



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

JEFFERSON DA ROCHA SILVA

**Transmissão e reflexão de feixes eletromagnéticos por um
material em camadas com simetria PT**

Maceió

2022

JEFFERSON DA ROCHA SILVA

Transmissão e reflexão de feixes eletromagnéticos por um material em camadas com simetria PT

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho

Maceió
2022

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586t Silva, Jefferson da Rocha.
Transmissão e reflexão de feixes eletromagnéticos por um material em camadas com simetria PT / Jefferson da Rocha Silva. – 2022.
90 f. : il. color.

Orientador: Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho.
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 53-54.
Apêndices: f. 55-61.

1. Simetria paridade-tempo (Física). 2. Feixes gaussianos. 3. Óptica clássica. I. Título.

CDU: 531.124.125

AGRADECIMENTOS

Obrigado meu Deus pela minha vida e por sua presença nela, por sempre me dar a minha melhor chance e por me presentear com pessoas, que são verdadeiros tesouros que "a traça e a ferrugem não consomem".

Agradeço a toda minha família, em especial, ao meu pai e a minha mãe por todo amor, carinho e por lutar todos esses anos para que eu pudesse chega até aqui, a minha querida e linda esposa Jennifer que é o meu porto seguro, a minha avó Geruza, meu avô Avaristo, minha tia Gida, meu padrinho Antônio e todos os demais.

Tenho uma grande dívida de gratidão, ainda, com grupos de pessoas que me ajudaram a desafiar a física, pois aumentaram minha energia e reduziram a minha entropia, desses grupos destaco meus amigos do SEB, por todas as conservas e todo apoio, dentre os quais destaco o Jadielson (Grande Jadi), Super Keyllor, Philippe Alves, Jeferson de química, Matheus de História, entre outros. Agradeço ainda, aos meus amigos de graduação/mestrado Melk, Marechal Lucas, Marcel, Erik, Helton, Gabriel, Claudemir e Wallace. Devo ainda um grande obrigado aos profissionais que fizeram por mim muito mais do que eram os seus deveres, como o Victor, técnico em Assuntos educacionais do instituto, o professor Márcio da matemática, professor Kenny de inglês, a CAPES e CNPq por investirem em pesquisa.

Dedico esse trabalho ainda, e principalmente, aos professores do mestrado e tantos outros do Instituto que não posso me esquecer, dos muitos destaco o professor Paulo (meu orientador), professor Wagner, professor Iram, professor Ítalo, professora Solange, professor Samuel, professor Heber e professor Marcelo. Retorno a gratidão ao meu orientador (professor Paulo) por tudo que me ensinou até aqui.

RESUMO

Estudamos as propriedades de transmissão e reflexão de ondas planas monocromáticas e feixes gaussianos monocromáticos interagindo com uma estrutura dielétrica isotrópica de três camadas com simetria paridade-tempo. Utilizando o espectro angular de ondas planas, obtemos a transmitância T e a refletância R do material e observamos sua dependência com a cintura do feixe incidente, com a largura das camadas e com o parâmetro de ganho/perda dos materiais ativos. Demonstramos que, em contraste com o problema de espalhamento envolvendo uma única onda plana, a transmitância e a refletância dependem fortemente do tamanho da cintura do feixe. Por fim, observamos que o feixe gaussiano sob certo limite em sua cintura recupera os resultados a cerca do modelo da onda plana.

Palavras-chave: Simetria PT. Feixe gaussiano, Óptica clássica.

ABSTRACT

We study the transmission and reflection properties of monochromatic plane waves and monochromatic Gaussian beams interacting with a three-layer isotropic dielectric structure having parity-time symmetry. By using the angular spectrum of plane waves, we obtain the transmittance T and reflectance R of the material and observe its dependence on the beam waist of the incident beam, the width of the layers and the gain/loss parameter of the active materials. We demonstrate that, in contrast to the scattering problem involving single plane waves, the transmittance and reflectance strongly depend on the beam size. Finally, we observe that the Gaussian beam at some limit in its waist recovers the results of the plane wave model.

Keywords: PT symmetry, gaussian beam, Classical Optics.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	Simetria PT	15
2.1.1	Operadores de paridade e reversão temporal	15
2.1.2	Sistemas abertos, isolados e PT-simétricos	17
2.1.3	Simetria PT na Óptica	21
2.2	Propagação de ondas eletromagnéticas em materiais com índice de refração complexo	23
2.2.1	Materiais com índice de refração complexo	23
2.2.2	Propagação de ondas eletromagnéticas	26
2.3	Reflexão e Transmissão de ondas planas em sistemas PT-simétricos	29
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	35
3.1	Material PT-simétrico com 3 camadas sujeito a incidência oblíqua de uma onda plana monocromática	35
3.1.1	Reflexão e Transmissão da onda plana para incidências oblíquas sob mudança nas dimensões das camadas	38
3.2	Incidência de um feixe gaussiano através da expansão por ondas planas	43
3.2.1	Parte imaginária do índice de refração	45
3.2.2	Cintura e limite do feixe gaussiano	49
4	CONCLUSÕES	53
	REFERÊNCIAS	55
	APÊNDICE A – IDENTIDADES MATEMÁTICAS	57
A.1	Identidades do cálculo vetorial	57
A.1.1	Produto de um Escalar e um Vetor	57
A.1.2	rotacional do rotacional	58
A.2	Integral gaussiana	59
A.3	Transformada de Fourier	60
A.3.1	Delta de Dirac	61
A.3.2	Gaussiana	61

1 INTRODUÇÃO

Por muitos anos, no contexto da mecânica quântica, o uso de hamiltonianos hermitianos foi a única alternativa de descrever um sistema físico, um fato que se sustentou junto aos fundamentos da mecânica quântica devido a hermiticidade usual garantir um espectro de energias puramente real (1). Somente no final do século passado, com os estudos dos pesquisadores Carl M. Bender e Stefan Boettcher o campo de pesquisas em sistemas não-hermitianos teve um grande crescimento, tal crescimento foi motivado pelas descobertas de hamiltonianos com espectros de energia discretos, positivos e reais (2), sem a necessidade do hamiltoniano ser hermitiano. Tais hamiltonianos apresentaram-se invariantes na ação conjunta de dois operadores, o operador de paridade (\mathcal{P}) e o operador de reversão temporal (\mathcal{T}), esta propriedade foi nomeada como simetria PT (3).

Na óptica, a não hermiticidade está associada aos meios de ganho e perda, pois em meios ativos podemos tratar os seus índices de refração sob extensão aos números complexos, onde a parte imaginária associa-se a ganhos e perdas. Em particular, a simetria PT aplicada a óptica permite a explicação e a descoberta de diversos fenômenos ópticos, como a reciprocidade de transmissão em sistemas com camadas com ganho e perda equilibrados (O que garante a simetria PT), invisibilidade unidirecional (4, 5), birrefringência em materiais descritos por potenciais periódicos (6), entre outros (7, 8, 9, 10, 11, 12). A simetria PT tinha como alvo sistemas quânticos, mas a analogia entre a mecânica quântica e a óptica, devido a semelhança entre as equações de Schrödinger e Helmholtz no regime da aproximação paraxial, nos permite trazer uma simetria quântica para o contexto da óptica.

