UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ERIC ALBERTO DE SOUZA SANTOS

TEORIA DE CONTROLE PARA A EQUAÇÃO DE KORTEWEG-DE VRIES EM UM DOMÍNIO LIMITADO

MACEIÓ-AL
2023

ERIC ALBERTO DE SOUZA SANTOS

TEORIA DE CONTROLE PARA A EQUAÇÃO DE KORTEWEG-DE VRIES EM UM DOMÍNIO LIMITADO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMAT) como parte dos requisitos que são necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática pela UFAL.

Orientador: Dr. Márcio Cavalcante de Melo

Maceió-AL

2023

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

S237t Santos, Eric Alberto de Souza.
Teoria de controle para a equação de Korteweg-de Vries em um domínio limitado / Eric Alberto de Souza Santos. - 2023.
87 f. : il.

Orientador: Márcio Cavalcante de Melo.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 87.

1. Controlabilidade. 2. Korteweg-de Vries, Equação de. 3. Unicidade de Hilbert, Princípio da. I. Título.

CDU: 517.977.1

...dedico o labor deste trabalho aos meus pais,
irmaõs, amigos, e à minha inestimável esposa.

Agradecimentos

A priori, agradeço a Deus que, em seu Filho, se tornou o grande doador de tudo que temos, que somos, e podemos ser.

Agradeço à minha esposa - Débora Moreira - por todo apoio, cuidado, e sempiterno amor; agradeço à minha mãe, pelo duro processo de me criar; agradeço aos meus irmãos pela companhia nos sofrimentos da infância. Agradeço ao GrACE, grupo de Apologética da UFAL, que foi para mim uma rocha sólida em muitos momentos de abalos. Destaco agradecimentos aos maus amigos cinéfilos do grupo Rocky, com duras e valiosas lições, como diz na frase:

'Não importa o quanto você bate, mas sim o quanto aguenta apanhar e continuar. O quanto pode suportar e seguir em frente. É assim que se ganha.' -Rocky Balboa

Agradeço demasiadamente ao professor Márcio Cavalcante pela compreensão que me acolheu em todo o meu processo de mestrado e por me livrar da triste ambivalência entre potencial e incompetência. Agradeço ao Instituto de Matemática pelas oportunidades, ao corpo docente (em espacial aos professores Davi Lima e Isnaldo Isaac) e discente pela força e companheirismo. Agradeço a Ana por ir além do seu ofício, por todas as vezes que me lembrava de prazos e que me ajudou a continuar. Agradeço à minha banca de mestrado, aos professores Renan Medrado e Victor Hugo, por tecerem comentários e correções relevantes para a melhoria deste trabalho.

A posteriori, agradeço aos personagens que participaram da minha história, na UFAL e na vida, até que nem sei mencionar, mas que, direta e indiretamente, teceram parte de mim e, indiretamente, deste trabalho.

⌜ "Os dois guerreiros mais ⌝
| poderosos são a paciência |
⌞ e o tempo. ⌟

† Guerra & Paz
- Leon Tolstói

RESUMO

Esta dissertação aborda o estudo de controle para a equação do transporte, a equação linearizada de Korteweg-de Vries e a equação não linear de Korteweg-de Vries em domínios limitados. O objetivo do trabalho é provar a controlabilidade destes sistemas através do Princípio da Unicidade de Hilbert.

Palavras-chave: Controlabilidade; Equação de KdV, Princípio da Unicidade de Hilbert.

ABSTRACT

This dissertation addresses the study of control for the transport equation, the linearized Korteweg-de Vries equation, and the nonlinear Korteweg-de Vries equation in bounded domains. The aim of this work is to prove the controllability of these systems through the Hilbert's Uniqueness Principle.

Keywords: Controlability, Equation KdV, Hilbert Uniqueness Principle (HUP).

Sumário

Introdução

Um sistema de controle é um sistema dinâmico, no qual se pode atuar usando controles. Existem muitos problemas que aparecem quando se estuda um sistema de controle. Um dos problemas mais comuns é o problema de controlabilidade que, em uma linguagem informal, pode ser ser tomado como modelo a seguinte situação:

Dado dois estados, um inicial e um outro final, será que é possível mover o sistema de controle do estado inicial para o estado final?

Para contextualizar esse tipo de modelo matemático, pode-se pensar no problema de aquecer ou resfriar um quarto de uma temperatura inicial até uma temperatura adequada, ou no enchimento e/ou esvaziamento de um reservatório de água até que atinja um nível adequado.

Nesta dissertação, estudamos este tipo de problema para a equação linear do transporte e para a equação linearizada e não-linearizada de Korteweg-de Vries que modela pulso de ondas de pequena amplitude passando em um canal estreito.

Objetivos do trabalho

- No Capítulo 1, fazemos um estudo de preliminares como uma forma de relembrar, e aprimorar, conhecimentos necessários para a elaboração desta dissertação.

- No Capítulo 2, a cargo de familiarizar o leitor com as técnicas usuais em teoria de controle, vamos tratar de um modelo linear mais simples, a saber, a equação linear do transporte. Serão tratadas questões de boa colocação e controlabilidade exata para o sistema. Serão ainda apresentadas diferentes provas para os resultados principais deste capítulo utilizando o Método da Unicidade de Hilbert.

- No Capítulo 3, obteremos os principais resultados da dissertação, a saber, o resultado de controlabilidade que é desenvolvido por Lionel Rosier - vide [1] e [9]. A técnica consiste em provar uma desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto, a qual será provada quando o comprimento do intervalo estiver fora de um conjunto, chamado de números críticos.

- No Capítulo 4, iremos provar outro resultado clássico, de Lionel Rosier encontrado em [9], referente à controlabilidade local da equação não linear de KdV. Vamos usar o método usual do ponto fixo, ou ponto de equilíbrio, e será preciso assumir que os estados inicial e final serão suficientemente pequenos para conseguir o controle.

Capítulo 1

Preliminares

No decorrer deste texto, presume-se o conhecimento de conceitos elementares sobre Espaços Vetoriais, Corpo Algébrico, Cálculo, Análise, Teoria da Medida, Análise Funcional e EDP, que são abordados pontualmente neste capítulo preliminar e usados como passo-a-passo até chegar ao tema central, que é estudar a controlabilidade em alguns sistemas de controle.

Na Seção 1.1, vamos introduzir a noção de espaços vetoriais com produto interno visando, assim, definir espaços de Hilbert e suas consequentes aplicações em operadores e em espaços de funções.

Na Seção 1.2, iremos dar a definição de medida, bem como de funções mensuráveis e integráveis à Lebesgue a fim de estruturar o espaço L^p tendo como meta alguns resultados importantes, como teorema da convergência monótona e da convergência dominada que serão usados com certa frequência ao longo do texto.

Na Seção 1.3, vamos generalizar a propriedade de Lipschitz para funções definidas em abertos de $\mathbb{R}^n$ e buscar mais regularidade construindo o espaço de Hölder.

Nas seções 1.4 e 1.5, vamos tratar dos espaços de funções regulares e definir derivadas fracas.

Na Seção 1.6, definiremos os espaços de Sobolev e caracterizá-los a partir da noção de derivada fraca.

Na seção 1.7, vamos expressar o espaço dual de espaços de Sobolev que são também espaços de Hilbert.

Na Seção 1.8, iremos usar técnicas de Semigrupo e o Princípio da Unicidade de Hilbert para garantir a existência e unicidade de solução de sistemas lineares.

1.1 Espaços de Hilbert

Os espaços de Hilbert são espaços vetoriais, generalizam os espaços euclidianos e não se restringem a uma dimensão finita. Esses espaços são bons ambientes para vetores por possuírem uma norma induzida pelo produto interno já definido, o que possibilita atribuir as noções de ângulos e distância entre vetores. Também têm uma estrutura de espaço métrico completo, em que toda seqûencia de Cauchy é convergente e converge para algum ponto do espaço. Ao definir operadores entre espaços de Hilbert, iremos desenvolver alguns resultados importantes, como o da representação de Riesz e de operadores limitados, ilimitados e adjuntos.

Vamos começar pressupondo que já é conhecida a noção usual de espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{K}$, de subespaço vetorial de X, bem como suas propriedades.

A definição a seguir mostra que existem espaços vetoriais munidos com um produto definido entre seus elementos.

Definição 1.1. (Produto Interno) *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo complexo $\mathbb{C}$. Dizemos que um produto interno em X é uma aplicação $(.,.) : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$i.)$ $(u,v) = \overline{(v,u)}, \forall u,v \in X;$

$ii.)$ *A aplicação $u \longmapsto (u,v)$ é linear para cada $u \in X$;*

$iii.)$ $(u,u) \geq 0, \forall u \in X;$

$iv.)$ $(u,u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$

Definição 1.2. (Norma) *Seja X um espaço vetorial. Uma função $\|.\| : X \longrightarrow [0,\infty)$ é dita uma norma sobre um corpo $\mathbb{K}$, real ou complexo, se satisfaz*

$i)$ $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$

$ii)$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \ \forall x \in X$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{R};$

$iii)$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x,y \in X.$ (desigualdade triangular)

Ao par $(X, \|.\|)$ chamamos espaço vetorial normado.

Afirmação 1.1. *Se X é um espaço vetorial munido com produto interno $(\cdot,\cdot)$, a norma pode ser induzida por esse produto interno já definido em X, basta fazer $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$.*

Com efeito. Verificamos facilmente os ítens da Definição 1.2 da seguinte maneira.

- $i)$ Se $\|x\| = \sqrt{(x,x)} = 0$, então $(x,x) = 0$. Pelo item (iv) da Definição (1.1), implica que $x = 0$. Se, porém, for $x = 0$ então pelo item (iv) da Definição 1.1 temos que $0 = (x,x) = \|x\|^2 \Longrightarrow \|x\| = 0$.

- $ii)$ Dados $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrários e X sendo espaço vetorial, asseguramos que $\lambda x \in X$, então aplicando a norma neste vetor e considerando que $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2$, resulta $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda(x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda\overline{(\lambda x, x)}} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}(x,x)} = |\lambda|\|x\|$.

- $iii)$ Dados $x, y \in X$, então $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (x,y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|^2 + \|y\|)^2$. A prova segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz. $\Big[(x,y) \leq \|x\|\|y\|\Big]$.

Se X é um espaço com produto interno, vale a identidade do paralelogramo.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Definição 1.3. (SEQUÊNCIA) *Seja X um espaço vetorial normado X. Dizemos que uma sequência em X é uma aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$. O valor que a sequência assume no número $n \in \mathbb{N}$, denotado por x_n, é chamado de n-ésimo termo da sequência.*

O conjunto de todos os valores da sequência é descrito por

$$x(\mathbb{N}) := \{x_n; n \in \mathbb{N}\} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Definição 1.4. (SUBSEQUÊNCIA) *Dizemos que uma subsequência de (x_n) é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $N' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\} \subset \mathbb{N}$. Denotamos uma subsequência por $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ou ainda por $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$.*

Definição 1.5. (CONVERGÊNCIA) *Seja X um espaço vetorial normado. Uma sequência $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ converge para certo $x \in X$, e escrevemos $x_k \longrightarrow x$, quando*

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \|x_k - x\| = 0.$$

Podemos reescrever a convergência na linguagem de sequência do seguinte modo:

$$x_k \longrightarrow x \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ n > n_0 \Longrightarrow \|x_n - x\| < 0. \end{cases}$$

Quando não existe $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n$ *em* X*, dizemos que a sequência é divergente.*

Observação 1.1. (UNICIDADE DO LIMITE) *O limite obtido na convergência para* $x \in X$ *é único, pois se* $x_1, x_2 \in X$ *e a sequência* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ *são tais que* $x_k \longrightarrow x_1$*, e também* $x_k \longrightarrow x_2$*, então para todo* $k \in \mathbb{N}$ *temos que*

$$\|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_k - x_2 + x_k\| \leq \|x_k - x_1\| + \|x_k - x_2\| \longrightarrow 0, \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

Isto implica que $\|x_1 - x_2\| = 0$, *e pelo ítem* (i) *da Definição 1.2, resulta que*

$$\|x_1 - x_2\| = 0 \implies x_1 = x_2. \texttt{ (unicidade)}$$

Proposição 1.1. (LIMITE DE SUBSEQUÊNCIAS DE SEQUÊNCIA CONVERGENTE) *Seja* X *um espaço vetorial normado. Se* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência tal que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \in X,$$

então toda subsequência de (x_n) *converge para* a*.*

Demonstração. Dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Longrightarrow \|x_n - a\| < \epsilon$. Seja $N' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $n_{k_0} > n_0$. Logo,

$$k > k_0 \implies n_k > n_{k_0} \implies \|x_{n_k} - a\| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} x_{n_k} = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a.$ □

Um ponto $a \in X$ é chamado de ponto de aderência de uma sequência (x_n) quando a é limite de alguma subsequência de (x_n).

Definição 1.6. (COMPLETUDE) *A fim de assegurar que toda sequência convergente em* X *possa convergir para pontos de* X*, definiremos a completude do espaço vetorial* X*.*

$i)$ (SEQUÊNCIA DE CAUCHY) *Uma sequência* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ *é dita sequência de Cauchy quando, para cada* $\epsilon > 0$*, existe* $N > 0$ *tal que*

$$\|x_k - x_l\| < \epsilon, \ \forall k, l \geq N.$$

$ii)$ (ESPAÇO COMPLETO) *O espaço vetorial X é completo quando cada sequência de Cauchy de vetores de X converge em X, ou seja,*

$$\text{se } \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X \text{ é de Cauchy, então } \exists a \in X \text{ tal que } x_k \longrightarrow a. \tag{1.1}$$

$iii)$ (ESPAÇO DE BANACH) *Um espaço X é de Banach quando é um espaço vetorial, normado e completo.*

Definição 1.7. (NORMAS EQUIVALENTES) *Seja X um espaço normado. Dizemos que duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes se existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que*

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \ \ \forall x \in X. \tag{1.2}$$

Decorre da equivalência entre normas os seguintes fatos:

- Normas equivalentes implicam em métricas equivalentes, que implicam em topologias equivalentes, onde a métrica pode ser tomada como

$$d(x,y) := \|x-y\|, \ \ \forall x, y \in X.$$

- Normas equivalentes implicam em mesmas sequências de Cauchy.

Definição 1.8. (ESPAÇO SEPARÁVEL) *Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que X é separável se contém um subconjunto que seja denso enumerável.*

Definição 1.9. (ESPAÇO DE HILBERT) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, real ou complexo, munido com um produto interno $(.,.) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbf{K}$. Dizemos que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert se for completo com respeito à norma induzida pelo produto interno.*

Os seguintes resultados podem ser consultados em [3].

Definição 1.10. (COMPLEMENTO ORTOGONAL) *Seja X um espaço vetorial munido com produto interno e $V \subset X$ um subespaço. O complemento ortogonal de V em X é o conjunto*

$$V^{\perp} = \{u \in X; \langle u, v\rangle = 0, \forall v \in V\}$$

Observação 1.2. *É válido que $V^{\perp}$ é um subespaço vetorial de X, e que $V \cap V^{\perp} = \{0\}$.*

Além disso, se $dimX < \infty$, então temos uma decomposição direta $X = V \oplus V^{\perp}$; porém, esta identidade não se generaliza em espaço de dimensão infinita. Valendo em espaços de Hilbert quando V for um subespaço fechado de X.

Proposição 1.2. *Seja X um espaço vetorial com produto interno, e $V \subset X$ um subespaço. Então $V^{\perp}$ é um subespaço vetorial fechado de X.*

Proposição 1.3. *Seja X um espaço vetorial com produto interno, e $U \subset V \subset X$ dois subespaços. Então $V^{\perp} \subset U^{\perp}$. Além disso, $(\overline{V})^{\perp} = V^{\perp}$ e $\overline{V} = (V^{\perp})^{\perp}$ (onde $\overline{V}$ é o fecho do subespaço V).*

Vamos agora definir operadores entre espaços Hilbert.

Definição 1.11. (OPERADOR LINEAR) *Sejam X e Y dois espaços de Hilbert. Uma aplicação $A : X \longrightarrow Y$ é uma regra que a cada $u \in X$, associa um único elemento $y = A(u) \in Y$. Dizemos que a aplicação A é um operador linear se, para todos $u, v \in X$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, vale*

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda Au + \mu Av. \tag{1.3}$$

Se a aplicação $A : X \longrightarrow Y$ for linear então destacam-se os seguintes fatos.

(i) *Denotamos o domínio do operador A por $D(A)$. (Nesse caso temos que $D(A) = X$, mas haverá casos em que $D(A) \subsetneq X$ é um subespaço denso em X.)*

(ii) *Denotamos a imagem do operador A por $\mathcal{I}m(A) = AX := \{Ax, \forall x \in D(A)\}$.*

Afirmação 1.2. *O conjunto imagem $\mathcal{I}m(A)$ é um espaço vetorial.*

Com efeito. Se $y_1, y_2 \in \mathcal{I}m(A)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ então existem $x_1, x_2 \in D(A)$ tais que $y_1 = Ax_1$ e $y_2 = Ax_2$. Logo, $(\lambda x_1 + \mu x_2) \in D(A)$ e

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = A(\lambda x_1) + A(\mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2) = \lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathcal{I}m(A)$$

(iii) *O núcleo do operador linear A é o conjunto $N(A) = \{x \in X; Ax = 0\}$.*

Afirmação 1.3. *O núcleo $N(A)$ do operador $A : X \longrightarrow Y$ é um espaço vetorial.*

Com efeito. Se $x_1, x_2 \in N(A)$, então $A(x_1) = A(x_2) = 0$. Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ arbitrários, segue que

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = A(\lambda x_1) + A(\mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2) = 0.$$

Portando devemos ter $\lambda x_1 + \mu x_2 \in N(A)$.

Definição 1.12. (OPERADOR LIMITADO) *Seja $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ um operador linear entre dois espaços vetoriais normados X e Y. Então A é limitado se existe $C > 0$ tal que*

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X, \forall x \in D(A).$$

Definição 1.13. *O conjunto dos operadores limitados com domínio em X e imagem em Y é denotado por*

$$\mathcal{L}(X, Y) := \big\{A : D(A) \subset X \longrightarrow Y |\ A \text{ é limitado}\big\}.$$

Proposição 1.4. *O conjunto $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço vetorial.*

Demonstração. Com efeito. Sejam $A,\ B \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in D(A) \subset X$ temos que

$$(\alpha A + \beta B)(x) = (\alpha A)(x) + (\beta B)(x) = \alpha.A(x) + \beta.B(x). \tag{1.4}$$

Além disso, como $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, então para todo $x \in D(A) \subset X$ existem $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$\|Ax\|_Y \leq C_1\|x\|_X \ \text{ e } \ \|Bx\|_Y \leq C_2\|x\|_X.$$

Logo, $\forall x \in D(A) \subset X$ vale

$$\|(\alpha A + \beta B)(x)\| = \|\alpha.A(x) + \beta.B(x)\| \leq \|\alpha.A(x)\| + \|\beta.B(x)\| = |\alpha|\|A(x)\| + |\beta|\|B(x)\|,$$

donde $\|(\alpha A + \beta B)(x)\| \leq |\alpha|C_1\|x\|_X + |\beta|C_2\|x\|_X = (|\alpha|C_1 + |\beta|C_2)\|x\|_X$.

Fazendo $C = |\alpha|C_1 + |\beta|C_2$, temos que $\|(\alpha A + \beta B)(x)\| \leq C\|x\|, \forall x \in D(A) \subset X$. Portanto, $\alpha A + \beta B \in \mathcal{L}(X, Y)$ e provamos a Proposição. $\square$

Definição 1.14. (NORMA DE OPERADOR) *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e $A : X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado. A norma de A é definida por*

$$\|A\| := \sup_{\|u\| \leq 1} \{\|Au\|\} < \infty. \tag{1.5}$$

Dizemos que o par $(\mathcal{L}(X,Y); \|\cdot\|)$ formado pelo espaço vetorial $\mathcal{L}(X,Y)$ munido com a norma (1.5) é um espaço vetorial normado. Se $X = Y$, escreveremos $\mathcal{L}(X)$.

Teorema 1.1. *Sejam X, Y dois espaços normados. Um operador linear $A : X \longrightarrow Y$ é contínuo se, e somente se, é limitado.*

Demonstração. Suponha que o operador linear $A : X \longrightarrow Y$ seja limitado. Então, dado $u_0 \in X$, existe $C > 0$ tal que

$$\|Au - Au_0\|_Y = \|A(u - u_0)\|_Y \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|u - u_0\|_X \leq C\|u - u_0\|_X, \ \ \forall u \in X.$$

Para todo $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ e $u \in X$ com $\|u - u_0\| < \delta$, que obtemos

$$\|Au - Au_0\|_Y \leq C\|u - u_0\|_X < \epsilon.$$

Visto que $u_0 \in X$ foi escolhido inicialmente arbitrário, segue que o operador A é contínuo.

Agora, suponha que A é contínuo. Como $A(0) = A(u - u) = Au - Au = 0$, fazendo $u_0 = 0$ e $\epsilon = 1$, pela continuidade do operador A existe $\delta > 0$ tal que

$$\|A(u)\|_Y < 1, \ \text{ sempre que } \ \|u\|_X < \delta.$$

Então dado $u \in X$ arbitrário, seja $z = \frac{\delta u}{2\|u\|_X}$. Logo, $\|z\|_X = \frac{\delta}{2} < \delta$. Portanto,

$$\|A(z)\|_Y = \frac{\delta}{2\|u\|_X} \|A(u)\|_Y < 1.$$

Daí, para todo $u \in X$ temos que $\|A(u)\| < \frac{2}{\delta}\|u\|_X$, e provamos que o operador A é limitado. $\square$

Definição 1.15. (IMERSÃO CONTÍNUA) *Sejam X e Y dois espaços vetoriais com $X \subseteq Y$. Dizemos X está imerso continuamente em Y, e escrevemos $X \hookrightarrow Y$, se existir $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \forall x \in X.$$

Dizer que a imersão $X \hookrightarrow Y$ é contínua significa que a aplicação inclusão $i(x) = x, x \in X$ é contínua.

Afirmação 1.4. *O núcleo $N(A)$ do operador limitado $A : X \longrightarrow Y$ é um conjunto fechado.*

Demonstração. Com efeito. Seja $x \in \overline{N(A)}$, então existe uma sequência de vetores $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset N(A)$ tal que $x_k \longrightarrow x$, quando $k \longrightarrow \infty$. Como para todo $k \in \mathbb{N}$ temos $x_k \in N(A)$, então

$$A(x_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pela continuidade de A, resulta que

$$A(x) = A\big(\lim_{k \longrightarrow \infty} x_k\big) = \lim_{k \longrightarrow \infty} A(x_k) = 0. \implies x \in N(A).$$

□

Definição 1.16. (OPERADOR FECHADO) *Seja $A : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Dada uma sequência $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ arbitrária, dizemos que A é fechado se,*

$$\text{sempre que tiver } u_k \longrightarrow u \text{ e } Au_k \longrightarrow v, \text{ implica em } Au = v. \tag{1.6}$$

Teorema 1.2. *Seja $A : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Se A é fechado, então é limitado.*

Demonstração. A prova pode ser consultada em [3]. □

1.1.1 Representação de Riesz

Definição 1.17. *Consideramos aqui operadores lineares limitados com contradomínio $\mathbb{R}$.*

- $i)$ (FUNCIONAL LINEAR) *Um operador linear limitado $u^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dito um funcional linear limitado em X.*
- $ii)$ (ESPAÇO DUAL) *A coleção de todos os funcionais lineares em X é o espaço dual de X, e denotamos por X^*.*

Teorema 1.3. (REPRESENTAÇÃO DE RIESZ) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Todo funcional linear limitado $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser representado em termos do produto interno, a saber*

$$f(x) := (x, z) \tag{1.7}$$

onde z depende do funcional f, é unicamente determinada por este, e tem norma dada por

$$\|z\|_{\mathcal{H}} := \|f\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}. \tag{1.8}$$

Demonstração. Vamos dividir a prova em três passos.

Passo 1. (**Representação**). Queremos representar f como está em (1.7).

Se $f = 0$, então (1.7) e (1.8) são satisfeitos trivialmente, basta considerar $z = 0 \in \mathcal{H}$.

Seja $f \neq 0$. Devemos buscar quais são as propriedades do vetor fixo z, dependente do funcional f, de modo que a representação de Riesz exista.

Primeiramente precisamos ter $z \neq 0$, de outra forma seria $f = 0$. Em seguida, podemos considerar o conjunto $\{x \in \mathcal{H};\ (x, z) = 0, \text{ desde que } f(x) = 0\}$, ou seja, o conjunto dos vetores x que estão no núcleo $N(f)$ do funcional f e que são ortogonais ao vetor z.

Note que devemos ter z fora do núcleo $N(f)$, pois se fosse $z \in N(f)$ então teríamos

$$0 = f(z) = (z, z) = \|z\|^2,$$

e item (i) da Definição 1.2 implicaria em $z = 0$. Entretanto, $z = 0$ acarreta em $f = 0$. Portanto, isto confirma que se deve ter $z \perp N(f)$, ou melhor, $z \in N(f)^{\perp}$.

Pela Afirmação (1.3), o núcleo $N(f)$ é um espaço vetorial. Além disso, pela Afirmação (1.4) o núcleo $N(f)$ é também um conjunto fechado.

Note que $\mathcal{H} = N(f) \cup N(f)^{\perp}$. Daí, se $f \neq 0$ então $N(f) \neq \mathcal{H}$ e $N(f)^{\perp} \neq \{0\}$. Logo, o espaço $N(f)^{\perp}$ contém algum $z_0 \neq 0$.

De forma estratégica seja $v = f(x)z_0 - f(z_0)x \in \mathcal{H}$, donde $x \in \mathcal{H}$ é escolhido arbitrário. Se aplicarmos o funcional f no ponto v, obtemos de sua linearidade que

$$f(v) = f\big(f(x)z_0 - f(z_0)x\big) = f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0.$$

Logo, temos que $v \in N(f)$. Como $z_0 \perp N(f)$, então

$$0 = (v, z_0) = (f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0) = f(x)(z_0, z_0) - f(z_0)(x, z_0). \tag{1.9}$$

Como $z_0 \neq 0$, o item (iv) da Definição 1.1 garante que $(z_0, z_0) = \|z_0\|^2 > 0$. Assim, através de (1.12), o funcional f se escreve como

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{(z_0, z_0)}(x, z_0).$$

Portanto, o funcional f se escreve na forma da representação de Riesz em (1.7) ao fazer

$$z = \frac{f(z_0)}{(z_0, z_0)} z_0 \in \mathcal{H}, \text{ para algum } z_0 \in (N(f)^{\perp} - \{0\}).$$

Passo 2. (**Unicidade**) Para definir a expressão de um funcional em termos do produto interno é preciso se certificar que a sua representação é única, ou seja, que $z \in \mathcal{H}$ escolhido em (1.7) é único. Sendo assim, suponha que $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ são tais que

$$f(x) = (x, z_1) = (x, z_2), \forall x \in \mathcal{H}.$$

Então, $\forall x \in \mathcal{H}$, têm-se $(x, z_1) = (x, z_2) \Longrightarrow (x, z_1) - (x, z_2) = 0 \Longrightarrow (x, z_1 - z_2) = 0$.

Em particular, podemos tomar $x = z_1 - z_2$, e assim

$$0 = (x, z_1 - z_2) = (z_1 - z_2, z_1 - z_2) = \|z_1 - z_2\|^2,$$

o que implica que $z_1 - z_2 = 0$, i.e., $z_1 = z_2$. *(Unicidade da representação de f).*

Passo 3. (Norma do Operador) Se $f = 0$, basta tomar $z = 0$ que (1.7) e (1.8) são satisfeitas trivialmente.

Seja $f \neq 0$, então $z \neq 0$. O funcional na representação (1.7) dado por $f(x) = (x, z)$. Do fato do funcional ser um operador limitado, fazendo $x = z$, decorre que

$$\|z\|^2 = (z, z) = f(z) \leq \|f\|\|z\|$$

Como $\|z\| \neq 0$, fica $\|z\| \leq \|f\|$.

Por outro lado, usando a desigualdade de Cauchy Schwarz na representação de f fica

$$|f(x)| = |(x, z)| \leq \|x\|\|z\|.$$

Portanto, temos que

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, z)| \leq \|z\|.$$

E concluímos que $\|z\| = \|f\|$. □

Definição 1.18. (ADJUNTO) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Se $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é um operador linear limitado, então o adjunto de A é um operador $A^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ que satisfaz*

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

A seguir, vamos apresentar a definição de conjunto pré-compacto, também chamado de totalmente limitado, que será usada no próximo teorema sobre conjuntos relativamente compactos e aplicado no controle da equação KdV mais adiante.

Definição 1.19. (CONJUNTO PRÉ-COMPACTO) *Um conjunto K em um espaço topológico é dito pré-compacto, ou relativamente compacto, se seu fecho é um conjunto compacto.*

1.1.2 Operadores Ilimitados

Nesta seção, abordaremos a teoria de operadores não limitados, que são aqueles que não satisfazem à condição (1.12).

Seja A o operador linear definido por

$$A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$x \longmapsto Ax,$$

onde, nesta seção, $D(A)$ é um subespaço de $\mathcal{H}$ densamente definido, i.e.,

$$D(A) \text{ é denso em } \mathcal{H}.$$

Definição 1.20 (OPERADOR DENSAMENTE DEFINIDO)**.** *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador linear. O seu adjunto é o operador linear A^* definido por*

$$A^* : D(A^*) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$x \longmapsto A^*x,$$

onde é necessário que,

(i) *O domínio $D(A^*)$ é o conjunto de todos os $y \in \mathcal{H}$ tais que a aplicação linear*

$$D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto \langle Ax, y\rangle, \forall x \in D(A),$$

seja contínua. Nesse caso, é suficiente que a aplicação seja Lipschitziana, i.e., existe $C > 0$ dependendo de y tal que

$$|(Ax, y)| \leq C\|x\|, \forall x \in D(A^*). \tag{1.10}$$

(ii) *Para todo $y \in D(A^*)$, A^*y é o único elemento de $\mathcal{H}$ tal que*

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \forall x \in D(A). \tag{1.11}$$

Agora, vamos introduzir uma desigualdade clássica de Análise Funcional que é de suma importância no estudo de controlabilidade e será abordada nos próximos capítulos.

