

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PÓS – GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA

JOSÉ GILSON DE MELO NASCIMENTO NETO

**SOLUÇÕES EXATAS DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ PARA
CAMPOS DE SPECKLES NÃO RAYLEIGH NÃO DIFRATIVOS**

Maceió
2022

JOSÉ GILSON DE MELO NASCIMENTO NETO

**SOLUÇÕES EXATAS DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ PARA
CAMPOS DE SPECKLES NÃO RAYLEIGH NÃO DIFRATIVOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Alagoas (UFAL), como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em física da matéria condensada, para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Alcenísio José de Jesus Silva

Maceió

2022

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

N244s Nascimento Neto, José Gilson de Melo.
Soluções exatas da equação de Helmholtz para campos de speckles não
Rayleigh não difrativos / José Gilson de Melo Nascimento Neto. – 2022.
107 f. : il. color.

Orientador: Alcenísio José de Jesus Silva.
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Física. Programa de Pós-Graduação em Física. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 103-107.

1. Speckle óptico. 2. Speckle Rayleigh. 3. Speckle não Rayleigh. I.
Título.

CDU: 535

“Quanto mais eu estudo a natureza, mais me
maravilho com a obra do Criador.”

(Louis Pasteur)

Agradecimentos

A Deus por cada vitória ao longo desse percurso e pelas derrotas, as quais me serviram de aprendizado. Ao meu pai Francisco José da Silva que está na presença de Deus e sempre me aconselhou a estudar. A minha mãe Sílvia Maria Melo Nascimento Silva por sempre me apoiar nas minhas escolhas e nunca desistir de mim. A minha irmã Francielli Maria Melo Nascimento Silva por me motivar e acreditar que tudo daria certo, mesmo quando eu não acreditava.

A todos os meus outros familiares, em especial a minha avó Maria Dilza Melo Nascimento por suas orações em todos os meus momentos de faculdade. Aos meus padrinhos e madrinhas, Flavia Eudócia Melo Nascimento, Zanelli Antônio Filho e Maria Helena Melo Nascimento que sempre estiveram presentes nessa caminhada com seus conselhos e suportes. Ao meu grande amigo e irmão de fé, Padre Reinaldo Moraes por seus conselhos espirituais e terrenos. Também dedico este trabalho a meu afilhado Rodolfo Cavalcanti.

Quero agradecer aos amigos e colegas do Instituto de Física (IF), entre eles, Leonardo Clemente, Debora Melo, Jefferson da Rocha e João Paulo. Aos colegas de turma do Programa de Pós-graduação, que sempre buscaram se ajudar nos momentos difíceis das matérias ministradas de maneira remota. Também aos professores que sempre buscaram compartilhar o melhor do conhecimento no modo remoto. A todos os integrantes e professores do Grupo de Óptica e Nanoscopia, entre eles, Eduardo Jorge da Silva Fonseca, Samuel Teixeira de Souza, José Carlos, Danilo Gomes, Laura Maísa, Jeniffer Rotandaro, Ana Ribeiro e Jonathas Matias.

Ao meu orientador Alcenísio José de Jesus Silva por sempre estar presente para me tranquilizar e me guiar no melhor caminho para a conclusão tanto da graduação como do mestrado.

Resumo

O Espalhamento de uma luz coerente por um meio desordenado, em geral, gera speckles exibindo estatísticas Rayleigh. A pesquisa sobre padrões de speckle foi desenvolvida ao longo dos anos após a invenção do laser. No caso especial de speckles não Rayleigh, basicamente seus padrões mantêm a estrutura espacial de um padrão granular aleatório, mas a distribuição de probabilidade da intensidade se desvia da estatística Rayleigh. Em nosso trabalho, propomos um método fácil e eficiente para gerar uma faixa contínua de valores de contraste correspondentes a speckles sub Rayleigh e super Rayleigh de campos exatos de speckles não difrativos não Rayleigh (ENRND). Os campos de speckle gerados são soluções exatas da equação escalar de Helmholtz. Usamos um algoritmo computacional para controlar a fase relativa das ondas planas de uma decomposição de ondas planas dos campos de speckle. Portanto, fomos capazes de gerar padrões de speckle mantendo características não difrativas e estatísticas não Rayleigh durante a propagação.

Palavras-chave: Speckle Rayleigh, speckle não Rayleigh, estatística de speckle, speckles ópticos, óptica estatística, algoritmo de otimização de fase.

Abstract

The scattering of coherent light by a disordered media generally generates speckles displaying Rayleigh statistics. Research on speckle patterns has developed over the years after the invention of the laser. In the special case of non-Rayleigh speckles, basically their patterns maintain a spatial structure of a random granular, but the intensity probability distribution deviates from the Rayleigh statistics. In our work, we propose an easy and efficient method to generate a continuous range of contrast values corresponding to sub-Rayleigh and super-Rayleigh for the exact Non-Rayleigh Non-Diffracting (ENRND) speckles fields. The generated Speckle fields are solutions of the Helmholtz scalar equation. We use a computer to track the relative phase of plane waves from a decomposition of plane waves from speckle fields. Therefore, it was possible to generate patterns without losing non diffraction characteristics and keeping non-Rayleigh statistics during the propagation.

Keywords: Rayleigh speckle, non-Rayleigh speckle, speckle statistics, optical speckles, statistical optics, phase optimization algorithm.

Sumário

| | |
|---|-----|
| Introdução geral | 8 |
| Capítulo 1 | 11 |
| Fenômeno de <i>Speckle</i> | 11 |
| 1.1. <i>Speckle</i> como um fenômeno de caminhada aleatória | 15 |
| 1.2. Estatísticas de primeira ordem da intensidade e fase | 27 |
| 1.3. Coerência espacial | 30 |
| Capítulo 2 | 36 |
| Geração de <i>speckle</i> não Rayleigh usando o Modulador Espacial de Luz | 36 |
| 2.1. Geração de <i>speckles</i> com estatística de sub Rayleigh à super Rayleigh | 38 |
| 2.2. Personalizando <i>speckles</i> com distribuição de intensidade Weibull | 45 |
| 2.3. Customizando campos de <i>speckle</i> com diferentes funções densidade de probabilidade da intensidade | 51 |
| 2.4. Geração de <i>speckles</i> não Rayleigh não difrativos | 59 |
| Capítulo 3 | 66 |
| Soluções exatas para <i>speckles</i> não difrativos não Rayleigh | 66 |
| 3.1. Campos de <i>speckles</i> não Rayleigh não difrativos | 67 |
| 3.2. Metodologia e Procedimentos Experimentais | 78 |
| 3.2.1. Holografia e configuração experimental | 78 |
| 3.2.2. Resultados e discussões | 87 |
| Conclusão geral | 101 |
| Bibliografia | 103 |

Introdução geral

A distribuição de intensidade com característica aleatória, mais conhecida como padrão de speckle é formada quando uma luz coerente é refletida ou propagada através de um meio com características aleatórias [1-3]. Como trataremos nesse trabalho de lasers com luz coerente, as propriedades estatísticas dos padrões de speckle vão depender da coerência da luz refletida do Modulador Espacial de Luz (MEL). Onde o MEL fará o papel de uma superfície rugosa, alterando a fase do feixe incidente para gerar o padrão de speckle desejado, seja o padrão de speckle totalmente desenvolvido, mais conhecido como speckle Rayleigh, ou padrões de speckle com estatística não Rayleigh.

Desde as primeiras observações do fenômeno de speckle em laboratório, pesquisas sobre padrões de speckle foram desenvolvidas. Então, trabalhos começaram ser publicados sobre aplicações dos speckles Rayleigh com caráter fundamental [4-11]. Além disso, algumas propriedades dos speckles Rayleigh foram estudadas e aplicadas, como o recurso de auto reconstrução na presença de obstáculos [12], semelhantes à propriedade de autocura [13,14] dos feixes de Bessel [15]. Propriedade que permite que os speckles sejam usados na imagem de múltiplos planos sobrepostos em uma amostra espalhadora [16], com aplicações diretas em sistema de biomicroscopia, e na transmissão de dados.

Outra aplicação interessante do speckle Rayleigh é no campo da astronomia, pois no processo de imagem dos telescópios os lasers coerentes utilizados para observações astronômicas no telescópio acabam sofrendo espalhamento na atmosfera, originando o fenômeno de speckle. Então, na área da astronomia, conhecer a distribuição de intensidade de speckle permite que uma técnica de processamento da imagem de interferometria de speckle seja usada para remover os efeitos de turbulência da atmosfera na imagem de um objeto astronômico. Com efeito, essa técnica vai produzir a imagem de um objeto com resolução no limite teórico de grandes telescópios [17].

Em paralelo com os trabalhos sobre speckles Rayleigh, ao longo dos anos os speckles começaram a ser estudados em regimes que fogem da estatística Rayleigh. No caso especial dos speckles não Rayleigh, basicamente seus padrões mantêm a estrutura espacial de um padrão granular aleatório, mas a intensidade altera a função densidade de probabilidade. O advento dos trabalhos sobre speckle não Rayleigh trouxe muitas aplicações, como em imagens fantasmas [18-19], o termo pode parecer estranho, mas basicamente essa técnica produz uma imagem de um objeto combinando informações de dois detectores de luz: um detector não tem resolução espacial, enquanto o outro detector de alta resolução não visualiza o objeto [20]. Além disso, os speckles não Rayleigh são usados também em sistemas de microscopia de iluminação estruturada para aumentar a resolução [21].

No capítulo 1 deste trabalho, descreveremos o fenômeno de speckle, o qual pode acontecer quando tratamos de lasers de luz coerente, e em situações mais próximas do nosso cotidiano com radares e ultrassom, mostrando que este fenômeno não está restrito a uma única parte do espectro da luz coerente e sim podendo acontecer em outras regiões do espectro eletromagnético. Também nesse primeiro capítulo, demonstraremos a descrição matemática do padrão de speckle, no qual a amplitude é representada pela função densidade de probabilidade (FDP) Rayleigh e a intensidade descrita pela FDP exponencial negativa. Abriremos uma seção nesse capítulo para falarmos da coerência espacial do padrão de speckle para chegarmos na correlação cruzada dos campos de speckle.

No capítulo 2, abriremos espaço para uma revisão bibliográfica para falar dos trabalhos mais relevantes durante esses anos que trataram da geração de speckle com estatística não Rayleigh utilizando o MEL. De modo que, espero ter tratado de maneira respeitosa com os resultados dos respectivos autores que serão mencionados durante esse capítulo. Conseqüentemente, muitos métodos foram propostos para gerar speckles não Rayleigh, como adaptar os speckles nos regimes super Rayleigh e sub Rayleigh, introduzindo correlação de alta ordem no campo do plano alvo [22]. Como também, personalizando a distribuição de Weibull na intensidade do padrão de speckle para obter os regimes sub e super Rayleigh ao propagar o speckle [23].

Discutiremos também no capítulo 2, outro trabalho que propõem customizar os padrões de speckle para outras estatísticas de intensidade, no qual é utilizado um método de Gerchberg-Saxton [24]. Onde a estatística dos campos customizados são revertidas para a estatística Rayleigh quando propagado o campo de speckle para longe do plano alvo [25-26]. Para finalizar o capítulo, abordaremos o último trabalho publicado recentemente com o intuito de otimizar as estatísticas de speckle em diferentes planos de propagação, onde foi desenvolvido um método para customizar speckles não Rayleigh não difrativos (NRND) codificando fases aleatórias no MEL, de modo que o campo de luz seja projetado em uma fenda em forma de anel para gerar os campos de speckles com características não difrativas [27].

No capítulo 3, mas não menos importante. Apresentaremos e discutiremos o nosso trabalho, onde propomos um método mais fácil e eficiente para gerar uma faixa contínua de valores de contraste correspondentes a speckles com estatística sub Rayleigh e super Rayleigh. Os campos de speckle gerados são soluções exatas da equação escalar de Helmholtz. Desenvolvemos um algoritmo computacional para controlar a fase relativa das ondas planas de uma decomposição de ondas planas dos campos de speckle. Portanto, fomos capazes de gerar padrões de speckle sem perder características não difrativas e mantendo as estatísticas não Rayleigh durante a propagação.

Portanto, ao longo desse capítulo abordaremos o conceito de feixes de luz não difrativos que são descritos matematicamente como uma somatória de ondas planas pela integral de Whittaker, que é solução exata da equação de Helmholtz. Mostraremos a teoria para os campos exatos de speckle não Rayleigh não difrativo (ENRND) e seus respectivos perfis de intensidade descritos de maneira teórica, e com uma análise ao longo da propagação usando o método de split step. Na parte experimental, descreveremos o que é holografia e o holograma utilizado no nosso experimento como também a configuração experimental. Na última seção, demonstraremos os padrões de intensidade dos campos de speckle ENRND obtidos experimentalmente. Faremos uma análise dos padrões de intensidade ao longo da propagação utilizando conceitos como a correlação de alta ordem e a correlação cruzada de intensidade dos campos de speckle ENRND. Por fim, apresentaremos as conclusões gerais do trabalho.

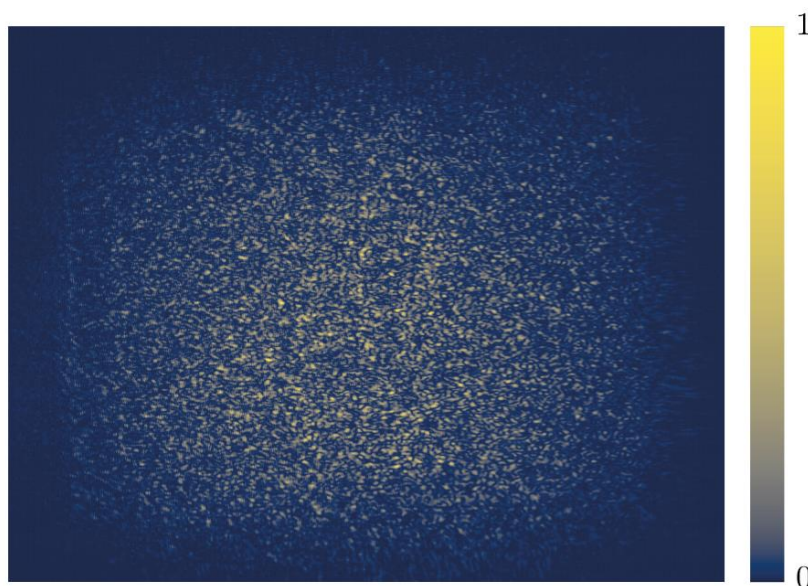
Capítulo 1

Fenômeno de *Speckle*

A luz de um laser coerente quando interage com objetos rugosos resulta em uma luz com aparência granular peculiar, comumente conhecida como padrão de *speckle*, figura 1. Esses complexos padrões foram catalogados e observados nas primeiras operações utilizando o primeiro laser de ondas contínuas de Hélio e Neônio (He-Ne) em 1960, que revelaram um fenômeno inesperado: objetos vistos em uma luz altamente coerente adquiriam uma aparência granular [1-3].

A estrutura dessa granularidade não tem relação direta com as propriedades macroscópicas do objeto iluminado, mas parece caótica e desordenada, com um padrão irregular que é descrito pelos métodos de teoria de probabilidade e estatística [3]. Esses padrões aleatórios ocorrem quando a rugosidade, seja sintética ou natural, tem dimensões na escala do comprimento de onda, afetando a ondas de diversas naturezas, incluindo ondas ultrassônicas, micro-ondas, ondas ópticas, raios x e ondas de matéria [28-33].

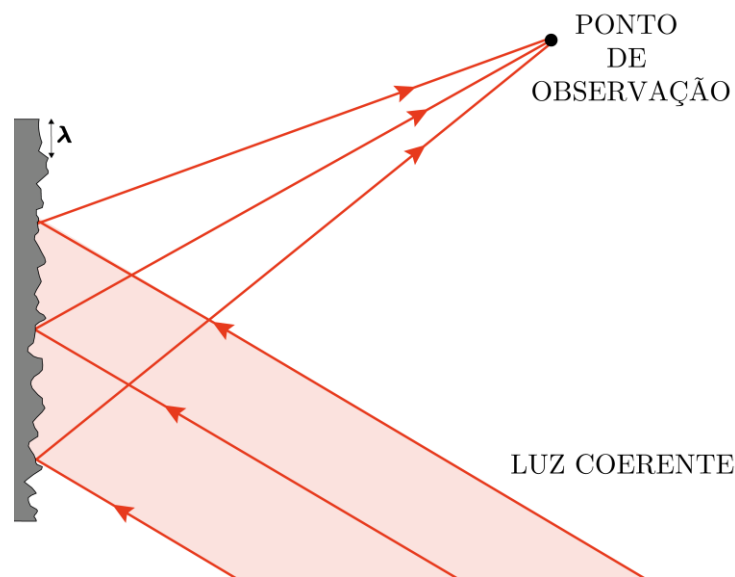
Figura 1: Padrão de speckle.



Fonte: Autor, 2022.

A onda refletida após iluminar uma superfície rugosa tem contribuições de muitas regiões de espalhamento independentes. Essa luz refletida pode ser propagada e observada num ponto distante, figura 2, que vai resultar na soma dessas diversas ondas parciais espalhadas com atrasos relativos que variam de poucos a muitos comprimentos de onda, dependendo da superfície microscópica iluminada e da geometria. No ponto de observação teremos o padrão de intensidade do *speckle* que resulta do processo de interferência da luz que foi refletida das áreas de espalhamento. Com isso, o padrão vai consistir em pontos brilhantes onde a interferência é altamente construtiva, pontos escuros onde a interferência é altamente destrutiva e níveis intermediários entre esses extremos, figura 1 [34].

Figura 2: Processo de formação dos *speckles* ao analisarmos a luz refletida de uma superfície rugosa.

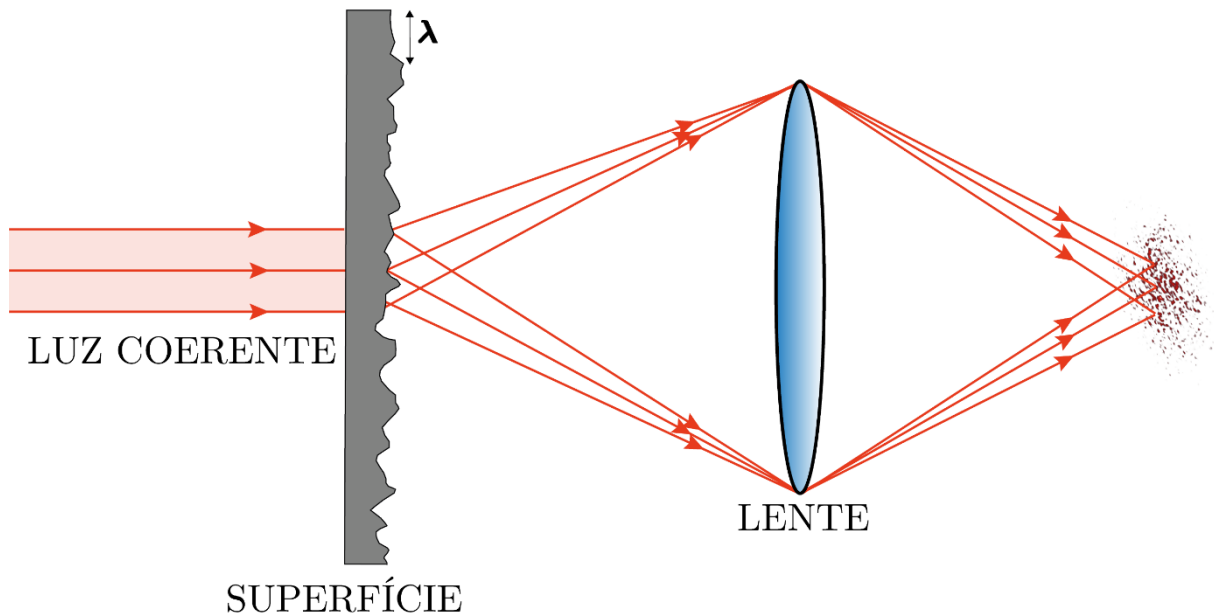


Fonte: Autor, 2022.

A aparência granular da luz não é somente observada a imagens formadas por uma luz refletida de um objeto rugoso. O fenômeno de *speckle* também pode ocorrer quando uma frente de onda de luz coerente atravessa um meio desordenado, que apresenta uma estrutura altamente aleatória e complexa. A luz coerente que é transmitida através desse difusor vai apresentar o *fenômeno de speckle*, devido ao fato que os caminhos ópticos dos diferentes raios de luz que passam pelo objeto transmissivo variarem na escala do comprimento de onda. Na imagem do meio

difusor, encontraremos flutuações de irradiância monocromática causada por uma infinidade de ondas planas com amplitudes complexas defasadas [35], figure 3.

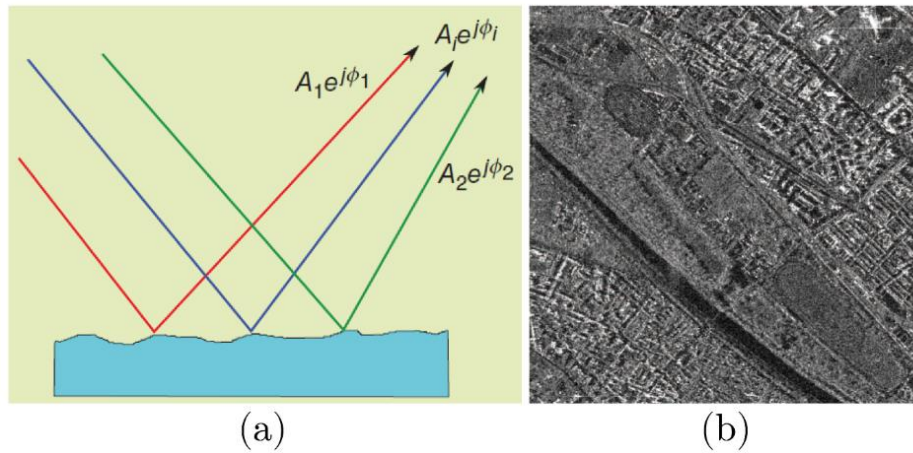
Figura 3: Formação de speckle no foco da lente ao atravessar um meio desordenado.



Fonte: Autor, 2022.

Apesar de comumente estudarmos o fenômeno de *speckle* em sistemas ópticos utilizando lasers onde a luz é transmitida ou refletida seja em um disco de vidro jateado, ou um meio que apresenta características difusoras, este fenômeno está presente em situações do cotidiano como em imagens de radar de abertura sintética (RAS). Estes tipos de radares são usados para criar imagens de um objeto, como uma paisagem e montados normalmente a partir de aeronaves ou espaçonaves. Considerando que os RAS iluminam a superfície da Terra com pulsos de radiação eletromagnética e capturam sinais de uma pequena área que contém vários elementos com diferentes características espalhadoras, o sinal recebido pelo equipamento é uma soma de várias ondas espalhadas refletidas com fases diferentes, que se somam de maneira construtiva ou destrutiva, fazendo com que a amplitude recebida varie aleatoriamente. Portanto, mesmo que a imagem gerada pelo radar tenha características uniformes, ela será afetada por um ruído “granular”, figura 4 [36].

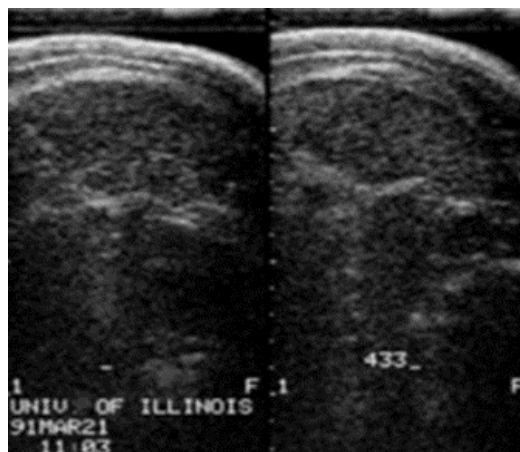
Figura 4: (a) A geração dos speckles pelo radar. Onde A_i , para $i=1,2,3\dots$, são as amplitudes e ϕ_j , para $j=1,2,3\dots$, são das fases que resultam do espalhamento dos alvos iluminados. (b) Imagem original de radar, onde vemos os speckles como ruídos.



Fonte: Adaptado de [12], 2013.

Outra circunstância em que o speckle está presente é na imagem de ultrassom, figura 5. Como a imagem de ultrassom é baseada na captura de diferentes pulsos sônicos dispersos ou refletidos na interface entre dois tecidos com características acústicas diferentes, uma parte da onda incidente é refletida para a sonda formando os ecos especulares. Estes ecos são originados de interfaces em ângulo reto ao feixe e responsáveis pelos limites entre as estruturas. Além dos ecos especulares, existem as ondas refletidas das estruturas microscópicas de tecidos conhecidas como retro espalhadas. Então, os ecos especulares interferem com as ondas proveniente dos espalhadores, que corrobora na presença do speckle totalmente desenvolvido quando a concentração de dispersão está acima de um limite crítico [37-39].

Figura 5: Imagem mostrando o músculo de um porco vivo, onde é possível ver o speckle como ruído.



Fonte: Adaptado de [39], 1999.

1.1. *Speckle* como um fenômeno de caminhada aleatória

Como nem sempre é possível ter o conhecimento detalhado da estrutura microscópica da superfície da qual a luz é refletida ou transmitida, é necessário discutir as propriedades dos padrões de speckle usando as descrições estatísticas. Portanto, se colocarmos um detector nos pontos de observação das figuras 1 e 2 a intensidade medida não é previsível, assumindo padrões complexos e aleatórios. Podemos então descrever as propriedades estatísticas da luz para diferentes conjuntos de superfícies rugosas.

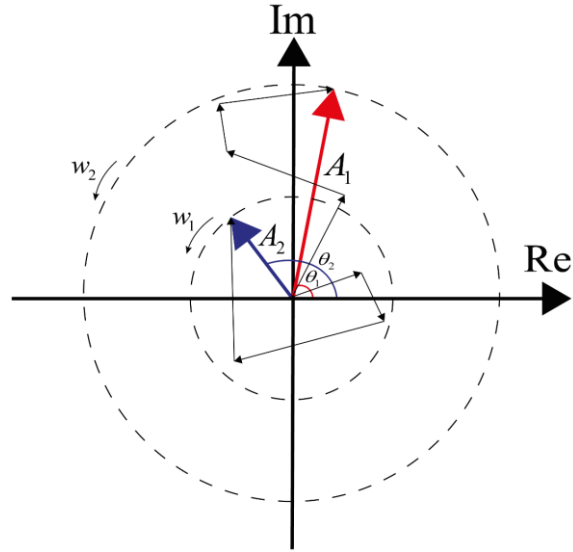
De maneira intuitiva o speckle é composto de muitas componentes complexas somadas com amplitudes e fases independentes. As componentes devem ter comprimentos aleatórios (amplitude) e direções aleatórias (fase) no plano complexo. Essas componentes juntas formam, o que é conhecido como “caminhada aleatória.” A soma resultante deve ser grande ou pequena, dependendo das fases relativas de várias componentes da soma, e em particular se a soma é dominada por uma interferência construtiva ou destrutiva. O módulo ao quadrado da componente resultante é a intensidade da onda observada, sendo o que é detectado nos pontos de observação das figuras 1, 2.

A figura 6 representa as caminhadas aleatórias que geram um fasor resultante A_1 e um fasor resultante A_2 , de modo que $|A_1| \geq |A_2|$. Nesses casos, tanto o comprimento quanto as direções são aleatórias e nenhuma contribuição domina a soma. A componente em negrito representa o fasor resultante da soma complexa, responsável pela amplitude e fase da caminhada aleatória. Este fasor é definido como um número complexo que representa uma função senoidal, dada por [40],

$$A(x, y, z; t) = |A(x, y, z; t)| \exp \{i[wt + \theta(x, y, z; t)]\}, \quad (1.1.1)$$

onde $|A(x, y, z; t)|$ é amplitude máxima, w é a frequência e $\theta(x, y, z; t)$ representa a fase do fasor.

Figura 6: Representação dos fasores resultantes A_1 e A_2 na caminhada aleatória.



Fonte: Adaptado de [31], 2007.

Para ajudar a desenvolver o modelo estatístico para o *speckle*, começamos supondo que o campo incidente nos pontos de observação (x, y, z) é perfeitamente polarizado e monocromático. Supomos ainda que este campo pode ser representado por um sinal analítico de valor complexo que pode ser dado por,

$$U(x, y, z; t) = A(x, y, z) \exp(i2\pi vt), \quad (1.1.2)$$

onde v é a frequência óptica e $A(x, y, z)$ é a amplitude complexa do fasor que é expresso como,

$$A(x, y, z) = |A(x, y, z)| \exp[i\theta(x, y, z)]. \quad (1.1.3)$$

A intensidade $I(x, y, z; t)$ de uma luz coerente é o modulo ao quadrado da função de onda complexa $U(x, y, z; t)$,

$$I(x, y, z; t) = |U(x, y, z; t)|^2. \quad (1.1.4)$$

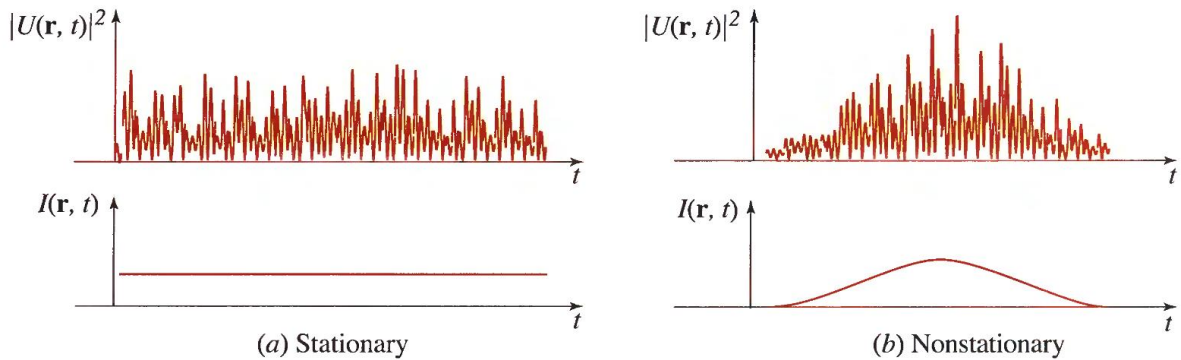
Para uma luz determinística a intensidade é independente do tempo, mas para uma luz pulsada é a média temporal. Levando em conta que o *speckle* é uma luz aleatória onde $U(x, y, z; t)$ é uma função aleatória na posição e no tempo, a intensidade $|U(x, y, z; t)|^2$ vai ter características aleatórias. Sendo a média da intensidade definida como,

$$I(x, y, z; t) = \langle |U(x, y, z; t)|^2 \rangle, \quad (1.1.5)$$

onde o símbolo $\langle \cdot \rangle$ denota a média de ensemble sob muitas realizações da função aleatória. Nesse caso a onda será considerada estacionária, quando a média da intensidade for invariante no tempo [41].

Em estatística, as funções aleatórias do tempo frequentemente têm a propriedade de que as suas flutuações não mudam com o tempo, mesmo que qualquer realização do conjunto $U(x, y, z; t)$ mude continuamente no tempo. Tal processo é dito estatisticamente estacionário [42]. Podemos então analisar as flutuações da intensidade aleatória $|U(x, y, z; t)|^2$ tanto com a posição quanto para o tempo, para os casos estacionários e não estacionários, figura 7.

Figura 7:(a) Uma onda estatisticamente estacionária que não varia com o tempo. (b) Uma onda estatisticamente não estacionário que varia com o tempo.



Fonte: [41].

Para o fenômeno do speckle, consideramos uma luz que é estacionária. Onde a média estatística de $U(x, y, z; t)$ é determinada pela média do tempo para um período tendendo ao infinito ($T \rightarrow \infty$). Calculamos então a intensidade do campo $U(x, y, z; t)$, expresso pela equação (1.1.2),

$$I(x, y, z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} |U(x, y, z; t)|^2 dt = |A(x, y, z)|^2, \quad (1.1.6)$$

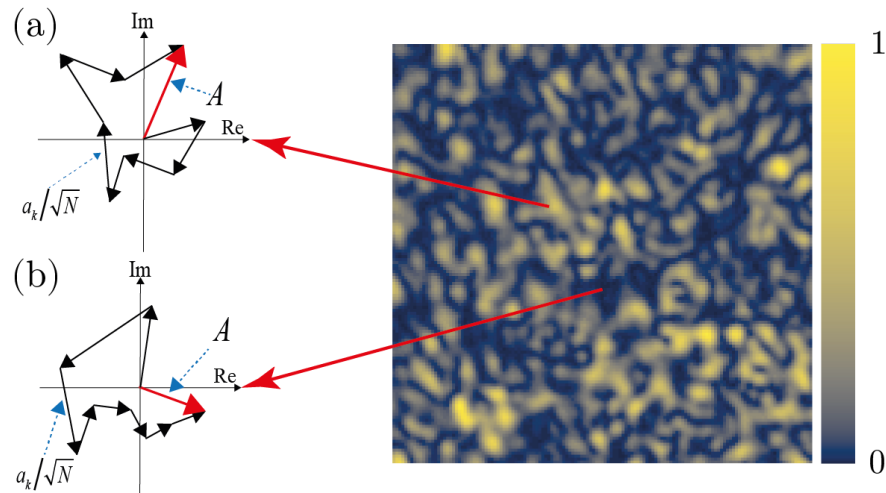
onde basicamente a intensidade do padrão de *speckle* será o modulo ao quadrado da amplitude do fasor.