Neste trabalho, estudamos um campo eletromagnético que incide sobre um material PT-simétrico com 3 camadas, modelo já conhecido na literatura (13, 14). Inicialmente na fundamentação teórica, trataremos das bases físicas e matemáticas que sustentam a teoria dos hamiltonianos PT-simétricos, onde veremos que os mesmos se apresentam como intermediários entre sistemas abertos e isolados, na sequência, analisaremos a propagação de uma onda eletromagnética em meios que à atenuam (perda) e à amplificam (ganho) a intensidade da onda incidente. No capítulo 3, analisamos as amplitudes refletidas e transmitidas de ondas planas incidentes, a fim de comparar o resultado com um feixe gaussiano (15). Nossa motivação nesse estudo vem do fato de que o material tri-camadas mencionado ainda não ter sido discutido na literatura sob a presença de um feixe gaussiano. Obteremos tal feixe por expansão de ondas planas e os compararemos alterando as dimensões das camadas e alternado-as, bem como iremos observar a dependência da reflexão e da transmissão com as quantidades físicas envolvidas. Além disso, verificaremos a possibilidade de recuperar o modelo da onda plana sob limites no feixe gaussiano. Após a análise e discussão, o último capítulo tratará das conclusões e perspectivas deste trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 SIMETRIA PT

Nessa seção trataremos da simetria PT de um sistema quântico, onde retiramos a hermiticidade usual do hamiltoniano e analisamos o sistema sob uma nova condição de invariância, tal condição permite em certos casos que o espectro de energias seja puramente real. Nas subseções mais centrais, veremos modelos de sistemas PT simétricos onde a simetria ocorre, mas o espectro possui energias complexas e, portanto, apresentam pontos de transição de fase. Na última subseção, veremos o porquê dessa simetria da mecânica quântica poder ser adaptada para sistemas ópticos.

2.1.1 OPERADORES DE PARIDADE E REVERSÃO TEMPORAL

A simetria PT trata-se de uma invariância sobre o operador hamiltoniano de um sistema físico na aplicação conjunta dos operadores de paridade (\mathcal{P}) e reversão temporal (\mathcal{T}). Para tomar uso dessa simetria vamos conhecer, inicialmente, as consequências desses operadores na mecânica quântica.

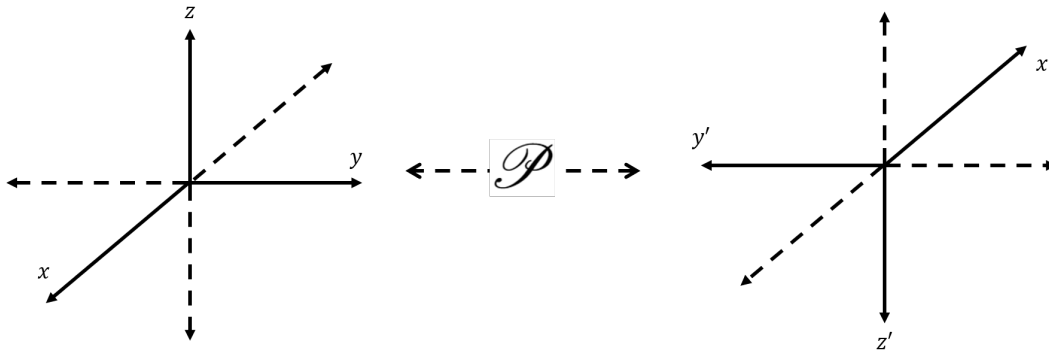
O operador de paridade é um operador unitário e hermitiano (16, p. 252) que promove uma inversão espacial onde ele opera. Em uma dimensão, os operadores de posição (X) e momento (P) são quantidades vetoriais mensuráveis, a operação de paridade sobre eles troca seus sinais (16, p. 253),

$$\mathcal{P}X\mathcal{P}^{-1} = -X \quad (2.1)$$

$$\mathcal{P}P\mathcal{P}^{-1} = -P, \quad (2.2)$$

Em um sistema tridimensional, um vetor posição \vec{r} é levado, sob a operação de paridade, ao vetor $-\vec{r}$, com base nisso, afirmamos que o operador paridade leva sistemas dextrogiros em sistemas levogiros, sendo a recíproca válida.

Figura 1 – Atuação do operador paridade sobre um sistema de coordenadas.



Fonte: Autor

O hamiltoniano possui invariância sob a paridade quando H e \mathcal{P} comutam, ou equivalentemente:

$$H(-X, -P) = H(X, P) \quad (2.3)$$

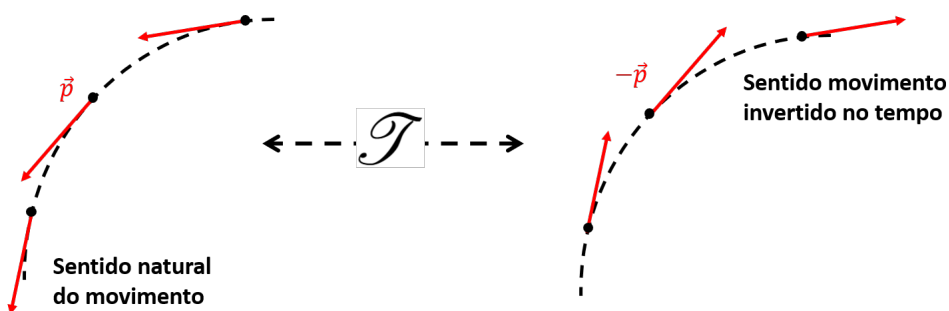
$H = P^2 + X^2$, $H = PX$, entre outros, são exemplos de hamiltonianos com simetria de paridade.

Introduzimos, inicialmente, o operador de reversão temporal como um operador antilinear (16, p. 269), o que significa que em uma combinação linear de estados sua atuação conjuga os coeficientes da combinação,

$$\mathcal{T}(a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle) = a_1^* \mathcal{T} |\psi_1\rangle + a_2^* \mathcal{T} |\psi_2\rangle, \quad (2.4)$$

esse operador atua na dinâmica de uma partícula traçando seu movimento de forma reversa no tempo, sendo equivalente a um retrocesso em seu movimento e, portanto, o momento dessa partícula têm o sentido invertido. Uma ilustração do efeito de reversão no tempo é apresentado na figura 2.

Figura 2 – Atuação do operador de reversão temporal sobre o movimento de uma partícula.



Fonte: Autor

Os efeitos provocados por esse operador são descritos por (16, p. 274),

$$\mathcal{T}X\mathcal{T}^{-1} = X \quad (2.5)$$

$$\mathcal{T}P\mathcal{T}^{-1} = -P. \quad (2.6)$$

$$(2.7)$$

O hamiltoniano (H) de um sistema é invariante por reversão temporal quando os operadores H e \mathcal{T} comutam entre si, o que é equivalente a invariância do hamiltoniano sobre as seguintes substituições:

$$P \rightarrow -P \quad (2.8)$$

$$i \rightarrow -i \quad (2.9)$$

$H = P^2 + X^2$, $H = iPX$, entre outros, são exemplos de hamiltonianos com simetria de reversão temporal. Para obtermos um hamiltoniano PT simétrico, o mesmo deve ser invariante pela operação combinada dos operadores \mathcal{P} e \mathcal{T} ,

$$(\mathcal{P}\mathcal{T})H(\mathcal{P}\mathcal{T})^{-1} = H, \quad (2.10)$$

sem necessariamente respeitar cada simetria separadamente, como veremos na seção seguinte o hamiltoniano com o potencial $-(iX)^N$.

2.1.2 SISTEMAS ABERTOS, ISOLADOS E PT -SIMÉTRICOS

Para a mecânica quântica, a matriz hamiltoniana de sistemas isolados (sistemas que não trocam partículas nem energia com o meio externo) é hermitiana em relação ao produto interno usual ($H^\dagger = H$) e os sistemas abertos têm matriz hamiltoniana não hermitiana. Os sistemas PT simétricos podem ser vistos como um intermediário entre sistemas abertos e isolados, apesar da ausência de hermiticidade usual, seus autovalores são reais.