Proposição 1.5. *Sejam H_1 e H_2 dois espaços de Hilbert, e $\mathcal{F} : H_1 \longrightarrow H_2$ uma aplicação linear contínua. Então $\mathcal{F}$ é sobrejetiva se, e somente se, existe $c > 0$ tal que*

$$\|\mathcal{F}^*(x_2)\|_{H_1} \geq c\|x_2\|_{H_2}, \forall x \in H_2. \tag{1.12}$$

Além disso, se a desigualdade é válida para algum $c > 0$, então existe uma aplicação linear contínua $\mathcal{G} : H_2 \longrightarrow H_1$ tal que

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(x_2)) = x_2, \forall x_2 \in H_2, \quad \text{e} \quad \|\mathcal{G}(x_2)\|_{H_1} \leq \frac{1}{c}\|x_2\|_{H_2}, \forall x_2 \in H_2.$$

Demonstração. Consultar [10]; Teorema 1.15, página 97. $\square$

Definição 1.21. *Um operador linear $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é simétrico se, e somente se,*

$$(Au, v) = (u, Av), \tag{1.13}$$

para todo $u, v \in D(A)$.

Pode-se provar que, se vale (1.13) para todo $u, v \in \mathcal{H}$, então A é limitado, e portanto, por (1.1), é contínuo.

Proposição 1.6. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido. Então, A é simétrico se, e somente se $A \subseteq A^*$, ou seja, A^* é uma extensão do operador A.*

Demonstração. Suponhamos que A^* é uma extensão de A, donde $A \subseteq A^*$.

Se $\xi, \eta \in D(A)$, então $\xi \in D(A^*)$. Logo, temos que

$$(A\xi, \eta) = (\xi, A^*\eta) = (\xi, A\eta),$$

ou seja, o operador A é simétrico.

Por outro lado, se A é simétrico, então para cada $\eta \in D(A)$, temos que

$$(A\xi, \eta) = (\xi, A\eta), \forall \xi \in D(A),$$

logo, $\eta \in D(A^*)$ e $A^*\eta = A\eta$.

Portanto, dizer que $A = A^*$ é equivalente a dizer que o operador A é simétrico e vale $D(A) = D(A*)$. $\square$

Definição 1.22. *Dizemos que o operador linear densamente definido $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é um operador linear fechado se seu gráfico (i.e., o conjunto $\{(x, Ax), x \in D(A)\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$) é um subespaço fechado de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.*

1.2 Teoria da Medida

Nesta seção vamos apresentar algumas definições e resultados clássicos em Teoria da Medida. O leitor interessado nas demonstrações pode consultar Folland em [2].

Definição 1.23. (σ-ÁLGEBRA) *Dizemos que uma coleção $\mathcal{M}$ de subconjuntos de R^n é uma σ-álgebra se*

$i)$ $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$;

$ii)$ *Se $A \in \mathcal{M}$, então $(R^n - A) \in \mathcal{M}$;*

$iii)$ *Se $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, então $\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \mathcal{M}$ e $\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \mathcal{M}$.*

Teorema 1.4. (MEDIDA DE LEBESGUE) *Existe uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e uma função*

$$|.| : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty)$$

com as seguintes propriedades.

$i)$ *Todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, e então todo subconjunto fechado de R^n, pertence a $\mathcal{M}$;*

$ii)$ *Se B é uma bola qualquer em R^n, então $|B|$ é o volume n-dimensional de B;*

$iii)$ *Se $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ é uma sequência de subconjuntos mutuamente disjunto, então*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right| = \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|;$$

$iv)$ *Se $A \subset B$ onde $B \in \mathcal{M}$ e $|B| = 0$, então $A \in \mathcal{M}$ e $A = 0$.*

Os conjuntos em $\mathcal{M}$ são chamados conjuntos de Lebesgue mensuráveis e $\mu := |.|$ é a medida de Lebesgue n-dimensional. A terna $(X; \mathcal{M}; \mu)$ é chamado de espaço de medida.

Observação 1.3. *Do item (i) no Teorema 1.4, deduzimos que*

- $|\emptyset| = 0$;
- $\left|\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |A_k|$, *para toda coleção $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ de subconjuntos mensuráveis.*

Se alguma propriedade é válida em todo ponto de $\mathbb{R}^n$, exceto para um conjunto de Lebesgue de medida nula, dizemos que a propriedade é válida em quase todo ponto, e abreviamos com "$q.t.p.$".

Definição 1.24. (FUNÇÃO MENSURÁVEL) *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que a função f é mensurável, ou $\mathcal{M}$-mensurável, quando*

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{M},$$

para cada subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$.

Proposição 1.7. *Se $(X, \mathcal{M}; \mu)$ é um espaço de medida e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

$i)$ *f é $\mathcal{M}$-mensurável.*

$ii)$ *$f((a, +\infty)) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

$iii)$ *$f([a, +\infty) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

$iv)$ *$f((-\infty, a)) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

$v)$ *$f((-\infty, a]) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Os seguintes fatos são bem conhecidos a respeito de funções mensuráveis:

- Se f é contínua, então f é mensurável.
- A soma e o produto de duas funções mensuráveis são também mensuráveis.
- Se $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ é uma sequência de funções mensuráveis, então são mensuráveis:

$$g_1(x) = \sup_k f_k(x), \qquad g_2(x) = \limsup_{k \longrightarrow \infty} f_k(x),$$
$$g_3(x) = \inf_k f_k(x) \quad \text{e} \quad g_4(x) = \liminf_{k \longrightarrow \infty} f_k(x).$$

Para verificar este último fato, basta ver que

$$g_1^{-1}((a, +\infty]) = \bigcup_1^{\infty} f_k^{-1}((a, +\infty]) \quad \text{e} \quad g_3^{-1}((a, +\infty]) = \bigcup_1^{\infty} f_k^{-1}((a, +\infty]).$$

De modo geral, considerando $h_j(x) = \sup\limits_{k>j} f_k(x)$ e $\overline{h}_j(x) = \inf\limits_{k>j} f_k(x)$ então h_j e $\overline{h}$ são mensuráveis para cada $j \in \mathbb{N}$, logo,

$$g_2(x) = \inf_k h_k(x) \text{ e } g_4(x) = \sup_k \overline{h}_k(x)$$

Por fim, se existir $f(x) = \lim\limits_{k \longrightarrow \infty} f_k(x)$ para todo $x \in X$, então $g_2(x) = f = g_4(x), \forall x \in X$, logo f é mensurável.

Agora, vamos abordar integrais de Lebesgue e os principais resultados de integração.

Definição 1.25. (FUNÇÃO CARACTERÍSTICA) *Seja $E \subset X$, a função característica $\mathcal{X}_E$ de E é definida por*

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & \textit{se } x \in E \\ 0, & \textit{se } x \notin E. \end{cases}$$

Definição 1.26. (FUNÇÃO SIMPLES) *Dizemos que uma função $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é simples se tiver um número finito de valores. Sejam $a_1, a_2, ..., a_k$ os valores distintos de uma função simples φ e $E_j = \{x \in X | \ \varphi(x) = a_j\}$. Então os conjuntos $E_1, E_2, ..., E_k$ são disjuntos, $X = \bigcup\limits_{j+1}^{k} E_j$ e φ se escreve como*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathcal{X}_{E_j}. \tag{1.14}$$

Agora, definimos o seguinte conjunto de funções que tomam valores não-negativos a fim de usá-lo na integração de Lebesgue.

$M^+(X; \mathcal{M}) :=$ O espaço de todas as funções mensuráveis de X em $[0, +\infty]$.

Definição 1.27. *Seja $f \in M^+(X, \mathcal{M})$. A integral de f em relação à medida μ é definida como o número real estendido*

$$\int_X f d\mu = \sup \int_X \varphi d\mu, \tag{1.15}$$

onde o supremo é tomado sobre as funções simples que satisfazem

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x), \ \ \forall x \in X.$$

Se $X \in \mathcal{M}$, é fácil ver que $f\mathcal{X}_E \in M^+(X, \mathcal{M})$. Podemos definir a integral de f sobre o conjunto E em relação à medida μ como

$$\int_E f d\mu = \int_X f.\mathcal{X}_E d\mu. \tag{1.16}$$

Definição 1.28. (ESPAÇO DE LEBESGUE) *Denotamos por $L = L(X, \mathcal{M}, \mu)$ o espaço de Lebesgue que consiste em todas as funções mensuráveis $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem*

$$\int_X f^+ d\mu < \infty \quad \textit{e} \quad \int_X f^- d\mu < \infty, \tag{1.17}$$

onde, para $f \in M(X, \mathcal{M})$, temos que f^+ e f^- são, respectivamente, a parte positiva e a parte negativa de f definidas por

$$f^+(x) = \max(0, f(x)) \quad \textit{e} \quad f^-(x) = \max(0, -f(x)).$$

Além disso, mostra-se que f^+, e f^- pertencem a $M^+(X, \mathcal{M})$. Também temos os seguintes resultados que justificam essa definição.

- $f = f^+ - f^-$.
- $|f| = f^+ + f^-$.

O Teorema a seguir mostra algumas propriedades que decorrem da integrabilidade de funções em espaços de Lebesgue.

Teorema 1.5. *Seja $f, g \in L(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $c \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades acerca de integração à Lebesgue.*

$i)$ $\displaystyle\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu.$

$ii)$ $\displaystyle\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$

$iii)$ *Sejam $E = E_1 \bigcup E_2$, onde E_1 e E_2 são conjuntos disjuntos em $\mathcal{M}$. Então*

$$\int_E f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu.$$

$iv)$ *Se $f \leq g,\ q.t.p.$, então $\displaystyle\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$*

$v)$ *Se $f \in M^+(X, \mathcal{M})$, então $f = 0\ q.t.p. \iff \int_X f d\mu = 0.$*

O próximo Teorema busca caracterizar o espaço de funções de Lebesgue apresentado na Definição 1.17 como o espaço L^1 das funções f tais que $|f|$ é integrável.

Teorema 1.6. *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável. Neste caso temos*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

Demonstração. Supondo que f seja integrável, então $\int_X f^+ d\mu < \infty$ e $\int_X f^- d\mu < \infty$. Como $|f| = f^+ + f^-$, então $\int |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu < \infty. \implies |f|$ é integrável. Por outro lado, se $|f|$ é integrável, devemos ter necessariamente f^+ e f^- integráveis.

Além disso, usando a desigualdade triangular temos

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X f^+ + f^- d\mu \right| \leq \left| \int_X f^+ \right| + \left| \int_X f^- d\mu \right|$$
$$\leq \int_X |f^+| d\mu + \int_X |f^-| d\mu = \int_X (f^+ + f^-) d\mu = \int_X |f| d\mu.$$

□

Lema 1.1. (Lema de Fatou) *Seja* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *uma sequência de funções não negativas e integráveis, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k \longrightarrow \infty} f_k dx = \liminf_{k \longrightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx. \tag{1.18}$$

Teorema 1.7. (Convergência Monótona) *Seja* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *uma sequência de funções mensuráveis tais que*

$$f_1 \leq f_2 \leq ... \leq f_k \leq f_{k+1} \leq ...,$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \longrightarrow \infty} f_k dx = \lim_{k \longrightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx. \tag{1.19}$$

Teorema 1.8. (Convergência Dominada) *Seja* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *uma sequência de funções integráveis com*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} f_k = f, \quad \textit{q.t.p.}.$$

Suponha que que exista alguma função g *integrável tal que*

$$|f_k| \leq g, \quad \textit{q.t.p.}.$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f dx. \tag{1.20}$$

1.2.1 Espaços de Lebesgue L^p

De forma semelhante ao espaço L^1, vamos definir um espaço para o conjunto de funções f tais que $|f|^p$ tem integral finita. Vamos começar definindo conjunto de funções que possuem mesmo valor em quase todo ponto $(q.t.p.)$, inclusive na integração de Lebesgue, para evitar ambiguidade na representação.

Definição 1.29. (CLASSE DE EQUIVALÊNCIA) *Duas funções são equivalentes quando são iguais* $q.t.p.$*. A classe de funções de* f*, denotada por* $[f]$*, é o conjunto de todas as funções equivalentes a* f*.*

Note que, em uma classe de equivalência $[f]$*, qualquer função equivalente a* f *pode ser representante da classe. Temos então as seguintes propriedades.*

(i) *(Reflexiva)* $[f] = [f]$.

(ii) *(Simétrica)* *Se* $[f] = [g]$*, então* $[g] = [f]$.

(iii) *(Transitiva)* *Se* $[f] = [g]$ *e* $[g] = [h]$*, então* $[f] = [h]$.

O caso (i) *é trivial. O caso* (ii) *segue direto de* $f = g, \ q.t.p.$ *Já no caso* (iii)*, se* $f = g, \ q.t.p.$ *e* $g = h, \ q.t.p.$*, então* $f = h, \ q.t.p.$

Definição 1.30. (ESPAÇOS L^p) *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto.* $L^p(U) = L^p(U, \mathcal{M}, \mu)$*, com* $1 \leq p < \infty$*, é o conjunto de todas as classes de equivalência de funções mensuráveis* f *de valor real, onde* $|f|^p$ *tem integral finita com respeito à medida* μ *sobre* U*.*

$$L^p(U) := \left\{ u : U \longrightarrow \mathbb{C} \middle| \ \text{u é mensurável e } \int_U |u(x)|^p dx < \infty \right\}. \tag{1.21}$$

Quando são já conhecidas a σ*-álgebra* $\mathcal{M}$ *e a medida* μ*, escrevemos* $L^p = L^p(U)$*.*

O seguinte fato faz com que o espaço de funções L^p seja um espaço vetorial.

Afirmação 1.5. *Para todas* $f, g \in L^p$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *temos que*

$$\alpha f + \beta g \in L^p, \qquad (\textit{Desigualdade de Minkowski})$$

ou seja, a combinação linear de funções em L^p *é mensurável e tem integral no sentido de Lebesgue finita.*

A linearidade de L^p segue diretamente do seguinte Teorema.

Teorema 1.9. *Os espaços* L^p *são espaços vetoriais normados, munidos com a norma*

$$\|u\|_{L^p(U)} = \left(\int_U |u(x)|^p dx < \infty \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.22}$$

Demonstração. Seja $f, g \in L^p$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como αf e $f + g$ são mensuráveis, basta provar que têm integrais à Lebesgue finitas.

- $\displaystyle\int |\alpha f|^p dx = |\alpha|^p \int |f|^p dx < \infty.$
- Como $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq (2.\max\{|f|,|g|\})^p = 2^p.(\max\{|f|,|g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$,
$$\int |f+g|^p dx \leq 2^p \int (|f|^p + |g|^p) dx < \infty.$$

Portanto, de $\alpha f \in L^p$ e de $f+g \in L^p$, decorre disso que L^p é um espaço vetorial.

Porém, que a expressão 1.22 é uma norma, decorre da desigualdade de Minkowisk e pode ser encontrada em [3]. □

Em particular, $L^2(U)$ é um espaço de Hilbert complexo com produto escalar dado por
$$(u,v)_{L^2(U)} = \int_U u(x)\overline{v}(x)dx, \forall u,v \in L^2(U). \tag{1.23}$$

O próximo resultado se trata de mostrar que os espaços L^p são espaços de Banach.

Teorema 1.10. (COMPLETUDE DE L^p) *Seja* $1 \leq p < \infty$. *O espaço* L^p *é um espaço completo sobre a norma* $\|\cdot\|_p$.

Demonstração. Seja (f_m) uma sequência de Cauchy sobre a norma $\|\cdot\|_p$. Para que L^p seja completo, é necessário que a sequência (f_m) seja convergente.

Para todo $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) > 0$ tal que
$$m,l \geq N(\epsilon) \implies \|f_m - f_l\|_p^p = \int |f_m - f_l|^p dx < \epsilon^p. \tag{1.24}$$

Para cada $i \in \{1,2,3,...\}$, seja $\epsilon = \frac{1}{2^i}$. Então existe $N(\epsilon) > 0$ de modo que
$$m,l \geq N\left(\frac{1}{2^i}\right) = N(i) \implies \|f_m - f_l\|_p < \frac{1}{2^i}. \tag{1.25}$$

Considere $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência definida da seguinte forma.
$$m_1 = \inf\{m \in \mathbb{N}; m \geq N(i)\},$$
$$\text{se } \ i > 1, \ \ m_i = \inf\{m \in \mathbb{N}; m > \text{máx}(m_{i-1}, N(i))\}.$$

Os termos m_i, escolhidos com o máximo, faz com que a sequência $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ seja crescente e, além disso, satisfaz
$$\|f_{m_{i+1}} - f_{m_i}\|_p < \frac{1}{2^i}. \tag{1.26}$$

Defina a sequência $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ de modo que os seus termos são tais que $g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}|$, então o seu limite é dado por

$$g = \lim_{k \longrightarrow \infty} g_k = \lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k} |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}| = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}|.$$

Sendo L^p um espaço vetorial, temos que $g_k \leq g_{k+1}$, pois

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}| \leq \sum_{i=1}^{k} |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}| + |f_{m_{k+2}} - f_{m_{k+1}}| = \sum_{i=1}^{k+1} |f_{m_{i+1}} - f_{m_i}| = g_{k+1}.$$

Logo, (g_k) é uma sequência monótona crescente de funções em L^p.

Note que $g_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Também por (1.24) temos $g_k^p \in L^1$. Então (g_k^p) é uma sequência monótona de funções em $M^+(X, \sigma)$. Pelo Teorema da convergência monótona e usando a desigualdade (1.26) temos

$$\int |g|^p d\mu = \int \lim_{k \longrightarrow \infty} |g_k|^p d\mu = \lim_{k \longrightarrow \infty} \int |g_k|^p d\mu = \lim_{k \longrightarrow \infty} \|g_k\|_p^p$$

$$\leq \lim_{k \longrightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \|f_{m_{i+1}} - f_{m_i}\|_p \right)^p < \lim_{k \longrightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \right)^p = 1.$$

Isso mostra que $g \in L^p$, ou seja, a série telescópica $\sum_{i=1}^{\infty} (f_{m_{i+1}} - f_{m_i})$ é absolutamente convergente em L^p. Daí, podemos definir uma função f em L^p por

$$f := f_{m_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{m_{i+1}} - f_{m_i}),$$

onde as somas parciais da série são $f_{m_k} := f_{m_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{m_{i+1}} - f_{m_i})$. Logo, $\lim_{k \longrightarrow \infty} f_{m_k} = f$.

Observe que como o limite existe, então

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} f_{m_k} = f \implies \liminf_{k \longrightarrow \infty} f_{m_k} = \limsup_{k \longrightarrow \infty} f_{m_k} = f.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, e pela linearidade de L^p como um espaço vetorial, temos que $\{|f_m - f_{m_k}|\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções em L^p.

Logo, a sequência $\{|f_m - f_{m_k}|^p\}_{k=1}^{\infty}$ está em L^1 e, além disso, está em $M^+(X, \sigma)$.

Aplicando o Lema de Fatou, juntamente com a condição (1.24) sobre uma sequência de Cauchy, para $m > N(\epsilon)$ vale

$$\int |f_m - f|^p d\mu = \int \liminf_{k \longrightarrow \infty} |f_m - f_{m_k}|^p \leq \liminf_{k \longrightarrow \infty} \int |f_m - f_{m_k}|^p < \epsilon^p.$$

Logo, $\|f - f_m\|^p < \epsilon$, sempre que $m > N(\epsilon)$. Portanto, concluímos que $f_m \longrightarrow f$ em L^p e provamos que L^p é um espaço completo. $\square$

Para completar a teoria dos espaços L^p, introduzimos o espaço que corresponde ao valor limitante $p = \infty$.

Definição 1.31. (SUPREMO ESSENCIAL) *Seja f uma função mensurável em X, então definimos*

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0;\ \mu(\{x; |f(x)| > a\}) = 0\},$$

com a convencão $\inf \emptyset = \infty$. O número $\|f\|_\infty$ é chamado de supremo essencial de $|f|$ e o denotamos por

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} ess|f(x)|.$$

Agora podemos definir o espaço de todas as funções mensuráveis com supremos essencial finito.

$$L^\infty = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C};\ f \text{ é mensurável e } \|f\|_\infty < \infty\},$$

onde L^∞ é o conjunto das classes de equivalência de todas as funções que são iguais $q.t.p.$ O resultado a seguir segue das propriedades do ínfimo e considerando ele é atingido em

$$\{x;\ |f(x)| > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x;\ |f(x)| > a + \frac{1}{n}\right\}.$$

O resultado a seguir fornece uma estrutura no espaço $L^\infty(U)$.

Teorema 1.11. *São válidas as afirmações acerca de $L^p,\ 1 \leq p \leq \infty$.*

(i) *Se f e g são funções mensuráveis em X, então $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.*
Se $f \in L^1$ e $g \in L^\infty$, então temos que $\|f.g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ se, e somente se $|g(x)| = \|g\|_\infty\ q.t.p.$ sobre o conjunto onde $f(x) \neq 0$.

(ii) $\|\cdot\|_\infty$ *é uma norma em L^∞.*

(iii) *O conjunto L^∞ é um espaço de Banach.*

Proposição 1.8. *Se $A \subset X$ é um subconjunto qualquer e $0 < p < q \leq \infty$, então*

$$L^p(A) \subset L^q(A), \quad \text{e} \quad \|f\|_q \leq \|f\|_p.$$

Demonstração. Consultar [2] $\square$

1.3 Espaços de Hölder

Esta seção trata de construir o espaço de Hölder, que consiste no espaço de funções que generalizam o espaço de funções de Lipschitz.

Definição 1.32. (FUNÇÃO DE LIPSCHITZ) *Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, dizemos que uma função $u : U \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana quando existe $c > 0$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq c.|x - y|, \forall x, y \in U.$$

Definição 1.33. (ESPAÇO DE HÖLDER) *Sejam $U \in \mathbb{R}^n$ aberto, e γ um número real tal que $0 < \gamma \leq 1$. Dizemos que uma função $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é Hölder continua com expoente γ se existe uma constante $c > 0$ satisfazendo*

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\gamma, \forall x, y \in U. \tag{1.27}$$

Um espaço de Hölder é um espaço vetorial cujos elementos são funções de Hölder, também chamadas Hölder contínuas. Denotamos o espaço de funções Hölder Contínuas por $C^{0,\gamma}(U)$.

Veja que se tivermos $\gamma = 1$, então a função u satisfaz a condição de Lipschitz. Porém, se tivermos $\gamma = 0$, a função u é apenas limitada, por isso devemos exigir que $\gamma \in (0, 1]$.

Agora vamos considerar algumas normas no espaço de funções $C^{0,\gamma}(U)$ que permitirá trabalhar com propriedades topológicas, convergência de sequências, completamento e diferenciabilidade de funções.

Definição 1.34. (NORMAS NO ESPAÇO DE HÖLDER) *Para toda função $u \in C^{0,\gamma}(\overline{U})$, onde $u : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada, é válido:*

(i) *A norma do supremo é definida por*

$$\|u\|_{C^0(\overline{U})} = \sup_{x \in U} |u(x)| = \|u\|_{L^\infty(U)}, \forall u \in C^0(\overline{U}). \tag{1.28}$$

(ii) *A γ-ésima seminorma de Hölder é o ínfimo das constantes de Hölder $c > 0$, dadas em (1.27), e escrevemos*

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{x,y \in U} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}. \tag{1.29}$$

(iii) *Usando (1.28) e (1.29), a γ-ésima norma de Hölder é definida por*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \|u\|_{C^0(\overline{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}. \tag{1.30}$$

De fato, o espaço das funções de Hölder $C^{0,\gamma}(\overline{U})$, munido com a norma (1.30), satisfaz as propriedades de uma norma em (1.2). Dados $u, v \in C^{0,\gamma}(\overline{U})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

(i) $\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \iff u = 0.$ (trivial)

(ii)
$$\begin{aligned}\|\lambda u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} &= \|\lambda u\|_{C^0(\overline{U})} + [\lambda u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}\\ &= \sup_{x\in U} |\lambda u(x)| + \sup_{x,y\in U} \frac{|\lambda u(x) - \lambda u(y)|}{|x-y|^\gamma}\\ &= |\lambda| \sup_{x\in U} |u(x)| + |\lambda| \sup_{x,y\in U} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma}\\ &= |\lambda| \left(\sup_{x\in U} |u(x)| + \sup_{x,y\in U} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right) = |\lambda| \|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}.\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}\|u+v\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} &= \|u+v\|_{C^0(\overline{U})} + [u+v]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}\\ &= \sup_{x\in U} |u(x)+v(x)| + \sup_{x,y\in U} \frac{|(u(x)-v(x)) - (u(y)-v(y))|}{|x-y|^\gamma}\\ &\le \sup_{x\in U} |u(x)| + \sup_{x\in U} |v(x)| + \sup_{x,y\in U} \frac{|(u(x)-u(y)) - (v(x)-v(y))|}{|x-y|^\gamma}\\ &\le \sup_{x\in U} |u(x)| + \sup_{x\in U} |v(x)| + \sup_{x,y\in U} \frac{|(u(x)-u(y))|}{|x-y|^\gamma} + \sup_{x,y\in U} \frac{|(v(x)-v(y))|}{|x-y|^\gamma},\end{aligned}$$

logo, temos que $\|u+v\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} \le \|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} + \|v\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}$.

O próximo passo é construir uma estrutura de diferenciabilidade para equipar os espaços de Hölder com mais regularidade.

Doravante, usamos a notação de multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, onde $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le n$, e cuja norma do multi-índice α é dada por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Dada uma função $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$, vamos denotar por $D_j u$ a sua α_j derivada parcial com respeito à j-ésima coordenada em $\mathbb{R}^n$. Neste caso, se tiver o multi-índice α dado por $\alpha = (0, ..., 0, \alpha_j, 0, ..., 0)$, então a derivada de u se escreve como

$$D^\alpha u = D_j u = \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial^{\alpha_j}_{x_j}} u.$$

Seja k é um inteiro não negativo, então para todo $x \in U$ temos

$$D^k u(x) = \{D^\alpha u(x); |\alpha| = k\}.$$

De modo geral, temos todas as derivadas parciais de u escritas com a notação

$$D^\alpha u = (D_1^{\alpha_1}, D_2^{\alpha_2}, ..., D_n^{\alpha_n})u,$$

que significa a derivada de u, α_1 vezes com respeito à primeira coordenada de $\mathbb{R}^n$, α_2 vezes com respeito à segunda coordenada de $\mathbb{R}^n$, ..., α_n vezes com respeito à n-ésima coordenada de $\mathbb{R}^n$. Podemos também denotar o operador derivação de ordem α como

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \alpha_{x_1}^{\alpha_n}} u. \tag{1.31}$$

Se tivermos $\alpha = (0, 0, ..., 0)$, convencionamos o operador identidade como $D^0 u = u$, onde $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Definição 1.35. *Denotamos por $C^k(U)$ o conjunto de funções $u : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que são contínuas e tais que suas derivadas $D^\alpha u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua para cada multi-índice α, com $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \leq k$.*

Decorre desta definição o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis.

Definição 1.36. (FUNÇÃO SUAVE) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e uma função $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$. Dizemos que u é suave se é infinitamente diferenciável, ou seja,*

$$\textit{quando } u \in C^k(U), \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.32}$$

Denotamos $C^\infty(U)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis e escrevemos

$$C^\infty(U) := \{u : U \longrightarrow \mathbb{R}; u \textit{ é infinitamente diferenciável}\} := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U). \tag{1.33}$$

A próxima definição surge a fim de equipar os espaços de Hölder, além da continuidade, com classes de regularidade.

Definição 1.37. (ESPAÇO DE HÖLDER k-REGULAR) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $\gamma \in (0, 1]$. Dizemos que o espaço de Hölder $C^{k,\gamma}(U)$ é o espaço das funções Hölder contínuas $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ com expoente γ tais que, $u \in C^k(\overline{U})$ e são limitadas com a norma*

$$||u||_{C^{k,\gamma}(U)} = \sum_{\alpha \leq k} ||D^\alpha u||_{C(U)} + \sum_{\alpha \leq k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(U)} < \infty. \tag{1.34}$$

Pela linearidade do operador derivação, $D^\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}$, é fácil ver que $||u||_{C^{k,\gamma}(U)}$ satisfaz as propriedades de uma norma sobre $C^{k,\gamma}(U)$. Para isso, basta verificar como foi feito em (1.30).

1.4 Espaço $C_0^\infty(U)$ e Distribuições

Para começar o estudo das distribuições, vamos observar o ambiente onde as funções estão definidas como segue.

Definição 1.38. (SUPORTE DE UMA FUNÇÃO) *Sejam $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e $(\Theta_i)_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos $\Theta_i \subset U$ tais que $f = 0 \ \ q.t.p.$ em Θ_i.*

(i) *Se considerarmos o subconjunto aberto $\Theta = \bigcup_{i\in I} \Theta_i$ de U, então $f = 0 \ \ q.t.p.$ em Θ.*

(ii) *O suporte de f é o subconjunto fechado*

$$(U - \Theta) \ := suppf.$$

Além disso, podemos reescrever esta definição para o caso de funções contínuas.

Definição 1.39. (SUPORTE COMPACTO) *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $K \subset U$ é o conjunto de pontos onde $f \neq 0$ e $\overline{K}$ é o fecho do conjunto K, então chamamos $\overline{K}$ de suporte de f e denotamos por*

$$suppf := \overline{K}.$$

Quando o suporte de uma função mensurável $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é um conjunto limitado e fechado, dizemos que f possui suporte compacto $\overline{K}$.

