UFAL – UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.

COSME WASHINGTON DE ARAUJO

DERIVADAS E SUAS APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA
DERIVADAS E SUAS APLICAÇÕES

Maceió - AL
Abril – 2021

COSME WASHINGTON DE ARAUJO

DERIVADAS E SUAS APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho apresentado ao curso de Graduação em Licenciatura em Matemática, como exigência parcial para obtenção do título de graduação, orientado pelo Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa.

Maceió - AL

Abril – 2021

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Jone Sidney A. de Oliveira – CRB-4 - 1485

A658d Araujo, Cosme Washington de.
Derivadas e suas aplicações na educação básica derivadas e suas aplicações / Cosme Washington de Araujo. - 2021.
27 f.

Orientadora: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa.
Monografia (Trabalho de conclusão de curso) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Curso de Licenciatura em Matemática, Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 26 - 27.

1. Derivadas - Aspectos Históricos. 2. Derivadas - Regras. 3. Derivadas – Aplicações. 4. Matemática – Educação. I. Título.

CDU: 517.77:37

AGRADECIMENTOS

Durante toda esta caminhada pude contar com a ajuda de muitas pessoas queridas, e é a todas elas que agradeço neste momento.

Em primeiro lugar, a Deus que percorre este caminho como meu guia e, em segundo lugar, à minha família, que foi essencial em todos os momentos. Meus pais como sempre me apoiando, e aos meus colegas de profissão sempre disposto a ajudar.

Aos mestres todo o meu carinho, afinal, sem os mesmos meus sonhos não seriam realizados, e renovados a cada dia.

Muito obrigada a todos!

DERIVADAS E SUAS APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

DERIVATIVES AND THEIR APPLICATIONS IN BASIC EDUCATION

COSME WASHINGTON DE ARAUJO[1]

ISNALDO ISAAC BARBOSA[2]

RESUMO

A matemática é uma ferramenta extremamente útil para o desenvolvimento de várias ciências. Entre muitos dos seus conteúdos, está a Derivada, importante ferramenta do Cálculo utilizado em vários ramos do saber. Descoberto por Leibniz e Newton, no século XVII, o cálculo derivado tem sido utilizado na descoberta da taxa de variação no comportamento de grandezas variáveis, de forças ou objetos em movimento. A utilização do Cálculo é uma ferramenta de extrema importância, pois a variação de grandezas e a necessidade de aproximações locais é uma problemática contida praticamente em todas as áreas do conhecimento. Por isso a, abordagem no ensino básico, ou seja, no ensino médio tem suma importância no desenvolvimento em diversos cálculos, tais como na cinemática, na geometria, na biologia entre outras disciplinas de ensino.

Palavras Chaves: Derivadas, aspectos históricos, definições regras e aplicações.

ABSTRACT

Mathematics is an extremely useful tool for developing various sciences. Among many of its contents is Derivative, an important Calculus tool used in various fields of knowledge. Discovered by Leibniz and Newton in the 17th century, the derived calculus has been used to discover the rate of change in the behavior of variable quantities, forces or objects in motion. The use of Calculus is an extremely important tool, as the variation of quantities and the need for local approximations is a problem contained in practically all areas of knowledge. Therefore, the approach in basic education, that is, in high school, is of paramount importance in the development of various calculations, such as kinematics, geometry, biology, among other teaching subjects

Keywords: Derivatives, historical aspects, definitions, rules and applications.

¹ UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS DO CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA 2021, COSME WASHINGTON DE ARAÚJO, E-mail: comeswashingtondearaujo@hotmail.com;

Sumário

1. INTRODUÇÃO

A matemática é uma ferramenta extremamente útil para o desenvolvimento de várias ciências. Entre muitos dos seus conteúdos, está a Derivada, importante ferramenta do Cálculo utilizado em vários ramos do saber

Descoberto por Leibniz e Newton, no século XVII, o cálculo derivado tem sido utilizado na descoberta da taxa de variação no comportamento de grandezas variáveis, de forças ou objetos em movimento.

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é uma importante disciplina dos cursos de Ciências Exatas e Engenharia devido a sua aplicabilidade. Apesar dessa importância, em nível universitário, CDI é uma disciplina que possui índices de reprovação muito elevados em diversas Instituições de Ensino, tais como a Universidade de São Paulo, na Universidade Federal Fluminense e Universidade do Estado de Santa Catarina (PAGANI; ALLEVATO, 2015; ZUCHI, 2005; FIGUEIREDO, et al 2014).

O Cálculo Diferencial e Integral é considerado uma das mais importantes disciplinas matemáticas, por ser uma disciplina que tem um papel importante no desenvolvimento da sociedade. Zuin (2001, p. 34) destaca que "o Cálculo foi a principal alavanca para se desenvolver os mais diversos segmentos das ciências e da tecnologia".