Para entender os sistemas PT -simétricos, consideramos um sistemas que possa ser descrito por uma hamiltoniana 1×1 (figura 3(a)), sendo $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$ constantes,

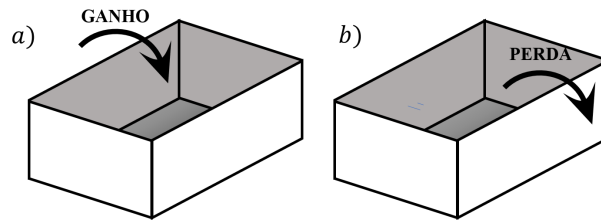
$$H_+ = [a + bi], \quad (2.11)$$

a matriz hamiltoniana desse sistema revertida no tempo (figura 3(b)) é obtida por conjugação do seu único elemento,

$$H_- = \mathcal{T}H_+\mathcal{T}^{-1} = [a - bi]. \quad (2.12)$$

Ao analisar a solução da equação de Schrödinger ($i\partial_t\psi = H\psi$) para os hamiltonianos H_+ e H_- temos funções de onda proporcionais a e^{bt} e e^{-bt} , respectivamente. O que apresenta ganho e perda sobre o fluxo de energia do sistema, reforçando a ideia da ausência da hermiticidade usual.

Figura 3 – Sistemas abertos com fluxo de energia (a) crescente no tempo e (b) decrescente no tempo, onde (b) é o sistema (a) sob reversão temporal.

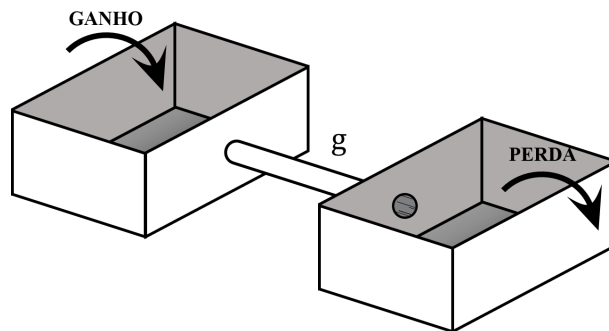


Fonte: Autor

Isoladamente, os subsistemas descritos por H_+ e H_- são sistemas abertos, ao acoplar os sistemas apresentados por H_+ e H_- (figura 4), somos capazes de alcançar o equilíbrio dinâmico para o sistema combinado (17, p. 28), escrevemos o hamiltoniano desse novo modelo com um parâmetro g associado ao acoplamento e, portanto, g é um elemento não diagonal o que permitindo a conexão entre os subsistemas,

$$H_{\text{acoplado}} = \begin{bmatrix} a + bi & g \\ g & a - bi \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Figura 4 – Acoplamento de dois subsistemas abertos, onde um é a reversão no tempo do outro, o acoplamento se dá pelo parâmetro de vínculo g .



Fonte: Autor

Verificar que H_{acoplado} é PT-simétrico, equivale a saber se $\mathcal{P} \mathcal{T} H_{\text{acoplado}} (\mathcal{P} \mathcal{T})^{-1} = H_{\text{acoplado}}$, o operador \mathcal{P} que realiza o intercâmbio mútuo entre os subsistemas corresponde a matriz σ_1 de Pauli, já que a aplicação da mesma sobre um operador troca os elementos diagonais entre si, bem como os elementos não diagonais, enquanto o operador de reversão temporal atua

sobre a matriz calculando o seu complexo conjugado,

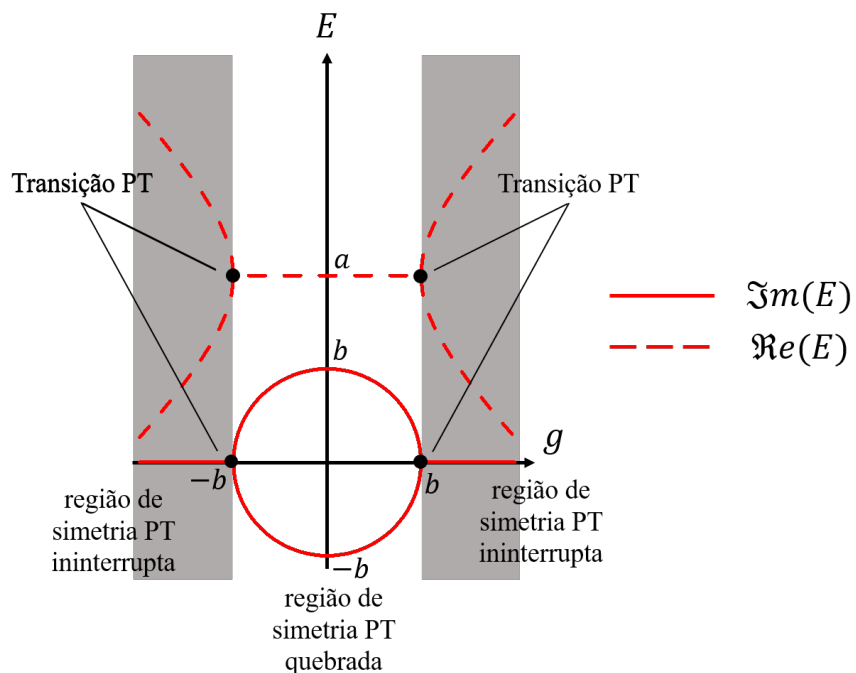
$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} \mathcal{T} H_{\text{acoplado}} \mathcal{T}^{-1} \mathcal{P}^{-1} &= \mathcal{P} H_{\text{acoplado}}^* \mathcal{P}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-bi & g \\ g & a+bi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a+bi & g \\ g & a-bi \end{bmatrix} \\
 &= H_{\text{acoplado}}.
 \end{aligned}$$

Quando $g = 0$ o sistema não entra em equilíbrio, mesmo com a condição de simetria PT sendo satisfeita, pois, eliminando o vínculo g , em um subsistema a energia apenas cresce com o tempo e no outro apenas decai no tempo. A condição $g \neq 0$ não garante o equilíbrio, ainda há restrições sobre seus possíveis valores, para tal, precisamos calcular os autovalores de H_{acoplado} ,

$$E_{\pm} = a \pm \sqrt{g^2 - b^2}. \quad (2.14)$$

Portanto, para o sistema atingir o equilíbrio precisamos de um acoplamento forte do tipo $|g| > b$, assim os autovalores são reais e os autoestados não crescem nem decaem apenas oscilam, o que chamamos de região de simetria PT ininterrupta. Quando $|g| < b$ o acoplamento é fraco o suficiente para permitir autovalores complexos e, portanto, os autoestados nunca entram em equilíbrio, nesse caso, dizemos que a simetria PT é quebrada (17, p. 9).

Figura 5 – Partes real e imaginária da equação (2.14) para $|g| > b$ onde a simetria é ininterrupta e $|g| < b$ onde a simetria é quebrada.

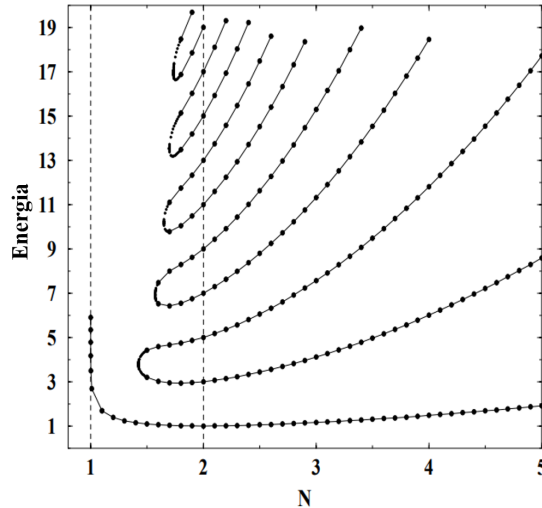


Na figura 5, observamos as regiões de simetria quebrada e ininterrupta, nas transições entre simetria quebrada e ininterrupta, os pontos de transição de fase PT, onde $g = \pm b$, os autovalores reais se fundem e se tornam complexos, efeito completamente inesperado sobre os hamiltonianos hermitianos usuais.

Outro sistema com transição de fase consiste em um hamiltoniano com um potencial que chamou a atenção de Bender e Boettcher (2), o potencial $-(ix)^N$, o interesse nesse potencial se deve ao hamiltoniano não ter, necessariamente, simetria de paridade, nem de reversão temporal, mas ter a simetria de ambas combinadas.