Além disso, se $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções mensuráveis e $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\lambda \neq 0$, mostra-se que

$$supp(f + g) \subset (supp\ f) \cup (supp\ g)$$

$$supp(fg) \subset (supp\ f) \cap (supp\ g)$$

$$supp(\lambda f) = \lambda supp\ f$$

Definição 1.40. (CONVERGÊNCIA EM $\mathcal{D}(U)$) *Dizemos que uma sequência de funções (φ_m) em $C_0^\infty(U)$ é convergente para zero quando as seguintes condições forem satisfeitas.*

(i) *Os suportes de todas as funções testes φ_m, da sequência dada, estão contidos em um compacto fixo K.*

(ii) *Para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a sequência $(D^\alpha \varphi_m)$ converge para zero uniformemente em K.*

Seja $\varphi \in C_0^\infty(U)$. Diz-se que a sequência de funções (φ_m) em $C_0^\infty(U)$ converge para φ em $C_0^\infty(U)$ quando a sequência $(\varphi_m - \varphi)$ converge para zero no sentido dado acima.

O espaço vetorial $C_0^\infty(U)$ com esta noção de convergência é representado por $\mathcal{D}(U)$ e é denominado o espaço das funções testes em U.

Definição 1.41. (DISTRIBUIÇÕES SOBRE UM ABERTO DE $\mathbb{R}^n$) *Uma distribuição sobre o aberto U é toda forma linear T sobre $\mathcal{D}(U)$ que é contínua no sentido de convergência definida em $\mathcal{D}(U)$.*

Isto significa que para toda sequência (φ_m) de $\mathcal{D}(U)$, convergente para zero no sentido da Definição 1.40, então a sequência $\langle T, \varphi_m \rangle$ converge para zero em K. (Note que $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ e $\langle T, \varphi_m \rangle$ é o valor de T em φ).

O conjunto de todas as distribuições sobre U é um espaço vetorial e denotamos por $\mathcal{D}'(U)$.

Neste espaço vetorial, dizemos que uma sequência (T_m) de vetores de $\mathcal{D}'(U)$ converge para zero em $\mathcal{D}'(U)$ quando, para toda função auxiliar $\varphi \in \mathcal{D}'(U)$, a sequência $\langle T, \varphi_m \rangle$ converge para zero em K.

Neste caso, dizemos que $\lim\limits_{m \longrightarrow \infty} T_m = 0$ em $\mathcal{D}'(U)$ quando $\lim\limits_{m \longrightarrow \infty} (T_m - T) = 0$ em $\mathcal{D}'(U)$.

Exemplo 1.1. *Seja $u \in L^1_{loc}(U)$. Considere a forma linear T_u definida em $D(U)$ por:*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_U u(x)\varphi(x)dx, \ \ \forall x \in U.$$

Mostra-se que T_u é uma distribuição sobre U.

É importante observar que existem distribuições não definidas em $L^1_{loc}(U)$, como o exemplo abordado a seguir.

Exemplo 1.2. (DISTRIBUIÇÃO DELTA DE DIRAC) *Seja x_0 um ponto de U e δ_{x_0} a forma linear definida em $\mathcal{D}(U)$ do seguinte modo.*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Verifica-se que δ_{x_0} é uma distribuição sobre U, denominada distribuição de Dirac ou medida de Dirac concentrada em x_0. Quando $x = 0$, tem-se δ_0.

Além disso, pode-se mostrar que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função $u \in L^1_{loc}(U)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(U)$ tal que

$$\int_U u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

O seguinte resultado mostra que podemos aproximar as funções L^p, $1 \leq p < \infty$, por funções regulares.

Teorema 1.12. *Para, $1 \leq p < \infty$, temos a seguinte cadeia*

$$D(U) \hookrightarrow L^p_{loc}(U) \hookrightarrow \mathcal{D}'(U),$$

sendo cada imersão densa na segunda.

Demonstração. Consultar [7]. □

Definição 1.42. *Uma distribuição sobre um domínio $U \subset \mathbb{R}^n$ é um funcional linear contínuo em $C_0^\infty(U)$.*

Exemplo: a função delta de Dirac.

$$\delta_{x_0} : C_0^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto \delta_{x_0}(\varphi).$$

Teorema 1.13. *Se $1 \leq p < \infty$, então $L^p(U) \subset L^p_{loc}(U)$.*

Demonstração. A prova se encontra em [5]. □

Agora, buscaremos explorar a noção de derivada fraca.

1.5 Derivada Fraca

Motivação: Tome $u \in C^1(U)$ e $\phi \in C^\infty(U)$, usando a fórmula de Green podemos integrar por partes

$$\int_U u\phi_{x_i} dx = -\int_U u_{x_i}\phi dx + \int_{\partial U} u\phi\nu_i dS$$

Como ϕ se anula no bordo, a integral sobre ∂U é nula.

Asssim,

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u \phi dx$$

Para isso, é necessário que $u \in C^k(\overline{U})$

Definição 1.43. (DERIVADA FRACA) *Dada uma função $u(x) \in L^2(U)$. Dizemos que ela é a derivada de ordem α, no sentido das distribuições, de uma função $v \in L^2(U)$ quando*

$$\int_U u(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v(x) D^\alpha \phi dx,$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}(U)$.

Indica-se a derivada de v pelo mesmo símbolo D^α, isto é, $u(x) := D^\alpha v(x)$, mas subentende-se que isso é verdade no sentido das distribuições como exposto mais formalmente a seguir.

Definição 1.44. (DISTRIBUIÇÕES COMO DERIVADA FRACA) *Seja T uma distribuição sobre U e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T é a forma linear $D^\alpha T$ definida em $\mathcal{D}(U)$ é dada por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Mostra-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre U.

Segue da definição acima que que cada distribuição T sobre U possui derivadas de todas as ordens. Assim, as funções de $L^1_{loc}(U)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

Outro resultado que vale a pena mencionar é que a derivada de uma função de $L^1_{loc}(U)$ não é, em geral, uma função de $L^1_{loc}(U)$, como mostra o exemplo que vem a seguir.

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev, tendo estes resultados como um dos objetivos o de fazer um estudo introdutório destes espaços.

Exemplo 1.3. *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma:*

$$u(x) = \begin{cases} 1, & se \ \ x > 0; \\ 0, & se \ \ x < 0. \end{cases}$$

Ela pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(U)$. De fato, têm-se

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

Observação 1.4. *Note que*

$$u \in L^1_{loc}(U) \Longleftrightarrow \int_V |v|dx < \infty, \ \forall V \subset\subset U, \ \ \texttt{(compactamente contido)}$$

onde $V \subset\subset U$ significa que o fecho $\overline{V}$ é compacto e $V \subset \overline{V} \subset U$.

1.6 Espaço de Sobolev

Vamos definir um espaço de funções que estão em L^p, cujos elementos têm derivadas fracas de várias ordens que também estão em L^p.

Definição 1.45. (ESPAÇO DE SOBOLEV) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, onde $1 \leq p < \infty$, e $k \in \mathbb{N}$. Representamos por $W^{k,p}(U)$ o espaço vetorial de todas as funções $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ em $L^p(U)$ tais que, para cada multi-índice α, com $|\alpha| \leq k$, a derivada $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(U)$.*

Definição 1.46. *Se $u \in W^{k,p}(U)$, a norma de u é definida por*

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \textit{se } 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_U ess |D^\alpha u|, & \textit{se } p = \infty. \end{cases} \tag{1.35}$$

Os espaços normados $W^{k,p}(U)$ são denominados espaços de Sobolev.

Observação 1.5. *Se $p = 2$, usualmente escrevemos*

$$\mathcal{H}^k(U) := W^{k,2}(U), (k = 1, 2, 3, ...).$$

Os espaços $\mathcal{H}^k(U)$ são espaços de Hilbert. Note também que $\mathcal{H}^0(U) = L^2(U)$.

Definição 1.47. *Seja $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset W^{k,p}(U)$ uma sequência e $u \in W^{k,p}(U)$. Definimos dois tipos de convergência em espaços de Sobolev.*

(i) (CONVERGÊNCIA EM $W^{k,p}(U)$) *Dizemos que u_m converge para u, e escrevemos*

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } W^{k,p}(U), \text{ quando } \lim_{n \longrightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0.$$

(ii) (CONVERGÊNCIA EM $W^{k,p}_{loc}(U)$) *Dizemos que u_m converge localmente para u, neste caso denotamos*

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } W^{k,p}_{loc}(U),$$

que significa

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } W^{k,p}(V), \text{ para cada } V \subset\subset U \ (compactamente\ contido).$$

Proposição 1.9. ($W^{k,p}(U)$ COMO UM ESPAÇO DE BANACH) *Para $1 \leq p \leq \infty$, e cada $k \in \{1, 2, ...\}$, o espaço de Sobolev $W^{k,p}(U)$ com a norma definida em (1.35) é um espaço de Banach.*

Definição 1.48. (MOLLIFIER) *O processo de suavização de funções é definido como segue.*

(i) *Um mollifier é uma função suavizante $\eta \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ definida por*

$$\eta(x) := \begin{cases} C.exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases} \tag{1.36}$$

onde a constante $C > 0$ é escolhida de modo que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1$.

(ii) *Para cada $\epsilon > 0$, seja*

$$\eta_{\epsilon}(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right). \tag{1.37}$$

As funções η_{ϵ} são $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e satisfazem

$$\int \eta(x)dx = 1, \text{ onde } supp(\eta_{\epsilon}) \subset B(0, \epsilon).$$

Definição 1.49. (CONVOLUÇÃO) *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente integrável, então definimos a convolução como*

$$f^\epsilon := \eta_\epsilon * f \quad \text{em } U_\epsilon, \quad \text{tal que}$$

$$f^\epsilon(x) := \int_U \eta_\epsilon(x-y)f(d)dy = \int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y)f(x-y)dy, \ \ \forall x \in U_\epsilon.$$

A convolução é o processo de mollifier, ou regularização, da função f.

1.7 Espaço Dual

Nesta seção vamos obter uma caracterização do espaço dual de H_0^1.

Definição 1.50. (ESPAÇO DUAL DE H_0^1) *Denotamos por $H^{-1}(U)$ o espaço dual de H_0^1. Em outras palavras, $f \in H^{-1}(U)$ significa que f é um funcional linear limitado em $H_0^1(U)$.*

Definição 1.51. (NORMA DE H^{-1}) *Se $f \in H^{-1}(U)$, a norma em H^{-1} é definida por*

$$\|f\|_{H^{-1}} = \sup\{\langle f, u\rangle |\ u \in H_0^1(U),\ \|u\|_{H_0^1(U)} \leq 1\}.$$

Definição 1.52. (CARACTERIZAÇÃO DE H^{-1}) *Assuma que $f \in H_0^1(U)$. Então existem funções $f^1, f^2, ..., f^n \in L^2(U)$ tais que*

(i)

$$\langle f, v\rangle = \int_U f^0 v + \sum_1^n f^i v_{x_i} dx. \quad (\text{para toda } v \in H_0^1(U))$$

(ii)

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \inf_f \left[\left(\int_U \sum_1^n |f^i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}};\ f \text{ satisfaz } (i) \text{ para } f^1, f^2, ..., f^n \in L^2(U) \right].$$

Definição 1.53. (ESPAÇO $W^{-m,q}$) *Suponha-se que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(U)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(U)$.*

- *O dual topológico de $H_0^m(U)$ denota-se por $H^{-m}(U)$.*

Agora, seja $W^{-m,q}(U)$ o espaço dual topológico e (φ_k) uma sequência de funções testes em U tal que $\varphi_k \longrightarrow 0$ em $\mathcal{D}(U)$. Resulta que $\varphi_k \longrightarrow 0$ em $W_0^{m,q}$ e, logo, temos que $\langle f, \varphi_k \rangle \longrightarrow 0$, o que permite concluir que a restrição de f a $\mathcal{D}(U)$ é uma distribuição. Considere a aplicação linear

$$\sigma : W^{-m,q}(U) \longmapsto \mathcal{D}(U)$$

tal que $\sigma(f) = f|_{\mathcal{D}(U)}$ para toda $f \in W^{-m,q}(U)$. Por ser $\mathcal{D}(U)$ denso em $W_0^{m,q}(U)$, resulta que σ é injetora.

Além disso, se f_k é uma sequência de vetores de $W^{-m,q}(U)$ tal que $f_k \longrightarrow 0$ em $W_{-m,q}(U)$, então $\sigma(f_k) \longrightarrow 0$ em $\mathcal{D}'(U)$, ou seja, σ é contínua.

A aplicação σ permite identificar o espaço $W^{-m,q}(U)$ como um subespaço de $\mathcal{D}(U)$. Com esta identificação, temos a seguinte imersão

$$W^{-m,q}(U) \hookrightarrow \mathcal{D}(U)$$

Quando se diz que uma distribuição T pertence a $W^{-m,q}(U)$, significa dizer que T, definida em $\mathcal{D}(U)$, pode ser estendida (como um funcional linear contínuo) ao espaço $W^{m,p}(U)$. Esta extensão é representada por T.

O resultado a seguir se encontra em [6], e se trata de imersões de Sobolev.

Proposição 1.10. (IMERSÃO DE SOBOLEV) *Seja $(a,b) \subset \mathbb{R}$ aberto e limitado. Se k, p, m são inteiros positivos tais que $k > m + \frac{1}{p}$, e $W^{k,p}(I)$ é o espaço de Sobolev de ordem k e exponente p definido em (a,b), então*

$$W^{k,p}((a,b)) \hookrightarrow C^m([a,b])$$

é a imersão de Sobolev unidimensional. A notação $\hookrightarrow$ indica que a imersão é contínua e compacta.

Exemplo 1.4. *Se escolhermos $k = 3$, $p = 2$ e $m = 1$, então vale*

(i) $W^{3,2}((a,b)) = H^3((a,b)) \hookrightarrow C^1([a,b])$.

(ii) $\|\cdot\|_{C^1([a,b])} \leq \|\cdot\|_{H^3((a,b))}$.

O teorema a seguir foi desenvolvido e demonstrado por J. Simon (consultar [11]). A abordagem deste resultado será com a intenção de usá-lo em capítulos subsequentes.

Teorema 1.14. *Sejam $X, B,$ e Y três espaços de Banach tais que $X \subset B \subset Y$, e que tenha um mergulho compacto $X \hookrightarrow B$. Seja $T > 0$ e K um subconjunto limitado de $L^2((0,T), X)$. Se existe $C > 0$ tal que*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{L^2((0,T),Y)} \leq C, \forall f \in K,$$

então K é relativamente compacto em $L^2((0,T), B)$.

Agora, apresentamos um lema de teoria espectral cuja demonstração segue a referência [9], a prova utiliza transformada de Fourier e aspectos de teoria da medida e de espaços de Sobolev. Este resultado será abordado agora a fim de poder ser usado mais adiante, na controlabilidade da equação de Korteweg-de Vries.

Lema 1.2. *Considere o conjunto*

$$\mathcal{N} := \left\{ 2\pi \sqrt{\frac{j^2 + l^2 + jl}{3}}; j, l \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}. \tag{1.38}$$

Então existem $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\varphi \in \{H^3((0,L);\mathbb{C}) - 0\}$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\varphi_x - \varphi_{xxx} = \lambda \varphi, \\ \varphi(0) = \varphi(L) = \varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0, \end{cases} \tag{1.39}$$

se, e somente se, $L \in \mathcal{N}$.

Demonstração. Assuma que $\varphi_0 \in \{H^3((0,L);\mathbb{C}) - 0\}$ e λ são tais que as condições (1.39) são satisfeitas. Denote por $u \in H^2(\mathbb{R})$ a extensão de φ_0 em torno em 0. Então

$$\lambda u + u' + u''' = \varphi_0''(0)\delta(0) - \varphi_0''(L)\delta_L \ \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

onde δ_{x_0} denota a medida de Dirac em x_0.

Vale notar que a existência de uma função $\varphi_0 \in \{H^3((0,L);\mathbb{C}) - 0\}$, com valores complexos, satisfazendo (1.39) é equivalente à existência de números complexos α, β, λ (com $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$), e de uma função $u \in H^2(\mathbb{R})$ com suporte compacto $[-L, L]$ tal que

$$\lambda u + u' + u''' = \alpha\delta(0) - \beta\delta_L \ \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Aplicando a transformada de Fourier, teremos

$$(\lambda + (i\xi) + (i\xi)^3)\hat{u}(\xi) = \alpha - \beta e^{-iL\xi},$$

então, fazendo $\lambda = -ip$, obtemos

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\alpha - \beta e^{-iL\xi}}{-i(\xi^3 - \xi + p)} \;=\; i\frac{\alpha - \beta e^{-iL\xi}}{\xi^3 - \xi + p}.$$

Usando o teorema de Paley-Wiener e a caracterização usual de funções $H^2(\mathbb{R})$ pela transformada de Fourier.

Logo, existência de $\varphi_0 \in \{H^3((0,L);\mathbb{C}) - 0\}$ satisfazendo (1.39) é equivalente à existência de $p \in \mathbb{C}$, e de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ tal que o mapa

$$f(\xi) := \frac{\alpha - \beta e^{-iL\xi}}{\xi^3 - \xi + p}$$

satisfaz

(i) f é uma função inteira em $\mathbb{C}$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|^2(1 + |\xi|^2)^2 d\xi < \infty$;

(iii) $\forall \xi \in \mathbb{C}$ temos que $|f(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^N e^{L|\mathcal{I}m\xi|}$ (para algumas constantes positivas C e N).

Considerando que as raízes do complexo $\alpha - \beta e^{-iL\xi}$ são simples (a menos do caso trivial $(\alpha, \beta) = (0,0)$), temos que (i) mostra que as raízes de $\xi^3 - \xi + p$ são simples, logo, também as raízes de $\alpha - \beta e^{-iL\xi}$ são simples. Note que, se o item (i) se mantém válido, então os itens (ii) e (iii) são satisfeitos.

Retornando ao problema inicial, segue que a existência de φ satisfazendo (1.39) é equivalente à existência de números complexos p, μ_0 e de números inteiros positivos j, l tais que, se definirmos as raízes do polinômio de grau 3 como

$$\mu_1 := \mu_0 + j\frac{2\pi}{L} \quad \text{e} \quad \mu_2 := \mu_1 + l\frac{2\pi}{L}.$$

Temos

$$\xi^3 - \xi + p = (\xi - \mu_0)(\xi - \mu_1)(\xi - \mu_2).$$

Usando as fórmulas de Girard, obtemos

$$\begin{cases} \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = 0, \\ \mu_0\mu_1 + \mu_0\mu_2 + \mu_1\mu_2 = -1, \\ \mu_0\mu_1\mu_2 = -p. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, a primeira equação fica

$$0 = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 = \mu_0 + \left(\mu_0 + j\frac{2\pi}{L}\right) + \left(\mu_1 + l\frac{2\pi}{L}\right)$$

$$\begin{aligned}
0 &= \mu_0 + \mu_0 + j\frac{2\pi}{L} + \left(\mu_0 + j\frac{2\pi}{L}\right) + l\frac{2\pi}{L} \\
0 &= 3\mu_0 + (2j + l)\frac{2\pi}{L} \\
\mu_0 &= -\frac{1}{3}(2j + l)\frac{2\pi}{L}.
\end{aligned}$$

Na última equação, vê-se facilmente que

$$p = -\left(\mu_0 + j\frac{2\pi}{L}\right)\left(\mu_0 + (j + l)\frac{2\pi}{L}\right).$$

Desenvolvendo as substituições, fica

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \mu_0 + j\frac{2\pi}{L} = -\frac{1}{3}(2j + l)\frac{2\pi}{L} + j\frac{2\pi}{L} = (j - l)\frac{2\pi}{3L}, \\
\mu_2 &= (j - l)\frac{2\pi}{3L} + l\frac{2\pi}{L} = (j + 2l)\frac{2\pi}{3L}.
\end{aligned}$$

Substituindo na segunda equação de Girard, obtemos

$$-1 = \mu_0\mu_1 + \mu_0\mu_2 + \mu_1\mu_2 = -(2j+l)(j-l)\frac{4\pi^2}{9L^2} - (2j+l)(j+2l)\frac{4\pi^2}{9L^2} + (j-l)(j+2l)\frac{4\pi^2}{9L^2},$$

$$\begin{aligned}
\frac{9L^2}{4\pi^2} &= (2j + l)(j - l) + (2j + l)(j + 2l) - (j - l)(j + 2l), \\
\frac{9L^2}{4\pi^2} &= (2j^2 - 2jl + jl - l^2) + (2j^2 + 4jl + jl + 2l^2) - (j^2 + 2jl - jl - 2l^2), \\
\frac{9L^2}{4\pi^2} &= 3j^2 + 3jl + 3l^2, \\
\frac{L^2}{4\pi^2} &= \frac{j^2 + jl + l^2}{3}, \quad (\texttt{extraindo a raiz}) \\
L &= 2\pi\sqrt{\frac{j^2 + l^2 + jl}{3}}.
\end{aligned}$$

Portanto, devemos ter $L \in \mathcal{N}$.

$\square$

1.8 Teoria de Semigrupo

Nesta seção, vamos discorrer sobre alguns resultados clássicos de semigrupos gerados por operadores lineares com vasta aplicação em equações de evolução.

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo, e A o operador linear definido por

$$A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$x \longmapsto Ax,$$

onde, nesta seção, $D(A)$ é um subespaço de $\mathcal{H}$ densamente definido, i.e.,

$$D(A) \text{ é denso em } \mathcal{H}.$$

Como ponto de partida, vamos enunciar algumas definições acerca de operadores com domínio estritamente menor que o espaço de Hilbert que o contém.

Definição 1.54. (OPERADOR DISSIPATIVO) *Um operador linear $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é dito dissipativo quando*

$$\mathcal{R}(Ax, x) \leq 0, \forall x \in D(A). \tag{1.40}$$

Observação 1.6. *Consideramos que $\forall z \in \mathbb{C}$, a notação $\mathcal{R}z$ representa a parte real do complexo z.*

Agora vamos enunciar o teorema de Lumer Phillips, cuja prova se encontra em [4].

Teorema 1.15. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido e fechado, e $A^* : D(A^*) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ seu adjunto. Se ambos A e A^* são dissipativos, então para todo $x^0 \in D(A)$, existe um único*

$$x \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty); D(A)]) \tag{1.41}$$

tal que

$$\frac{dx}{dt} = Ax \text{ em } [0, \infty), \tag{1.42}$$

$$x(0) = x^0. \tag{1.43}$$

E temos ainda

$$\|x(t)\| \leq \|x^0\|, \ \ \forall t \in [0, \infty), \tag{1.44}$$

$$\left\|\frac{dx(t)}{dt}\right\| = \|Ax(t)\| \leq \|Ax^0\|, \forall t \in [0, \infty). \tag{1.45}$$

Observação 1.7. *Usamos o espaço vetorial $D(A)$ munido com a norma do gráfico definida por $\|y\|_{D(A)} := \|y\| + \|Ay\|$.*

Definição 1.55. (SEMIGRUPO) *Dizemos que a família a $1-$parâmetro $S(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores lineares contínuos de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$ é um semigrupo de operadores lineares contínuos de $\mathcal{H}$ quando*

$$\begin{cases} S(0) = Id, \\ S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2), \forall (t_1, t_2) \in [0, \infty)^2. \end{cases} \tag{1.46}$$

Do fato de $D(A)$ ser densamente definida juntamente com (1.44), segue que, para todo $t > 0$, a aplicação linear $x^0 \subset D(A) \longrightarrow x(t) \in \mathcal{H}$ pode ser unicamente extendida a um elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. i.e, um operador linear contínuo de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$. Essa extensão é denotada por $S(t)$. Devido às duas propriedades dadas em (1.46), o operador extensão $S : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ é chamado de semigrupo associado ao operador linear A.

Observação 1.8. *Note que a desigualdade (1.44) implica na limitação $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \leq 1$, i.e., o semigrupo $S(t)$ é uma contração para todo $t \in [0, \infty)$.*

Veremos a próxima definição concernente a regularidade de um semigrupo.

Definição 1.56. *Dado $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, seja $S(t), t \in [0, \infty)$ o semigrupo de operadores lineares contínuos de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$. Dizemos que $S(t)$ é fortemente contínuo quando*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} S(t)x = x, \forall x \in \mathcal{H}.$$

Concernente a problema de Cauchy não-homogêneos, temos o seguite teorema.

Teorema 1.16. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador linear contínuo. Assuma que A seja densamente definido e fechado. Seja $A^* : D(A^*) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ o operador adjunto de A. Se ambos A e A^* são dissipativos, então para todo $x^0 \in D(A)$, para todo $T \in [0, \infty)$, e para todo $f \in C^1([0, T]; \mathcal{H})$, existe um único*

$$x \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty); D(A)) \tag{1.47}$$

tal que

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), t \in [0, T], \tag{1.48}$$

$$x(0) = x^0. \tag{1.49}$$

Além disso, temos a fórmula de Duhamel dada por

$$x(t) = S(t)x^0 + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau, \forall t \in [0,T]. \tag{1.50}$$

Devido ao comportamento da norma $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})}$ como operador linear contínuo, temos o seguinte teorema cuja abordagem pode ser consultada em [8].

Teorema 1.17. *Seja $S(t), t \in [0,\infty)$, o semigrupo de operadores lineares fortemente contínuos em $\mathcal{H}$. Então, existe $C > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \leq Ce^{\lambda t}, \forall t \in [0,\infty).$$

Definição 1.57. *Seja $S(t), t \in [0,\infty)$ um semigrupo de operadores lineares contínuos em $\mathcal{H}$. Então, o gerador infinitesimal de S é o operador linear $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in \mathcal{H}; \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \ \ existe \right\},$$

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A).$$

Teorema 1.18. *Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador linear densamente definido e fechado, $A^* : D(A^*) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ o operador adjunto de A, de modo que A e A^* dissipativos. Então A é o gerador infinitesimal do semigrupo fortemente contínuo associado ao operador A.*

Teorema 1.19. *Seja $S(t), t \in [0,\infty)$, o semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos em $\mathcal{H}$. Então,*

(i) *O domínio $D(A)$ é denso em $\mathcal{H}$ e A é um operador linear fechado.*

(ii) *Para todo $x^0 \in D(A)$, existe um único*

$$x \in C^1([0,\infty);\mathcal{H}) \cap C^0([0,\infty);D(A))$$

tal que

$$x(t) \in D(A), \forall t \in [0,\infty),$$
$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t), \forall t \in [0,\infty),$$
$$x(t) = x^0.$$

Além disso, essa solução satisfaz

$$x(t) = S(t)x^0. \forall t \in [0,\infty).$$

(iii) $S(t)^*, t \in [0, \infty),$ *é o semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares de operadores lineares contínuos e o gerador infinitesimal desse semigrupo é o adjunto* A^* *do operador* A.

Os próximos passos mostram que os resultados prévios e definições podem ser estendidos a grupos de operadores lineares contínuos.

Definição 1.58. *Dizemos que a família a* 1*-parâmetro* $S(t), t \in [0, \infty),$ *de operadores lineares contínuos de* $\mathcal{H}$ *em* $\mathcal{H}$ *é um grupo de operadores lineares contínuos em* $\mathcal{H}$ *se*

$$S(0) = Id,$$

$$S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2), \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.59. *Dado um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$*, seja* $S(t), t \in [0, \infty)$ *o grupo de operadores lineares contínuos de* $\mathcal{H}$ *em* $\mathcal{H}$*. Dizemos que* $S(t)$ *é fortemente contínuo quando*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} S(t)x = x, \forall x \in \mathcal{H}.$$

Definição 1.60. *Seja* $S(t), t \in [0, \infty),$ *um grupo de operadores lineares contínuos em* $\mathcal{H}$*. Então, o gerador infinitesimal de* S *é o operador linear* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in \mathcal{H};\ \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \textit{existe} \right\},$$

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A).$$

As principais propriedades de gerador infinitesimal de um grupo, fortemente contínuo de operadores lineares contínuos em $\mathcal{H}$, são resumidas no seguinte teorema. (No teorema, aplicamos $t \in [0, \infty) \mapsto S(t)$ e $t \in [0, \infty) \mapsto S(-t)$.)

Teorema 1.20. *Seja* $S(t), t \in \mathbb{R}$*, o grupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos em* $\mathcal{H}$*. Então,*

(i) *O domínio* $D(A)$ *é denso em* $\mathcal{H}$ *e* A *é um operador linear fechado.*

(ii) *Para todo* $x^0 \in D(A)$*, existe um único*

$$x \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{H}) \cap C^0(\mathbb{R}; D(A))$$

tal que

$$x(t) \in D(A), \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

$$x(t) = x^0.$$

Além disso, essa solução satisfaz

$$x(t) = S(t)x^0. \forall t \in \mathbb{R}.$$

(iii) $S(t)^*, t \in \mathbb{R}$, *é o grupo fortemente contínuo de operadores lineares contínuos, e o gerador infinitesimal desse grupo é o adjunto* A^* *do operador* A.

Para finalizar esta seção, apresentamos o seguinte teorema.

Teorema 1.21. *Seja* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *um operador linear densamente definido tal que seu adjunto,* $A^* : D(A^*) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$*, satisfaça* $A = -A^*$*. Então* A *é o gerador infinitesimal do grupo, fortemente contínuo de isometrias em* $\mathcal{H}$*, associado ao operador* A.

Capítulo 2

Equação do Transporte

Neste capítulo iremos abordar a teoria da existência e unicidade de soluções para a equação do transporte e, quando acrescido de uma evolução temporal, sistema de controle, bem como buscar quais são as suas condições de controlabilidade como abordado em [1].

Seja $L > 0$ e $T > 0$. Considere o sistema de controle linear variando no tempo t, com estado inicial $u(t)$, dado por

$$\begin{cases} y_t(t,x) + y_x(t,x) = 0, \text{ com } t \in (0,T) \text{ e } x \in (0,L); \\ y(t,0) = u(t); \end{cases} \tag{2.1}$$

onde, no tempo $t \in (0,T)$, o controle do sistema (2.1) é a função $u : (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$, e o estado é a função $y(t,.) : (0,L) \longrightarrow \mathbb{R}$.