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral está, atualmente, presente na estrutura curricular de vários cursos das Ciências Exatas e Humanas. Na Universidade, os cursos introdutórios de Cálculo aparecem como disciplinas do primeiro ano, nas diferentes especificidades dos cursos de Engenharia, nos cursos de Matemática, Física, Química, Ciências Econômicas, Administração, Contabilidade, Arquitetura, Geociências, Biociência. São cursos básicos, ministrados para alunos recém - egressos da escola secundária, de todas as áreas denominadas "Exatas" e de algumas classificadas como "Humanas ou "Biológicas"" (BARUFI, 1999).

Pesquisas como as de Passos et al., (2007); Cury (2005); Silva (2010) e Andrade (2008), que revelam a dificuldade nos processos de ensino dessa disciplina, e o diagnóstico dessas dificuldades são objetos de estudo de vários pesquisadores no ramo da educação matemática.

A utilização do Cálculo é uma ferramenta de extrema importância, pois a variação de grandezas e a necessidade de aproximações locais é uma problemática contida praticamente em todas as áreas do conhecimento. Esta disciplina é conhecida por seu alto índice de reprovação e de evasão. Nos mais variados cursos e ao ingressar no curso de Química os discentes encontram dificuldades quando se trata da compreensão da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Isto ocorre pelo fato de como esses conteúdos são lecionados, haja vista que, na maioria das vezes são repassados pelo Método Tradicional e os mesmos não compreendem a finalidade de tal conteúdo. (ANDRADE, 2008)

Dessa forma, objetivou-se com esta revisão analisar o uso do Cálculo Diferencial ou Derivado na importância da sua aplicabilidade nas diversas áreas do conhecimento.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1. Conceito

O conceito de derivada é considerado um dos conceitos fundamentais do Cálculo. Por isso mesmo, seu estudo está presente no currículo de diversos cursos superiores, dentro de disciplinas relacionadas ao Cálculo, por possuir aplicações em várias áreas do conhecimento. Segundo Zuin (2001), as derivadas estão presentes em diversas situações cotidianas relacionadas ao movimento e à variação. A derivada é um conceito que pode ser explorado a partir de diversos focos: derivada como um limite, como inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado, além de situações que envolvam taxa de variação e máximos e mínimos.

A derivada tem dois aspectos básicos, o geométrico e o computacional. Além disso, as aplicações das derivadas são muitas: a derivada tem muitos papéis importantes na matemática propriamente dita, têm aplicações em física, química, engenharia, tecnologia, ciências, economia e muito mais, e novas aplicações aparecem todos os dias.

2.2. Aspectos Históricos da Derivada

A origem da derivada está nos problemas geométricos clássicos de tangência, por exemplo, para determinar uma reta que intersecta uma dada curva em apenas um ponto dado. Euclides (cerca de 300 A.C.) provou o familiar teorema que diz que a reta tangente a um círculo em qualquer ponto *P* é perpendicular ao raio em *P*. Arquimedes (287--212 A.C.) tinha um procedimento para encontrar a tangente à sua espiral e Apolônio (cerca de 262--190 A.C.) descreveu métodos, todos um tanto diferentes, para determinar tangentes a parábolas, elipses e hipérboles.

Mas estes eram apenas problemas geométricos que foram estudados apenas por seus interesses particulares limitados; os gregos não perceberam nenhuma linha em comum ou qualquer valor nestes teoremas.

Foi Galileu Galilei (1564--1642) quem estabeleceu o princípio que matemática era a ferramenta indispensável para estudar o movimento e, em geral, ciência: "Filosofia [ciência e natureza] está escrita naquele grande livro o qual está diante de nossos olhos – quero dizer o universo – mas não podemos entendê-lo se não aprendermos primeiro a linguagem... O livro está escrito em linguagem matemática ..." Galileu estudou o movimento geometricamente; usou as proporções clássicas de Euclides e propriedades das cônicas de Apolônio para estabelecer relações entre distância, velocidade e aceleração. Hoje, estas quantidades variáveis são aplicações básicas das derivadas (PAGANI; ALLEVATO, 2015; ZUCHI, 2005; FIGUEIREDO, et al 2014).

O interesse em tangentes a curvas reapareceu no século XXVII como uma parte do desenvolvimento da geometria analítica. Uma vez que equações eram então usadas para descrever curvas, o número e variedade de curvas aumentaram tremendamente naqueles estudos em épocas clássicas. Por exemplo, Pierre Fermat (1601--1665) foi o primeiro a considerar a idéia de uma *família* inteira de curvas de uma só vez. Ele as chamou de *parábolas superiores,* curvas da forma $y = kx^n$, onde k é constante e $n = 2, 3, 4, \ldots$ A introdução de símbolos algébricos para estudar a geometria de curvas contribuiu significativamente para o desenvolvimento da derivada, da integral e do cálculo. Por outro lado, como conclusões e resultados geométricos poderiam ser obtidos mais facilmente usando raciocínio algébrico que geométrico, os padrões de rigor lógico que tinham sido iniciados pelos gregos antigos foram relaxados em muitos problemas de cálculo, e isto (entre outros fatores) levou a controvérsias espirituosas e até amarguradas. Fermat desenvolveu um procedimento algébrico para determinar os pontos mais altos (máximos) e mais baixos (mínimos) sobre uma curva; geometricamente, ele estava encontrando os pontos onde a tangente à curva tem inclinação zero.