No início desta seção, tratamos de maneira bem intuitiva das caminhadas aleatórias no plano complexo, porém surge uma pergunta, como podemos escrever o fasor resultante no plano complexo para a intensidade do padrão de *speckle*? Podemos considerar que a amplitude do fasor resultante $A(x, y, z)$ para $t=0$ é composto por uma superposição de muitas contribuições elementares $a_k(x, y, z)/\sqrt{N}$, $k = 1, 2, \dots, N$:

$$A(x, y, z) = Ae^{i\theta} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} a_k(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N |a_k| e^{i\phi_k}, \quad (1.1.7)$$

onde N representa o número de componentes fasoriais na caminhada aleatória, A representa o comprimento do fasor resultante, θ representa a fase resultante, e a_k representa o k -ésimo fasor componente na soma e é um número complexo. O fator de escala $1/\sqrt{N}$ é introduzido para preservar os segundos momentos, mesmo quando é tratado um número quase infinito de fasores [31]. Observamos então as contribuições das componentes a_k/\sqrt{N} do fasor resultante A na intensidade do padrão de *speckle*, figura 8.

Figura 8: As contribuições das caminhadas aleatórias na intensidade do speckle. (a) Pontos claros são expressos pela soma em grande parte construtiva e (b) pontos escuros são expressos pela soma em grande parte destrutiva.



Fonte: Adaptado [3], 2013.

Para adotar certas suposições estatísticas sobre os fasores que compõem a soma é interessante considerar a parte real e imaginária do fasor resultante. Considerando a fórmula de Euler, $e^{i\phi_k} = \cos \phi_k + i \sin \phi_k$, para $A(x, y, z)$, de modo que:

$$A(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a_k \cos \phi_k - i \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a_k \sin \phi_k \right\}, \quad (1.1.8)$$

onde a parte real é,

$$R = \text{Re}\{A\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a_k \cos \phi_k, \quad (1.1.9)$$

e parte imaginária é,

$$I = \text{Im}\{A\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a_k \sin \phi_k. \quad (1.1.10)$$

Os fasores tem as seguintes propriedades estatísticas:

- i. As amplitudes a_k/\sqrt{N} e as fases ϕ_k são estatisticamente independentes de a_j/\sqrt{N} e ϕ_j desde que $k \neq j$. De maneira que o conhecimento dos valores de amplitude e fase de uma das componentes do fasor não transmite conhecimento sobre a amplitude e fase da outra componente do fasor.
- ii. O conhecimento da fase ϕ_k de uma componente do fasor não transmite conhecimento do valor da amplitude a_k/\sqrt{N} desse mesmo fasor, e de modo recíproco o conhecimento da amplitude a_k/\sqrt{N} não expõe o conhecimento da fase ϕ_k .
- iii. As fases ϕ_k são distribuídas uniformemente no intervalo $(-\pi, \pi)$. Onde todos os valores de fase são igualmente prováveis.

Com as três suposições estatísticas citadas acima, analisaremos as suas implicações na parte real R e imaginária I do fasor resultante. Descreveremos o primeiro momento, que está relacionado com a média da distribuição. Também analisaremos o segundo momento em relação à média, que é conhecido como variância, desvio quadrado médio ou dispersão [42].

Para a analisar então o primeiro momento e segundo momento, calcularemos respectivamente a média e a variância de R e I . Considerando a parte real R , equação (1.9), tiramos a média,

$$\langle R \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^k a_k \cos \phi_k \right\rangle, \quad (1.1.11)$$

e usando a propriedade, $\langle aX \rangle = a \langle X \rangle$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constate, a equação (1.1.11) pode ser escrita como,

$$\langle R \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^k \langle a_k \cos \phi_k \rangle, \quad (1.1.12)$$

onde a_k e $\cos \phi_k$ são independentes, e usamos a propriedade $\langle X_1 X_2 \rangle = \langle X_1 \rangle \langle X_2 \rangle$ para variáveis independentes X_1 e X_2 . Portanto,

$$\langle R \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^k \langle a_k \rangle \langle \cos \phi_k \rangle. \quad (1.1.13)$$

Por definição, a média associada a uma função $f(x)$ dependente de uma variável aleatória x associada a uma probabilidade $p(x)dx$ para essa função é expressa pela integral sobre o intervalo permitido de $f(x)$ [42]. Portanto,

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x) p(x) dx. \quad (1.1.14)$$

O valor da média do $\cos \phi_k$ calculado no intervalo $(-\pi, \pi)$, considerando que a probabilidade associada $p(x) = 1$, será dada por:

$$\langle \cos \phi_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \phi_k d\phi_k = 0, \quad (1.1.15)$$

A média da parte real vai a zero,

$$\langle R \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^k \langle a_k \rangle \langle \cos \phi_k \rangle = 0. \quad (1.1.16)$$

Calculamos também de maneira análoga a média para a parte imaginária I ,

$$\langle I \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^k \langle a_n \rangle \langle \sin \phi_n \rangle, \quad (1.1.17)$$

o valor médio para o $\sin \phi_k$ vai a zero no intervalo $(-\pi, \pi)$, assim:

$$\langle \sin \phi_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin \phi_k d\phi_k = 0, \quad (1.1.18)$$

E a média para a parte imaginária vai ser nula,

$$\langle I \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^k \langle a_n \rangle \langle \sin \phi_n \rangle = 0. \quad (1.1.19)$$

De modo semelhante as variâncias de R e I , são dadas por,

$$\sigma_R^2 = \langle R^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \langle a_k a_j \rangle \langle \cos \phi_k \rangle \langle \cos \phi_j \rangle = 0, \quad (1.1.20)$$

para $k \neq j$, e para a parte imaginária I ,

$$\sigma_I^2 = \langle I^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \langle a_k a_j \rangle \langle \sin \phi_k \rangle \langle \sin \phi_j \rangle = 0, \quad (1.1.21)$$

sendo $k \neq j$. Para $k = j$, temos que:

$$\sigma_R^2 = \langle R^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle a_k^2 \rangle \langle \cos \phi_k \cos \phi_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle a_k^2 \rangle \langle \cos^2 \phi_k \rangle, \quad (1.1.22)$$

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle a_k^2 \rangle \left\langle \frac{1}{2} + \cos 2\phi_k \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle a_k^2 \rangle \left\{ \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle + \langle \cos 2\phi_k \rangle \right\}, \quad (1.1.23)$$

como, $\langle \cos 2\phi_k \rangle = 0$, teremos que,

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\langle a_k^2 \rangle}{2}. \quad (1.1.24)$$

A parte imaginária da variância para $k = j$ é calculada de maneira análoga à parte real,

$$\sigma_I^2 = \langle I^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle a_k^2 \rangle \langle \sin \phi_k \sin \phi_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle a_k^2 \rangle \langle \sin^2 \phi_k \rangle, \quad (1.1.25)$$

usando, $\sin^2 \phi_k = \frac{1}{2} - \cos 2\phi_k$, a variância da parte imaginária I terá o mesmo valor da parte real R ,

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\langle a_k^2 \rangle}{2}. \quad (1.1.26)$$

Consideramos então a correlação entre a parte real e imaginária, temos que

$$\Gamma_{R,I} = \langle RI \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle a_k^2 \rangle \langle \cos \phi_k \sin \phi_k \rangle = 0, \quad (1.1.27)$$

e vemos que não há correlação entre a parte real R e imaginária I do fasor resultante nessas condições.

Voltamos a equação (1.1.7) e consideramos um número muito grande de N passos que contribuem com a caminhada aleatória. Nesse caso a parte real R e imaginária I do fasor resultante A são dadas por uma soma de muitas variáveis aleatórias independentes, para o caso da parte real R , um grande número de $a_k \cos \phi_k$ e para a parte imaginária I um grande número de $a_k \sin \phi_k$. Com base nisso, podemos considerar o teorema do limite central. De acordo com o teorema, a estatística da soma de N variáveis aleatórias independentes são assintoticamente gaussianas para N tendendo a infinito.

Nessa situação como temos duas variáveis aleatórias gaussianas distribuídas conjuntamente R e I . Como essas variáveis tem média zero, visto em (1.1.16) e (1.1.19) e como os valores das variâncias de R e I , são iguais em (1.1.24) e (1.1.26), temos que $\sigma^2 = \sigma_R^2 = \sigma_I^2$. Podemos escrever a função de densidade de probabilidade conjunta para as partes real e imaginária do fasor resultante da seguinte maneira [43],

$$P(R, I) = \frac{\exp\left[-\frac{R^2 + I^2 - 2\rho IR}{2(1-\rho^2)\sigma^2}\right]}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}, \quad (1.1.28)$$

onde,

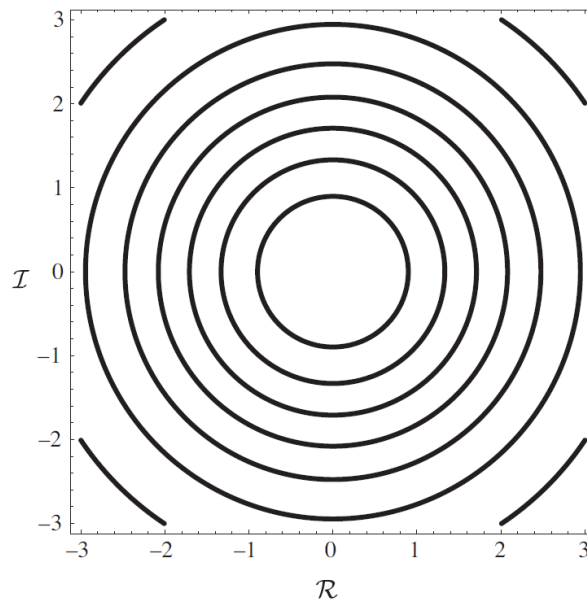
$$\rho = \frac{\Gamma_{R,I}}{\sigma^2}. \quad (1.1.29)$$

Como já foi calculado em (1.1.27) na correlação de R e I , temos que a parte real e imaginária não se correlacionam, tomando isso, vemos que o valor para ρ será nulo, podemos então reescrever a equação (1.1.28) como sendo,

$$P(R, I) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{R^2 + I^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (1.1.30)$$

Na figura 9, temos os contornos de valor constante da densidade de probabilidade para a distribuição (1.1.30). O fasor resultante complexo A é conhecido como uma variável gaussiana complexa circular.

Figura 9: Contornos de valor constante da densidade de probabilidade para uma variável aleatória gaussiana complexa circular.



Fonte:[31].

Anteriormente, encontramos as estatísticas conjuntas das partes real R e imaginária I de uma soma fasorial aleatória. Agora, vamos descrever as estatísticas do comprimento $|A|$ e da fase θ , do fasor resultante A . Multiplicamos a equação (1.1.8) pelo seu complexo conjugado, encontramos a relação abaixo,

$$|A|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a_k \cos \phi_k \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a_k \sin \phi_k \right)^2, \quad (1.1.31)$$

$$|A| = \sqrt{R^2 + I^2}, \quad (1.1.32)$$

e

$$\theta = \arctan\left(\frac{I}{R}\right). \quad (1.1.33)$$

Mudando de coordenada cartesiana para coordenada polar, temos que,

$$R = |A| \cos \theta, \quad (1.1.34)$$

$$I = |A| \sin \theta. \quad (1.1.35)$$

A função densidade de probabilidade conjunta de A e θ está relacionada com R e I através da equação abaixo,

$$p_{A,\theta}(A, \theta) = p_{R,I}(|A| \cos \theta, |A| \sin \theta) \|J\|, \quad (1.1.36)$$

onde $\|J\|$ é a magnitude do determinante da matriz Jacobiana de transformação entre os dois conjuntos de variáveis,

$$\|J\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial A} & \frac{\partial R}{\partial \theta} \\ \frac{\partial I}{\partial A} & \frac{\partial I}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos \theta & -|A| \sin \theta \\ \sin \theta & |A| \cos \theta \end{pmatrix} \right\| = |A|. \quad (1.1.37)$$

Substituindo (1.1.33) e (1.1.34) em (1.1.30), temos que,

$$p_{R,I}(|A| \cos \theta, |A| \sin \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{|A|^2}{2\sigma^2}\right], \quad (1.1.38)$$

com isso podemos substituir a equação (1.1.38) e o valor do determinante em (1.1.37) em (1.1.36). Segue-se que a função densidade de probabilidade conjunta do comprimento $|A|$ e da fase θ do fasor resultante A é dada por,

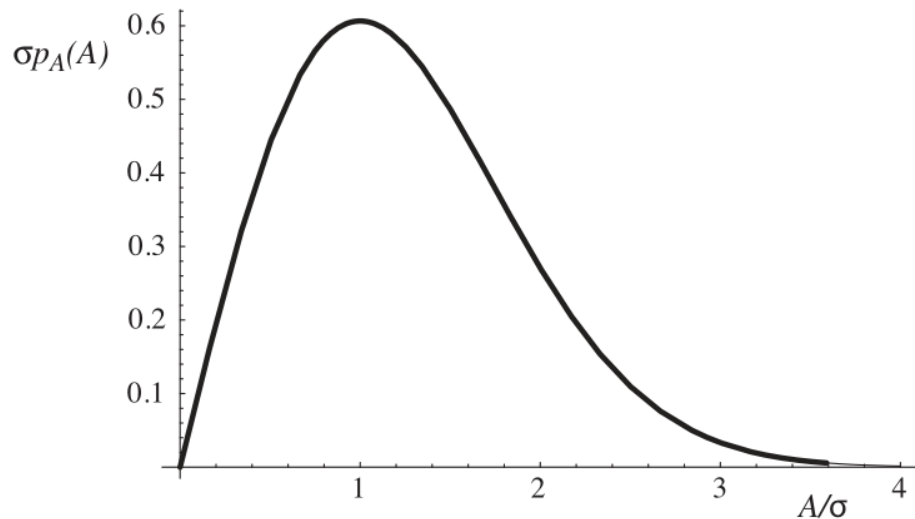
$$p_{A,\theta}(A, \theta) = \frac{|A|}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|A|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.1.39)$$

para $|A| \geq 0$ e $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$. Ao demonstrar as estatísticas conjuntas de A e θ , vamos agora descrever as estatísticas de A e θ separadamente. Primeiro integramos a equação (1.1.39) em função de θ , obtemos,

$$p_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{A,\theta}(A, \theta) d\theta = \frac{|A|}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{|A|^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (1.1.40)$$

para $|A| \geq 0$, o resultado conhecido como função de densidade de Rayleigh.

Figura 10: A função de densidade de Rayleigh.



Fonte: [31].

Portanto vemos que o comprimento $|A|$ do fasor resultante é uma variável Rayleigh. A figura 10, ilustra a função de densidade de Rayleigh. Os momentos da amplitude são dados por,

$$\langle A^q \rangle = \int_0^{\infty} A^q p_A(A) dA = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} A^{q+1} \exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right\} dA, \quad (1.1.41)$$

fazemos uma substituição de variáveis, podemos considerar que $x = A^2/2\sigma^2$,

$dx = AdA/\sigma^2$ e $A = \sqrt{2\sigma x}^{\frac{1}{2}}$, substituindo na equação (1.1.41),

$$\langle A^q \rangle = 2^{\frac{q}{2}} \sigma^q \int_0^\infty x^{\frac{q}{2}} \exp\{-x\} dx, \quad (1.1.42)$$

levando em conta a definição da função gama,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty x^z \exp\{-x\} dx, \quad (1.1.43)$$

onde $\Re(z) \geq 0$, a equação dos momentos para a amplitude pode ser escrita como,

$$\langle A^q \rangle = \int_0^\infty 2^{\frac{q}{2}} \sigma^q \Gamma\left(\frac{q}{2} + 1\right). \quad (1.1.44)$$

Com a equação acima, é possível calcular o primeiro, segundo e variância, como segue,

$$\langle A \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \approx 1,25\sigma, \quad (1.1.45)$$

$$\langle A^2 \rangle = 2\sigma^2, \quad (1.1.46)$$

$$\sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - (\langle A \rangle)^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2 \approx 0,43\sigma^2. \quad (1.1.47)$$

A função de densidade de probabilidade conjunta para a fase é dada integrando a equação (1.1.39) com respeito a amplitude do fasor resultante,

$$p_\theta(\theta) = \int_0^\infty \frac{|A|}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|A|^2}{2\sigma^2}\right) dA = \frac{1}{2\pi}, \quad (1.1.48)$$

para $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$. A partir desses resultados a função de densidade de probabilidade conjunta A e θ , expressa pela equação (1.1.39), pode ser escrita como o produto de $p_A(A)$ e $p_\theta(\theta)$. Isso demonstra que o comprimento A e o ângulo da fase θ do fasor resultante são variáveis aleatórias estatisticamente independentes.

Ao longo dessa sessão, mostramos que um campo de *speckle* descrito como uma soma fasorial aleatória, tem as componentes reais e imaginárias não correlacionadas. As descrições estatísticas das componentes da soma podem ser usadas para a situação em que temos um número de fasores muito grande, onde a

amplitude desse campo de speckle obedece à estatística Rayleigh, e a fase resultante é uniformemente distribuída no intervalo $(-\pi, \pi)$.

1.2. Estatísticas de primeira ordem da intensidade e fase

Para descrever a estatística de primeira ordem para a intensidade e fase, iniciamos escrevendo a densidade de probabilidade em função da intensidade I do campo de *speckle*, (1.1.6). Consideramos que a intensidade I é uma variável aleatória que se relaciona com a amplitude $|A|$ através de uma transformação monotônica, expressa por,

$$I = f(A) = A^2. \quad (1.2.1)$$

Então, com esse resultado fundamental da teoria de probabilidade, a função de densidade de probabilidade $p_I(I)$ de I pode ser encontrada através da função de densidade de probabilidade $p_A(A)$ de A , aplicando-se a lei de transformação,

$$p_I(I) = p_A(\sqrt{I}) \left| \frac{dA}{dI} \right| = \frac{1}{2\sqrt{I}} p_A(\sqrt{I}). \quad (1.2.2)$$

Quando o número de contribuições dos fasores aleatórios é muito grande, sendo cada um uniformemente distribuído em $(-\pi, \pi)$, a função da densidade de probabilidade da amplitude é dada pela distribuição de Rayleigh,

$$p_A(A) = \frac{|A|}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{|A|^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (1.2.3)$$

para $|A| \geq 0$. Aplicando então a transformação (1.2.2), encontramos que a intensidade do padrão de *speckle* é distribuída de acordo com a densidade de probabilidade exponencial negativa,

$$p_I(I) = \frac{\sqrt{I}}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{I}} = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right), \quad (1.2.4)$$

para $I \geq 0$. Para calcular os momentos dessa distribuição, integramos a equação abaixo,

$$\langle I^q \rangle = \int_0^{\infty} I^q p_I(I) dI = \int_0^{\infty} \frac{I^q}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right) dI, \quad (1.2.5)$$

onde realizamos uma substituição de variáveis, $u = I/2\sigma^2$, de modo que $du = dI/2\sigma^2$ e $u^q = I^q/(2\sigma^2)^q$. A integral acima pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$\langle I^q \rangle = (2\sigma^2)^q \int_0^{\infty} u^q \exp(-u) du, \quad (1.2.6)$$

usando a definição da função fatorial para quaisquer valores reais positivos de q ,

$$q! = \int_0^{\infty} x^q \exp(-x) dx, \quad (1.2.7)$$

substituindo $q!$ em (1.2.6), expressaremos os momentos da densidade de probabilidade da exponencial da seguinte maneira,

$$\langle I^q \rangle = (2\sigma^2)^q q!. \quad (1.2.8)$$

Com base nesse resultado dos momentos, temos que a média \bar{I} é $2\sigma^2$, de modo que o q -ésimo momento pode ser tratado como,

$$\langle I^q \rangle = \langle I \rangle^q q!, \quad (1.2.9)$$

e a função densidade de probabilidade pode ser reescrita em função da média $\langle I \rangle$ como,

$$p_I(I) = (1/\langle I \rangle) \exp(-I/\langle I \rangle). \quad (1.2.10)$$

O padrão de *speckle* com esta distribuição de probabilidade é tratado como *speckle* totalmente desenvolvido, diferente dos resultados em que as fases dos fasores componentes da soma não tem distribuição uniforme $(-\pi, \pi)$. O segundo momento da intensidade, variância e o desvio padrão da intensidade são encontrados utilizando a equação (1.2.9). Considerando então $q = 2$, teremos que,

$$\langle I^2 \rangle = 2\langle I \rangle^2, \quad (1.2.11)$$

o valor da variância será dado por,

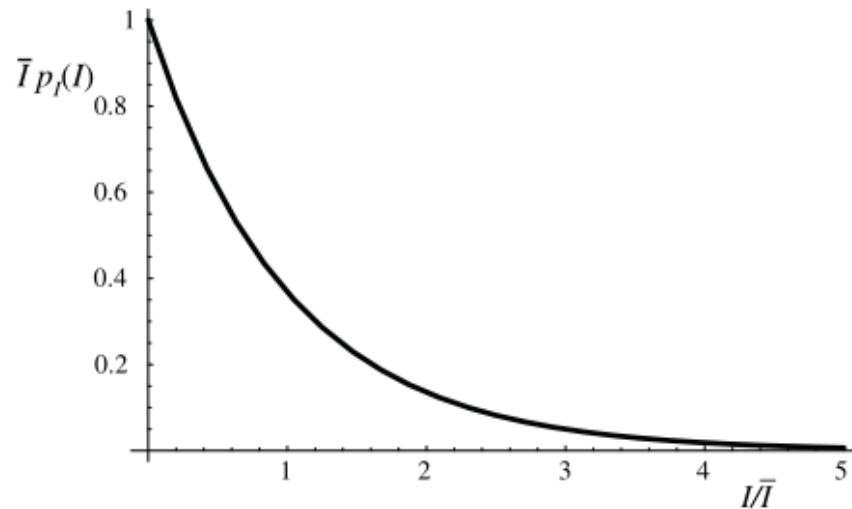
$$\sigma_I^2 = \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \langle I \rangle, \quad (1.2.12)$$

com o valor da variância encontramos o valor do desvio padrão,

$$\sigma_I = \sqrt{\langle I \rangle}. \quad (1.2.13)$$

A figura 11 mostra o gráfico da distribuição da exponencial negativa dada pela equação (1.2.10).

Figura 11: A função de densidade para a exponencial negativa.



Fonte: [31].

Uma outra quantidade que vai aparecer com muita frequência ao longo desse trabalho será o contraste C . A equação que define C é dada por,

$$C = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}. \quad (1.2.14)$$

O contraste é uma medida que expressa o quão forte são as flutuações de intensidade em um padrão de *speckle* em comparação com a intensidade média. Reescrevendo a equação (1.2.14),

$$C = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} = \frac{\sqrt{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}}{\langle I \rangle} = \sqrt{\frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} - 1}. \quad (1.2.15)$$

Substituindo a equação (1.2.11) na equação (1.2.15), implica que valor do contraste é, $C = 1$. Assim, as flutuações do *speckle* totalmente desenvolvido são da mesma ordem que a média.

Demonstramos então a estatística para a função densidade de probabilidade da intensidade, mostrando que a intensidade de um padrão de *speckle* totalmente desenvolvido obedece ao comportamento da densidade de probabilidade exponencial negativa. Também estudamos os momentos, variância e desvio padrão. Como a distribuição de Rayleigh descreve o comportamento da amplitude do *speckle* totalmente desenvolvido, podemos nomeá-los como *speckles* Rayleigh. Utilizaremos essa nomenclatura ao longo desse trabalho para descrever o padrão de *speckle* que apresenta $C = 1$.

1.3. Coerência espacial

Consideramos o campo de *speckle*, $U(r;t)$, onde r é o vetor posição e $r = r(x, y, z)$. Esse campo representa um feixe de luz monocromático e bem colimado incidindo em duas aberturas $P_1(r_1)$ e $P_2(r_2)$. Essas duas aberturas estão contidas em uma tela opaca α . A luz que emerge desses dois pequenos furos, propaga-se ao longo da distância d originando uma superposição de duas ondas e a distribuição de intensidade resultante dessa superposição será observada no ponto P que está na tela β , figura 12. Assumimos que d é muito maior comparado com o comprimento de onda λ .

Em dado instante de tempo o campo no ponto P na tela β é dado por uma superposição escrita da seguinte maneira,

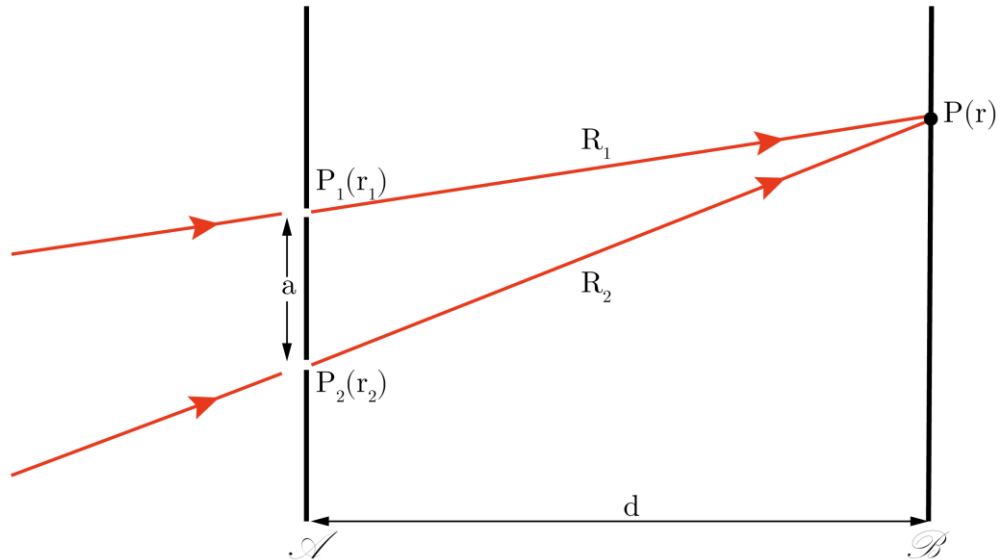
$$U(x, y, z; t) = K_1 U_1(x_1, y_1, z_1; t - t_1) + K_2 U_2(x_2, y_2, z_2; t - t_2), \quad (1.2.16)$$

onde, $t_1 = R_1/c$, $t_2 = R_2/c$, são os tempos necessários para luz viajar de um ponto P_1 para P e de P_2 para P respectivamente, c é a velocidade da luz no vácuo, K_1 e K_2 são números constantes puramente imaginários que dependem do tamanho dos buracos e da geometria.

Porém, a intensidade $I(r;t)$ no ponto $P(r)$ no tempo t deve ser definida pela equação (1.1.4),

$$I(r;t) = |U(r;t)|^2 = U(r;t)U^*(r;t). \quad (1.2.17)$$

Figura 12: Representação do experimento de interferência de Young.



Fonte:[42]

Usando a equação (1.2.16) em (1.2.18) e calculando a média de ensemble após alguns cálculos, obtemos,

$$\begin{aligned} \langle I(r;t) \rangle = & |K_1|^2 \langle I_1(r_1;t-t_1) \rangle + |K_2|^2 \langle I_2(r_2;t-t_2) \rangle \\ & + 2\text{Re} \left\{ K_1^* K_2^* \langle U_1^*(r_1;t-t_1) U_2(r_2;t-t_2) \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

onde definimos a função $G_U(r_1, r_2; t_1, t_2)$ conhecida comumente como função de correlação cruzada do processo aleatório entre $U_1(r_1; t-t_1)$ e $U_2(r_2; t-t_2)$. Assim,

$$G_U(r_1, r_2; t_1, t_2) = \langle U_1^*(r_1; t-t_1) U_2(r_2; t-t_2) \rangle, \quad (1.2.19)$$

e reescrevemos a equação (1.2.19),

$$\begin{aligned} \langle I(r; t) \rangle = & |K_1|^2 \langle I_1(r_1; t-t_1) \rangle + |K_2|^2 \langle I_2(r_2; t-t_2) \rangle \\ & + 2 \operatorname{Re} \left\{ K_1^* K_2 \langle G_U(r_1, r_2; t_1, t_2) \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

No caso do experimento de Young, a função de correlação $G_U(r_1, r_2; t_1, t_2)$ representa as correlações que existem nas oscilações de intensidade nos pontos P_1 e P_2 nos tempos t_1 e t_2 .

Usualmente vamos tratar de campos estacionários, caso em que as médias de ensemble são independentes da origem do tempo. O campo também será ergódico, onde cada realização do ensemble carrega a mesma informação estatística sobre o processo aleatório estacionário que qualquer outra realização. Tomando isso como base, podemos escrever a média de ensemble da função de correlação cruzada como,

$$G_U(r_1, r_2, \tau) = \langle U_1^*(r_1, t) U_2(r_2, t + \tau) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U_1^*(r_1, t) U_2(r_2, t + \tau) dt, \quad (1.2.21)$$

onde consideramos a função de correlação cruzada temporal que depende dos dois argumentos de tempo apenas por uma diferença $t_2 - t_1$.

A expressão (1.2.20) para a intensidade média no ponto P torna-se sob as suposições de ergodicidade e estacionaridade,

$$\langle I(r; t) \rangle = |K_1|^2 \langle I_1(r_1; t) \rangle + |K_2|^2 \langle I_2(r_2; t) \rangle + 2 \operatorname{Re} \left\{ K_1^* K_2 \langle G_U(r_1, r_2; t_2 - t_1) \rangle \right\}. \quad (1.2.22)$$

Notamos que o último termo da equação não desaparece, e a intensidade resultante não é igual a soma das intensidades dos dois feixes que atingem P . A equação (1.2.22) difere da soma pelo termo $2 \operatorname{Re} \left\{ K_1^* K_2 \langle G_U(r_1, r_2; t_2 - t_1) \rangle \right\}$, como $K_1 \neq 0$,

$K_2 \neq 0$, segue - se que $G_U \neq 0$, e a superposição dos dois feixes dará origem a esse termo de interferência.

A função de coerência cruzada $G_U(r_1, r_2; \tau)$ é conhecida como função de coerência mútua. Usando a definição da intensidade instantânea $I(r; t)$ da definição (1.2.22) e da função de correlação mutua $G_U(r_1, r_2; \tau)$, segue-se que $G_U(r_1, r_1; 0)$ representa a intensidade média em r_1 :

$$\langle I(r_1; t) \rangle = \langle U_1^*(r_1; t) U_1(r_1; t) \rangle = G_U(r_1, r_1; 0). \quad (1.2.23)$$

Normalizando então a função de coerência mútua, teremos o grau complexo de coerência de vibrações no ponto $P_1(r_1)$ e $P_2(r_2)$. Dado por,

$$\gamma(r_1, r_2, \tau) = \frac{G_U(r_1, r_2; \tau)}{\sqrt{\langle I(r_1, \tau) \rangle} \sqrt{\langle I(r_2, \tau) \rangle}}, \quad (1.2.24)$$

onde a função de correlação cruzada de quaisquer dois processos aleatórios estacionários juntos satisfaz a seguinte inequação,

$$0 \leq \gamma(r_1, r_2, \tau) \leq 1, \quad (1.2.25)$$

para todos os valores de r_1 , r_2 e τ de γ .

Ao longo desse trabalho, trabalharemos com correlação de intensidade do campo,

$$G_U^{(2,2)}(r_1, r_2; \tau) = \langle I(r_1, \tau) \rangle \langle I(r_2, \tau) \rangle, \quad (1.2.26)$$

para isso consideramos que campo $U(r; t)$ tem média zero para cada ponto do espaço, isto é,

$$\langle U(r; t) \rangle = 0, \quad (1.2.27)$$

para todo r . Como o campo pode ser descrito com um processo Gaussiano aleatório, escreveremos a função de correlação $G_U^{(M,N)}$ usando o teorema dos momentos Gaussianos [43,44]. Para o caso em que $M = N = 2$,

$$G_U^{(2,2)}(r_1, r_2; r_3, r_4; \tau) = G_U^{(1,1)}(r_1, r_3; \tau)G_U^{(1,1)}(r_2, r_4; \tau) + G_U^{(1,1)}(r_1, r_4; \tau)G_U^{(1,1)}(r_2, r_3; \tau), \quad (1.2.28)$$

onde r_1, r_2, r_3 e r_4 são pontos distintos no espaço. Agora sendo $r_3 = r_1$, $r_4 = r_2$, usando a equação (1.2.24) e pela propriedade $G_U^{(1,1)}(r_2, r_1; \tau) = [G_U^{(1,1)}(r_1, r_2; \tau)]^*$, após alguma álgebra podemos reescrever a equação (1.2.28) como,

$$G_U^{(2,2)}(r_1, r_2; \tau) = \langle I(r_1, \tau) \rangle \langle I(r_2, \tau) \rangle + |G_U^{(1,1)}(r_1, r_2; \tau)|^2, \quad (1.2.29)$$

deixando a equação acima em função de $\gamma(r_1, r_2, \tau)$, temos que,

$$G_U^{(2,2)}(r_1, r_2; \tau) = \langle I(r_1, \tau) \rangle \langle I(r_2, \tau) \rangle [1 + |\gamma(r_1, r_2; \tau)|^2]. \quad (1.2.30)$$

Calculamos então a autocorrelação média, para isso consideramos duas funções de intensidade $I_1(r)$ e $I_2(r)$. Então escrevemos a correlação de maneira semelhante à uma convolução [45,46],

$$\Gamma(r; \tau) = \left\langle \int_{\Omega} I_1(r') I_2(r' - r) dr \right\rangle, \quad (1.2.31)$$

onde $I(r_1, \tau)$ é a intensidade do sinal e $I_2(r' - r)$ é a intensidade de referência girada em 180° , o símbolo $\langle \cdot \rangle$ indica a média, e Ω é o domínio onde a integral tem valores não nulos.

