

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**UMA VISÃO DA GEOMETRIA DE EUCLIDES SOB O  
OLHAR DE BYRNE: Uma sequência didática voltada para a  
educação básica.**

**JOSÉ HORLANDO DA SILVA**

**Maceió - AL  
Março de 2023**



Instituto de Matemática



**PROFMAT**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS**

**UFAL**

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**

**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL**

**EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**PROFMAT**

**JOSÉ HORLANDO DA SILVA**

**UMA VISÃO DA GEOMETRIA DE EUCLIDES SOB O  
OLHAR DE BYRNE: Uma sequência didática voltada para a  
educação básica.**

**Maceió - AL**

**Março de 2023**

**JOSÉ HORLANDO DA SILVA**

**UMA VISÃO DA GEOMETRIA DE EUCLIDES SOB O OLHAR DE  
BYRNE: Uma sequência didática voltada para a educação básica.**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como um dos pré-requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Feliciano  
Marclio Aguiar Vitória

**MACEIÓ – AL**  
**MARÇO de 2023**

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

S586v Silva, José Horlando da.

Uma visão da geometria de Euclides sob o olhar de Byrne : uma sequência didática voltada para a educação básica / José Horlando da Silva. – 2023.

35 f. : il. color.

Orientador : Feliciano Marcílio Aguiar Vitória  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 35.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Métodos de ensino. 3. Sequência didática. I. Título.

CDU: 51: 371.13

Dedico este trabalho aos meus  
pais e aos meus irmãos.

## AGRADECIMENTOS

É hora de agradecer a todos que se fizeram presentes comigo nesta caminhada que não foi fácil. Começo agradecendo a Deus que é dono de toda a supremacia do universo e sem ele isso não seria possível. Agradeço, de forma especial, aos meus pais por todo o incentivo desde que nasci e por me aconselharem ao caminho do bem. Mãe e Pai (Dona Tal e Seu Zé Malá), vocês são os meus alicerces!

Agradeço aos meus irmãos Tinha, Tindô, Deca, Ninha e Pepe por sempre acreditarem em mim. Vocês são rochedo!

Agradeço aos profissionais da educação da Escola Estadual Josefa Cavalcante Suruagy, situada em Boca da Mata/AL. Onde destaco: Rozane, Ana Maria, Cícera, César Elói, Filipe Santos, Raimundo Jorge e Alberto Magno. Obrigado por todo apoio neste percurso!

Agradeço aos meus colegas de PROFMAT, em especial ao Cícero Farias, Jefferson David e Wesley Handerson por todas as conversas e resolução de questões durante o curso. Galera, vocês são pipoco!

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Feliciano Marcílio por todas as conversas, tira-dúvidas e correções deste trabalho. Feliciano, obrigado por tudo!

Por fim, agradeço ao meu amigo e Prof. Dr. Isnaldo Isaac e sua esposa Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Adina Rocha por todo apoio e tira-dúvidas para o exame de qualificação.

“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo”.

Galileu Galilei

## RESUMO

Como proposta de apresentação e uso de metodologias de alguns conteúdos na matemática básica, este presente trabalho trata de uma metodologia diferente da que os alunos estão acostumados a vivenciar na escola. A metodologia e prática que vos apresento, foi apresentada através de uma sequência didática para alguns alunos da Escola Estadual Josefa Cavalcante Suruagy, situada na cidade de Boca da Mata – AL. Trata-se da maneira que Oliver Byrne apresenta o livro “Os elementos” escrito por Euclides. Esta metodologia apresenta uma maneira diferente e inovadora deste livro tão importante no ramo matemático. Byrne apresenta as construções e demonstrações usando as cores vermelho, azul, amarelo e preto. Neste trabalho, os alunos construíram um triângulo equilátero e demonstraram o teorema de Pitágoras utilizando a proposta de Byrne para o livro “Os elementos” escrito por Euclides. Além disso, este trabalho mostra os resultados das construções e opinião dos alunos acerca da metodologia.

**Palavras – chave:** Os elementos. Oliver Byrne. Ensino de matemática. Sequência didática.

## **ABSTRACT**

As a proposal of presentation and use of methodology in some maths basic content, this work is about a different methodology from the ones that the students are used to dealing at school. The methodology and practice that I present to you was designed through a didactic sequence for some students from Josefa Cavalcante Suruagy School, situated in Boca da Mata- AL, Brazil. It's about Oliver Byrne's way presented in the book "The Elements" written by Euclides. This methodology presents a different and inventive way from such book which is so important in maths area. Byrne presents the buildings and demonstrations using colors as red, blue, yellow and black. In this work, the students built an equilateral triangle and demonstrated the Pythagorean theorem using Byrne's proposal for the book:" The Elements" written by Euclides. Furthermore, this work shows the results of what was built and students' opinion about the methodology.

Keywords: The elements. Oliver Byrne. Teaching of Maths. Didactic Sequence.

## LISTA DE FIGURAS

<b>FIGURA 1</b> - Localização da cidade de Boca da Mata no mapa de Alagoas .....	13
<b>FIGURA 2</b> - Construção de um triângulo equilátero (Euclides) .....	17
<b>FIGURA 3</b> – Construção de um triângulo equilátero (Byrne) .....	18
<b>FIGURA 4</b> – Demonstração do teorema de Pitágoras (Euclides) .....	20
<b>FIGURA 5</b> – Demonstração do teorema de Pitágoras (Byrne) .....	22
<b>FIGURA 6</b> – Construções feitas pelos alunos do 2º ano (triângulo equilátero) .....	25
<b>FIGURA 7</b> – Construções feitas pelos alunos do 3º ano (triângulo equilátero) .....	26
<b>FIGURA 8</b> – Construções feitas pelos alunos do 2º ano (teorema de Pitágoras) .....	27
<b>FIGURA 9</b> – Construções feitas pelos alunos do 3º ano (teorema de Pitágoras) .....	28
<b>FIGURA 10</b> – Construção dos círculos C1 e C2 .....	29
<b>FIGURA 11</b> – Construção dos raios de C1 e C2 .....	29
<b>FIGURA 12</b> – Construção dos quadrados de áreas $(a + b)^2$ e $c^2$ .....	30
<b>FIGURA 13</b> – Construção dos quadrados de áreas $a^2$ , $b^2$ e dos retângulos de áreas $a.b$ .....	30
<b>FIGURA 14</b> – Divisão dos retângulos em triângulos .....	31
<b>FIGURA 15</b> – Soma das áreas dos quadrados .....	31
<b>FIGURA 16</b> – Gráfico referente à tabela 1 .....	32
<b>FIGURA 17</b> – Gráfico referente à tabela 2 .....	33
<b>FIGURA 18</b> – Gráfico referente à tabela 3 .....	34
<b>FIGURA 19</b> – Gráfico referente à tabela 4 .....	35
<b>FIGURA 20</b> – Gráfico referente à tabela 5 .....	36
<b>FIGURA 21</b> – Gráfico referente à tabela 6 .....	37

## **LISTA DE TABELAS**

<b>TABELA 1</b> – Opiniões dos alunos referentes à pergunta 1 .....	32
<b>TABELA 2</b> - Opiniões dos alunos referentes à pergunta 2 .....	33
<b>TABELA 3</b> - Opiniões dos alunos referentes à pergunta 3 .....	34
<b>TABELA 4</b> - Opiniões dos alunos referentes à pergunta 4 .....	35
<b>TABELA 5</b> - Opiniões dos alunos referentes à pergunta 5 .....	36
<b>TABELA 6</b> – Opiniões dos alunos referentes à pergunta 6 .....	37
<b>TABELA 7</b> - Opiniões dos alunos referente à metodologia utilizada .....	37