Isaac Newton (1642--1727) começou a desenvolver o seu “cálculo de flúxions” entre os seus primeiro esforços científicos em 1663. Para Newton, movimento era a “base fundamental” para curvas, tangentes e fenômenos relacionados de cálculo e ele desenvolveu seus flúxions a partir da versão de Hudde do procedimento da dupla raiz. Newton estendeu esta técnica como um método para encontrar a *curvatura* de uma curva, uma característica que agora sabemos ser uma aplicação da derivada segunda. Newton resumiu e revisou seu trabalho de cálculo e estes manuscritos circularam entre um grande número de seus colegas e amigos.

Com algum tutoramento e conselho de Huygens e outros, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646--1716) desenvolveu seu cálculo diferencial e integral durante o período entre 1673 e 1676 enquanto vivia como um diplomata em Paris. Em uma pequena viagem a Londres, onde participou de um encontro da Sociedade Real em 1673, Leibniz aprendeu o método de Sluse para encontrar tangentes a curvas algébricas. Leibniz tinha pouca inclinação para desenvolver estas técnicas e interesse ainda menor em fundamentações matemáticas (isto é, limites) necessárias, mas ele aperfeiçoou as fórmulas modernas e a notação.

Na Inglaterra, o novo *TreatiseofFluxions*(Tratado de Flúxions,1737) de Thomas Simpson (1710--1761) forneceu a primeira derivada da função seno. Em 1734, o Bispo George Berkeley (1685--1753) publicou *The Analyst*(O Analista), um ataque à falta de fundamentos rigorosos para seus flúxions. Berkeley reconheceu a precisão das fórmulas de Newton e a exatidão das suas aplicações abrangentes em física e astronomia, mas criticou as "quantidades infinitamente pequenas" e os "incrementos imperceptíveis" dos fundamentos das derivadas. Colin Maclaurin (1698--1746) tentou defender Newton no seu *TreatiseofFluxions* (Tratado de Flúxions) (1742) e desenvolveu derivadas para funções logarítmicas e exponenciais e expandiu as fórmulas de Simpson para incluir as derivadas das funções tangente e secante.

No continente, Maria Agnesi (1718--1799) seguiu Leibniz e L'Hospital no seu livro de cálculo *AnalyticalInstitutions* (Instituições Analíticas,1748). Leonhard Euler (1707--1783) deu um passo importante na direção de estabelecer uma fundamentação sólida para o cálculo no seu *IntroductiontotheAnalysisoftheInfinite* (Introdução à Análise do Infinito, 1748) quando introduziu *funções* (no lugar de curvas) como os objetos para os quais as derivadas e outras técnicas de cálculo seriam aplicadas. Euler definiu a derivada como "o método para determinar as razões entre os incrementos imperceptíveis, as quais as funções recebem, e os incrementos imperceptíveis das quantidades variáveis, das quais elas são funções", que soa não muito científico hoje em dia. Mesmo assim, Euler trabalhou com vários casos especiais da regra da cadeia, introduziu equações diferenciais e tratou máximos e mínimos sem usar quaisquer diagramas ou gráficos. A derivada é o limite de certas razões quando os numeradores e denominadores se aproximam mais e mais de zero, e que este limite produz certas expressões algébricas que chamamos de *derivada*.

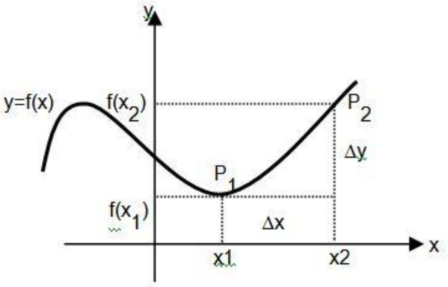
No final do século XXVIII, Joseph Louis Lagrange (1736--1813) tentou reformar o cálculo e torná-lo mais rigoroso no seu *TheoryofAnalyticFunctions* (Teoria das Funções Analíticas,1797). Lagrange pretendia dar uma forma puramente algébrica para a derivada, sem recorrer à intuição geométrica, a gráficos ou a diagramas e sem qualquer ajuda dos limites de d'Alembert. Lagrange desenvolveu a principal notação que usamos agora para derivadas e o desenvolvimento lógico de seu cálculo era admirável em outros aspectos, mas seu esforço em prover uma base sólida para o cálculo falhou porque sua concepção da derivada era baseada em certas propriedades de séries infinitas as quais, sabemos agora, não são verdadeiras.

Finalmente, no início do século XXVIX, a definição moderna de derivada foi dada por Augustin Louis Cauchy (1789--1857) em suas aulas para seus alunos de engenharia. Em seu *RésuméofLessonsgivenatl'EcolePolytechnique in the Infinitesimal Calculus* (Resumo das Lições Dadas na Escola Politécnica Sobre o Cálculo Infinitesimal,1823), Cauchy afirmou que a derivada é:

> O limite de [f(x + i) - f(x)] / i quando i se aproxima de 0. A forma da função que serve como o limite da razão [f(x + i) - f(x)] / i dependerá da forma da função proposta y = f(x). Para indicar sua dependência, dá-se à nova função o nome de função derivada (1823).