A próxima seção tem como objetivo obter ferramentas para estudar a controlabilidade desse sistema de controle linear. Para isso, vamos começar adicionando uma condição inicial ao sistema de controle (2.1) e vê-lo como um problema de Cauchy.

2.1 Boa Colocação do Problema de Cauchy

No sistema de controle (2.1), vamos colocar uma condição de valor inicial fixando $t = 0$ na solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_t + y_x = 0, t \in (0,T), \ x \in (0,L), \\ y(t,0) = u(t), \ t \in (0,T), \\ y(0,x) = y^0(x), \ x \in (0,L); \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $T > 0$, $y^0(x) \in L^2(0,L)$ e $u \in L^2(0,T)$ são dados.

A fim de desenvolver a noção de uma solução fraca para esse problema de Cauchy, primeiramente, vamos admitir que existe solução forte $y \in C^1$ em $[0,T] \times [0,L]$ satisfazendo o problema de boa colocação (2.2).

Seja $\tau \in [0,T]$ um tempo arbitrário e considere $\phi \in C^1([0,\tau] \times [0,L];\mathbb{R})$ uma função auxiliar. Se multiplicarmos a equação do transporte em (2.2) por ϕ, obtemos

$$\phi.y_t + \phi.y_x = 0.$$

Em ambos os lados da equação, aplicamos integração sobre o conjunto $[0,\tau] \times [0,L]$. Assim,

$$\int_0^\tau \int_0^L (\phi.y_t + \phi.y_x) dxdt = 0.$$

Usando as propriedades da soma de integrais e trocando a ordem de integração na primeira integral, fica assim

$$\int_0^\tau \int_0^L \phi.y_t dxdt + \int_0^\tau \int_0^L \phi.y_x dxdt = 0,$$
$$\int_0^L \int_0^\tau \phi.y_t dtdx + \int_0^\tau \int_0^L \phi.y_x dxdt = 0.$$

Daí, integramos por partes em relação a x em uma, e em relação a t na outra, ficando

$$\int_0^L \left[\phi.y - \int \phi_t.ydt\right]\Big|_0^\tau dx + \int_0^\tau \left[\phi.y - \int \phi_x.ydx\right]\Big|_0^L dt = 0.$$

$$\int_0^L \left[\phi(\tau,x).y(\tau,x) - \int_0^\tau \phi_t(t,x).y(t,x)dt - \phi(0,x).y(0,x)\right] dx +$$
$$\int_0^\tau \left[\phi(t,L).y(t,L) - \int_0^L \phi_x(t,x).y(t,x)dx - \phi(t,0).y(t,0))\right] dt = 0.$$

Apenas separando em somas de integrais nas variáveis x e t correspondentes, segue que

$$\int_0^L \phi(\tau,x).y(\tau,x)dx - \int_0^L \int_0^\tau \phi_t(t,x).y(t,x)dtdx - \int_0^L \phi(0,x).y(0,x)dx +$$
$$\int_0^\tau \phi(t,L).y(t,L)dt - \int_0^\tau \int_0^L \phi_x(t,x).y(t,x)dxdt - \int_0^\tau \phi(t,0).y(t,0)dt = 0.$$

Podemos agora fazer uso das condições iniciais do problema de Cauchy (2.2) apenas substituindo $y(t,0) = u(t)$ e $y(0,x) = y^0(x)$. Neste caso teremos

$$\begin{aligned} &-\int_0^L \int_0^\tau \left[\phi_t(t,x).y(t,x) + \phi_x(t,x).y(t,x)\right] dtdx + \int_0^L \phi(\tau,x).y(\tau,x)dx \\ &- \int_0^L \phi(0,x).y^0(x)dx + \int_0^\tau \phi(t,L).y(t,L)dt - \int_0^\tau \phi(t,0).u(t)dt = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Essa equação integral em (2.3) conduz à seguinte definição, a qual sugere ser possível reduzir a regularidade da solução do problema de Cauchy (2.2), ao passo que faz uso da função ϕ de forma auxiliar.

Definição 2.1. (SOLUÇÃO FRACA) *Sejam $T > 0$, $y^0 \in L^2(0,L)$ e $u \in L^2(0,T)$ dados. A solução do problema de Cauchy (2.2) é uma função $y \in C^0([0,T];L^2(0,L))$ tal que, dado $\tau \in [0,T]$ arbitrário, para toda função $\phi \in C^1([0,\tau]\times[0,L])$ que satisfaz a condição*

$$\phi(t,L) = 0, \forall t \in [0,\tau]. \tag{2.4}$$

Então,

$$\begin{aligned} -\int_0^L \int_0^\tau [\phi_t(t,x).y(t,x) + \phi_x(t,x).y(t,x)]dtdx + \int_0^L \phi(\tau,x).y(\tau,x)dx \\ - \int_0^L \phi(0,x).y^0(x)dx - \int_0^\tau \phi(t,0).u(t)dt = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

A escolha e o uso desta definição será justificada na prova da proposição a seguir, a qual afirma que a solução y do problema de Cauchy (2.2), sendo regular, implica na regularidade das condições de valor iniciais.

Proposição 2.1. *Sejam $T > 0$, $y^0 \in L^2(0,L)$ e $u \in L^2(0,T)$ dados. Vamos assumir que y é uma solução do problema de Cauchy (2.2) que é de classe C^1 em $[0,T]\times[0,L]$. Então*

(i) $y^0 \in C^1([0,L])$;

(ii) $u \in C^1([0,T])$;

(iii) $y(0,x) = y^0(x), \forall x \in [0,L]$;

(iv) $y(t,0) = u(t), \forall t \in [0,T]$;

(v) $y_t(t,x) + y_x(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,T]\times[0,L]$.

Demonstração. Vamos provar primeiro o item (v).

Pela Definição 2.1, a função ϕ satisfazendo (2.4) pode ser escolhida de forma arbitrária. Então, fazendo $\tau := T$, considere $\phi \in C^1([0,T]\times[0,L])$ se anulando nos extremos do intervalo temporal e também nos extremos do intervalo espacial, ou seja,

$$\begin{cases} \phi(0,x) = \phi(T,x) = 0, \forall x \in [0,L], \\ \phi(t,0) = \phi(t,L) = 0, \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{2.6}$$

Se usar-mos a equação integral (2.5) juntamente com a escolha de ϕ satisfazendo (2.6), com $\tau := T$, então os termos nos extremos temporal e espacial se anulam, restando apenas

$$\int_0^L \int_0^\tau [\phi_t + \phi_x] y dt dx = 0. \tag{2.7}$$

Se prosseguirmos usando integral por partes, considerando ainda (2.6) e $\tau := T$, então (2.7) fica da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\int_0^L \int_0^\tau [\phi_t + \phi_x] y dt dx &= \int_0^L \int_0^\tau y\phi_t dt dx + \int_0^\tau \int_0^L y\phi_x dx dt \\ &= \int_0^L \Big[y\phi \Big|_0^\tau - \int_0^\tau y_t \phi dt \Big] dx + \int_0^\tau \Big[y\phi \Big|_0^L - \int_0^L y_x \phi dx \Big] dt \\ &= \int_0^L \int_0^\tau [y_t + y_x] \phi dt dx = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Agora, é preciso que o termo integrante de (2.8), em termos de y, seja identicamente nulo em quase todo ponto ($q.t.p$).

Veja que, conquanto que o conjunto das funções $\phi \in C^1([0,T] \times [0,L])$, que se anulam no conjunto $(\{0,T\} \times [0,L]) \bigcap ([0,T] \times \{0,L\})$, seja denso em $L^1((0,T) \times (0,L))$, o resultado expresso em (2.8) se escreve como

$$\int_0^L \int_0^\tau [y_t + y_x] \phi dt dx = 0, \forall \phi \in L^1((0,T) \times (0,L)). \tag{2.9}$$

Em particular, se escolhermos a função $\phi \in L^1((0,T) \times (0,L))$ definida por

$$\phi(t,x) = \begin{cases} 1, \text{ se } y_t(t,x) + y_x(t,x) \geq 0, \\ -1, \text{ se } y_t(t,x) + y_x(t,x) < 0, \end{cases}$$

então a equação (2.9) se torna

$$\int_0^L \int_0^\tau |y_t + y_x| dt dx = 0. \tag{2.10}$$

Isto implica que $y_t + y_x = 0, \ \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,L]$. Assim provamos o item (v).

Agora, vamos provar os itens (iii) e (iv) da proposição.

Partindo da Definição 2.1, escolha a função auxiliar $\phi \in C^1([0,T] \times [0,L])$ com um pouco menos de restrição satisfazendo apenas (2.4), ou seja, $\phi(t,L) = 0, \forall t \in [0,T]$.

Na equação integral (2.5), considerando ainda $\tau := T$, teremos

$$-\int_0^L \int_0^\tau \phi_t(t,x).y(t,x) dt dx - \int_0^\tau \int_0^L \phi_x(t,x).y(t,x) dx dt + \int_0^L \phi(\tau,x).y(\tau,x) dx$$

$$-\int_0^L \phi(0,x).y^0(x)dx - \int_0^\tau \phi(t,0).u(t)dt = 0,$$

e levando em conta já válido o item (v) da Proposição 2.1, integramos por partes.

$$-\int_0^L \left[\phi(t,x).y(t,x)\Big|_0^\tau - \int_0^\tau \phi(t,x)y_t(t,x)dt\right]dx - \int_0^\tau \left[\phi(t,x).y(t,x)\Big|_0^L - \int_0^L \phi(t,x).y_x(t,x)dx\right]dt$$

$$+\int_0^L \phi(\tau,x).y(\tau,x)dx - \int_0^L \phi(0,x).y^0(x)dx - \int_0^\tau \phi(t,0).u(t)dt = 0.$$

Substituindo os limites de integração, fica assim

$$-\int_0^L \left[\phi(\tau,x).y(\tau,x) - \phi(0,x)y(0,x) - \int_0^\tau \phi(t,x)y_t(t,x)dt\right]dx$$

$$-\int_0^\tau \left[\phi(t,L).y(t,L) - \phi(t,0)y(t,0) - \int_0^L \phi(t,x).y_x(t,x)dx\right]dt +$$

$$+\int_0^L \phi(\tau,x).y(\tau,x)dx - \int_0^L \phi(0,x).y^0(x)dx - \int_0^\tau \phi(t,0).u(t)dt = 0.$$

Ao distribuir as integrais adequadamente, reorganizamos os termos ficando

$$-\int_0^L \phi(\tau,x).y(\tau,x)dx + \int_0^L \phi(0,x)y(0,x)dx + \int_0^L\int_0^\tau \phi(t,x)y_t(t,x)dtdx$$

$$-\int_0^\tau \phi(t,L).y(t,L)dt + \int_0^\tau \phi(t,0)y(t,0)dt + \int_0^\tau\int_0^L \phi(t,x).y_x(t,x)dxdt$$

$$+\int_0^L \phi(\tau,x).y(\tau,x)dx - \int_0^L \phi(0,x).y^0(x)dx - \int_0^\tau \phi(t,0).u(t)dt = 0.$$

Para eliminarmos os termos nulos na equação integral acima, usamos (2.4) e o item (v) da Proposição 2.1 que afirma que $y_t + y_x = 0$, logo

$$\int_0^L \phi(0,x)y(0,x)dx + \int_0^\tau \phi(t,0)y(t,0)dt$$

$$-\int_0^L \phi(0,x).y^0(x)dx - \int_0^\tau \phi(t,0).u(t)dt = 0.$$

Agrupando as integrais, resulta em

$$\int_0^T (y(t,0) - u(t))\phi(t,0)dt + \int_0^L (y(0,x) - y^0(x))\phi(0,x)dx = 0. \tag{2.11}$$

No entanto, precisamos escolher ϕ de modo que as integrais em (2.11) façam sentido.

Seja $B : C^1((0,T)\times(0,L)) \longrightarrow L^1(0,T)\times L^1(0,L)$ um operador bilinear definido por

$$B(\phi) = (\phi(.,0), \phi(0,.)).$$

Então temos a seguinte afirmação cuja prova será omitida.

$$B\big(\phi \in C^1([0,T]\times[0,L]); (2.4) \text{ é válido}\big) \text{ é denso em } L^1(0,T)\times L^1(0,L). \qquad (2.12)$$

Prosseguindo, podemos tomar $\phi(.,.)$ tal que

$$\phi(t,0) = \begin{cases} 1, \text{ se } y(t,0)-u(t) \geq 0, \forall t \in (0,T), \\ -1, \text{ se } y(t,0)-u(t) < 0, \forall t \in (0,T). \end{cases}$$

$$\phi(0,x) = \begin{cases} 1, \text{ se } y(0,x)-y^0(x) \geq 0, \forall x \in (0,L), \\ -1, \text{ se } y(0,x)-y^0(x) < 0, \forall x \in (0,L). \end{cases}$$

Logo, a equação (2.11) fica

$$\int_0^T |y(t,0)-u(t)|dt + \int_0^L |y(0,x)-y^0(x)|dx = 0.$$

Isso implica em $y(t,0)-u(t)\equiv 0$ e $y(0,x)-y^0(x)\equiv 0$, e assim provamos os itens (iii) e (iv).

Visto que $y(t,0)$ é C^1 em $(0,T)$, e também $y(0,x)$ é C^1 em $(0,L)$, então temos como resultado direto $y^0 \in C^1(0,L)$ e $u \in C^1(0,T)$, e finalizamos a prova da Proposição (2.1). □

Teorema 2.1. *Sejam $T>0$, $y^0 \in L^2(0,L)$ e $u \in L^2(0,T)$ dados. Então, o problema de Cauchy (2.2) tem solução única, e essa solução satisfaz*

$$\|y(\tau,.)\|_{L^2(0,L)} \leq \|y^0\|_{L^2(0,L)} + \|u\|_{L^2(0,T)}, \ \forall \tau \in [0,T]. \qquad (2.13)$$

Demonstração. Vamos provar primeiro a unicidade da solução.

Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções do problema de Cauchy. Seja $y := y_2 - y_1$. Como a Definição 2.1 sugere, $y \in C^0((0,T);L^2(0,L))$ é uma solução fraca de (2.2). Logo, se $\tau \in [0,T]$, e $\phi \in C^1([0,\tau]\times[0,L])$ é uma função satisfazendo (2.6) e (2.7), então temos

$$-\int_0^\tau\int_0^L (\phi_t+\phi_x)y\,dx\,dt + \int_0^L y(\tau,x)\phi(\tau,x)dx = 0. \qquad (2.14)$$

Então, seja $\tau \in [0,T]$. Considere ainda $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções $C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$f_n = 0 \text{ em } [L,+\infty), \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (2.15)$$

$$f_n|_{(0,L)} \longrightarrow y(\tau,.) \text{ em } L^2(0,L), \text{ quando } n \longrightarrow \infty \qquad (2.16)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\phi_n \in C^1([0,\tau] \times [0,L])$ definida por

$$\phi_n(t,x) = f_n(\tau + x - t), \forall (t,x) \in [0,\tau] \times [0,L]. \tag{2.17}$$

Veja que, por (2.15) e (2.17), a condição (2.4) é satisfeita para $\phi := \phi_n$. Basta ver que

$$\phi(t,L) := \phi_n(t,L) = f_n(\tau + L - t) = 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ onde } \tau + L - t \in [L, \infty).$$

Isso acontece porque $\tau > t \Longrightarrow \tau - t > 0 \Longrightarrow \tau + L - t > L$.

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos derivar $f_n \in C^1(\mathbb{R})$ com respeito a t e com respeito a x. Fazendo $s = \tau + x - t$, onde $\frac{\partial s}{\partial t} = -1$ e $\frac{\partial s}{\partial x} = 1$, por (2.17) temos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_n(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} f_n(s) = f_n'(s).\frac{\partial s}{\partial t} = -f_n'(s),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi_n(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} f_n(s) = f_n'(s).\frac{\partial s}{\partial x} = f_n'(s).$$

Ao somar as duas derivadas, temos

$$\phi_{nt} + \phi_{nx} = -f_n'(s) + f_n'(s) = 0. \tag{2.18}$$

Daí, segue diretamente o mesmo resultado de (2.7) ao integrar sobre $[0,\tau] \times [0,L]$.

Note ainda que, fazendo $\phi := \phi_n$ e usando a identidade (2.18), da equação integral em (2.14) sobra que

$$\int_0^L y(\tau,x)\phi_n(\tau,x)dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.19}$$

Por definição em (2.17), temos $\phi_n = f_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então podemos reescrever (2.19) assim:

$$\int_0^L y(\tau,x) f_n(x)dx = \int_0^L y(\tau,x)\phi_n(x)dx = 0.$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, e usando o limite $f_n \longrightarrow y(\tau,.)$ em (2.16), temos

$$\int_0^L |y(\tau,x)|^2 dx = \int_0^L \lim_{n\longrightarrow\infty} y(\tau,x) f_n(x)dx = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^L y(\tau,x) f_n(x)dx = 0.$$

$$\text{Logo, } y(\tau,x) = 0, \forall x \in [0,L].$$

Portanto, se $\tau \in [0,T]$ for tomado arbitrário, então garantimos a unicidade da solução.

$$y_2(\tau,.) - y_1(\tau,.) = y(\tau,.) = 0, \text{ isto é,}$$

$$y_2(\tau,x) = y_1(\tau,x), \forall x \in [0,L]. \quad \texttt{(Unicidade)}$$

$\square$

Agora vamos dar duas provas para a existência de soluções de (2.2). A primeira consiste em apresentar uma solução explícita. Já a segunda consiste em usar a Teoria de Semigrupo para operadores dissipativos.

Prova 1. (Via solução explícita)

Seja $y : [0,T] \times [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(t,x) \longmapsto y(t,x)$ definida por:

$$y(t,x) := \begin{cases} y^0(x-t), \forall (t,x) \in [0,T] \times (0,L) \text{ tal que } t \leq x, \\ u(t-x), \forall (t,x) \in [0,T] \times (0,L) \text{ tal que } t > x. \end{cases} \tag{2.20}$$

Afirmação: A função y em (2.20) é a solução explícita do problema de Cauchy (2.2).

Provar esta afirmação significa verificar que a solução y satisfaz às condições de valor iniciais, à equação do transporte, e à desigualdade das normas em (2.13).

Com efeito. A princípio é fácil ver que y atende às condições de valor iniciais. Basta ver que, para $t > x = 0$, temos $y(t,0) := u(t)$. Já para $0 = t \leq x$, temos $y(0,x) := y^0(x)$.

Agora veremos que y satisfaz à equação do transporte.

Com efeito. Pela Proposição 2.1, se a solução y é C^1 em $([0,T] \times [0,L])$, então temos que $y^0 \in C^1(0,L)$ e $u \in C^1(0,T)$. Fazendo $x - t = s$ temos que $\frac{\partial}{\partial t}s = -1$ e $\frac{\partial}{\partial x}s = 1$, logo,

• Se $t \leq x$, então derivamos

$$y_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}y^0(s) = y^0_s(s).\frac{\partial s}{\partial t} = -y^0_s(s), \quad \text{e} \quad y_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}y^0(s) = y^0_s(s).\frac{\partial s}{\partial x} = y^0_s(s).$$

Ao somar, temos que $\quad y_t(t,x) + y_x(t,x) = -y^0_s(s) + y^0_s(s) = 0.$

• Se $t > x$, então derivamos

$$y_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}u(-s) = u_s(-s).\frac{\partial s}{\partial t} = -u_s(-s), \text{ e } y_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}u(-s) = \frac{\partial s}{\partial x}.u_s(-s) = u_s(-s).$$

Somando, também temos que $\quad y_t(t,x) + y_x(t,x) = -u_s(-s) + u_s(-s) = 0.$

Assim mostramos que, para todo $(t,x) \in [0,T] \times [0,L]$, a solução explícita (2.20) satisfaz à equação linear do transporte.

Resta verificar que a solução explícita satisfaz à desigualdade (2.13).

A solução y sendo mais fraca, i.e., sendo C^0 em $[0,T] \times [0,L]$, se encaixa nos termos da Definição (2.1) sem que se tenha necessariamente a condição (2.4). Podemos usar a equação integral dada em (2.3) como segue.

Dado $\tau \in [0,T]$ arbitrário, seja $\phi \in C^1([0,\tau]\times[0,L])$ tal que

$$-\int_0^L\int_0^\tau [\phi_t+\phi_x]ydtdx+\int_0^L \phi(\tau,x).y(\tau,x)dx$$

$$-\int_0^L \phi(0,x).y^0(x)dx+\int_0^\tau \phi(t,L)y(t,L)dt-\int_0^\tau \phi(t,0).u(t)dt=0.$$

Se tomar $\phi = y\big|_{[0,\tau]\times[0,L]}$ então $\phi_t+\phi_x=0$ e temos

$$\int_0^L y(\tau,x).y(\tau,x)dx-\int_0^L y(0,x).y^0(x)dx+\int_0^\tau y(t,L)y(t,L)dt-\int_0^\tau y(t,0).u(t)dt=0,$$

ou ainda

$$\int_0^L |y(\tau,x)|^2dx+\int_0^\tau |y(t,L)|^2dt=\int_0^L |y^0(x)|^2dx+\int_0^\tau |u(t)|^2dt.$$

Como $\displaystyle\int_0^\tau |y(t,L)|^2dt \geq 0,\ \ \forall t\in[0,\tau]$, resulta que

$$\int_0^L |y(\tau,x)|^2dx \leq \int_0^L |y^0(x)|^2dx+\int_0^\tau |u(t)|^2dt.$$

Portanto, usando o produto escalar dado em (1.23), a solução explícita (2.20) satisfaz a desigualdade

$$\|y(\tau,\cdot)\|_{L^2(0,L)} \leq \|y^0\|_{L^2(0,L)}+\|u\|_{L^2(0,T)}, \forall t\in[0,T].$$

E assim provamos a desigualdade (2.13).

A segunda prova da existência de solução é mais elaborada que a primeira, pois utiliza o Teorema 1.15 sobre operadores lineares dissipativos e pode ser usada para situações muito mais gerais de existência de soluções.

Prova 2. (Via Teoria de Semigrupos) Consideremos inicialmente o caso em que

$$u\in C^2([0,T]) \text{ e } u(0)=0, \tag{2.21}$$

$$y^0\in H^1(0,L) \text{ e } y^0(0)=0. \tag{2.22}$$

Seja $A: D(A)\subset L^2(0,L)\longrightarrow L^2(0,L)$ o operador linear definido por

$$D(A)=\{f\in H^1(0,L); f(0)=0\}, \tag{2.23}$$

$$Af=-f_x,\ \ \forall f\in D(A). \tag{2.24}$$

Agora, apresentamos algumas afirmações acerca do operador A, e do seu adjunto A^*, que fornecerão as hipóteses necessárias para usar nos resultados de semigrupos.

Afirmação 1. (Densidade)

$$\text{O conjunto } D(A) \text{ é denso em } L^2(0,L). \tag{2.25}$$

Demonstração. Com efeito. Seja f uma função em $L^2(0,L)$. Devemos mostrar que existe uma sequência de funções em $D(A)$ que converge para f em $L^2(0,L)$.

Note que, pelo Teorema 1.12, podemos mostrar que é válida a inclusão de densidade

$$C_c^\infty(0,L) \subset D(A), \quad \text{junto com a desigualdade } \|\cdot\|_{H^1(0,L)} \leq \|\cdot\|_{L^\infty(0,L)}. \tag{2.26}$$

Basta verificar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $f_n \in C_0^\infty(0,L)$ implica em $f_n \in L^2(0,L)$ e $f_n' \in L^2(0,L)$, para que o resultado siga diretamente. Além disso, o fato de

$$suppf_n = (0,L) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \implies f_n(0) = f_n(L) = 0. \tag{2.27}$$

Neste sentido, pela densidade do Teorema 1.12, existe uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(0,L)$ tal que

$$f_n \longrightarrow f \text{ em } L^2(0,L).$$

Entretanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$M_n^{(0)} = \sup_{x\in(0,L)} f_n(x), \quad \text{e } M_n^{(1)} = \sup_{x\in(0,L)} f_n'(x). \tag{2.28}$$

Usando (2.28), podemos majorar f_n e f_n' para comprovar que $f_n, f_n' \in L^2(0,L)$ fazendo

$$\|f_n\|_{L^2(0,L)} = \left(\int_0^L |f_n(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{x\in(0,L)} |f_n(x)|^2 \left(\int_0^L dx\right)^{\frac{1}{2}} = M_n^{(0)} L^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{2.29}$$

$$\|f_n'\|_{L^2(0,L)} = \left(\int_0^L |f_n'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{x\in(0,L)} |f_n'(x)|^2 \left(\int_0^L dx\right)^{\frac{1}{2}} = M_n^{(1)} L^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{2.30}$$

Portanto, de (2.29) e (2.30), é evidente que $f_n \in H^1(0,L)$ e, acrescentando as condições de bordo em (2.27), provamos que

$$\overline{D(A)} = L^2(0,L),$$

ou seja, todo ponto em $L^2(0,L)$ é o limite de sequência de pontos em $D(A)$.

Afirmação 2. (Operador fechado)

$$\text{O operador } A \text{ é fechado.} \tag{2.31}$$

Demonstração. Afirmar que o operador A em (2.23)-(2.24) é fechado, significa dizer que o gráfico $Gr(A) = \{(f, Af); \forall f \in D(A)\}$ é um subespaço fechado de $L^2(0,L) \times L^2(0,L)$, com a norma do gráfico colocada na Observação 1.7.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ uma sequência tal que $f_n \longrightarrow f$ em $L^2(0,L),$ quando $n \longrightarrow \infty$. Vale destacar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in D(A)$ implica que $(f_n\, , Af_n) \in Gr(A)$.

Primeiro vamos verificar que $Af := A(\lim f_n)$ está bem definido. Para isso, é preciso mostrar que $f \in D(A)$.

Note que do fato de $f_n \longrightarrow f$ em $D(A)$, quando $n \longrightarrow \infty$, implica que

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{H_1(0.L)} &= \|\lim_{n\to\infty} f_n\|_{H_1(0.L)} \\
&= \big\|\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n\big\|_{L^2(0.L)} + \big\|\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n'\big\|_{L^2(0,L)} \quad \texttt{(continuidade da norma)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \big\|f_n\big\|_{L^2(0.L)} + \lim_{n\to\infty} \big\|f_n'\big\|_{L^2(0,L)} < \infty. \quad \texttt{(por (2.29) e (2.30))}
\end{aligned}
$$

Logo, $f \in H^1(0,L)$. Além disso, utilizando a norma do supremo em (1.28) e a densidade destacada em (2.26), resulta no seguinte fato.

Para todo $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) > 0$ tal que $\forall n \in N$, com $n \geq N$ e $x \in (0,L)$, implica que

$$
|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_m - f\|_{L^\infty(0,L)} \leq \|f_m - f\|_{H^1(0,L)} < \epsilon, \;\; m \geq N.
$$

Em particular, se tomarmos $x = 0$, como $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então temos que

$$
|f(0)| \leq \|f_m - f\|_{H^1(0,L)} < \epsilon, \;\; m \geq N.
$$

Visto que $\epsilon > 0$ foi escolhido arbitrário, a desigualdade acima implica que $f(0) = 0$. Isso mostra que $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} f_k = f \in D(A)$.

Queremos provar que se $f_n \longrightarrow f$ em $D(A)$, e $Af_n \longrightarrow g$ em $L^2(0,L)$, então $Af = g$. Para isso vamos usar a densidade do conjunto $D(A)$ em $L^2(0,L)$, que já foi demonstrada em (2.25). Ora, da linearidade do operador A e da continuidade da norma, resulta que

$$
\begin{aligned}
\|Af - g\|_{L^2(0,L)} &= \|Af - \lim_{n\longrightarrow\infty} Af_n\|_{L^2(0,L)} \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|Af - Af_n\|_{L^2(0,L)} \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|A(f - f_n)\|_{L^2(0,L)} \quad \texttt{(usando a definição do operador } A) \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|-\partial_x(f - f_n)\|_{L^2(0,L)} \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \big(\|-\partial_x(f - f_n)\|_{L^2(0,L)} + \|f - f_n\|_{L^2(0,L)}\big) \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|f - f_n\|_{H^1(0,L)}.
\end{aligned}
$$

E como $\|f - f_n\|_{L^2(0,L)} \longrightarrow 0$, implica que $Af = g$. Por isso, e por (2.25), mostramos que o gráfico é um subconjunto fechado de $L^2(0,L) \times L^2(0,L)$, donde

$$(f_n, Af_n) \longrightarrow (f,g) \in Gr(A), \quad \text{i.e.,} \quad (f,g) \in \overline{Gr(A)}.$$

Lembrando que a norma usada é a norma da soma ou do gráfico dada por

$$\|(f, Af)\|_{L^2(0,L)\times L^2(0,L)} := \|f\|_{L^2(0,L)} + \|Af\|_{L^2(0,L)}.$$

□

Agora vamos usar a Definição 1.40 da teoria de semigrupo para provar que o operador A é dissipativo.

Afirmação 3. O operador $A : D(A) \subset L^2(0,L) \longrightarrow L^2(0,L)$ em (2.23)-(2.24) é dissipativo.

Demonstração. Para todo $f \in D(A)$, é suficiente verificar que vale

$$(Af, f)_{L^2(0,L)} = \int_0^L (Af).f dx = -\int_0^L f_x.f dx = -\int_0^L \frac{(f)_x^2}{2} dx = -\frac{f(L)^2}{2} \leq 0. \quad (2.32)$$

□

Agora, vamos definir o operador adjunto de A e caracterizar seu domínio.