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>11</b>
<b>2. BASES LEGAIS E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>13</b>
<b>3. EUCLIDES X BYRNE.....</b>	<b>17</b>
3.1 - Construção de um triângulo equilátero (por Euclides) .....	17
3.2 – Construção de um triângulo equilátero (por Byrne) .....	18
3.3 – Demonstração do teorema de Pitágoras (por Euclides) .....	20
3.4 – Demonstração do teorema de Pitágoras (por Byrne) .....	22
<b>4. ESTUDO DE CASO.....</b>	<b>24</b>
4.1 – Metodologia.....	25
<b>4.1.1 – Construindo um triângulo equilátero.....</b>	<b>25</b>
<b>4.1.2 – Demonstração do teorema de Pitágoras.....</b>	<b>27</b>
4.2 – Detalhes das construções.....	29
<b>5. AVALIAÇÃO.....</b>	<b>32</b>
<b>6. CONCLUSÃO.....</b>	<b>40</b>
<b>7. BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>41</b>
<b>APÊNDICE A – Plano de aula 01.....</b>	<b>42</b>
<b>APÊNDICE B – Plano de aula 02.....</b>	<b>43</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Existem inúmeros métodos em que o professor da educação básica pode adotar em sua sala de aula com o objetivo de maximizar os conhecimentos matemáticos dos alunos. O presente trabalho trata de uma sequência didática, uma metodologia relacionada com o ensino de matemática na educação básica. A metodologia usada se refere ao uso de um dos livros mais importantes da humanidade: Os elementos, escrito por Euclides. Neste trabalho, será abordada a metodologia de uma das versões de “Os elementos”, que é “Os seis primeiros livros dos elementos de Euclides”, escrito por Oliver Byrne. Nele, Byrne mostra uma versão colorida de “Os elementos”, usando as cores vermelho, azul, amarelo e preto.

Após a escrita de “Os elementos” por Euclides, por volta do ano 300 a.c., várias versões derivadas foram reescritas em vários idiomas e por vários escritores distintos. Dentre eles: Erhard Ratdolt em 1482, John Day em 1570, Jacob Kundig em 1562, Bruce Rogers em 1944. Onde este último escreveu após a versão de Oliver Byrne que foi em 1847.

A abordagem que será mostrada neste texto foi aplicada com 7 alunos do ensino médio, de diferentes séries da Escola Estadual Josefa Cavalcante Suruagy que está situada na cidade de Boca da Mata – AL.

Como mencionado anteriormente, mostraremos duas construções do livro escrito por Oliver Byrne, em 1847, com o objetivo de apresentação da metodologia. As construções são: Triângulo equilátero e a demonstração do teorema de Pitágoras.

Apresentaremos um pouco da cidade de Boca da Mata dando ênfase em seus dados educacionais, trataremos da Escola Estadual Josefa Cavalcante Suruagy através de sua estrutura física e organizacional e abordaremos as fundamentações teóricas e bases legais que regem o ensino no Brasil (BNCC, PCN, entre outros) que foram utilizados neste trabalho.

Mostraremos os problemas apresentados aos alunos pelo ponto de vista do livro “Os elementos”, escrito por Euclides e do livro “Os seis primeiros livros dos elementos de Euclides”, escrito por Oliver Byrne. Neste capítulo também, apresentamos a construção passo a passo do triângulo equilátero, assim como também da demonstração do teorema de Pitágoras do ponto de vista desses dois livros.

Em seguida, trataremos das construções tratadas no capítulo 2 deste trabalho feitas pelos alunos, o método usado, o passo a passo das construções feitas pelos alunos e detalhamento de cada construção.

Dando continuação, abordaremos a avaliação realizada com os alunos composta por 6 perguntas e uma opinião final realizada através do google forms. Apresentaremos as respostas dos alunos através de uma tabela e de um gráfico referente a cada pergunta.

Por fim, falaremos da conclusão deste trabalho como um todo e, através de dois apêndices, mostraremos duas sequências didáticas que servem como sugestão para professores e alunos que quiserem usar essa didática.

## 2. BASES LEGAIS E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Boca da Mata é uma cidade alagoana que está localizada na zona da mata do estado, possui uma extensão territorial igual a 193.002 km<sup>2</sup> (IBGE, 2022), possui população estimada em 27.429 pessoas (IBGE, 2021).

**Figura 1 – Localização da cidade de Boca da Mata no mapa de Alagoas.**



Fonte: Wikipédia.

Com relação à educação, o município possui 15 (quinze) escolas, sendo 03 (três) particulares, 01 (uma) estadual e 11 (onze) municipais.

Em se tratando do IDEB na rede pública de Boca da Mata, temos que:

- a) Anos iniciais do ensino fundamental: 4,9
- b) Anos finais do ensino fundamental: 4,0

Fonte: IBGE, 2021.

Este trabalho foi desenvolvido na Escola Estadual Josefa Cavalcante Suruagy, situada na cidade de Boca da Mata/AL cujo número do INEP é 27041603. A Escola Josefa Cavalcante Suruagy pertence a rede estadual de alagoas, funciona nos turnos matutino, vespertino e noturno e oferta o ensino médio nas modalidades regular, integral e educação de jovens e adultos (EJA).

Acerca da estrutura física da escola, a mesma possui 10 (dez) salas de aulas, 1 (um) auditório, 1 (uma) biblioteca, 1 (um) laboratório de informática, 1 (um) pátio, 1 (uma) secretaria, 1 (uma) sala dos professores, 1 (uma) cozinha, 4 (três) banheiros (1 masculino, 1 feminino, 1 dos funcionários de serviços adversos e 1 dos professores), 1 (uma) sala de atendimento especializado, 1 (uma) sala de coordenação e 1 (uma) sala da direção. No último índice de desenvolvimento da educação básica (IDEB) contabilizado da escola, a mesma obteve nota 4,0 (MEC, 2019).

Neste ano letivo de 2023, a referida escola possui em andamento 23 turmas, sendo 14 do ensino regular, 4 turmas do ensino integral e 5 turmas da educação de jovens e adultos (EJA).

O principal objetivo deste trabalho é apresentar uma alternativa ao ensino tradicional de geometria no ensino médio através de uma abordagem construtiva, proposta por Byrne (1847), para que o aluno verifique a validade de resultados abstratos da geometria euclidiana visualizando demonstrações e construções geométricas.

Nossa abordagem se coaduna com o que é proposto nos parâmetros curriculares nacionais:

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (PCN, 2000).

Diante disso, mostraremos que há várias formas de se ensinar matemática, e mais precisamente, geometria, utilizando uma didática diferente da convencional sem deixar de utilizar as bases da BNCC, PCN e outros documentos norteadores existentes no ensino de matemática.

Sabe-se que a matemática é dividida em várias áreas, donde podemos enfatizar, neste trabalho, a álgebra e a geometria. É natural que percebamos várias semelhanças entre essas áreas.

Podemos destacar isso na base nacional comum curricular:

Um ponto a ser destacado é a aproximação da álgebra com a geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano por meio da geometria analítica. (BNCC, 1996).

Para o ensino de matemática, pode-se utilizar essas relações e interseções entre áreas no ensino fundamental e também no ensino médio afim de mostrar aos alunos a beleza da matemática e fazer as interpretações existentes nestas interseções.

Neste trabalho, enfatizo ainda a utilização de uma importante aplicação de geometria existente na base nacional comum curricular:

A geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixe de paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. (BNCC, 1996).

Como visto em citações anteriores, destacamos que o ensino de geometria não pode ficar restrito a um método, mas sim, que podemos desmitificar o ensino desta área da matemática e fazer com que haja maneiras diferentes de apresentar a mesma.

Para essa abordagem, gostaria de anunciar o livro base deste trabalho: “Os elementos”, escrito por Euclides de Alexandria por volta de 300 a.c. Euclides é considerado o pai da geometria e “Os elementos” foi o livro mais importante escrito pelo mesmo por apresentar definições, axiomas, resultados e outras vertentes matemáticas.

“Os elementos” é um livro composto por 13 livros donde cada livro contém várias proposições.

Após várias impressões de “Os elementos”, abordaremos neste trabalho, uma versão que condiz com a beleza que este livro mostra. Trata-se do livro “Os primeiros seis livros dos elementos de Euclides”, de Oliver Byrne (1810 -1880).

