uma função holomorfa.

Veja que o sistema de equações Gauss-Codazzi é satisfeito:

$$(1.33) \quad \det(II) = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -(\Lambda_0^2 + M_0^2) + H_0^2E = (K_s - c_0)E^2,$$

$$(1.34) \quad K_s = -\frac{1}{2E} \Delta \ln E,$$

$$(1.35) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

$$(1.36) \quad (\mathbf{b}_{11} - \mathbf{E}H_0)_y - (\mathbf{b}_{12})_x = 0,$$

$$(1.37) \quad (\mathbf{b}_{22} - \mathbf{E}H_0)_x - (\mathbf{b}_{12})_y = 0.$$

As duas últimas equações, as equações de Codazzi, são as equações de Cauchy-Riemann.

Em outras palavras, devemos verificar que $\ln(\mathbf{E}^2(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0))$ é uma função harmônica sob as hipóteses do teorema, no intuito de fazer sentido a igualdade (1.32). Para isso, calcularemos o Laplaciano $\Delta \ln(\mathbf{E}^2(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0))$.

Como $\mathbf{K}_s = -\frac{1}{2\mathbf{E}} \Delta \ln \mathbf{E}$ e temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \Delta \ln(\mathbf{E}^2(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0)) &= 2 \Delta \ln \mathbf{E} + \Delta \ln(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0) \\ &= -4\mathbf{E}\mathbf{K}_s + \Delta \ln(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0). \end{aligned}$$

Agora, obteremos a curvatura \mathbf{K}_{τ_α} da métrica $d\tau_s^2 = (-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0)^\alpha ds^2$ em coordenadas isotérmicas. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\tau_s} &= -\frac{1}{2(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0)^\alpha \mathbf{E}} \Delta \ln((-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0)^\alpha \mathbf{E}), \\ &= -\frac{1}{2(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0)^\alpha \mathbf{E}} [\alpha \Delta (-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0) + \Delta \ln(\mathbf{E})] \\ &= -\frac{1}{2(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0)^\alpha \mathbf{E}} [\alpha (-4\mathbf{E}\mathbf{K}_s + \Delta(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0)) + 4\mathbf{E}\mathbf{K}_s \alpha + \Delta \ln(\mathbf{E})] \\ &= \frac{(1 - 2\alpha)\mathbf{K}_s}{(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0)^\alpha} + \frac{\alpha [\Delta \ln(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0) - 4\mathbf{E}\mathbf{K}_s]}{2(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0)^\alpha \mathbf{E}}. \end{aligned}$$

Usamos uma propriedade usual de logaritmo, a linearidade do operador Laplaciano e acrescentamos zeros convenientemente na terceira igualdade acima. Pela hipótese do teorema, sabemos que

$$\mathbf{K}_{\tau_s} = \frac{(1 - 2\alpha)\mathbf{K}_s}{(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0)^\alpha},$$

e, obtemos que $\alpha [\Delta \ln(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0) - 4\mathbf{E}\mathbf{K}_s] = 0$. E como $\alpha \neq 0$, segue que

$$\Delta \ln(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0) - 4\mathbf{E}\mathbf{K}_s = 0.$$

Portanto, a função $\ln \mathbf{E}^2(-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0)$ é harmônica. Contudo, a equação 1.32 satisfaz

$$(1.38) \quad |\Phi(z)| = \mathbf{E} \sqrt{-\mathbf{K}_s + H_0^2 + \mathbf{c}_0}.$$

sempre que $z \in D$.

Conhecendo $|\Phi(z)|$, encontramos $\Phi(z) = |\Phi(z)|\exp(i \arg\Phi(z))$, tal que

$$(1.39) \quad \arg\Phi(z) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [-(\ln|\Phi(z)|)_y dx + (\ln|\Phi(z)|)_x dy] + t,$$

onde (x_0, y_0) é um certo ponto fixo de D , $z = x + iy$ e t um parâmetro real tal que $0 \leq t < 2\pi$; a integral tomada ao longo de um caminho arbitrário que une o ponto (x_0, y_0) ao (x, y) . Pela simples conexidade do domínio D tendo em vista que usamos funções holomorfas para definir as coordenadas da imersão, então as integrais complexas ficam bem definidas ao longo desse domínio. A integral curvilínea em (1.39) não depende da integração do caminho, e, portanto existe.

Sabendo da função $\Phi(z)$, podemos determinar os coeficientes unicamente pelas fórmulas,

$$\begin{aligned} b_{11} &= \operatorname{Im}\Phi(z) + H_0 E, \\ b_{12} &= \operatorname{Re}\Phi(z), \\ b_{22} &= -\operatorname{Im}\Phi(z) + H_0 E, \end{aligned}$$

onde esses coeficientes b_{ij} dependem continuamente do parâmetro t . Significando que para todos os valores fixados de t nesse intervalo, sempre que $(x, y) \in D$ as formas quadráticas são dadas por

$$\begin{aligned} ds^2 &= E(dx^2 + dy^2) \\ II &= b_{11}dx^2 + 2b_{12}dx dy + b_{22}dy^2. \end{aligned}$$

define em $\mathbb{M}_{c_0}^3$ uma superfície $\Sigma_t(H_0)$ de curvatura média constante única por isometrias. O conjunto $\{\Sigma_t(H_0), 0 \leq t < 2\pi\}$, é uma família de superfícies obtidas continuamente dependendo do parâmetro t e exaure todas as possibilidades de imergir ds^2 em $\mathbb{M}_{c_0}^3$ como superfícies CMC $H = H_0$ (constante). Isso completa a prova. □

Observe que o caso em que $\alpha = \frac{1}{2}$, $H_0 = 0$, $c_0 = 0$, a afirmação coincide com a condição de Ricci; o caso $\alpha = 1$, $H_0 = 0$, $c_0 = 0$, com o resultado de Norden; o caso $\alpha = \frac{1}{2}$, $H_0 = 0$, $c_0 = \frac{1}{r^2}$, com o resultado de Lawson, e para $\alpha = \frac{1}{2}$, $H_0 \neq 0$, $c_0 = 0$, obtemos a afirmação mencionada por Aminov.

Os casos especiais do teorema acima são as condições generalizadas de Ricci e Norden.

Corolário 1.7.1.1 (Condição de Ricci Generalizada). *Seja H_0 e c_0 números reais dados. Uma métrica ds^2 de classe C^4 com a curvatura K_s , $K_s < H_0^2 + c_0$, definido num*

domínio plano simplesmente conexo pode ser imerso no espaço $\mathbb{M}_{c_0}^3$ como uma superfície de curvatura média constante H_0 sem pontos umbilicos se, e somente se, a métrica $d\sigma^2 = \sqrt{-K_s + H_0^2 + c_0} ds^2$ é plana, isto é, a curvatura K_σ da métrica $d\sigma^2$ é identicamente zero, $K_\sigma \equiv 0$.

Por Kazdan e Warner ([20], 1975), a mudança conforme da métrica K_Σ para K_σ de variedades bidimensionais é dada pela equação diferencial

$$K_\sigma = -e^{-2u} (\Delta u - K_\Sigma)$$

onde $u(K_\Sigma) = -\frac{1}{4} \log(-K_\Sigma + H_0^2 + c_0)$ é uma função suave e positiva. Como a curvatura $K_\sigma \equiv 0$ e considerando uma mudança de variável, tomando $\lambda = -K_\Sigma + H_0^2 + c_0$, temos a equação diferencial, sempre que $K_\Sigma < H_0^2 + c_0$, obtida por $\Delta \log(-K_\Sigma + H_0^2 + c) = 4K_\Sigma$, pois $e^{-2u} > 0$ (sempre). Portanto, por essa mudança conforme da métrica a equação diferencial generalizada para imersões de curvatura média constante em formas espaciais é dada por:

$$(1.40) \quad (-K_\Sigma + H_0^2 + c_0) \Delta K_\Sigma + \|\nabla K_\Sigma\|^2 + 4(-K_\Sigma + H_0^2 + c_0)^2 K_\Sigma = 0.$$

Note que, caso $H_0^2 + c_0 = 0$ tal equação coincide com a equação diferencial para a condição suficiente no \mathbb{R}^3 obtida pelos irmãos Moroianu's (2015) a qual é discutida na próxima seção.