Por definição fica :

Seja a função y = f(x) representada pelo gráfico.



A derivada de y, em relação a x, é o limite, quando existe, do quociente da variação Δy [f(x_2 – f(x_1)] da função pelo acréscimo correspondente Δx (x_2 – x_1) da variável, quando Δx tende para zero:

$$f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \left[\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}\right]$$

Assim, a derivada de uma função é o limite, caso exista, que fornece o valor da declividade da reta tangente ao gráfico de y = f(x) em qualquer ponto (x, y) que, por sua vez, representa a taxa de variação dessa função num ponto indicado.

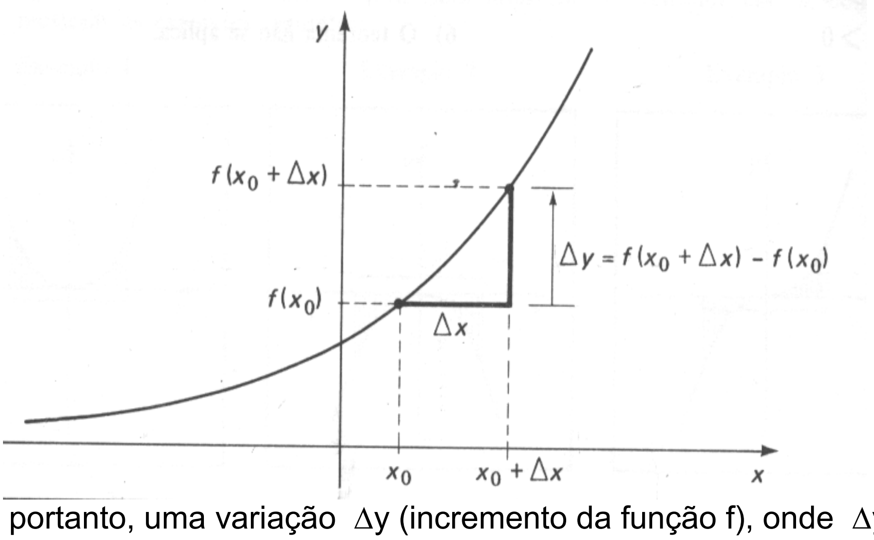
Cauchy prosseguiu para encontrar derivadas de todas as funções elementares e dar a regra da cadeia. De igual importância, Cauchy mostrou que o Teorema do Valor Médio para derivadas, que tinha aparecido no trabalho de Lagrange, era realmente a pedra fundamental para provar vários teoremas básicos do cálculo que foram assumidos como verdadeiros, isto é, descrições de funções crescentes e decrescentes. Derivadas e o cálculo diferencial estão agora estabelecidos como uma parte rigorosa e moderna do cálculo.

2.3 Derivada

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da determinação da taxa de crescimento de uma certa população, da taxa de crescimento econômico do país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento. Para entendermos como isso se dá, inicialmente vejamos a definição matemática da derivada de uma função em um ponto:

Definição:

Consideremos uma função f contínua e definida num intervalo] a, b[; sejam x_o e $x_o + \Delta x$ dois pontos desse intervalo. Quando a variável x passa do valor x_o para o valor $x_o + \Delta x$ sofrendo uma variação Δx (incremento de x), o correspondente valor da função passa de $f(x_o)$ para o valor $f(x_o + \Delta x)$



sofrendo, portanto, uma variação Δy (incremento da função f), onde $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$ conforme mostra a figura seguinte:

Dizemos que a **derivada da função f no ponto x_o** é

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to x_o} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

se ele existir e for finito. Nesse caso, dizemos também que f é derivável no ponto x_o.

Para simplificar a escrita vamos transformar:

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

NOTAÇÕES DA DERIVADA

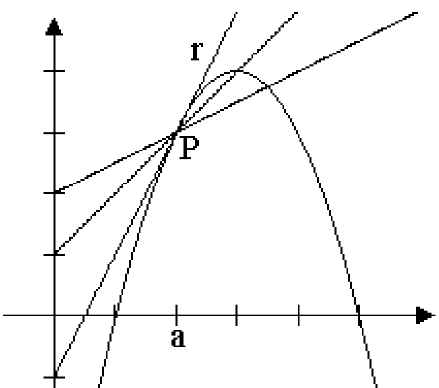
A derivada de f será indicada por uma das quatro formas abaixo:

$f'(x)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, y' , $Df(x)$

Interpretação Geométrica: a derivada de uma função *f* em um ponto *a* fornece o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto (*a*, *f* (*a*)). Vejamos:

Dada uma curva plana que representa o gráfico de *f*, se conhecermos um ponto P (*a*, *f* (*a*)), então a equação da reta tangente r à curva em P é dada por *y* - *f*(*a*) = *m* (*x* - *a*), onde *m* é o coeficiente angular da reta. Portanto, basta que conheçamos o coeficiente angular *m* da reta e um de seus pontos, para conhecermos a sua equação. Mas como obter *m* para que r seja tangente à curva em P?