Oliver Byrne (1810 – 1880) nascido na Inglaterra, autor do livro “Os primeiros seis livros dos elementos de Euclides” foi autor de vários outros livros e autor de uma das versões do livro “Os elementos” de Euclides 300 a.c.

Nesse livro, Byrne (1847) apresenta as construções e demonstrações são apresentadas através de diagramas e símbolos coloridos.

A didática proposta neste trabalho tem a estrutura utilizada por Byrne(1847) em seu livro.

O trabalho de Byrne (1847) foi taxado, na época, como “obra de arte” por mostrar uma versão bem estruturada com cores nas construções e demonstrações de “Os elementos” escrito por Euclides. Após a versão de Byrne (1847), vários trabalhos de experiência dentro da sala de aula foram desenvolvidos. Sua didática excepcional traz uma nova maneira de ser apresentada pelos alunos.

Foi ideia de Byrne em 1847 criar algo que tornasse o ensino de geometria mais fácil e atrativo para os alunos. E assim o fez. Nos “Seis primeiros livros de Euclides” de Byrne (1847) há o uso das cores vermelhas, azul, amarelo e preto para ilustrar as construções e demonstrações assim como também há os detalhes das provas.(GERALD - ELIZABETH, MAA 2010).

Em seu artigo, os italianos Bolondi – Luigini (2018), destacam além do uso da didática de Byrne, o uso do geogebra para as construções e demonstrações.

Além disso, Bolondi – Luigini (2018) realizam experimentos com alguns alunos usando esta didática de Byrne (1847) e mostra os resultados.

### 3. EUCLIDES X BYRNE

Neste capítulo, abordaremos as aplicações usadas com os alunos em sala de aula do ponto de vista do livro “Os elementos” de Euclides e do ponto de vista do livro “Os seis primeiros capítulos dos elementos de Euclides” de Oliver Byrne.

Nesta análise, além dos enunciados das construções, mostraremos o passo a passo das mesmas sob o olhar dos livros citados afim de fazermos uma comparação entre as construções.

A seguir, veremos a construção de um triângulo equilátero sob o ponto de vista dos livros citados anteriormente.

#### 3.1 Construção de um triângulo equilátero

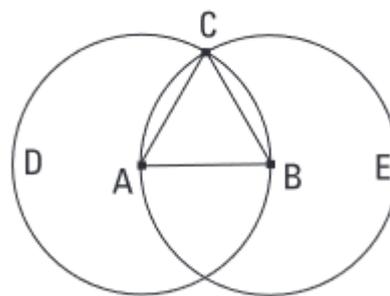
##### “Os elementos” de Euclides

##### Livro I

##### Proposição I

Construir um triângulo equilátero sobre uma reta limitada dada.

**Figura 2 – Construção de um triângulo equilátero.**



Fonte: Os elementos, Euclides.

##### **Construção:**

Seja a reta limitada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero.

Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA e CB.

E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual a AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual a BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual a CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.

Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada AB.

### 3.2 Construção de um triângulo equilátero

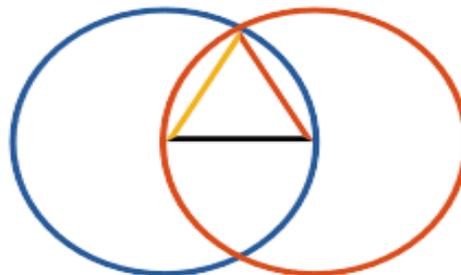
## “Os seis primeiros livros dos elementos de Euclides” de Oliver Byrne

### Livro I

### Proposição I

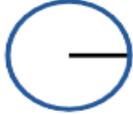
Construir um triângulo equilátero sobre uma reta limitada dada.

**Figura 3 – Construção de um triângulo equilátero.**



Fonte: Os seis primeiros livros dos elementos de Euclides, Oliver Byrne.

**Construção:**

Considere  e  raios dos círculos;

Desenhar  e  também raios dos círculos;

Então o triângulo  será equilátero.

De fato, como  =  e  =  então, concluímos que

 =  . E portanto, o triângulo  é equilátero como queríamos.

Na sequência, mostraremos a demonstração do teorema de Pitágoras sob o ponto de vista dos dois livros.

### 3.3 Demonstração do teorema de Pitágoras

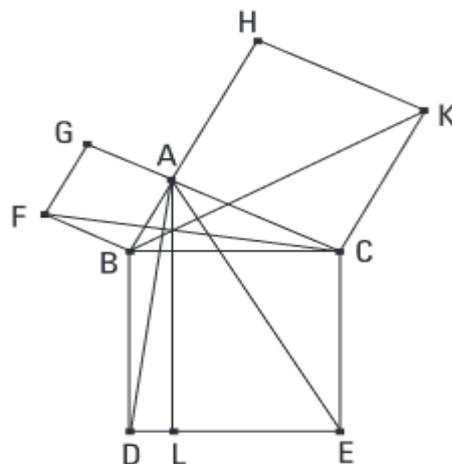
#### “Os elementos” de Euclides

##### Livro I

##### Proposição 47

Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.

Figura 4 – Demonstração do teorema de Pitágoras.



Fonte: Os elementos, Euclides.

#### Demonstração:

Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre BA, AC.

Fiquem, pois, descritos, por um lado, o quadrado BDEC sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC sobre as BA, AC, e, pelo A, fique traçada a AL paralela a qualquer uma das BD, CE; e fiquem ligadas as AD, FC. E, como cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto, então, as duas retas AC, AG, não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a BA, e

no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a CA está sobre uma reta com a AG. Pelas mesmas coisas, então, também a BA está sobre uma reta com a AH. E, como o ângulo sob DBC é igual ao sob FBA; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob ABC Comum; portanto, o sob DBA todo é igual ao sob FBC todo. E como, por um lado, a DB é igual à BC, e, por outro lado, a FB, à BA, então, as duas DB, BA são iguais às duas FB, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob DBA é igual ao ângulo sob FBC; portanto, a base AD é igual a base FC, e o triângulo ABC é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, o paralelogramo BL é o dobro do triângulo ABD; pois, tanto tem a mesma base BD quanto estão nas mesmas paralelas BD, AL; e, por outro lado, o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC; pois, de novo, tanto tem a mesma base FB quanto estão nas mesmas paralelas FB, GC. Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si; portanto, também o paralelogramo BL é igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, então, sendo ligadas às AE, BK, será provado também o paralelogramo CL igual ao quadrado HC; portanto, o quadrado BDEC todo é igual aos quadrados GB, HC. E, por um lado, o quadrado BDEC foi descrito sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC, sobre as BA, AC. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC.

Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contém o ângulo reto; o que era preciso provar.

### 3.4 Demonstração do teorema de Pitágoras

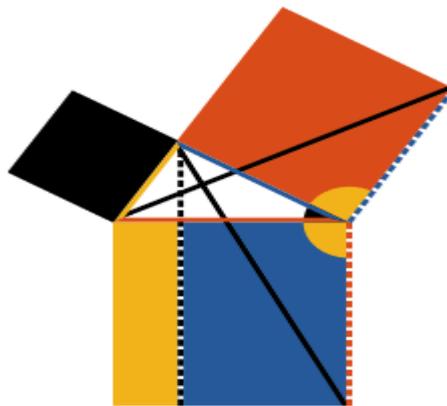
#### “Os seis primeiros livros dos elementos de Euclides” de Oliver Byrne

##### Livro I

##### Proposição 47

Em um triângulo retângulo  o quadrado da hipotenusa  é igual a soma dos quadrados dos lados  e .

Figura 5 – Demonstração do teorema de Pitágoras.



Fonte: Os seis primeiros livros de Euclides, Oliver Byrne.