Corolário 1.7.1.2 (Condição de Norden Generalizado). *Uma métrica ds^2 de classe C^4 com curvatura $K_s < 0$, definido num domínio plano simplesmente conexo pode ser imerso isometricamente no espaço $\mathbb{M}_{c_0}^3$ de curvatura seccional $c_0 < 0$ como uma superfície de curvatura média constante $H = \sqrt{-c_0}$ sem pontos umbilicos se, e somente se, a a curvatura K_τ e a métrica $d\tau^2 = (-K_s) ds^2$ é identicamente igual a 1, $K_\tau \equiv 1$.*

1.7.1 Desigualdade de Simons e a Condição de Ricci.

O objetivo dessa secção é relacionar a Desigualdade de Simons e a condição de Ricci (existência) no caso de mínimas baseado em [12]. Demonstraremos a Desigualdade de Simons para hipersuperfícies na forma espacial $\mathbb{M}_{c=0}^{n+1}$, isto é, sendo $c = 0$, então $\mathbb{M}_{c=0}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, o espaço euclidiano $(n + 1)$ -dimensional. Particularmente, estamos interessados nas imersões $f : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{M}^{n+1}$ cuja codimensão é 1, as hipersuperfícies.

Denotamos em 1.3.1 o operador Weingarten por S segundo a hipersuperfície Σ dada por $S : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$ tal que $\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle \alpha(x, y), \eta \rangle$ associado a segunda forma

fundamental α de f cuja curvatura média H é definida por $H = \text{tr } S$. Considere o tensor de umbilicidade ϕ sem traço associado à segunda forma fundamental dado na Definição 1.3.7.

Considere o polinômio p_H Alencar-Do Carmo associado a curvatura média da imersão e à curvatura seccional da referida forma espacial definido por

$$(1.41) \quad p_H(t) = t^2 + \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|H|t - \frac{H^2}{n} - nc.$$

Tal polinômio surge em resultados de rigidez sobre a curvatura escalar como pode ser visto em Alencar e Do Carmo (1994) (cf. [1] e [2]), por exemplo, aparece na prova do Teorema 1.5 de [2].

Enunciaremos alguns lemas importantes que nos ajudam a construir e entender demonstração mencionada.

Lema 1.7.1 (Desigualdade de Kato). *(Calderbank et al., 1999) A segunda forma fundamental ϕ de qualquer imersão satisfaz a seguinte estimativa:*

$$(1.42) \quad |\nabla|\phi|| \leq \sqrt{\frac{n}{n+2}}|\nabla\phi|.$$

Lema 1.7.2 (Okumura). *Seja $\sigma_j, j = 1, \dots, n$ números reais tais que $\sum_j \sigma_j = 0$ e $\sum_j \sigma_j^2 = \beta^2$ com $\beta = \text{const} \geq 0$. Então*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \leq \sum_j \sigma_j^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, pelo menos $(n-1)$ dos números σ_j são iguais.

Teorema 1.7.2 (Do Carmo, M. Dajczer, 1993, p.701). *Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície arbitrária. Se as curvaturas principais k_1, \dots, k_n de f satisfaz $k_1 = \dots = k_{n-1} = \lambda \neq 0$, $k_n = -\mu = -\mu(\lambda)$, e $\lambda - \mu \neq 0$. Então $f(M^n)$ está contido em uma hipersuperfície de rotação.*

Teorema 1.7.3 (Tipo Simons-Alencar e Do Carmo). *Seja $f : \Sigma^n \rightarrow M_c^{n+1}$ uma imersão isométrica em uma forma espacial M_c^{n+1} com curvatura média constante H , então os pontos de Σ satisfaz*

$$(1.43) \quad |\phi|^2 p_H(|\phi|) \geq \frac{n+2}{n}|\nabla_\Sigma|\phi||^2 - \frac{1}{2}\Delta_\Sigma|\phi|^2,$$

onde ϕ é o tensor de umbilicidade. Além disso, se $n \geq 3$ e Σ uma hipersuperfície não totalmente umbílica, a igualdade ocorre se, e somente se

1. $f(\Sigma^n)$ é um catenóide, quando $H = 0$ e $c \leq 0$;
2. $f(\Sigma^n)$ é um toro de Clifford ou uma hipersuperfície de Otsuki, quando $H = 0$ e $c > 0$;
3. $f(\Sigma^n)$ é uma hipersuperfície de Delaunay, quando $H \neq 0$

Demonstração. Seja a base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de $T\Sigma$ que diagonaliza o tensor ϕ em todos os pontos de Σ , do clássico Teorema Espectral segue que $\phi e_j = \sigma_j e_j$ tal que $1 \leq j \leq n$.

Chen e Yau (1977) obtiveram o Laplaciano de um tensor simétrico ϕ , simplificado na Equação (2.8) de seu artigo, dado por

$$(1.44) \quad \frac{1}{2} \Delta_\Sigma |\phi|^2 = \sum_{i,j,l} \phi_{ijl}^2 + \sum_i \sigma_i (\text{tr} \phi)_{ijl} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} K(e_i, e_j) (\sigma_i - \sigma_j)^2,$$

onde $K(e_i, e_j)$ é a curvatura seccional constante gerado pela base $\{e_i, e_j\}$ do plano, ϕ_{ijl} são as componentes da derivada covariante de ϕ , podendo ser reescrito como $\phi_{ijl}^2 = |\nabla_\Sigma \phi|^2$. Se denotamos k_1, \dots, k_n como as curvaturas principais de Σ , e além disso, $\sigma_i = k_i - \frac{H}{n}$, então sabemos que $\text{tr} \phi = 0$, pois

$$\text{tr} \phi = \text{tr} \left(S - \frac{H}{n} I \right) = \text{tr} S - \frac{H}{n} \text{tr} I = \sigma_i k_i - \sigma_i k_i = 0.$$

No entanto, a equação acima reduz-se a

$$(1.45) \quad \frac{1}{2} \Delta_\Sigma |\phi|^2 = |\nabla_\Sigma \phi|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} K(e_i, e_j) (\sigma_i - \sigma_j)^2.$$

Usando a fórmula de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned} K(e_i, e_j) &= k_i k_j, \\ &= \left(\sigma_i + \frac{H}{n} \right) \left(\sigma_j + \frac{H}{n} \right), \\ &= \sigma_i \sigma_j + \frac{H}{n} (\sigma_i + \sigma_j) + \frac{H^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Por meio de cálculos diretos, reescrevemos $\frac{1}{2} \sum_{i,j} K_{ij} (\sigma_i - \sigma_j)^2$ em termos do $|\phi|$ e H .

Então,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n K_{ij} (\sigma_i - \sigma_j)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\sigma_i \sigma_j + \frac{H}{n} (\sigma_i + \sigma_j) + \frac{H^2}{n^2} \right) (\sigma_i - \sigma_j)^2, \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\sigma_i^3 \sigma_j - 2\sigma_i^2 \sigma_j^2 + \sigma_i \sigma_j^3) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{H}{n} \sum_{i,j=1}^n (\sigma_i^3 - 2\sigma_i^3 \sigma_j^2 + \sigma_i \sigma_j^2 + \sigma_j \sigma_i^2 - 2\sigma_i^2 \sigma_j^3 + \sigma_j^3) \\
 &\quad + \frac{H^2}{n^2} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\sigma_i^2 - 2\sigma_i \sigma_j + \sigma_j^2), \\
 &= -|\phi|^4 + H \sum_{i,j=1}^n \sigma_i^3 + \frac{H^2}{n} |\phi|^2.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$(1.46) \quad \frac{1}{2} \Delta_{\Sigma} |\phi|^2 = |\nabla_{\Sigma} \phi|^2 - |\phi|^4 + H \sum_{i,j=1}^n \sigma_i^3 + \frac{H^2}{n} |\phi|^2.$$

Através de 1.7.1, 1.7.2 estimaremos a primeira e a terceira parcela, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \Delta_{\Sigma} |\phi|^2 &= |\nabla_{\Sigma} \phi|^2 - |\phi|^4 + H \sum_{i,j=1}^n \sigma_i^3 + \frac{H^2}{n} |\phi|^2, \\
 &\geq \frac{n+2}{n} |\nabla_{\Sigma} |\phi||^2 - |\phi|^4 + H \sum_{i,j=1}^n \sigma_i^3 + \frac{H^2}{n} |\phi|^2, \\
 &\geq \frac{n+2}{n} |\nabla_{\Sigma} |\phi||^2 - |\phi|^4 - \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} |H| |\phi|^3 + \frac{H^2}{n} |\phi|^2, \\
 &= \frac{n+2}{n} |\nabla_{\Sigma} |\phi||^2 - |\phi|^2 \left[|\phi|^2 + \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} |H| |\phi| - \frac{H^2}{n} |\phi|^2 \right], \\
 &= \frac{n+2}{n} |\nabla_{\Sigma} |\phi||^2 - |\phi|^2 p_H(|\phi|).
 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$(1.47) \quad |\phi|^2 p_H(|\phi|) \geq \frac{n+2}{n} |\nabla_{\Sigma} |\phi||^2 - \frac{1}{2} \Delta_{\Sigma} |\phi|^2.$$

Por outro lado, supondo $n \geq 3$ e a igualdade para ϕ não identicamente nula em Σ :

- a) quando $H = 0$ teremos um catenóide sempre que $c \leq 0$ (cf. [37, Teorema 3.1]);
- b) quando $H = 0$ e $c > 0$, um toro de Clifford ou uma hipersuperfície mínima de Otsuki (cf. [38, Teorema 1.1]);

c) quando $H \neq 0$ e como na desigualdade de Okumura vale a igualdade, uma das curvaturas principais tem multiplicidade 1 e as outras multiplicidade $n-1$, consequentemente Σ é uma hipersuperfície de Delaunay (cf. [11, Teorema 4.2]).