Nosso próximo resultado em relação a equação (1.2.31) envolve a troca da ordem da média pela integral, sendo uma consequência do teorema de Fubini. Reescrevemos (1.2.31) e substituímos o resultado (1.2.30),

$$\Gamma(r; \tau) = \int_{\Omega} \langle I_1(r') I_2(r' - r) \rangle dr = \int_{\Omega} G_U^{(2,2)}(r', r' - r; \tau) dr', \quad (1.2.32)$$

considerando a equação (1.2.30), a integral pode ser escrita como,

$$\Gamma(r; \tau) = \int_{\Omega} \langle I(r', \tau) \rangle \langle I(r' - r, \tau) \rangle [1 + |\gamma(r', r' - r; \tau)|^2] dr', \quad (1.2.33)$$

continuamos desenvolvendo a integral acima,

$$\Gamma(r; \tau) = \int_{\Omega} \langle I(r', \tau) \rangle \langle I(r' - r, \tau) \rangle dr' + \int_{\Omega} \langle I(r', \tau) \rangle \langle I(r' - r, \tau) \rangle |\gamma(r', r' - r; \tau)|^2 dr', \quad (1.2.34)$$

substituindo a equação (1.2.24) em (1.2.34),

$$\Gamma(r; \tau) = \int_{\Omega} \langle I(r', \tau) \rangle \langle I(r' - r) \rangle dr' + \int_{\Omega} |G_U(r', r' - r; \tau)|^2 dr', \quad (1.2.35)$$

onde a primeiro integral do lado direito é conhecida como intensidade de background e o segundo termo é a média ao quadrado da correlação cruzada do campo. Geralmente a primeira integral pode ser desconsiderada por ser uma intensidade uniforme que não contribui para o resultado da correlação cruzada do campo. Assim, o resultado da Eq. (1.2.35) sugere que poderemos analisar a ergodicidade e a estacionaridade dos resultados experimentais através do cálculo da correlação cruzada dos campos de *speckle* $|G_U(\Delta r)|^2$ usando uma correlação de intensidades medidas.

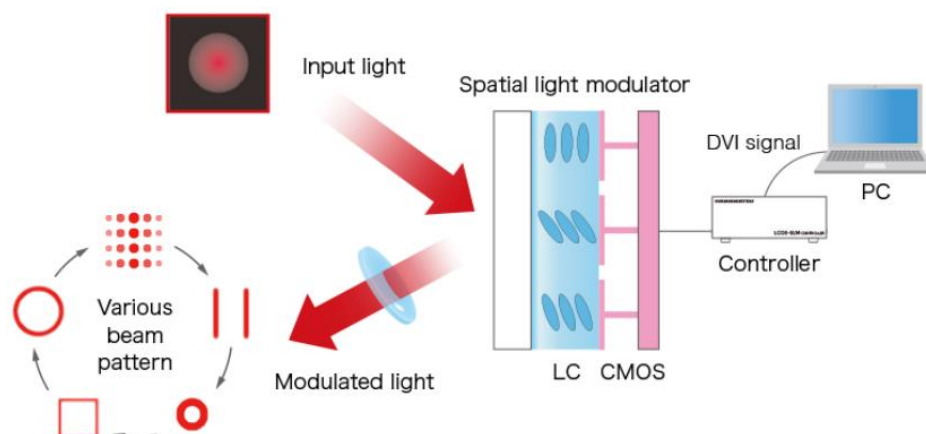
Capítulo 2

Geração de *speckle* não Rayleigh usando o Modulador Espacial de Luz

Tendo em vista que o processo de dispersão da luz coerente por um meio desordenado, gera de maneira natural o *speckle* que apresenta a estatística Rayleigh, a análise do fenômeno de *speckle* feita no capítulo anterior considerou a descrição da estatística de primeira ordem da intensidade do *speckle* que obedece a função de densidade de probabilidade da exponencial negativa [31]. Durante muito tempo, o espalhamento foi considerado um efeito que deveria ser desprezado e suprimido. Com o tempo surgiu a necessidade de estudar esses efeitos para aplicações ópticas desde estudos fundamentais até imagens biomédicas. Portanto, a dispersão através de um meio opaco, como tecido biológico, vidro ou plástico carrega informações estatísticas importantes do campo, as quais podem ser medidas e estudadas.

Ao longo desse capítulo falaremos de trabalhos que usaram os Moduladores Espaciais de Luz (MEL) para gerar padrões de *speckle* com a estatística desejada. Basicamente esse dispositivo é formado por uma camada de cristal líquido que fica entre um chip composto de eletrodos dispostos em duas dimensões e um eletrodo transparente depositado sobre um substrato de vidro. Na tela de cristal líquido é gravado o holograma gerado numericamente pelo computador. Inicialmente as moléculas de cristal líquido estão alinhadas em paralelo, quando o holograma é enviado eletronicamente para o MEL, cada cristal líquido é submetido a uma diferença de potencial. Com isso, as moléculas de cristal líquido vão sofrer uma inclinação dependendo do campo elétrico aplicado. A luz então ao incidir nesse dispositivo vai sofrer uma diferença de caminho óptico na camada de cristal líquido ganhando uma diferença de fase na frente de onda, por meio da variação dos índices de refração. O funcionamento do MEL pode ser analisado na figura 13.

Figura 13: Funcionamento do Modulador Espacial de Luz (MEL).

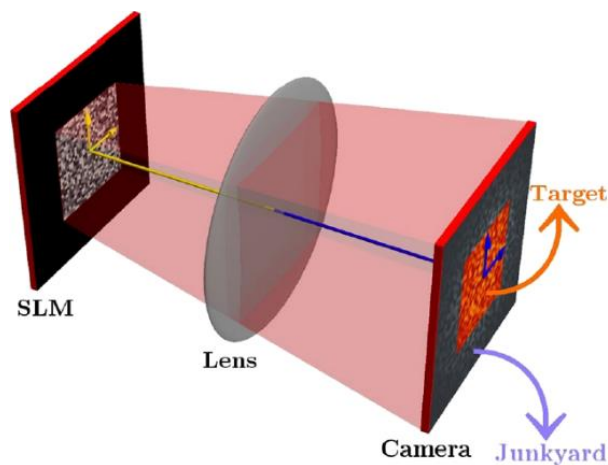


Fonte: Adaptado de [47].

Pesquisas sobre padrões de *speckle* foram desenvolvidas ao longo dos anos. No caso especial de *speckle* não Rayleigh, basicamente seus padrões mantêm a estrutura espacial de um padrão granular aleatório, mas a função de densidade de probabilidade da intensidade é alterada. Essas outras estatísticas de *speckle* podem ser produzidas artificialmente codificando-se adequadamente correlações de alta ordem na frente de fase de um feixe de laser monocromático utilizando-se um Modulador Espacial de Luz (MEL) [22-23], e mantendo as características de *speckle* totalmente desenvolvido, ergódico e estacionário [42]. A única limitação é que as estatísticas não-Rayleigh existem apenas no plano de otimização e, após uma pequena distância de propagação, os *speckles* voltam às estatísticas Rayleigh, como visto na figura 14. Estes *speckles* não Rayleigh encontraram aplicações no melhoramento do desempenho óptico de sistemas de microscopia [21] e para imagens fantasmas [18, 19].

Recentemente, Ruifeng Liu e colaboradores, deram um passo à frente no estudo de *speckles* não Rayleigh [27]. Os autores propuseram um método para gerar campos de *speckle* Não-Rayleigh Não Difrativos (NRND). Neste caso, os *speckles* permanecem não Rayleigh ao longo de uma distância correspondente a vários comprimentos de Rayleigh. Esses *speckles* em particular são promissores para aplicações na geração de um potencial aleatório para estudos de sistemas desordenados usando átomos frios [48], projetar novos materiais usando um potencial aleatório criado por luz sobre sistemas coloidais [49] e explorar estudos de localização de Anderson [50].

Figura 14: Esquema de geração do speckle não Rayleigh usando o MEL. O campo de speckle não Rayleigh está no plano de Fourier do MEL.



Fonte: Adaptado de [26].

2.1. Geração de speckles com estatística de sub Rayleigh à super Rayleigh

Em 2014, Yaron Bromberg e Hui Cao, mostraram como gerar experimentalmente padrões de *speckles* com estatística não Rayleigh usando o modulador espacial de luz (MEL). Ao introduzir correlações de alta ordem para o campo inicial de luz, a intensidade é redistribuída entre os grãos de *speckle*, preservando a estrutura granular do padrão. O método é versátil e permite gerar padrões de *speckle* com contraste maior que 1, ($C > 1$), representando os *speckles* super Rayleigh, e contraste menor que 1, ($C < 1$), caracterizando os *speckles* sub Rayleigh [22].

O MEL foi iluminado por um feixe laser, imitando o espalhamento de uma superfície rugosa, e a difração de cada pixel corresponde a uma onda parcial que é espalhada a partir do plano do MEL. Os pixels do MEL são agrupados em macro pixels fornecendo um controle sobre 3000 elementos de fase independentes. Esses padrões de *speckle* da luz espalhada são capturados no plano de Fourier do MEL. De modo que, as estatísticas presentes na intensidade do *speckle* será determinada pelas propriedades estatísticas das matrizes de fase que são aplicadas ao MEL.

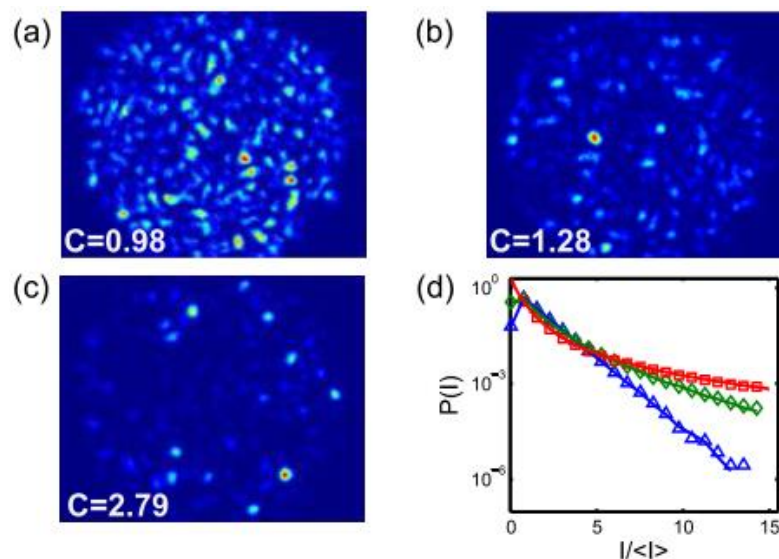
Para gerar o padrão de *speckle* com o contraste modificado, o MEL deve ter uma matriz de fase com pixels correlacionados. Na técnica utilizada para encontrar a matriz de fase, primeiro os autores geram numericamente um *speckle* de alto contraste, por exemplo, elevam ao quadrado campo de um *speckle* Rayleigh, $E_{Ray}^2(x, y)$. Em seguida, calculam a transformada inversa de Fourier. Então a fase da transformada inversa de Fourier é aplicada ao MEL.

Basicamente, para poder gerar *speckles* não Rayleigh, os autores usam uma transformação não linear, $h(E_{Ray})$. No caso de *speckle* super Rayleigh elevam o campo de *speckle* Rayleigh a uma determinada potência,

$$h(E_{Ray}) = E_{Ray}^n, \quad (2.1.1)$$

onde $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ são números inteiros. Na figura 15, podemos ver os resultados experimentais para padrões de intensidade de *speckle* super Rayleigh. Podemos ver claramente que a distribuição de intensidade entre os grãos de *speckle* super Rayleigh é diferente da mesma distribuição para os *speckles* Rayleigh. Esses *speckles* apresentam então alguns grãos de *speckle* mais intensos que os outros grãos.

Figura 15: Resultados experimentais para *speckle* super Rayleigh. (a) Padrão de intensidade do *speckle* Rayleigh, $|E_{Ray}|^2$. (b) Padrão de intensidade do *speckle* super Rayleigh, $|E_{Ray}^2|^2$. (c) Padrão de intensidade de contraste de alta ordem, $|E_{Ray}^4|^2$. (d) Distribuições de intensidade para os padrões de *speckle*.



Fonte: [22].

Na figura 15, os autores usaram a equação (1.2.15) para calcular os respectivos contrastes dos padrões de *speckle*. Na Figura 15 (a), temos os *speckles* Rayleigh com contraste $C = 0,98$ representado na figura 15 (d) pela distribuição de intensidade da exponencial negativa (triângulos azuis). Na figura 15 (b), temos os *speckles* super Rayleigh com contraste de $C = 1,28$, e a distribuição de densidade de probabilidade decai mais devagar que a exponencial negativa, vide na figura 15 (d), representado por losangos verdes. Ao analisar a distribuição para o *speckle* super Rayleigh também podemos notar que a luz fica concentrada em poucos grãos de *speckle* comparado com o *speckle* Rayleigh. Um padrão de *speckle* com contraste alto $C = 2.79$ é visto na figura 15 (c).

Yaron Bromberg e Hui Cao também exploram o regime oposto ao *speckle* super Rayleigh, que é conhecido como sub Rayleigh. Nessa situação, a intensidade é distribuída mais uniformemente entre os grãos de *speckle*. Intuitivamente, a saturação da intensidade reduz as flutuações de intensidade e o contraste do *speckle*. Para gerar os *speckle* sub Rayleigh, os autores usam uma transformação não linear que satura a amplitude do campo de *speckle*, mas a fase é mantida intocada. Essa transformação pode ser escrita da seguinte forma;

$$h(E_{Ray}) = \sqrt{1 - e^{-|E_{Ray}|^2}} e^{i\theta_{Ray}}, \quad (2.1.2)$$

onde é $\theta_{Ray} = \arg(E_{Ray})$ a fase do campo do *speckle* Rayleigh. Os autores observaram *speckles* bem próximo do Rayleigh para essa transformação não linear, quando é colocada somente a fase da transformada de Fourier inversa no MEL, desconsiderando a amplitude do campo.

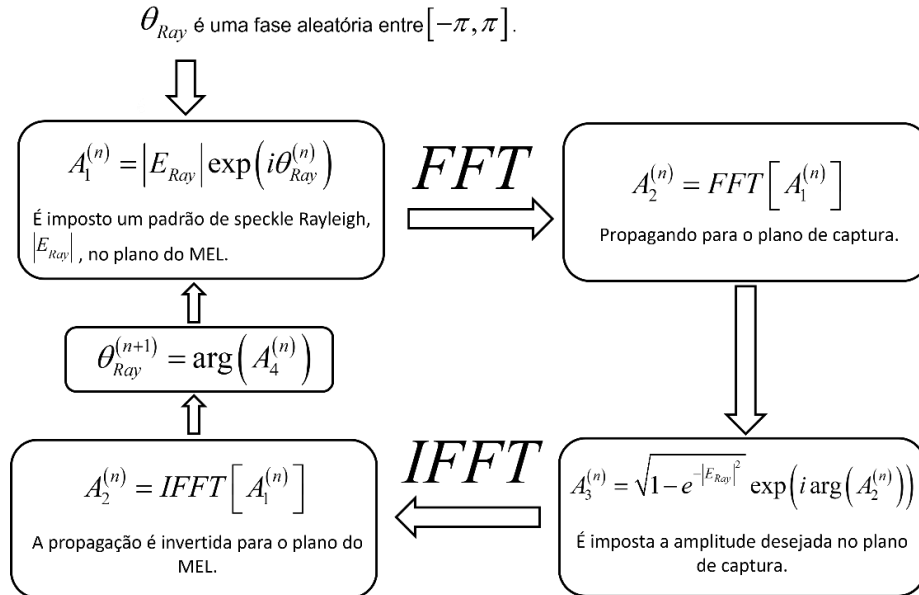
Para contornar essa dificuldade experimental, os autores aplicam um processo de interação baseado no algoritmo de Gershberg-Saxton [24], onde usando transformadas de Fourier o campo foi propagado para frente e para trás entre o plano do MEL e o plano de Fourier. Em cada etapa de interação, a amplitude é corrigida no plano de Fourier usando a transformação desejada,

$$\sqrt{1 - e^{-|E_{Ray}|^2}}, \quad (2.1.3)$$

e definimos a amplitude no plano do MEL como sendo sempre a amplitude correspondente a uma iluminação uniforme.

Após 50 interações o algoritmo converge para o padrão de *speckle* no plano de Fourier com intensidade proporcional a $1 - e^{-|E_{Ray}|^2}$ e a correspondente matriz de fase no plano do MEL é obtida. O algoritmo é repetido com o campo Rayleigh E_{Ray} inicial diferente para gerar um conjunto de matrizes de fase, que são enviadas ao MEL. Para melhor explicar a geração de *speckles* sub Rayleigh usamos o diagrama mostrado na figura 14, onde é explicado o algoritmo de Gersheberg-Saxton descrito pelos autores.

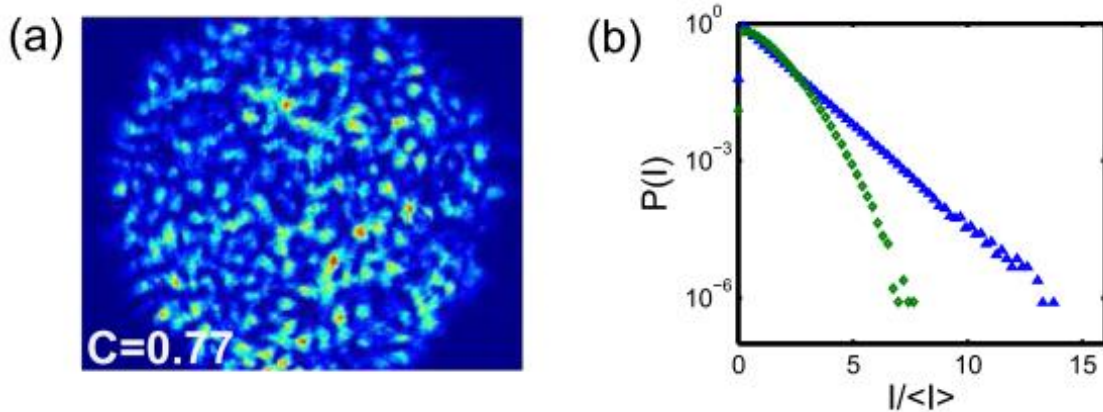
Figura 16: Algoritmo do Gersheberg-Saxton.



Fonte: Autor, 2022.

Os padrões de *speckle* sub Rayleigh gerados apresentam um baixo contraste ($C = 0,77$), e o histograma da intensidade decai mais rápido que a exponencial negativa, como visto na figura 17. Ao serem comparadas as figuras 15 (a) e 17 (a), pode-se constatar que a distribuição de intensidade entre os grãos de *speckles* sub Rayleigh é mais homogênea que para os *speckles* Rayleigh.

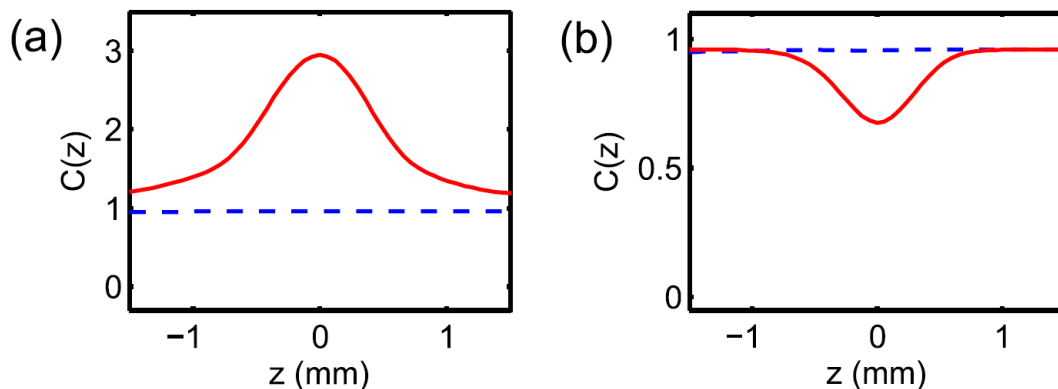
Figura 17: Resultados experimentais para speckles sub Rayleigh. (a) Padrão de intensidade de um speckle sub Rayleigh. (b) Distribuições de intensidade para os padrões de speckle.



Fonte: [22].

Uma característica interessante dos speckles não Rayleigh é que ao longo da propagação do feixe a estatística do speckle muda. De modo que o padrão de speckle retorna à granularidade da estatística do speckle Rayleigh. Então, os autores analisaram a propagação do feixe do plano da imagem até o plano de Fourier. Na figura 18 observamos um comportamento semelhante tanto para o speckle super Rayleigh como para o sub Rayleigh.

Figura 18: (a) Medições do contraste do padrão de speckle, para speckles Rayleigh (linhas tracejadas) e para o super Rayleigh (linha vermelha). (b) O mesmo de (a) para speckles sub Rayleigh.



Fonte: [22].

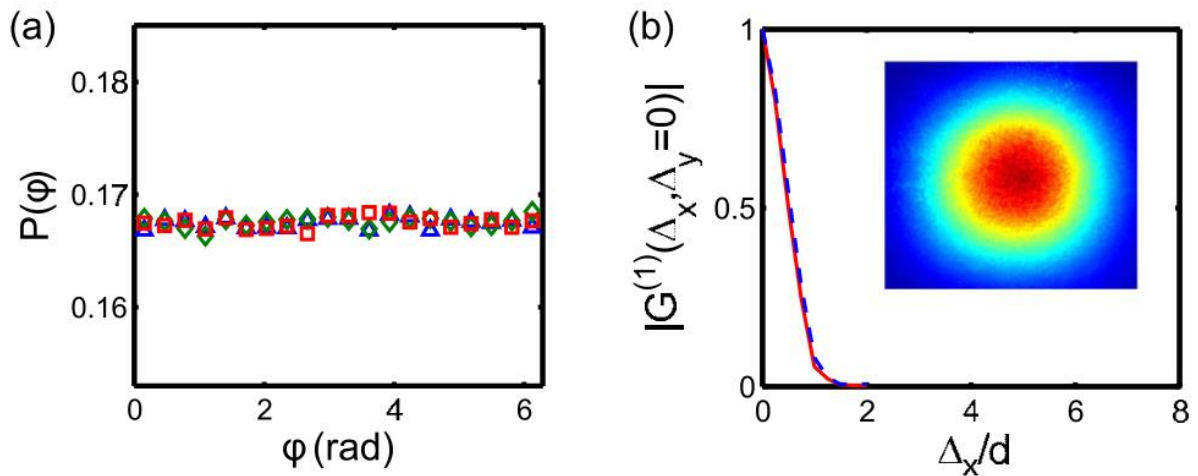
Yaron Bromberg e Hui Cao analisam os fatores que levam a observação de estatística não Rayleigh no plano do MEL. Para isso acontecer deve ocorrer a quebra de uma de duas condições para observar o *speckle* Rayleigh. Diante disso, ou as fases deixariam de ser uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 2\pi]$, ou os campos em pixels diferentes se tornariam correlacionados. Na figura 19 (a), podemos analisar as fases usadas nos histogramas para gerar o *speckle* Rayleigh (triângulos azuis), *speckle* super Rayleigh (losangos verdes) e sub Rayleigh (quadrados vermelhos). Assim, os três histogramas permanecem constante no intervalo $[0, 2\pi]$, significando que a estatística não Rayleigh vem da correlação entre os pixels do MEL.

Os autores usam a correlação entre os campos do MEL, dada por,

$$G_{MEL}^{(1)}(\Delta_x, \Delta_y) = \left\langle E_{MEL}(x, y) E_{MEL}^*(x + \Delta_x, y + \Delta_y) \right\rangle, \quad (2.1.4)$$

onde a relação é obtida usando a representação espacial da função de coerência mútua. As curvas $G_{MEL}^{(1)}(\Delta_x, \Delta_y)$, na figura 19 (b), representam *speckles* super Rayleigh (linhas tracejadas) e sub Rayleigh (linha vermelha) e os campos em diferentes macros pixels são não correlacionados.

Figura 19: (a) Os histogramas de fase usados para gerar os *speckles* não Rayleigh. (b) A correlação do campo no plano do MEL. Onde $d = 80 \mu\text{m}$ o tamanho do macro pixel.



Fonte: [22].

A correlação dos campos indica que para mais de um macro pixel os campos não são correlacionados, levando a crer que a estatística não Rayleigh deve ter correlações de alta ordem. Como $G_{MEL}^{(1)}(\Delta_x, \Delta_y) = 0$, indica que os campos separados por uma distância Δ não são correlacionados, mas não significa que os campos são estatisticamente independentes.

Para investigar a correlação de alta ordem, Yaron Bromberg e Hui Cao, estudam numericamente as contribuições das correlações de campo de segunda ordem para o contraste dos padrões de *speckle*. O quadrado do contraste do padrão de *speckle* no plano de Fourier é dado por,

$$C^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{r_1, r_2, r_3, r_4} \left\langle e^{i(\psi_{r_1} + \psi_{r_2} - \psi_{r_3} - \psi_{r_4})} \right\rangle \delta_{r_1 + r_2 - r_3, r_4} - 1, \quad (2.1.5)$$

onde N é o número de pixels do MEL, $\langle \dots \rangle$ denota a média de ensemble e soma-se sobre os pixels do MEL. Os autores decompõem a soma em quatro termos,

$$C^2 = \Gamma_1^{(2)} + \Gamma_2^{(2)} + \Gamma_3^{(2)} + \Gamma_4^{(2)} - 1, \quad (2.1.6)$$

sendo que $\Gamma_p^{(2)}$ é a correlação de segunda ordem entre campos com p pixels diferentes.

Para o primeiro termo da soma, $\Gamma_1^{(2)}$, a condição é que na soma dos p pixels um pixel pode ser diferente dos demais, levando aos demais serem iguais. No segundo termo, $\Gamma_2^{(2)}$, dois pixels serão diferentes dos demais, podendo os outros dois serem iguais. De maneira semelhante, para $\Gamma_3^{(2)}$, deve haver três pixels diferentes e o quarto pode ser igual a um desses. No quarto e último termo, $\Gamma_4^{(2)}$, os quatro pixels são diferentes.

Na tabela 1, são numericamente avaliados os termos $\Gamma_p^{(2)}$ que correspondem às correlações de segunda ordem $G_{MEL}^{(2)}(r_1, r_2, r_3, r_4 = r_1 + r_2 - r_3) = 0$ para todas as combinações dos índices $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$. Vemos na tabela 1 os resultados numéricos para 5000 padrões de fase com 100 pixels.

Tabela 1: Avaliação numérica de $\Gamma_p^{(2)}$, a correlação de segunda ordem entre campos em p pixels diferentes, para speckles de diferentes estatísticas.

| | $\Gamma_1^{(2)}$ | $\Gamma_2^{(2)}$ | $\Gamma_3^{(2)}$ | $\Gamma_4^{(2)}$ |
|------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Rayleigh | 0,0 | 2,0 | 0,0 | 0,0 |
| Super Rayleigh, $h(E) = E^2$ | 0,0 | 2,0 | 0,0 | 0,7 |
| Super Rayleigh, $h(E) = E^4$ | 0,0 | 2,0 | 0,0 | 5,6 |
| Sub Rayleigh | 0,0 | 2,0 | 0,0 | -0,4 |

Fonte: Adaptado de [22].

Ao analisar a tabela 1, pode-se tirar a conclusão de que a origem da estatística não Rayleigh é $\Gamma_4^{(2)}$, isto é, a correlação entre quatro pixels diferentes. O método desenvolvido é capaz de gerar padrões de *speckles* controlando-se a estatística da intensidade usando o Modulador Espacial de Luz (MEL) para redistribuir a intensidade entre os grãos de *speckle*. Os autores então relacionaram a estatística não Rayleigh a correlações de alta ordem das ondas parciais espalhadas. Desta forma, novas aplicações foram propostas como o uso dos *speckles* super Rayleigh em microscopia de iluminação por *speckles*, e dos sub Rayleigh em imageamento utilizando iluminação por *speckles*.

2.2. Personalizando *speckles* com distribuição de intensidade Weibull

Em 2015, João Paulo e colaboradores usaram um holograma de fase gerado por computador para codificar tanto a fase como a amplitude de um campo de *speckle* Rayleigh elevado a uma potência. O método proposto nesse artigo permite gerar tanto o contraste acima de 1, como o contraste abaixo de 1, sem nenhum processo de otimização. Os autores então exploram o *speckle* não Rayleigh teoricamente e experimentalmente, com suas propriedades estatísticas de primeira ordem [23].

Inicialmente os autores demonstram que é direto o cálculo para a estatística da potência dos *speckles* Rayleigh. Supondo que o *speckle* Rayleigh é dado pelo campo complexo,

$$\psi = |\psi| \exp(i\phi), \quad (2.2.1)$$

onde $|\psi|$ é a amplitude do campo e ϕ é a fase aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[-\pi, \pi]$. A intensidade desse campo pode ser escrita como,

$$I = |\psi|^2. \quad (2.2.2)$$

Os autores então aplicam a transformação de potência para a amplitude do *speckle*,

$$|\psi| \rightarrow |\psi|^\alpha, \quad (2.2.3)$$

de modo que a fase é mantida intocável. A transformação da intensidade é dada então por,

$$I \rightarrow W = |\psi|^{2\alpha}, \quad (2.2.4)$$

onde a fase α é um número real. A variável aleatória W torna-se relacionada com a variável aleatória I através da transformação,

$$W = f(I) = I^\alpha. \quad (2.2.5)$$

Os autores usam então a mesma transformação monotônica f , utilizada na sessão 1.2 deste trabalho, então a função densidade de probabilidade (FDP) será encontrada através da relação das duas variáveis aleatórias W e I , descrita da seguinte maneira,

$$\rho_w(W) = \rho[f^{-1}(W)] \left| \frac{dI}{dW} \right|, \quad (2.2.6)$$

onde $\rho(I)$ será a função densidade de probabilidade da exponencial negativa, expressa pela equação (1.2.4).

A partir da relação (2.2.6) é possível encontrar a nova distribuição, expressa como,

$$\rho_w(W) = \frac{1}{2\alpha\sigma^2} W^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \exp\left(-\frac{W^{1/\alpha}}{2\sigma^2}\right), \quad (2.2.7)$$

onde σ é o desvio padrão para a parte real e imaginária do *speckle* Rayleigh. A distribuição descrita pela equação (2.2.7), é conhecida como distribuição de Weibull. Para $\alpha=1$, a distribuição volta a ser a exponencial negativa. Com isso para outros valores de α teremos *speckle* não Rayleigh.

Os autores então descrevem o contraste para essa nova distribuição que é dado por,

$$C = \sigma_w / \langle W \rangle = \sqrt{\langle W^2 \rangle / \langle W \rangle^2 - 1}, \quad (2.2.8)$$

onde $\langle W \rangle$ é o primeiro momento e $\langle W^2 \rangle$ é o segundo momento. Que foram calculados respectivamente,

$$\langle W \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W \rho_w(W) dW = (2\sigma^2) \Gamma(\alpha + 1), \quad (2.2.9)$$

e,

$$\langle W^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W^2 \rho_w(W) dW = (2\sigma^2)^{2\alpha} \Gamma(2\alpha + 1), \quad (2.2.10)$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função Gama. Ao generalizar as equações acima, os autores descrevem a relação do enésimo momento,

$$\langle W^n \rangle = (2\sigma^2)^{n\alpha} \Gamma(n\alpha + 1). \quad (2.2.11)$$

O contraste é reescrito utilizando as equações da média e variância. Substituindo as equações (2.2.9) e (2.2.10) na equação (2.2.8), teremos que,

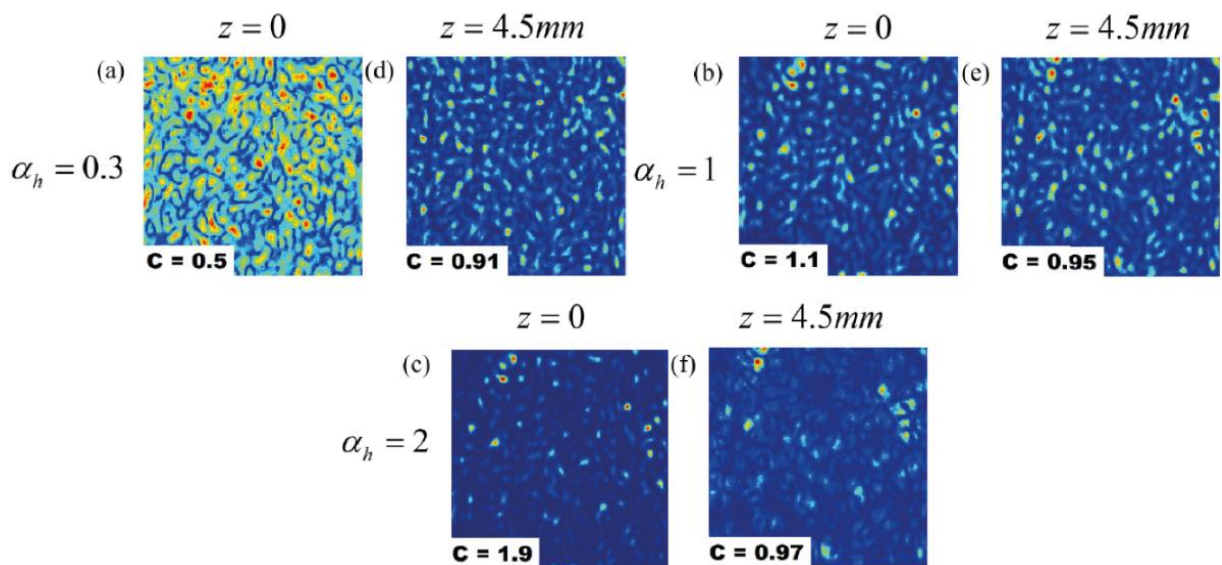
$$C = \sqrt{\frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{[\Gamma(\alpha + 1)]^2} - 1}, \quad (2.2.12)$$

então dependendo dos valores de α , teremos valor maior ou menor que 1 para o contraste, caracterizando o *speckle* não Rayleigh. Se $\alpha=1$, o valor do contraste é igual 1, sendo característica do *speckle* totalmente desenvolvido.