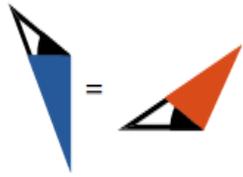
#### Demonstração:

Em ,  e  descrever os quadrados;

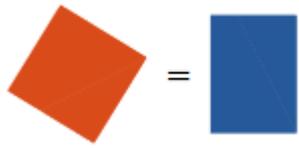
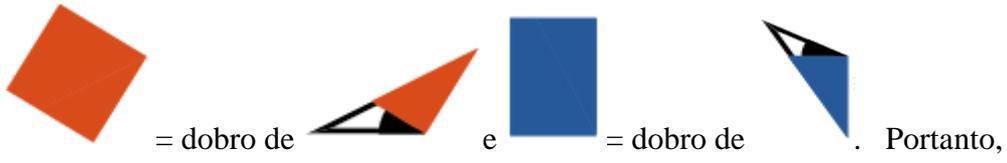
Desenhar  || . Também desenhar  e ,  = .

A cada um adicionar . Portanto  = ,  =  e  = .

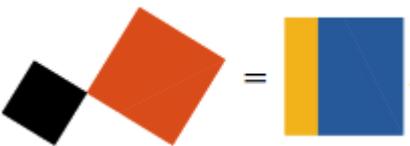
E daí,



Novamente, 



Da mesma forma, pode-se mostrar que  ;

Consequentemente, .

## 4. ESTUDO DE CASO

O estudo de caso foi realizado com alunos do ensino médio e teve a participação de alunos dos 2ºs e 3ºs anos do ensino médio. A proposta foi verificar os conhecimentos matemáticos de cada aluno das séries em questão, e também fazer uso destes conhecimentos em uma sequência didática proposta pelo intermediador/professor.

A sequência didática proposta trata de duas aplicações de geometria básica na qual tiveram a participação de:

**1ª aplicação:** 7 alunos

**2ª aplicação:** 6 alunos

Os tópicos a seguir tratam das aplicações realizadas com os alunos e teve como base o livro “Os elementos” de Euclides.

### **1ª aplicação**

Trata da construção do triângulo equilátero cujo enunciado é: **Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada.**

### **2ª aplicação**

Trata de uma demonstração do teorema de Pitágoras cujo enunciado é: **Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.**

## 4.1 METODOLOGIA

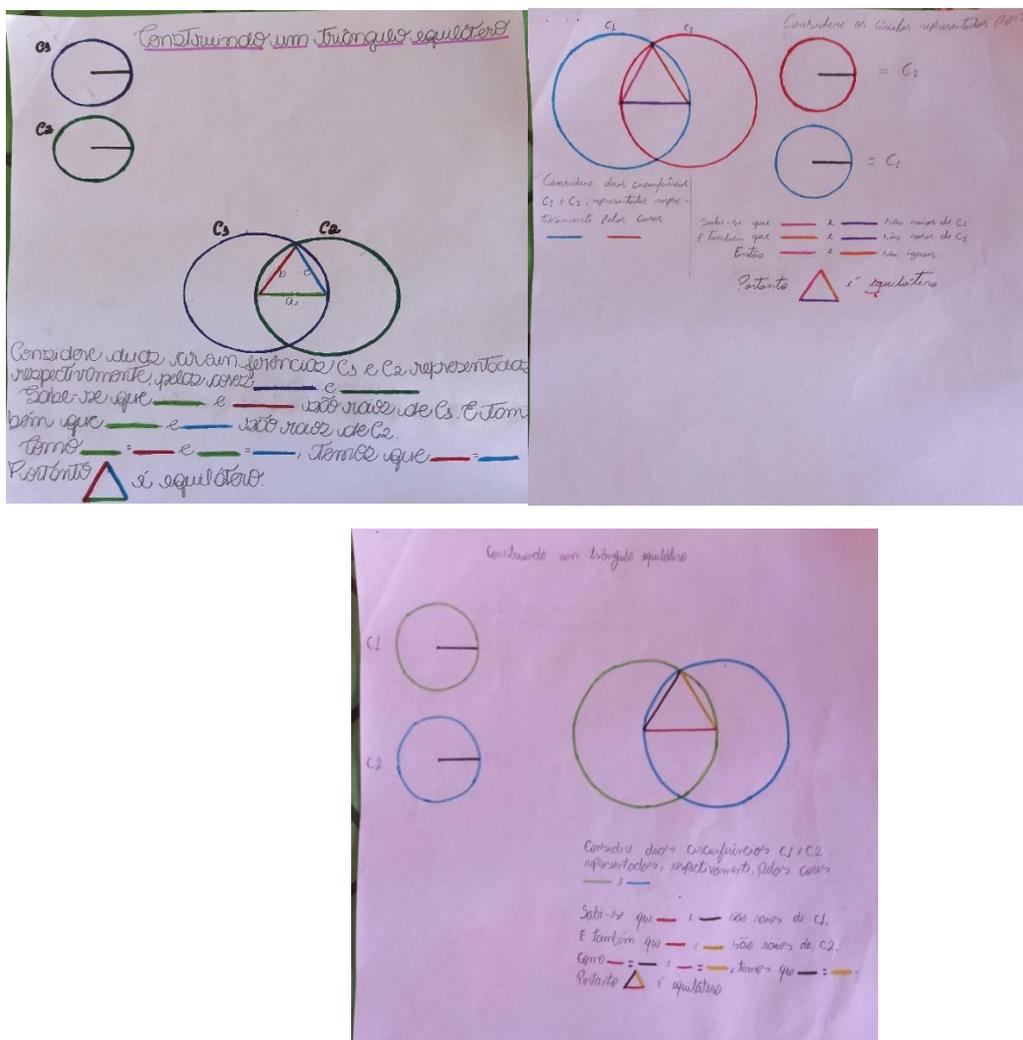
Os alunos foram separados em grupos de acordo com sua respectiva série.

Separados em grupos, os alunos construíram, inicialmente, o **triângulo equilátero (1ª aplicação)** cada um em sua folha individualmente, usando suas próprias cores mas com a mesma ideia do livro “Os seis primeiros livros dos elementos de Euclides” de Oliver Byrne.

A construção se deu através de uma breve explicação acerca do conceito de raio de uma circunferência. Nesta construção tivemos a participação de 7 alunos (3 da 2ª série +4 da 3ª série). Vejamos abaixo, registros das construções realizadas por eles.

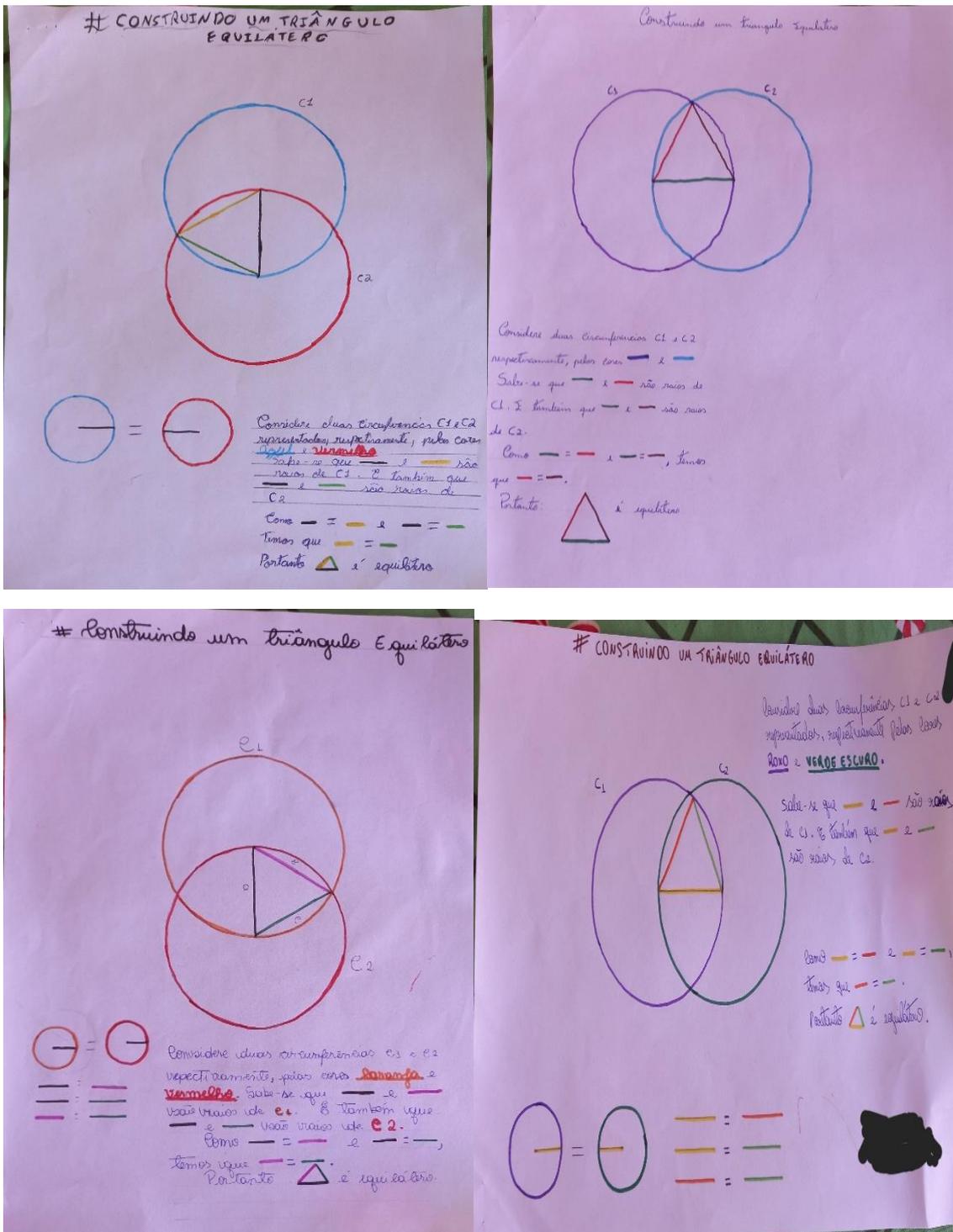
### 4.1.1 Construindo um triângulo equilátero