Bender e Boettcher observaram, por métodos assintóticos, que o espectro de autoenergias do hamiltoniano $H = P^2 - (iX)^N$ era real, discreto e positivo para $N \geq 2$ (figura 6). Para $N = 2$ o hamiltoniano têm a forma do oscilador harmônico quântico ($H = P^2 + X^2$), cujas autoenergias são conhecidas ($E = 2n + 1$). Entretanto, Para $1 \leq N < 2$ no número de autoenergias é finito, na verdade, o que ocorre é que o espectro de autoenergias é composto por pares de números complexos conjugados nesse caso.

Figura 6 – Autoenergias do hamiltoniano cujo potencial é $-(ix)^N$ em função do parâmetro N , onde os autovalores são reais, positivos e discretos, mesmo o hamiltoniano não sendo hermitiano.



Fonte: Retirado da referência (2)

A região de simetria PT quebrada ocorre, portanto, em $1 \leq N < 2$, a região em que $N > 2$ a simetria PT é ininterrupta e a transição de fase PT ocorre exatamente no oscilador harmônico. Um caso curioso ocorre quando $N = 4$, pois o potencial $-x^4$ têm concavidade voltada para baixo, o que classicamente apresenta instabilidade na posição $x = 0$. No entanto, Bender e Boettcher, ao estenderem a posição x para os números complexos observaram que a posição que a partícula sujeita a tal potencial passava a maior parte do tempo na origem, garantindo um espectro de energias puramente real e uma função de onda localizada.

2.1.3 SIMETRIA PT NA ÓPTICA

A simetria PT é configurada na óptica organizando os meios de ganho e perda de forma simétrica e equilibrada, não é difícil observar que a intuição sobre o uso dessa simetria na óptica se dá pela semelhança entre as equações que regem a dinâmica entre essas duas áreas da física, nessa seção veremos as condições para que essa semelhança ocorra.

Na propagação de ondas eletromagnéticas monocromáticas em meios materiais, as alterações na parte espacial sofridas pelas componentes do campo elétrico ou magnético podem ser descritas pela equação de Helmholtz:

$$[\nabla^2 + k^2]\Psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.15)$$

Onde k é o módulo do vetor de onda.

Suponhamos uma onda plana que se propaga partindo do vácuo sobre o eixo z , onde seu vetor de onda têm módulo k_0 , para um novo ambiente, onde o módulo do vetor de onda passa a ser k . No meio original esta onda têm a forma e^{ik_0z} com uma amplitude constante. No segundo meio, separamos a função de onda explicitando o seu envelope ψ .

$$\Psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r})e^{ik_0z} \quad (2.16)$$

A equação que rege a evolução espacial do envelope da onda pode ser obtida diretamente pela substituição (2.16) em (2.15),

$$\begin{aligned} [\nabla^2 + k^2]\psi(\vec{r})e^{ik_0z} &= e^{ik_0z}[\nabla_{\perp}^2 + k^2]\psi(\vec{r}) + \partial_z^2[\psi(\vec{r})e^{ik_0z}] \\ &= e^{ik_0z} \{ [\nabla_{\perp}^2 + k^2]\psi(\vec{r}) + [\partial_z^2 + 2ik_0\partial_z - k_0^2]\psi(\vec{r}) \} \\ &= e^{ik_0z} (\nabla^2\psi + 2ik_0\partial_z\psi + (k^2 - k_0^2)\psi) \\ &= 0, \end{aligned}$$

portanto,

$$-\nabla^2\psi + (k_0^2 - k^2)\psi = 2ik_0\partial_z\psi.$$

Assumindo que o novo meio possui índice de refração que varia apenas no eixo de propagação (z), onde $k = n(z)k_0$ e fazendo uso da aproximação paraxial o termo $\partial_z^2\psi$ no laplaciano é negligenciado, pois varia muito lentamente em comparação com os demais termos. Portanto substituímos o laplaciano convencional pelo laplaciano transversal.

$$-\nabla_{\perp}^2\psi + k_0^2(1 - n(z)^2)\psi = 2ik_0\partial_z\psi$$

Dividindo por $2k_0$:

$$-\frac{1}{2k_0}\nabla_{\perp}^2\psi + \frac{k_0}{2}(1 - n(z)^2)\psi = i\partial_z\psi \quad (2.17)$$

Por comparação direta, a aproximação paraxial da equação de Helmholtz coincide com a equação de Schrödinger bidimensional, onde a coordenada espacial z desempenha o papel da coordenada

temporal t , por essa razão podemos trabalhar fenômenos ópticos usando ideias da mecânica quântica. Por fim, observamos a forma do potencial,

$$V(z) = \frac{k_0}{2}(1 - n(z)^2). \quad (2.18)$$

Para o caso especial em que a onda eletromagnética se propaga no vácuo ($n = 1$), observamos o modelo de propagação da partícula livre ($V = 0$). Para a situação hermitiana, onde o potencial e o índice de refração são quantidades reais, temos um potencial negativo, o que evidência a comparação da entrada em um meio mais refringente, a partir do vácuo, com a passagem por uma região de menor potencial a partir de uma de maior potencial.

Com a equação (2.17) somos capazes de obter a forma do operador hamiltoniano,

$$H = \frac{1}{2k_0} \nabla_{\perp}^2 + V(z). \quad (2.19)$$

Para obter a condição de simetria PT tomamos a condição $(\mathcal{P}_{xy} \mathcal{T}_z) H (\mathcal{P}_{xy} \mathcal{T}_z)^{-1} = H$, onde o operador \mathcal{P}_{xy} se comporta como o operador paridade, promovendo inversão das coordenadas espaciais x e y , e \mathcal{T}_z é o análogo óptico do operador de reversão temporal onde a coordenada z atua como "coordenada temporal".

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{xy} \mathcal{T}_z) H (\mathcal{P}_{xy} \mathcal{T}_z)^{-1} &= \frac{1}{2k_0} [(\mathcal{P}_{xy} \mathcal{T}_z)(\partial_x^2 + \partial_y^2)(\mathcal{P}_{xy} \mathcal{T}_z)^{-1} + (\mathcal{P}_{xy} \mathcal{T}_z)V(z)(\mathcal{P}_{xy} \mathcal{T}_z)^{-1}] \\ &= \frac{1}{2k_0} [(-\partial_{-x})(-\partial_{-x}) + (-\partial_{-y})(-\partial_{-y})] + V^*(-z) \\ &= \frac{1}{2k_0} (\partial_x^2 + \partial_y^2) + V^*(-z) \\ &= \frac{1}{2k_0} \partial_{\perp}^2 + V^*(-z), \end{aligned}$$

Comparando $(\mathcal{P}_{xy} \mathcal{T}_z) H (\mathcal{P}_{xy} \mathcal{T}_z)^{-1}$ com o hamiltoniano em (2.17), obtemos relação sobre o potencial que define a simetria PT de um sistema óptico, $V^*(-z) = V(z)$, a relação consiste em termos um potencial cuja parte real é uma função par e a parte imaginária uma função ímpar. Pela equação (2.18) o índice de refração possui a mesma simetria,

$$n^*(-z) = n(z), \quad (2.20)$$

de forma mais explícita:

$$n_r(-z) = n_r(z) \quad (2.21)$$

$$n_i(-z) = -n_i(z). \quad (2.22)$$

Logo, somos capazes de fornecer a simetria PT de um sistema estabelecendo a paridade do índice de refração. Com as noções de ganho e perda estudadas na subseção 2.2.1, $n_i < 0$ apresenta o ganho do meio e $n_i > 0$ a perda e, portanto, a condição para n_i se comportar como uma função ímpar estabelece o equilíbrio entre ganhos e perdas.