João Paulo e colaboradores, geraram experimentalmente os *speckles* não Rayleigh utilizando um laser argônio (Ar^+), operando em 514nm , o qual é expandido e colimado. O feixe expandido forma uma onda plana que ilumina uniformemente o Modulador Espacial de Luz (MEL). O holograma de fase utilizado é do tipo 3 [51] e gerado no computador.

O plano da imagem do MEL foi definido como sendo o plano $z=0$ e corresponde às figuras 20 (a), 20 (b) e 20 (c). Os autores também mediram a intensidade a $4,5\text{mm}$ de distância do plano da imagem, padrões nas figuras 20 (d), 20 (e), e 20 (f). Na figura 20 (a) para $\alpha_h = 0,3$, temos o *speckle* sub Rayleigh e para o plano $4,5\text{mm}$, figura 20 (d), o *speckle* volta a se aproximar do *speckle* Rayleigh. Como já foi discutido na teoria acima, quando o $\alpha_h = 1$, o padrão tanto no plano da imagem, figura 20 (b) como no plano seguinte, figura 20 (e), tem o comportamento do padrão de *speckle* Rayleigh.

Figura 20: Padrões de speckle medido experimentalmente para os parâmetros, $\alpha_h = 0,3;1;2$. Os padrões foram medidos no plano da imagem do MEL ($z = 0$) e em ($z = 4,5\text{mm}$) que é o plano longe do plano da imagem.

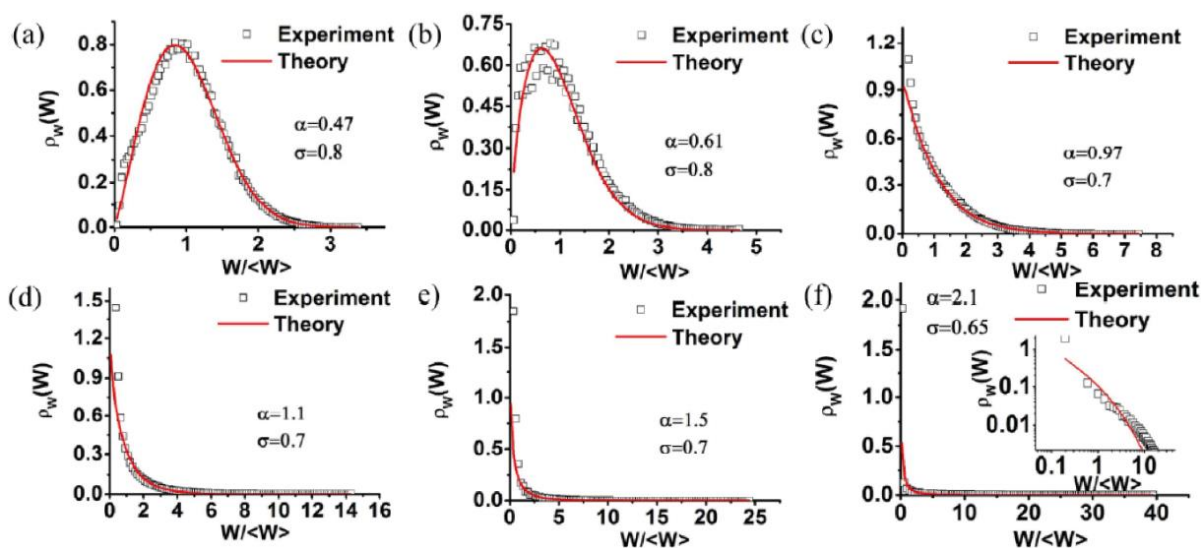


Fonte: [23]

Na figura 20 (c) é possível observar um padrão de *speckle* super Rayleigh para $\alpha_h = 2$ quando a intensidade é medida no plano da imagem. No plano longe do plano da imagem, figura 20 (f), o padrão volta ser Rayleigh. Em todos esses padrões medidos experimentalmente o contraste é calculado usando a equação (2.2.8), e a média é calculada sobre todos os pixels. Com isso, o contraste informa quais os padrões de *speckle* tem estatística Rayleigh, como nas figuras 20 (b), (e), que não sofrem alterações significativas ao longo da propagação. Já os *speckles* com estatística não Rayleigh são observados no plano da imagem do MEL.

João Paulo e colaboradores, mostraram na figura 3 os histogramas médios em que são calculados numericamente o histograma de cada padrão de intensidade de *speckle* e calculada a média dos histogramas para 1.000 realizações de *speckle*. A intensidade medida foi normalizada pela intensidade média correspondente. Também normalizamos os histogramas experimentais de modo que a área total seja 1. As figuras 21 (a) – 21 (f) mostram histogramas médios de padrões de *speckle* medidos para diferentes valores do parâmetro α_h codificado no holograma: Figura 21 (a), $\alpha_h = 3,0$; figura. 21 (b), $\alpha_h = 0,7$; figura 21 (c), $\alpha_h = 0,7$; figura 21 (d), $\alpha_h = 1$; figura 21 (e), $\alpha_h = 1,5$; e figura 21 (f), $\alpha_h = 2$.

Figura 21: Medições de histogramas de intensidade médios (quadrados abertos) para padrões de *speckle* com vários valores de α_h . Foi calculada a média de diferentes realizações de *speckle*. As FDPs ajustadas da Eq. (2.2.7) são apresentados em linhas vermelhas. Em (f), temos o mesmo gráfico com os eixos horizontal e vertical em escala logarítmica.



Fonte: [23].

Nos histogramas presentes na figura 21, é possível analisar dois parâmetros α e σ que regem o fite dos histogramas experimentais. Os autores então chegam à conclusão que o parâmetro α não corresponde ao parâmetro α_h presente no holograma de fase. Isso acontece porque o holograma utilizado no plano de Fourier gera várias ordens de difração, e com isso o sinal deve ser filtrado para selecionar a ordem desejada. Então, esse processo de filtragem leva a perda de uma parte do sinal desejado.

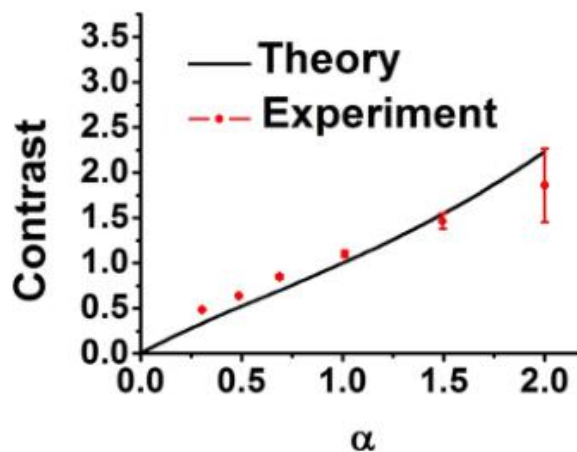
O parâmetro σ vai estar ligado a estatística Rayleigh, conhecido como desvio padrão, que se relaciona com a média da intensidade do padrão de *speckle*. Vide a equação (1.2.13),

$$\sigma_I = \langle I \rangle = 2\sigma^2. \quad (2.2.13)$$

Portanto, vemos nos histogramas da figura 21, que σ tem algumas flutuações causadas pela mudança de potência do laser durante o processo de medição para diferentes valores de α_h , mas mantém valores bem próximos.

Os autores analisam na figura 22 a relação do contraste medido no plano da imagem do MEL, pontos vermelhos, e o contraste calculado pela equação (2.2.12), linha preta. Ambos os resultados estão relacionados com o parâmetro α . Pode-se observar que o contraste aumenta quando o valor de α aumenta.

Figura 22: Resultados experimentais e teóricos para o contraste no plano da imagem no MEL, como função do parâmetro α .



Fonte: [23].

João Paulo e colaboradores, mostram neste trabalho a capacidade de gerar campos de *speckle* não Rayleigh usando um holograma somente de fase para codificar tanto a fase quanto a amplitude do campo. O cálculo de tais hologramas não requer nenhuma otimização, portanto não leva muito tempo para a geração de grandes conjuntos de amostras de *speckle*. Analisaram também os *speckles* não-Rayleigh através de suas propriedades estatísticas de primeira ordem.

2.3. Customizando campos de *speckle* com diferentes funções densidade de probabilidade da intensidade

Em 2018, Nicholas Bender e colaboradores desenvolveram um método geral para personalizar a estatística do padrão de *speckle* modulando a fase da frente de onda de um feixe laser utilizando o Modulador Espacial de Luz (MEL). Começando então com um padrão de *speckle* Rayleigh, os autores aplicaram numericamente uma transformação na intensidade para obter um novo padrão de *speckle* governado pela Função de Densidade de Probabilidade (FDP) desejada. Esse padrão então será gerado experimentalmente no campo distante ou plano de Fourier do MEL, onde a fase de modulação no plano de MEL é determinada numericamente por um algoritmo de otimização [25-26].

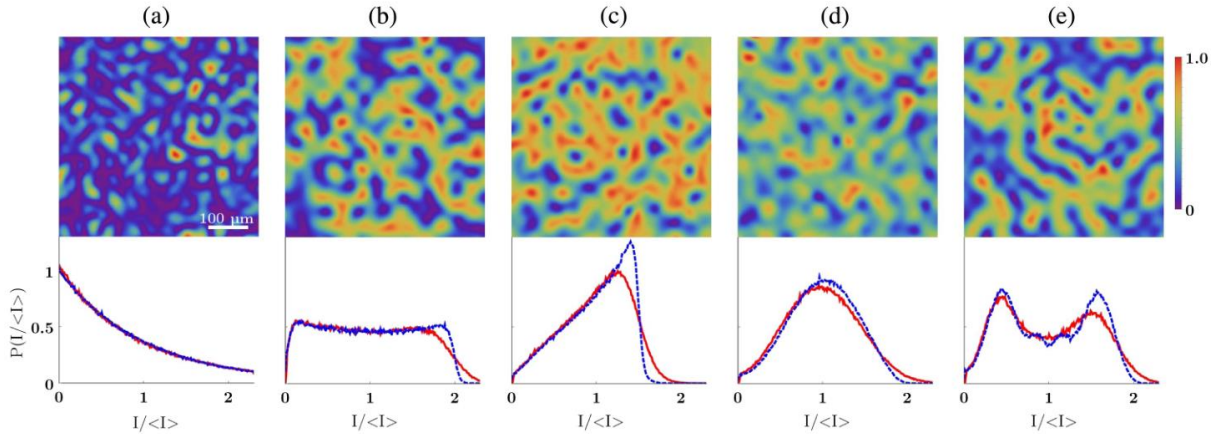
Quando uma fase aleatória uniformemente distribuída é exibida no MEL, a intensidade capturada pela câmera é o padrão de *speckle* Rayleigh, como mostrado na figura 22 (a). Os autores executam uma transformação local na intensidade de um padrão de *speckle* gravado, que é convertido para um padrão de intensidade governado pela FDP desejada. A intensidade da FDP do padrão de *speckle* Rayleigh é dado pela equação (1.2.10), podemos reescrever essa equação da seguinte maneira,

$$P(I) = \exp\left[\frac{-I/\langle I \rangle}{\langle I \rangle}\right], \quad (2.2.14)$$

a qual pode ser relacionada com a FDP alvo $F(\tilde{I})$ da seguinte forma,

$$P(I)dI = F(\tilde{I})d\tilde{I}. \quad (2.2.15)$$

Figura 23: (a) Padrão de speckle Rayleigh e (b–e) padrões de speckle personalizados com estatísticas de intensidade distintas. As FDPs associadas, mostradas na linha inferior, são, respectivamente, do tipo (b) uniforme, (c) aumentando linearmente, (d) atingindo um pico em intensidade diferente de zero, e (e) bimodal. As curvas sólidas vermelhas são medições experimentais, enquanto as curvas tracejadas azuis são de padrões de manchas alvo gerados numericamente.



Fonte: [25].

A relação (2.2.15), será usada para determinar a transformação local da intensidade $\tilde{I} = f(I)$, que é aplicada sobre os valores da intensidade do padrão Rayleigh para criar um padrão de *speckle* com a função de densidade de probabilidade (FDP) desejada. Para resolver a relação (2.2.15), a reescrevemos na forma de integral, considerando $\langle I \rangle = 1$:

$$\int_0^I e^{-I'} dI' = \int_{\tilde{I}_{\min}}^{\tilde{I}} f(\tilde{I}') d\tilde{I}'. \quad (2.2.16)$$

Resolvendo as integrais e isolando \tilde{I} como função de I obtemos a transformação de intensidade local desejada. Além de alterar a FDP da intensidade, tal transformação pode ser usada para regular os valores de intensidade máxima e mínima do padrão transformado. Podemos definir arbitrariamente \tilde{I}_{\max} ou \tilde{I}_{\min} , desde que as relações de normalização sejam válidas,

$$\int_{\tilde{I}_{\min}}^{\tilde{I}_{\max}} F(\tilde{I}') d\tilde{I}' = 1, \quad (2.2.17)$$

e,

$$\langle \tilde{I}' \rangle = \int_{\tilde{I}'_{\min}}^{\tilde{I}'_{\max}} \tilde{I}' F(\tilde{I}') d\tilde{I}' = \langle I \rangle. \quad (2.2.18)$$

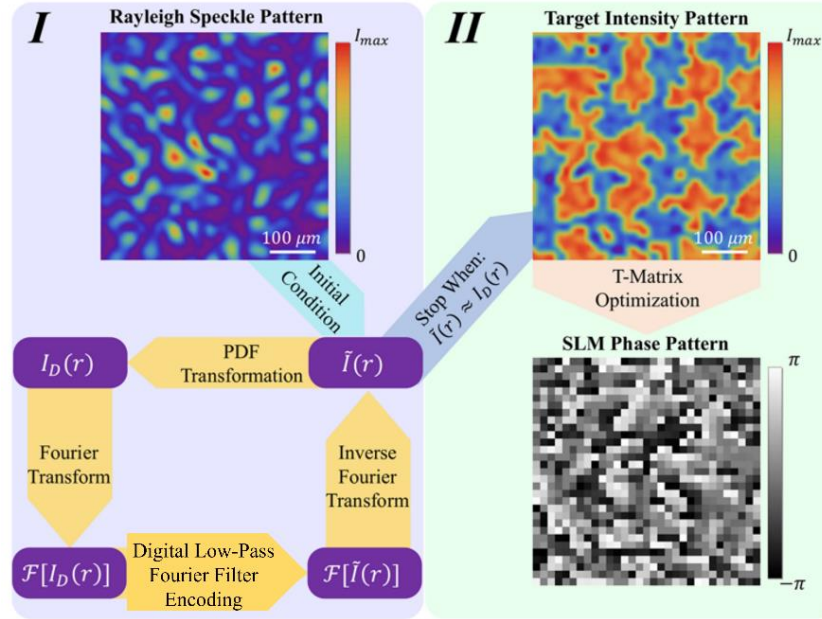
A transformação local é tipicamente não linear e, portanto, produz componentes de frequência espacial que são mais altos do que o padrão original e, portanto, fora da faixa de frequências acessíveis no experimento. Os autores removem essas frequências utilizando um filtro digital de passa-baixa de Fourier onde a janela permitida será um quadrado. O padrão filtrado resultante vai ter uma FDP de intensidade $\tilde{F}(I)$ ligeiramente desviado do alvo $F(\tilde{I})$.

Para eliminar esses desvios, aplicamos uma nova transformação de intensidade local $\tilde{I} = \tilde{f}(I)$, obtida a partir da seguinte equação,

$$\int_{I_{\min}}^I \tilde{F}(I') dI' = \int_{\tilde{I}_{\min}}^{\tilde{I}} F(\tilde{I}') d\tilde{I}'. \quad (2.2.19)$$

O Processo de realizar uma transformação local de intensidade e, posteriormente, aplicar um filtro digital de passa-baixa de Fourier, pode ser repetido iterativamente como o método convencional de Gerchberg-Saxton, [24], até que a FDP alvo seja obtida para um padrão de *speckle* obedecendo às restrições de frequência espacial. Na figura 23 é possível analisar um diagrama que explica o processo de geração da estatística desejada no padrão de *speckle*.

Figura 24: Na parte I, vemos um método semelhante ao Gerchberg-Saxton. Na parte II, o processo de otimização para gerar a matriz de fase do MEL.



Fonte: Adaptado de [26].

Na figura 23 podemos ver os padrões de *speckle* experimentais com a estatística da intensidade customizada, com $\langle I \rangle$ normalizada para 1. Na figura 23 (b), é possível ver um padrão de *speckle* que foi projetado pelos autores para uma FDP de intensidade uniforme no intervalo de intensidade de $I = 0$ e $I = 2$. Esse exemplo ilustra a possibilidade para criar padrões de *speckle* com Funções Densidades de Probabilidades (FDPs) não decedentes, onde a intensidade foi confinada em um intervalo finito.

Também podemos observar na figura 23 (c), uma FDP que cresce linearmente com intensidade $P(I) = I$, e então decai rapidamente para 0 acima do limite de $I = \sqrt{2}$. Para mostrar que o método não é restrito a funções monotônicas, na figura 23 (d), os autores criaram um padrão de *speckle* com a FDP de intensidade unimodal dado por $\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)I\right]^2$ entre $I_{min} = 0$ e $I_{max} = 2$. Para mostrar a eficiência do método para estatísticas complexas, os autores também geram padrões de *speckle* com a FDP bimodal.

Podemos também analisar que quando os autores mudam a função densidade de probabilidade a topologia da intensidade do padrão de *speckle* muda, mas o

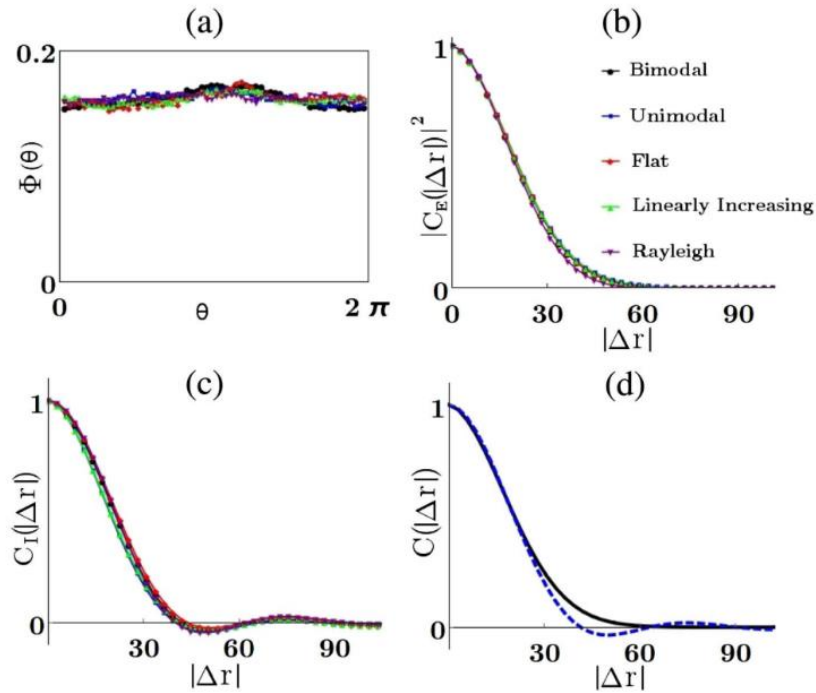
comportamento aleatório dos grãos é mantido. O perfil de intensidade de um padrão de *speckle* Rayleigh na figura 23 (a) pode ser caracterizado como uma teia interconectada aleatória de regiões escuras em torno de ilhas brilhantes. Por outro lado, para *speckles* com um FDP linearmente crescente na figura 23 (c), o perfil de intensidade é uma teia entrelaçada de canais brilhantes com regiões escuras dispersas aleatoriamente. Da mesma forma, a estrutura espacial dos *speckles* com um FDP bimodal na figura 23 (e) consiste em canais entrelaçados brilhantes e escuros.

Nicholas Bender e colaboradores verificam que a fase $\Phi(\theta)$ dos padrões de *speckle* são uniformemente distribuídas de 0 a 2π . Com isso, para encontrar $\Phi(\theta)$ os autores medem a matriz de transmissão e os padrões de fase do MEL para recuperar os campos associados aos padrões de intensidade registrados pela câmera, *Charge-coupled device* (CCD). Na figura 25 (a), temos o plote de $\Phi(\theta)$ na região alvo para as quatro FDPs da figura 23 (a) - 23 (e).

Os autores calculam a função de correlação espacial em duas dimensões do campo de *speckle* $C_E(|\Delta r|)$, onde na figura 25 (b), os padrões de *speckles* customizados tem o mesmo campo de correlação de um padrão de campo de *speckle* Rayleigh. Além disso, a função de correlação espacial da intensidade, $C_I(|\Delta r|)$, mostrada em figura 25 (c) para os quatro *speckles* personalizados, tem a mesma largura do que um padrão de *speckle* Rayleigh. Da mesma forma que os *speckles* Rayleigh, os padrões de *speckle* personalizados têm a mesma largura para $\langle |C_E(|\Delta r|)|^2 \rangle$ e $\langle C_I(|\Delta r|) \rangle$, conforme mostrado na figura 25 (d). Vemos que $\langle C_I(|\Delta r|) \rangle$ exhibe pequenas oscilações na cauda que são atribuídas à filtragem passa-baixa de Fourier do padrão de intensidade.

Figura 25: (a) O histograma de fase dos campos de speckle. (b) A função de correlação espacial de campo, $|C_E(|\Delta r|)|^2$, e (c) a função de correlação espacial de intensidade, $C_I(|\Delta r|)$. Nos painéis (a-c), os quatro padrões de speckle personalizados têm FDPs constantes (preto), linearmente crescente

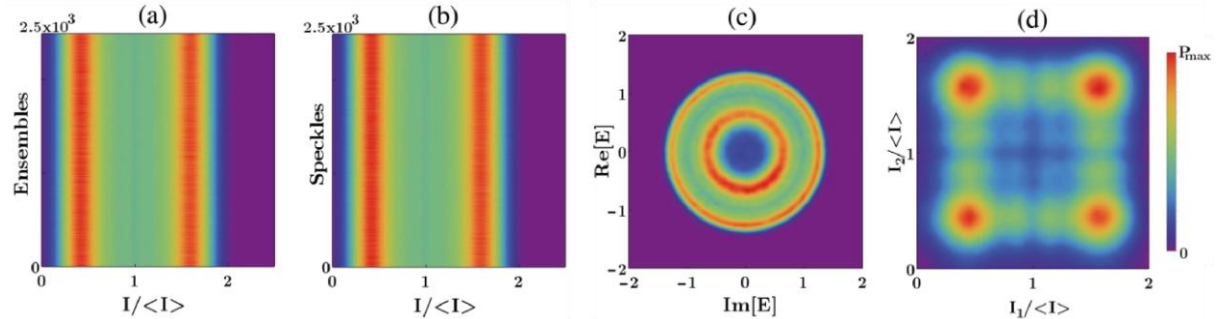
(vermelho), unimodal (azul) e bimodal (verde), e o roxo é para speckles Rayleigh. (d) Comparação das médias das cinco curvas em (b) e (c) para $|C_E(|\Delta r|)|^2$ (curva preta) com $C_I(|\Delta r|)$ (curva tracejada azul).



Fonte: [25].

Bender e colaboradores, na figura 26, analisam as propriedades estatísticas dos padrões de *speckle* customizados. Para cada padrão de intensidade de *speckle* os autores criaram 2500 padrões com 2500 grãos. As figuras 26 (a) e 26 (b) mostram os resultados para a Função Densidade de Probabilidade (FDP) bimodal. Na figura 26 (a), a FDP de intensidade obtida para cada um dos 2500 ensembles é invariante em função dos ensembles, indicando que os padrões de *speckles* são estacionários. Em (b), a média da FDP para posições espaciais individuais nos padrões de *speckle* também é invariante em função da posição espacial sendo estatisticamente idêntica à figura 26 (a), demonstrando a ergodicidade dos padrões de *speckle*. A figura 26 (c) mostra que a FDP conjunta dos *speckles* bimodais exhibe estatísticas circulares não-gaussianas. Em (d) vemos que a FDP conjunta $P(I_1, I_2)$ para duas intensidades de *speckle* em locais separados é maior que o tamanho médio de um grão de *speckle*.

Figura 26: (a) Média espacial da FDP da intensidade, $P_s(I)$. (b) FDP média para cada grão em cada posição espacial no padrão de intensidade, $P_E(I)$. (c) A FDP conjunta de amplitude complexa para o campo speckle, $P(\text{Re}[E], \text{Im}[E])$. (d) A FDP conjunta para duas intensidades, $P(I_1, I_2)$.



Fonte: [25].

Os autores calculam os momentos de intensidade de alta ordem para os padrões de *speckle* customizados, utilizando a equação (1.2.15),

$$\langle I^n \rangle = \int_0^\infty I^n P(I) dI, \quad (2.2.20)$$

que diferem das *speckles* Rayleigh, mostradas na Tabela 2. Para os *speckles* Rayleigh, os momentos de ordem superior são dados pela relação (1.2.9),

$$\langle I^n \rangle = n! \langle I \rangle^n. \quad (2.2.21)$$

Tabela 2: Momentos de intensidade de padrões de manchas com FDPs de diferentes intensidades.

| FDP | $\langle I \rangle$ | $\langle I^2 \rangle$ | $\langle I^3 \rangle$ | $\langle I^4 \rangle$ | $\langle I^5 \rangle$ | $\langle I^6 \rangle$ |
|----------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Exponencial Negativa | 1,00 | 2,00 | 6,00 | 24,0 | 120 | 720 |
| Constante | 1,00 | 1,35 | 2,06 | 3,39 | 5,87 | 10,51 |
| Aumento linear | 1,00 | 1,16 | 1,45 | 1,92 | 2,64 | 3,77 |
| Unimodal | 1,00 | 1,18 | 1,55 | 2,22 | 3,40 | 5,50 |
| Bimodal | 1,00 | 1,29 | 1,9 | 2,99 | 4,93 | 8,42 |

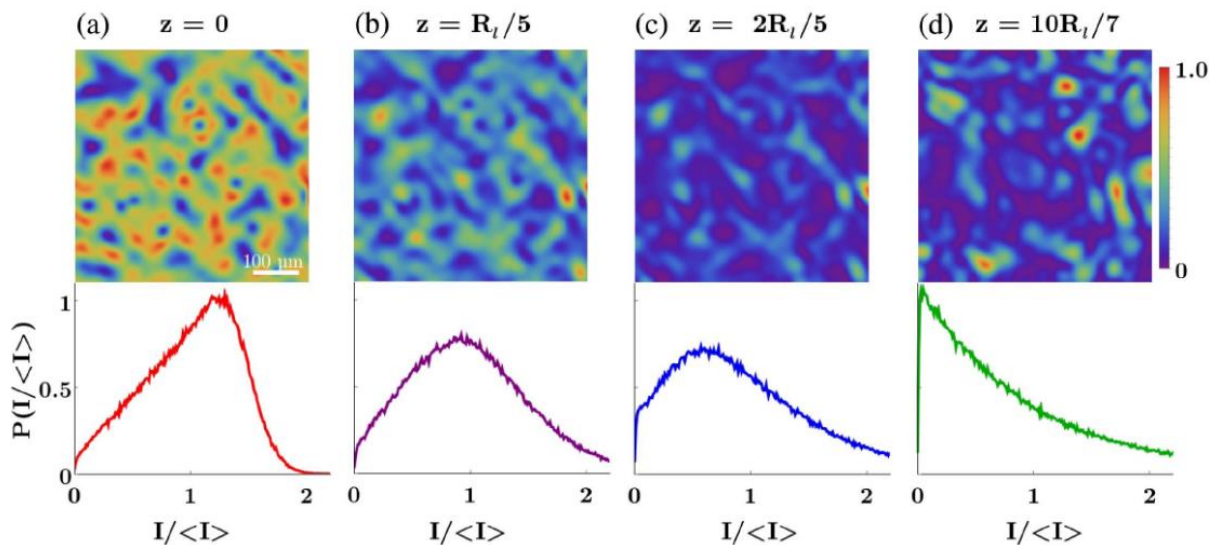
Fonte: Adaptado de [25].

A figura 27, mostra a evolução axial de um padrão de *speckle* que têm uma FDP linearmente crescente, onde o plano $z=0$ é o plano de Fourier. À medida que o padrão se aproxima de $z = R_t/5$, a FDP fica em forma de sino. Com mais propagação,

o máximo da FDP migra para um valor de intensidade menor, como mostrado na figura 26 (c) para $z = 2R_l/5$, até atingir $I=0$ onde os *speckles* reverts para a estatística Rayleigh em $z \approx R_l$, e além deste ponto a FDP mantém a forma de uma exponencial negativa, como mostrado na figura 26 (d), para $z = 10R_l/7$. De modo que, R_l corresponde ao comprimento de Rayleigh e fornece o comprimento longitudinal de um único grão *speckle*.

Bender e colaboradores, apresentaram um método geral para customizar as estatísticas de intensidade de um padrão de *speckle* usando um Modulador Espacial de Luz (MEL). Os padrões de *speckle* gerados possuem FDPs de intensidade e topologia radicalmente diferentes em relação aos *speckles* Rayleigh. No entanto, são *speckles* totalmente desenvolvidos que mantêm as características básicas de estacionaridade e ergodicidade. Suas propriedades estatísticas incomuns geram um novo tipo de padrão de manchas com estatísticas não gaussianas.

Figura 27: Evolução de padrões de *speckle* personalizados na propagação axial. A FDP da intensidade no plano de Fourier do MEL (a) é a linearmente crescente.



Fonte: Adaptado de [25].

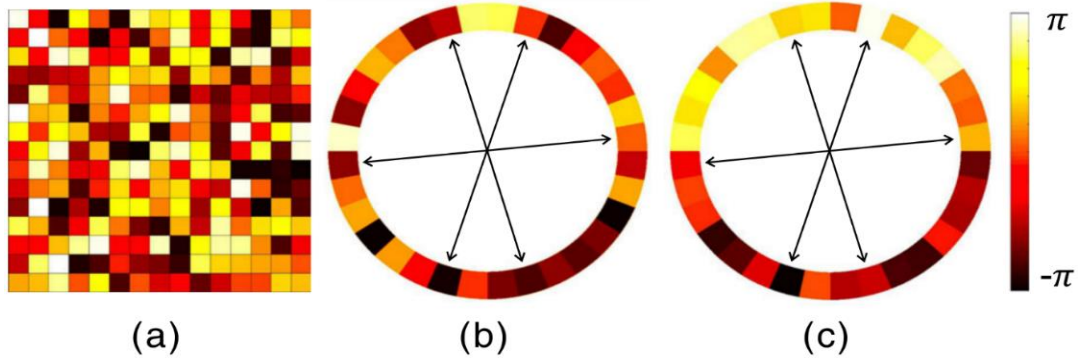
2.4. Geração de *speckles* não Rayleigh não difrativos

Ruifeng Liu e colaboradores, geraram campos ópticos de *speckle* com características não Rayleigh e não difrativos durante a propagação. A customização de *speckles* com estatística não Rayleigh e *speckles* não difrativos foram investigados forma independente em estudos anteriores. Os autores então reportam campos de *speckles* que não difratam ao longo da propagação e mantêm a estatística não Rayleigh de maneira simultânea [27].

Os autores apresentaram um método experimental para customizar os *speckles* não Rayleigh não difrativos (NRND) onde a frente de onda do feixe laser é codificada com o Modulador Espacial de Luz (MEL). Para gerar os *speckles* não difrativos, os autores reorganizam as fases aleatórias em uma fenda na forma de anel para gerar os NRND de forma a obter um contraste de intensidade $C = \sqrt{2}$.

Na figura 28, os autores comparam o design da máscara de fase para gerar o padrão de *speckle* NRND com a máscara de fase utilizada para gerar o *speckle* com a estatística Rayleigh. Para gerar o *speckle* Rayleigh a frente de onda deve ser codificada com uma fase aleatória uniformemente distribuída em $[-\pi, \pi]$, essa fase é vista na figura 28 (a). Já para gerar os *speckles* não difrativos é necessário iluminar uma abertura em forma de anel que é preenchido com uma fase aleatória uniformemente distribuída em $[-\pi, \pi]$, vide figura 28 (b). Porém, o *speckle* obtido dessa fase será não difrativo, mas com $C = 1$, de maneira que ainda será um *speckle* Rayleigh.

Figura 28: Máscaras de fase para ajustar as características estatísticas e difrativas de speckles. (a) Fases aleatórias em um plano. (b) Fases aleatórias em uma fenda em forma de anel. (c) Fases aleatórias antissimétricas em uma fenda em forma de anel.



Fonte:[27].

Para gerar *speckles* não difrativos com a estatística não Rayleigh, os autores usam a fase em forma de anel onde a fase será antissimétrica e central, vemos na figura 28 (c), por exemplo, um ponto claro com valor π terá como simétrico o ponto com valor $-\pi$. A fase então pode ser descrita matematicamente como,

$$\phi(\xi, \eta) = -\phi(-\xi, -\eta), \quad (2.2.22)$$

onde (ξ, η) são as coordenadas cartesianas na fase e $\phi \in [-\pi, \pi]$. De acordo com a teoria de Óptica de Fourier, quando uma frente de onda em forma de anel antissimétrica e central com fase aleatória $\phi(\xi, \eta)$ é passada por uma lente e observada no foco da lente, o campo de *speckle* será dado por,

$$\begin{aligned} g(x, y) &\propto \iint_S d\xi d\eta e^{i\phi(\xi, \eta)} e^{-i\frac{k}{f}(x\xi + y\eta)}, \\ &\propto \iint_S d\xi d\eta \cos(\psi) + i \iint_S d\xi d\eta \sin(\psi), \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

onde S é área da fenda em forma de anel, e $\psi(\xi, \eta; x, y) = \phi(\xi, \eta) - \frac{k}{f}(x\xi + y\eta)$. A parte imaginária do campo $\iint_S d\xi d\eta \sin(\psi)$ vai se anular, porque $\psi(\xi, \eta; x, y)$ é antissimétrica e central, o campo então será escrito como,

$$g(x, y) \propto \iint_S d\xi d\eta \cos(\psi), \quad (2.2.24)$$

de modo que o campo $g(x, y)$ segue a distribuição Gaussiana $N(0, \sigma^2)$, σ é o desvio padrão da amplitude da luz.