□

As superfícies de Delaunay são construídas rolando uma cônica ao longo de uma linha reta no plano e tomando o traço de um dos focos. Isso é chamado uma *roulette* da cônica. Este traço descreve então uma curva planar que é girada em torno do eixo ao longo do qual foi rolada. Isso dá uma superfície de revolução com curvatura média constante (superfícies de Delaunay). Para mais detalhes, o leitor pode consultar [14] e [27].

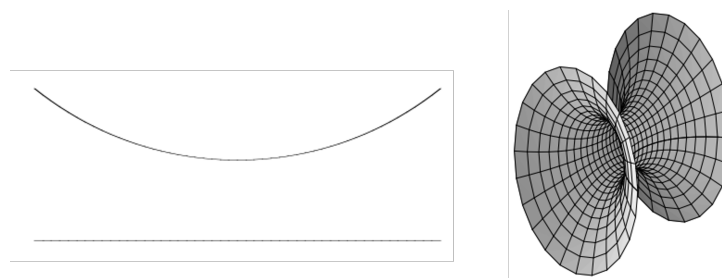


Figura 1.2: A catenária e a porção de um catenóide, respectivamente.

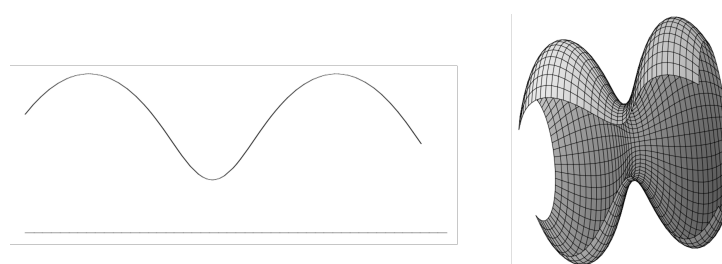


Figura 1.3: A ondulária e a porção de um ndulóide, respectivamente.

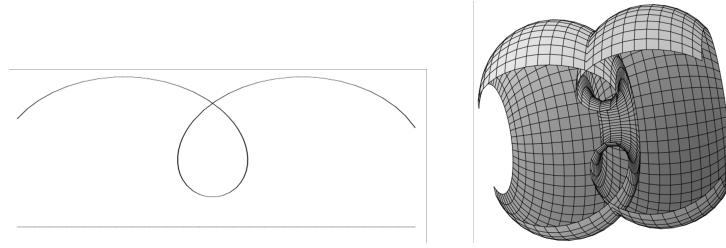


Figura 1.4: A nodária e a porção de um nodóide, respectivamente.

Agora, temos uma condição necessária para a existência de imersões mínimas mergulhadas \mathbb{R}^3 que é classicamente chamada Condição de Ricci e entenderemos a sua relação com a Desigualdade de Simons.

Teorema 1.7.4 (Condição de Ricci-Moroianu, A. e Moroianu S.). *Se existir uma imersão isométrica mínima Σ^2 em \mathbb{R}^3 , então vale a equação diferencial $K_\Sigma \Delta K_\Sigma - \|\nabla K_\Sigma\|^2 - 4K_\Sigma^3 = 0$ e $K_\Sigma < 0$.*

Demonstração. Sabemos que a curvatura média H de Σ^2 é dada por $2H = k_1 + k_2$ e a curvatura Gaussiana $\det S = k_1 k_2$, quadrado da norma da segunda forma é dada $|S|^2 = k_1^2 + k_2^2$, onde S é o operador simétrico de Weingarten associado a segunda forma fundamental. Inferindo-se sobre isso temos

$$\begin{aligned} (2H)^2 &= (k_1 + k_2)^2 \\ 4H^2 &= k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \\ 4H^2 &= |S|^2 + 2K_\Sigma \end{aligned}$$

Em particular, quando a imersão for mínima, teremos $|S|^2 = -2K_\Sigma$. E isso quer dizer, como o quadrado da segunda forma resulta em $-2K_\Sigma > 0$, logo a curvatura Gaussiana tem que assumir $K_\Sigma < 0$.

Por outro lado, precisamos calcular o $\Delta^\Sigma \log(f)$. Sabemos que $\Delta^\Sigma f = \operatorname{div}^\Sigma \nabla f$. Derivaremos a função $\log(f)$ em relação a um campo tangente $T\Sigma$ e usando a Regra da Cadeia obtemos

$$(1.48) \quad X(\log f) = \frac{1}{f} X(f),$$

que com outra notação em relação campo gradiente ao campo de vetor X , temos

$$\langle \nabla \log f, X \rangle = \frac{1}{f} \langle \nabla f, X \rangle,$$

que equivale a

$$(1.49) \quad \nabla \log f = \frac{1}{f} \nabla f.$$

Assim, calculando o $\Delta \log(f)$ obtemos

$$(1.50) \quad \begin{aligned} \Delta \log(f) &= \operatorname{div}(\nabla \log f) \\ &= \operatorname{div}\left(\frac{1}{f} \nabla f\right) \end{aligned}$$

$$(1.51) \quad = \frac{1}{f} \operatorname{div} \nabla f + \left\langle \nabla\left(\frac{1}{f}\right), \nabla f \right\rangle$$

$$(1.52) \quad = \frac{1}{f} \Delta f - \frac{1}{f^2} \langle \nabla f, \nabla f \rangle$$

$$(1.53) \quad = \frac{1}{f} \Delta f - \frac{1}{f^2} \|\nabla f\|^2$$

$$(1.54) \quad f^2 \Delta \log(f) = f \Delta f - \|\nabla f\|^2$$

Sabemos que a equação de Simons para superfícies ($\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$) é exatamente $\Delta \log(|S|^2) = -2|S|^2$ (cf. [8, Secção 1.1]). Então, substituindo $|S|^2$ adequadamente na igualdade (1.55) acima, temos

$$\begin{aligned} |S|^4 \Delta \log(|S|^2) &= |S|^2 \Delta |S|^2 - 2|\nabla |S|^2|^2 \\ |S|^4(-2|S|^2) &= |S|^2 \Delta |S|^2 - 2|\nabla |S|^2|^2 \\ -2|S|^6 &= |S|^2 \Delta |S|^2 - 2|\nabla |S|^2|^2 \end{aligned}$$

Além disso, substituindo também $|S|^2 = -2K_\Sigma$ obtemos:

$$16K_\Sigma^3 = 4K_\Sigma \Delta K_\Sigma - 4\|\nabla K_\Sigma\|^2.$$

E, finalmente

$$(1.55) \quad K_\Sigma \Delta K_\Sigma - \|\nabla K_\Sigma\|^2 - 4K_\Sigma^3 = 0.$$

□

Capítulo 2

Os Resultados do Tipo Lawson-Sakaki.

Neste capítulo, estudaremos os teoremas de Lawson, em [23] e [34] enfatizando as superfícies mínimas com a condição de Ricci em formas espaciais.

2.1 Exemplos de Imersões Mínimas com a Condição de Ricci.

Lembramos que para uma métrica Riemanniana bidimensional ds^2 satisfazer a condição de Ricci com respeito a curvatura seccional c , a curvatura Gaussiana K_s satisfaz $K_s < c$ e a nova métrica $d\tau^2 = \sqrt{c - K_s} ds^2$ é plana.

Denote por M_c^n a forma espacial simplesmente conexa n -dimensional de curvatura seccional c , e em particular, $\mathbb{R}^n = M_0^n$. A métrica induzida ds^2 de uma superfície mínima em M_c^3 satisfaz a condição de Ricci com respeito a c , exceto nos pontos onde a curvatura Gaussiana coincide com c . Reciprocamente, assumindo que a métrica Riemanniana ds^2 em uma variedade bidimensional simplesmente conexa, Σ , satisfaz a condição de Ricci com respeito a c , então existe uma família suave 2π -periódica de imersões isométricas mínimas $f_\theta : (\Sigma, ds^2) \rightarrow M_c^3$, onde $\theta \in \mathbb{R}$, que chamamos de *família associada*. As aplicações f_θ , $0 \leq \theta < \pi$, representam todas as imersões isométricas mínimas locais de (Σ, ds^2) em M_c^3 .