2.2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM MATERIAIS COM ÍNDICE DE REFRAÇÃO COMPLEXO

Na presente seção, obtemos as equações que regem a propagação de ondas eletromagnética sobre meios idealizados. Inicialmente introduzimos, na primeira subseção, a existência de meios capazes de amplificar ou atenuar um sinal de luz, os quais nomeamos de meios com ganho e meios com perda. Algebricamente, a inclusão dos efeitos de atenuação e amplificação podem ser observação sob o tratamento do índice de refração do meio como uma quantidade complexa. Para analisar a propagação das ondas eletromagnéticas nesses meios, na subseção seguinte, desacoplamos os campos elétrico e magnético para obter a forma das equações que mapeiam espacialmente os campos, bem como as condições de contorno para a incidência sobre esses meios com certas idealizações.

2.2.1 MATERIAIS COM ÍNDICE DE REFRAÇÃO COMPLEXO

Nas equações de Maxwell para meios dielétricos, observamos que a existência de meios lineares capazes de atenuar e amplificar a intensidade dos campos elétrico e magnético é esperada teoricamente. A princípio, assumimos que o meio possui permissividade elétrica (ϵ) e permeabilidade magnética (μ) constantes, onde a forma das equações de Maxwell, na ausência da densidade de cargas livres, para a imposição proposta assumem a forma:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0; \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0; \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \partial_t \vec{H}; \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \epsilon \partial_t \vec{E}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Com \vec{E} sendo o campo elétrico, \vec{H} sendo o campo magnético e onde \vec{J}_f é a densidade de corrente livre no meio. Uma segunda consideração que adotamos surge quando adotamos a lei de Ohm,

$$\vec{J}_f = \sigma \vec{E}, \quad (2.24)$$

onde σ é a condutividade do meio.

Até o exato momento os campos são solenoidais e acoplados, com rotacionais satisfazendo:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\mu \partial_t \vec{H}; \\ \nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \partial_t \vec{E} \end{cases} \quad (2.25)$$

Ao aplicar o operador $\nabla \times$ em (2.25), usando a identidade vetorial ¹ $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = -\nabla^2 \vec{F}$ para campos solenoidais, as equações são desacopladas para cada campo,

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \varepsilon \partial_t^2 \vec{E} + \mu \sigma \partial_t \vec{E}, \quad (2.26)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \varepsilon \partial_t^2 \vec{H} + \mu \sigma \partial_t \vec{H}. \quad (2.27)$$

Assumimos que os campos \vec{E} e \vec{H} que compõem a onda eletromagnética se propagam ao longo do eixo z com uma frequência de oscilação ω . Note que a onda plana da forma $Ae^{i(kz - \omega t)}$ é uma solução para as equações (2.26) e (2.27). Por substituição direta da solução como sendo uma onda plana em (2.26) e (2.27), estabelecemos o vínculo entre ε , μ , σ e o vetor de onda \tilde{k} ,

$$\tilde{k}^2 = \mu \varepsilon \omega^2 + i \mu \sigma \omega. \quad (2.28)$$

Escrevendo $\tilde{k} = k + i\kappa$ de maneira a separar suas partes real e imaginária, as mesmas podem ser obtidas pela equação (2.28) com um pouco de álgebra,

$$\begin{cases} k = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}, \\ \kappa = \text{sgn}(\sigma) \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}. \end{cases} \quad (2.29)$$

Onde sgn é a função sinal,

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma > 0 \\ 0, & \sigma = 0 \\ -1, & \sigma < 0 \end{cases}. \quad (2.30)$$

Para $\sigma = 0$ temos um meio dielétrico ideal, para um dielétrico real $\sigma > 0$, porém uma alta condutividade em um material indica grande capacidade de transportar cargas elétricas com facilidade, como ocorre em condutores ou em semicondutores, portanto tratamos $\sigma \sim 10^{-7} \Omega^{-1} m^{-1}$ a $20^\circ C$ como valor limite médio. Uma situação incomum ocorre em alguns meios ativos, pois a condutividade dos mesmos é negativa (18).

Por fim, a solução das equações (2.26) e (2.27) passam a ser:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.31)$$

$$\vec{B}(z, t) = \vec{B}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (2.32)$$

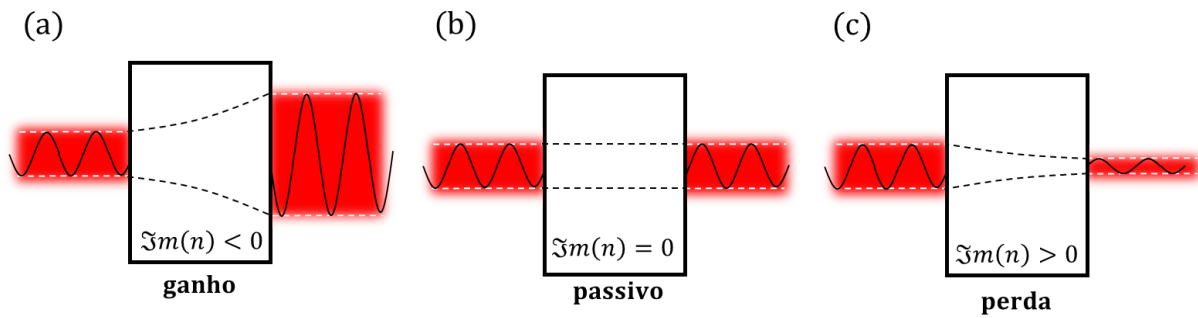
Assim como na situação usual, a parte real de \tilde{k} nos dá a velocidade, o comprimento de onda e o índice de refração da onda no meio,

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} n. \quad (2.33)$$

¹ Para campos onde $\nabla \cdot \vec{F} \neq 0$ a identidade vetorial é $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$. A derivação dessa equação se encontra no apêndice A.1.2

A presença do fator $e^{-\kappa z}$ nas equações (2.31) e (2.32) contempla o efeito de atenuação da onda quando a $\kappa > 0$, pois medida que a onda se propaga pelo material a amplitude dos campos é suprimida. No entanto, $\kappa < 0$ apresenta o efeito de amplificação da onda ao longo da propagação pelo meio material, tal comportamento anômalo pode ser compreendido através do fenômeno de emissão estimulada proposto inicialmente por Einstein. Uma maneira matemática de incorporar a atenuação e a amplificação da onda, com as hipóteses descritas até então, permitindo que a solução das equações (2.26) e (2.27) permaneçam com a mesma estrutura de onda plana, se dá quando o índice de refração é redefinido como uma quantidade complexa, cuja parte imaginária segue a relação $n_i = \kappa c/\omega$. Na figura 7 observamos uma ilustração dos efeitos atenuantes e implicadores do meio, os quais denominamos por meio com ganho (a) e meio com perda (c), em função da parte imaginária do índice de refração. Um caso intermediário, onde a intensidade da luz não sofre alterações em sua amplitude ao atravessar o meio, é chamado de meio passivo (b).

Figura 7 – Meios lineares com características (a) amplificadoras, (b)passivas e (c)atenuantes e suas associações com à parte imaginária do índice de refração.



Fonte: Autor

Desta forma, a parte real do índice de refração relaciona-se com as mudanças no vetor de onda, velocidade e comprimento de onda e a parte imaginária associa-se a ganhos e perdas de luz na mudança de meio.

Nesta seção, apresentamos uma alternativa de tratamento para o índice de refração de um meio, nosso objetivo esteve intimamente conectado a englobar fenômenos ópticos ao mesmo conjunto de equações que regem a propagação da luz na ausência desses fenômenos, o custo para essa mudança é a extensão de n para números complexos. Devido a relação entre o índice de refração, a permissividade elétrica relativa e a permeabilidade magnética relativa ($n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$) somos induzidos que ϵ_r e μ_r sofrem a mesma extensão (3, 19),

$$\epsilon_r = \epsilon' + i\epsilon'', \quad (2.34)$$

$$\mu_r = \mu' + i\mu''. \quad (2.35)$$

A combinação de sinais entre ϵ' , ϵ'' , μ' e μ'' caracterizam os diferentes tipos de meios encontrados na natureza e projetados artificialmente em laboratório.