Afirmação 4. O operador $A^* : D(A^*) \subset L^2(0,L) \longrightarrow L^2(0,L)$, adjunto de A, é definido por

$$D(A^*) = \{f \in H^1(0,L); f(L) = 0\},$$

$$A^* f = f_x, \ \ \forall f \in D(A^*).$$

Demonstração. De fato. Para todo $f \in D(A)$ e para todo $g \in D(A^*)$ vale

$$(Af, g)_{L^2(0,L)} = -\int_0^L f_x.g dx = \int_0^L f.g_x dx - f(L)g(L) + f(0)g(0) = \int_0^L f.g_x dx - f(L)g(L).$$

Desde que se tenha $(f, A^*g)_{L^2(0,L)} = \int_0^L f.g_x dx + f(L)g(L),$ onde a condição de bordo para a função $g \in D(A^*)$, necessariamente, é tal que $g(L) = 0,$ então é válido que

$$(Af, g)_{L^2(0,L)} = (f, A^*g)_{L^2(0,L)}, \ \forall f \in D(A) \ \text{ e } \forall g \in D(A^*).$$

□

A seguir, provamos também que o adjunto é dissipativo.

Afirmação 5. O operador adjunto $A^* : D(A^*) \subset L^2(0,L) \longrightarrow L^2(0,L)$ é dissipativo.

Demonstração. para todo $g \in D(A^*)$, o fato de A^* ser dissipativo decorre de

$$(A^*g, g)_{L^2(0,L)} = \int_0^L (A^*g).gdx = \int_0^L g.g_x dx = \int_0^L \frac{(g)_x^2}{2}dx = -\frac{g(0)^2}{2} \leq 0. \tag{2.33}$$

□

Logo, do fato de ter o operador A fechado, de ter o seu domínio sendo densamente definido e, juntamente com seu adjunto A^*, ser dissipativo, podemos aplicar o Teorema 1.16 de semigrupo, como segue, para provar a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy (2.2).

Seja $T > 0$. Dados $y^0 \in L^2(0,L)$ e $u \in L^2(0,T)$, então existe

$$z \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^1(0,L))$$

tal que

$$z(t,0) = 0, \ \ \forall t \in [0,T], \tag{2.34}$$

$$\frac{dz}{dt} = Az - \dot{u}, \tag{2.35}$$

$$z(0,.) = y^0. \tag{2.36}$$

De forma estratégica, seja $y \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^1(0,L))$ a translação, ou mudança de variável, da solução z definida por

$$y(t,x) = z(t,x) + u(t), \ \ \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,L]. \tag{2.37}$$

Agora, vamos utilizar a função auxiliar. Para $\tau \in [0,T]$, seja

$$\phi \in C^1([0,\tau]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,\tau]; H^1(0,L)).$$

Integrando por partes, temos:

$$\begin{aligned} -\int_0^\tau \int_0^L (\phi_t + \phi_x) y dx dt + \int_0^\tau y(t,L)\phi(t,L)dt - \int_0^\tau u(t)\phi(t,0)dt \\ + \int_0^L y(\tau,x)\phi(\tau,x)dx - \int_0^L y^0(x)\phi(0,x)dx \end{aligned} \tag{2.38}$$

Em particular, se tomarmos a restrição $\phi = y\Big|_{[0,\tau]\times[0,L]}$, então resulta na equação

$$\int_0^\tau |y(t,L)|^2 dt - \int_0^\tau |u(t)|^2 dt + \int_0^L |y(\tau,x)|^2 dx - \int_0^L |y^0(x)|^2 dx. \tag{2.39}$$

Usando o produto escalar em (1.1), resulta em

$$\|y(\tau,.)\|_{L^2(0,L)} \leq \|u\|_{L^2(0,L)} + \|y^0\|_{L^2(0,L)}, \forall \tau \in [0,T]. \tag{2.40}$$

Agora, Sejam $y^0 \in L^2(0,L)$ e $u \in C^2(0,T)$ dados. Pela densidade de $D(A) \subset L^2(0,L)$ em (2.25), existe alguma sequência de funções $(y_n^0)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que

$$y_n^0 \longrightarrow y^0 \text{ em } L^2(0,L), \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{2.41}$$

Por consequência da densidade de $C_0^\infty(0,L) \subset L^2(0,L)$ no Teorema 1.12, existe alguma sequência de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^2([0.T])$ tais que $u_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^2(0,L), \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{2.42}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, Seja $z_n \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^1(0,L))$ tal que

$$z_n(t,0) = 0, \ \forall t \in [0,T], \tag{2.43}$$

$$\frac{dz_n}{dt} = Az_n - \dot{u}_n, \tag{2.44}$$

$$z_n(0,.) = y_n^0. \tag{2.45}$$

Seja $y_n \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^1(0,L))$ definida por

$$y_n(t,x) = z_n(y,x) + u_n(t), \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,L]. \tag{2.46}$$

Tomando $\tau \in [0,T]$, seja $\phi \in C^1([0,\tau] \times [0,L])$ com $\phi(.,L) = 0$. Temos

$$\begin{aligned} -\int_0^\tau \int_0^L (\phi_t + \phi_x) y_n dxdt - \int_0^\tau u_n(t)\phi(t,0)dt + \int_0^L y_n(\tau,x)\phi(\tau,x)dx \\ - \int_0^L y_n^0(x)\phi(0,x)dx = 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{2.47}$$

aplicando $y^0 := y_n^0, \ u := u_n, \ y := y_n$, temos

$$\|y_n\|_{C^0([0,T];L^2(0,L))} \leq \|u_n\|_{L^2(0,T)} + \|y_n^0\|_{L^2(0,L)} \tag{2.48}$$

Seja $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Aplicando $y^0 := y_n^0 - y_m^0, \quad u := u_n - u_m,$ e $\quad y := y_n - y_m$, temos

$$\|y_n - y_m\|_{C^0([0,T];L^2(0,L))} \leq \|u_n - u_m\|_{L^2(0,T)} + \|y_n^0 - y_m^0\|_{L^2(0,L)} \tag{2.49}$$

Note que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T]; L^2(0,L))$. Portanto, existe $y \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$ tal que

$$y_n \longrightarrow y \text{ em } C^0([0,T]; L^2(0,L)), \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{2.50}$$

Isto conclui a segunda prova da existência de solução do problema de Cauchy. $\square$

2.2 Controlabilidade

Nesta seção, vamos estudar qual é a condição para haver controlabilidade na equação do transporte.

Começaremos com a definição usual de controlabilidade.

Definição 2.2. (CONTROLE) *Seja* $T > 0$. *O sistema de controle (2.1) é controlável no tempo* T *se, para todo* $y^0 \in L^2(0, L)$ *e para todo* $y^1 \in L^2(0, L)$*, existe controle* $u \in L^2(0, T)$ *tal que a solução* y *do problema de Cauchy (2.2) satisfaz* $y(T, .) = y^1$.

Note que y^0 e y^1 são, respectivamente, os estados inicial e final da solução y durante sua evolução temporal. Buscar controlabilidade do sistema de controle (2.1) se resume em provar a existência de uma função $u(t)$, ou controle, de modo que a solução possa partir de y^0 e atingir y^1 no tempo T.

A partir da Definição 2.2 de controle, apresentamos o seguinte teorema que busca mostrar que existe uma condição no tempo $T > 0$ para que o sistema de controle (2.1) tenha controlabilidade.

Teorema 2.2. *O sistema de controle dado em (2.1) é controlável no tempo* $T > 0$ *se, e somente se,* $T \geq L$.

A fim de familiarizar o leitor com as técnicas de controlabilidade, vamos fornecer três provas para este fato.

(i) Através da solução explícita do problema de Cauchy;

(ii) Pelo método da extensão;

(iii) Com a dualidade entre a controlabilidade de um sistema de controle linear e a observabilidade de seu adjunto.

Enfatizamos que a terceira prova é mais elaborada que as demais e tem aplicabilidade em outros modelos mais complexos de sistemas de controle.

2.2.1 Solução Explícita

Aqui damos uma prova da controlabilidade para a equação do transporte. O método se baseia em apresentar uma solução explícita e checar que essa solução realmente satisfaz a Definição 2.2 de controle.

Primeiramente, se $T \in (0, L)$ então o sistema de controle é não-controlável no tempo T. Com efeito. Como y^0 e y^1 são escolhidos arbitrariamente, em particular podemos definir

$$y^0(x) = 1, \quad \text{e} \quad y^1(x) = 0, \forall x \in [0, L]. \tag{2.51}$$

Considere $u \in L^2(0, T)$, com $0 < T < L$. A solução explícita do problema de Cauchy em (2.20) é

$$y(t, x) := \begin{cases} y^0(x - t), \forall (t, x) \in [0, T] \times (0, L) \text{ tal que } t \leq x, \\ u(t - x), \forall (t, x) \in [0, T] \times (0, L) \text{ tal que } t > x. \end{cases} \tag{2.52}$$

Se a condição inicial for tal que $y^0(x) = 1, \forall x \in [0, L]$, então a solução y satisfaz

$$y(T, x) = y^0(x - T) = 1, \ \forall x \in (T, L). \quad (\texttt{Note que } T < x.)$$

Portanto, a escolha dos estados y^0 e y^1 em (2.51) leva a concluir que $y(T, .) \neq y^1$. Isto já mostra que o sistema de controle é não controlável no tempo T.

Agora, no caso em que $T \geq L$, vamos mostrar que o sistema de controle é controlável no tempo T.

Seja $y^0 \in L^2(0, L)$ e $y^1 \in L(0, L)$. Como para todo $x \in (0, L)$ temos que $x < L \leq T$, então na solução explícita dada em (2.52) devemos ter

$$y(t, x) = u(t - x).$$

Logo, definindo o controle $u \in L^2(0, T)$ explicitamente por

$$u(t) = \begin{cases} y^1(T - t), \ \ t \in (T - L, T), \\ 0, \ \ t \in (0, T - L), \end{cases}$$

então a solução do problema de Cauchy (2.2) satisfaz

$$y(T, x) = u(T - x) = y^1(x), \forall x \in (0, L).$$

Portanto, isso mostra que o sistema de controle é controlável no tempo T, quando $T \geq L$.

2.2.2 Método de Extensão.

Usamos esse método para provar que o sistema de controle é controlável no tempo T, onde $T \geq L$, ao estender a solução para além das condições de boa colocação.

Começamos introduzindo a definição de sistema nulo-controlável que ocorre quando existir controle para a solução de modo que ela se anule no estado final.

Definição 2.3. (SISTEMA NULO-CONTROLÁVEL) *Seja* $T > 0$. *O sistema de controle é nulo-controlável no tempo* T *se, para todo* $y^0 \in L^2(0,L)$, *existe controle* $u \in L^2(0,T)$ *tal que a solução* y *do problema de Cauchy satisfaz* $y(T,.) = 0$.

Para um tempo $T > 0$ fixo, a Definição 2.3 acima sugere que existe certa equivalência em dizer que um sistema de controle é controlável, e em dizer que é nulo-controlável. Essa equivalência se apresenta no seguinte lema.

Lema 2.1. *Seja* $T > 0$. *Então o sistema de controle (2.1) é controlável no tempo* T *se, e somente se, é nulo-controlável no tempo* T.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que o sistema é controlável no tempo T. Pela definição de controlabilidade, dado $T > 0$, para todo $y^0 \in L^2(0,L)$ e para todo $y^1 \in L^2(0,L)$, existe $u \in L^2(0,T)$ tal que $y(T,.) = y^1$.

Em particular, tomando $y^1(T,.) \equiv 0$, implica que $y(T,.) = y^1$. Assim, pela Definição 2.3, mostramos que o sistema é nulo-controlável.

$(\Leftarrow)$ Suponha agora que o sistema de controle (2.1) seja nulo-controlável no tempo $T > 0$. Sejam $y^0 \in L^2(0,L)$ e $y^1 \in L^2(0,L)$ dados. Precisamos mostrar que existe $u \in L^2(0,T)$ tal que a solução y do problema de Cauchy (2.2) seja tal que $y(T,.) = y^1$.

Para começar, vamos assumir que existem $\overline{y}^0 \in L^2(0,L)$ e $\overline{u} \in L^2(0,T)$ de modo que a solução $\overline{y} \in C^0([0,T];L^2(0,L))$ do problema de Cauchy

$$\overline{y}_t + \overline{y}_x = 0, t \in (0,T), x \in (0,L), \tag{2.53}$$

$$\overline{y}(t,0) = \overline{u}(t), t \in (0,T), \tag{2.54}$$

$$\overline{y}(0,x) = \overline{y}^0(x), x \in (0,L), \tag{2.55}$$

satisfaz

$$\overline{y}(T,x) := y^1(x), x \in (0,L). \tag{2.56}$$

Por hipótese, sabemos que o sistema de controle (2.1) é nulo-controlável no tempo T. Considerando que podemos tomar qualquer estado inicial, então existe $\tilde{u} \in L^2(0,T)$ de modo que a solução $\tilde{y} \in C^0([0,T];L^2(0,L))$ do problema de Cauchy

$$\tilde{y}_t + \tilde{y}_x = 0, \;\; t \in (0,T), \;\; x \in (0,L), \tag{2.57}$$

$$\tilde{y}(t,0)=\tilde{u}(t),\ \ t\in(0,T), \tag{2.58}$$

$$\tilde{y}(0,x)=y^0(x)-\overline{y}^0(x),\ \ x\in(0,L), \tag{2.59}$$

satisfaz a seguinte condição de sistema nulo-controlável.

$$\tilde{y}(T,x):=0,\ \ x\in(0,L). \tag{2.60}$$

No entanto, vamos definir $u\in L^2(0,T)$ por

$$u=\overline{u}-\tilde{u}. \tag{2.61}$$

E assim, a solução $y\in C^0([0,T];L^2(0,L))$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_t+y_x=0,\ \ t\in(0,T),\ \ x\in(0,L),\\ y(t,0)=u(t)=\overline{u}(t)-\tilde{u}(t),\ \ t\in(0,T),\\ y(0,x)=y^0(x),\ \ x\in(0,L),\end{cases}$$

é tal que $y=\overline{y}+\tilde{y}$. Isso acontece ao subtrair as equações (2.53) e (2.57) e suas respectivas condições de valor iniciais. Logo, por (2.56) e (2.60), temos $y(T,.)=y^1$.

Portanto, o controle u dirige o sistema de controle do estado y^0 para o estado y^1 durante o intervalo de tempo $[0,T]$.

Porém, resta ainda provar a existência de $\overline{y}^0\in L^2(0,L)$ e $\overline{u}\in L^2(0,T)$.

Seja $z\in C^0([0,T];L^2(0,L))$ a solução do problema de Cauchy

$$z_t+z_x=0, t\in(0,T), x\in(0,L), \tag{2.62}$$

$$z(t,0)=0, t\in(0,T), \tag{2.63}$$

$$z(0,x)=y^1(L-x), x\in(0,L), \tag{2.64}$$

Note que $z\in H^1((0,L);H^{-1}(0,T))$. Em particular, $z(.,L)$ é bem definido e

$$z(.,L)\in H^{-1}(0,T). \tag{2.65}$$

Afirmação 2.1. *De fato, $z(.,L)$ tem mais regularidade, pois $z(.,L)\in L^2(0,T)$.*

Demonstração. Com efeito. Usando a solução explícita, podemos escrever

$$z(t,x)=\begin{cases} z^0(x-t), \forall(t,x)\in[0,T]\times(0,L)\ \text{tal que}\ t\le x,\\ u(t-x), \forall(t,x)\in[0,T]\times(0,L)\ \text{tal que}\ t>x.\end{cases}$$

Em se tratando do caso em que $y^1 \in H^1(0,L)$ satisfaz $y^1(L) = 0$, garantimos que a solução seja tal que $z \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \bigcap C^0([0,T]; H^1(0,L))$.

Multiplicando a equação (2.62) por z, teremos

$$z.z_t + z.z_x = 0.$$

Podemos fazer a integração sobre o conjunto $[0,T] \times [0,L]$ e separar as integrais como segue.

$$\int_0^L \int_0^T [z.z_t + z.z_x] dtdx = 0,$$

$$\int_0^L \int_0^T z.z_t dtdx + \int_0^T \int_0^L z.z_x dxdt = 0.$$

Veja que $\frac{\partial}{\partial t}\frac{(z)^2}{2} = z.z_t$, e que também $\frac{\partial}{\partial x}\frac{(z)^2}{2} = z.z_x$. Então, se integrar e depois substituir os limites de integração, fica assim

$$\int_0^L \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\frac{(z)^2}{2} dtdx + \int_0^T \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\frac{(z)^2}{2} dxdt = 0,$$

$$\int_0^L \frac{z^2}{2}\bigg|_0^T dx + \int_0^T \frac{z^2}{2}\bigg|_0^L dt = 0,$$

$$\int_0^L [z^2(T,x) - z^2(0,x)]dx + \int_0^T [z^2(t,L) - z^2(t,0)]dt = 0.$$

Ao separar as integrais, recaímos nas expressões do produto escalar e das normas no espaço de funções em L^2 como segue.

$$\int_0^L z^2(T,x)dx - \int_0^L z^2(0,x)dx + \int_0^T z^2(t,L)dt - \int_0^T z^2(t,0) = 0.$$

Donde, usando (2.63), anula-se o estado inicial e fica

$$\int_0^L |z(T,x)|^2 dx + \int_0^T |z(t,L)|^2 dt = \int_0^L |y^1(L-x)|^2 dx,$$

sendo que $\int_0^L |z(T,x)|^2 dx \geq 0$, resulta em

$$\|z\|_{L^2(0,T)} \leq \|y\|_{L^2(0,L)}. \qquad (2.66)$$

Por densidade, a desigualdade se mantém se considerarmos que y^1 está apenas em $L^2(0,L)$, o que completa a prova da afirmação. □

Continuando, defina $\overline{y}^0 \in L^2(0,L)$ e $\overline{u} \in L^2(0,T)$ respectivamente por

$$\overline{y}^0(x) = z(T, L-x), \forall x \in (0,L), \quad \text{e} \quad \overline{u}(t) = z(T-t, L), \forall t \in [0,T].$$

Então, pela regra da cadeia verifica-se que a solução $\overline{y}$ do problema de Cauchy é

$$\overline{y}(t,x) = z(T-t, L-x), t \in (0,T), x \in (0,L). \tag{2.67}$$

Concluímos a prova do Lema. $\square$

Agora, vamos introduzir a definição da solução estendida do problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_t + y_x = 0, (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}, \\ y(0,x) = y^0(x), \end{cases} \tag{2.68}$$

onde y^0 está em $L^2(\mathbb{R})$.

Definição 2.4. (EXTENSÃO DA SOLUÇÃO) *Seja* $y^0 \in L^2(\mathbb{R})$. *A solução do problema de Cauchy é uma função* $y \in C^0([0,\infty); L^2(\mathbb{R}))$ *tal que, para todo* $\tau \in [0,\infty)$*, para todo* $R > 0$ *e para toda função* $\phi \in C^1([0,\tau]; \mathbb{R})$ *tal que*

$$\phi(t,x) = 0, t \in [0,\tau], \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } |x| \geq R,$$

têm-se

$$-\int_0^\tau \int_{-R}^R (\phi_t + \phi_x) y dx dt + \int_{-R}^R y(\tau,x)\phi(\tau,x)dx - \int_{-R}^R y^0(x)\phi(0,x)dx = 0.$$

Proposição 2.2. *Para todo* $y^0 \in L^2(\mathbb{R})$*, o problema de Cauchy tem uma única solução. Essa solução satisfaz*

$$\|y(\tau,.)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|y^0\|_{L^2(\mathbb{R})}, \forall \tau \in [0,\infty).$$

De fato, como no caso do problema de Cauchy, podemos apresentar a solução y explicitamente por

$$y(t,x) = y^0(x-t), t \in [0,\infty), x \in \mathbb{R}. \tag{2.69}$$

Então, o método da extensão prossegue da seguinte maneira.

Seja $y^0 \in L^2(0,L)$. Seja $R \geq 0$. Seja $\overline{y}^0 \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\overline{y}^0(x) = y^0(x), x \in (0,L), \tag{2.70}$$

$$\overline{y}^0(x) = 0, x \in (-\infty, -R). \tag{2.71}$$

Seja $\overline{y} \in C^0([0,\infty); L^2(\mathbb{R}))$ uma solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \overline{y}_t + \overline{y}_x = 0, (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}, \\ \overline{y}(0,x) = \overline{y}^0(x), x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.72}$$

Usando a solução explícita do problema de Cauchy, vê-se que

$$\overline{y}(t,x) = 0, \text{ se } x < t - R. \tag{2.73}$$

Adaptando a afirmação (2.1) da regularidade da solução, temos que $y(.,0) \in L^2(0,\infty)$. Seja $T \leq L$. Verifica-se que a solução $y \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_y + y_x = 0, t \in (0,T), x \in (0,L), \\ y(t,0) = \overline{y}(t,0), t \in (0,T), \\ y(0,x) = y^0(x), x \in (0,L), \end{cases}$$

é dada por $y(t,x) = \overline{y}(t,x), t \in (0,T), x \in (0,L)$.

Temos que $y(T,) = 0$, se $R \leq T - L$. Portanto, o controle $t \in (0,T) \longmapsto \overline{y}(t,0)$ dirige o sistema de controle do estado y^0 para o estado nulo durante o intervalo de tempo $[0,T]$.

2.2.3 Dualidade entre controlabilidade e observabilidade

Em termos do parâmetro temporal, já sabemos que um sistema tem controlabilidade para certa condição sobre o tempo T. Mas, Fixado esse tempo T na solução, a partir dela obtemos um operador linear que fornece a observabilidade do sistema de controle.

Definição 2.5. *Seja $T > 0$. Vamos definir o mapa linear $F_T : L^2(0,T) \longrightarrow L^2(0,L)$ do seguinte modo. Seja $u \in L^2(0,T)$ o controle e $y \in C([0,T]; L^2(0,L))$ a solução do problema de Cauchy (2.2) com $y^0 := 0$, então*

$$F_T(u) := y(T,.).$$

Partindo da definição acima, têm-se o seguinte lema.

Lema 2.2. *O sistema de controle (2.1) é controlável no tempo T se, e somente se, $\mathcal{F}_T$ é sobrejetivo.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ É trivial.

$(\Leftarrow)$ Para provar a volta, vamos assumir que $\mathcal{F}_T$ é sobrejetiva e mostrar que o sistema de controle é controlável no tempo T. Sejam $y^0 \in L^2(0,L)$ e $y^1 \in L^2(0,L)$.

Seja também $\tilde{y}$ a solução do problema de Cauchy com $u := 0$. Contanto que F_T seja sobrejetiva, existe $u \in L^2(0,T)$ tal que $\mathcal{F}_T(u) = y^1 - \tilde{y}(T,.)$. Então, a solução y do problema de Cauchy satisfaz $y(T,.) = \tilde{y}(T,.) + y^1 - \tilde{y}(T,.) = y^1$, o que conclui a prova do Lema 2.2. □

Em Teoria de Controle, a Proposição 1.5 fornece a desigualdade (1.12) que é chamada de "desigualdade de observabilidade". A fim de aplicar esta proposição, vamos apresentar o operador adjunto $\mathcal{F}_T^*$ de forma explícita no lema a seguir.

Lema 2.3. *Seja* $z^T \in H^1(0,L)$ *tal que*

$$z^T(L) = 0. \tag{2.74}$$

Seja $z \in C^1([0,T];L^2(0,L)) \cap C^0([0,T];H^1(0,L))$ *a solução (única) do problema de Cauchy*

$$z_t + z_x = 0, \tag{2.75}$$

$$z(t,L) = 0, \forall t \in [0,T], \tag{2.76}$$

$$z(T,\cdot) = z^T. \tag{2.77}$$

Então

$$\mathcal{F}_T^*(z^T) = z(.,0). \tag{2.78}$$

Demonstração. Primeiro, vale ressaltar que a prova da existência e unicidade da solução

$$z \in C^1([0,T];L^2(0,L)) \cap C^0([0,T];H^1(0,L))$$

satisfazendo (2.75)-(2.77) é similar à prova que foi feita em (2.34)-(2.36). Por isso, podemos omiti-la aqui.

No entanto, se $\tilde{z} \in C^1([0,T];L^2(0,L)) \cap C^0([0,T];H^1(0,L))$ é a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \tilde{z}(t,0) = 0, \forall t \in [0,T], \\ \frac{d\tilde{z}}{dt} = A\tilde{z}, \\ \tilde{z}(0,x) = z^T(L-x), \ \ x \in [0,L], \end{cases}$$

então podemos fazer

$$z(t,x) := \tilde{z}(T-t, L-x), \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,L].$$

Daí, por (2.75) teremos que $z(t,L)=\tilde{z}(T-t,0)=0$. E também, por (2.77), temos que $z(T,x)=\tilde{z}(0,L-x):=z^T$.

Agora, seja $u\in C^2([0,T])$ tal que $u(0)=0$. Vamos considerar o sistema a seguir, cuja solução é $y\in C^1([0,T];L^2(0,L))\cup C^0([0,T];H^1(0,L))$.

$$y_t+y_x=0, \tag{2.79}$$

$$y(t,0)=u(t),\forall t\in[0,T], \tag{2.80}$$

$$y(0,\cdot)=0. \tag{2.81}$$

Usando os problemas (2.75)-(2.77) e (2.79)-(2.81), podemos fazer o cálculo do produto escalar com F_T e encontrar o seu adjunto da seguinte maneira.

$$\begin{aligned}
\big(z^T,\mathcal{F}_T(u)\big)_{L^2(0,L)} &= \int_0^L z^T\mathcal{F}_T(u)dx\\
&= \int_0^L z(T,x)y(T,x)dx \quad \texttt{(definição do operador } \mathcal{F}_T)\\
&= \int_0^L z(T,x)y(T,x)-z(0,x)y(0,x)dx \ \ (\texttt{por } (2.81))\\
&= \int_0^L\int_0^T (zy)_t dtdx = \int_0^T\int_0^L (zy)_t dxdt \quad \texttt{(T. F. C.)}\\
&= \int_0^T\int_0^L (z_ty+zy_t)dxdt \quad \texttt{(derivando)}\\
&= \int_0^T\int_0^L -(z_xy+zy_x)dxdt \ \texttt{(substituição em (2.75))}\\
&= \int_0^T\int_0^L -(zy)_x dxdt\\
&= \int_0^T -(z(t,L)y(t,L)+z(t,0)y(t,0))dxdt\\
&= \int_0^T z(t,0)u(t)dt \quad \texttt{(usando (2.76) e (2.80)).}\\
&= \int_0^T z(t,0)u(t)dt.
\end{aligned}$$

Portanto, resulta que

$$\big(z^T,\mathcal{F}_T(u)\big)_{L^2(0,L)}=\int_0^L z^T\mathcal{F}_T(u)dx=\int_0^T F_T^*(z^T)u(t)dt=\big(\mathcal{F}_T^*(z^T),u\big)_{L^2(0,T)},$$

e daí concluímos que $F_T^*(z^T):=z(t,0)$.

Lembrando que, pelo Teorema 1.12, o conjunto das funções $u\in C^2$, tais que $u(0)=0$, é denso em $L^2(0,T)$. Com isso concluímos a prova do Lema 2.3. □

Agora, do Lema 2.3, basta provar a desigualdade de observabilidade (1.12) dada por

$$\|F_T^*(z^T)\|_{L^2(0,T)} \geq c\|z^T\|_{L^2(0,L)},$$

e decorre diretamente que o operador F_T será sobrejetivo.

Elevando ao quadrado, fica

$$\big(\mathcal{F}_T^*(z^T), \mathcal{F}_T^*(z^T)\big)_{L^2(0,T)} = \|F_T^*(z^T)\|^2_{L^2(0,T)} \geq c^2\|z^T\|^2_{L^2(0,L)} = c^2\big(z^T, z^T\big)_{L^2(0,L)}.$$

Então, usando o produto escalar em $L^2(U)$, devemos provar que

$$\int_0^T z(t,0)^2 dt \geq c^2 \int_0^L z^T(x)^2 dx, \tag{2.82}$$

para todo $z^T \in H^1(0,L)$ tal que $z^T(L) = 0$, e $z \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^1(0,L))$ é a única solução do problema de Cauchy (2.75)-(2.77).

Vamos apresentar duas provas para a desigualdade (2.82). A primeira se baseia na solução explícita, e a segunda no chamado método multiplicativo.

Prova 1. (Via solução explícita)

Assumimos que $T \geq L$. Nota-se que a solução é dada por

$$z(t,x) = z^T(x+t-T), \text{ se } 0 < x < L+t-T,$$

$$z(t,x) = 0, \text{ se } L+t-T < x < L.$$

Em particular, se $T \geq L$, então

$$\int_0^T z(t,0)^2 dt = \int_0^L z^T(x)^2 dx,$$

mostrando que a desigualdade se mantém com $c = 1$.