Dessa forma, considerar em determinar as superfícies mínimas em M_c^n cujas métricas induzidas satisfazem a condição de Ricci com respeito a c ou, equivalentemente, determinar as superfícies mínimas em M_c^n que são localmente isométricas a superfícies mínimas em M_c^3

é o principal objetivo nessa seção.

Definição 2.1.1. Dizemos que uma subvariedade em \mathbb{M}_c^n é essencial em \mathbb{M}_c^n se não está em uma subvariedade totalmente geodésica de \mathbb{M}_c^n .

Denote por $\mathcal{S}(n, c)$ o conjunto de todas as estruturas Riemannianas de superfícies mínimas essenciais em \mathbb{M}_c^n . Então, o problema consiste em determinar a intersecção de $\mathcal{S}(3, c)$ e $\mathcal{S}(n, c)$, onde $n \geq 3$.

Do ponto de vista métrico, os elementos de $\mathcal{S}(n, c)$ são indistinguíveis. Alterando corretamente a métrica e o operador forma, continuará satisfazendo as equações de Gauss-Codazzi. Ou seja, se existe uma imersão mínima, então conseguimos uma família de imersões mínimas indexadas por um parâmetro.

Exemplo 2.1.1 (Lawson). Com a família associada $f_\theta : (\Sigma, ds^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ podemos construir imersão isométrica mínima $f : (\Sigma, ds^2) \rightarrow \mathbb{R}^6$ definida por

$$(2.1) \quad f = f_\theta \cos\varphi \oplus f_{\theta+\frac{\pi}{2}} \sin\varphi,$$

onde \oplus é uma soma direta da decomposição ortogonal $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$. Esse fato nos diz que a métrica induzida por f é ds^2 , satisfaz a condição de Ricci com respeito a $c = 0$, exceto nos pontos onde $K_\Sigma = 0$. Em geral, $f(\Sigma)$ é essencial em \mathbb{R}^6 , se $\varphi \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$.

Exemplo 2.1.2. Se $c > 0$ e temos $f_\theta : (\Sigma, ds^2) \rightarrow \mathbb{M}_c^3(\subset \mathbb{R}^4)$, uma família associada, podemos construir imersão isométrica mínima

$$f : (\sigma, ds^2) \rightarrow \mathbb{M}_c^{4m+3}(\subset \mathbb{R}^{4m+4}),$$

definido por

$$f = a_0 f_{\theta_0} \oplus \dots \oplus a_m f_{\theta_m},$$

onde $\sum_{j=1}^m a_j^2 = 1$, $0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < \pi$, cada f_{θ_j} é visto em \mathbb{R}^4 de modo que $|f_{\theta_j}| = \frac{1}{\sqrt{c}}$ e $\mathbb{R}^{4m+4} = \mathbb{R}^4 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^4$ é uma decomposição ortogonal. Então, a métrica induzida por f é ds^2 , a condição de Ricci é satisfeita com respeito a c , exceto nos pontos onde $K_\Sigma = c$. E, em geral, $f(\Sigma)$ é essencial em \mathbb{M}_c^{4m+3} .

Exemplo 2.1.3 (Bryant-1985, Kenmotsu-1976). Toda métrica bidimensional plana satisfaz automaticamente a condição de Ricci com respeito a $c > 0$ e existem superfícies mínimas planas que são essenciais em \mathbb{M}_c^{2n+1} , onde $c > 0$.

2.2 Imersões mínimas com a condição de Ricci em formas espaciais.

Para o caso Euclidiano, $c=0$, Lawson resolveu o problema completamente como vemos no

Teorema 2.2.1 (Sakaki-Lawson). *Seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão mínima de uma variedade bidimensional Σ em \mathbb{R}^n . Suponha que a métrica induzida ds^2 satisfaz a condição de Ricci com relação a $c = 0$ exceto nos pontos isolados onde a curvatura Gaussiana é nula. Então, ou*

- a) $f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$ totalmente geodésico do \mathbb{R}^n , ou
- b) $f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^6$ totalmente geodésico do \mathbb{R}^n e f é da forma dada no Exemplo 2.1.1 para $\varphi \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$.

Demonstração. Ver [23]

□

Observação 2.2.1. $\mathcal{S}(3,0)$ e $\mathcal{S}(n,0)$ são disjuntos se $n = 4$, $n = 5$ ou $n \geq 7$, e, além disso, pelo Exemplo 2.1.1, $\mathcal{S}(3,0)$ está incluído em $\mathcal{S}(6,0)$.

Considerando o caso esférico, $c > 0$, Lawson (1971) mostrou que uma imersão mínima $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}_c^n$ de uma variedade bidimensional Σ em \mathbb{M}_c^n , supondo que a métrica induzida ds^2 satisfaz a condição de Ricci com respeito a c , exceto nos pontos isolados em que a curvatura Gaussiana $K_\Sigma = c$. Então f deve ser da forma

$$f = a_0 f_{\theta_0} \oplus \dots \oplus a_m f_{\theta_m}.$$

A solução dessa conjectura, Sakaki ([34], 1994) considera classificar as superfícies mínimas em $\mathbb{M}_{c_0}^3$ resolvendo o caso para $n = 4$.

Teorema 2.2.2 (Sakaki-1994). *Seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}_c^4$ uma imersão mínima de uma variedade bidimensional Σ em \mathbb{M}_c^4 . Suponha que a métrica ds^2 satisfaz a condição de Ricci com respeito a c exceto nos pontos isolados em que a curvatura Gaussiana $K_\Sigma = c$. Então $f(\Sigma)$ está em \mathbb{M}_c^3 totalmente geodésico.*

Este teorema nos diz que

Observação 2.2.2. a) $\mathcal{S}(3,c)$ e $\mathcal{S}(4,c)$ são disjuntos;

- b) quando $c = 0$, este resultado está incluído em Lawson (1971);
- c) o caso onde $c > 0$, este resultado não é verdade se substituirmos \mathbb{M}_c^4 por \mathbb{M}_c^5 .

Com uma hipótese adicional, dada por Sakaki em [33], encontramos um resultado para codimensões arbitrárias.

Teorema 2.2.3. *Seja Σ uma superfície mínima em \mathbb{M}_c^n com a curvatura Gaussiana K_Σ com respeito a métrica induzida ds^2 . Suponha que a nova métrica $d\tau^2 = \sqrt{c - K}ds^2$ é plana nos pontos onde $K_\Sigma < c$ e a curvatura escalar normal de Σ é constante. Então*

- a) Σ está em \mathbb{M}_c^3 totalmente geodésico; ou
- b) $c > 0$ e Σ é plana.

Capítulo 3

Imersões de Curvatura Média Constante de Fronteira Livre na Bola de Formas Espaciais.

Neste capítulo, estudaremos imersões de curvatura média constante (resp. mínima) de fronteira livre na bola unitária $n+1$ -dimensional B^{n+1} da forma espacial \mathbb{M}_c^{n+1} , $c \in \{-1, 0, 1\}$.

Definição 3.0.1. *Sejam (Σ^k, g) e $(\bar{\Sigma}^{n+1}, \bar{g})$ duas variedades Riemannianas compactas. Dizemos que $f : (\Sigma^k, g) \rightarrow (\bar{\Sigma}^{n+1}, \bar{g})$ é uma imersão (isométrica) de curvatura média constante de bordo livre se:*

- a) $f(\text{int}(\Sigma^k)) \subset \text{int}(\bar{\Sigma}^{n+1})$ e $f(\partial\Sigma^k) \subset \partial\bar{\Sigma}^{n+1}$;
- b) o ângulo de contato entre $f(\Sigma^k)$ e $\partial\bar{\Sigma}^{n+1}$ é igual a $\frac{\pi}{2}$.

Quando $\bar{\Sigma}^{n+1} = B^{n+1}$ dizemos que f é uma imersão de curvatura média constante $H \neq 0$ de bordo livre na bola de uma forma espacial \mathbb{M}_c^{n+1} . Em particular, $H = 0$, dizemos que f é uma imersão mínima de fronteira livre na bola B^{n+1} de uma forma espacial \mathbb{M}_c^{n+1} .