2.2.2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Para entender as características da propagação de uma onda eletromagnética, iniciamos tratando as equações de Maxwell no domínio do espaço-tempo, na ausência de densidades de cargas e correntes livres, para meios lineares cuja permissividade elétrica (ϵ) e a permeabilidade magnética (μ) possam variar sob alguma lei dependente apenas das coordenadas espaciais e da frequência de oscilação dos campos (ω).

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}(\vec{r}, t)) = 0; \\ \nabla \cdot (\mu \vec{H}(\vec{r}, t)) = 0; \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\partial_t(\mu \vec{H}(\vec{r}, t)); \\ \nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \partial_t(\epsilon \vec{E}(\vec{r}, t)). \end{cases} \quad (2.36)$$

Desejamos obter as equações desacopladas que se associem a propagação de cada campo individualmente, para isso, escolheremos meios com características idealizadas, em suma, desejamos obter um problema de valor de contorno. Um fato interessante é que tomando as trocas $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$, $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$ e $\epsilon \leftrightarrow \mu$ as equações permanecem inalteradas, indicando que essa substituição segue a dinâmica das equações de Maxwell e, neste caso, basta encontrar a equação para um dos campos.

A primeira consideração sobre as equações em (2.36) é reescrevê-las no domínio espaço-frequência (20, p. 54), permitindo expressar as equações de Maxwell em termos das amplitudes de Fourier,

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}(\vec{r}, \omega)) = 0, \quad (2.37)$$

$$\nabla \cdot (\mu \vec{H}(\vec{r}, \omega)) = 0, \quad (2.38)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, \omega) = i\omega\mu \vec{H}(\vec{r}, \omega), \quad (2.39)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, \omega) = -i\omega\epsilon \vec{E}(\vec{r}, \omega). \quad (2.40)$$

Para tratar das equações (2.37)-(2.40) faremos uso de algumas identidades do cálculo vetorial²,

$$\nabla \cdot (a\vec{F}) = a\nabla \cdot \vec{F} + (\nabla a) \cdot \vec{F}, \quad (2.41)$$

$$\nabla \times (a\vec{F}) = a\nabla \times \vec{F} + (\nabla a) \times \vec{F}, \quad (2.42)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}. \quad (2.43)$$

inicialmente encontramos a divergência do campo \vec{E} por (2.37) usando (2.41),

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0 \Rightarrow \epsilon \nabla \cdot \vec{E} + (\nabla \epsilon) \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon} (\nabla \epsilon) \cdot \vec{E}.$$

Assim:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \left(\nabla \ln \frac{1}{\epsilon} \right) \cdot \vec{E}. \quad (2.44)$$

² As identidades do cálculo vetorial são derivadas no apêndice A.1

Em seguida, observamos que a equação (2.39) nos fornece o campo magnético em termos do campo elétrico, o qual substituímos na equação (2.40),

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \vec{E}}{i\omega\mu} \right) = -i\omega\epsilon\vec{E},$$

reorganizando,

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) = \omega^2 \epsilon \vec{E}. \quad (2.45)$$

As identidades (2.42) e (2.43) nos permitem simplificar (2.45),

$$(2.42) \Rightarrow \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \left(\nabla \frac{1}{\mu} \right) \times (\nabla \times \vec{E}) = \omega^2 \epsilon \vec{E}$$

$$(2.43) \Rightarrow \frac{1}{\mu} (\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}) - \frac{1}{\mu^2} (\nabla\mu) \times (\nabla \times \vec{E}) = \omega^2 \epsilon \vec{E}$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{\mu} (\nabla\mu) \times (\nabla \times \vec{E}) = \omega^2 \mu \epsilon \vec{E}.$$

Usando a divergência do campo \vec{E} , já calculado em (2.44), e seu rotacional em (2.39):

$$\nabla \left[\left(\nabla \ln \frac{1}{\epsilon} \right) \cdot \vec{E} \right] - \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{\mu} (\nabla\mu) \times (i\omega\mu\vec{H}) = \omega^2 \mu \epsilon \vec{E},$$

$$\nabla \left[\left(\nabla \ln \frac{1}{\epsilon} \right) \cdot \vec{E} \right] - \nabla^2 \vec{E} + i\omega\vec{H} \times \nabla\mu = \omega^2 \mu \epsilon \vec{E}.$$

Como a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética em determinado meio é $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ e o módulo do vetor de onda sendo expresso por $k = \omega/v$, podemos reescrever na última equação $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$,

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \nabla \left[\left(\nabla \ln \frac{1}{\epsilon} \right) \cdot \vec{E} \right] + i\omega\vec{H} \times \nabla\mu. \quad (2.46)$$

A equação (2.46) descreve a propagação de uma onda eletromagnética sobre um determinado meio linear. Na sequência, tomamos uma boa escolha quanto ao sistema de coordenadas e a configuração do meio de propagação para que a equação (2.46) possa ser simplificada. Adotamos uma permissividade elétrica que varie apenas ao longo do eixo z , passando a ser também a direção do vetor $\nabla \ln(1/\epsilon)$. Escolhemos a direção de polarização do campo elétrico como ortogonal ao eixo z , eixo y ($\vec{E} = E_y \hat{y}$), por exemplo, o que torna o primeiro termo do segundo membro da equação (2.46) nulo. Em seguida, selecionamos um meio com características magnéticas independente da posição, tornando μ constante e, portanto, anulando o segundo termo do segundo membro da equação (2.46). O resultado final é a equação de Helmholtz para a componente do campo elétrico ao longo do eixo y ,

$$\nabla^2 E_y + k^2 E_y = 0. \quad (2.47)$$

As informações a cerca das características do meio ao qual a onda está inserida estão contidas no módulo do vetor de onda ($k = n(z)k_0$), através do índice de refração, onde consideramos o mesmo sob sua extensão complexa ($n = n_r + in_i$).

Como já mencionado, com as trocas $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$, $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$ e $\varepsilon \leftrightarrow \mu$ na equação (2.46), temos a descrição para o campo magnético,

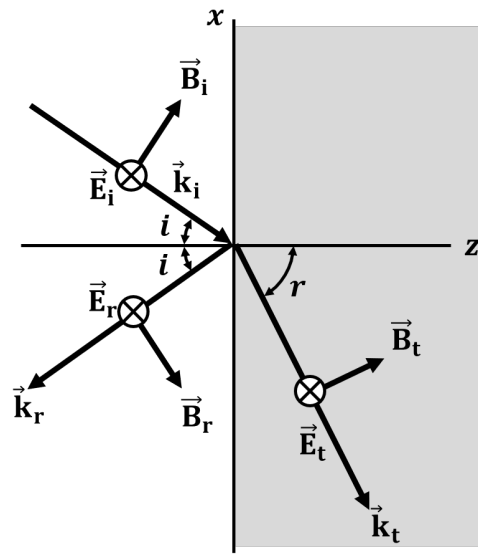
$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = \nabla \left[\left(\nabla \ln \frac{1}{\mu} \right) \cdot \vec{H} \right] - i\omega \vec{E} \times \nabla \varepsilon. \quad (2.48)$$

As mesmas considerações retornam a equação de Helmholtz homogênea para H_z e inhomogênea para a componente x ,

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = -i\hat{x}\omega E_y \partial_z \varepsilon, \quad (2.49)$$

A mudança de meio insere descontinuidades na equação, mais especificamente sobre os valores de k , ao tratar as mudanças de meio como condições de contorno, basta conhecer quais componentes dos campos que não sofrem alterações durante a passagem (figura 8) para obter a dinâmica dos campos completamente determinada.

Figura 8 – Campo eletromagnético e vetor de onda em incidência oblíqua, o campo é espalhado de maneira a possuir uma parte refletida pela interface do novo meio e uma parte transmitida para o novo meio.