O campo de *speckle* poderá ser reescrito da seguinte maneira,

$$g(x, y) = \sigma g'(x, y), \quad (2.2.25)$$

tal que $g'(x, y)$ segue a distribuição Gaussiana $N(0, 1)$. A intensidade do padrão de *speckle* perto do foco, será dada por,

$$I(x, y) \propto |g(x, y)|^2 \propto g^2(x, y) \propto g'^2(x, y). \quad (2.2.26)$$

Como $g'^2(x, y)$ segue a distribuição “chi-square”. O contraste pode ser calculado usando a equação (1.2.15),

$$C = \frac{\sqrt{D(I)}}{\langle I \rangle} = \frac{\sqrt{D(g'^2)}}{\langle g'^2 \rangle} = \frac{\sqrt{2\langle I \rangle}}{\langle I \rangle} = \sqrt{2}, \quad (2.2.27)$$

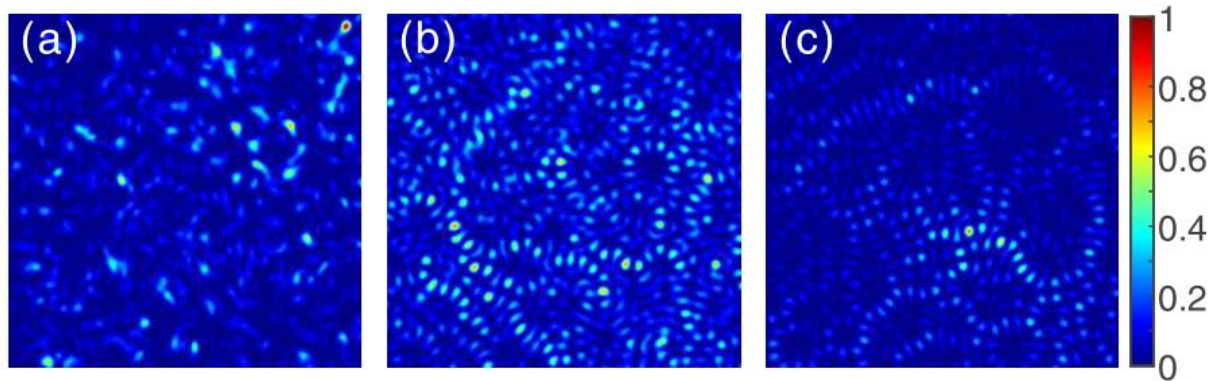
onde $\langle \cdot \rangle$ denota o valor médio e $D(\cdot)$ representa a variância.

Os autores então usam as máscaras de fase da figura 28, para gerar os padrões de *speckle* customizados após o plano do segundo Modulador Espacial de Luz (MEL) que conterà a abertura anelar. Com isso, para gerar os *speckles* com estatística não Rayleigh, os autores usam a mesma transformação não linear proposta por Yaron Bromberg e colaboradores já comentada na primeira seção desse capítulo. Na figura 29 (a), teremos os *speckles* não Rayleigh com contraste de intensidade $C = 1,36$.

Na figura 29 (b) foi captura experimentalmente padrões de *speckle* não difrativos com contraste de intensidade $C = 0,98$, obtidos quando o feixe com forma de anel e fase aleatória, emerge do MEL transparente. Os autores então obtêm um padrão de intensidade de *speckle* não difrativo ao longo de 20 comprimentos de Rayleigh. Para isso, são gerados feixes com fase antissimétrica aleatória no primeiro MEL, posteriormente eleva-se estes campos a uma potência e realiza-se a filtragem pela abertura em forma de anel utilizando o segundo MEL. De modo que, são obtidos

speckles NRND, como na figura 29 (c) onde o contraste é $C = 1,35$, valor experimental que corresponde à $\sqrt{2}$ quando a potência do campo é igual a 1.

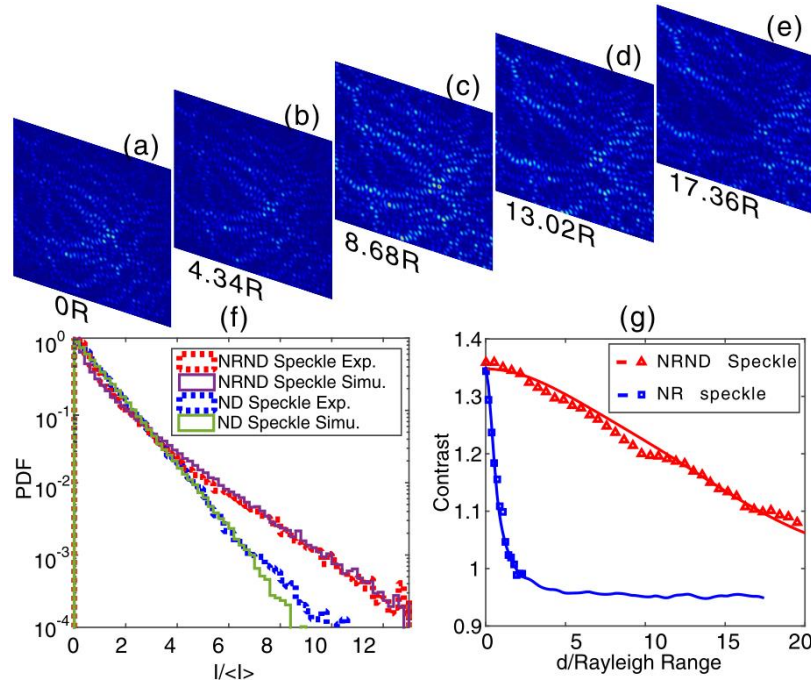
Figura 29: (a) Padrão de speckle não Rayleigh com $C = 1,36$. (b) Padrão de speckles não difrativas com $C = 0,98$. (c) Padrão de speckle NRND com $C = 1,35$.



Fonte: [27].

Ruifeng Liu e colaboradores, estudaram as características não difrativas dos speckles NRND na figura 30 (a)- 30 (e). Os padrões de speckles foram propagados a uma distância de 20 comprimentos de Rayleigh, onde cada comprimento de Rayleigh no experimento é $R = 1,85\text{cm}$. Pode-se observar que os padrões de intensidade de speckles NRND mantêm-se os mesmos ao longo da distância de propagação. Na figura 30 (f), os autores mostram as funções densidade de probabilidade (FDP) dos speckles não difrativos e dos speckles NRND, respectivamente. De maneira que as FDP's para os padrões de intensidade dos speckles não difrativos obedecem a exponencial negativa, ainda se comportando como um speckle Rayleigh não difrativo. Já para os padrões de speckle NRND que apresentam um contraste de $C = 1,35$, o comportamento é de uma FDP de um speckle super Rayleigh, que vai decair mais lentamente que a exponencial negativa com pontos de intensidade mais intenso que a FDP do speckle totalmente desenvolvido.

Figura 30: (a)-(e) Padrões de speckle NRND em 5 pontos de propagação. (f) As funções densidade de probabilidade (FDP's) para os speckles ND e speckles NRND. (g) Medições experimentais das propriedades de propagação do contraste do speckle não Rayleigh e speckle NRND.



Fonte: [27].

Na figura 30 (g) é possível analisar o comportamento do contraste ao longo da propagação do speckle NRND e do speckle não Rayleigh. Como já é conhecido dos trabalhos citados anteriormente durante esse capítulo, no caso do speckle não Rayleigh o contraste vai decair ao longo da propagação até voltar a ter o contraste do speckle Rayleigh que corresponde a $C = 1$. O contraste então vai apresentar uma queda mais acentuada quando mais se afasta do plano de Fourier do MEL. Porém, para o caso do speckle NRND o decaimento é muito mais devagar. A largura total à meia altura máxima do contraste do speckle não Rayleigh corresponde a um comprimento de Rayleigh.

Para gerar speckles NRND com contraste maior que dos campos $g_0(x, y)$ que têm contraste $C = \sqrt{2}$, os autores usaram a amplitude complexa $g_0(x, y)$ do speckle NRND elevada a uma potência, usando a mesma transformação não linear proposta por Yaron Bromberg e colaboradores. Os autores então analisam o padrão de speckle para as seguintes situações,

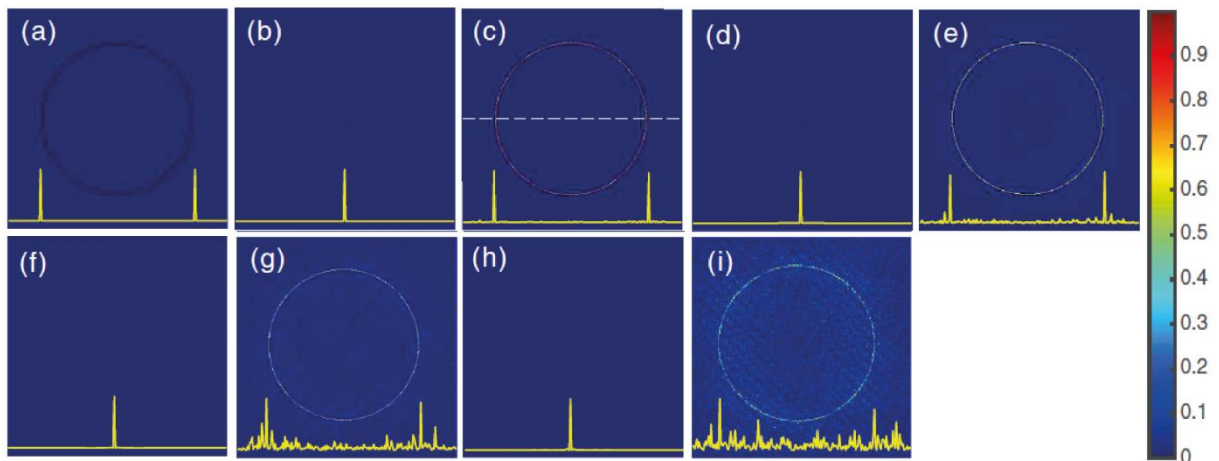
$$g_0^1(x, y), g_0^2(x, y), g_0^3(x, y), \dots, g_0^n(x, y), \quad (2.2.28)$$

onde $n=1,2,3,\dots$. Exploram primeiro a transformada inversa de Fourier para esses campos complexos elevados as respectivas potências,

$$F^{-1}[g_0^1(x,y)], F^{-1}[g_0^2(x,y)], F^{-1}[g_0^3(x,y)], \dots, F^{-1}[g_0^n(x,y)]. \quad (2.2.29)$$

Na figura 31 (a) – 31(b), vemos as simulações numéricas para a intensidade da transformada inversa de Fourier $|F^{-1}[g_0^1(x,y)]|^2$ dos padrões calculados $g_0^1(x,y), g_0^2(x,y), g_0^3(x,y), \dots, g_0^9(x,y)$, respectivamente. Ao analisar a figura 31, observamos que quando a potência é ímpar a informação fica distribuída ao longo de um anel, mas para potência par a informação fica concentrada no centro. Só sendo possível gerar *speckles* não Rayleigh com contraste alto para campos de *speckle* NRND elevados a potência ímpar.

Figura 31: A intensidade da transformada inversa de Fourier (IFT) de padrão de *Speckle* NRND (a)-(i) são os padrões de intensidade da IFT dos campos complexos $g_0(x,y), g_0^2(x,y), \dots$ e $g_0^9(x,y)$.

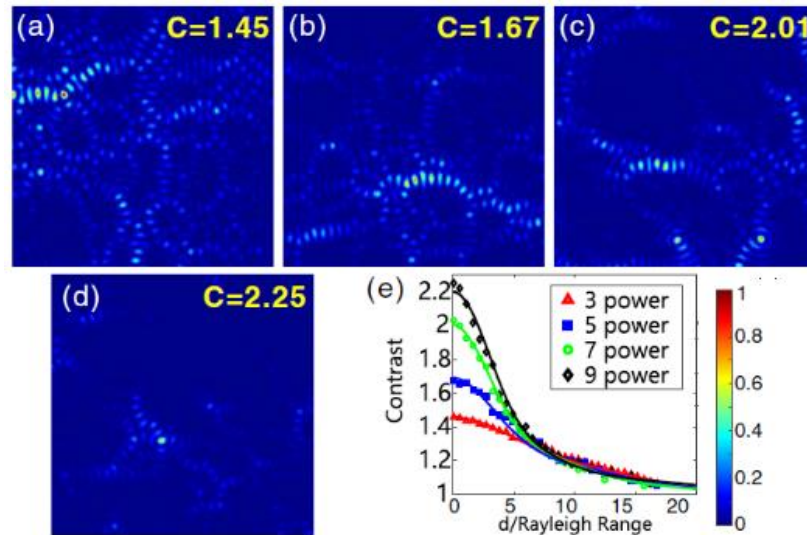


Fonte: Adaptado de [27].

Para gerar *speckles* NRND com contraste alto Ruifeng Liu e colaboradores, codificaram a amplitude complexa $F^{-1}[g_0^n(x,y)]$ no MEL de fase reflexivo. Em seguida, eles configuram cuidadosamente um MEL transparente como um filtro em forma de anel para filtrar o padrão de luz exigido. Os *speckles* obtidos e a propriedade de propagação axial do contraste são mostrados na figura 32. As Figuras 32 (a) – 32 (d) mostram os *speckles* NRND observados com contrastes de intensidade $C = 1,45$;

1,67; 2,01 e 2,25, respectivamente, quando as potências ímpares $n=3,5,7,9$ são escolhidas.

Figura 32: Geração experimental de speckles NRND com maior contraste de intensidade. (a), (b), (c) (d) Speckles NRND com potência ímpar $n = 3, 5, 7, 9$. (e) Variação axial do contraste para diferentes speckles NRND de potência ímpar.



Fonte: [27].

Ruifeng Liu e colaboradores, propuseram e demonstraram experimentalmente um método para gerar *speckles* que possuem simultaneamente estatísticas não-Rayleigh e propagação não-difrativa. Ao distribuir as fases aleatórias antissimétricas em uma fenda em forma de anel, puderam gerar os campos de *speckle* NRND com contraste de intensidade $C = \sqrt{2}$. Além disso, aplicando-se a transformação de potência ímpar nos *speckles* NRND com contraste $C = \sqrt{2}$ pode-se aumentar esse contraste e manter a propriedade não difrativa através da filtragem por uma abertura anelar.

Capítulo 3

Soluções exatas para *speckles* não difrativos não Rayleigh

O trabalho de Ruifeng Liu e colaboradores, contribuiu para a geração de campos de *speckle* não Rayleigh não difrativo (NRND) abrindo um leque de aplicações como gerar um potencial aleatório para estudos de átomos frios [48], projetar novos materiais usando um potencial aleatório criado por uma luz brilhante em sistemas coloidais [49], e para explorar estudos de localização de Anderson [50]. No entanto, os *speckles* NRND, apresentam limitações devido ao fato de que a propriedade não difrativa é obtida por meio de uma filtragem espacial por uma fenda em forma de anel do campo de *speckle* não Rayleigh. Esse princípio, leva ao fato de que esses campos de *speckle* NRND não necessariamente são soluções exatas para um feixe não difrativo e sim um arranjo experimental para obter feixes não difrativos. Com isso, o contraste cai de maneira muito rápida, levando ainda assim, a mudança da estatística de *speckle* durante a propagação.

Portanto, Ruifeng Liu e colaboradores, podem gerar apenas *speckles* que são filtrados pela fenda circular, isto é, os *speckles* super Rayleigh que correspondem à transformação não linear ao qual o campo de *speckle* Rayleigh é elevado a uma potência, como demonstrado por Yaron Bromberg e Hui Cao. Mas nesse caso, os *speckles* NRND com contraste $C = \sqrt{2}$ são elevados a uma potência ímpar apenas. Com base nessas limitações ainda presente neste último trabalho com *speckles* NRND, propomos um método mais eficiente para gerar campos exatos de *speckle* não Rayleigh e não difrativos (ENRND). Onde, criamos um algoritmo para mudar a fase do campo de *speckle* Rayleigh não difrativo que vai resultar diretamente uma faixa contínua de valores de fase de contrastes de intensidade correspondentes às estatísticas sub Rayleigh e super Rayleigh, como uma solução exata da equação escalar de Helmholtz.

3.1. Campos de speckles não Rayleigh não difrativos

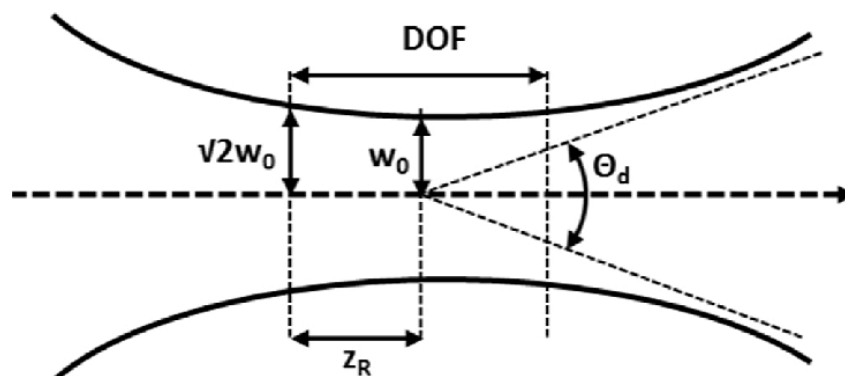
Quando a luz propaga no espaço livre ou em meios que não tenham propriedades que influenciem na sua propagação é natural que ela difracte ao longo da propagação. Esse comportamento também está presente em feixes de lasers que aumentam a sua largura ao longo da propagação. Como os feixes de laser são espacialmente coerentes permitem que as suas propagações em longas distâncias tenham baixas divergências. Essa propriedade faz com que os feixes de laser tenham diversas aplicações [52].

Quando os feixes Gaussianos são focalizados existe uma região próxima do foco chamada comprimento de Rayleigh z_R que descreve a distância de propagação sobre a qual o feixe se expande por um fator de dois. Esta distância é dada como,

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (3.1.1)$$

onde, λ é o comprimento de onda e w_0 é a cintura do feixe. Para uma região focal muito estreita, a faixa de Rayleigh pode ser muito pequena. Isso leva a uma redução da densidade de energia quando a distância do plano focal aumenta. Visualizamos o comprimento de Rayleigh na figura 33.

Figura 33: Demonstração do comprimento de Rayleigh. Onde, w_0 é a cintura do feixe no plano focal, z_R é o comprimento de Rayleigh, Θ_d é o ângulo total de divergência e DOF é "depth of focus" ou profundidade do foco.



Fonte: Adaptado de [53].

Aqui trataremos dos campos de luz que não expandem e nem difratam durante a propagação. Esses campos de luz são soluções exatas da equação de Helmholtz, em teoria, são invariantes na propagação e são denominados “não difrativos”. Podemos então considerar a situação em que o campo óptico pode ser representado por uma superposição de ondas planas, para obter soluções que representem feixes não difrativos.

Visualizamos então os feixes Bessel como um conjunto de ondas planas de igual amplitude com iguais componentes longitudinais do vetor de onda, k_z , essas superposições de ondas formam então um cone de luz em que o eixo do cone corresponde a direção de propagação de um dado feixe Bessel. Consideramos então que os vetores de onda \vec{k} estão na superfície do cone. Os vetores são também decompostos em componente transversal, k_t , e longitudinal, k_z , tal que,

$$k = |\vec{k}| = \sqrt{k_t^2 + k_z^2} . \quad (3.1.2)$$

A figura 34 mostra a representação geométrica dos vetores de onda para uma superposição de ondas planas. Para fazermos o estudo quantitativo do campo de speckle não difrativo, consideramos então a equação escalar de Helmholtz dada por,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) U(x, y, z) = 0, \quad (3.1.3)$$

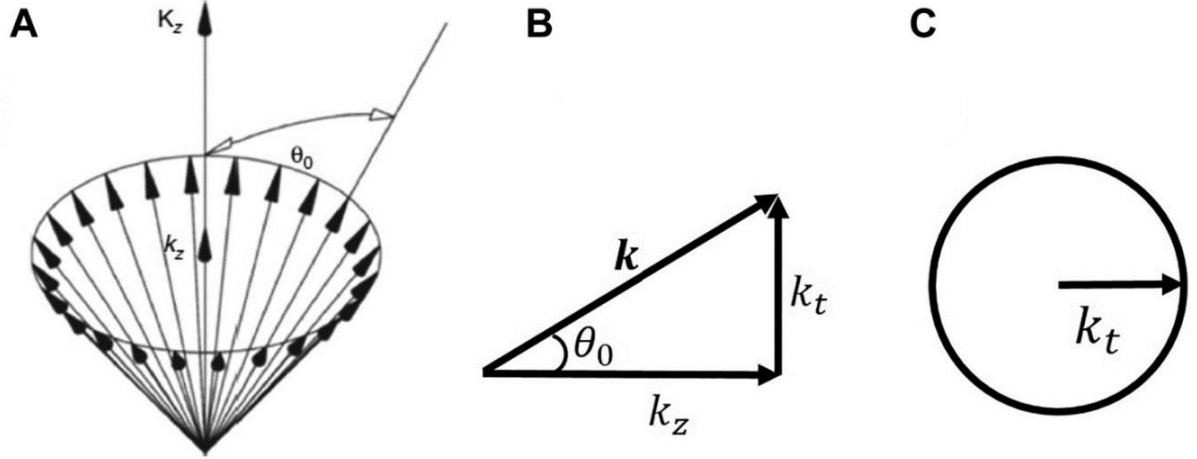
onde $k = \frac{\omega}{c}$ é o vetor de onda, tal que c é a velocidade da luz, ω a frequência angular da onda monocromática considerada e U um dos componentes do campo eletromagnético. Por conveniência, o eixo z é o eixo de propagação.

Cada onda plana é escrita como,

$$U(x, y, z) = e^{-ik_z z - ik_t(x \cos(\phi) + y \sin(\phi))}, \quad (3.1.4)$$

desde que a relação $k^2 = k_t^2 + k_z^2$ seja satisfeita. Onde k_z é a componente longitudinal do vetor de onda e k_t corresponde à componente transversal. A variável ϕ é o ângulo polar do plano transversal k_t .

Figura 34: (a) Disposições dos vetores de onda plana na superfície do cone de luz. (b) decomposição do vetor \vec{k} em suas partes transversa, k_t , e longitudinal, k_z . (c) a base do cone compreende uma circunferência de raio k_t .



Fonte: [54].

Para obtermos um feixe não difrativo, consideramos superposições de múltiplas ondas planas, todas com o mesmo vetor de onda axial. Esta superposição pode ser descrita usando a integral de Whittaker [52],

$$U(x, y, z) = e^{-ik_z z} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi, \quad (3.1.5)$$

a qual é solução da equação de Helmholtz. Podemos verificar esse fato simplesmente substituindo a equação (3.1.5) na equação (3.1.4),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) e^{-ik_z z} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi = 0, \quad (3.1.6)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_z^2 + k^2 \right) e^{-ik_z z} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi = 0, \quad (3.1.7)$$

como $k_t^2 = k^2 - k_z^2$, então,

$$e^{-ik_z z} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_t^2 \right) e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} d\phi = 0, \quad (3.1.8)$$

e podemos calcular os respectivos valores para as derivadas em x e y , obtendo,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)} = -k_t^2 \cos^2 \phi e^{ik_t(x \cos \phi + y \sin \phi)}, \quad (3.1.9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{ik_t(x\cos\phi+y\sin\phi)} = -k_t^2 \sin^2 \phi e^{ik_t(x\cos\phi+y\sin\phi)}, \quad (3.1.10)$$

a equação (3.1.8) ficará da seguinte maneira,

$$e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) \left[-k_t^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + k_t^2 \right] e^{ik_t(x\cos\phi+y\sin\phi)} d\phi = 0, \quad (3.1.11)$$

usando então a relação trigonométrica, $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$, obtemos,

$$e^{ik_z z} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) \left[-k_t^2 + k_t^2 \right] e^{ik_t(x\cos\phi+y\sin\phi)} d\phi = 0 \Rightarrow 0 = 0. \quad (3.1.12)$$

Então, fica provada que a integral de Whittaker satisfaz a equação de Helmholtz. Além disso, a função complexa $\Phi(\phi)$ define a fase e a amplitude das diferentes ondas planas que compõe o feixe não difrativo [52]. Comumente não existe solução exata para integral na equação (3.1.5). Trabalharemos com a forma discretizada da superposição contínua das ondas planas, que é expressa da seguinte maneira,

$$U(x, y, z) = \frac{2\pi}{Q-1} e^{-ik_z z} \sum_{n=0}^{Q-1} \Phi(\phi_n) e^{-ik_t(x\cos\phi_n+y\sin\phi_n)}, \quad (3.1.13)$$

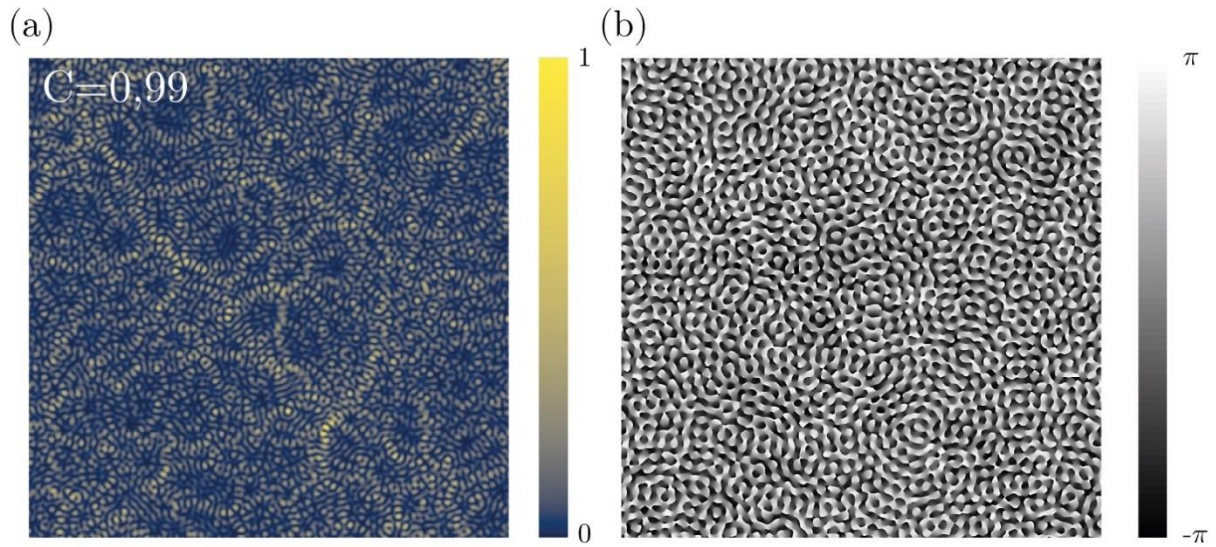
onde $\phi_n = 2n\pi/Q - 1$ para $n = 0, 1, 2, \dots, Q-1$. Usando Q em algumas centenas, é possível aproximar com boa precisão, o resultado da integral. Para o nosso caso, consideramos a função complexa como $\Phi(\phi_n)$, como,

$$\Phi(\phi_n) = \exp[i\theta(\phi_n)], \quad (3.1.14)$$

tal que, $\theta(\phi_n)$ é uma fase aleatória uniformemente distribuída em $[0, 2\pi]$.

Ao longo desse trabalho vamos considerar $Q = 200$ o número de ondas planas que compõe a superposição na equação (3.1.13). Na figura 35, calculamos numericamente a intensidade e a fase de um campo de speckle não difrativo com estatística Rayleigh que é solução da equação de Helmholtz. Esse campo é nomeado como solução exata de speckle Rayleigh não difrativo (ERND).

Figura 35: (a) Perfil de intensidade do campo de speckle ERND com $k_t = 37,7 \text{ mm}^{-1}$; (b) Padrão de fase do campo de speckle ERND.



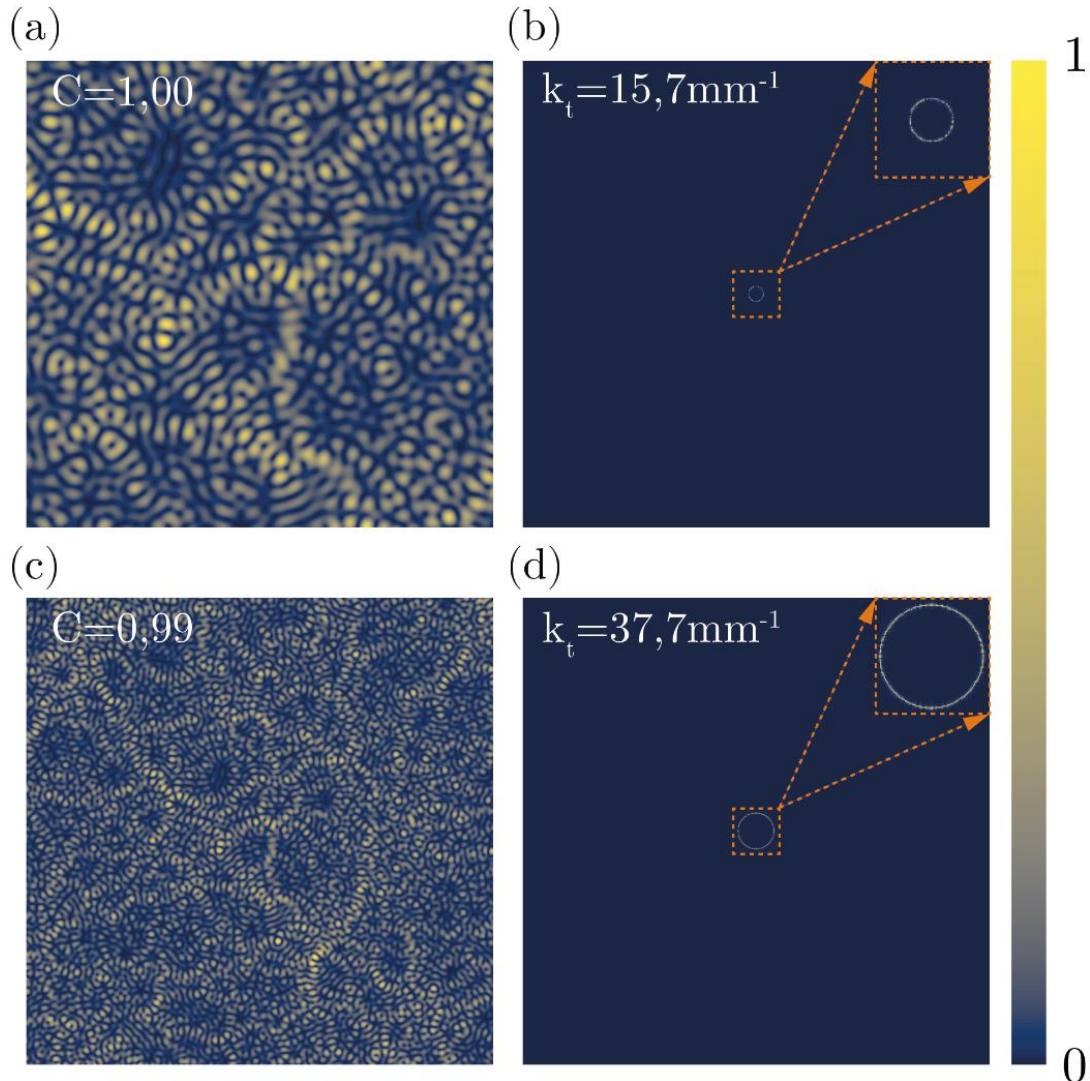
Fonte: Autor, 2022.

O contraste calculado para o padrão intensidade do campo de speckle ERND, é dado pela equação (1.2.15),

$$C = \sqrt{\frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} - 1} . \quad (3.1.15)$$

Para entendermos que o k_t atua como a frequência espacial do campo de speckle ERND, calculamos a intensidade da transformada de Fourier, $|F[U(x, y, z)]|^2$. Na figura 36, vemos que quanto maior o valor de k_t , maior será o número de grãos e menor será o tamanho de cada grão no padrão de intensidade do campo de speckle ERND no plano real. De fato, para os mesmos valores de fase calculados numericamente, quando mudamos a frequência espacial não estamos alterando o padrão de intensidade do speckle e sim aumentando o número de grãos no mesmo padrão de speckle. No plano de Fourier do campo de speckle ERND a intensidade ficará concentrada em forma de anel e quando a frequência espacial k_t aumenta, o tamanho do anel vai aumentar.

Figura 36: (a) e (c) Padrões de intensidade dos campos de speckle ERND para $k_t = 15,7 \text{ mm}^{-1}$ e $k_t = 37,7 \text{ mm}^{-1}$, respectivamente; (b) e (d) Planos de Fourier dos campos para $k_t = 15,7 \text{ mm}^{-1}$ e $k_t = 37,7 \text{ mm}^{-1}$, respectivamente.