Prova 2. (Via Método Multiplicativo)

Aqui, vamos assumir que $T > L$ e provar que a desigualdade se mantém com

$$c := \sqrt{\frac{T-L}{T}}. \tag{2.83}$$

Seja $z^T \in H^1(0,L)$ tal que (2.74) é satisfeito. Seja $z \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^1(0,L))$ a única solução do sistema. Multiplicando a equação (2.75) por z e integrando a equação obtida em $[0,L]$, para cada $t \in [0,T]$ temos

$$\int_0^L z z_t dx + \int_0^L z z_x dx = 0,$$

$$\int_0^L z(z)_t dx + \frac{1}{2}z^2\Big|_0^L = 0, \ \ \texttt{(substituindo os limites)}$$

$$\int_0^L \left(\frac{z^2}{2}\right)_t dx + \frac{1}{2}z(t,L)^2 - \frac{1}{2}z(t,0)^2 = 0 \ \ \texttt{(usando (2.76))}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \left(\frac{z^2}{2}\right)dx \ = \ \frac{1}{2}z(t,0)^2$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \left(\frac{z^2}{2}\right)dx \ = \ |z(t,0)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^L |z(t,x)|^2 dx\right) = |z(t,0)|^2. \tag{2.84}$$

Vamos agora repetir o argumento. Porém, multiplicando por xz e, para cada $t \in [0,T]$, integrando a equação obtida sobre $[0,L]$ como segue.

$$\int_0^L xzz_t dx + \int_0^L xzz_x dx = 0,$$

$$\int_0^L x\left(\frac{z^2}{2}\right)_t dx + \int_0^L x\left(\frac{z^2}{2}\right)_x dx = 0, \ \ \texttt{(integrando por partes)}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^L xz^2 dx\right) - \frac{1}{2}\int_0^L z^2 dx + \left[\frac{xz^2}{2}\right]\Big|_0^L = 0, \ \ \texttt{(usando (2.76))}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^L xz(t,z)^2 dx\right) - \int_0^L z(t,z)^2 dx = 0 \ \ \texttt{(usando a norma em } L^2(0,L))$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^L x|z(t,x)|^2 dx\right) = |z(t,x)|^2. \tag{2.85}$$

Para $t \in [0,T]$, seja $e(t) = \displaystyle\int_0^L |z(t,x)|^2 dx$, e usando (2.85) e T.F.C. temos

$$\int_0^T e(t)dt = \int_0^L x|z(T,x)|^2 dx - \int_0^L x|z(0,x)|^2 dx,$$

$$\leq L\int_0^L |z(T,x)|^2 dx = Le(T). \tag{2.86}$$

Agora, usando (2.84), temos

$$e(t) = \int_0^L |z(t,x)|^2 dx = e(T) - \int_t^T |z(\tau,0)|^2 d\tau \geq e(T) - \int_0^T |z(\tau,0)|^2 d\tau. \tag{2.87}$$

Logo, usando (2.86), (2.87), e a representação (2.77), fica

$$e(T) - \int_0^T |z(\tau,0)|^2 d\tau \leq e(t), \ \ \texttt{(integrando em [0,T])}$$

$$\int_0^T \left(e(T) - \int_0^T |z(\tau,0)|^2 d\tau\right)dt \leq \int_0^T e(t)dt \leq Le(T),$$

$$Te(T) - T\int_0^T |z(\tau,0)|^2 d\tau \leq Le(T),$$

$$(T-L).\|z^T\|^2_{L^2(0,L)} \leq T.\int_0^L |z(\tau,0)|^2 d\tau. \leq 2.88 \tag{2.88}$$

Usamos a desigualdade juntamente com o Lema 2.3 e considerando que o conjunto das funções $z^T \in H^1(0,L)$, tais que a condição (2.74) é mantida, é denso em $L^2(0,L)$, provamos a desigualdade de observabilidade desde que

$$c = \sqrt{\frac{T-L}{T}} > 1, \forall T \geq L > 0.$$

Observação 2.1. *O método multiplicativo fornece uma desigualdade de observabilidade mais fraca que o método baseado na solução explícita. (Note que o método multiplicativo, em contraste com o método da solução explícita, não nos permite provar a controlabilidade no caso limitante em que $T = L$). Todavia, o método multiplicativo é bastante flexível fornece resultados interessantes de controlabilidade em sistema de controle.*

Capítulo 3

Equação de Korteweg–de Vries

Neste capítulo, seguiremos a abordagem do controle da equação de KdV feita em [1]. Seja $L > 0$ e $T > 0$. Considere o seguinte sistema de controle linear da equação KdV.

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, \ \ t \in (0,T), \ \ x \in (0,L), \\ y(t,0) = y(t,L) = 0, \ \ y_x(t,L) = u(t), \ \ t \in (0,T), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde, no tempo t, o controle é $u(t) \in \mathbb{R}$ e o estado é $y(t,.) : (0,L) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Nossa meta neste capítulo é estudar as condições de controlabilidade desse sistema de controle linear. Vamos começar pela boa colocação do problema de Cauchy associado ao sistema, destacando o papel dos valores iniciais e de contorno.

3.1 Boa Colocação do problema de Cauchy

Vamos apresentar a definição usual da solução do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, \ \ t \in (0,T), \ \ x \in (0,L), \\ y(t,0) = y(t,L) = 0, \ \ y_x(t,L) = u(t), \ \ t \in (0,T), \\ y(0,x) = y^0(x), \ \ x \in (0,L); \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $T > 0$, $y^0 \in L^2(0,L)$ e $u \in L^2(0,T)$ são dados.

A fim de desenvolver esta definição de uma solução, primeiramente, vamos assumir que existe uma função y de classe C^3 em $[0,T] \times [0,L]$ satisfazendo o problema de Cauchy (3.2) no sentido usual. Consideramos ainda uma função auxiliar como segue.

Para $\tau \in [0,T]$, seja $\phi \in C^3([0,\tau] \times [0,L])$ uma função tal que

$$\phi(t,0) = \phi(0,L) = 0, \forall t \in (0,\tau). \tag{3.3}$$

Ao multiplicar a equação $K.d.V$ em (3.2) por ϕ, vamos integrar a equação obtida sobre a região $[0,\tau] \times [0,L]$ como segue.

$$\phi y_t + \phi y_x + \phi y_{xxx} = 0,$$
$$\int_0^\tau \int_0^L (\phi y_t + \phi y_x + \phi y_{xxx}) dxdt = 0,$$
$$\int_0^L \int_0^\tau \phi y_t dtdx + \int_0^\tau \int_0^L \phi y_x dxdt + \int_0^\tau \int_0^L \phi y_{xxx} dxdt = 0.$$

Integramos por partes e utilizamos as condições de contorno em (3.2). Segue que

$$\int_0^L [\phi y - \int \phi_t y dt]|_0^\tau dx + \int_0^\tau [\phi y - \int \phi_x y dx]|_0^L dt + \int_0^\tau [\phi y_{xx} - \int \phi_x y_{xx} dx]|_0^L dt = 0,$$

e substituindo os limites de integração, fica

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \big[\phi(\tau,x)y(\tau,x) - \int_0^\tau \phi_t(t,x)y(t,x)dt - \phi(0,x)y(0,x)\big]dx + \\
&\int_0^\tau \big[\phi(t,L)y(t,L) - \int_0^L \phi_x(t,x)y(t,x)dx - \phi(t,0)y(t,0)\big]dt + \\
&\int_0^\tau \big[\phi(t,L)y_{xx}(t,L) - \int_0^L \phi_x(t,x)y_{xx}(t,x)dx - \phi(t,0)y_{xx}(t,0)\big]dt = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Vamos eliminar os termos nulos em (3.4), e ficar com

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \phi(\tau,x)y(\tau,x)dx - \int_0^L \int_0^\tau \phi_t(t,x)y(t,x)dtdx - \int_0^L \phi(0,x)y^0(x)dx \\
&- \int_0^\tau \int_0^L \phi_x(t,x)y(t,x)dxdt - \int_0^\tau \int_0^L \phi_x(t,x)y_{xx}(t,x)dxdt = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Fazendo integração por partes apenas na última integral de (3.5), que está destacada a seguir, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau \int_0^L \phi_x(t,x)y_{xx}(t,x)dxdt &= \int_0^\tau \left[\phi_x(t,x)y_x(t,x) - \int \phi_{xx}y_x dx\right]\Bigg|_0^L dt \\
&= \int_0^\tau \left[\phi_x(t,x)y_x(t,x) - \phi_{xx}y + \int \phi_{xxx}y dx\right]\Bigg|_0^L dt \\
&= \int_0^\tau [\phi_x(t,L)u(t) - \phi_x(t,0)y_x(t,0) + \int_0^L \phi_{xxx}y dx]dt.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Portanto, usando o resultado de (3.6) na equação (3.5), resulta em

$$\begin{aligned}\int_0^L \phi(\tau,x)y(\tau,x)dx - \int_0^\tau \int_0^L (\phi_t(t,x)+\phi_x(t,x)+\phi_{xxx}(t,x))y(t,x)dxdt \\ - \int_0^L \phi(0,x)y^0(x)dx - \int_0^\tau \phi_x(t,L)u(t)dt + \int_0^\tau \phi_x(t,0)y_x(t,0)dt.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Essa equação integral em (3.7) conduz à seguinte definição de solução do problema de Cauchy (3.2), porém com menos regularidade como sugere.

Definição 3.1. (SOLUÇÃO FRACA) *Seja* $T > 0$. *Dados* $y^0 \in L^2(0,L)$ *e* $u \in L^2(0,T)$, *então a solução do problema de Cauchy (3.2) é uma função* $y \in C^0([0,T];L^2(0,L))$ *tal que, para todo* $\tau \in [0,T]$ *e para toda função* $\phi \in C^3([0,\tau];[0,L])$ *que satisfaz*

$$\phi(t,0) = \phi(t,L) = \phi_x(t,0) = 0, \forall t \in [0,\tau], \tag{3.8}$$

têm-se

$$\begin{aligned}\int_0^L \phi(\tau,x)y(\tau,x)dx - \int_0^\tau \int_0^L (\phi_t(t,x)+\phi_x(t,x)+\phi_{xxx}(t,x))y(t,x)dxdt \\ - \int_0^L \phi(0,x)y^0(x)dx - \int_0^\tau \phi_x(t,L)u(t)dt.\end{aligned} \tag{3.9}$$

A proposição a seguir diz que a regularidade na solução implica em certa regularidade nas condições de valor iniciais. A prova será omitida pois segue os mesmos passos que a Proposição 2.1 da equação do transporte.

Proposição 3.1. *Seja* $T > 0$. *Dados* $y^0 \in L^2(0,L)$ *e* $u \in L^2(0,T)$, *vamos assumir que* y *é uma solução do problema de Cauchy (3.2) que é de classe* C^3 *em* $[0,T] \times [0,L]$. *Então*

(i) $y^0 \in C^3([0,L])$;

(ii) $u \in C^2([0,T])$;

(iii) $y(0,x) = y^0(x), \forall x \in [0,L]$;

(iv) $y(t,0) = y(t,L) = 0, y_x(t,0) = u(t), \forall t \in [0,T]$;

(v) $y_t(t,x) + y_x(t,x) + y_{xxx}(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,L]$.

Agora, prosseguiremos obtendo a demonstração da existência e unicidade da solução do problema de Cauchy (3.2), bem como uma majoração, ou controle da norma, da solução em $L^2(0,L)$.

Teorema 3.1. *Seja $T > 0$. Dados $y^0 \in L^2(0,L)$ e $u \in L^2(0,T)$, então o problema de Cauchy (3.2) admite uma única solução y. Essa solução satisfaz*

$$\|y(\tau,.)\|_{L^2(0,L)} \leq \|y^0\|_{L2(0,L)} + \|u\|_{L^2(0,L)}, \forall \tau \in [0,L]. \tag{3.10}$$

Demonstração. (**Existência.**) Vamos começar construindo as hipóteses do teorema de semigrupo para provar a existência de solução.

Seja $T > 0$. Primeiro, vamos tratar o caso em que

$$u \in C^2([0,T]), \tag{3.11}$$

$$\text{com } \ u(0) = 0; \tag{3.12}$$

$$\text{e } \ y^0 \in H^3(0,L), \ \text{ onde } \ y^0(0) = y^0(L) = y_x^0(L) = 0. \tag{3.13}$$

Considere o operador linear $A : D(A) \subset L^2(0,L) :\longrightarrow L^2(0,L)$ definido por

$$D(A) = \{f \in H^3(0,L); \ f(0) = f(L) = f_x(L) = 0\}, \tag{3.14}$$

$$Af = -f_x - f_{xxx}, \ \forall f \in D(A). \tag{3.15}$$

Agora apresentamos duas afirmações acerca do operador A.

Afirmação 1. (Densidade)

$$\text{O conjunto } \ D(A) \ \text{ em } \ (3.14) \ \text{ é denso em } \ L^2(0,L). \tag{3.16}$$

Dada $f \in L^2(0,L)$. Pela densidade de $C_0^\infty(0,L)$ em $L^2(0,L)$ no Teorema 1.12, existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(0,L)$ tal que

$$f_n \longrightarrow f \ \text{ em } \ L^2(0,L), \ \text{ quando } \ n \longrightarrow \infty. \tag{3.17}$$

Vamos verificar que o conjunto $C_0^\infty(0,L)$ é denso em $D(A)$.

Com efeito. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos que pelo fato de $f_n \in C_0^\infty(0,L)$, implica que $f_n^{(k)} \in C_0^\infty(0,L)$, com $k \in \{0,1,2,3\}$.

Note que $f_n^{(k)} \in L^2(0,L)$, pois

$$\left\|f_n^{(k)}\right\|_{L^2(0,L)} = \left(\int_0^L |f_n^{(k)}x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{x\in(0,L)} |f_n^{(k)}| \left(\int_0^L dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|f_n^{(k)}\|_{L^\infty(0,L)} L^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{3.18}$$

Assim mostramos que $f_n \in H^3(0,L)$.

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, e para todo $x \in (0, L)$, o suporte compacto de f_n é tal que

$$supp f_n^{(k)} \subset (0, L), \text{ onde } k \in \{0, 1\}.$$

Logo, $f_n(0) = f_n(L) = f_n^{(1)}(0) = f_n^{(1)}(L) = 0$. Isso mostra que $f_n \in D(A), \ \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, temos que $\overline{D(A)} = L^2(0, L)$.

Vale notar que obtemos $C_0^\infty(0, L) \subset D(A) \subset L^2(0, L)$.

Observando que o fecho de $C_0^\infty(0, L)$, em $L^2(0, L)$, é denso em $L^2(0, L)$, passamos o fecho na cadeia de conjuntos, resultando em

$$\overline{D(A)} \subset L^2(0, L).$$

Assim provamos a afirmação da densidade.

Afirmação 2. (Operador fechado).

$$\text{O operador linear } A : D(A) \subset L^2(0, L) \longrightarrow L^2(0, L) \text{ é fechado.} \tag{3.19}$$

Afirmar que o operador A expresso em (3.14)-(3.15) é fechado significa dizer que o gráfico $Gr(A) = \{(f, Af); \forall f \in D(A)\}$ é um subespaço fechado de $L^2(0, L) \times L^2(0, L)$, onde a norma do gráfico é a mesma apresentada na Observação 1.7.

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ uma sequência tal que $f_n \longrightarrow f$ em $D(A)$, quando $n \longrightarrow \infty$. Vale destacar que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$f_n \in D(A), \qquad \text{implica que} (f_n, Af_n) \in Gr(A).$$

Queremos provar que se $f_n \longrightarrow f$ em $D(A)$, e $Af_n \longrightarrow g$ em $L^2(0, L)$, então $Af = g$.

Pela Afirmação 3.16, já foi provado que o conjunto $D(A)$ é denso em $L^2(0, L)$. Porém, precisamos verificar se de fato temos $f \in D(A)$, para que Af faça sentido.

Para isso, veja que a afirmação (3.16) mostra que $f_n \in D(A) \Longrightarrow f_n \in H^3(0, L)$. E deste fato juntamente com (3.18) decorre que

$$f = \lim_{n \longrightarrow} f_n \in H^3(0, L).$$

Além disso, através da imersão de Sobolev $H^3 \hookrightarrow C^1$ dada na Proposição 1.10, existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{x \in (0,L)} |g(x)| \leq \sup_{x \in (0,L)} |g(x)| + \sup_{x \in (0,L)} |g'(x)| = \|g\|_{C^1(0,L)} \leq C\|g\|_{H^3(0,L)}, \ \ \forall g \in D(A).$$

Em particular, tomando $x = 0$ temos que

$$
\begin{aligned}
|f(0)| + |f'(0)| &\leq |f(0) - f_n(0)| + |f'(0) - f_n'(0)| \\
&\leq \|f - f_n\|_{L^\infty(0,L)} + \|f' - f_n'\|_{L^\infty(0,L)} \\
&= \|f - f_n\|_{C^1(0,L)} \\
&\leq C\|f - f_n\|_{H^3(0,L)}
\end{aligned}
$$

Como $f_n \longrightarrow f$ em $D(A)$, então $f(0) = f'(0) = 0$. Portando, $f \in D(A)$.

Agora, para a conclusão da afirmação, da linearidade do operador A e da continuidade da norma, resulta que

$$
\begin{aligned}
\|Af - g\|_{L^2(0,L)} &= \|Af - \lim_{n \longrightarrow \infty} Af_n\|_{L(0,L)} \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \|Af - Af_n\|_{L(0,L)} \quad \text{(usando } (3.16)) \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \|f_{nx} + f_{nxxx} - f_x - f_{xxx}\|_{L(0,L)} \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \|f_{nx} - f_x + f_{nxxx} - f_{xxx}\|_{L(0,L)} \quad \texttt{(desigualdade triangular)} \\
&\leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \Big(\|f_{nx} - f_x\|_{L^2(0,L)} + \|f_{nxxx} - f_{xxx}\|_{L^2(0,L)} \Big) \\
&\leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \|f_n - f\|_{H^3(0,L)}.
\end{aligned}
$$

Como $\|f_n - f\|_{H^3(0,L)} \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$, então concluímos que $Af = g$. Portanto, todo ponto $(f, g) \in Gr(A)$ é limite de sequência de pontos (f_n, Af_n) em $Gr(A)$.

As seguintes afirmações se encarregam de mostrar que o operador A é dissipativo, e que seu adjunto A^* está bem definido e, também, é um operador dissipativo.

Afirmação 3. (O operador A é dissipativo).

Usaremos a Definição 1.40, integração por partes e as condições de bordo em (3.14).

Seja $f \in D(A)$, então

$$
\begin{aligned}
(Af, f)_{L^2(0,L)} &= \int_0^L (Af).f dx = -\int_0^L (f_x + f_{xxx}) f dx = -\int_0^L (f_x f + f_{xxx} f) dx \\
&= -\int_0^L f_x f dx - \int_0^L f_{xxx} f dx = -\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f^2}{2}\right) dx - f.f_{xx}\Big|_0^L + \int_0^L f_{xx} f_x dx \\
&= -\frac{f^2}{2}\Bigg|_0^L - f.f_{xx}\Bigg|_0^L + \int_0^L f_{xx} f_x dx = \int_0^L f_{xx} f_x dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \frac{(f_x)^2}{2} dx
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(f_x)^2}{2}\bigg|_0^L = \frac{f_x(L)^2}{2} - \frac{f_x(0)^2}{2} = -\frac{f_x(0)^2}{2} \leq 0.$$

Afirmação 4. (O operador A^* está bem definido).

Agora afirmamos que o operador A^*, o adjunto de A, é definido por

$$D(A^*) = \{f \in H^3(0,L); f(0) = f(L) = f_x(0) = 0\}, \tag{3.20}$$

$$A^* f = f_x + f_{xxx}, \forall f \in D(A^*). \tag{3.21}$$

Com efeito, para toda $f \in D(A)$ e para toda $g \in D(A^*)$, vamos usar integral por partes e as condições de bordo: $f(0) = f(L) = f_x(L) = 0$ em (3.14), no seguinte produto escalar.

$$(Af,g)_{L^2(0,L)} = \int_0^L (Af)g dx = -\int_0^L (f_x + f_{xxx}) g dx = -\int_0^L (f_x g + f_{xxx} g) dx$$

$$= -\int_0^L f_x g dx - \int_0^L f_{xxx} g dx = -fg\bigg|_0^L + \int_0^L f g_x dx - f_{xx} g\bigg|_0^L + \int_0^L f_{xx} g_x dx$$

$$= \int_0^L f g_x dx - f_{xx} g\bigg|_0^L + \int_0^L f_{xx} g_x dx = \int_0^L f g_x dx - f_{xx} g\bigg|_0^L + f_x g_x\bigg|_0^L - \int_0^L f_x g_{xx} dx$$

$$= \int_0^L f g_x dx - f_{xx} g\bigg|_0^L + f_x g_x\bigg|_0^L - f g_{xx}\bigg|_0^L + \int_0^L f g_{xxx} dx.$$

Ou seja, substituindo os limites de integração, donde $f_x(L) = 0$, temos que

$$(Af,g)_{L^2(0,L)} = \int_0^L f g_x dx - f_{xx}(L) g(L) + f_{xx}(0) g(0) - f_x(0) g_x(0) + \int_0^L f g_{xxx} dx. \tag{3.22}$$

Note que, com o adjunto ocorre o seguinte fato no produto escalar.

$$(f, A^* g)_{L^2(0,L)} = \int_0^L f(A^* g) dx = \int_0^L f(g_x + g_{xxx}) dx = \int_0^L f g_x dx + \int_0^L f g_{xxx} dx. \tag{3.23}$$

Portanto, da igualdade entre as identidades (3.22) e (3.23), a definição do adjunto de A segue diretamente, isto é, desde que se tenha $g(0) = g(L) = g_x(0) = 0$, então temos que o operador adjunto $A^* : D(A^*) \subset L^2(0,L) \longrightarrow L^2(0,L)$ está bem definido e satisfaz

$$(Af,g)_{L^2(0,L)} = (f, A^* g)_{L^2(0,L)}, \ \ \forall f \in D(A), \ \text{ e } \forall g \in D(A^*).$$

Afirmação 5. (O operador A^* é dissipativo).

Vamos verificar que o operador adjunto $A^* : D(A^*) \subset L^2(0,L) \longrightarrow L^2(0,L)$ é dissipativo. Para isso, usamos a Definição 1.40, integração por partes, e as condições de bordo em (3.20) como segue.

Seja $f \in D(A^*)$, então

$$
\begin{aligned}
(A^*f,f)_{L^2(0,L)} &= \int_0^L (A^*f).f dx = \int_0^L (f_x + f_{xxx}) f dx = \int_0^L (f_x f + f_{xxx} f) dx \\
&= \int_0^L f_x f dx + \int_0^L f_{xxx} f dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f^2}{2}\right) dx + f.f_{xx}\Big|_0^L - \int_0^L f_{xx} f_x dx \\
&= \frac{f^2}{2}\Big|_0^L + f.f_{xx}\Big|_0^L - \int_0^L f_{xx} f_x dx = -\int_0^L f_{xx} f_x dx = -\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\frac{(f_x)^2}{2} dx \\
&= -\frac{(f_x)^2}{2}\Big|_0^L = -\frac{f_x(L)^2}{2} + \frac{f_x(0)^2}{2} = -\frac{f_x(L)^2}{2} \leq 0.
\end{aligned}
$$

Partindo do fato do operador A e de seu adjunto A^* serem dissipativos, o próximo passo será aplicar Teoria de Semigrupos, como segue, a fim de provar a existência de soluções do problema de Cauchy (3.2).

Agora apresentaremos um problema de valor inicial não-homogêneo. Vamos aplicar o Teorema 1.16 como segue.

Para todo estado $y^0 \in D(A)$ e para toda função $f \in C^1([0,L]; L^2(0,T))$, existe uma única solução $z \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^3(0,L))$ do problema de Cauchy

$$z(t,0) = z(t,L) = z_x(t,L) = 0, \forall t \in [0,T], \tag{3.24}$$

$$\frac{dz}{dt} = Az + \dot{u}(t)\frac{x(L-x)}{L} + u(t)\frac{L-2x}{L}, \tag{3.25}$$

$$z(0,.) = y^0. \tag{3.26}$$

Para atender às hipóteses do Teorema 1.16, sabemos que $f : [0,T] \longrightarrow L^2(0,T)$ é C^1, mas precisamos verificar ainda que, fazendo $f(t,x) := \dot{u}(t)\frac{x(L-x)}{L} + u(t)\frac{L-2x}{L}$, então $f(t,x) \in C^1([0,T]; L^2(0,T))$, para todo $(t,x) \in [0,T] \times [0,L]$.

Para isso, note que $u \in C^2([0,T]) \Longrightarrow \dot{u} \in C^1([0,T]) \Longrightarrow f \in C^1([0,T]; L^2(0,T))$, pois fazendo

$$M^{(1)} = \sup_{x \in (0,L)} \left|\frac{x(L-x)}{L}\right| < \infty \quad \text{e} \quad M^{(2)} = \sup_{x \in (0,L)} \left|\frac{L-2x}{L}\right| < \infty, \quad \text{então}$$

$$
\begin{aligned}
\|f(t,x)\|_{C^1(0,T)} &= \sup_{t \in [0,T]} |f(t,x)| + \sup_{t \in [0,T]} |f_t(t,x)| \\
&= \sup_{t \in [0,T]} \left|\dot{u}(t)\frac{x(L-x)}{L} + u(t)\frac{L-2x}{L}\right| + \sup_{t \in [0,T]} \left|\ddot{u}(t)\frac{x(L-x)}{L} + \dot{u}(t)\frac{L-2x}{L}\right|
\end{aligned}
$$

$$\leq \sup_{t\in[0,T]} |\dot{u}(t)|M^{(1)} + \sup_{t\in[0,T]} |u(t)|M^{(2)} + \sup_{t\in[0,T]} |\ddot{u}(t)|M^{(1)} + \sup_{t\in[0,T]} |\dot{u}(t)|M^{(2)}$$
$$< \infty.$$

Partindo do sistema (3.24)-(3.26), podemos resolver o problema de Cauchy (3.2). Basta definir $y \in C^1([0,T];L^2(0,L)) \cap C^0([0,T];H^3(0,L))$ por

$$y(t,x) = z(t,x) - u(t)\frac{x(L-x)}{L}, \forall (t,x) \in [0,T]\times[0,L]. \tag{3.27}$$

Note que, de (3.24) e de (3.27), decorre que

$$y(t,0) = y(t,L) = 0, \forall t \in [0,T]. \tag{3.28}$$

Além disso, se na expressão (3.27) considerar uma derivada de y em relação a t, uma em relação a x, e ainda três em relação a x, teremos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} - \dot{u}(t)\frac{x(L-x)}{L},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - u(t)\frac{(L-2x)}{L}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} + u(t)\frac{2}{L} \quad \text{e} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3z}{dx^3}.$$

Daí, ao somar as equações acima, obtemos que y resolve a equação linear de KdV como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}
y_t + y_x + y_{xxx} &= \frac{dz}{dt} - \dot{u}(t)\frac{x(L-x)}{L} + \frac{dz}{dx} - u(t)\frac{(L-2x)}{L} + \frac{d^3z}{dx^3}\\
&= \frac{dz}{dt} - \left(-\frac{dz}{dx} - \frac{d^3z}{dx^3} + \dot{u}(t)\frac{x(L-x)}{L} + u(t)\frac{(L-2x)}{L}\right)\\
&= \frac{dz}{dt} - \left(Az + \dot{u}(t)\frac{x(L-x)}{L} + u(t)\frac{(L-2x)}{L}\right)\\
&= \frac{dz}{dt} - \frac{dz}{dt} = 0.
\end{aligned}$$

E ainda na expressão (3.27) e na sua derivada, usamos (3.24),(3.26) e (3.28) para obter

$$y(t,0) = y(t,L) = 0, \quad \text{e} \quad y_x(t,L) = u(t), \quad \text{e} \quad y(t,0) = z(t,0) = y^0.$$

Agora, a fim obter a desigualdade (3.10), vamos usar a função teste como segue. Para $\tau \in [0,T]$, seja $\phi \in C^1([0,T];L^2(0,L)) \cap C^0([0,T];H^3(0,L))$ tal que

$$\phi(t,0) = \phi(t,L), \forall t \in [0,T]. \tag{3.29}$$

Então, podemos usar o sistema (3.24)-(3.26) com a mudança de variável y expressa em (3.27), valendo ainda a condição $u(0) = 0$ dada em (3.26), como segue.

Vimos que a solução y satisfaz a equação

$$y_t + y_x + y_{xxx} = 0. \tag{3.30}$$

Multiplicamos por ϕ e depois integramos por partes. A partir daqui, podemos fazemos o mesmo passo-a-passo nos moldes de obter a equação integral em (3.7). Vamos considerar ainda válida a condição (3.29) e então teremos

$$\begin{aligned} -\int_0^\tau \int_0^L (\phi_t + \phi_x + \phi_{xxx}) y dx dt - \int_0^\tau \phi_x(t, L) u(t) dt + \int_0^\tau \phi_x(t, 0) y_x(t, 0) dt \\ + \int_0^L \phi(\tau, x) y(\tau, x) dx - \int_0^L \phi(0, x) y^0(x) dx = 0, \end{aligned} \tag{3.31}$$

onde a função ϕ foi escolhida arbitrariamente. Em particular, podemos tomar a restrição $\phi = y|_{[0,\tau]\times[0,L]}$ na equação (3.31).

Usando o produto escalar definido em $L^2(0, T)$, e o produto escalar definido em $L^2(0, L)$, fica apenas

$$\int_0^\tau |y_x(t, 0)|^2 dt - \int_0^\tau |u(t)|^2 dt + \int_0^L |y(\tau, x)|^2 dx - \int_0^L |y^0(x)|^2 dx = 0, \tag{3.32}$$

o que resulta em

$$\|y\|_{C^0([0,T];L^2(0,L))} \leq \|u\|_{L^2(0,T)} + \|y^0\|_{L^2(0,L)}. \tag{3.33}$$

Isso prova o resultado assumindo que y^0 e u são mais regulares.

Agora, vamos tratar o caso geral em que temos as condições de valor iniciais sem exigir que se tenha, necessariamente, regularidade no controle u.