Consideremos um outro ponto arbitrário sobre a curva, Q, cujas



coordenadas são (a + Δx, $f(a+\Delta x)$). A reta que passa por P e Q que é chamada reta secante à curva.

Analisemos agora a variação do coeficiente angular da reta secante fazendo Q se aproximar de P, ou seja, tomando Δx cada vez menor.

Tudo indica que quando P está próximo de Q, o coeficiente angular m_{sec} da reta secante deve estar próximo do coeficiente angular m da reta r, ou seja, o coeficiente angular m_{sec} tem um limite m quando Q tende para P, que é o coeficiente angular da reta tangente r.

Indicando-se a abscissa do ponto Q por $x = a + \Delta x$ ($\Delta x = x - a$) e sabendo-se que a abscissa de P é expressa por a, então, se Q → P temos que $\Delta x \to 0$, o que é equivalente a $x \to a$. Assim:

$$m = \lim_{x \to a} m_{P\mathbb{Q}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta_x)_- \ f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \ f(a)}{x - a}$$

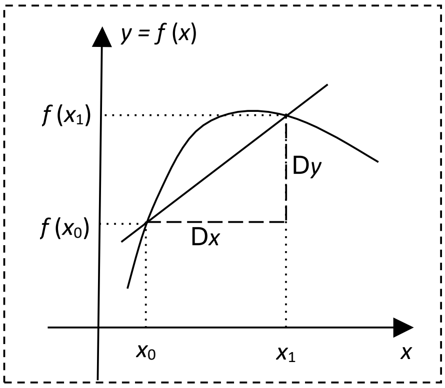
(Se este limite existe), é o coeficiente angular da reta tangente r., Porém,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta_x)_- \ f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \ f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Logo, $m = f'(a)$, ou seja, a derivada de uma função em um ponto, de fato, fornece ocoeficiente angular da reta tangente ao gráfico desta função, neste ponto.

Interpretação física: a derivada de uma função f em um ponto x_0 fornece taxa de variação instantânea de f em x_0. Vejamos como isso ocorre:

Suponha que y seja uma função de x, ou seja, $y = f(x)$. Se x variar de um valor x_0 até um valor x_1, representaremos esta variação de x, que também é chamada de incremento de x, por D$x = x_1 - x_0$,e a variação de y é dada por D$y = f(x_1)$- $f(x_0)$, o que é ilustrado na figura a seguir:



O quociente das diferenças, dado por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x1) - f(x2)}{x1 - x2}$, é dito taxa de variação média de y em relação a *x*, no intervalo [x_0, x_1]. O limite destas taxas médias de variação, quando D*x* Ø 0, é chamado de taxa de variação instantânea de *y* em relação a *x*, em $x = x_0$. Assim, temos:

Taxa de variação instantânea =

$$\lim_{x1 \to x0} \frac{f(x1)_{-} \; f(x2)}{x1 - x2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(xo + \Delta x) - f(xo)}{\Delta x}.$$

Porém*,* a taxa de variação instantânea é igual a f´(x_0).

Portanto, a taxa de variação instantânea de uma função em um ponto é dada pela sua derivada neste ponto.

2.4 Formulas ou Regras de Derivação

Até então, vimos como calcular a derivada de uma função por meio da definição. Entretanto, como esse processo é excessivo e longo, estudaremos algumas regras que nos permitirão calcular a derivada de uma função mais facilmente.

Calcularemos a demonstração de apenas algumas dessas regras, pela aplicação da definição de derivada. As outras regras também podem ser demonstradas pelo mesmo processo.

Vejamos algumas **derivadas fundamentais:**

2.4.1 Derivada da função constante:

Se ***y = f(x) = c*** *então* ***y' = f'(x) = 0*** *.*

Demonstração:

Se x é um ponto qualquer de R temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k-k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

$$\therefore\ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

2.4.2 Derivada da função identidade:

Se ***y = f(x) = x*** *então* ***y' = f'(x) = 1*** *.*

Demonstração:

Se x é um ponto qualquer de R, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

$$\therefore\ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

2.4.3 *Derivada do produto de uma constante por uma função*:

Se ***y = c · g(x)*** *então* ***y' = c · g'(x)*** *.*

Demonstração:

Se x é um ponto qualquer de R, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cg(x+\Delta x) - cg(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot [g(x+\Delta x) - (g(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = c \cdot g'(x)$$

$$\therefore\ y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot g'(x)$$

2.4.4 *Derivada da função potência y = x^n*

Se ***y = x^n*** *então* ***y' = n . x^{n-1}*** *para n inteiro positivo.*

Demonstração:

Fazendo o uso da definição formal de derivadas dada por:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right] = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Expandindo o termo $(x+h)^n$ através do binômio de Newton tem-se uma soma de termos da forma:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{0}x^n h^0+\binom{n}{1}x^{n-1}h^1+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+\binom{n}{n}x^0h^n-x^n}{h}$$

onde $\binom{n}{p}$ é uma combinação simples, dada por $\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Simplificando alguns termos deste limite fica-se com:

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right]=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n-x^n}{h}$$

,o primeiro e último termo se cancelam, assim:

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right]=\lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n}{h}.$$

Em seguida pode-se simplificar os ***"h"***, visto que todos os termos do numerador e o denominador os contém, então:

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right]=\lim_{h\to 0}\left(\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right)$$

Aplicando o limite tem-se: $\frac{d}{dx}\left[x^n\right]=\binom{n}{1}x^{n-1}$.