Definição 3.0.2. *Dizemos que f será uma imersão de curvatura média constante ou mínima **própria** quando o $\text{int}f(\Sigma^k)$ não toca ∂B^{n+1} .*

Exemplo 3.0.1. *Disco Equatorial ($H = 0$). Seja a bola B^{n+1} Euclidiana fechada, unitária e centrada na origem da forma espacial $\mathbb{M}_{c=0}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$. Os subespaços vetoriais contidos no \mathbb{R}^{n+1} intersectados com a bola B^{n+1} são os **discos equatoriais**, resultado da interseção*

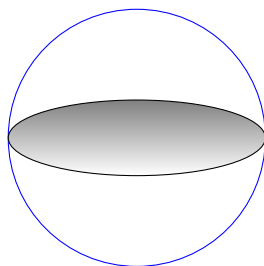


Figura 3.1: O disco equatorial .

No caso $n = 3$, J. C. C. Nitsche [29] mostrou que os discos equatoriais planos são as únicas superfícies mínimas com fronteira livre e totalmente geodésicas imersas em B^3 homeomorfas a um disco. Fraser e Schoen [16] generalizaram mostrando que o disco mínimo satisfazendo a condição de fronteira livre numa bola B^{n+1} de curvatura média constante de qualquer dimensão é totalmente geodésica.

Definição 3.0.3. *O catenóide crítico é uma anel mínimo de fronteira livre mergulhado em B^3 .*

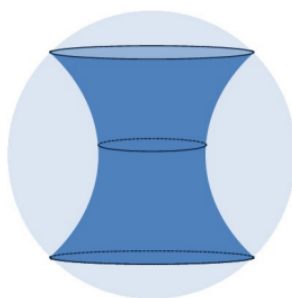


Figura 3.2: O catenóide crítico .

Exemplo 3.0.2. *Catenóide Crítico ($H = 0$) . O catenóide crítico parametrizado em $\mathbb{R} \times S^1$ dada por*

$$\begin{aligned} \varphi : [-T_0, T_0] \times S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \theta) &\longmapsto \varphi(t, \theta) = (a_0 \cosh t \cos \theta, a_0 \cosh t \sin \theta, a_0 t), \end{aligned}$$

para alguma base ortonormal do \mathbb{R}^3 e uma escolha única de T_0 , uma solução positiva da relação $t = \coth(t)$, onde $a_0 = (T_0 \cosh(T_0))^{-1}$. A restrição de φ para $[-T_0, T_0] \times \mathbb{S}^1$ define uma imersão mínima numa bola que encontra a fronteira da bola ortogonalmente.

Exemplo 3.0.3. *Calotas esféricas ($H \neq 0$). Seja B a bola fechada unitária em \mathbb{R}^3 e $C = \Sigma \cap B$, onde Σ é a parte interior a B de alguma esfera $\mathbb{S}^2(r)$ que intersecta $\mathbb{S}^2(1) = \partial B$ ortogonalmente.*

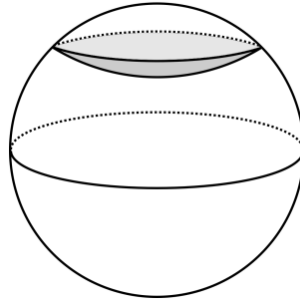


Figura 3.3: A calota esférica

Teorema 3.0.1 (Nitsche, 1985). *Seja Σ uma superfície CMC de fronteira livre imersa em B^3 . Se Σ homeomorfa a um disco, então Σ é totalmente umbílica.*

Teorema 3.0.2 (Fraser e Schoen, 2014). *Seja $u : D \rightarrow B^n$ uma imersão mínima com pontos de ramificação tal que $u(D)$ encontra ∂B ortogonalmente. Então, $u(D)$ é um disco equatorial plano.*

3.1 Outra Demonstração do Teorema de Nitsche

Fixando as notações como no Exemplo 1.6.2 nos direcionaremos às formas espaciais $\mathbb{M}_c^{n+1} = (B_R, \bar{g})$, onde $\bar{g} = e^{2\varphi_c} g$ e $c \in \mathbb{R}$. A construção foi inspirada no trabalho de L. Alías, J. de Lira e Miguel Malacarne [3].

Seja $r < R$ um número positivo escolhido tal que a bola fechada $B = (\bar{B}_r, \bar{g})$ tem raio unitário em \mathbb{M}_c^{n+1} onde \bar{B}_r é a bola Euclidiana fechada centrada na origem de \mathbb{R}^{n+1} com raio unitário. Considere uma hipersuperfície compacta Σ em B tal que $\partial \Sigma \neq \emptyset$, $\text{int}(\Sigma) \subset \text{int}(B)$ e $\partial \Sigma \subset \partial B$.

Sejam α_N^M e S_N^M , respectivamente denotam a segunda forma fundamental e o operador de Weingarten de N como subvariedade de uma variedade Riemanniana M , e em particular, temos fixado as notações

$$\alpha = \alpha_\Sigma^{M_c^{n+1}}, \quad S = S_\Sigma^{M_c^{n+1}}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha_{\partial\Sigma}^{\partial B} \quad \text{e} \quad \tilde{S} = S_{\partial\Sigma}^{\partial B}$$

Com essas notações, temos para quaisquer campos $X, Y \in \mathfrak{X}(\partial\Sigma)$ que

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X^{\partial B} Y + \alpha_{\partial B}^B(X, Y) \\ &= \nabla_X^{\partial\Sigma} Y + \tilde{\alpha}(X, Y) + \alpha_{\partial B}^B(X, Y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X^\Sigma Y + \alpha(X, Y) \\ &= \nabla_X^{\partial\Sigma} Y + \alpha_{\partial\Sigma}^\Sigma(X, Y) + \alpha(X, Y) \end{aligned}$$

onde $\nabla^{\partial B}$, $\nabla^{\partial\Sigma}$ e ∇^Σ são respectivamente, as conexões Riemannianas de ∂B , $\partial\Sigma$ e Σ como subvariedades de M_c^{n+1} . Comparando as duas decomposições acima, obtemos

$$(3.1) \quad \tilde{\alpha}(X, Y) + \alpha_{\partial B}^{M_c^{n+1}}(X, Y) = \alpha_{\partial\Sigma}^\Sigma(X, Y) + \alpha(X, Y)$$

ao longo de $\partial\Sigma$. Como ∂B é uma esfera em M_c^{n+1} , existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $S_{\partial B}^{M_c^{n+1}} = kI$, onde I é o tensor identidade em $T(\partial B)$. Portanto, se denotamos $\bar{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$, com $\langle x, x \rangle = 1$, pelo Exemplo 1.6.1 obtemos

$$(3.2) \quad k = \langle S_{\partial B}^{M_c^{n+1}} e_j, e_j \rangle = \langle (-\nabla_{e_j} x)^T, e_j \rangle = -\mu_0 \langle e_j, e_j \rangle = -\mu_0,$$

onde $\mu_0 = \mu(r^2) = 1 + 2u'(r^2)r^2$ e $(\cdot)^T$ denotam a função potencial do vetor posição calculada ao longo de ∂B^{n+1} e a projeção ortogonal de $\mathfrak{X}(M_c^{n+1})$ em $\mathfrak{X}(\partial B)$. Combinando (3.2) com (3.1) segue que

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \langle \tilde{S}X, Y \rangle \xi + \langle S_{\partial B}^{M_c^{n+1}} X, Y \rangle x &= \langle S_{\partial\Sigma}^\Sigma X, Y \rangle \nu + \langle SX, Y \rangle \eta, \\ \langle \tilde{S}X, Y \rangle \xi - \mu_0 \langle X, Y \rangle x &= \langle S_{\partial\Sigma}^\Sigma X, Y \rangle \nu + \langle SX, Y \rangle \eta \end{aligned}$$

onde x é o vetor posição em \bar{B}_r , $\xi \in \mathfrak{X}(\partial B)$ é um campo de vetor conormal ao longo de $\partial\Sigma$ como um hipersuperfície em M , ν é um campo vetorial conormal ao longo de $\partial\Sigma$ como uma hipersuperfície em Σ apontando para fora e η é um campo normal unitário definido globalmente em Σ .