Fonte: Autor

Na figura (8), supomos que a onda eletromagnética tenha partido do vácuo e o meio à direita tenha permissividade elétrica que varie apenas ao longo do eixo z , como o campo elétrico incidente aponta para o eixo y e o campo de indução magnética incidente (\vec{B}_i) têm componente ao longo do eixo x , ambas as componentes devem ser contínuas na interface que divide os meios. Com o auxílio da lei de Faraday em (2.36), associamos as componentes B_x e E_y dos campos,

$$-\partial_z E_y = i\omega B_x. \quad (2.50)$$

Portanto, a continuidade na componente x do campo magnético resulta na continuidade da derivada normal do campo elétrico. Logo, daqui para frente as condições de contorno serão as condições de continuidade de diferenciabilidade em relação ao eixo z do campo elétrico.

2.3 REFLEXÃO E TRANSMISSÃO DE ONDAS PLANAS EM SISTEMAS PT-SIMÉTRICOS

Nessa seção, temos como objetivo estudar o espalhamento de ondas planas em incidência normal sobre um determinado material homogêneo, linear, isotrópico, plano de comprimento L e cujo índice de refração só varie ao longo de um eixo, escolhemos o eixo z . A análise consistirá em determinar a reflectância e a transmitância observando a solução da equação de Helmholtz longe do meio espalhador após o espalhamento. Supondo que a onda plana incidente se propague no vácuo ao longo do eixo z e o material se encontre em $z \in [-L/2, L/2] \equiv [z_0, z_1]$, temos que a solução da equação de Helmholtz apresenta 4 ondas planas distantes do material (21),

$$E(z) = A_L e^{ikz} + B_L e^{-ikz}, \quad z < z_0 \quad (2.51)$$

$$E(z) = A_R e^{ikz} + B_R e^{-ikz}, \quad z > z_1. \quad (2.52)$$

As constantes A_j e B_j determinam as porções da onda espalhada, uma maneira de relacionar-las se dá escrevendo a solução e sua derivada normal de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} E(z) \\ \partial_z E(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ik_j z} & e^{-ik_j z} \\ ik_j e^{ik_j z} & -ik_j e^{-ik_j z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} \equiv F_j(z) \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

onde o índice j indica se o vetor de onda na matriz F_j é calculado dentro ou fora do material. Fora do material usaremos $j = 0$ e dentro $j = 1$. Outro ponto interessante é que a matriz F_j tem determinante independente de z , $\det(F_j(z)) = -2ik_j$, fato que têm consequências importantes para a óptica. As condições de contorno na interface a direita ou a esquerda se dão pela continuidade de ψ e de sua derivada normal,

$$F_0(z_0) \begin{bmatrix} A_L \\ B_L \end{bmatrix} = F_1(z_0) \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = F_1^{-1}(z_0) F_0(z_0) \begin{bmatrix} A_L \\ B_L \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$F_0(z_1) \begin{bmatrix} A_R \\ B_R \end{bmatrix} = F_1(z_1) \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_R \\ B_R \end{bmatrix} = F_0^{-1}(z_1) F_1(z_1) \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

substituindo (2.54) em (2.55),

$$\begin{bmatrix} A_R \\ B_R \end{bmatrix} = F_0^{-1}(z_1) F_1(z_1) F_1^{-1}(z_0) F_0(z_0) \begin{bmatrix} A_L \\ B_L \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Observamos que as amplitudes a esquerda e a direita do material satisfazem uma relação linear,

$$A_R = M_{11}A_L + M_{12}B_L \quad (2.57)$$

$$B_R = M_{21}A_L + M_{22}B_L. \quad (2.58)$$

A matriz que contém tais coeficientes como elementos é denominada matriz de transferência. Neste problema adotamos uma estrutura a qual só precisamos considerar as suas interfaces

extrema direita e extrema esquerda do material, entretanto o mesmo poderia ser composto de N camadas distintas (22, 23, 24) e, portanto, para um material com N camadas generalizamos a forma da matriz de transferência,

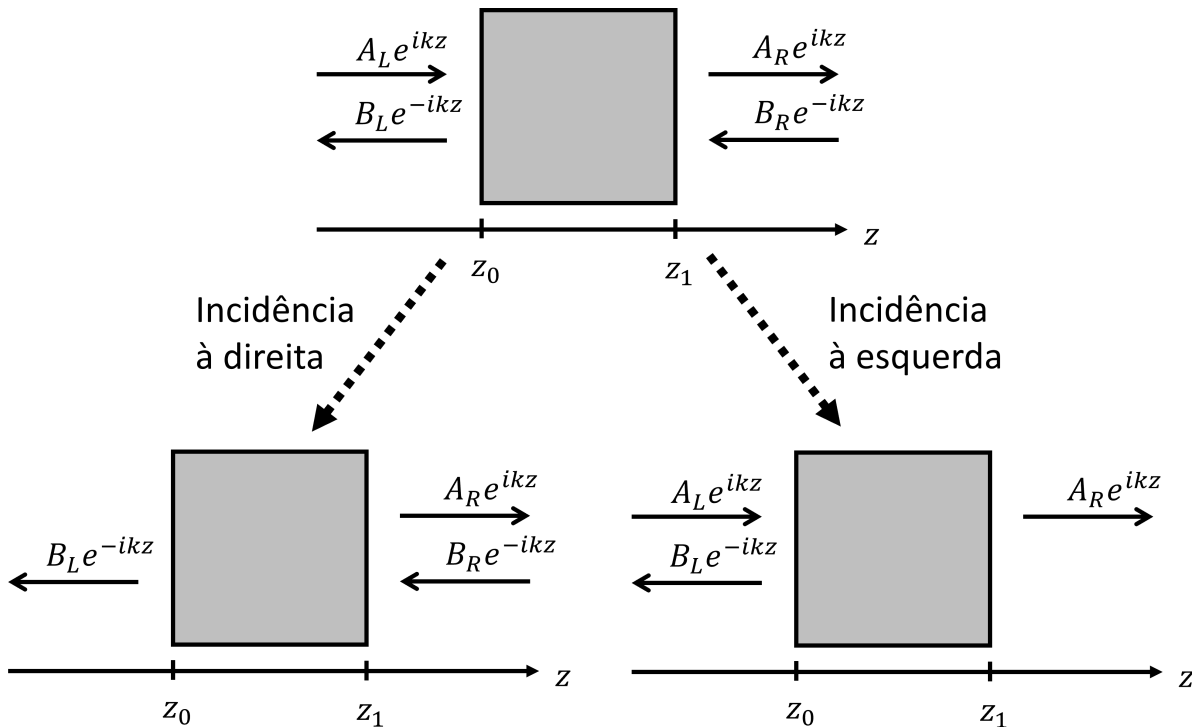
$$M = F_0^{-1}(z_N) \left[\prod_{j=N}^1 F_j(z_j) F_j^{-1}(z_{j-1}) \right] F_0(z_0) \quad (2.59)$$

Como já mencionado, o determinante das matrizes F_j não dependem de z , o que garante que a matriz transferência têm determinante unitário,

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det(F_0^{-1}(z_N)) \left[\prod_{j=N}^1 \det(F_j(z_j)) \det(F_j^{-1}(z_{j-1})) \right] \det(F_0(z_0)) \\ &= (-2ik_0)^{-1} \left[\prod_{j=N}^1 (-2ik_j) (-2ik_j)^{-1} \right] (-2ik_0) \\ &= \prod_{j=N}^1 1 = 1. \end{aligned}$$

A utilidade desse fato não é apenas matemática, para entendermos a física escondida em $\det(M) = 1$ analisaremos a propagação da onda plana incidente, à esquerda e à direita do material (figura 9).

Figura 9 – A presença de 4 ondas na solução da equação de Helmholtz nas redondezas do material, tendo as ondas de entrada Ψ_L^+ e Ψ_R^- como incidentes e as ondas de saída Ψ_L^- e Ψ_R^+ que consistem em ondas transmitidas e refletidas através do material espalhador, a escolha da solução se dá pela escolha da onda incidente.