Seja $y^0 \in L^2(0, L)$ e $u \in L^2(0, T)$. Tomando uma sequência de funções $(y_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A)$ tal que

$$y_n \longrightarrow y^0 \text{ em } L^2(0, L), \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{3.34}$$

Seja também $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $C^2([0, T])$ tal que $u_n(0) = 0$ e

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^2(0, T), \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{3.35}$$

Seja ainda $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenhamos seus termos $z_n \in C^1([0, T]; L^2(0, L)) \cap C^0([0, T]; H^3(0, L))$, de modo que satisfazem o seguinte sistema de Cauchy

$$z_n(t, 0) = z_n(t, L) = z_{nx}(t, L) = 0, \forall t \in [0, T], \tag{3.36}$$

$$\frac{dz_n}{dt} = Az + \dot{u}_n(t)\frac{x(L - x)}{L} + u_n(t)\frac{L - 2x}{L}, \tag{3.37}$$

$$z_n(0,.) = y_n^0. \tag{3.38}$$

Considere a mudança de variáveis $y_n \in C^1([0,T];L^2(0,L)) \cap C^0([0,T];H^3(0,L))$, definida por

$$y_n(t,x) = z_n(t,0) - \dot{u}_n(t)\frac{L(x-L)}{L}, \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,L]. \tag{3.39}$$

Seja $\tau \in [0,T]$. Considere $\phi \in C^3([0,\tau] \times [0,L])$ tal que

$$\phi(t,0) = \phi(t,L) = \phi_x(t,0) = 0, \forall t \in [0,T]. \tag{3.40}$$

Na equação integral (3.31), aplicamos o caso em que a condição inicial seja $y^0 := y_n^0$, e ainda $u := u_n$ e $y := y_n$. Logo,

$$\begin{aligned} -\int_0^\tau \int_0^L (\phi_t + \phi_x + \phi_{xxx)} y_n dxdt - \int_0^\tau \phi_x(t,L)u_n(t)dt \\ + \int_0^L \phi(\tau,x)y_n(\tau,x)dx - \int_0^L \phi(0,x)y_n^0(x)dx, \end{aligned} \tag{3.41}$$

e por (3.32), temos

$$\|y_n\|_{C^0([0,T];L^2(0,L))} \leq \|u_n\|_{L^2(0,T)} + \|y_n^0\|_{L^2(0,L)}. \tag{3.42}$$

Tomando $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Usando ainda (3.32), aplicamos o caso em que $y^0 := y_n^0 - y_m^0$, $u := u_n - u_m$ e $y := y_n - y_m$, resulta

$$\|y_n - y_m\|_{C^0([0,T];L^2(0,L))} \leq \|u_n - u_m\|_{L^2(0,T)} + \|y_n^0 - y_m^0\|_{L^2(0,L)}. \tag{3.43}$$

Levando em conta as convergências (3.34) e (3.35), e a desigualdade (3.43), temos que a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, portanto, é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T];L^2(0,L))$.

Logo, existe $y \in C^0([0,T];L^2(0,L))$ tal que

$$y_n \longrightarrow y \text{ em } C^0([0,T];L^2(0,L)), \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{3.44}$$

Então, aplicando o limite em (3.41) temos a equação integral em (3.9). E aplicando também o limite em (3.42), temos a desigualdade das normas (3.10).

Assim concluímos a prova da existência do problema de Cauchy em (3.2) satisfazendo (3.10).

(Unicidade) Trataremos agora a prova da unicidade da solução.

Sejam $T > 0$, $y^0 \in L^2(0,L)$ e $u \in L^2(0,T)$. Agora vamos supor que existam duas soluções y_1 e y_2 do problema de Cauchy (3.2).

Considere $y := y_2 - y_1 \in C^0([0,T];L^2(0,L))$. Seja $\tau \in [0,T]$ e $\phi \in C^3([0,T];L^2(0,L))$ tal que (3.8) é satisfeito, i.e., com

$$\phi(t,0) = \phi(t,L) = \phi_x(t,L) = 0.$$

Pela Definição 3.1, para toda função $\phi \in C^1([0,\tau];L^2(0,L)) \cap C^0([0,\tau];H^3(0,L))$ que satisfaz a equação integral (3.9), é válido que

$$-\int_0^\tau \int_0^L (\phi_t + \phi_x + \phi_{xxx}) y dx dt + \int_0^L \phi(\tau,x) y(\tau,x) dx = 0. \tag{3.45}$$

Para $\tau \in [0,T]$, seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $H^3(0,L)$ tal que

$$f_n(0) = f_n(L) = f_{nx}(0) = 0, \tag{3.46}$$

$$f_n \longrightarrow y(\tau,.) \text{ em } L^2(0,L), \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{3.47}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$\psi_n \in C^1([0,\tau];L^2(0,L)) \cap C^0([0,\tau];D(A)) \tag{3.48}$$

a solução de

$$\frac{d\psi_n}{dt} = A\psi_n, \tag{3.49}$$

$$\psi_n(0,x) = f_n(L-x). \tag{3.50}$$

Seja ainda $\phi_n \in C^1([0,\tau];L^2(0,L)) \cap C^0([0,\tau];H^3(0,L))$ uma sequência definida por

$$\phi_n(t,x) = \psi_n(\tau - t, L - x), \forall (t,x) \in [0,\tau] \times [0,L]. \tag{3.51}$$

Veja que, usando (3.50) em (3.51), a condição (3.8) é satisfeita para $\phi := \phi_n$, pois, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $\tau \in [0,L]$ temos

$$\phi_n(\tau,0) = \psi_n(0,L) = f_n(0) = 0, \qquad \phi_n(\tau,L) = \psi_n(0,0) = f_n(L) = 0, \quad \text{e}$$

$$\partial_x \phi_n(\tau,L) = \partial_x \psi_n(0,0) = f_{nx}(L) = 0.$$

Além disso, podemos derivar em relação a x, depois em relação a t, e usar o operador A como segue.

$$\phi_{nx} = \frac{\partial}{\partial x}\phi_n(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\psi_n(\tau - t, L - x) = -\frac{\partial}{\partial x}\psi_n,$$

$$\phi_{nxxx} = \frac{\partial^3}{\partial_{xxx}}\phi_n(t,x) = \frac{\partial^3}{\partial_{xxx}}\psi_n(\tau - t, L - x) = -\frac{\partial^3}{\partial_{xxx}}\psi_n,$$

$$\phi_{nt} = \frac{\partial}{\partial t}\phi_n(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\psi_n(\tau - t, L - x) = -\frac{d\psi_n}{dt} = -A\psi_n = \psi_{nx} + \psi_{nxxx} = -\phi_{nx} - \phi_{nxxx}.$$

Daí, temos que

$$\phi_{nt} + \phi_{nx} + \phi_{nxxx} = 0.$$

Logo, usando (3.50) e (3.51), na equação integral (3.45) obtemos

$$\int_0^L y(\tau,x) f_n(x)dx = \int_0^L y(\tau,x)\phi_n(\tau,x)dx = 0. \tag{3.52}$$

Então, fazendo $n \longrightarrow \infty$, e usando (3.47), temos

$$\begin{aligned}\|y(\tau,\cdot)\|_{L^2(0,L)} = \int_0^L |y(\tau,x)|^2 dx = \int_0^L y(\tau,x) \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)dx \qquad \texttt{(Lema de Fatou)}\\ = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^L y(\tau,x)f_n(x)dx\\ = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^L y(\tau,x)\phi_n(\tau,x)dx = 0.\end{aligned}$$

Portanto, para todo $\tau \in [0,T]$, temos que $y_2(\tau,.) - y_1(\tau,.) =: y(\tau,.) = 0$. Isso conclui a prova do teorema. □

3.2 Controlabilidade

Vamos seguir com o estudo da controlabilidade do sistema de controle (3.1). Para isso, retornamos com a definição usual de controlabilidade.

Definição 3.2. (CONTROLE) *Seja $T > 0$. O sistema de controle (3.1) é controlável no tempo T se, para todo $y^0 \in L^2(0,L)$ e todo $y^1 \in L^2(0,L)$, existe $u \in L^2(0,T)$ tal que a solução y do problema de Cauchy (3.2) satisfaz $y(T,.) = y^1$.*

Com esta definição, temos o seguinte teorema

Teorema 3.2. *Seja $T > 0$, e considere o conjunto*

$$\mathcal{N} := \left\{2\pi\sqrt{\frac{j^2 + l^2 + jl}{3}}; j,l \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}. \tag{3.53}$$

O sistema de controle (3.1) é controlável no tempo T se, e somente se, $L \notin \mathcal{N}$.

Demonstração. Para $y^0 \in L^2(0,L)$, seja $y \in C^0([0,\infty]; L^2(0,L))$ a solução do estendida problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, \\ y(.,0) = y(.,L) = y_x(.,L) = 0, \\ y(0,.) = y^0. \end{cases}$$

Isto significa que, para $T > 0$, a restrição da função y ao conjunto $[0,T] \times (0,L)$ é a solução do problema de Cauchy de acordo com a definição (3.1).

Denotamos $S(t)y^0$ a função $y(t,.)$. Em outras palavras, $S(t), t \in [0,\infty)$ é o semi-grupo de operadores contínuos associado ao operador linear A.

Para a primeira parte da prova do Teorema 3.2, apresentamos a proposição a seguir.

Proposição 3.2. *Para* $y^0 \in L^2(0,L)$*, seja* $T > 0$ *e* $y(t,.) = S(t)y^0$, *para* $t \in [0,T]$. *Então* $y_x(.,0)$ *faz sentido em* $L^2(0,T).$, *com* $y \in L^2((0,T); H^1(0,L))$ *e, além disso,*

$$\|y_x(.,0)\|_{L^2(0,T)} \leq \|y^0\|_{L^2(0,L)}, \tag{3.54}$$

$$\|y\|_{L^2((0,T);H^1(0,L))} \leq \left(\frac{4T+L}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \|y^0\|_{L^2(0,L)}, \tag{3.55}$$

$$\|y^0\|^2_{L^2(0,L)} \leq \frac{1}{T}\|y\|^2_{L^2((0,T)\times(0,L))} + \|y_x(\cdot,0)\|^2_{L^2(0,T)}. \tag{3.56}$$

Observando a equação de KdV em (3.3) tomada no sentido das distribuições, e do fato da solução fraca ser tal que $y \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$, temos que

$$y \in H^3((0,L); H^{-1}(0,T)).$$

Além disso, $y_x(.,0)$ está bem definido e toma valores em $H^{-1}(0,T)$. A desigualdade (3.54) diz que, de fato, $y_x(.,0)$ em $L^2(0,T)$. Esta é uma propriedade de regularidade sutil no sentido das distribuições.

Demonstração. Pela densidade de $D(A)$ em $L^2(0,L)$, é suficiente provar as desigualdades (3.54), (3.55) e (3.56) no caso em que $y^0 \in D(A)$. Nesse sentido, tome $y^0 \in D(A)$ e considere o sistema de Cauchy em $y \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; D(A))$,

$$y_t + y_x + y_{xxx} = 0, \tag{3.57}$$

$$y(.,0) = y(.,L) = y_x(.,L) = 0, \tag{3.58}$$

$$y(0,.) = y^0. \tag{3.59}$$

Vamos multiplicar (3.57) por y e integrar por partes em $[0,T] \times [0,L]$ como segue.

$$\int_0^T \int_0^L yy_t + yy_x + yy_{xxx} dxdt = 0$$

$$\int_0^L \int_0^T yy_t dtdx + \int_0^T \int_0^L yy_x dxdt + \int_0^T \int_0^L yy_{xxx} dxdt = 0.$$

$$\int_0^L \frac{y}{2}^2 \bigg|_0^T dx + \int_0^T \frac{y}{2}^2 \bigg|_0^L dt + \int_0^T \left[yy_{xx} \bigg|_0^L - \int_0^L y_x y_{xx} dx \right] dt = 0.$$

$$\int_0^L \frac{y}{2}^2 \bigg|_0^T dx + \int_0^T \frac{y}{2}^2 \bigg|_0^L dt - \int_0^T \frac{y_x}{2}^2 \bigg|_0^L dt = 0.$$

Usando (3.55), (3.56) e (3.57), temos que

$$\int_0^L |y(T,x)|^2 dx - \int_0^L |y(0,x)|^2 dx + \int_0^T |y_x(t,0)|^2 dt = 0.$$

Logo, $\displaystyle \int_0^T |y_x(t,0)|^2 dt = \int_0^L |y^0(x)|^2 dx - \int_0^L |y(T,x)|^2 dx \leq \int_0^L |y^0(x)|^2 dx,$

o que prova a primeira desigualdade (3.54).

Agora, para a segunda desigualdade, vamos multiplicar (3.55) por xy e integrar por partes em $[0,T] \times [0,L]$. Usando (3.55), (3.55) e (3.55), temos

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_0^L |y(t,x)|^2 dxdt + \int_0^L x|y(T,x)|^2 dx - \int_0^L x|y^0(x)|^2 dx \\ +3 \int_0^T \int_0^L |y_x(t,x)|^2 dxdt = 0. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Usando (3.10), temos

$$\|y\|_{L^2((0,T)\times(0,L))} \leq T^{\frac{1}{2}} \|y\|_{C^0([0,T];L^2(0,L))} \leq T^{\frac{1}{2}} \|y^0\|_{L^2(0,L)},$$

o qual, juntamente com (3.60), prova a desigualdade (3.55).

Porém, se multiplicarmos (3.60) por $(T-t)y$ e integrarmos por partes em $[0,T] \times [0,L]$, usando (3.57), (3.60) e (3.59), temos

$$\int_0^T \int_0^L |y(t,x)|^2 dxdt - \int_0^L T|y^0(x)|^2 dx + \int_0^T (T-t)|y_x(t,0)|^2 dt = 0,$$

o que prova (3.56). E assim concluímos a prova da proposição. □

Seguindo a prova do Teorema 3.2, vamos fazer uso da dualidade entre a controlabilidade e a observabilidade de um sistema de controle linear (de modo análogo ao que foi feito na Definição 2.2 da equação do transporte). Aplicaremos os conceitos de controlabilidade e dualidade como segue.

Seja $T > 0$. Vamos definir uma aplicação linear $\mathcal{F}_T : L^2(0,T) \longrightarrow L^2(0,L)$ da seguinte maneira:

Escolhendo $u \in L^2(0,T)$, seja $y \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$ a solução do problema de Cauchy (3.2) de modo que se tenha $y^0 := 0$. Então, a aplicação linear $\mathcal{F}_T$ é definida por

$$\mathcal{F}_T(u) := y(T,.).$$

A seguir, temos uma proposição que apresenta uma reformulação do problema de controle.

Proposição 3.3. (CONTROLE VIA SOBREJETIVIDADE) *Seja $T > 0$. O sistema de controle (3.1) é controlável no tempo T se, e somente se, a aplicação linear $\mathcal{F}_T(u)$ é sobrejetiva.*

Para provar que $\mathcal{F}_T$ é sobrejetiva, usaremos adiante a Proposição 1.5 da desigualdade de observabilidade. Mas antes, vamos introduzir um lema, a fim de buscar escrever de forma explícita o adjunto de F_T em termos da solução de um problema de Cauchy auxiliar.

Lema 3.1. *Seja $z^T \in H^3(0,L)$ tal que*

$$z^T(0) = z^T(L) = z_x^T(0) = 0, \tag{3.61}$$

de modo que $z \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^3(0,L))$ é a única solução de

$$z_t + z_x + z_{xxx} = 0, \tag{3.62}$$

$$z(t,0) = z(t,L) = z_x(t,0) = 0, \forall t \in [0,T], \tag{3.63}$$

$$z(T,.) = z^T. \tag{3.64}$$

Então

$$\mathcal{F}_T^*(z^T) = z_x(.,L). \tag{3.65}$$

Demonstração. Primeiramente, vale destacar que para a prova da existência e unicidade da solução $z \in C^1([0,T]; L^2(0,L)) \cap C^0([0,T]; H^3(0,L))$ satisfazendo (3.62), (3.63) e (3.64) é similar à prova da existência e unicidade do problema de Cauchy (3.23), (3.24) e (3.25).

Com efeito. Se $\tilde{z} \in C^1([0,T];L^2(0,L)) \cap C^0([0,T];H^3(0,L))$ é solução de

$$\tilde{z}(t,0) = \tilde{z}(t,L) = \tilde{z}_x(t,L) = 0, \forall t \in [0,T], \tag{3.66}$$

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = A\tilde{z}, \tag{3.67}$$

$$\tilde{z}(0,x) = z^T(L-x), \forall x \in [0,L], \tag{3.68}$$

então, temos que $z(t,x) = \tilde{z}(T-t, L-x), \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,L]$.

Agora, tome $u \in C^2([0,T])$ tal que $u(0) = 0$. Considere o problema de Cauchy a seguir, cuja solução é $y \in C^1([0,T];L^2(0,L)) \cap C^0([0,T];H^3(0,L))$.

$$y_t + y_x + y_{xxx} = 0, \tag{3.69}$$

$$y(t,0) = y(t,L) = 0, y_x(t,L) = u(t), \forall t \in [0,T], \tag{3.70}$$

$$y(0,.) = 0. \tag{3.71}$$

Agora, vamos fazer uso do sistema (3.62)-(3.64) e do sistema (3.69)-(3.71) no produto escalar em $L^2(U)$ com o operador F_T, para poder expressar o seu adjunto.

$$\begin{aligned}
\Big(z^T, \mathcal{F}_T(u)\Big)_{L^2(0,L)} &= \int_0^L z^T \mathcal{F}_T(u)dx \\
&= \int_0^L z^T y(T,x)dx \\
&= \int_0^T \int_0^L (zy)_t dxdt \\
&= \int_0^T \int_0^L -(z_x + z_{xxx})y - (y_x + y_{xxx})zdxdt \\
&= \int_0^T z_x(t,L)u(t)dt. \\
&= \Big(z_x(\cdot, L), u\Big)_{L^2(0,T)}.
\end{aligned}$$

Por fim, como o conjunto $\{u \in C^2([0,T]);\ \ u(0) = 0\}$ é denso em $L^2(0,L)$, então

$$\Big(z^T, \mathcal{F}_T(u)\Big)_{L^2(0,L)} = \Big(z_x(\cdot, L), u\Big)_{L^2(0,T)} \implies \mathcal{F}_T^*(z^T) = z_x(.,L).$$

Assim concluímos a prova do Lema 3.1.

Agora, vamos assumir que $L \notin \mathcal{N}$ e provar que a desigualdade de observabilidade é válida nesse caso.

Trocando x por $L-x$, e t por $T-t$, e usando o Lema 3.1, vemos que a desigualdade de observabilidade (1.12) é equivalente à desigualdade

$$c\|y^0\|_{L^2(0,L)} \leq \|y_x(.,0)\|_{L^2(0,T)}, \forall y^0 \in D(A), \tag{3.72}$$

com $y(t,.) = S(t)y^0$.

Vamos provar este fato através de um argumento por contradição como segue.

Assumindo que a desigualdade (3.72) não é válida para qualquer que seja $c > 0$, então existe uma sequência de funções $(y_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A)$ tal que

$$\|y_n^0\|_{L^2(0,L)} = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e} \tag{3.73}$$

$$y_{xn}(.,0) \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,T), \text{ *quando* } n \longrightarrow \infty. \tag{3.74}$$

Fazendo $y_n(t,.) = S(t)y_n^0$, por (3.55) e (3.73), temos que

$$\text{a sequência } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2((0,T);H^1(0,L)). \tag{3.75}$$

Além disso, em vista da igualdade $y_{nt} = -y_{nx} - y_{nxxx}$, implica também que

$$\textit{a sequência } (y_{nt})_{n\in\mathbb{N}} \textit{ é limitada em } L^2((0,T);H^{-2}(0,L)). \tag{3.76}$$

Agora, vamos aplicar um resultado de [11] no Teorema 1.14 no contexto já apresentado. Para isso, considere $X = \mathcal{H}^1(0,L)$, $B = L^2(0,L)$, $Y = \mathcal{H}^{-2}(0,L)$ e $K = \{y_n; n \in \mathbb{N}\}$. Logo, por (3.75) e (3.76), as hipóteses do teorema são válidas.

Como consequência desse teorema, o conjunto $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto em $L^2((0,T);L^2(0,L))$.

Então, sem perda de generalidade, assuma que para algum $y \in L^2((0,T), L^2(0,L))$ tenha

$$y_n \longrightarrow y \text{ em } L^2((0,T),L^2(0,L)), \text{ *quando* } n \longrightarrow \infty. \tag{3.77}$$

De (3.56), (3.74) e (3.77) aplicado para $y_m - y_n$, temos que a sequência $(y_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^2(0,L)$. Logo, existe $y^0 \in L^2(0,L)$ tal que

$$y_n^0 \longrightarrow y^0 \text{ em } L^2(0,L), \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{3.78}$$

Veja que, de (3.77) e (3.78), temos

$$y(t,.) = S(t)y^0. \tag{3.79}$$

Além disso, decorre de (3.73) e (3.78) que

$$\|y^0\|_{L^2(0,L)} = 1. \tag{3.80}$$

Observe que, pela continuidade da aplicação

$$z^0 \in L^2(0,L) \longmapsto \Big(t \longmapsto (S(t)z^0)_x(0)\Big) \in L^2(0,T),$$

$\big($ Verificando em (3.54),(3.74), (3.78) e (3.79) $\big)$ temos que

$$y_x(.,0) = 0 \ \text{ em } \ L^2(0,T). \tag{3.81}$$

Agora, finalmente (3.79), (3.80) e (3.81) entram em contradição com o seguinte lema.

Lema 3.2. *Seja $T > 0$ e $y^0 \in L^2(0,L)$ tais que (3.81) é válido para todo y definido como semigrupo em (3.79). Se $L \notin \mathcal{N}$, então $y^0 = 0$.*

Demonstração. Seja $T > 0$. Para $T' > 0$, seja $N_{T'}$ o conjunto de todos $y^0 \in L^2(0,L)$ tais que, se $y \in C^0([0,\infty); L^2(0,L))$ é solução do problema de Cauchy (3.3) com $u := 0$, então

$$y_x(.,0) = 0 \ \text{ em } \ L^2(0,T'). \tag{3.82}$$

Além disso,

$$(0 < T' < T'') \Longrightarrow N_{T''} \subset N_{T'}. \tag{3.83}$$

Agora vamos afirmar que, para todo $T' > 0$, o conjunto $N_{T'}$ é um subespaço linear fechado de $L^2(0,L)$.

De fato, para mostrar que $N_{T'}$ é subespaço linear de $L^2(0,L)$, basta tomar y_1, $y_2 \in N_{T'}$ soluções do problema de Cauchy associadas, respectivamente, a y_1^0, $y_2^0 \in L^2(0,L)$.

Agora, seja $(y_n^0)_{n\in\mathbb{N}} \subset N_{T'}$ uma sequência arbitrária tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n^0 \in N_{T'}$ e y_n é a solução do problema de Cauchy associada a y_n^0 no qual temos $y_n^0 \longrightarrow y^0$, quando $n \longrightarrow \infty$. Neste caso, y é a solução do problema de Cauchy associado a y^0, além disso, vale ainda $y_{nx}(\cdot,0) = 0$.

Decorre da desigualdade (3.54), na Proposição 3.2, que

$$\|y_{nx}(\cdot,0)\|_{L^2(0,T)} \leq \|y_n^0\|_{L^2(0,L)}.$$

Então, resulta que

$$\|y_x(\cdot,0) - y_{nx}(\cdot,0)\|_{L^2(0,T)} \leq \|y^0 - y_n^0\|_{L^2(0,L)} \longrightarrow 0, \ \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Portanto, $y_x(\cdot, 0) = 0 \Longrightarrow y \in N_{T'}$. Isso mostra que $N_{T'}$ é fechado.

Agora, vamos provar que

$$\text{Para todo } T' > 0, \ \ N_{T'} \text{ é subespaço vetorial finito-dimensional.} \tag{3.84}$$

Seja ainda $T' > 0$. Se $(y_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência dos elementos de $N_{T'}$ tais que $\|y_n^0\|_{L^2(0,L)} = 1$, seguindo a mesma prova de (3.78), podemos extrair uma subsequência convergente em $L^2(0, L)$. Isto significa que a bola unitária de $N_{T'}$ é compacta. O que prova (3.84).

Usando (3.83), (3.84), e a cardinalidade, existe $T > 0$ e $\eta > 0$ tais que $T' + \eta < T$ e

$$N_{T'+t} = N_{T'}, \forall t \in [0, \eta]. \tag{3.85}$$

Considere o conjunto

$$M := \{f : t \in [0, \frac{\eta}{2}] \longmapsto S(t)y^0; \ \ y^0 \in N_{T'}\} \subset C^0([0, \frac{\eta}{2}], L^2(0, L)). \tag{3.86}$$

Note que, por (3.84), $N_{T'}$ tem dimensão finita, o que implica que

$$M \text{ é um subespaço fechado de } L^2((0, \frac{\eta}{2}), H^{-2}(0, L)). \tag{3.87}$$

Seja $y^0 \in N_{T'}$. Pela propriedade de semigrupo, temos que $S(\tau)S(t)y^0 = S(\tau + t)y^0$, e por (3.85),

$$S(t)y^0 \in N_{T'}, \forall t \in [0, \eta]. \tag{3.88}$$

Então, seja $y \in C^0([0, \eta]; L^2(0, L))$ definida por

$$y(t, .) = S(t)y^0.$$

Desde que $y \in H^1((0, \eta); H^{-2}(0, L))$, então existe $z \in L^2((0, \frac{\eta}{2}); H^{-2}(0, L))$ tal que

$$z = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0^+} \frac{y(\epsilon + ., .) - y(., .)}{\epsilon} \text{ em } L^2([0, \eta/2]; H^{-2}(0, L)). \tag{3.89}$$

Por (3.86) e (3.88), temos

$$\left(\tau \in [0, \eta/2] \longmapsto \frac{y(\epsilon + \tau, .) - y(\tau, .)}{\epsilon}\right) \in M, \ \ \forall \epsilon \in [0, \eta/2]. \tag{3.90}$$

Por (3.87), (3.89) e (3.90), temos que

$$z \in M \Longrightarrow z \in C^0([0, \eta/2]; L^2(0, L)) \text{ e } z(0) \in N_{T'}.$$

Portanto, $y \in C^1([0, \eta/2]; L^2(0, L))$.

Além disso, usando (3.79), $y \in C^0([0,\eta/2];H^3(0,L))$ e y^0 tal que

$$y^0 \in H^3(0,L), \tag{3.91}$$

$$y^0(0) = y^0(L) = y^0_x(0) = y^0_x(L) = 0, \tag{3.92}$$

$$Ay^0 = z(0) \in N_{T'}. \tag{3.93}$$

Portanto, podemos definir uma aplicação $\mathbb{C}$-linear $\mathcal{A} : \mathbb{C}N_{T'} \longrightarrow \mathbb{C}N_{T'}$ ao exigir que

$$A(\zeta\varphi) = \zeta\mathcal{A}(\varphi), \forall\zeta \in \mathbb{C}, \forall\varphi \in N_{T'}.$$

Note que, sendo $N_{T'}$ finito-dimensional em (3.84), se $N_{T'} \neq \{0\}$ esse operador linear possui autovetor associado ao autovalor $\zeta \in \mathbb{C}$.

Portanto, para finalizarmos a prova do Lema 3.2 basta ver que este é consequência da condição (3.83) juntamente com o resultado do Lema 1.2.

Isso conclui a prova do Lema 3.2.

Agora, para concluir a prova do Teorema 3.2, vamos assumir que

$$L \in \mathcal{N}, \tag{3.94}$$

e provar que o sistema de controle (3.1) é não controlável no tempo $T > 0$, para qualquer que seja $T > 0$.

Por (3.94) e pelo Lema 1.2, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\varphi \in H^3((0,L);\mathbb{C})$ tal que (3.92)-(3.93) é válido e, ainda, satisfaz

$$\varphi \neq 0. \tag{3.95}$$

Seja $(y,u) \in C^0([0,T];L^2(0,L)) \times L^2(0,T))$ a trajetória do sistema de controle (3.1)-(3.2).

Vamos então assumir que se tenha $y(0,.) \in D(A)$ e $u \in C^2([0,T])$ que satisfaça $u(0) = 0$. Logo, $y \in C^1([0,T];L^2(0,L)) \cap C^0([0,T];D(A))$. Agora, se multiplicarmos a equação (3.1) por φ e integrarmos por partes em $[0,L]$, temos

$$\int_0^L (y_t + y_x + y_{xxx})\varphi dx = 0,$$

$$\int_0^L y_t\varphi dx + \int_0^L y_x\varphi dx + \int_0^L y_{xxx}\varphi dx = 0,$$

$$\int_0^L y_t\varphi dx + \left[y\varphi\Big|_0^L - \int_0^L y\varphi_x dx \right] + \left[y_{xx}\varphi\Big|_0^L - \int_0^L y_{xx}\varphi_x dx \right] = 0,$$

Usando (3.2) e (3.93), e integrando novamente em $[0,L]$, fica

$$\int_0^L y_t\varphi dx - \int_0^L y\varphi_x dx - \int_0^L y_{xx}\varphi_x dx = 0,$$

$$\int_0^L y_t\varphi dx - \int_0^L y\varphi_x dx - \left[y_x\varphi_x\Big|_0^L - \int_0^L y_x\varphi_{xx} dx\right] = 0,$$

$$\int_0^L y_t\varphi dx - \int_0^L y\varphi_x dx + \int_0^L y_x\varphi_{xx} dx = 0,$$

$$\int_0^L y_t\varphi dx - \int_0^L y\varphi_x dx + \left[y\varphi_{xx}\Big|_0^L - \int_0^L y\varphi_{xxx} dx\right] = 0,$$

$$\int_0^L y_t\varphi dx - \int_0^L y\varphi_x dx - \int_0^L y\varphi_{xxx} dx = 0,$$

Usando a equação (3.92) do Lema 1.2, fica

$$\int_0^L y_t\varphi dx + \int_0^L (-\varphi_x - \varphi_{xxx}) y dx = 0,$$

$$\int_0^L y_t\varphi dx + \int_0^L \lambda\varphi y dx = 0, \text{ então}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^L y\varphi dx\right) = -\lambda \int_0^L y\varphi dx, \tag{3.96}$$

Com argumento de densidade, a identidade (3.96) também é válida para $y(0,.) \in L^2(0,L)$ e $u \in L^2(0,T)$. Logo,

$$\int_0^L y(T,x)\varphi(x)dx = e^{-\lambda T}\int_0^L y(0,x)\varphi(x)dx, \tag{3.97}$$

o que, juntamente com (3.95), mostra que o sistema de controle (3.1) é não controlável no tempo $T > 0$. Esta conclusão final pode ser observada no caso em que $y^0 > 0$ e $y^1 := 0$. Claramente não existe controle $u \in L^2(0,T)$ de modo que a solução de (3.2) satisfaça a identidade (3.97).

Isso conclui a prova do Teorema 3.2.

□

Agora, abordaremos considerações acerca do sistema de controle (3.1).