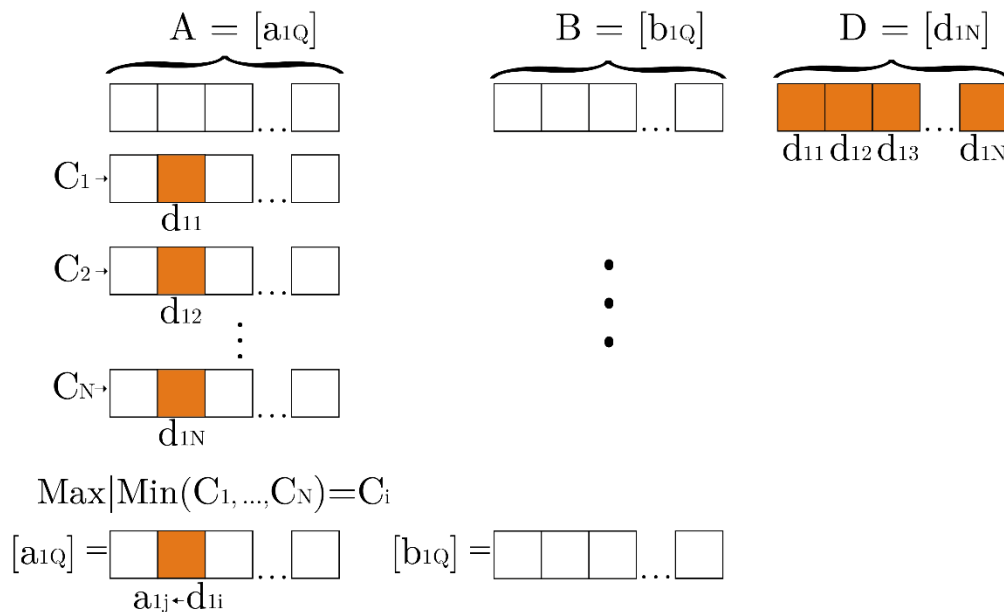


Fonte: Autor, 2022.

Já que conseguimos gerar campos de speckle Rayleigh com característica não difrativa que são soluções da equação de Helmholtz, desenvolvemos um algoritmo de otimização de fase para obter campos exatos de speckle não Rayleigh não Difrativo (ENRND). A ideia central é gerar de maneira direta uma faixa contínua de valores de contraste de intensidade correspondentes às estatísticas sub Rayleigh e super Rayleigh, como uma solução exata da equação escalar de Helmholtz. De maneira que os campos ENRND vão manter a estatística constante ao longo da propagação, pois obedecem a teoria de feixes não difrativos exatos.

A fase $\Phi(\phi)$, da equação do campo de speckle ERND, (3.1.16), deve ser adequadamente otimizada garantindo que ainda seja uma fase aleatória uniformemente distribuída sobre $[0, 2\pi]$. A Figura 37 ilustra o princípio do algoritmo, onde cada uma das duas matrizes A e B tem uma linha e Q colunas, e possuem elementos aleatórios uniformemente distribuídos em $[0, 2\pi]$. Além disso, a matriz D tem uma linha e N colunas com $N \leq Q$, e os elementos têm as mesmas propriedades das outras matrizes.

Figura 37: Diagrama que representa uma interação do algoritmo.



Fonte: Autor, 2022.

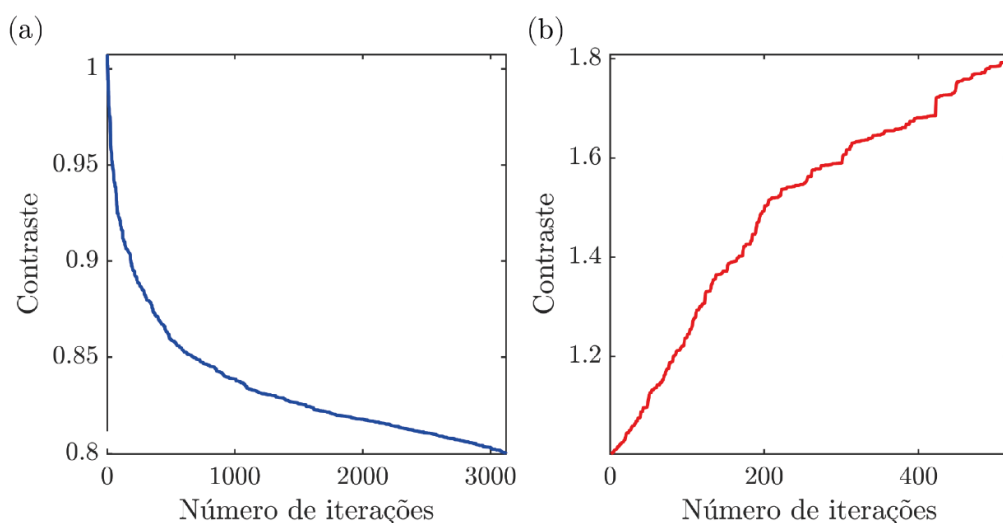
Como a fase relativa das ondas componentes do campo de speckle ERND é dada pela eq. (3.1.16), que é escrita em função de $\theta(\phi_n)$, a ideia principal desse algoritmo de otimização de fase é escrever $\theta(\phi_n)$ como a soma de duas fases aleatórias uniformemente distribuídas A e B , $\theta = A + B$, ambas com comprimento $Q = 200$. Usamos uma terceira fase aleatória uniformemente distribuída D que é composta por $N \leq Q$ elementos.

Em cada interação selecionamos sequencialmente os elementos de D e os substituímos em uma posição selecionada aleatoriamente de A , mas mantemos a

posição fixa até calcularmos o contraste para todos os valores de D . De modo que, o contraste é calculado utilizando à equação (3.1.15), onde $I = |U|^2$ é a intensidade. Selecionamos os novos A que possuem maior ou menor contraste de acordo com se queremos maximizar ou minimizar o contraste. Prosseguimos para a próxima interação repetindo o mesmo processo até atingir o valor desejado do contraste. Após cada interação, a fase D é atualizada com novos valores aleatórios, garantindo uma convergência uniforme mesmo quando N for tão pequeno quanto $N = Q/4$ e, portanto, agilizando o cálculo. A variável B permanece inalterada ao longo da otimização. Em resumo, em cada interação escolhemos um novo A com uma entrada atualizada. Esse novo A tem o contraste máximo entre as N amostras geradas durante uma interação.

Para entender melhor como o algoritmo evolui ao longo do processo de otimização, um exemplo típico é mostrado na figura 38. O gráfico mostra o contraste após cada interação do algoritmo. Observamos que o algoritmo tem uma convergência uniforme e que a convergência para os speckles sub Rayleigh é mais lenta do que para os speckles super Rayleigh. Notamos também que, pelo menos, qualquer contraste entre o valor máximo e mínimo apresentado na figura 38 pode ser obtido.

Figura 38: Evolução do contraste ao longo da otimização para (a) sub Rayleigh (b) super Rayleigh speckles.



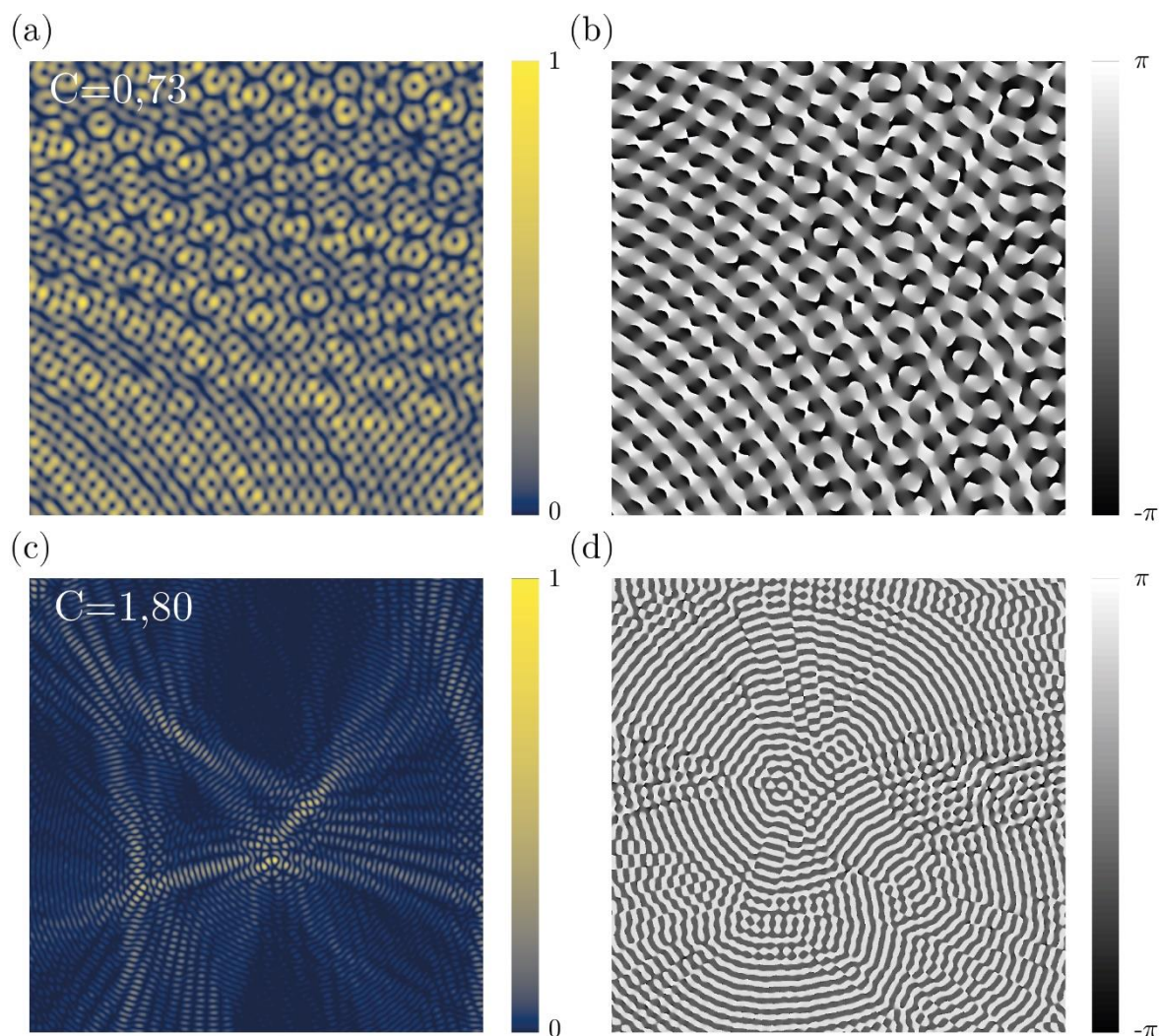
Fonte: Autor, 2022.

O papel da matriz B é garantir que o padrão speckle seja totalmente desenvolvido após a otimização. O raciocínio por trás do algoritmo, é produzir

correlações espaciais entre os valores de fase de $\theta(\phi_n)$. Durante uma iteração do algoritmo, pegamos uma posição aleatória em A , mas a mantemos fixa até testarmos todos os valores de D . Se mudarmos essa posição de A ao longo de uma iteração, introduzimos aleatoriedade espacial e o algoritmo não converge. Também temos que escolher uma única entrada em cada iteração, se escolhermos mais de uma entrada para mudar de cada vez, introduzimos aleatoriedade espacial e o algoritmo não converge. A matriz D é apenas um repositório de valores de fase aleatórios, poderíamos dizer que apenas pegamos N valores de fase aleatórios para testar em A para cada iteração do algoritmo. Portanto, se escolhermos um N muito pequeno, o algoritmo pode não convergir.

Na figura 39, calculamos numericamente dois campos de speckles ENRND com as fases otimizadas, com o número de ondas planas $Q = 200$. Na figura 39 (a), temos a intensidade de um campo de speckle ENRND com estatística sub Rayleigh, onde o contraste foi calculado utilizando a equação (3.1.15), correspondendo a $C = 0,73$. O padrão de intensidade otimizado em (a), apresenta frequência espacial $k_t = 37,7mm^{-1}$. Ao analisar a figura 39 (b), vemos que a fase do campo de speckle ENRND com estatística sub Rayleigh, ainda apresenta característica aleatória e uniformemente distribuída de $[-\pi, \pi]$. Da mesma maneira, na figura 39 (c), observamos a intensidade do campo de speckle ENRND com estatística super Rayleigh, com contraste $C = 1,80$. O padrão de intensidade otimizado em (c), apresenta frequência espacial $k_t = 15,7mm^{-1}$. A fase na figura 39 (d), continua também aleatória e distribuída uniformemente em $[-\pi, \pi]$.

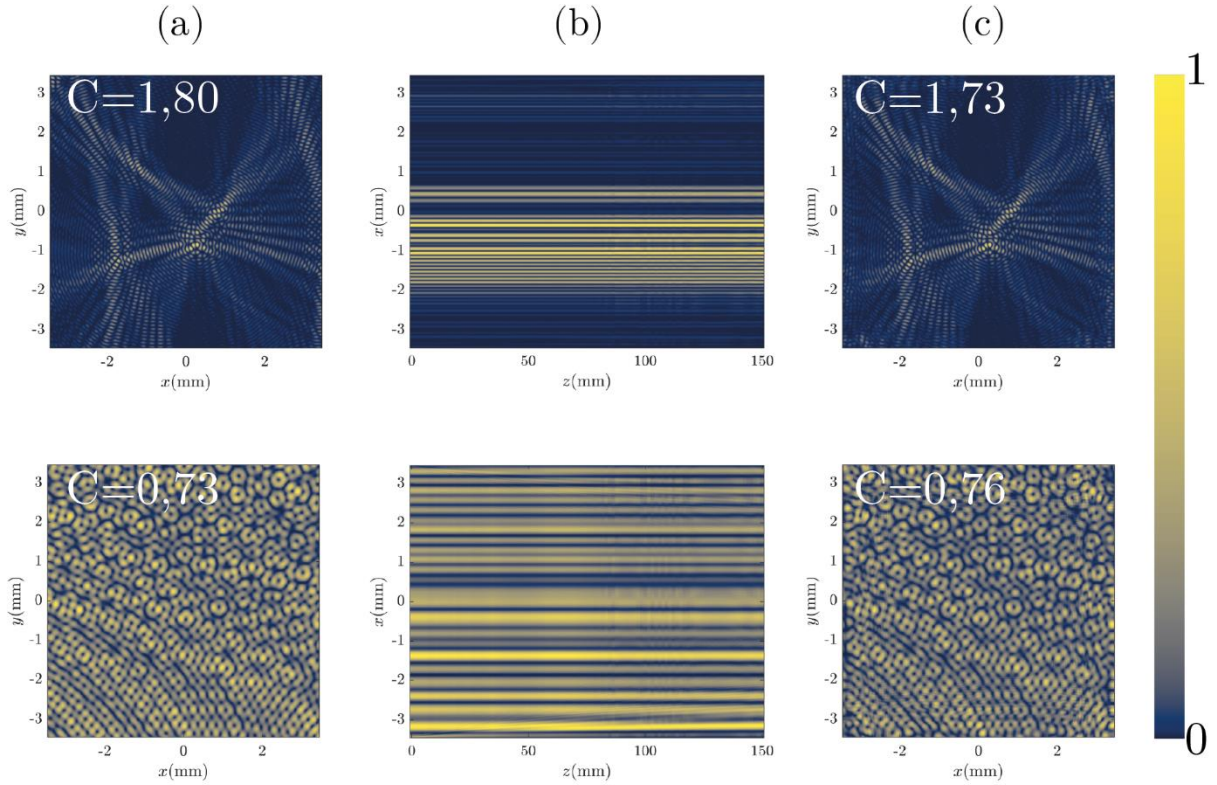
Figura 39: (a) e (b) Temos respectivamente o perfil de intensidade e de fase do campo de speckle ENRND com estatística sub Rayleigh; (c) e (d) Perfil de intensidade e de fase do campo de speckle ENRND com estatística super Rayleigh, respectivamente.



Fonte: Autor, 2022.

Podemos analisar teoricamente a característica não difrativa do campo de speckle ENRND gerados a partir da equação (3.1.13), com a fase $\Phi(\phi_n)$ otimizada. Observamos na figura 40, os campos da figura 39, que foram propagados a uma distância arbitrária ao longo do eixo z . As figuras 40 (a) e (c) mostram o perfil transversal dos padrões de intensidade dos campos de speckle no plano xy para $z=0$ e $z=100mm$, respectivamente. Já na figura 40 (b) vemos o campo de speckle propagando no plano xz que vai do plano inicial até o plano final. Analisamos da figura 40 que os campos ENRND permanecem com a estatística praticamente inalterada, com uma mudança discreta nos valores dos contrastes nos dois planos.

Figura 40: Ilustração do comportamento dos campos de speckles ENRND ao longo de sua propagação a uma distância arbitrária.



Fonte: Autor, 2022.

A propagação dos campos de speckle ENRND, na figura 40, foi obtida utilizando o método do espectro angular [55]. Basicamente essa técnica consiste em expandir o campo complexo da onda em um somatório de um número infinito de ondas planas de mesma frequência e diferentes direções. Consideramos as partes reais e imaginárias do campo de speckle, $U(x, y, 0)$, equação (3.1.13). Calculamos então a transformada de Fourier do campo de speckle para obter o espectro angular composto de ondas planas. Multiplicamos o espectro angular pela transformada de Fourier da função de transferência $H(f_x, f_y)$, expressa como,

$$H(f_x, f_y) = \exp \left\{ i2\pi z \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - [(f_x)^2 + (f_y)^2]} \right\}, \quad (3.1.16)$$

onde (f_x, f_y) são as frequências espaciais e λ é o comprimento de onda. Depois, obtemos a transformada inversa de Fourier do produto anterior para recuperar o campo de speckle ENRND no plano desejado.

3.2. Metodologia e Procedimentos Experimentais

3.2.1. Holografia e configuração experimental

Antes de tratarmos da nossa configuração experimental é importante falar de alguns fundamentos básicos de holografia. Essa técnica já bem desenvolvida e conhecida no ramo da óptica é utilizada para gravar e reconstruir ondas ópticas. Na nossa metodologia estamos interessados em hologramas de fase que são codificados com amplitude e fase de ondas monocráticas. O holograma será a gravação do padrão de interferência entre o feixe de interesse (onda objeto) U_o com a onda de referência U_r e esse padrão de interferência é gravado no plano $z=0$, [41].

Na figura 41 (a), temos o processo de gravação do padrão de intensidade da soma entre as duas ondas, onde a transparência na qual é gravado o padrão possui a amplitude complexa de transmitância t , proporcional a intensidade. A capacidade de transmitir a luz pela transparência será dada por,

$$\begin{aligned} t \propto |U_o + U_r|^2 &= |U_r|^2 + |U_o|^2 + U_r^* U_o + U_r U_o^*, \\ &= I_r + I_o + U_r^* U_o + U_r U_o^*, \\ &= I_r + I_o + 2\sqrt{I_r I_o} \cos[\arg\{U_r\} - \arg\{U_o\}], \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

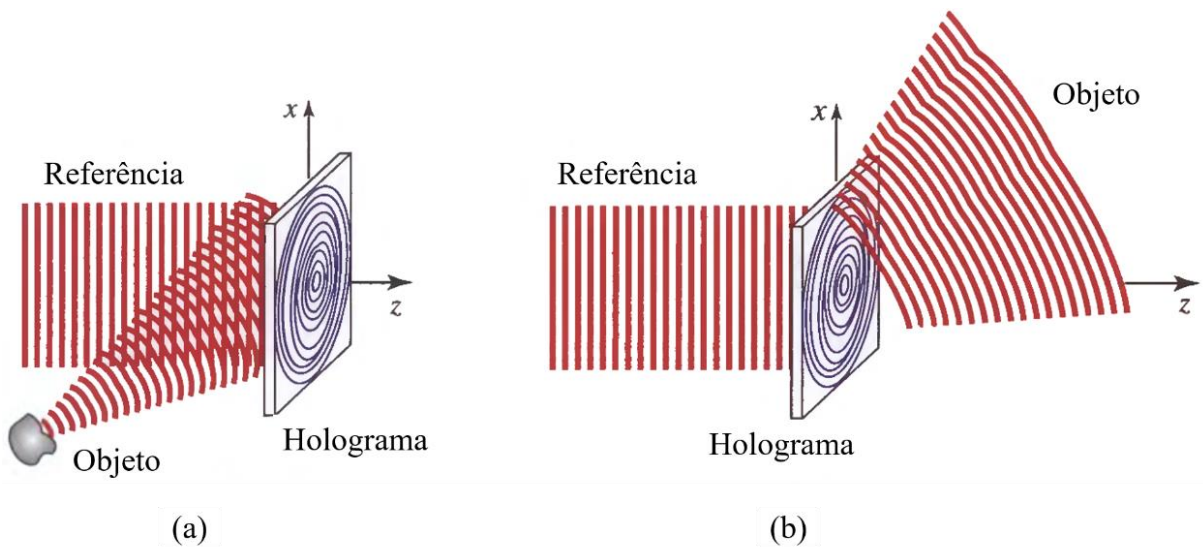
onde I_r e I_o são as intensidades da onda de referência e objeto, respectivamente, no plano z . Os termos $\arg\{U_r\}$ e $\arg\{U_o\}$ são as fases que contém as informações das ondas. O holograma então carrega a informação codificada da amplitude e da fase da onda objeto U_o .

Para reconstruir a onda objeto, iluminamos o holograma com a onda referência U_r , conforme ilustrado na figura 41 (b). A onda transmitida pelo holograma tem a amplitude complexa expressa como,

$$U = tU_r \propto U_r I_r + U_r I_o + I_r U_o + U_r^2 U_o^*, \quad (3.2.2)$$

no plano $z=0$ do Holograma. Analisando a equação (3.2.2), vemos o terceiro termo do lado direito da equação é a onda original multiplicada pela intensidade da onda referência I_r . No nosso caso, a onda referência iluminará o holograma de maneira uniforme, o terceiro termo vai reconstruir a onda desejada. Para isso, deve ser separado dos outros três termos. O quarto termo é o conjugado da onda objeto modulada por U_r^2 . Os dois primeiros termos representam a onda referência modulada pela intensidade das ondas objeto e referência.

Figura 41: (a) Gravação de um holograma e (b) processo de reconstrução do feixe desejado.



Fonte: Adaptado de [41], 2007.

Nesse trabalho a onda referência será representada por uma onda plana uniforme propagando ao longo do eixo z , pode ser escrita como,

$$U_r(x, y) = \sqrt{I_r} \exp(-jkz), \quad (3.2.3)$$

como o holograma está no plano $z=0$, $U_r(x, y) = \sqrt{I_r}$ é uma constante independente de x e y . Dividindo a equação (3.2.2) por $U_r = \sqrt{I_r}$, temos a equação de reconstrução do holograma, dada por,

$$U = I_r + I_o + \sqrt{I_r} U_o(x, y) + \sqrt{I_r} U_o^*(x, y). \quad (3.2.4)$$

Para gerarmos os campos exatos de speckles não Rayleigh não difrativos (ENRND), vamos utilizar o Modulador Espacial de Luz (MEL). O holograma de fase usado no MEL para modular a onda plana com a amplitude e fase do campo de speckle ENRND otimizado, foi proposto por Victor Arrizón em [51]. Usamos um Holograma Gerado por Computador (HGC), no qual é codificada a amplitude e a fase dos campos ópticos escalares complexos de maneira independente, dado por,

$$S(x, y) = a(x, y)e^{i\phi(x, y)}, \quad (3.2.5)$$

onde $a(x, y)$ é a amplitude distribuída entre $[0, 1]$ e $\phi(x, y)$ é a fase distribuída entre $[0, \pi]$. Os valores necessários para as amplitudes complexas da função $S(x, y)$, devem pertencer a um conjunto de números complexos de módulos menor ou igual a 1, representado por Ω_s .

O campo complexo $S(x, y)$ é codificado por meio de uma transmitância de fase HGC, expressa como uma função complexa explicitamente dependente da amplitude e da fase do campo codificado, dada por,

$$h(x, y) = \exp\{i\psi[a(x, y), \phi(x, y)]\}, \quad (3.2.6)$$

onde $\psi[a(x, y), \phi(x, y)]$ é a fase modulada pelo HGC. A ideia principal desse holograma é encontrar as funções de fases apropriadas para o campo codificado $s(x, y)$.

Para determinar a modulação de fase do holograma, representamos a (3.2.6) por uma série de Fourier no domínio de ϕ . Representando a transmitância de HGC como série de Fourier,

$$h(x, y) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} c_q^a \exp(iq\phi), \quad (3.2.7)$$

onde,

$$c_q^a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\psi(\phi, a)] \exp(-iq\phi) d\phi, \quad (3.2.8)$$

então a integração em (3.2.8) com relação à ϕ vai resultar nos coeficientes com dependência na amplitude $a(x, y)$. Portanto, o sinal $s(x, y)$ é recuperado no termo de primeira ordem da série de Fourier, (3.2.7), se a identidade,

$$c_1^a = Aa(x, y), \quad (3.2.9)$$

for satisfeita para uma constante positiva A .

Para chegar as condições necessárias para cumprir a identidade da codificação do sinal escrevemos a equação (3.2.9), como,

$$c_1^a = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos[\psi(\phi, a) - \phi] d\phi + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin[\psi(\phi, a) - \phi] d\phi \right\}, \quad (3.2.10)$$

então, as equações que descrevem as condições são dadas por,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin[\psi(\phi, a) - \phi] d\phi = 0, \quad (3.2.11)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos[\psi(\phi, a) - \phi] d\phi = 2\pi Aa(x, y). \quad (3.2.12)$$

As equações (3.2.11) e (3.2.12) fornecem uma base útil para a determinação de HGCs apropriados. As funções de fase $\psi(\phi, a)$ que obedecem a essas equações definem uma classe específica de HGCs de fase. O valor máximo da integral na equação (3.2.12) é 2π . De modo que, o valor máximo da constante A na identidade de codificação é 1. Este resultado provê um limite para a eficiência dos HGCs que pertencem a esta classe.

Ao longo desse trabalho, utilizaremos o holograma do tipo 3, proposto por Victor Arrizón e colaboradores em [51]. Nesse holograma, a função de fase $\psi(\phi, a)$, com simetria ímpar em ϕ , é escrita como,

$$\psi(\phi, a) = f(a) \sin \phi, \quad (3.2.13)$$

onde o fator $f(a)$ permanece indeterminado no momento. Substituindo a função (3.2.13) em (3.2.8), teremos a transmitância de fase HGC como,

$$h(x, y) = \exp\{if(a) \sin \phi\}. \quad (3.2.14)$$

Para escrever (3.2.14), como série de Fourier com relação a variável ϕ , usamos a identidade de Jacobi-Anger,

$$\exp\{iz \sin \phi\} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta}, \quad (3.2.15)$$

onde $J_n(z)$ é a n -ésima função de Bessel do primeiro do primeiro tipo. O coeficiente de ordem q resultante nessa série de Fourier é,

$$c_q^a = J_q(f(a)), \quad (3.2.16)$$

e a condição de codificação é satisfeita se $f(a)$ for invertido da relação,

$$J_q(f(a)) = Aa. \quad (3.2.17)$$

O valor máximo de A para o qual a equação (3.2.17) pode ser satisfeita é $A = 0,5819$, que corresponde ao valor máximo da função de Bessel de primeira ordem [52]. Calculamos então a transformada de Fourier de $h(x, y)$, tal que,

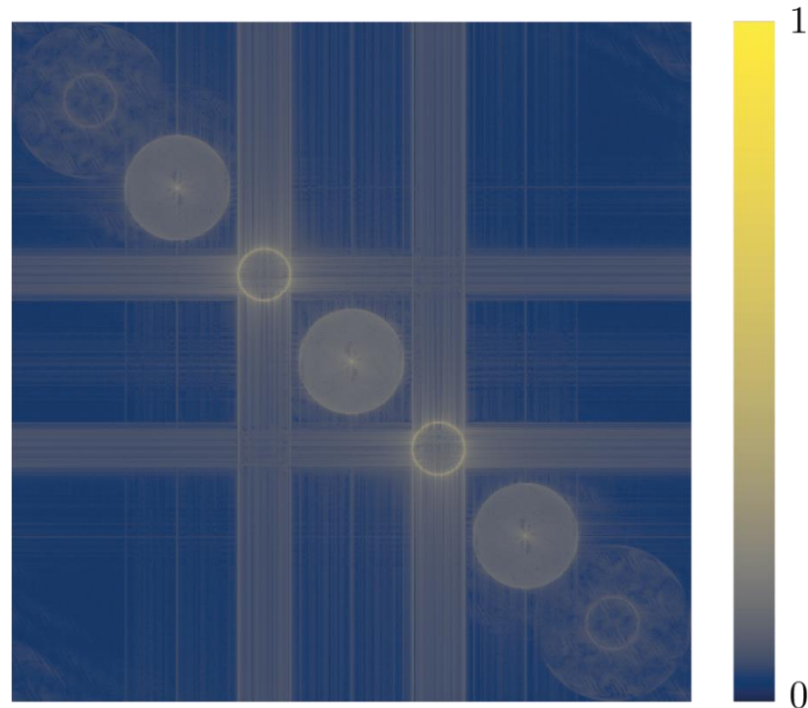
$$H(x, y) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy. \quad (3.2.18)$$

Como o campo desejado está nas duas primeiras ordens de difração que são simétricas, temos que,

$$\begin{aligned} H(x, y) = & \dots + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_{-1}(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy + \dots \\ & \dots + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy + \dots \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

de maneira que o campo de interesse quando trabalhamos com o Holograma proposto por Victor Arrizón pode ser selecionado no plano de Fourier do MEL. Podemos analisar essa situação na figura 42, onde o campo desejado está em forma de anel.

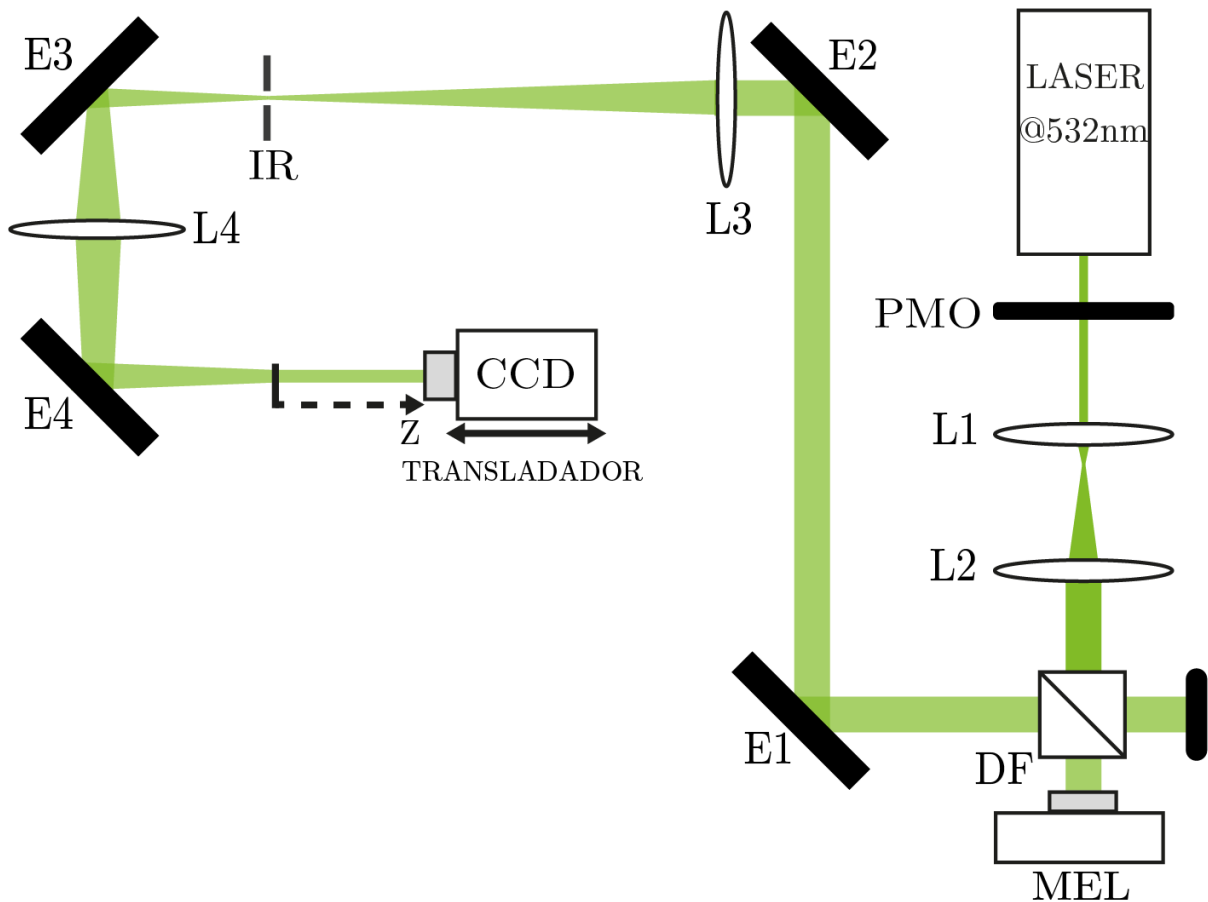
Figura 42: Padrão de intensidade da transformada de Fourier de $h(x, y)$, $|FT[h(x, y)]|^2$.



Fonte: Autor, 2022.

Após o campo exato de speckle não Rayleigh não difrativo (ENRND) ter sua fase otimizada para o contraste desejado utilizando o algoritmo, e o holograma de fase ser gerado e codificado no Modulador Espacial de Luz (MEL), ficará simples obter os campos de speckle ENRND de maneira experimental. Na figura 43, representamos a configuração experimental, com seus respectivos elementos ópticos. No qual um laser modelo Ultralasers MSL-FN-532, $200mW$ é operado em $532nm$, de modo a ser expandido e colimado por duas lentes confocais $L1$ e $L2$, de distâncias focais $f_1 = 8mm$ e $f_2 = 125mm$. Então, o feixe ao ser expandido forma uma onda plana que ilumina uniformemente um MEL. O modelo do MEL é Holoeye LETO, que comporta uma matriz de 1920×1080 pixels, com cada pixel tendo o tamanho de $6,4 \times 10^{-3} mm$. De modo que a área ativa do MEL é $12,5 \times 7,1mm$, e o mesmo é operável na faixa de $(420 - 800nm)$.