Sabendo que $\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n$ fica-se com:

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right]=nx^{n-1}.$$

2.4.5 Derivada da função $y = \sqrt[n]{x}$

Se $y = \sqrt[n]{x}$ *então* $y' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{(x)^{n-1}}}, \quad x \neq 0$.

2.4.6 Derivada da soma de funções:

"A derivada da soma é igual à soma das derivadas".

Se $y = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_n(x)$ então $y' = g_1'(x) + g_2'(x) + \dots g_n'(x)$.

2.4.7 Derivada da diferença:

"A derivada da diferença é igual à diferença das derivadas".

Se $y = g(x) - h(x)$ então $y' = g'(x) - h'(x)$.

2.4.8 Derivada do produto:

Se **f** e **g** são deriváveis , então **f.g** é derivável e $\mathbf{(f.g)' = f'.g + f.g'}$

Demonstração:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f.g)(x+\Delta x) - (f.g)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - (f(x).g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x).g(x) + f(x+\Delta x).g(x) - (f(x).g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

Onde subtraímos e somamos f (x +Δx). g (x) no numerador da fração, a fim de obter as duas frações que no limite fornecem as derivadas, respectivamente de **g** e **f**. Essas derivadas existem por hipótese. Além disso, quando Δx tende a zero f (x + Δx) tende a f (x), logo

$$(f.g)'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

como queríamos demonstrar

2.4.9 Derivada do quociente de duas funções:

Seja $y = \frac{u(x)}{v(x)}$**;** se existirem as derivadas u'(x) e v'(x),

então $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, para $v \neq 0$.

E as outras regras também podem ser demonstradas pelo mesmo processo.

3. Derivadas e suas aplicações na Educação Básica

Em um estudo realizado com alunos ingressantes na universidade, no aprofundamento e o entendimento dos conceitos estudados em Cálculo Diferencial, referentes à prática de regras e técnicas, tais como: métodos para o cálculo de limite, técnicas de derivação, dentre outras.

Observou a interação entre os conhecimentos científicos e profissionalizantes e do entendimento de que o ensino deve ser direcionado a situações reais.

Estudo feito por ANDRADE (2008), foi apresentado conceitos matemáticos que são utilizados nas diferentes áreas da Química e definiram estes mesmos conceitos utilizando exemplos contextualizados com a Química, a fim de elaborar um material para professores e para alunos, onde os mesmos possam desfrutar de maneira a aperfeiçoar seus conhecimentos sobre o Cálculo, além de fazer com que percebam a importância de sua utilização como ferramenta na Química.

Diante disto, Lima (2016) analisando a importância do cálculo diferencial como ferramenta útil para economistas e administradores na determinação do custo marginal de produção. Essa ferramenta utilizada no plano empresarial pode ajudar as empresas a descobrir qual o custo de se produzir uma unidade adicional de um determinado produto, facilitando, dessa forma, não no controle dos custos de produção e no aumento da eficiência sobre os mesmos.

A compreensão e aprofundamento em conceitos e regras de derivação podem ser observados nas aplicações propostas, que os conceitos que envolvem derivadas, englobam aplicações em várias áreas do conhecimento e em diversas situações do cotidiano, tais como: previsão do tempo, em análise de custo de produto, na engenharia e em moléstia epidêmica. No contexto da previsão do tempo pode ser notada uma variação que depende de fatores como temperatura e ambiente. O mesmo pode-se dizer na área epidemiológica em que ter informações como quantidade de pessoas atingidas por determinada moléstia e o tempo em que a mesma se espalha são de extrema importância para erradicá-la (ALMEIDA et al, 2016).

3.1.1 Aplicações em algumas áreas específicas.

O estudo da derivada apresenta diversas aplicações práticas, ela é Constantemente aplicada em muitos problemas que envolvem o dia-a-dia do ser humano, possibilitando até mesmo resolver situações que envolvam taxas de variação, como:

Aplicação na otimização (método dos máximos e mínimos): talvez a mais difundida a aplicação das derivadas nas universidades seja a otimização de problemas, ou seja, quando utilizamos as derivadas para obter a maximização ou minimização deum determinado fenômeno. Para ser mais claro apresentarei alguns exemplos:

- Minimização do consumo de material.
- Maximização do lucro em função das despesas,
- Maximização da área em função do seu perímetro,
- Otimização do tempo na produção industrial.

Exemplo: Os alunos de uma escola alugaram, para uma festa de formatura, um salão de eventos com capacidade para 150 pessoas. Cada aluno comprometeu-se, de início, a pagar R$10,00. Caso a lotação do estabelecimento não fosse atingida, o gerente propôs que cada aluno que comparecesse pagasse um adicional de R$0,50 por lugar vazio. Qual deve ser a quantidade de alunos presentes à festa de formatura para que a receita seja máxima?