Figura 6 – Construções feitas pelos alunos do 2º ano (triângulo equilátero).



Fonte: O autor.

Figura 7 – Construções feitas pelos alunos do 3º ano (triângulo equilátero).



Fonte: O autor.

Materiais utilizados: Papel A4, régua, compasso, lápis hidrocor, caneta esferográfica/lápis.

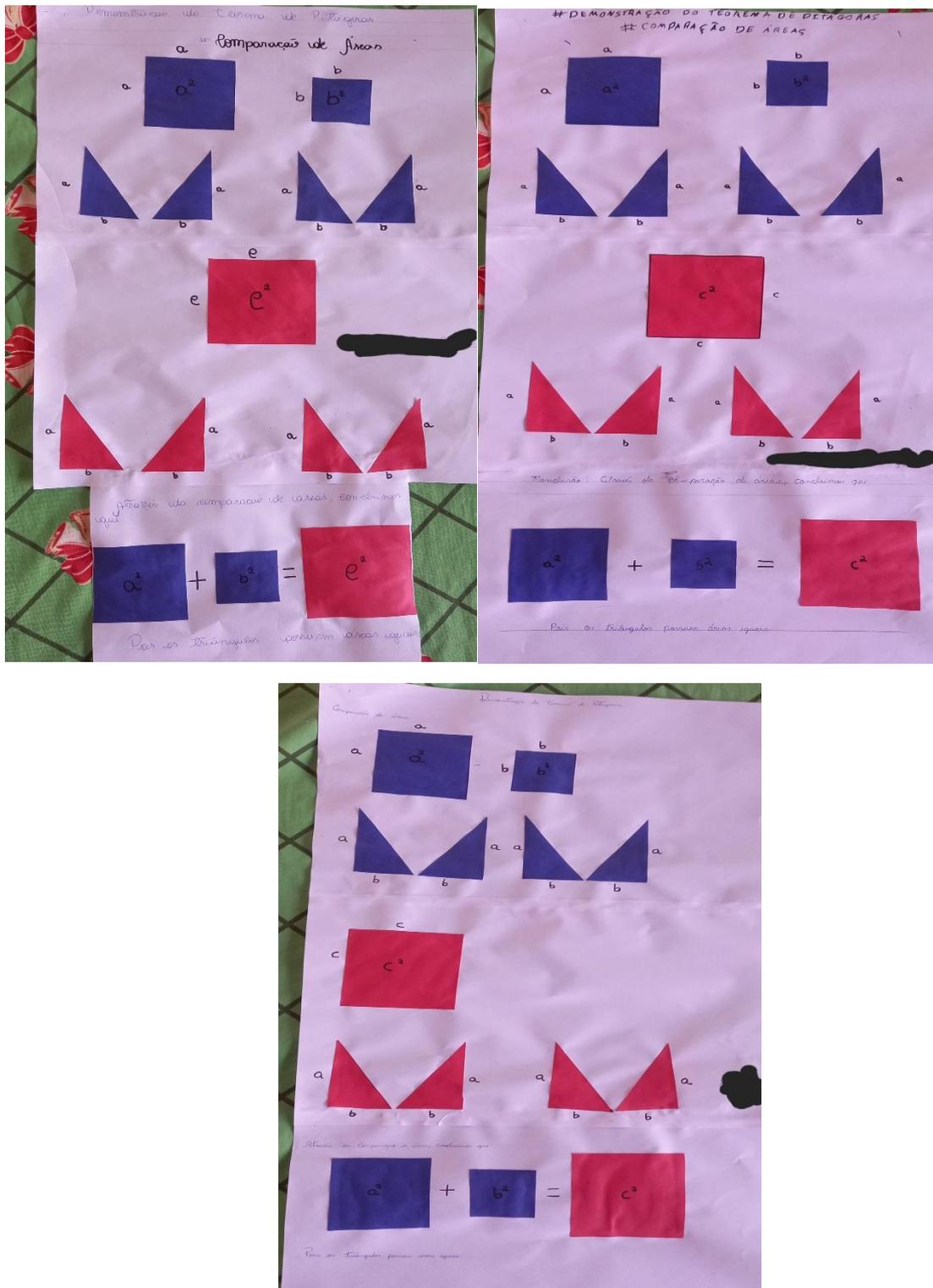
Na segunda atividade, foi mostrada aos alunos, uma demonstração algébrica do teorema de Pitágoras, e em seguida, os alunos formados em grupos, fizeram uma demonstração abdicando dos conceitos algébricos. Esta atividade foi realizada por 6 alunos (3 da 2ª série +3 da 3ª série). Vejamos abaixo, as demonstrações de cada um:

### 4.1.2 Demonstração do teorema de Pitágoras

Figura 8 - Construções feitas pelos alunos do 2º ano (teorema de Pitágoras).



Figura 9 - Construções feitas pelos alunos do 3º ano (teorema de Pitágoras).



Fonte: O autor.

**Materiais utilizados:** Papel A4, cartolina colorida, tesoura, régua, caneta esferográfica e cola.

## 4.2 Detalhes das construções

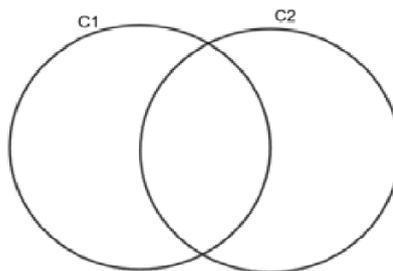
### Construção 1: triângulo equilátero

Separados em grupos de acordo com sua respectiva série, inicialmente foi mostrada a definição de raio e diâmetro do círculo e os alunos construíram o triângulo equilátero seguindo os seguintes passos:

**Passo 1:** Construção de um círculo C1 usando o compasso;

**Passo 2:** Usando a mesma abertura do compasso, foi construído o círculo C2. Como mostra a figura:

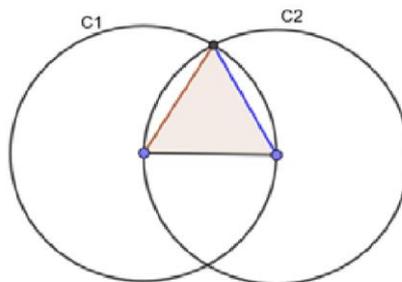
**Figura 10 – Construção dos círculos C1 e C2.**



Fonte: O autor.