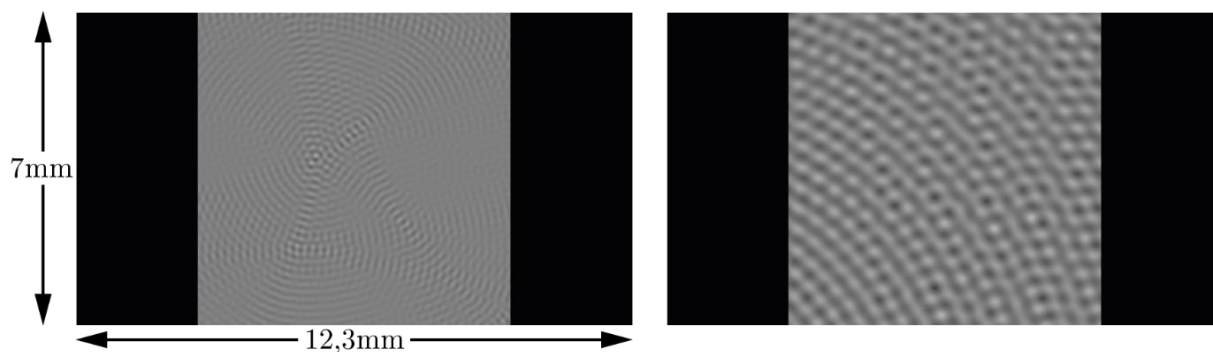
Figura 43: Configuração experimental: PMO é a Placa de Meia Onda; L1, L2, L3 e L4 são lentes; DF é o Divisor de Feixe; MEL, é o Modulador Espacial de Luz; E1, E2, E3 e E4 são espelhos; IR, é uma íris; e CCD é uma câmera Charge Coupled Device.



Fonte: Autor,2022.

O MEL é colocado a uma distância $d = 540\text{mm}$ da lente $L3$, de distância focal $f_3 = 1000\text{mm}$. O holograma de fase gerado por computador (HFGC) utilizado no MEL é do tipo 3 [41], que contém a fase e a amplitude do campo de speckle ENRND calculado. Na figura 44, analisamos os hologramas utilizados para gerar os campos de speckle ENRND, com estatística sub Rayleigh ($C < 1$) e estatística super Rayleigh ($C > 1$), respectivamente. A luz refletida do MEL é transformada no plano de Fourier pela lente $L3$. A primeira ordem de difração deste holograma é um anel de intensidade que é espacialmente filtrado por uma abertura circular ou íris (IR), como já discutido e analisado na figura 41. A lente $L4$ de distância focal $f_3 = 150\text{mm}$, confocal com $L3$, foi usada para visualizar os campos de speckles ENRND em um câmera Charge Coupled Device (CCD), que é montada em um estágio de translação no eixo z .

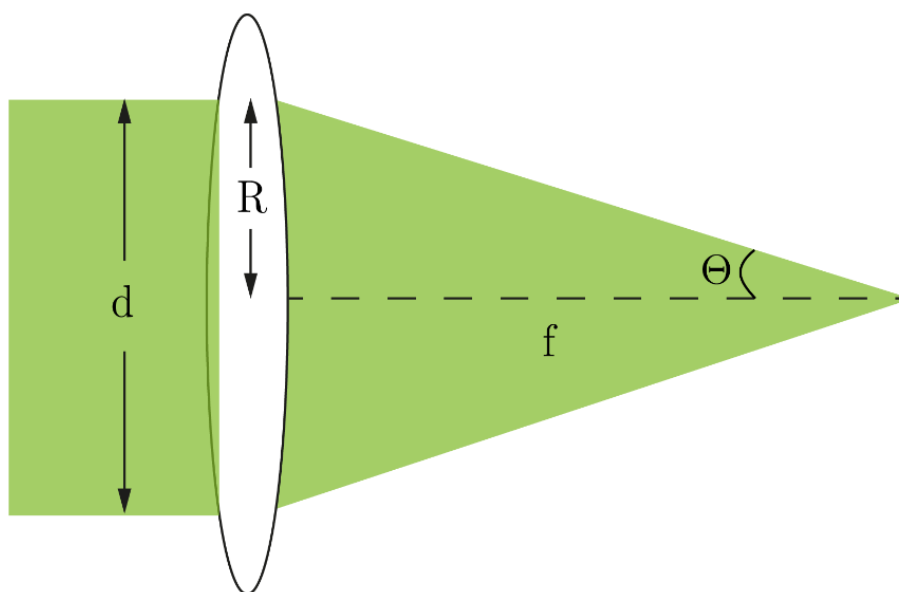
Figura 44: Hologramas de fase gerados em computador usados para gerar speckles super Rayleigh e sub Rayleigh, respectivamente.



Fonte: Autor, 2022.

A câmera CCD é colocada no estágio de translação porque vamos analisar e estudar o comportamento dos campos de speckle ENRND de maneira experimental. Para realizarmos essa análise é necessário calcular o comprimento de Rayleigh, em termos do qual será descrito a região em que o feixe vai manter a sua característica não difrativa e a estatística não Rayleigh. Com base nisso, ilustramos na figura 45 a configuração experimental para calcularmos o comprimento de Rayleigh tomando como base o tamanho de um feixe Gaussiano na lente $L4$.

Figura 45: Esquema usado para calcular o comprimento de Rayleigh.



Fonte: Autor, 2022.

Na ilustração da figura 44, o tamanho do feixe Gaussiano de entrada na lente $L4$ é representado pela letra d . No nosso caso, consideramos o tamanho aproximado do feixe Gaussiano semelhante a dimensão da janela computacional do MEL $d = 0,69\text{cm}$, onde o raio será $R = 0,345\text{cm}$. Então, calculamos o ângulo Θ , partindo da tangente que vai relacionar o foco da lente, $f = 15\text{cm}$, com R . De maneira que,

$$\Theta = \tan^{-1}\left(\frac{0,345}{15}\right) \Rightarrow \Theta \cong 0,023 \text{ rad} . \quad (3.2.20)$$

Vamos utilizar a definição de Θ para encontrar sua relação com o comprimento de Rayleigh. Partimos da definição de semiângulo [56],

$$\Theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} , \quad (3.2.21)$$

onde $w(z)$ é a cintura de um feixe Gaussiano em função da distância axial z . Dada por,

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} . \quad (3.2.22)$$

Substituindo a equação (3.2.22) em (3.2.21), podemos escrever o limite como,

$$\Theta = \lim_{z \rightarrow \infty} w_0 \sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z_R^2}} = w_0 \sqrt{\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z^2}\right) + \frac{1}{z_R^2}} = \frac{w_0}{z_R} . \quad (3.2.23)$$

A cintura do feixe no foco w_0 pode ser escrita em função do semiângulo de divergência,

$$w_0 = z_R \Theta . \quad (3.2.24)$$

Substituindo a Eq. (3.1.1) na Eq. (3.2.24) a cintura do feixe no foco pode ser escrita em função do semiângulo de divergência como

$$w_0 = \frac{\lambda}{\pi \Theta} , \quad (3.2.25)$$

considerando $\lambda = 532 \times 10^{-7} \text{ cm}$ e o valor $\Theta \cong 0,023$. Teremos que o diâmetro do feixe será,

$$w_0 = 7,364 \times 10^{-4} \text{ cm} . \quad (3.2.26)$$

substituindo (3.2.26) na equação do comprimento de Rayleigh (3.1.1), encontramos o valor no comprimento de Rayleigh,

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{\pi (7,364 \times 10^{-4} \text{ cm})^2}{532 \times 10^{-7} \text{ cm}} = 0,032 \text{ cm}. \quad (3.2.27)$$

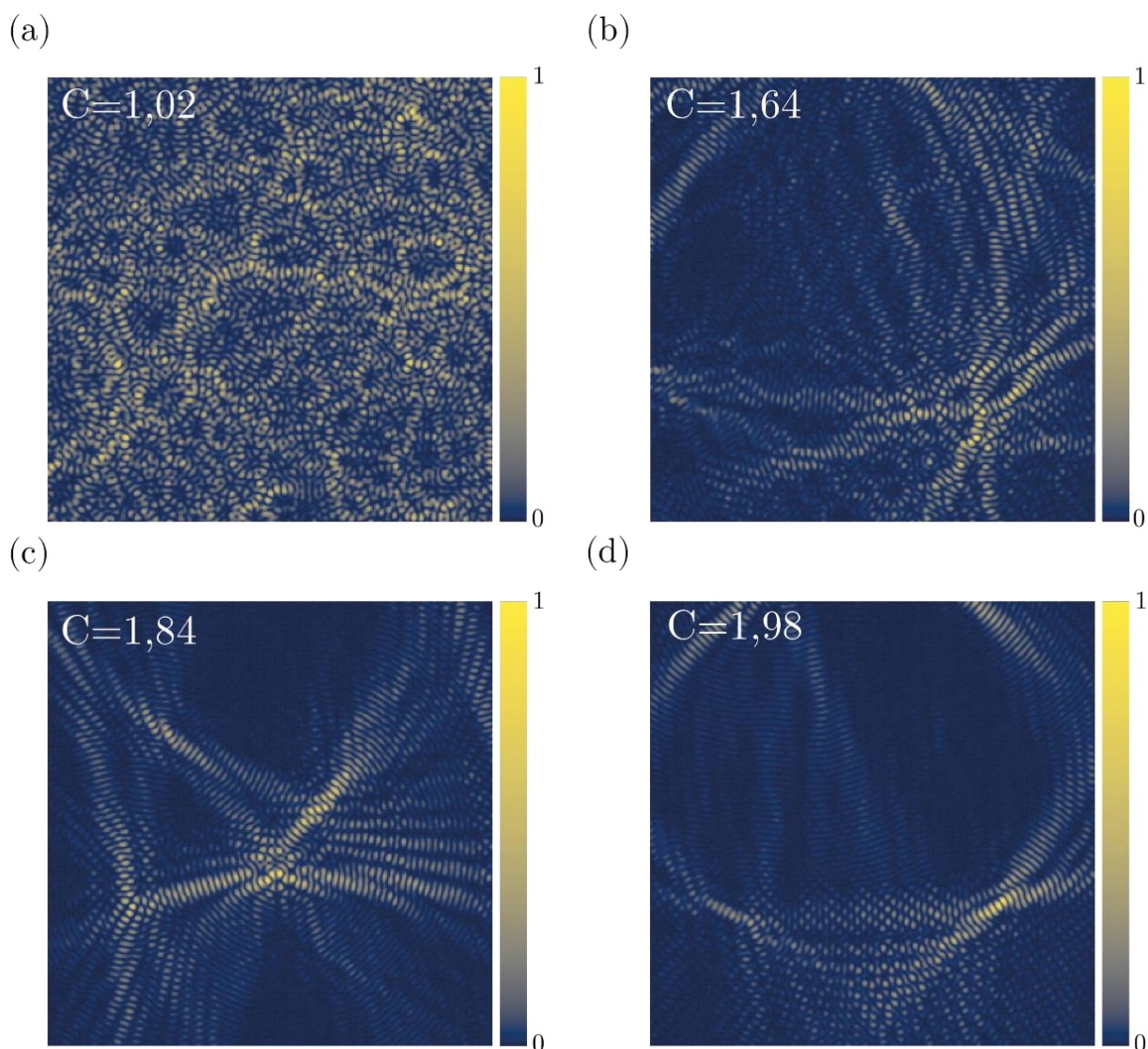
Então, o comprimento de Rayleigh calculado $R = 0,32 \text{ mm}$, será usado para mensurar distância a propagação dos campos de speckle ENRND. Se quiséssemos aumentar o comprimento de Rayleigh, podíamos aumentar o foco da lente $L4$, sem mexer nos outros parâmetros do aparato experimental.

3.2.2. Resultados e discussões

Discutiremos agora sobre os campos de speckle ENRND obtidos experimentalmente. Para agilizar os cálculos do algoritmo de otimização de fase, empregamos uma resolução mínima (número de pixels) suficiente para definir os grãos speckle. Usamos 100×100 pixels nas variáveis (x, y) na equação (3.1.15) e após a otimização apenas aumentamos o número de pixels para 1080 mantendo tamanho da janela $6,91 \text{ mm} \times 6,91 \text{ mm}$ do MEL. Este processo não altera o contraste nem a forma dos padrões. Além disso, usamos $Q = 200$ para o número de ondas planas componentes da superposição. Na figura 35 mostramos alguns dos padrões de intensidade gerados e medidos experimentalmente.

Ao analisar a figura 46, vemos que os padrões de intensidade dos speckles Rayleigh não difrativos, são grãos aleatórios que se organizam como se fossem veias dispostas de maneira circular ao longo do padrão. Com um comportamento diferente dos grãos de speckle Rayleigh que apresentam características difrativas, pois os grãos de speckles, nesse caso, se comportam somente de maneira aleatória. Nas figuras 46 (b), 46 (c) e 46 (d), nos padrões de speckles super Rayleigh e não difrativos, os grãos de speckles se distribuem em poucas veias ao longo do padrão de intensidade, com uma característica um pouco diferente porque deixam o comportamento homogêneo e apesar de ainda irradiar de maneira aleatória ao longo do padrão.

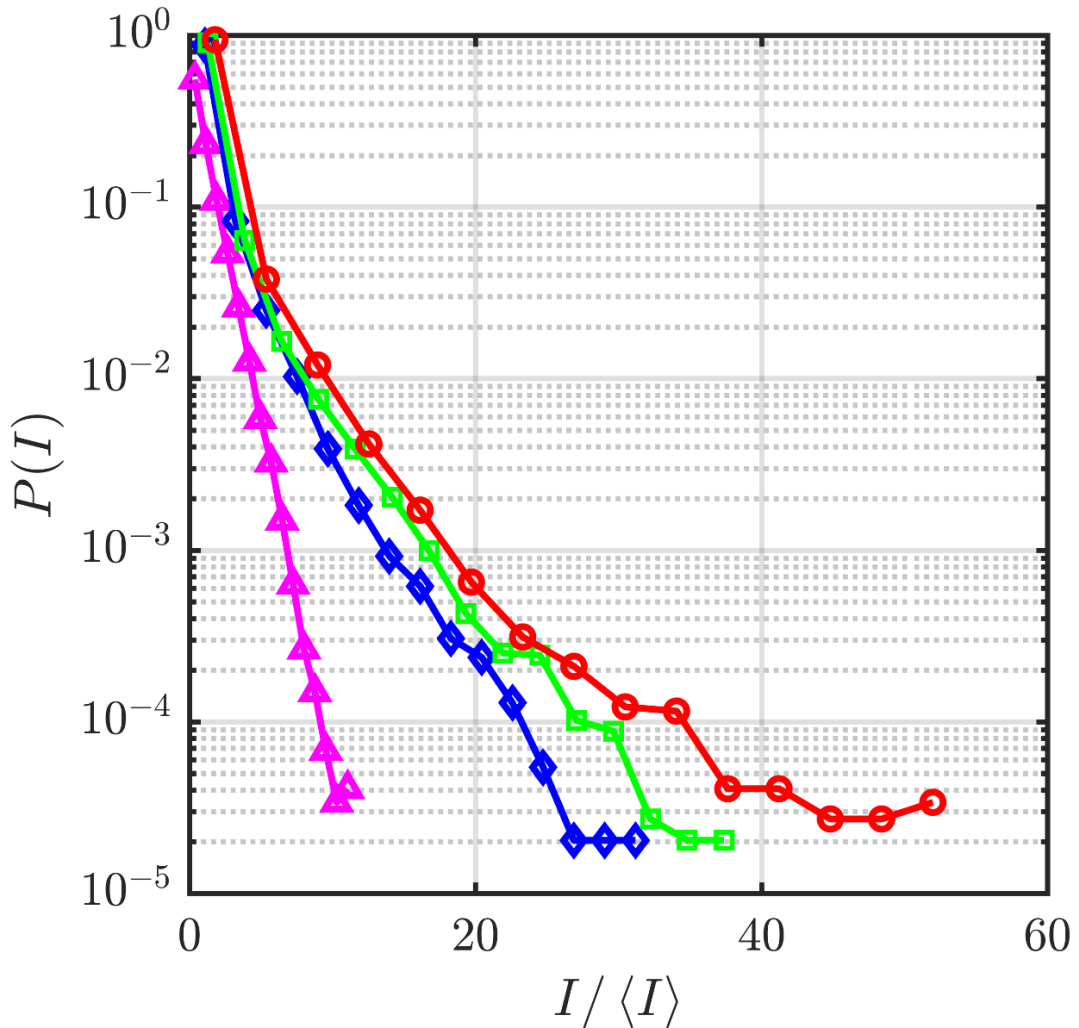
Figura 46: Padrões de intensidade experimentais dos speckles Rayleigh e super Rayleigh. (a) Um padrão de speckle Rayleigh. (b), (c) e (d) padrões de speckles super Rayleigh. Em (a), (b), (c) e (d) foi utilizada uma janela de 0,9 mm x 0,9 mm da câmera CCD.



Fonte: Autor, 2022.

Todos esses padrões de intensidade dos campos de speckle ENRND, foram calculados no plano da imagem do MEL e apresentam $k_t = 37,7 \text{ mm}^{-1}$. Com esses padrões em mãos, se faz necessário calcular as funções densidade de probabilidade (FDP) das respectivas estatísticas, mostradas na figura 46.

Figura 47: As FDPs para os padrões de speckle da figura 45.

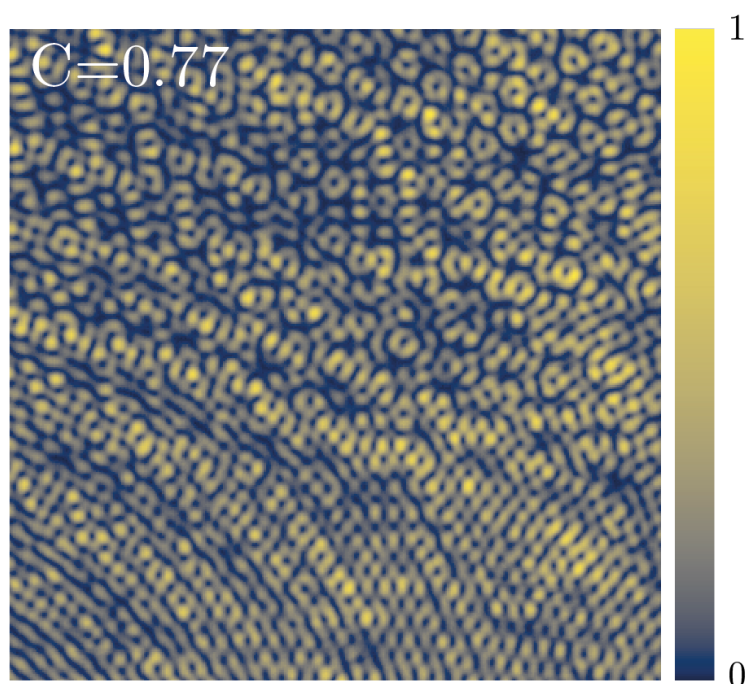


Fonte: Autor, 2022.

Na figura 47, o perfil de intensidade do speckle Rayleigh com contraste ($C = 1,02$) corresponde à FDP da exponencial negativa, os triângulos roxos na figura 46. Os demais perfis de intensidades de speckles com ($C = 1,64$), ($C = 1,84$) e ($C = 1,98$) correspondem aos speckles super Rayleigh com FDPs dados pelo losangos azuis, quadrados verdes e círculos vermelhos, que decaem com a intensidade maior e mais lentamente que os speckles Rayleigh. Devido ao fato de que nos speckles super Rayleigh, a luz é concentrada em alguns grãos de speckles quando comparado com speckles Rayleigh.

A Figura 48 mostra o resultado para um padrão de intensidade de speckle sub Rayleigh não difrativo gerado experimentalmente. O padrão de speckle da figura 47 também foi capturado no plano de imagem do MEL, neste caso a frequência espacial utilizada para otimizar a fase do speckle foi $k_x = 15,7 \text{ mm}^{-1}$ e o número de ondas planas componentes da superposição foi de $Q = 200$.

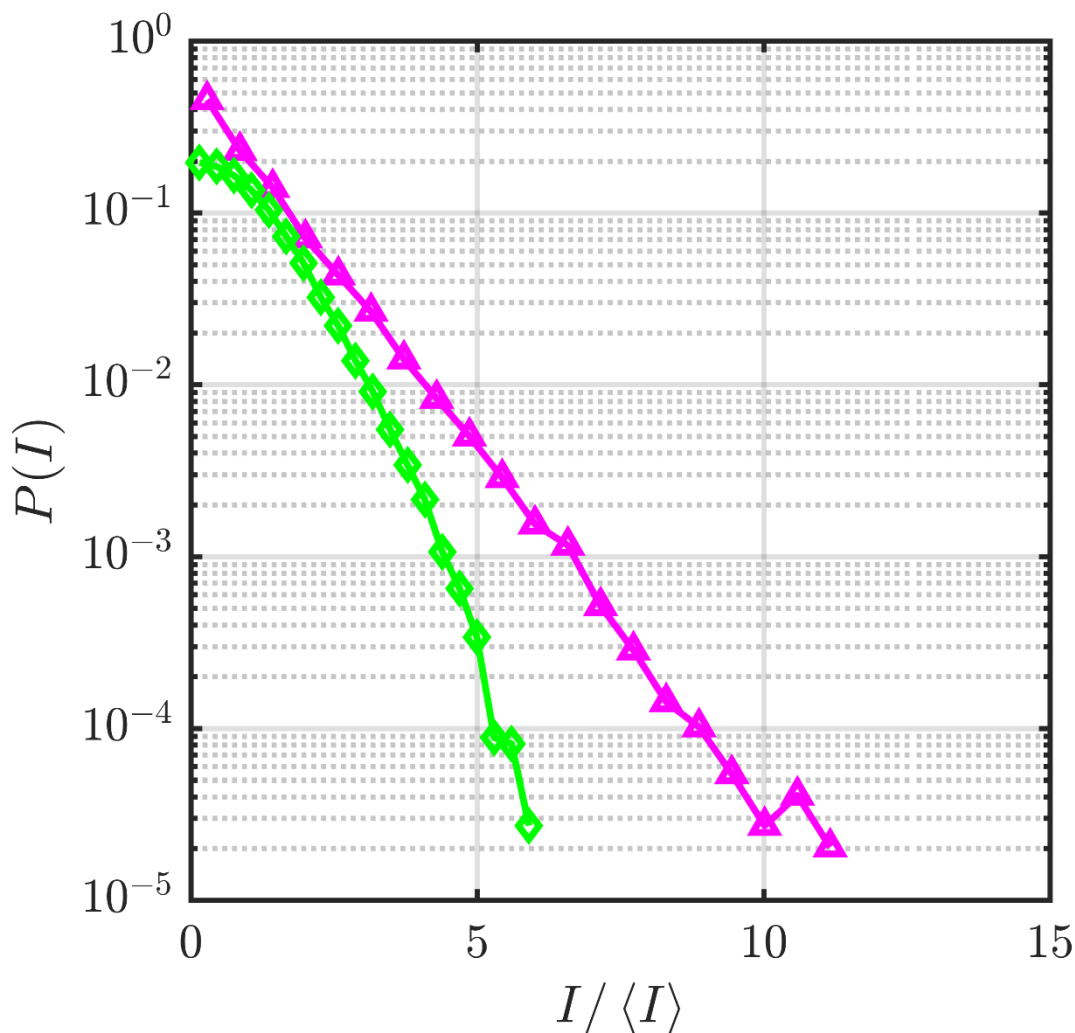
Figura 48: (a) Padrão de intensidade experimental do campo de speckle sub Rayleigh. Foi utilizada uma janela de $0,9 \text{ mm} \times 0,9 \text{ mm}$ da câmera CCD.



Fonte: Autor, 2022.

O padrão de intensidade do speckle, na figura 48, tem contraste, ($C = 0,77$), que corresponde às estatísticas sub Rayleigh para as quais a função densidade de probabilidade (FDP) é dada pelos losangos verdes na figura 49. Na mesma figura um FDP de Rayleigh é mostrada para comparação, os triângulos roxos na figura 49. A distribuição de intensidade sub Rayleigh decai muito mais rápido do que a exponencial negativa para o FDP Rayleigh. Devido ao baixo contraste, os grãos dos padrões de speckles são muito mais próximos, de modo que esses padrões são mais homogêneos. As combinações de baixo contraste e propriedade não difrativa podem ser úteis em uma microscopia de super resolução [21] com profundidade de foco infinita.

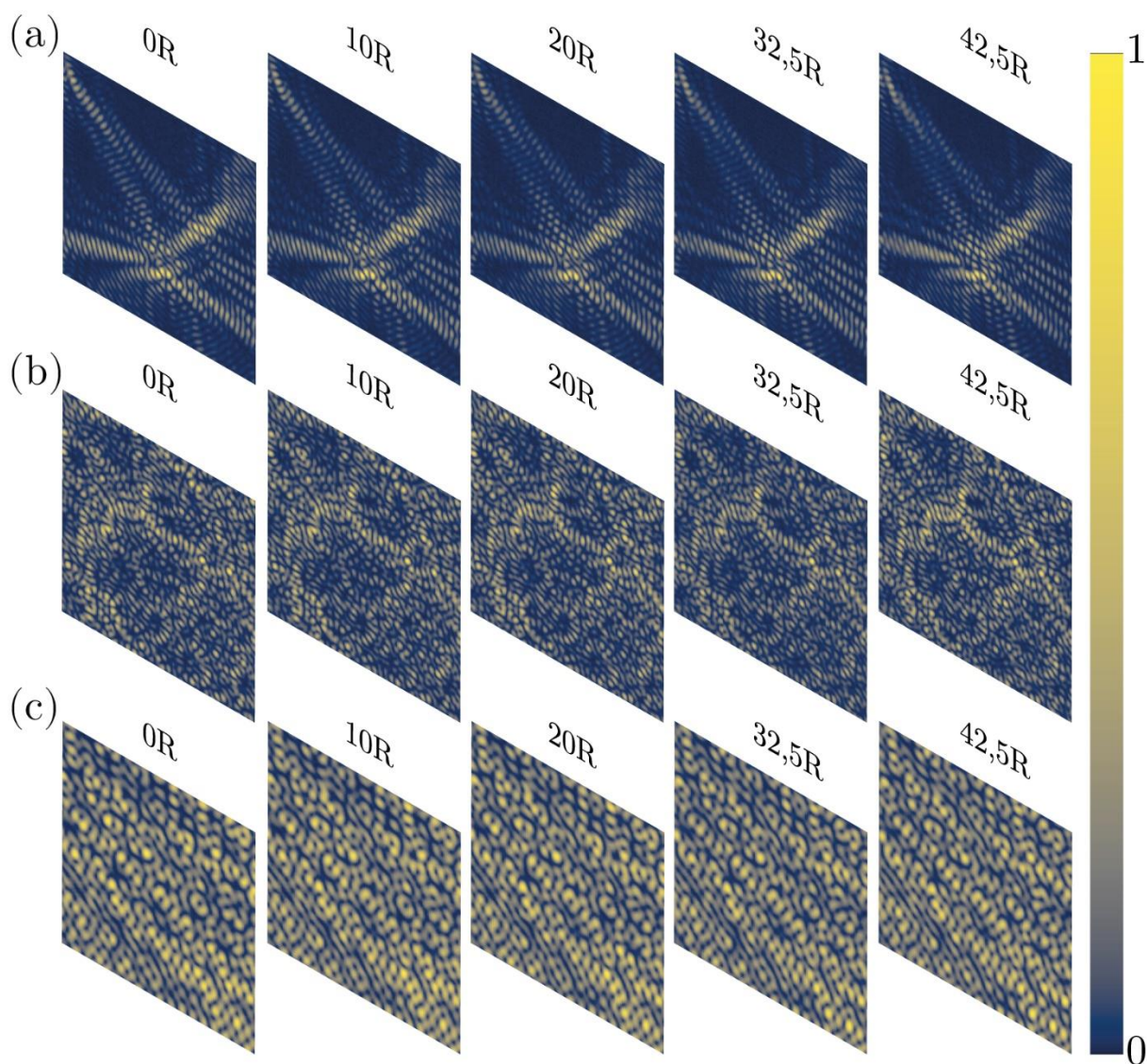
Figura 49: Comparação das FDPs para os padrões de speckles sub Rayleigh e Rayleigh.



Fonte: Autor, 2022.

A Figura 50 ilustra as medições experimentais do perfil transversal dos campos speckles ENRND ao longo da propagação. Os campos de speckle ENRND foram propagados ao longo de uma distância total correspondente a 42,5 comprimentos de Rayleigh partir do foco da lente que corresponde ao plano da imagem do SLM, onde o comprimento de Rayleigh já calculado para essa configuração experimental na seção anterior é de aproximadamente, $R = 0,2$ mm.

Figura 50: Medição experimental do perfil de intensidade de speckles ao longo de diferentes posições axiais correspondentes a $d=0, 10, 20, 32,5$ e $42,5$ comprimentos de Rayleigh: (a) speckle super Rayleigh com contraste ($C=1,64$), (b) speckle Rayleigh com contraste ($C=1,02$), (c), speckle sub Rayleigh com contraste ($C=0,77$). Todos os painéis correspondem a uma janela de $0,5\text{ mm} \times 0,5\text{ mm}$ da câmera CCD.

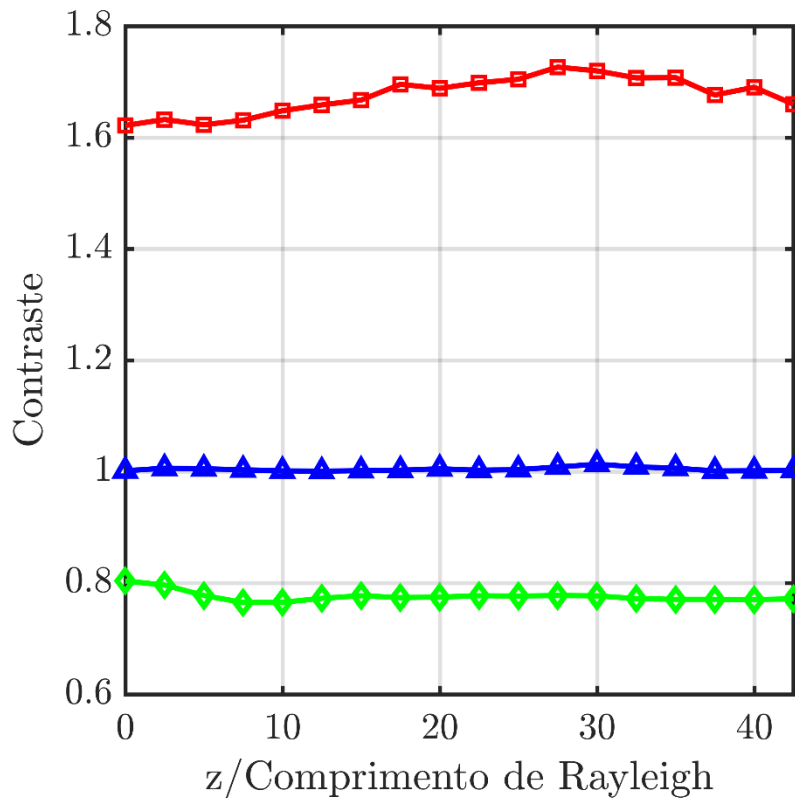


Fonte: Autor, 2022.

Pode-se notar que o perfil de intensidade dos campos de speckle do ENRND se mantém durante a distância de propagação, ou seja, permanece a imagem do MEL na posição inicial (0R). O primeiro padrão na figura 50 na linha (a) é um zoom da figura 46 (c), um padrão super Rayleigh. O padrão correspondente na figura 50 na linha (b) é um zoom da figura 46 (a), um padrão Rayleigh. E na figura 50 na linha (c) é um zoom da figura 48, um padrão sub Rayleigh.

A Figura 51 mostra que o contraste também permanece quase o mesmo ao longo da propagação. Isso acontece porque a equação (3.1.5) é uma solução exata da equação de Helmholtz cujas ondas do plano componente se estendem até o infinito e o espectro espacial é limitado a uma fenda circular de largura infinitesimalmente pequena [57]. Mas mesmo em nosso experimento há uma aproximação devido ao truncamento espacial das ondas planas constituintes para caber na janela MEL.

Figura 51: Mostramos o contraste ao longo da propagação axial de speckle Rayleigh (triângulos azuis), sub Rayleigh (losangos verdes) e super Rayleigh (quadrados vermelhos). Essas curvas são dadas experimentais coletados com a ajuda de um estágio de transladação.



Fonte: Autor, 2022.

Para entender a origem da estatística não Rayleigh procedemos ao cálculo analítico do módulo quadrado do contraste C , (3.1.15), em função das correlações de segunda ordem $\Gamma_p^{(2)}$ de $\Phi(\phi)$ em p diferentes índices [22],

$$C^2 = \langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2 - 1. \quad (3.2.28)$$

Calculamos a média da intensidade do campo de speckle ENRND. Como $\cos \phi_n$, $\cos \phi_{n'}$, $\sin \phi_n$ e $\sin \phi_{n'}$ não são aleatórios, temos

$$\langle I \rangle = \left(\frac{2\pi}{Q-1} \right)^2 \sum_{n,n'=0}^{Q-1} \langle \Phi(\phi_n) \Phi^*(\phi_{n'}) \rangle \langle e^{ik_t x (\cos \phi_{n'} - \cos \phi_n)} \rangle \langle e^{ik_t y (\sin \phi_{n'} - \sin \phi_n)} \rangle, \quad (3.2.29)$$

onde $\Phi(\phi_n)$ é a fase do campo de speckle ENRND, $\Phi^*(\phi_{n'})$ é o complexo conjugado da fase e $n, n' = 0, 1, 2, \dots, Q-1$.