Observação 3.1. (EQUAÇÃO DE KdV COMO OPERADOR SOBRE $\mathbb{R}$)

Nas mesmas condições do Lema 1.2, devemos nos perguntar porque o operador

$$A\varphi = -\varphi_x - \varphi_{xxx}$$

é definido em um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Isto segue do seguinte fato. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ *e* $\varphi \in H^3((0,L);\mathbb{C})$, *com* $\varphi \neq 0$, *satisfazendo (1.39)-(1.8) então* φ *é auto-função de* A *com autovalor associado* λ, *é solução da equação diferencial*

$$\frac{d}{dt}\varphi = A\varphi := -\varphi_x - \varphi_{xxx} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_t + \varphi_x + \varphi_{xxx} = 0.$$

Além disso, é válido que

$$\lambda \in i\mathbb{R}.$$

Realmente, usando integral por partes e as condições de bordo e fronteira (1.8), temos duas afirmações a seguir.

Para $z \in \mathbb{C}$, *tem-se* $z = \mathcal{R}(z) + i\mathcal{I}m(z)$ *e* $\overline{z}$ *é o conjugado complexo de* z. *Sejam* $\varphi_1, \varphi_2 : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ *de modo que*

$$\varphi(x) := \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) \in \mathbb{C},\ \forall x \in [0,L].$$

O conjugado complexo é $\overline{\varphi} = \varphi_1(x) - i\varphi_2(x)$, *o quadrado da norma é* $|\varphi|^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$, *e ainda*

(i) $\quad \varphi_x := \varphi_1' + i\varphi_2'$ *e* $\overline{\varphi_x} := \varphi_1' - i\varphi_2'$,

(ii) $\quad \varphi_{xxx} := \varphi_1''' + i\varphi_2'''$ *e* $\overline{\varphi}_{xxx} := \varphi_1''' - i\varphi_2'''$.

Afirmação 3.1.

$$\int_0^L \overline{\varphi}\varphi_x dx = -\int_0^L \varphi\overline{\varphi}_x dx = i\mathcal{I}m \int_0^L \overline{\varphi}\varphi_x dx \quad \in i\mathbb{R}; \tag{3.98}$$

- *Prova de (3.98):*

$$\begin{aligned}
\int_0^L \overline{\varphi}\varphi_x dx &= \int_0^L (\varphi_1 - i\varphi_2)(\varphi_1' + i\varphi_2')dx \\
&= \int_0^L (\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2') + i(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1')dx \\
&= \int_0^L \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + i(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1')dx \\
&= \int_0^L \frac{d}{dx}\frac{1}{2}|\varphi|^2 + i(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1')dx \\
&= \int_0^L -\frac{d}{dx}\frac{1}{2}|\overline{\varphi}|^2 - \overline{i(\varphi_2\varphi_1' - \varphi_1\varphi_2')}dx \\
&= \int_0^L -(\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2') - \overline{i(\varphi_2\varphi_1' - \varphi_1\varphi_2')}dx = -\int_0^L \varphi\overline{\varphi}_x dx.
\end{aligned}$$

Afirmação 3.2.

$$\int_0^L \overline{\varphi}\varphi_{xxx}dx = -\int_0^L \varphi\overline{\varphi}_{xxx}dx = i\mathcal{I}m\int_0^L \overline{\varphi}\varphi_{xxx}dx \quad \in i\mathbb{R}, \tag{3.99}$$

- *Prova de (3.99) é de modo análogo.*

Agora, tomando a equação de (1.39) e multiplicando por $\overline{\varphi}$ *em* $[0, L]$*, fica*

$$A\varphi = -\varphi_x - \varphi_{xxx} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda\varphi = -\varphi_x - \varphi_{xxx},$$

$$\begin{aligned}
\lambda\varphi\overline{\varphi} &= -\overline{\varphi}(\varphi_x + \varphi_{xxx}), \qquad (\texttt{multiplicando por } \overline{\varphi})\\
\int_0^L \lambda\varphi\overline{\varphi}dx &= -\int_0^L \overline{\varphi}(\varphi_x + \varphi_{xxx})dx, \quad (\texttt{integrando em } [0, L])\\
\int_0^L \lambda\varphi\overline{\varphi}dx &= -\int_0^L \overline{\varphi}\varphi_x dx - \int_0^L \overline{\varphi}\varphi_{xxx}dx, \quad (\texttt{usando } \ (3.98) \text{ e } (3.99))\\
\lambda\int_0^L \varphi\overline{\varphi}dx &= -i\mathcal{I}m\int_0^L \overline{\varphi}\varphi_x dx - i\mathcal{I}m\int_0^L \overline{\varphi}\varphi_{xxx}dx,\\
\lambda\int_0^L |\varphi|^2 dx &= -i\mathcal{I}m\int_0^L \overline{\varphi}(\varphi_x + \varphi_{xxx})dx.
\end{aligned}$$

Portanto, devemos ter $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Observação 3.2. (ESPAÇO DE FUNÇÕES CONTROLE) *Seja* $T > 0$*. Para que o sistema de controle (3.1) seja controlável, vamos fixar* $L \in (0, \infty) - \mathcal{N}$*.*

Sejam dados $y^0 \in L^2(0, L)$ *e* $y^1 \in L^2(0, L)$*, respectivamente, os estados inicial e final. Considerando* $\mathcal{U}$ *como o conjunto de todas as funções controle* $u \in L^2(0, T)$ *tais que a solução* $y \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ *do problema de Cauchy*

$$\begin{cases}
y_t + y_x + y_{xxx} = 0,\\
y(t, 0) = y(t, L) = 0, \ \ y_x(t, 0) = u(t), \forall t \in (0, T),\\
y(0, x) = y^0(x), \forall x \in (0, L),
\end{cases}$$

satisfaz $y(T, x) = y^1(x), \forall x \in (0, L)$.

Mostra-se que $\mathcal{U}$ *é um subespaço linear fechado de* $L^2(0, T)$*. Pelo Teorema 3.2, temos que* $\mathcal{U} \neq \emptyset$*. Portanto, existe um único* $\overline{u} = \overline{u}_{\{y^0, y^1\}} \in \mathcal{U}$ *tal que*

$$\overline{u} \in \mathcal{U} \ \text{ e } \ \|\overline{u}\|_{L^2(0,T)} = \inf\{\|u\|_{L^2(0,T)}; u \in \mathcal{U}\}.$$

Além disso, ainda pelo Teorema 3.2 e pelo teorema 3.1, existe $C > 0$ *tal que*

$$\|\overline{u}_{\{y^0, y^1\}}\|_{L^2(0,T)} \leq C(\|y^0\|_{L^2(0,L)} + \|y^1\|_{L^2(0,L)}). \tag{3.100}$$

É claro que o mapa $(y^0, y^1) \in L^2(0, L)^2 \longmapsto \overline{u}_{\{y^0, y^1\}} \in L^2(0, T)$ *é linear e, além disso, (3.100) nos diz que o mapa é limitado e, portanto, contínuo.*

Capítulo 4

Controle Exato para a Equação não-Linear de Kortweg-de Vries em um Domínio Limitado

Neste capítulo, vamos abordar o problema de controlabilidade em torno de algum ponto de equilíbrio da equação diferencial parcial de KdV não-linear, porém, desde que o sistema de controle linearizado em torno desse equilíbrio seja controlável.

O texto base da controlabilidade não linear, aqui desenvolvido, pode ser consultado em [9].

4.1 Boa Colocação

Já vimos que o sistema de controle modelado pela equação linearizada de KdV, em torno do ponto de equilíbrio $(y, u) = (0, 0)$, é dado por

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, \quad t \in (0, T), \ \ x \in (0, L); \\ y(t, 0) = y(t, L) = 0, \quad y_x(t, L) = h(t) \ \ t \in (0, T), \quad (h \in L^2(0, T)) \end{cases} \tag{4.1}$$

onde, no tempo $t \in (0, T)$, o controle do sistema (4.1) é a função $h : (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$, e o estado da trajetória é a função $y(t, .) : (0, L) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Pelo Teorema 3.2, o sistema de controle (4.1) com a condição de valor inicial

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = 0, \quad t \in (0,T), \;\; x \in (0,L); \\ y(t,0) = y(t,L) = 0, \quad y_x(t,L) = h(t) \;\; t \in (0,T), \quad (h \in L^2(0,T)) \\ y(0,x) = y^0, x \in (0,L), \end{cases} \tag{4.2}$$

é controlável desde que

$$L \notin \mathcal{N} := \left\{ 2\pi\sqrt{\frac{j^2 + l^2 + jl}{3}}; \;\; j,l \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}. \tag{4.3}$$

A seguir vamos reescrever a Proposição 3.1 obtida no capítulo anterior, porém, numa linguagem de operadores, isso irá facilitar a construção de um certo operador mais adiante.

Proposição 4.1. *Seja $T > 0$ e $L > 0$. Existe um único operador linear $\Psi : L^2(0,L) \times L^2(0,T) \longrightarrow B$ tal que $y^0 \in D(A)$ e $h \in C^2([0,T])$ com $h(0) = 0$, e $\Psi(y^0, h)$ é a única solução de (4.2).*

Agora, o nosso objetivo será buscar explicar como obter a controlabilidade local para a equação não-linear por meio de um ponto fixo estratégico.

4.2 Controlabilidade (não-Linear)

Vamos considerar, inicialmente, o sistema de controle não-linear, que é modelado pela equação não-linear de KdV não-homogênea, dado por

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} = f, \quad t \in (0,T), \;\; x \in (0,L); \\ y(t,0) = y(t,L) = 0, \quad y_x(t,L) = h(t) \;\; t \in (0,T). \quad (h \in L^2(0,T)) \end{cases} \tag{4.4}$$

onde, no tempo $t \in (0,T)$, o controle do sistema (4.1) é a função $h : (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$, o estado da trajetória é a função $y(t,.) : (0,L) \longrightarrow \mathbb{R}$, e $f \in L^1((0,T), L^2(0,L))$ é o termo não-linear.

Note que consideramos ainda (4.4) com o sistema de controle linearizado da mesma, em torno de algum ponto de equilíbrio, seja controlável.

O próximo passo é abordar o problema Cauchy associado ao sistema de controle (4.1), usando uma condição de valor inicial, de modo que permita fazer o estudo da solução e buscar as condições de controle local como segue.

Considere o seguinte problema de controle não-linear homogêneo, com condições de bordo e de fronteira,

$$\begin{cases} y_t + y_x + yy_x + y_{xxx} & = 0 \\ y(t,0) = y(t,L) & = 0 \\ y_x(t,L) & = h(t) \quad (h \in L^2(0,T)) \\ y(0,x) & = y_0(x). \end{cases} \tag{4.5}$$

Vamos desenvolver a prova da controlabilidade exata do sistema (4.5) em uma vizinhança do estado nulo. Mais precisamente, provaremos que:

Dados $L > 0$ e $T > 0$, existe um raio $r_0 > 0$ tal que, para todo $y_0, y_T \in L^2(0,L)$ com $\|y_0\|_{L^2(0,L)} < r_0, \|y_T\|_{L^2(0,L)} < r_0,$ podemos obter $y \in B := C\Big(([0,T], L^2(0,L)) \cap L^2(0,T,H^1(0,L))\Big)$ tal que

(i) $= y_t = -(y_x + yy_x + y_{xxx})$ em $\mathcal{D}'(0,T,H^{-2}(0,L))$.

(ii) $y(0,\cdot) = y_0, y(T,\cdot) = y_T;$

Observe que temos $y \in B$, $y_x \in L^2(0,T,L^2(0,L)),$ $y_{xxx} \in L^2(0,T,H^{-2}(0,L))$ e, além disso, $yy_x \in L^1(0,T,L^2(0,L))$ - que será consequência da Proposição 4.2 logo adiante.

Decorre que $y_x + yy_x + y_{xxx} \in L^1\left(0,T,H^{-2}(0,L)\right)$. Se $L \in \mathcal{N}$, então a segunda expressão de (4.5) vale em $L^2(0,T)$ e a terceira expressão de (4.5) vale no sentido mais fraco para algum controle $h \in L^2(0,T)$.

Para resolvermos (4.5) escrevemos $y = S(t)y_0 + y_1 + y_2$ onde $(S(t))_{t\geq 0}$ denota o semigrupo associado ao operador A definido em (1.55). Neste caso, y_1 e y_2 são, respectivamente, as soluções dos dois problemas de Cauchy a seguir.

Problema homogêneo:

$$\begin{cases} y_{1t} + y_{1x} + y_{1xxx} & = 0 \\ y_1(t,0) = y_1(t,L) & = 0 \\ y_{1x}(t,L) & = h(t) \\ y_1(0,x) & = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Problema não-homogêneo:

$$\begin{cases} y_{2t} + y_{2x} + y_{2xxx} & = f \\ y_2(t,0) = y_2(t,L) & = 0 \\ y_{2x}(t,L) & = 0 \\ y_2(0,x) & = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Em (4.7), fazendo $f = -yy_x$, considere $\Psi_1 \in L^2(0,T) \longmapsto y_1 \in B$ o fluxo que associa o controle h com a solução de (4.6). Segue da Proposição 4.1 que o operador Ψ_1 é uma aplicação linear.

Proposição 4.2. *Os resultados a seguir são válidos a respeito do problema* (4.7)*.*

(i) *Se* $y \in L^2(0,T,H^1(0,L))$*, então* $yy_x \in L^1(0,T,L^2(0,L))$ *e também aplicação* $y \mapsto yy_x$ *é contínua.*

(ii) *Para* $f \in L^1(0,T,L^2(0,L))$ *a solução* y_2 *de* (4.7) *pertence a* B*. Além disso, a aplicação* $\psi_2 : f \mapsto y_2$ *é contínua.*

Observação 4.1. *Observe que, usando o resultado das preliminares em* (1.50)*, se* $f \in L^1(0,T,L^2(0,L))$*, então a solução* y_2 *do problema não-homogêneo* (4.7) *é dada pela fórmula de Duhamel*

$$y_2(t,.) := \int_0^t S(t-s)f(s,.)ds.$$

Demonstração. Vamos separar as duas provas.

(i) Sejam $y, z \in L^2(0,T,H^1(0,L))$. Denote por C_1 a constante que aparece na imersão de Sobolev $H^1(0,L) \hookrightarrow L^\infty(0,L)$.

Ao aplicar a desigualdade triangular e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \|yy_x - zz_x\|_{L^1(0,T,L^2(0,L))} &= \|yy_x - zy_x + zy_x - zz_x\|_{L^1(0,T,L^2(0,L))} \\ &\le \int_0^T \|(y-z)y_x(t,.)\|_{L^2(0,L)}dt + \int_0^T \|z(y_x - z_x)(t,.)\|_{L^2(0,L)}dt \\ &\le \int_0^T \|(y-z)(t,.)\|_{L^\infty(0,L)}\|y_x(t,.)\|_{L^2(0,L)}dt \\ &\quad + \int_0^T \|z(t,.)\|_{L^\infty(0,L)}\|(y_x - z_x)(t,.)\|_{L^2(0,L)}dt \end{aligned}$$

$$\leq C_1\bigg(\int_0^T \|(y-z)(t,.)\|_{H^1(0,L)}\|y(t,.)\|_{H^1(0,L)}dt.$$
$$+\int_0^T \|z(t,.)\|_{H^1(0,L)}\|(y{-}z)(t,.)\|_{H^1(0,L)}dt\bigg)$$
$$\leq C_1\Big(\|y\|_{L^2(0,T,H^1(0,L))}.+\|z\|_{L^2(0,T,H^1(0,L))}\Big)\|y-z\|_{L^2(0,T,H^1(0,L))}. \tag{4.8}$$

Tomando $z = 0$ nesta última expressão, obtemos que $yy_x \in L^1(0,T,L^2(0,L))$. Além disso, nessa mesma expressão, fazendo z tender a y, obtemos a continuidade da aplicação $y \mapsto yy_x$.

(ii) Usando

$$\left\|\chi_{[0,t]|}(s)S(t-s)f(s,.)\right\|_{L^2(0,L)} \leq \|f(s,.)\|_{L^2(0,L)} \in L^1(0,T),$$

segue do Teorema da convergência dominada Lebesgue que a solução

$$y_2(t,)=\int_0^t S(t-s)f(s,)ds$$

pertence a $C([0,T],L^2(0,L))$. Além disso, para qualquer $t\in[0,T]$, temos que

$$\|y_2(t,.)\|_{L^2(0,L)} \leq \int_0^l \|f(s,.)\|_{L^2(0,L)}ds \leq \|f\|_{L^1(0,T,L^2(0,L))}. \tag{4.9}$$

Então, a aplicação linear $f\in L^1(0,T,L^2(0,L)) \mapsto y_2 \in C([0,T],L^2(0,L))$ é contínua.

Agora, vamos provar que esta aplicação de $L^1(0,T,L^2(0,L))$ em $L^2(0,T,H^1(0,L))$ está bem definida e é contínua. Para tanto, precisamos provar que:

$$\exists C_2>0, \text{tal que} \quad \forall f\in C^1\left([0,T],L^2(0,L)\right),$$
$$\|y_{2x}\|_{L^2((0,T)\times(0,L))} \leq C_2\|f\|_{\,L^2(0,T,L^2(0,L))]}.$$

Multiplicando a equação de KdV em (4.7) por xy_2, e integrando ambos os lados sobre a região $[0,T]\times[0,L]$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L xy_2 f dxdt &= \int_0^T\int_0^L xy_2(y_{2t}+y_{2x}+y_{2xxx})dxdt\\ &= \int_0^T\int_0^L (xy_2y_{2t}+xy_2y_{2x}+xy_2y_{2xxx})dxdt\\ &= \int_0^L\int_0^T xy_2y_{2t}dtdx+\int_0^T\int_0^L xy_2y_{2x}dxdt+\int_0^T\int_0^L xy_2y_{2xxx}dxdt.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Para fazer integração por partes na equação integral acima, vamos separar as três integrais da soma como seguem.

$$(i) \quad \int_0^L \int_0^T x y_2 y_{2t} dt dx = \int_0^L x \frac{(y_2)^2}{2}\bigg|_0^T dx = \int_0^L x \frac{y_2^2(T,x)}{2} dx.$$

$$(ii) \quad \int_0^T \int_0^L x(y_2 y_{2x}) dx dt = \int_0^T \left[x\frac{(y_2)^2}{2}\bigg|_0^L - \int_0^L \frac{(y_2)^2}{2} \right] dt = -\int_0^T \int_0^L \frac{y_2^2(t,x)}{2} dt.$$

$$(iii) \quad \int_0^T \int_0^L x y_2 (y_{2xxx}) dx dt = \int_0^T \left[x y_2 y_{2xx}\bigg|_0^L - \int_0^L (x y_2)_x y_{2xx} dx \right] dt$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^T \int_0^L (x y_2)_x y_{2xx} dx dt \quad \texttt{(derivando)} \\
&= -\int_0^T \int_0^L (y_2 + x y_{2x}) y_{2xx} dx dt \\
&= -\int_0^T \int_0^L y_2 y_{2xx} + x y_{2x} y_{2xx} dx dt \\
&= -\int_0^T \int_0^L y_2 y_{2xx} dx dt - \int_0^T \int_0^L (x y_{2x}) y_{2xx} dx dt \\
&= A + B,
\end{aligned}$$

onde, por um lado,

$$A = -\int_0^T \int_0^L y_2 y_{2xx} dx dt = -\int_0^T \left[y_2 y_{2x}\bigg|_0^L - \int_0^L y_2^2 dx \right] dt = \int_0^T \int_0^L y_{2x}^2(t,x) dx dt,$$

e por outro,

$$B = -\int_0^T \int_0^L (x y_{2x}) y_{2xx} dx dt = -\int_0^T \left[(x y_{2x}) y_{2x}\bigg|_0^L - \int_0^L (x y_{2x})_x y_{2x} dx \right] dt. \quad (4.11)$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^T \int_0^L (x y_{2x})_x y_{2x} dx dt \\
&= \int_0^T \int_0^L (y_{2x} + x y_{2xx}) y_{2x} dx dt \\
&= \int_0^T \int_0^L y_{2x}^2(t,x) dx dt + \int_0^T \int_0^L x y_{2x} y_{2xx} dx dt.
\end{aligned}$$

Usando (4.11), resulta que

$$B = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L y_{2x}^2(t,x) dx dt.$$

Então, a expressão em (iii) fica

$$
\begin{aligned}
(iii) \quad \int_0^T \int_0^L x y_2(y_{2xxx}) dx dt &= A + B \\
&= \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^L y_{2x}^2(t,x) dx dt.
\end{aligned}
$$

Retomando a soma dos termos (i), (ii) e (iii) numa mesma equação, então a equação integral em (4.11) fica

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L x(f y_2)(t,x) dx dt = \int_0^L x \frac{y_2^2(T,x)}{2} dx - \int_0^T \int_0^L \frac{y_2^2(t,x)}{2} dx dt \\
+ \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^L y_{2x}^2(t,x) dx.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Logo, usando a desigualdade (4.9) na equação integral (4.12), temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L y_{2x}^2(t,x) dx dt &\leq \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L y_2^2(t,x) dx dt + \frac{2}{3} L \int_0^T \int_0^L \|f(t,\cdot)\|_{L^2(0,L)} \|y_2(t,\cdot)\|_{L^2(0,L)} dx dt \\
&\leq \frac{1}{3} \|f\|^2_{L^1(0,T,L^2(0,L))} + \frac{2}{3} L \|f\|_{L^1(0,T,L^2(0,L))} \|y_2\|_{C([0,T],L^2(0,L))} \\
&\leq \frac{(T+2L)}{3} \|f\|^2_{L^1(0,T,L^2(0,L))}.
\end{aligned}
$$

Isso conclui a prova da Proposição 4.2. □

Como consequência da controlabilidade da equação linearizada de KdV, apresentamos a seguir o teorema principal de controlabilidade não-linear.

Teorema 4.1. *Seja $T > 0$ e $L > 0$. Então existe $r_0 > 0$ tal que, para todo $y^0, y^T \in L^2(0,L)$, com $\|y^0\| < r_0$ e $\|y^T\| < r_0$, existe solução*

$$
y \in C([0,T], L^2(0,L) \cap L^2(0,T,H^1(0,L)) \cap W^{1,1}(0,T,H^{-2}(0,L))
$$

do sistema

$$
\begin{cases}
y_t = -(y_x + y y_x + y_{xxx}) \text{ em } D'(0,T,H^{-2}(0,L)); \\
y(\cdot,0) = 0 \text{ em } L^2(0,T),
\end{cases}
\tag{4.13}
$$

satisfazendo $y(\cdot,0) = y^0$, e $y(T,\cdot) = y^T$.

Se, além disso, tivermos $L \notin \mathcal{N}$, então podemos acrescentar a condição de bordo $y(\cdot,L) = 0$ em $L^2(0,L)$, e tomar $y_x(\cdot,L)$ como a função controle.

Demonstração. Vamos primeiro considerar que $L \notin \mathcal{N}$. Mostraremos que para $T > 0$, existe $r_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que $\|y\|_{L^2(0,L)} < r_0$ e $\|y\|_{L^2(0,L)} < r_0$, o estado y^T pode ser alcançado a partir de y^0 pela equação não-linear de KdV.

Sejam y^0, y^T em $L^2(0,L)$ tal que $\|y^0\|_{L^2(0,L)}, \|y^T\|_{L^2(0,L)} \leq r$, onde r será escolhido mais adiante.

Considere, quando $y^0 = 0$, via Princípio da Unicidade de Hilbert como visto na Seção 1.8, a aplicação linear

$$\Gamma : y^T \in L^2(0,L) \longrightarrow u_x(\cdot, L) \in L^2(0,T).$$

Seja F denotando o operador não-linear definido por

$$F : L^2(0,T,H^1(0,L)) \longrightarrow B$$

$$y \longmapsto F(y) := S(\cdot)y^0 + \Psi_1 \circ \Gamma(y^T - S(T)y^0 + \Psi_2(yy_x)(T,\cdot)) + \Psi_2(-yy_x). \tag{4.14}$$

F está bem definida e é contínua pelas Proposições 4.1, 4.2, e 3.2.

Por construção, cada ponto fixo de F verifica a equação de KdV não-linear no problema de Cauchy (4.5), no sentido das distribuições, com a condição de bordo $y(0,\cdot) = y^0$, e valendo $y(T,\cdot) = y^T$.

Para provar que F possui um ponto fixo, usaremos o teorema de contração do ponto fixo de Banach na restrição de F a uma bola fechada $\overline{B(0,R)}$ em $L^2(0,T,H^1(0,L))$, para certo $R > 0$ que será escolhido mais adiante.

Com este objetivo, precisamos provar os seguintes fatos:

$$(i) \qquad F(\overline{B(0,R)}) \subset \overline{B(0,R)}, \tag{4.15}$$

$$(ii) \qquad \exists C_3 \in (0,1), \forall y, z \in \overline{B(0,R)} \text{ com } \|F(y) - F(z)\| \leq C_3\|y - z\|,$$

$$\text{onde } \|\cdot\| \text{ denota a norma usual em } L^2(0,T,H^1(0,L)).$$

Agora, seja K_1 (respectivamente K_2, K_2') a norma de Ψ_1, (respectivamente Ψ_2, Ψ_2) como uma aplicação sobrejetiva de $L^2(0,L)$ (respectivamente $L^1(0,T,L^2(0,L))$) em $L^2(0,T,H^1(0,L))$ (respectivamente $L^2(0,T,H^1(0,L))$, $C([0,T],L^2(0,L))$), e K denota a norma de Γ de $L^2(0,L)$ em $L^2(0,T)$.

Defina $K_3 = \sqrt{\frac{4T+L}{3}}$, e considere $y, z \in L^2(0,T,H^1(0,L))$ satisfazendo

$$\|y\| \leq R, \qquad \|z\| \leq R.$$

Então, usando a Proposição 3.2, e a desigualdade (4.8) no operador F em (4.14), temos

$$\|F(y)\| \leq \sqrt{\frac{4T+L}{3}}\|y^0\| + K_1K(\|y^T\|_{L^2(0,L)} + \|y^0\|_{L^2(0,L)} + K_2'C_1\|y\|^2) + K_2C_1\|y\|^2$$
$$\leq C_1(K_2 + KK_1K_2')R^2 + (2K_1K + K_3)r.$$

A expressão (4.15) fornece a primeira condição sobre $R > 0$, e $r > 0$.

$$C_1(K_2 + KK_1K_2')R^2 + (2K_1K + K_3)r < R. \tag{4.16}$$

Agora, escrevemos

$$F(y) - F(z) = \Psi_2(zz_x - yy_x) + \Psi_1 \circ \Gamma(\Psi_2(zz_x - yy_x)(T,\cdot)). \tag{4.17}$$

Então

$$2C_1(K_2 + KK_1K_2')R < 1. \tag{4.18}$$

Seja $R > 0$ um número real que satisfaz (4.18), então (4.16) é válido se tomar

$$r := \frac{R}{2(2K_1K + K_3)}. \tag{4.19}$$

Escolhendo

$$r_0 := \frac{1}{4C_1(2K_1K + K_3)(K_2 + KK_1K_2')}. \tag{4.20}$$

Agora, veja que fazendo $r \longrightarrow r_0$, temos que

$$R \longrightarrow \frac{1}{2C_1(K_2 + KK_1K_2')}.$$

Segue-se que, se $\|y^0\| < r_0$, então todo y^0 e y^T, com $\|y^0\| < r_0$ e $\|y^T\| < r_0$, pode ser alcançado por uma solução da equação de KdV não-linear partindo de y^0. A prova do teorema é alcançada quando $L \notin \mathcal{N}$.

Agora, se for $L \in \mathcal{N}$, basta considerar o caso em que $\overline{L} > L$ tal que $\overline{L} \notin \mathcal{N}$, e aplicar o teorema para as funções $\overline{y^0}$, $\overline{y^T} \in L^2(0,\overline{L})$ em que $\overline{y^0}$, $\overline{y^T}$ denota os prolongamentos do estado nulo até os estados y^0, $y^T \in L^2(0,\overline{L})$, e então restringir a solução $\overline{y}$ sobre o conjunto $(0,T) \times (0,L)$. Isso conclui a prova do Teorema 4.1.

$\square$

Bibliografia

[1] Jean-Michel Coron. *Control and Nonlinearity*. American Mathematical Society, 2007. ISBN: 978-0-8218-3668-2. URL: `www.ams.org/bookpages/surv-136`.

[2] Gerard B. Folland. *Real Analysis, Modern Techniques end their*. Jhon Wiley & Sons, Inc, 1999. ISBN: 0-471-31716-0.

[3] *Introductory Functional Analysis with Applications*. Vol. 17. Wiley Classics Library, 1991. ISBN: 0-471-50731-8.

[4] Gunter Lumer e Ralph S Phillips. “Dissipative operators in a Banach space.” Em: (1961).

[5] André Costa Marques. “Noções de Teoria das Distribuições e de Sobolev, Uma Introdução Aos Espaços”. Em: (2018).

[6] Luis Adauto da Justa Medeiros e MM Miranda. *Espaços de Sobolev: Iniciaçao aos problemas elıticos nao homogêneos, Rio de Janeiro: UFRJ*. 2000.

[7] L. A. Medeiros M. Milla Miranda. *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos)*. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática, 2000. ISBN: 85-87674-03-X.

[8] Juan Amadeo Soriano Palomino, Marcelo Moreira Cavalcanti e Valéria Neves Domingos Cavalcanti. *SEMIGRUPOS LINEARES ENAO LINEARES E APLICACOES*. 2016.

[9] Lionel Rosier. “Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain”. Em: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 2 (1997), pp. 33–55. URL: `URL:%20http://www.emath.fr/cocv/`.

[10] Walter Rudin. “Functional analysis”. Em: *McGraw-Hill.inc* (1973).

[11] Jacques Simon. “Compact sets in the space Lp (O, T; B)”. Em: *Annali di Matematica pura ed applicata* 146 (1986), pp. 65–96.