**Passo 3:** Marcação dos raios, comparação dos raios e construção final do triângulo equilátero. Como mostra a figura abaixo:

**Figura 11 – Construção dos raios de C1 e C2.**



Fonte: O autor.

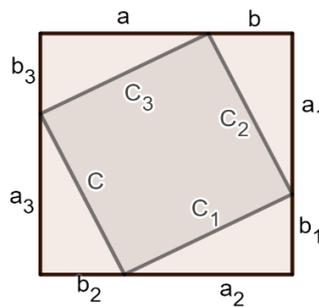
## Construção 2: Demonstração do teorema de Pitágoras

Separados em grupos de acordo com sua respectiva série, os alunos construíram uma demonstração para o teorema de Pitágoras utilizando comparação entre áreas. A seguir, teremos o passo a passo de como foram feitas as construções.

**Passo 1:** Cortaram dois quadrados de cores diferentes mas com mesmo tamanho;

**Passo 2:** Escolhendo um dos dois quadrados, marca-se um ponto em cada lado do quadrado de comprimentos “a” e “b” ligando-os consecutivamente formando outro quadrado de lado c. Na figura abaixo, a, a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub> e a<sub>3</sub> tem os mesmos comprimentos, assim como b, b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub> e b<sub>3</sub> e, c, c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub> e c<sub>3</sub>.

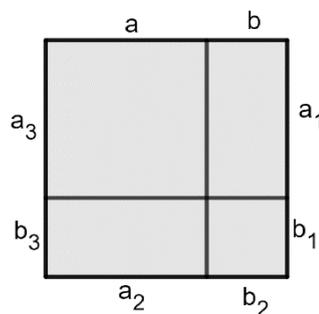
**Figura 12 – Construção dos quadrados de áreas  $(a + b)^2$  e  $c^2$ .**



Fonte: O autor.

**Passo 3:** Em seguida, constrói-se outro quadrado com os mesmos comprimentos “a” e “b” do quadrado inicial. Sendo que a, a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub> e a<sub>3</sub> tem os mesmos comprimentos, assim como b, b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub> e b<sub>3</sub>.

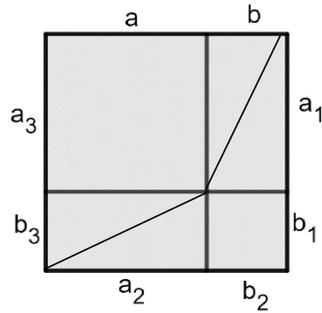
**Figura 13 – Construção dos quadrados de áreas  $a^2$ ,  $b^2$  e dos retângulos de áreas  $a \cdot b$ .**



Fonte: O autor.

**Passo 4:** Dividir o retângulo de área “ab” em dois triângulos iguais de áreas  $\frac{ab}{2}$  cada um conforme a figura abaixo:

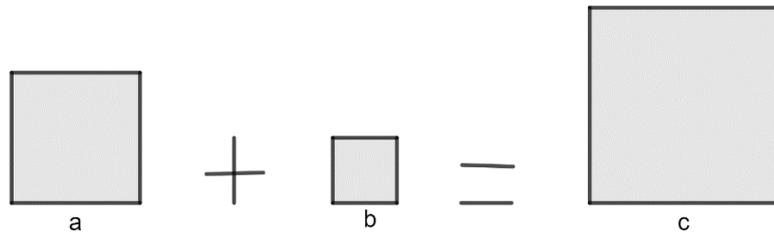
**Figura 14 – Divisão dos retângulos em triângulos.**



Fonte: O autor.

**Passo 5:** Comparando os dois quadrados, concluir que as áreas dos triângulos são iguais e que  $a^2 + b^2 = c^2$ , ou seja:

**Figura 15 – Soma das áreas dos quadrados.**



Fonte: O autor.

## 5. AVALIAÇÃO

Com base nas atividades propostas e realizadas com os alunos citadas no capítulo 3 deste trabalho, seguem abaixo as opiniões dos alunos, dispostos em tabela e nos gráficos, acerca das mesmas de acordo com a legenda:

**Nas perguntas abaixo, você deve selecionar:**

- 1- Discordo Totalmente
- 2- Discordo
- 3- Nem concordo nem discordo
- 4- Concordo
- 5- Concordo Totalmente

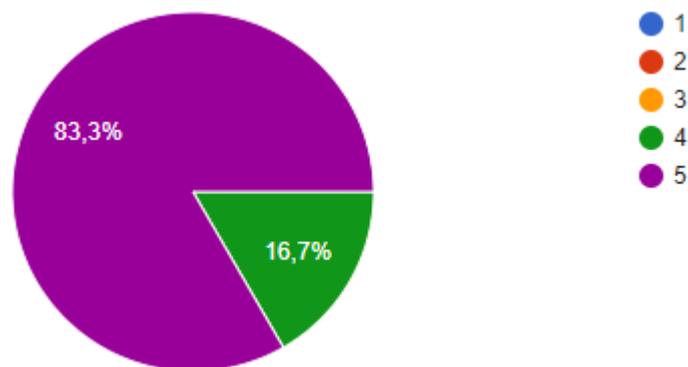
**Pergunta 1:** Os problemas utilizados contribuíram para seu conhecimento matemático?

**Tabela 1 – Opiniões dos alunos referentes à pergunta 1.**

Alunos	Série	Opinião
Aluno 1	3 <sup>a</sup>	5
Aluno 2	3 <sup>a</sup>	5
Aluno 3	2 <sup>a</sup>	5
Aluno 4	2 <sup>a</sup>	5
Aluno 5	3 <sup>a</sup>	5
Aluno 6	2 <sup>a</sup>	4

Fonte: O autor.

**Figura 16 – Gráfico referente à tabela 1.**



Fonte: O autor.

Os resultados obtidos durante a pesquisa indicam uma melhor compreensão por parte dos alunos nos conteúdos apresentados. O que nos leva a intuir que a visualização dos problemas como proposto por Byrne, de fato contribuíram para o processo de ensino-

aprendizagem de forma efetiva. De acordo com a tabela e o gráfico acima, podemos concluir nesta pergunta que, as aplicações, os elementos e resultados obtidos contribuíram de forma satisfatória com relação ao conhecimento matemático dos alunos.

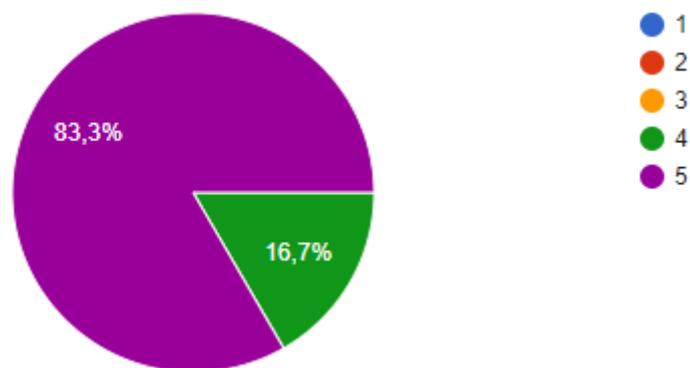
**Pergunta 2:** Você acredita que as aplicações utilizadas foram de fácil entendimento?

**Tabela 2 – Opiniões dos alunos referentes à pergunta 2.**

Alunos	Série	Opinião
Aluno 1	3 <sup>a</sup>	5
Aluno 2	3 <sup>a</sup>	5
Aluno 3	2 <sup>a</sup>	5
Aluno 4	2 <sup>a</sup>	4
Aluno 5	3 <sup>a</sup>	5
Aluno 6	2 <sup>a</sup>	5

Fonte: O autor.

**Figura 17 – Gráfico referente à tabela 2.**



Fonte: O autor.