A média dos dois últimos termos do lado direito da equação (3.2.29) são apenas médias espaciais dadas por,

$$\langle e^{ik_t x (\cos \phi_{n'} - \cos \phi_n)} \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} e^{ik_t x (\cos \phi_{n'} - \cos \phi_n)} dx, \quad (3.2.30)$$

$$= \left[\frac{1}{ik_t (\cos \phi_{n'} - \cos \phi_n) L} e^{ik_t x (\cos \phi_{n'} - \cos \phi_n)} \right]_{-L/2}^{L/2}, \quad (3.2.31)$$

$$= \frac{1}{k_t (\cos \phi_{n'} - \cos \phi_n) L} 2 \sin k_t \frac{L}{2} (\cos \phi_{n'} - \cos \phi_n). \quad (3.2.32)$$

onde $L = 11,96$ mm é a janela computacional. Considerando a definição da função $\text{sinc}(x)$, podemos escrever o resultado da média (3.2.32). Como,

$$\langle e^{ik_t x (\cos \phi_{n'} - \cos \phi_n)} \rangle = \text{sinc}(\gamma_{n,n'}), \quad (3.2.33)$$

de modo que, $\gamma_{n,n'} = k_t \frac{L}{2} (\cos \phi_{n'} - \cos \phi_n)$. De maneira análoga, calculamos a média do segundo termo,

$$\langle e^{ik_t y (\sin \phi_{n'} - \sin \phi_n)} \rangle = \text{sinc}(\beta_{n,n'}), \quad (3.2.34)$$

onde $\beta_{n,n'} = k_t \frac{L}{2} (\sin \phi_{n'} - \sin \phi_n)$. Com as equações (3.2.33) e (3.2.34), reescrevemos a equação (3.2.29),

$$\langle I \rangle = \left(\frac{2\pi}{Q-1} \right)^2 \sum_{n,n'=0}^{Q-1} \langle \Phi(\phi) \Phi^*(\phi) \rangle \text{sinc}(\gamma_{n,n'}) \text{sinc}(\beta_{n,n'}). \quad (3.2.35)$$

No limite teórico de uma janela infinita $L \rightarrow \infty$, aplicando a regra de L'Hôpital, o resultado da equação (3.2.35) é igual à 1 para $n = n'$, oscila infinitamente rápido para $n \neq n'$, resultando que a soma na equação (3.2.28) é zero para $n \neq n'$. Além disso, para $n = n'$, $\langle \Phi(\phi_n) \Phi^*(\phi_{n'}) \rangle = 1$ portanto a intensidade média é,

$$\langle I \rangle = \left(\frac{2\pi}{Q-1} \right)^2 Q, \quad (3.2.36)$$

onde Q é o número de ondas planas que compõe essa superposição. De fato, os resultados do cálculo numérico concordam com esse raciocínio.

Agora, calcularemos a média da intensidade ao quadrado $\langle I^2 \rangle$ da equação (3.2.28). Escreveremos o módulo ao quadrado da intensidade,

$$I^2 = \kappa \sum_{n,n',m,m'=0}^{Q-1} \Phi(\phi_n) \Phi^*(\phi_{n'}) \Phi(\phi_m) \Phi^*(\phi_{m'}) e^{ik_t [x(\cos \phi_{n'} - \cos \phi_n + \cos \phi_{m'} - \cos \phi_m)]} \times e^{ik_t [y(\sin \phi_{n'} - \sin \phi_n + \sin \phi_{m'} - \sin \phi_m)]}, \quad (3.2.37)$$

de modo que κ é uma constante, definida como $\kappa = (2\pi/Q-1)^4$. Calculamos a média da equação (3.2.37), então,

$$\langle I^2 \rangle = \kappa \sum_{n,n',m,m'=0}^{Q-1} \langle \Phi(\phi_n) \Phi^*(\phi_{n'}) \Phi(\phi_m) \Phi^*(\phi_{m'}) \rangle \left\langle e^{ik_t [x(\cos \phi_{n'} - \cos \phi_n + \cos \phi_{m'} - \cos \phi_m)]} \right\rangle \times \left\langle e^{ik_t [y(\sin \phi_{n'} - \sin \phi_n + \sin \phi_{m'} - \sin \phi_m)]} \right\rangle. \quad (3.2.38)$$

O valor das médias dos dois últimos termos da equação (3.2.38), são,

$$\left\langle e^{ik_t [x(\cos \phi_{n'} - \cos \phi_n + \cos \phi_{m'} - \cos \phi_m)]} \right\rangle = \text{sinc } \gamma_{n,n',m,m'}, \quad (3.2.39)$$

$$\left\langle e^{ik_t [y(\sin \phi_{n'} - \sin \phi_n + \sin \phi_{m'} - \sin \phi_m)]} \right\rangle = \text{sinc } \beta_{n,n',m,m'}, \quad (3.2.40)$$

onde $\gamma_{n,n',m,m'} = k_t \left[\frac{L}{2} (\cos \phi_{n'} - \cos \phi_n + \cos \phi_{m'} - \cos \phi_m) \right]$, $\beta_{n,n',m,m'} = k_t \left[\frac{L}{2} (\sin \phi_{n'} - \sin \phi_n + \sin \phi_{m'} - \sin \phi_m) \right]$. Substituindo as equações (3.2.39) e (3.2.40) na equação (3.2.28), obtemos

$$\langle I^2 \rangle = \kappa \sum_{n,n',m,m'=0}^{Q-1} \langle \Phi(\phi_n) \Phi^*(\phi_{n'}) \Phi(\phi_m) \Phi^*(\phi_{m'}) \rangle \text{sinc } \gamma_{n,n',m,m'} \text{sinc } \beta_{n,n',m,m'}. \quad (3.2.41)$$

Substituímos as equações (3.2.41) e (3.2.36) na equação (3.3.1),

$$C^2 = \frac{1}{Q^2} \sum_{n,n',m,m'=0}^{Q-1} \langle \Phi(\phi_n) \Phi^*(\phi_{n'}) \Phi(\phi_m) \Phi^*(\phi_{m'}) \rangle \text{sinc } \gamma_{n,n',m,m'} \text{sinc } \beta_{n,n',m,m'} - 1. \quad (3.2.42)$$

Decompomos a soma em quatro termos,

$$C^2 = \Gamma_1^{(2)} + \Gamma_2^{(2)} + \Gamma_3^{(2)} + \Gamma_4^{(2)} - 1, \quad (3.2.43)$$

sendo que $\Gamma_p^{(2)}$ é a correlação de segunda ordem entre campos com p índices diferentes.

Para o primeiro termo da soma, $\Gamma_1^{(2)}$, a condição é que na soma dos índices p um índice pode ser diferente dos demais, levando aos demais assumirem valores iguais. No segundo termo, $\Gamma_2^{(2)}$, dois índices serão diferentes dos demais, podendo os outros dois serem iguais também. De maneira semelhante, $\Gamma_3^{(2)}$, é que três índices diferentes e o quarto pode assumir um valor igual a um desses. O quarto e último termo, $\Gamma_4^{(2)}$, é que os quatro índices são diferentes.

Tabela 3: Resultados numéricos para as correlações de segunda ordem.

| | $\Gamma_1^{(2)}$ | $\Gamma_2^{(2)}$ | $\Gamma_3^{(2)}$ | $\Gamma_4^{(2)}$ |
|-------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Rayleigh, ($C = 1$) | 0,0 | 2,0 | 0,0 | 0,0 |
| Super Rayleigh, ($C = 1,8$) | 0,0 | 2,0 | 0,0 | 2,1 |
| Sub Rayleigh, ($C = 0,8$) | 0,0 | 2,0 | 0,0 | -0,3 |

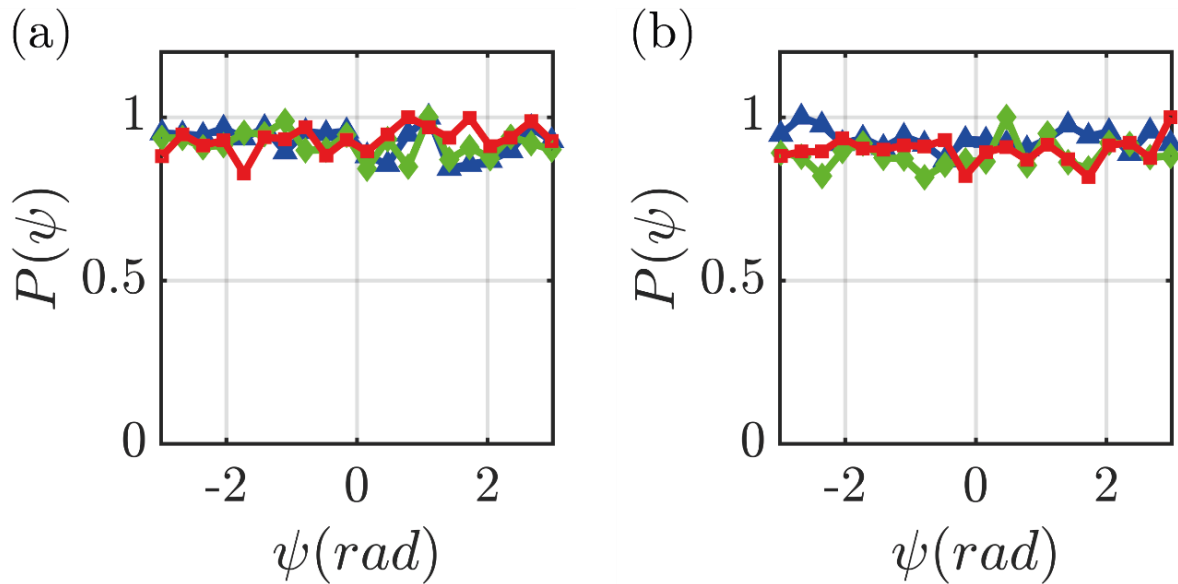
Fonte: Autor, 2022.

A Tabela 3 exhibe alguns contrastes e correlações para diferentes estatísticas e média de mais de 100 padrões. Analisando a tabela, fica claro que as estatísticas não-Rayleigh vêm da correlação cruzada correspondente aos somatórios sobre quatro índices diferentes na equação (3.3.16) [22]. Como fica claro que a estatística não

Rayleigh vem da correlação de alta ordem, se faz necessário também analisar se a fase dos campos de speckles continuam uniformemente distribuídas em $[-\pi, \pi]$.

Calculamos a função densidade de probabilidade da fase ψ correspondente a fase otimizada $\psi = \theta$, A ou B para os campos sub Rayleigh, figura 52 (a), ou super Rayleigh, figura 52 (b). Pode-se observar que todos são uniformemente distribuídos mesmo introduzindo as correlações sobre quatro índices diferentes observadas na Tabela 3.

Figura 52: Propriedades estatísticas das fases otimizadas $\psi = \theta$, A ou B e intensidades de speckle calculadas. (a) Gráfico do FDP de A (triângulos azuis), gráfico do FDP de B (losangos verdes) e gráfico de θ (quadrados vermelhos) para speckles sub Rayleigh e (b) o mesmo para speckles super Rayleigh.



Fonte: Autor, 2022.

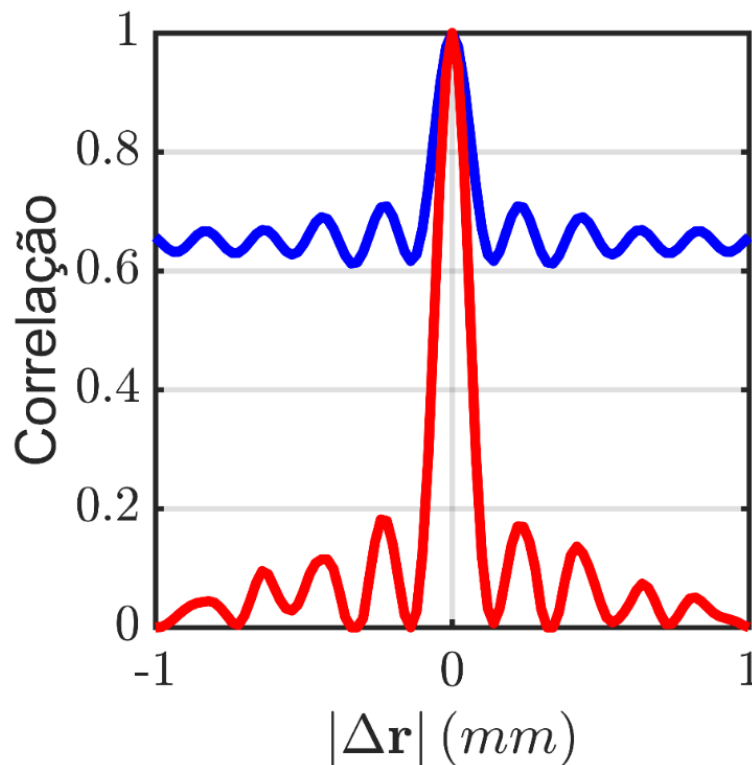
A ergodicidade e estacionaridade são estudadas através do cálculo da correlação cruzada dos campos de speckle ENRND, $|G_U(\Delta r)|^2$, para os speckles sub Rayleigh e para os speckles super Rayleigh. Essa correlação cruzada é obtida por meio da convolução entre a intensidade do campo de speckle ENRND e uma versão espacialmente invertida do mesmo padrão de speckle como demonstrado na sessão 1.3 do capítulo 1.

Ao realizarmos essa autocorrelação média numericamente entre os padrões de intensidade de speckle ENRND obtemos um resultado que pode ser modelado pela equação (1.2.35),

$$\Gamma(r; \tau) = \int_{\Omega} \langle I(r', \tau) \rangle \langle I(r' - r) \rangle dr' + \int_{\Omega} |G_U(r', r' - r; \tau)|^2 dr' . \quad (3.2.44)$$

o termo $\int_{\Omega} \langle I(r', \tau) \rangle \langle I(r' - r) \rangle dr'$ corresponde ao background que será subtraído da equação (3.3.18) para obtermos $|G_U(\Delta r)|^2$. Para entendermos melhor, calculamos a autocorrelação média de 100 padrões de campos de speckle sub Rayleigh. Analisamos na figura 53, a presença do background na autocorrelação média (linha azul) e a ausência do background da autocorrelação média (linha vermelha) após a subtração do mesmo. Utilizamos um método automatizado para a subtração do background [58].

Figura 53: Comparação entre a correlação $|G_U(\Delta r)|^2$ sem background (linha vermelha) e com background Γ (linha azul).

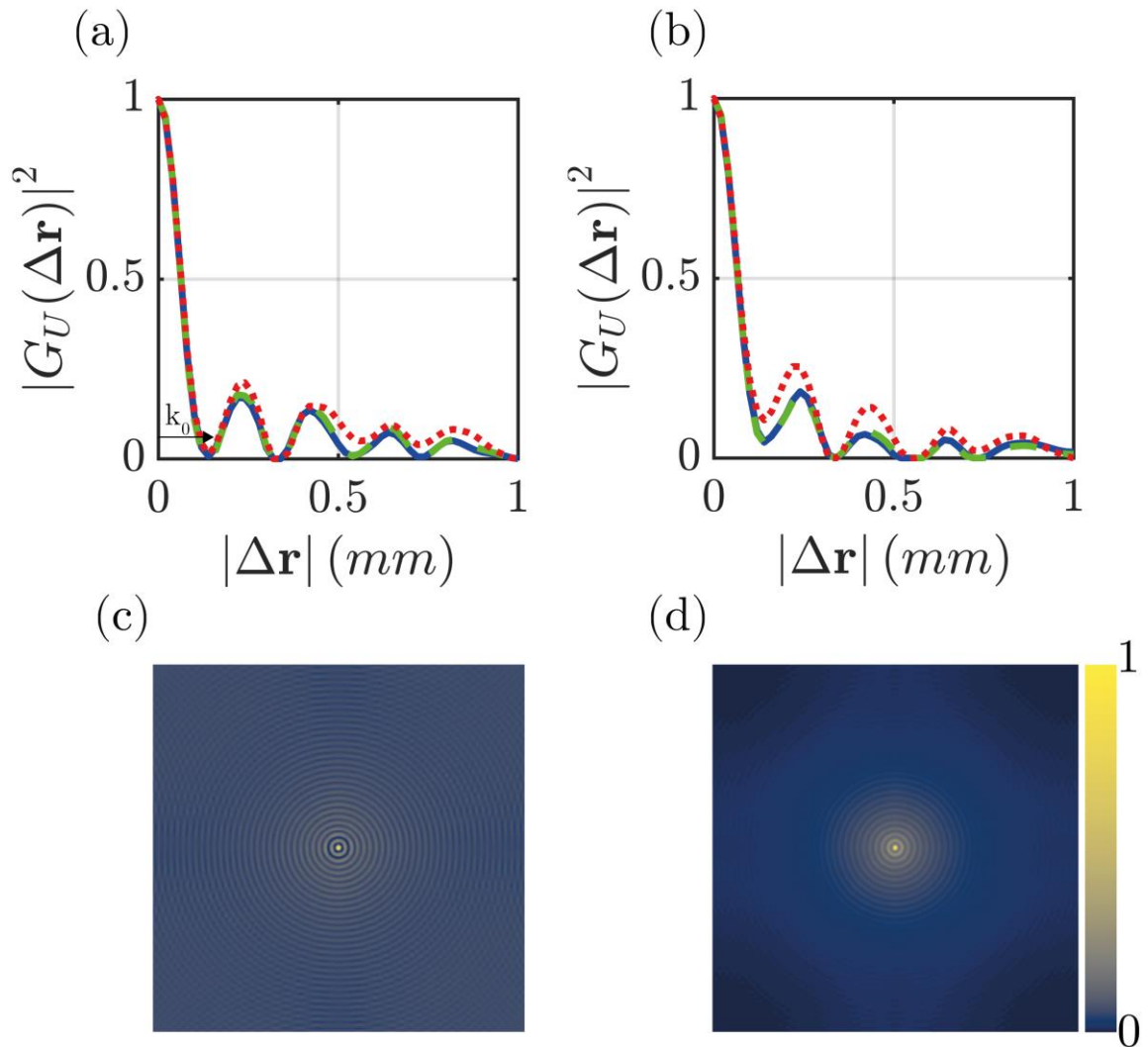


Na figura 54, analisamos a correlação cruzada de campo $|G_U(\Delta r)|^2$, para os speckles sub Rayleigh, figura 54 (a), e para os speckles super Rayleigh, figura 54 (b). A ergodicidade é confirmada através da correspondência da correlação cruzada calculada de um único padrão e a média mais de 100 padrões. A estacionariedade é definida pela invariância da correlação cruzada por uma translação espacial, o que equivale a dizer que a correlação cruzada é a mesma para qualquer área selecionada do padrão speckle. Portanto, a estacionariedade é confirmada através do casamento entre a correlação do campo ao longo de um quarto do padrão de intensidade do speckle e ao longo de toda a área calculada do padrão de intensidade.

Na figura 54 (a) e 54 (b), também podemos analisar o comprimento de correlação que é a largura total à meia altura do pico central da correlação cruzada [59], que é $k_0 = 0,14$ mm para speckles sub e super Rayleigh. Nas figuras 54 c) e d) temos os perfis para as correlações cruzadas entre 100 padrões de speckle ENRND com estatística super Rayleigh e sub Rayleigh, respectivamente. Os perfis de intensidade das correlações cruzadas são semelhantes a distribuição de intensidade de um feixe Bessel [41,12]. A Figura 54 usa os mesmos dados usados para obter a Tabela 3.

Desenvolvemos um método para gerar speckles ENRND. Este método é baseado em um algoritmo simples que visa adequar correlações de ordem superior na fase relativa de uma superposição de ondas planas que representam um campo de speckle não difrativo. Resolvemos esse problema usando um algoritmo ingênuo que é utilizável na forma atual, mas implementações futuras podem acelerar o procedimento de otimização. Os speckles gerados são muito gerais, podendo ser sintonizados diretamente em uma faixa contínua de valores de contraste, mesmo no regime sub Rayleigh, preservando a propriedade não difrativa. Esses campos de speckle podem ter aplicações em uma ampla gama de áreas, desde física da matéria condensada até imagens ópticas.

Figura 54: (a) Correlações cruzadas dos campos de speckle para speckles sub Rayleigh para um quarto da janela calculada e média de 100 padrões (verde), para a janela completa e média de 100 padrões (azul) e para um único padrão (vermelho). (b) O mesmo para speckles de super Rayleigh. (c) e (d) perfis das correlações cruzadas para speckles sub e super Rayleigh, respectivamente.



Fonte: Autor, 2022.

Conclusão geral

Ao longo desse trabalho, tratamos no capítulo 1 dos conceitos iniciais e introdutórios do fenômeno de *speckle*. Vimos que os campos de intensidade de *speckle* podem ser gerados se uma luz coerente incidir e refletir de uma superfície rugosa, com a rugosidade do tamanho do comprimento de onda. De modo semelhante, um padrão de intensidade de *speckle* é obtido se a luz coerente for transmitida por um meio com características aleatórias no tamanho do comprimento de onda. Discutimos também casos em que o fenômeno não está restrito a um único comprimento de onda, afetando a ondas de várias naturezas, incluindo ondas ultrassônicas, micro-ondas, ondas ópticas, raios-x e ondas de matéria.

Ainda no capítulo 1, analisamos e discutimos o fenômeno de *speckle* como uma caminhada aleatória. Onde consideramos os fasores como os entes matemáticos responsáveis pela amplitude e a fase no plano complexo do caminhante. Para o caso do campo de *speckle*, levamos em conta uma superposição de fasores que possuem amplitudes e fases independentes e são distribuídos uniformemente de $(-\pi, \pi)$, com valores igualmente prováveis. Com toda essa análise inicial da estatística podemos descrever a estatística da função densidade de probabilidade da amplitude de *speckle* que é representada pela distribuição Rayleigh e da intensidade representada pela exponencial negativa.

No final do capítulo 1, definimos a coerência espacial para os campos de *speckles* a partir do experimento Young. Chegamos então na média da intensidade do ponto de observação e com isso, no termo de interferência dos campos propagados das fendas de Young. Com essa análise, podemos definir o grau de coerência mútua, que é o grau complexo de coerência das ondas das duas fendas. Nesta mesma seção, partimos da correlação de intensidade entre dois campos de *speckle* e chegamos na correlação cruzada de campos.

No capítulo 2, discutimos os trabalhos mais relevantes que foram desenvolvidos sobre campos de *speckle* com estatísticas não Rayleigh gerados por meio do Modulador Espacial de Luz (MEL). Como foi visto, os *speckle* não Rayleigh, basicamente mantêm a estrutura de um padrão granular aleatório, mas a estatística

da intensidade é alterada. Consequentemente, falamos do método proposto por Yaron Bromberg e Hui Cao, que usaram o MEL para adaptar os speckles nos regimes super Rayleigh e sub Rayleigh, introduzindo a correlação de alta ordem no plano alvo.

Outro trabalho no qual analisamos os resultados foi o de Nicholas Bender e colaboradores, que customizaram a estatística de speckle com diferentes funções densidades de probabilidade de intensidade por meio do método de Gerchberg-Saxton. Mostramos que o último trabalho publicado, levou em conta a ideia de manter a estatística não Rayleigh ao longo da propagação. Assim, Ruifeng Liu e colaboradores, desenvolveram um método para personalizar speckle não Rayleigh não difrativos, codificando fases aleatórias no MEL e projetando esse campo em uma fenda em forma de anel.

Por fim, apresentamos o nosso método para gerar campos de speckles exatos não Rayleigh não difrativos, ENRND. Desenvolvemos um algoritmo simples e eficiente capaz de otimizar as fases dos campos de speckle ENRND. Os speckles gerados são soluções exatas da equação de Helmholtz, podendo ser sintonizados diretamente em uma faixa contínua de valores de contraste, mesmo no regime sub Rayleigh, preservando a propriedade não difrativa. Esses campos de speckle podem ter aplicações em uma ampla gama de áreas, desde física da matéria condensada até imagens ópticas.

Bibliografia

1. J. D. Rigden and E. I. Gordon, "**The granularity of scattered optical maser light**," Proc. IRE 50, 2367-2368 (1962).
2. B. M. Oliver, "**Sparkling spots and random diffraction**," Proc. IEEE 51, 220-221 (1963).
3. Dainty, J. Christopher, ed. **Laser speckle and related phenomena**. Vol. 9. Springer science & business Media, 2013.
4. Wang, Jing, and Azriel Z. Genack. "**Transport through modes in random media**." Nature 471.7338 (2011): 345-348.
5. Genack, A. Z., and A. A. Chabanov. "**Signatures of photon localization**." Journal of Physics A: Mathematical and General 38.49 (2005): 10465.
6. Pine, David J., et al. "**Diffusing wave spectroscopy**." *Physical review letters* 60.12 (1988): 1134.
7. Zhou, Edward Haojiang. **Optical focusing and imaging through scattering media**. Diss. California Institute of Technology, 2017.
8. Scheffold, Frank, and Georg Maret. "**Universal conductance fluctuations of light**." *Physical review letters* 81.26 (1998): 5800.
9. Langbein, W., Jørn Märcher Hvam, and R. Zimmermann. "**Time-resolved speckle analysis: A new approach to coherence and dephasing of optical excitations in solids**." *Physical review letters* 82.5 (1999): 1040.
10. Ferri, Fabio, et al. "**High-resolution ghost image and ghost diffraction experiments with thermal light**." *Physical review letters* 94.18 (2005): 183602.
11. Schwartz, Tal, et al. "**Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices**." *Nature* 446.7131 (2007): 52-55.
12. Alves, Cleberson R., Alcenísio J. Jesus-Silva, and Eduardo JS Fonseca. "**Self-reconfiguration of a speckle pattern**." *Optics letters* 39.21 (2014): 6320-6323.
13. Fahrbach, Florian O., Philipp Simon, and Alexander Rohrbach. "**Microscopy with self-reconstructing beams**." *Nature photonics* 4.11 (2010): 780-785.

14. Fahrbach, Florian O., and Alexander Rohrbach. "**Propagation stability of self-reconstructing Bessel beams enables contrast-enhanced imaging in thick media.**" *Nature communications* 3.1 (2012): 1-8.
15. Durnin, J. J. J. M., J. J. Miceli Jr, and Joseph H. Eberly. "**Diffraction-free beams.**" *Physical review letters* 58.15 (1987): 1499.
16. Pires, Danilo G., et al. "**Three-dimensional speckle light self-healing-based imaging system.**" *Scientific reports* 8.1 (2018): 1-6.
17. Labeyrie, Antoine. "**Attainment of diffraction limited resolution in large telescopes by Fourier analysing speckle patterns in star images.**" *Astronomy and astrophysics* 6 (1970): 85.
18. Kuplicki, Kyrus, and Kam Wai Clifford Chan. "**High-order ghost imaging using non-Rayleigh speckle sources.**" *Optics Express* 24.23 (2016): 26766-26776.
19. Zhang, Er-Feng, Wei-Tao Liu, and Ping-Xing Chen. "**Ghost imaging with non-negative exponential speckle patterns.**" *Journal of Optics* 17.8 (2015): 085602.
20. Shapiro, Jeffrey H., and Robert W. Boyd. "**The physics of ghost imaging.**" *Quantum Information Processing* 11.4 (2012): 949-993.
21. Bender, Nicholas, et al. "**Circumventing the optical diffraction limit with customized speckles.**" *Optica* 8.2 (2021): 122-129.
22. Y. Bromberg and H. Cao, "**Generating non-rayleigh speckles with tailored intensity statistics**, *Phys. Rev. Lett.* 112, 213904 (2014).
23. J. P. Amaral, E. J. S. Fonseca, and A. J. Jesus-Silva, "**Tailoring speckles with weibull intensity statistics**, *Phys. Rev. A* 92, 063851 (2015).
24. R. W. Gerchberg and W. O. Saxton, *Optik* 35, 227 (1972).
25. N. Bender, H. Yilmaz, Y. Bromberg, and H. Cao, "**Customizing speckle intensity statistics**, *Optica* 5, 595 (2018).
26. N. Bender, H. Yilmaz, Y. Bromberg, and H. Cao, "**Creating and controlling complex light**, *APL Photonics* 4, 110806 (2019).
27. Liu, Ruifeng, et al. "**Generation of Non-Rayleigh Nondiffracting Speckles.**" *Physical review letters* 127.18 (2021): 180601.
28. R. Wagner, S. Smith, J. Sandrik, and H. Lopez, *IEEE Trans. Sonics Ultrason.* 30, 156 (1983).

29. Wang, Jing, and Azriel Z. Genack. "**Transport through modes in random media.**" *Nature* 471.7338 (2011): 345-348.
30. J. S. Lee, **Computer Graphics and Image Processing** 17, 24 (1981).
31. J.W. Goodman, **Speckle Phenomena in Optics: Theory and Applications** (Roberts and Co., Englewood, 2007).
32. Sutton, M., Mochrie, S. G. J., Greytak, T., Nagler, S. E., Berman, L. E., Held, G. A., & Stephenson, G. B. (1991). **Observation of speckle by diffraction with coherent X-rays.** *Nature*, 352(6336), 608-610.
33. Dall, R. G., Hodgman, S. S., Manning, A. G., Johnsson, M. T., Baldwin, K. G. H., & Truscott, A. G. (2011). **Observation of atomic speckle and Hanbury Brown–Twiss correlations in guided matter waves.** *Nature Communications*, 2(1), 1-5.
34. Goodman, Joseph W. "**Some fundamental properties of speckle.**" *JOSA* 66.11 (1976): 1145-1150.
35. E. W. Marchand, "**Derivation of the Point Spread Function from the Line Spread Function,**" *J. Opt. Soc. Am.* 54, 915-919 (1964).
36. Argenti, Fabrizio, et al. "**A tutorial on speckle reduction in synthetic aperture radar images.**" *IEEE Geoscience and remote sensing magazine* 1.3 (2013): 6-35.
37. Gupta, Savita, R. C. Chauhan, and S. C. Sexana. "**Wavelet-based statistical approach for speckle reduction in medical ultrasound images.**" *Medical and Biological Engineering and computing* 42.2 (2004): 189-192.
38. Damerjian, V., et al. "**Speckle characterization methods in ultrasound images—A review.**" *Irbm* 35.4 (2014): 202-213.
39. R. N. Czerwinski, D. L. Jones and W. D. O'Brien, "**Detection of lines and boundaries in speckle images-application to medical ultrasound,**" in *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 18, no. 2, pp. 126-136, Feb. 1999, doi: 10.1109/42.759114.
40. Fox, Huw, and William Bolton. **Mathematics for engineers and technologists.** Elsevier, 2002.
41. Saleh, Bahaa EA, and Malvin Carl Teich. **Fundamentals of photonics.** John Wiley & sons, 2019.

42. Mandel, Leonard, and Emil Wolf. **Optical coherence and quantum optics**. Cambridge university press, 1995.
43. Goodman, Joseph W. **Statistical optics**. John Wiley & Sons, 2015.
44. Reed, I. "**On a moment theorem for complex Gaussian processes**." IRE Transactions on Information Theory 8.3 (1962): 194-195.
45. Alves, Cleberson R., Alcenisio J. Jesus-Silva, and Eduardo JS Fonseca. "**Using speckles to recover an image after its transmission through obstacles**." Physical Review A 93.4 (2016): 043816.
46. D. Gaskill, **Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics**, Wiley Series in Pure and Applied Optics (Wiley, New York, 1978).
47. **Principle | LCOS-SLM (optical phase modulator)**. Hamamatsu, Photon is our Business. Disponível em <<https://www.hamamatsu.com/us/en/product/optical-components/lcos-slm/principle.html>>. Acesso em: 11 de maio de 2022.
48. Garreau, Jean-Claude. "**Quantum simulation of disordered systems with cold atoms**." Comptes Rendus Physique 18.1 (2017): 31-46.
49. Nunes, André S., et al. "**Ordering of binary colloidal crystals by random potentials**." Soft Matter 16.17 (2020): 4267-4273.
50. T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman, and M. Segev, **Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices**, Nature 446, 52 (2007).
51. Arrizón, Victor, et al. "**Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields**." JOSA A 24.11 (2007): 3500-3507.
52. H.E. Hernández-Figueroa, M. Zamboni-Rached e E. Recami (eds), **Non-diffracting waves** (Wiley-VCH, Weinheim, 2013).
53. Penchev, Pavel, Stefan Dimov, and Debajyoti Bhaduri. "**Experimental investigation of 3D scanheads for laser micro-processing**." Optics & Laser Technology 81 (2016): 55-59.
54. Amaral, J. P., and C. H. M. Lima. "**Moldando a luz: a física por trás dos feixes ópticos**." Revista Brasileira de Ensino de Física 43 (2021).
55. J. W. Goodman, **Introduction to Fourier Optics** (W. H. Freeman, 2005).
56. Siegman, Anthony E. **Lasers**. University science books, 1986.

57. Vicente, Oscar Céspedes, and Christophe Caloz. "**Bessel beams: a unified and extended perspective.**" *Optica* 8.4 (2021): 451-457.
58. Jesus-Silva, A. J., et al. "**Experimental cancellation of aberrations in intensity correlation in classical optics.**" *Physical Review A* 97.1 (2018): 013832.
59. Alves, Cleberson R., et al. "**Measuring the topological charge of coherence vortices through the geometry of the far-field cross-correlation function.**" *Applied Optics* 59.6 (2020): 1553-1557.