Com essa construção, temos que propriedade de fronteira livre na bola B_r^{n+1} nos permite observar que $x = \nu$ e $\xi = \eta$ ao longo de $\partial\Sigma$ e enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 3.1.1 (Tipo Stahl-Santos, 2022). *Se Σ^n é uma hipersuperfície com fronteira livre na bola B^{n+1} . Considere os tensores*

$$(3.4) \quad \begin{aligned} T : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \times \mathfrak{X}(\Sigma^n) &\longrightarrow \mathcal{D}(\Sigma^n) \\ (X, Y) &\mapsto T(X, Y) = \langle SX, Y \rangle \end{aligned}$$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} T^{\partial B} : \mathfrak{X}(\partial B^{n+1}) \times \mathfrak{X}(\partial B^{n+1}) &\longrightarrow \mathcal{D}(\Sigma^n) \\ (X, Y) &\mapsto T^{\partial B}(X, Y) = \mu_0 \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Então,

$$(3.6) \quad \begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{v}_j} T)(\mathbf{v}, \mathbf{v}_j) &= - \left(\nabla_{\mathbf{v}_j}^{\partial B} T^{\partial B} \right) (\eta, \mathbf{v}_j) \\ &\quad - 2\mu_0 T(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j) + \mu_0 (T(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + T(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j)), \end{aligned}$$

com $j = 1, \dots, n-1$, onde $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de vetores tangente a $\partial \Sigma^n$, enquanto $\nabla_X T$ e $\nabla_X^{\partial B} T^{\partial B}$ denotam as derivadas covariantes, respectivamente de T e $T^{\partial B}$ na direção de X .

Lema 3.1.1 (Stahl). *Seja Σ^n uma hipersuperfície de fronteira livre na bola B^{n+1} descrita acima. Se Σ^n tem curvatura média constante H , então nos pontos de $\partial \Sigma^n$ temos:*

- a) $|\phi|^2 = |\tilde{S}|^2 + (H - \tilde{H})^2 - \frac{H^2}{n}$;
- b) $\partial_{\mathbf{v}}(|\phi|^2) = -2\mu_0 \left(|\tilde{S}|^2 + (n+1)(H - \tilde{H})^2 - 2H(H - \tilde{H}) \right)$,

onde ϕ é o tensor de umbilicidade de Σ , enquanto \tilde{S} e \tilde{H} são, respectivamente, o operador de Weingarten e a curvatura média de $\partial \Sigma$ como hipersuperfície de ∂B .

Demonstração. Como Σ é de fronteira livre em B , temos que $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ e $\xi = \eta$ em $\partial \Sigma$. Pela equação (3.1) temos que $S = \tilde{S}$ ao longo da $\partial \Sigma$. Portanto, se $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\}$ é uma base ortonormal em $\partial \Sigma$ dados pelos autovetores do operador \tilde{S} , e $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{n-1}$ são seus respectivos autovalores, a matriz de S na base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{v}\}$ é dada por

$$(3.7) \quad S = \begin{pmatrix} \tilde{k}_1 & 0 & \dots & 0 & \langle S\mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \\ 0 & \tilde{k}_2 & \dots & 0 & \langle S\mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{k}_{n-1} & \langle S\mathbf{v}, \mathbf{e}_{n-1} \rangle \\ \langle S\mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle S\mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle & \dots & \langle S\mathbf{v}, \mathbf{e}_{n-1} \rangle & \langle S\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{pmatrix}$$

Agora, consideraremos a função suporte $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \langle x, \eta \rangle$. Dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, por 1.6.1 temos que $X(f) = \langle x, \bar{\nabla}_X \eta \rangle$. Em particular, como Σ é de fronteira livre na bola B , para cada $X \in \mathfrak{X}(\partial\Sigma)$,

$$(3.8) \quad 0 = \mu_0 \langle \nu, \bar{\nabla}_X \eta \rangle = -\mu_0 \langle \nu, SX \rangle.$$

Então, ao longo da fronteira $\partial\Sigma$, ν é uma direção principal de Σ e a base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n-1}, \nu\}$ diagonaliza o operador S . Portanto,

$$(3.9) \quad S = \begin{pmatrix} \tilde{S} & 0 \\ 0 & k_n \end{pmatrix},$$

onde $k_n = \langle S\nu, \nu \rangle$. Além disso, como $H = \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{k}_j + k_n = \tilde{H} + k_n$, obtemos $k_n^2 = (H - \tilde{H})^2$, e concluímos o primeiro item da afirmação com

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= |S|^2 - \frac{H^2}{n} \\ &= |\tilde{S}|^2 + (H - \tilde{H})^2 - \frac{H^2}{n}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como H é uma constante, temos

$$(3.10) \quad \partial_\nu(|\phi|^2) = \partial_\nu(|S|^2 + k_n^2) = 2 \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{k}_j \partial_\nu(\tilde{k}_j) - 2k_n \sum_{j=1}^{n-1} \partial_\nu(\tilde{k}_j).$$

Note que [36], Teorema 2.4] permanece verdadeira para hipersuperfícies em \mathbb{M}_c^{n+1} . Visto que S é um tensor de Codazzi em Σ , por (3.2) temos que $\partial_\nu(\tilde{k}_j) = \mu_0(k_n - \tilde{k}_j)$, $j=1, \dots, n-1$, e, conseqüentemente, finalmente a conclusão do segundo item da afirmação,

$$\begin{aligned} \partial_\nu(|\phi|^2) &= 2\mu_0 \left((H - k_n)k_n - |S|^2 k_n^2 - (n-1)k_n^2 + (H - k_n)k_n \right), \\ &= -2\mu_0 \left(|\tilde{S}|^2 + (n+1)(H - \tilde{H})^2 - 2H(H - \tilde{H}) \right). \end{aligned}$$

□

Observação 3.1.1. Substituindo a relação $|\tilde{S}|^2 = |\tilde{\phi}|^2 + \frac{\tilde{H}^2}{n-1}$ nas equações do Lema 3.1.1, encontramos

- a) $|\phi|^2 = |\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{n(n-1)} \left((n-1)H - n\tilde{H} \right)^2$;
- b) $\partial_\nu(|\phi|^2) = -2\mu_0 \left(|\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{n-1} \left((n-1)H - n\tilde{H} \right)^2 \right)$,

onde $\tilde{\phi}$ é o tensor de umbilicidade de $\partial\Sigma$ como uma hipersuperfície em ∂B .

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 |\phi|^2 &= |S|^2 - \frac{H^2}{n} \\
 &= |\tilde{S}|^2 + (H - \tilde{H})^2 - \frac{H^2}{n} \\
 &= |\tilde{\phi}|^2 + \frac{\tilde{H}^2}{n-1} + (H - \tilde{H})^2 - \frac{H^2}{n} \\
 &= |\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{n(n-1)} \left[n^2 \tilde{H}^2 - 2n(n-1)H\tilde{H} + (n+1)^2 H^2 \right] \\
 &= |\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{n(n-1)} \left((n-1)H - n\tilde{H} \right)^2.
 \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
 \partial_\nu(|\phi|^2) &= -2\mu_0 \left[|\tilde{\phi}|^2 + \frac{\tilde{H}^2}{n-1} + (n+1)(H - \tilde{H})^2 - 2H(H - \tilde{H}) \right] \\
 &= -2\mu_0 \left[|\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{n-1} \left(-2n\tilde{H}H(n-1) + n^2\tilde{H}^2 + H^2(1 - 2n + n^2) \right) \right] \\
 &= -2\mu_0 \left[|\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{n-1} \left(n\tilde{H} - H(n-1) \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

Teorema 3.1.2 (Domingos, Santos e Vitório, 2022). *Seja Σ^n , $n \geq 2$, uma hipersuperfície compacta de \mathbb{M}_c^{n+1} , $c \in \{-1, 0, 1\}$. Se Σ^n não é totalmente umbílica, tem curvatura média constante H , tensor de umbilicidade ϕ e não tem ponto umbílico ao longo de $\partial\Sigma^n$, então*

$$(3.11) \quad - \int_{\Sigma^n} |\phi|^{\frac{n-2}{n}} p_H(|\phi|) d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma^n} |\phi|^{-\frac{n+2}{n}} \partial_\nu(|\phi|^2) ds.$$

E se $n \geq 3$, a igualdade ocorre se, e somente se:

- a) quando $H = 0$ teremos um catenóide sempre que $c \leq 0$;
- b) quando $H = 0$ e $c > 0$, um toro de Clifford ou uma hipersuperfície mínima de Otsuki;
- c) quando $H \neq 0$ e como na desigualdade de Okumura vale a igualdade, uma das curvaturas principais tem multiplicidade 1 e as outras multiplicidade $n-1$, consequentemente Σ é uma hipersuperfície de Delaunay.