A didática de Byrne proporciona uma melhor visualização dos conceitos utilizados nas construções, pois mostram cada detalhe de uma forma diferente, que é usando figuras, sem perder o rigor matemático. De acordo com a tabela e gráfico acima, nota-se que os conceitos vistos e suas aplicações foram de fácil entendimento por parte dos alunos. Isto mostra que os alunos compreenderam bem as ideias e os conceitos das aplicações feitas.

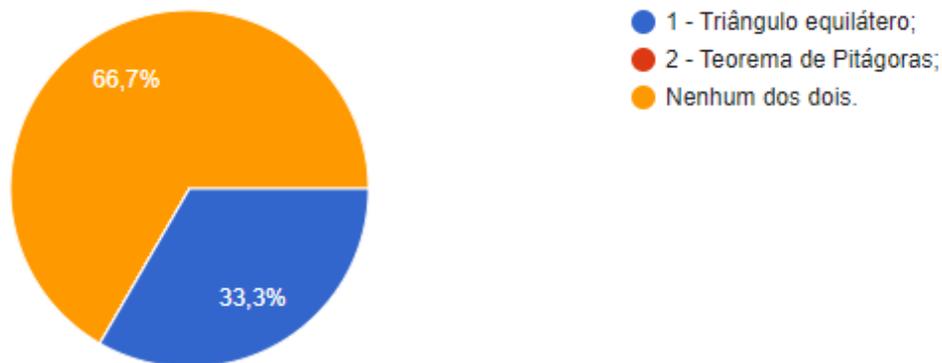
**Pergunta 3:** Em qual aplicação você sentiu mais dificuldade?

**Tabela 3 – Opiniões dos alunos referentes à pergunta 3.**

Alunos	Série	Triângulo equilátero	Teorema de Pitágoras	Os dois	Nenhum
Aluno 1	3 <sup>a</sup>				<b>X</b>
Aluno 2	3 <sup>a</sup>				<b>X</b>
Aluno 3	2 <sup>a</sup>				<b>X</b>
Aluno 4	2 <sup>a</sup>	<b>X</b>			
Aluno 5	3 <sup>a</sup>				<b>X</b>
Aluno 6	2 <sup>a</sup>	<b>X</b>			

Fonte: O autor.

**Figura 18 – Gráfico referente à tabela 3.**



Fonte: O autor.

O uso de uma didática nunca vista pelo aluno provoca adaptações e a didática de Byrne faz isso. Podemos notar aqui que os alunos tiveram alguma dificuldade na construção do **triângulo equilátero** mas isso não quer dizer que eles não entenderam os passos da construção. Ao todo, dois alunos do 2º ano (Alunos 4 e 6) chegaram a esta conclusão. Este formulário não detalhou qual foi ou quais foram as dificuldades encontradas pelos respectivos alunos.

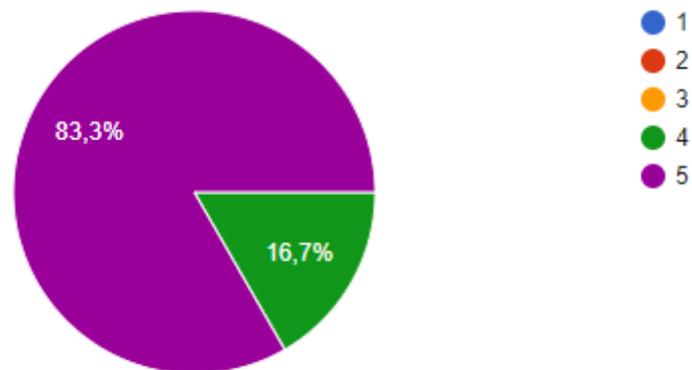
**Pergunta 4:** Os materiais utilizados foram suficientes?

**Tabela 4 – Opiniões dos alunos referentes à pergunta 4.**

Alunos	Série	Opinião
Aluno 1	3 <sup>a</sup>	5
Aluno 2	3 <sup>a</sup>	5
Aluno 3	2 <sup>a</sup>	4
Aluno 4	2 <sup>a</sup>	5
Aluno 5	3 <sup>a</sup>	5
Aluno 6	2 <sup>a</sup>	5

Fonte: O autor.

**Figura 19 – Gráfico referente à tabela 4.**



Fonte: O autor.

O método de Byrne nos mostra que é possível utilizar outros caminhos para o ensino de matemática. Através da tabela e do gráfico, podemos concluir que os materiais fornecidos foram suficientes para as construções propostas. A saber:

- 1) **Triângulo equilátero:** Papel A4, régua, compasso, lápis hidrocor, caneta esferográfica/lápis.
- 2) **Teorema de Pitágoras:** Papel A4, cartolina colorida, tesoura, régua, caneta esferográfica e cola.

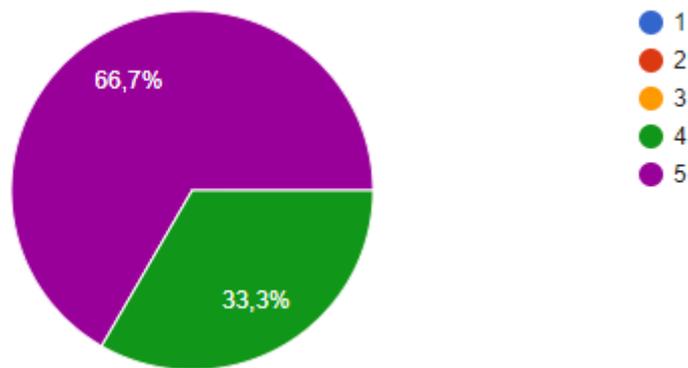
**Pergunta 5:** O método utilizado é diferente do que você vê em sala de aula?

**Tabela 5 – Opiniões dos alunos referentes à pergunta 5.**

Alunos	Série	Opinião
Aluno 1	3 <sup>a</sup>	4
Aluno 2	3 <sup>a</sup>	5
Aluno 3	2 <sup>a</sup>	5
Aluno 4	2 <sup>a</sup>	5
Aluno 5	3 <sup>a</sup>	4
Aluno 6	2 <sup>a</sup>	5

Fonte: O autor.

**Figura 20 – Gráfico referente à tabela 5.**



Fonte: O autor.

O feedback dos alunos nos diz que a didática de Byrne é inovadora, melhora o entendimento pois torna a matemática mais divertida e interessante. Os alunos acreditam que a didática utilizada neste trabalho é diferente da didática presente na sala de aula. De fato, o ensino de matemática pode ser mais atrativo, dinâmico, com o uso de instrumentos que sejam capazes de proporcionar uma mudança em alguns conteúdos.

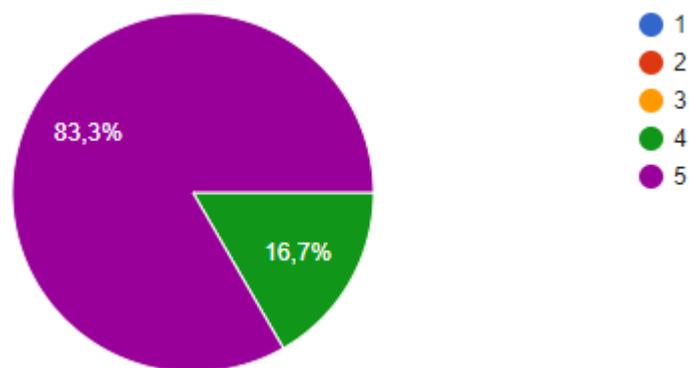
**Pergunta 6:** Você acredita que o método utilizado favorece a aprendizagem em matemática?

**Tabela 6 – Opiniões dos alunos referentes à pergunta 6.**

Alunos	Série	Opinião
Aluno 1	3 <sup>a</sup>	5
Aluno 2	3 <sup>a</sup>	5
Aluno 3	2 <sup>a</sup>	4
Aluno 4	2 <sup>a</sup>	5
Aluno 5	3 <sup>a</sup>	5
Aluno 6	2 <sup>a</sup>	5

Fonte: O autor.

**Figura 21 – Gráfico referente à tabela 6.**



Fonte: O autor.