Solução: Seja x o número alunos na festa, tem-se que a receita (R) é dada, em reais, pela função: R (x) = x[10 + 0, 5(150 − x)] = −0, 5x 2 + 85x. Logo, a solução do problema se resume a determinar o valor de x para que a função atinja seu maior valor, isto ocorre quando x = −85/2 · (−0, 5), ou seja, quando x = 85. Portanto, o número de alunos que devem estar presentes na festa para que a receita seja máxima é 85, neste caso a receita será igual a R$ 3612,50.

3.1.2. Aplicação na física

Existe um campo extenso de aplicação das derivadas na física desta, iremos apenas exemplificar para melhor entendimento, primeiramente utilizando a velocidade, que é a derivada do espaço em relação ao tempo.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Da definição de derivada:

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S\,(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Onde **v** é a velocidade e **s** a posição. Na sequência, **a** aceleração que é a derivada da velocidade em relação ao tempo.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Onde a é a aceleração. Assim se temos a equação que descreve aposição de uma determina da partícula, consegui mós obter a equação da velocidade e da aceleração.

Aplicação na biologia: na biologia é muito usada para controle de taxa, em que o tamanho de uma certa população em um determinado instante é da do pelas taxas de natalidade e de mortalidade.

Aplicação na administração: na administração são fortemente ligadas a economia, pois na maior parte das vezes são problemas que envolvem a minimização de custos ou a maximização de lucro, como apresentamos no item acima da otimização.

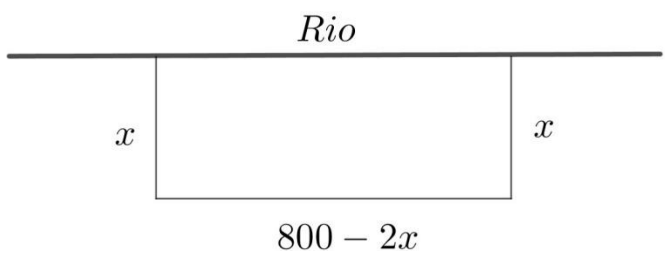
As Derivadas possuem diversas aplicações em inúmeras outras áreas, como na química (exemplo na Lei de Boyle), medicina (exemplo concentração de uma substância no organismo) entre outras.

3.2 Aplicações em Geometria

Vejamos algus exemplos especifico na geometria com o uso da derivada:

Exemplo 1. (O melhor esquema para a cerca)**.** Uma área retangular em uma fazenda será cercada por um rio e nos outros três lados por uma cerca elétrica feita de um fio. Com 800*m* de fio à disposição, qual é a maior área que você pode cercar e quais são suas dimensões?

Solução: Esquema do problema



A área é $\boldsymbol{A(x) = x(800 - 2x)}$, onde $0 \leq x \leq 400$. Resolvendo $\boldsymbol{A'(x) = 800 - 4x} = 0 \Rightarrow x = 200$. Com $A(0) = A(400) = 0$, a área máxima é $A(200) = 80,000m^2$, As dimensões são de $200m$ por $400m$.

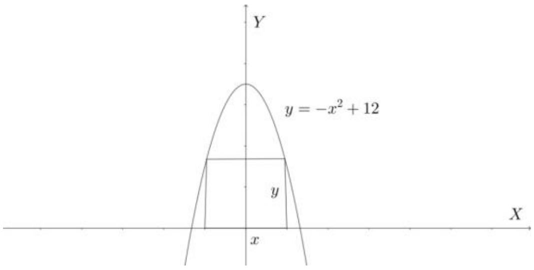
Exemplo 2. Um retângulo tem sua base no eixo x e seus dois vértices superiores na parábola $y = 12 - x^2$. Qual a maior área que esse retângulo pode ter? Quais são suas dimensões?

Solução:

Dado $y = 12 - x^2$ temos que a área do retângulo é $A = 2xy = 2x(12 - x^2)$, onde $0 \leq x \leq \sqrt{12}$. Fazendo $A'(x) = 0$, obtemos

$$-6x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

Esquema do problema.



Como $x = -2$ não está no domínio, e desde que $A(0) = 0$ e $A(\sqrt{12})=0$, concluímos que $A(2) = 32$ unidades quadradas é a área máxima. As dimensões são 4 unidades por 8unidades.

3.3 Aplicações na física

O cálculo diferencial é largamente utilizado na física, mas iniciaremos aqui com exemplos mais básicos de aplicações.

Imagine uma partícula cuja função deslocamento é expressa por $F(t) = 1{,}6t^3 + 3{,}2t - 1{,}8$, onde t é o tempo medido em segundos e a distância em metros.

Bom, primeiro precisamos de uma informação. A derivada $f'(a)$ é a taxa de variação instantânea de $y = f(x)$, em relação a x, quando $x = a$. Sabendo disso, podemos então encontrar a taxa de variação da função $F(t)$, onde a mesma representará a velocidade da partícula. Ou seja, a taxa de variação do deslocamento, será a velocidade da partícula naquele instante. Então se derivarmos a função deslocamento, encontraremos a função velocidade. Observe

$$F(t) = 1{,}6t^3 + 3{,}2t - 1{,}8$$

$$F'(t) = 3(1{,}6t^2) + 3{,}2 - 0$$

$$F'(t) = 4{,}8t^2 + 3{,}2$$

Com a função $F'(t)$, podemos agora determinar a velocidade da partícula em qualquer instante t.