Demonstração. Como ϕ se anula no máximo em um subconjunto de medida nula de Σ^n (cf. [7, Lema 2.2]), dado $\epsilon > 0$, defina o conjunto não vazio

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Sigma^n : |\phi|(x) \geq \epsilon\},$$

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} |\phi|(x), & \text{se } x \in \Omega_\epsilon \\ \epsilon, & \text{se } x \in \Sigma_\epsilon \setminus \Omega_\epsilon \end{cases}.$$

Pela Identidade de Green,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^n} f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} \Delta |\phi|^2 d\sigma &= - \int_{\Sigma^n} \langle \nabla |\phi|^2, \nabla f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} \rangle d\sigma + \int_{\partial \Sigma^n} \partial_\nu (|\phi|^2) f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} ds \\ &= \frac{2(n+2)}{n} \int_{\Sigma^n} \langle \nabla |\phi|, \nabla f_\epsilon \rangle |\phi| f_\epsilon^{-\frac{2(n+1)}{n}} + \int_{\partial \Sigma^n} \partial_\nu (|\phi|^2) f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} ds. \end{aligned}$$

Aplicando a igualdade acima e o Teorema da Divergência à Desigualdade de Simons (1.43), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^n} f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} |\phi|^2 p_H(|\phi|) &\geq \frac{n+2}{n} \int_{\Sigma^n} |\nabla |\phi||^2 f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} - \frac{1}{2} \int_{\Sigma^n} \Delta (|\phi|^2) f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} \\ &= \frac{n+2}{n} \int_{\Sigma^n} |\nabla |\phi||^2 f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} d\sigma \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\frac{2(n+2)}{n} \int_{\Sigma^n} \langle \nabla (|\phi|), \nabla f_\epsilon \rangle |\phi| f_\epsilon^{-\frac{2(n+1)}{n}} d\sigma + \int_{\partial \Sigma} \partial_\nu (|\phi|^2) f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} ds \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{n} \int_{\Sigma^n} \left(|\nabla |\phi||^2 f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} - \langle \nabla |\phi|, \nabla f_\epsilon \rangle |\phi| f_\epsilon^{-\frac{2(n+1)}{n}} \right) d\sigma \\ - \int_{\Sigma^n} |\phi|^2 p_H(|\phi|) f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} d\sigma \\ (3.12) \hspace{15em} \leq \frac{1}{2} \int_{\partial \Sigma^n} \partial_\nu (|\phi|^2) f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} ds. \end{aligned}$$

Como $f_\epsilon = |\phi|$ em Ω_ϵ e $\nabla f_\epsilon = 0$ em $\Sigma^n \setminus \Omega_\epsilon$, o primeiro termo dessa desigualdade é

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^n} \left(|\nabla |\phi||^2 f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} - \langle \nabla |\phi|, \nabla f_\epsilon \rangle |\phi| f_\epsilon^{-\frac{2(n+1)}{n}} \right) d\sigma \\ (3.13) \hspace{10em} = \int_{\Sigma^n \setminus \Omega_\epsilon} |\nabla |\phi||^2 \epsilon^{-\frac{n+2}{n}} d\sigma \geq 0, \end{aligned}$$

e conseqüentemente a desigualdade (3.12) se torna

$$- \int_{\Sigma^n} |\phi|^2 p_H(|\phi|) f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\partial \Sigma^n} \partial_\nu (|\phi|^2) f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} ds.$$

Portanto, como $|\phi|^{-\frac{n+2}{n}} f_\epsilon^{-\frac{n+2}{n}} \rightarrow 1$ quase sempre nos pontos de Σ^n quando $\epsilon \rightarrow 0$ e $|\phi|^{-\frac{n+2}{n}} \partial_\nu (|\phi|^2)$ ao longo de $\partial \Sigma^n$ é integrável por hipótese, então

$$-\int_{\Sigma^n} |\phi|^{\frac{n-2}{n}} \left(\frac{H^2}{n} - |\phi|^2 - \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} |H||\phi| + nc \right) d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma^n} |\phi|^{-\frac{n+2}{n}} \partial_\nu(|\phi|^2) ds.$$

Observe que a igualdade ocorre se, e somente se, também ocorre a Desigualdade de Simons 1.43 e a igualdade em (3.13). Portanto, pelo Teorema 1.7.3, conclui-se o que queríamos. \square

O caso em que $n = 2$ o Teorema 3.1.2 acima é reescrito como

Corolário 3.1.2.1. *Seja Σ^2 uma superfície compacta CMC em \mathbb{M}_c^3 , para $c \in \{-1, 0, 1\}$, com bordo $\partial\Sigma$. Se Σ é uma superfície não totalmente umbílica e $\frac{\partial}{\partial\nu}(|\phi|^2)$ é integrável ao longo de $\partial\Sigma$, então*

$$(3.14) \quad -\int_{\Sigma^2} p_H(|\phi|) d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma^2} \frac{\partial_\nu(|\phi|^2)}{|\phi|^2} ds.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, Σ^2 não tem ponto umbílico.

Demonstração. Sejam $\{x_1, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$, $m \geq 0$, o conjunto de todos os pontos umbílicos de Σ^2 . Suponha que $x_i \in \text{int}(\Sigma)$ para $i = 1, \dots, l$ e $x_i \in \partial\Sigma$ para $i = l+1, \dots, m$. Considere as vizinhanças $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$, respectivamente, de x_1, \dots, x_m tais que $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e defina $\bar{\Sigma} = \Sigma \setminus \cup_{i=1}^m \mathcal{V}_i$. Pela Desigualdade de Simons e do Teorema da Divergência que

$$(3.15) \quad -2 \int_{\bar{\Sigma}} p_H(|\phi|) d\sigma \leq \int_{\bar{\Sigma}} \Delta_{\bar{\Sigma}} \log |\phi|^2 = \int_{\partial\bar{\Sigma}} |\phi|^{-2} \frac{\partial}{\partial\nu} (|\phi|^2) ds.$$

Fixe que $M_i = \text{int}(\Sigma) \cap \partial\mathcal{V}_i$ para $i = l+1, \dots, m$ e $N = \partial\Sigma \cap (\cup_{i=l+1}^m \partial\mathcal{V}_i)$, temos que

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Sigma} p_H(|\phi|) + 2 \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{V}_i} p_H(|\phi|) & \\ & \leq \int_{\partial\Sigma \setminus N} |\phi|^{-2} \frac{\partial}{\partial\nu} (|\phi|^2) - \sum_{i=1}^l \int_{\partial\mathcal{V}_i} |\phi|^{-2} \frac{\partial}{\partial\nu} (|\phi|^2) \\ & \quad - \sum_{i=l+1}^m \int_{M_i} |\phi|^{-2} \frac{\partial}{\partial\nu} (|\phi|^2), \end{aligned}$$

onde ν é o conormal exterior de $\partial\Sigma$ e cada ν_i é o conormal exterior de $\partial\mathcal{V}_i$. Pela regularidade da função $|\phi|^2$, podemos supor que $\partial\mathcal{V}_i$ é um conjunto de nível de $|\phi|^2$. Nesse caso,

cada ν_i aponta na direção de $\nabla_{\Sigma}|\phi|^2$ e, conseqüentemente, fazendo com que o diâmetro de \mathcal{V}_i tenda a zero, a desigualdade acima torna

$$(3.16) \quad - \int_{\Sigma^2} p_H(|\phi|) \, d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma^2} \frac{\partial_{\nu}(|\phi|^2)}{|\phi|^2} \, ds.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, não existem pontos umbílicos em Σ^2 . □

Corolário 3.1.2.2. *Seja Σ^2 uma superfície de fronteira livre em B . Se Σ tem curvatura média constante H , então Σ não é totalmente umbílica se, e somente se, $\chi(\Sigma) \leq 0$, onde $\chi(\Sigma)$ denota a característica de Euler. Mais ainda, a igualdade ocorre em (3.14) se, e somente se, Σ é um anel.*

Demonstração. Como Σ^2 tem no máximo um subconjunto discreto de pontos umbílicos ao longo $\partial\Sigma^2$, denotando por $|\partial\Sigma^2|$ o comprimento total de $\partial\Sigma^2$, segue dos itens da Observação 3.1.1 que

$$(3.17) \quad \int_{\partial\Sigma^2} |\phi|^{-2} \partial_{\nu}(|\phi|^2) \, ds = -4\mu_0 |\partial\Sigma^2|.$$

Usando a Equação de Gauss, podemos ver que $|\phi|^2 = -2(K_{\Sigma} - c) - \frac{H^2}{2}$. E, a curvatura geodésica calculada na direção normal exterior a Σ^2 ao longo da componente conexa de bordo $\Gamma \subset \Sigma^2$ é igual a $-\mu_0$. Daí, a desigualdade em (3.14) e a relação obtida em (3.17), juntas com o Teorema de Gauss-Bonnet 1.5.2 implicam que

$$(3.18) \quad 2\mu_0 |\partial\Sigma^2| \leq \int_{\Sigma^2} p_H(|\phi|) \, d\sigma = 2(\mu_0 |\partial\Sigma^2| - 2\pi\chi(\Sigma^2)).$$

Portanto, $\chi(\Sigma^2) \leq 0$. Em particular, a igualdade ocorre se, e somente se, $\chi(\Sigma^2) = 0$. □

Observe que a parte inicial do Corolário 3.1.2.2 é o Teorema de Nitsche para superfícies com fronteira livre e curvatura média constante em bolas de formas espaciais tridimensionais que Fraser e Schoen [16] apresentaram uma demonstração generalizando para codimensões maiores.