Byrne traz, em sua obra, uma importante ferramenta interessante para o ensino de matemática além de traduzir um dos maiores livros já vistos em matemática que é “Os elementos” escrito por Euclides. Concluimos aqui que os alunos participantes acreditam que esta didática favorece o ensino e aprendizagem de matemática. Vale ressaltar que existem vários métodos de ensino que o professor pode utilizar e, neste trabalho, vos apresento um.

Dê sua opinião das atividades executadas, dos métodos utilizados e o que achou da experiência como um todo.

**Tabela 7 – Opiniões dos alunos referente à metodologia utilizada.**

<b>Alunos</b>	<b>Série</b>	<b>Opinião</b>
Aluno 1	3 <sup>a</sup>	Na minha opinião essas atividades deveriam ser usadas sempre nas aulas dos respectivos assuntos, pois além de fazer você absorver o assunto com maior facilidade, também contribui para construção de um interesse da parte do aluno com a matéria matemática.
Aluno 2	3 <sup>a</sup>	A aplicação desse tipo de atividade proporcionou observar e aprender a matemática sob uma ótica diferente do que é habitual, que torna o aprendizado mais difícil para alguns conteúdos. Mais na dinâmica apresentada ele prende mais a atenção e conseqüentemente torna o aprendizado algo além de mais didático também divertido.
Aluno 3	2 <sup>a</sup>	As atividades foram muito boas, bem explicadas e elaboradas. Utilizamos os métodos das cores para realizar as atividades, aprendemos a usar as cores não só nas artes mas também na matemática, e eu tive uma boa experiência.

Aluno 4	2 <sup>a</sup>	A experiência foi incrível tivemos o que não temos em sala de aula, na prática, e também muito divertida quebrando total o efeito que a matemática só se pode estudar com muitos cálculos ao contrário disso as atividades feitas com o professor Horlando foi de um conhecimento maravilhoso para todos que estavam presentes nesses dias.
Aluno 5	3 <sup>a</sup>	As atividades que fiz, com a ajuda do professor, é um método diferente do que aprendendo na sala de aula, porém é um método de fácil entendimento... Na minha opinião, deveria ser trabalhado mais em sala de aula... Abordou dois conteúdos que servem para qualquer período em que estudamos e podemos ver também fora da escola, gostei muito dos conteúdos.
Aluno 6	2 <sup>a</sup>	O método utilizado facilita o entendimento por conta da "visualização das fórmulas" por meio das colagens e cores. Ambas atividades foram simples mas efetivas e eficientes em passar informação por associar cores às fórmulas ao invés de letras.

Fonte: O autor.

Nesta última abordagem acerca das opiniões dos alunos, nota-se que há um entendimento de que o ensino de matemática pode ser estruturado de maneiras diferentes, pode ser apresentado de tal maneira que haja um engajamento e um entendimento maior por parte do alunado.

Fica aqui a minha satisfação em ouvir essas opiniões.

## 6. CONCLUSÃO

Existem inúmeras formas e métodos de se trabalhar/apresentar um conteúdo de matemática do ensino fundamental I até o ensino médio e até mesmo na graduação.

O que vos foi apresentado aqui, foi um método de ensino, uma sequência didática, com o objetivo de proporcionar aos alunos uma didática diferenciada e atrativa para o ensino de matemática.

Através dos feedbacks dos alunos participantes, foi percebido uma interesse maior, um engajamento maior e também uma interação melhor entre eles para a realização das atividades propostas.

As construções trabalhadas servem de modelo para tantas outras que o professor/mediador quiser trabalhar com suas turmas. Até mesmo demonstrações de conteúdos/fórmulas podem ser apresentadas com a didática citada (um exemplo é a demonstração do teorema de Pitágoras).

Podem ser trabalhadas também, construções com régua e compasso e utilizar o modelo de escrita de acordo com a metodologia utilizada neste trabalho.

A forma como foi conduzida pelo professor e construída pelos alunos lhes trouxeram mais facilidade e conseqüentemente, um aprendizado melhor.

Por fim, o legado que fica deste trabalho é a interação, o vislumbramento matemático por parte dos alunos, a aceitação da metodologia utilizada, o entusiasmo e a maneira divertida de aprender matemática ao utilizar métodos diferentes voltados para o ensino de matemática.

## BIBLIOGRAFIA

1. Euclides. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora UNESP, 2009.
2. BYRNE, Oliver. **The First six books of the elements of Euclid**. Editora TASCHEN, 2010.
3. PCN. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio**. MEC, 2000.
4. BNCC. **Base Nacional Comum Curricular**. MEC, 1996.
5. BOLONDI, Giorgio. LUIGINI, Alessandro. **Byrne's Euclidean Geometry Revisited With Geogebra**. Proceedings of the 18th International Conference on Geometry and Graphics. Milan, Italy, ICGG, 2018.
6. ALEXANDERSON, Gerald. MAA. **Mathematical Association Of America**. 2010.
7. VALERIOTE, Elizabeth. MAA. **Mathematical Association Of America**. 2010.
8. IBGE. **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística**. 2021, 2022.
9. MEC. **Ministério da Educação**. 2019.
10. Wikipédia.

## APÊNDICE A – PLANO DE AULA 01

INSTITUIÇÃO: Escola Estadual Josefa Cavalcante Suruagy	COMPONENTE CURRICULAR: Matemática
DATA: 2023	TURMAS: 2º e 3º anos.
DURAÇÃO: 02 aulas	PROFESSOR: José Horlando da Silva

CAMPO DE ESTUDO	OBJETIVO GERAL	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO	RECURSOS DIDÁTICOS	AVALIAÇÃO	REFERÊNCIAS
1. Geometria plana: elementos de um círculo;  2. Construção de um triângulo equilátero.	1. Explorar a Matemática aplicada através das construções geométricas usando cores.	1. Despertar o interesse dos alunos para a matemática usando uma metodologia diferente;  2. Estudar os elementos do círculo e a construção de um triângulo equilátero.	1. Separar os alunos em grupos; 2. Apresentar aos alunos os elementos do círculo e os tipos de triângulos;  3. Construção de dois círculos com interseção em dois pontos e mesmos raios;  4. Concluir que o triângulo formado pelos raios é equilátero.	1. Papel A4, régua, compasso, lápis hidrocor, caneta/lápis;  2. Quadro branco, piloto.	1. Verificar a construção e conclusão dos alunos;  2. Questionário digital acerca dos conceitos vistos.	Livros: 1. Os elementos (Euclides);  2. Os 6 primeiros livros de Euclides (Oliver Byrne).

## APÊNDICE B – PLANO DE AULA 02

INSTITUIÇÃO: Escola Estadual Josefa Cavalcante Suruagy	COMPONENTE CURRICULAR: Matemática
DATA: 2023	TURMAS: 2º e 3º anos.
DURAÇÃO: 02 aulas	PROFESSOR: José Horlando da Silva

CAMPO DE ESTUDO	OBJETIVO GERAL	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO	RECURSOS DIDÁTICOS	AVALIAÇÃO	REFERÊNCIAS
1. Geometria plana: áreas;  2. Teorema de Pitágoras.	1. Explanar a demonstração do teorema de Pitágoras usando colagens.	1. Despertar o interesse dos alunos para a matemática usando uma metodologia diferente;  2. Utilizar a comparação de áreas, a definição da área do quadrado, triângulo e retângulo para a demonstração do teorema de Pitágoras.	1. Separar os alunos em grupos;  2. Apresentar aos alunos uma demonstração algébrica do teorema de Pitágoras;  3. Realizar os cortes de dois quadrados;  4. Comparar as áreas dos retângulos e concluir a demonstração.	1. Papel A4, régua, cartolina colorida, tesoura, caneta esferográfica e cola;  2. Quadro branco, piloto.	1. Verificar a construção e conclusão dos alunos;  2. Questionário digital acerca do uso da metodologia.	Livros: 1. Os elementos (Euclides);  2. Os 6 primeiros livros de Euclides (Oliver Byrne).