Seguindo com taxa de variação, se derivarmos a função velocidade, encontraremos função aceleração da partícula. Ou seja, a taxa de variação da velocidade é a aceleração. Então continuando com este mesmo exemplo, se quisermos encontrar a aceleração da partícula num instante, devemos, primeiro, encontrar a derivada da função velocidade.

$$F'(t) = 4{,}8t^2 + 3{,}2$$

$$F''(t) = 2(4{,}8t) + 0$$

$$F''(t) = 9{,}6t$$

Atualmente se considera o professor como profissional reflexivo, que decide, desenha implementa e experimenta estratégias de ação para alcançar a aprendizagem dos alunos. Teorias mais influentes em décadas anteriores é a teoria das situações didáticas, de Gui Brousseau, que propõe um estudo sobre as condições nas quais se constitui o conhecimento matemático, e considerando que o controle dessas condições permite reproduzir e otimizar o processo de construção escolar do conhecimento.

O objetivo central da didática da Matemática é averiguar como funciona o processo de

Aprendizagem da Matemática, busca incidir nas práticas humanas da aprendizagem em cenários diferentes, levando a uma mudança sobre os conceitos de aula, de sociedade e do saber.

3.1.4 Aplicação na Biologia

Na biologia, trazemos o uso das derivadas no estudo do crescimento populacional. O tamanho de uma certa população em um determinado instante é dado pelas taxas de natalidade e de mortalidade. As taxas relacionadas são duas ou mais quantidades variando simultaneamente entre si, logo são derivadas, entretanto, nosso objetivo aqui era exemplificar um dos casos em que as derivadas são utilizadas na biologia.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando alguém se propõe a fazer um trabalho de conclusão de curso o tema deve ser algo prazeroso, e o meu não poderia ser diferente. Ao pesquisar sobre cada conteúdo, pude perceber o quão bela é a matemática. Aquela que não se restringe à sala de aula, aquela que contribui, mesmo que indiretamente, na vida de cada um, sem que saibamos.

Pude ampliar ainda mais meus horizontes, ao abordar uma parte da história do cálculo, algo que me pareceu extremamente interessante e que, a meu ver, deveria ser abordado ainda no ensino médio, pois a curiosidade de cada um deve ser sempre estimulada.

As aplicações utilizadas foram todas apresentadas de modo que despertem o interesse do estudo em mais áreas, e que outros acadêmicos possam adquirir conhecimentos acerca das aplicações e levá-las para a sala de aula. Afinal, o curso de Licenciatura em Matemática está nos preparando para isso.

Enfim, posso dizer que este trabalho acrescentou saberes que levarei por toda a minha atuação acadêmica, e, claro, pesquisando cada vez mais. Pois a formação é algo contínuo, e esta graduação é apenas uma etapa de outras que ainda estão por vir.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ALMEIDA, G.R.; AMARAL, E.B.; FERREIRA, M.T. A DERIVADA E SUAS APLICAÇÕES NA CIÊNCIA. XX Encontro Latino Americano de Iniciação Científica, XVI Encontro Latino Americano de Pós-Graduação e VI Encontro de Iniciação à Docência – Universidade do Vale do Paraíba, 2016.

FIGUEIREDO, ELISANDRA B.; SIPLE, IVANETE Z.; AZEVEDO, ELIANE B.; MORO, GRACIELA. Uma experiência de trabalho colaborativo nas disciplinas básicas de matemática nos cursos de Engenharia. ABENGE. Revista de Ensino de Engenharia. v.33, n. 1, p 13-23, 2014.

JUNIOR, P.C.L.R; CARVALHO, T.M.M; CARIELLO, D. Aplicações de Cálculo Diferencial às Ciências Naturais e Humanas: Exercícios de Reflexão e Curiosidades. 10ºEncontro de Educação Matemática, Salvador – BA, 2010.

LIMA, ABIZAI CAMPOS. As Derivadas e a sua Aplicação na Análise Marginal de Custos na Economia. Revista Científica Semana Acadêmica. Fortaleza, nº.84,2016. Disponível em: https://semanaacademica.org.br/artigo/derivadas-e-sua-aplicacao-na-analise-marginal-de-custos-na-economia. Acessado em: 28/05/2021.

PAGANI, Érica M. L.; ALLEVATO, Norma S. G. Ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. VIDYA, 34(2), jul./dez., 2014 - Santa Maria.

STEWART, James. Cálculo, volume I. 5ª edição. São Paulo - SP: Pioneira Thomson Learning, 2006.

FARIA, Sebastião Pereira de. Cálculo I. 8ª edição. Mogi das Cruzes-SP: Cop-Set Reproduções Gráficas, 1991.

LIMA, E. L. Análise real volume 1. Funções de uma variável. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. MATOS, M. P. Séries e Equações Diferenciais. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006.