3.2 Teorema Principal

Nesta seção apresentaremos e demonstraremos o resultado principal desta dissertação. Para isso, lembramos que estamos usando como pressuposto teórico principal o artigo de

Domingos, Santos e Vitória ([12], 2022), acrescentando a condição de Ricci ao clássico Teorema de Lawson [23] obtemos o Teorema de Nitsche discutido por Ailana Fraser e Schoen em [16], (2014).

Definição 3.2.1. *Sejam Σ_1 e Σ_2 superfícies Riemannianas e $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ holomorfa. Dizemos que o ponto $p \in \Sigma_1$ é um ponto de ramificação de h quando não existe uma vizinhança U de p tal que $h|_U$ seja injetiva.*

Definição 3.2.2 (Redução de codimensão (cf. [13], Capítulo 2)). *Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow M^{n+p}$ admite uma redução de codimensão para $q < p$ quando existe uma subvariedade totalmente geodésica M_c^{n+q} em M_c^{n+p} tal que $f(M) \subset M_c^{n+q}$.*

Teorema 3.2.1 (Teorema Principal). *Seja $f : \Sigma_1^2 \rightarrow B^n$ uma imersão isométrica mínima com pontos de ramificação de fronteira livre satisfazendo a condição de Ricci com respeito a curvatura seccional constante c . Então, após uma possível redução de codimensão*

1. $f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3$;
2. $f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^6$, onde

$$f = f_\theta \cos \varphi \oplus f_{\theta + \frac{\pi}{2}} \sin \varphi,$$

para $\varphi \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$.

Demonstração. Sejam Σ^2 tem a topologia do disco e $f(\Sigma^2) \subset B^n$ é uma imersão isométrica mínima de fronteira livre na bola n -dimensional B^n satisfazendo a condição de Ricci. Se, por uma possível redução de codimensão, $f(\Sigma^2) \subset \mathbb{R}^3$, pelo Corolário 3.1.2.2 (Teorema do Nitsche), $f(\Sigma^2)$ é o disco equatorial plano.

Por outro lado, se após uma possível redução de codimensão tivermos $f(\Sigma^2) \subset \mathbb{R}^6$, pelo Teorema de Lawson (2.2.1), temos que $f(\Sigma^2) \subset \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$, está como produto de duas superfícies mínimas associadas, cada uma satisfazendo a condição de Ricci, tal que a imersão é da forma

$$f(\theta, \varphi) = f_\theta \cos \varphi \oplus f_{\theta + \frac{\pi}{2}} \sin \varphi,$$

onde f_θ é uma família de imersões isométricas mínimas associadas 2π -periódicas, $\varphi \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$ e $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \theta < \pi$. Novamente pelo Teorema do Nitsche, em cada parte da decomposição $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$, teremos dois discos unidos pela origem, mas isso não tem a topologia de um disco.

□

Bibliografia

- [1] Alencar, H. and Do Carmo, M. *Hypersurfaces with constant mean curvature in space forms*, An. Acad. Brasil. Cienc. 66 (1994), 265–274.
- [2] Alencar, H. and Do Carmo, M. *Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Spheres*, Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 120, No. 4 (Apr., 1994), pp. 1223-1229.
- [3] Alías, L. J.; Lira, J. H. S., and Malacarne, J. M. *Constant higher-order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces*, J. Inst. Math. Jussieu 5 (2006), no. 4, 527-562. MR 2261223
- [4] Aminov, Yu. A. *Minimal Surfaces [in Russian]*. Kharkov Univ. Publ, Kharkov, 1978.
- [5] Bryant, R. *Minimal Surfaces of Constant Curvature in \mathbb{S}^n* . Trans. Amer. Math. Soc. 125 (1987), 301-335.
- [6] Benôit, D. *A Survey on Minimal Isometric Immersions into \mathbb{R}^3 , $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* . In: Minimal Surfaces: integrable systems and visualization. Hoffmann, T. et all. Springer, 2016-19.
- [7] Catino, Giovanni. *On conformally flat manifolds with constant positive scalar curvature*. arXiv: 1408.0902.
- [8] Colding, T. H., Minicozzi, H. P. *A course in minimal surfaces*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 121, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. MR 2780140
- [9] do Carmo, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Col. Textos Universitários. 6ªed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

- [10] do Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2019.
- [11] Do Carmo, M. P.; Dajczer, M. *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**(1977), no 2, 685-709. MR 694383
- [12] Domingos, Iury; Santos, Roney; Vitória, Feliciano. *A Note on Free Boundary Hypersurfaces in Space Forms Balls*, arXiv:2105.11264.
- [13] Dajczer, M. and Tojeiro, R. *Submanifold theory*, Universitext, Springer, New York, 2019, Beyond an introduction. MR 3969932
- [14] Eells, J. *The Surfaces of Delaunay*, The Math. Intelligences, 1 (1987), 53–57.
- [15] Fomenko, V. T. *On metrics arising on surfaces of constant mean curvature*. Math. Notes, 77:4 (2005), 568–572.
- [16] Fraser, A., Schoen, R. *Uniqueness theorems for free boundary minimal disks in space forms*. Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 17, 8268–8274. MR 3404014.
- [17] Hatcher, A. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [18] Johnson, G. D. *An intrinsic characterization of a class of minimal surfaces in constant curvature manifolds*. Pacific J. Math. 149 (1991), 113-125.
- [19] Kenmotsu, K. *On Minimal Immersions of \mathbb{R}^2 into \mathbb{S}^N* . J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 182-374.
- [20] Kazdan, J. and Warner, F. W. *Existence and Conformal Deformation of Metrics With Prescribed Gaussian and Scalar Curvatures*. The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 101, No. 2. (Mar., 1975), pp. 317-331.
- [21] Lang, S. *Complex Analysis*. Fourth Edition, Springer, 1999.
- [22] Lawson, H. B. *Minimal Varieties in Constant Curvature Manifolds*. Ph. D. Thesis, Stanford University, 1968.
- [23] Lawson, H. B. *Some Intrinsic Characterizations of Minimal Surfaces*. J. Analyse Math. 24 (1971), 151-161.
- [24] Lawson, H. B. *Lectures on Minimal Submanifolds*. Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1980.

- [25] LIMA, E. L. *A característica de Euler-Poincaré*. Matemática Universitária, n. 1, p. 47–62, 1985.
- [26] López, R. *Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Heidelberg, 2013. MR 3098467
- [27] Lejdfors, K. J. *Surfaces of constant mean curvature*, Master thesis, Lund University, (2003).
- [28] Moroianu, A., Moroianu, S.: *Ricci surfaces*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 14(4), 1093–1118 (2015)
- [29] Nitsche, J. C. C. *Stationary Partitioning of Convex Bodies*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 89 (1985), 1-19.
- [30] Pinl, M. *Über einen Satz von G. Ricci-Curbastro und die Gaussche Krümmung der Minimalflächen*, Arch. Math., 4 (1953), 369–373.
- [31] Richeson, D. S. *A pérola de Euler: A fórmula dos poliedros e o nascimento da topologia*. Lisboa: Gradiva, 2015.
- [32] Santos, R. P. dos. *Subvariedades com Bordo Livre em Bolas de formas Espaciais*. 2022. Tese (Doutorado) Instituto de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, p. 57.
- [33] Sakaki, M. *Minimal surfaces with the Ricci condition in 4-dimensional space forms*. Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1994), 573 - 577.
- [34] Sakaki, M. *On Minimal Surfaces with the Ricci condition in space forms*. Kodai Math. J. 17 (1994), 452 - 455.
- [35] Stein, E. M., Shakarchi, R. *Complex analysis*. Princeton Lectures in Analysis. Vol. II. Princeton University Press, 2003.
- [36] Stahl, Axel. *Convergence of solutions to the mean curvature flow with a Neumann boundary condition*, Calc. Var. Partial Differential Equations. 4 (1996), no 5, 421-441. MR1402731

-
- [37] Tam, Luen-Fai; Zhou, Detang. *Stability properties for the higher dimensional catenoid in \mathbb{R}^{n+1}* , Proc. Amer. Math. Soc. **224** (2009), no 10, 3451-3461. MR 2515414
- [38] Wang, B. *Simon's equation and minimal hypersurfaces in space forms*, **146** (2018), no 1, 369-383. MR 3723147