Quando adotamos a onda incidente à direita do material ($B_R e^{-ikz}$), a onda $A_R e^{ikz}$ passa a ser onda refletida e a onda $B_L e^{-ikz}$ passa a ser onda transmitida, neste caso $A_L = 0$. Com tais considerações podemos encontrar a relação entre as amplitudes refletida e transmitida com os coeficiente M_{ij} ,

$$r_L = \frac{A_R}{B_R} = \frac{M_{12}}{M_{22}} \quad (2.60)$$

$$t_L = \frac{B_L}{B_R} = \frac{1}{M_{22}} \quad (2.61)$$

Por outro lado, quando consideramos $A_L e^{ikz}$ como onda incidente, $B_L e^{-ikz}$ e $A_R e^{ikz}$ são as respectivas ondas refletida e transmitida, por sua vez $B_R = 0$. Assim, relação entre as amplitudes de reflexão e transmissão sofrem alterações.

$$r_R = \frac{B_L}{A_L} = -\frac{M_{21}}{M_{22}} \quad (2.62)$$

$$t_R = \frac{A_R}{A_L} = \frac{\det(M)}{M_{22}} \quad (2.63)$$

Como $\det(M) = 1$ e com uso das equações (2.61) e (2.63):

$$t_L = t_R \equiv t \quad (2.64)$$

Portanto, não importa se a experiência é realizada com a incidência à direita ou a esquerda, a amplitude de transmissão é a mesma para ambas as situações, o que não podemos garantir para a amplitude de reflexão.

Por conveniência, trataremos a solução da equação de Helmholtz como duas soluções linearmente independentes, uma com a onda incidente vinda à esquerda do material e outra à direita,

A forma algébrica das duas soluções podem ser expressas por:

$$E_L(z) = B_R \begin{cases} e^{-ikz} + r_L e^{ikz}, & z > z_1 \\ t e^{-ikz}, & z < z_0 \end{cases} \quad (2.65)$$

$$E_R(z) = A_L \begin{cases} e^{ikz} + r_R e^{-ikz}, & z < z_0 \\ t e^{ikz}, & z > z_1 \end{cases} \quad (2.66)$$

Para sistemas sem ganho e sem perda, a relação que associa as amplitudes de reflexão e transmissão, através da transmitância ($T = |t|^2$) e da reflectância ($R = |r|^2$), possui a forma:

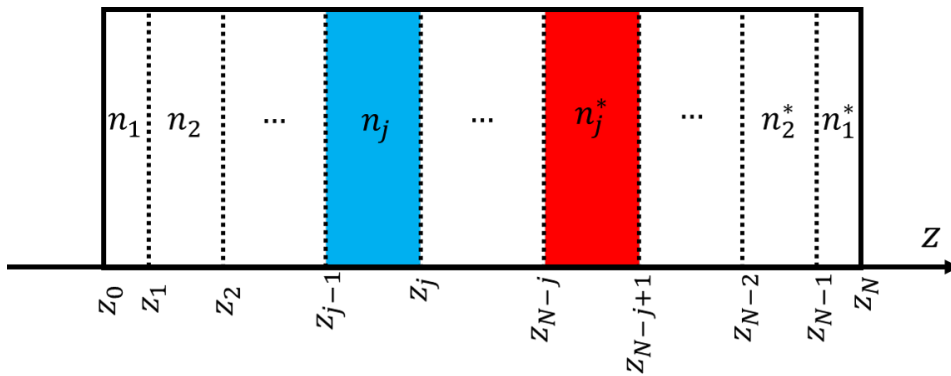
$$T + R = 1, \quad (2.67)$$

tal relação apresenta a conservação da probabilidade, T e R são as porcentagens da onda incidente que são transmitidas ou refletidas pelo material. Em sistemas não hermitianos, tal probabilidade

não é conservada, em particular, a relação satisfeita por sistemas PT simétricos difere de (2.67), devido as porções refletidas à esquerda e à direita do material não possuírem valores iguais.

Para obter a relação entre $T = |t|^2$, $R_R = |r_R|^2$ e $R_L = |r_L|^2$ em sistemas de camadas PT simétricas (figura 10) precisamos conhecer o vínculo entre os elementos da matriz de transferência.

Figura 10 – Estrutura com N camadas no intervalo $z \in [z_0, z_N]$, onde encontramos a simetria PT através da relação $n(z) = n^*(-z)$.



Fonte: Autor

Note que, se houver simetria PT, $F_j^*(z) = F_{N-j+1}(-z)$, onde a conjugação provoca as mudanças $k_j \rightarrow k_j^*$ (operador \mathcal{T}) e $z \rightarrow -z$ (operador \mathcal{P}). Sob tais considerações, esperamos que M^* seja equivalente a a inversa da matriz M , então calculamos M^{-1} ,

$$\begin{aligned} M^{-1} &= F_0^{-1}(z_0) \left[\prod_{j=N}^1 F_j(z_j) F_j^{-1}(z_{j-1}) \right]^{-1} F_0(z_N) \\ &= F_0^{-1}(z_0) \left[\prod_{j=1}^N [F_j(z_j) F_j^{-1}(z_{j-1})]^{-1} \right] F_0(z_N) \\ &= F_0^{-1}(z_0) \left[\prod_{j=1}^N F_j(z_{j-1}) F_j^{-1}(z_j) \right] F_0(z_N), \end{aligned}$$

com a devida consideração da simetria das camadas calculamos M^* ,

$$\begin{aligned}
M^* &= (F_0^*)^{-1}(z_N) \left[\prod_{j=N}^1 F_j^*(z_j) (F_j^*)^{-1}(z_{j-1}) \right] F_0^*(z_0) \\
&= F_0^{-1}(-z_N) \left[\prod_{j=N}^1 F_{N-j+1}(-z_j) F_{N-j+1}^{-1}(-z_{j-1}) \right] F_0(-z_0) \\
&= F_0^{-1}(z_0) \left[\prod_{j=N}^1 F_{N-j+1}(z_{N-j}) F_{N-j+1}^{-1}(z_{N-j+1}) \right] F_0(z_N) \\
&= F_0^{-1}(z_0) \left[\prod_{j=1}^N F_j(z_{j-1}) F_j^{-1}(z_j) \right] F_0(z_N).
\end{aligned}$$

Concluimos que $M^* = M^{-1}$ (25), o que nos revela as condições para a simetria PT da matriz de transferência,

$$\begin{aligned}
M^* &= M^{-1} \\
\begin{bmatrix} M_{11}^* & M_{12}^* \\ M_{21}^* & M_{22}^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

vale ressaltar o uso de $\det(M) = 1$. Nos elementos da diagonal principal principal temos $M_{11} = M_{22}^*$ e os elementos não diagonais se apresentam como imaginários puros.

Para determinar o vínculo entre a transmitância e as reflectâncias partimos de $\det(M) = 1$,

$$M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 1,$$

como $M_{11} = M_{22}^*$,

$$\begin{aligned}
1 - |M_{22}|^2 &= -M_{12}M_{21} \\
\frac{1 - |M_{22}|^2}{M_{22}^2} &= -\frac{M_{12}M_{21}}{M_{22}M_{22}}
\end{aligned}$$

usando (2.60), (2.61), (2.62) e (2.64),

$$\left(1 - \frac{1}{|t|^2}\right)t^2 = r_L r_R,$$

em módulo, obtemos o resultado que desejávamos,

$$|T - 1| = \sqrt{R_L R_R}. \quad (2.68)$$

Quando $T > 1$ temos $T = 1 + \sqrt{R_L R_R}$, onde claramente T é maior que 100% e, portanto, verificamos a não conservação da probabilidade. Quando $T < 1$ temos $T + \sqrt{R_L R_R} = 1$, onde a situação hermitiana ocorre quando as reflectâncias são iguais. Uma situação intermediária ocorre em $T = 1$, situação interessante já que há a garantia de que a reflectância, por pelo menos um dos lados, é nula.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

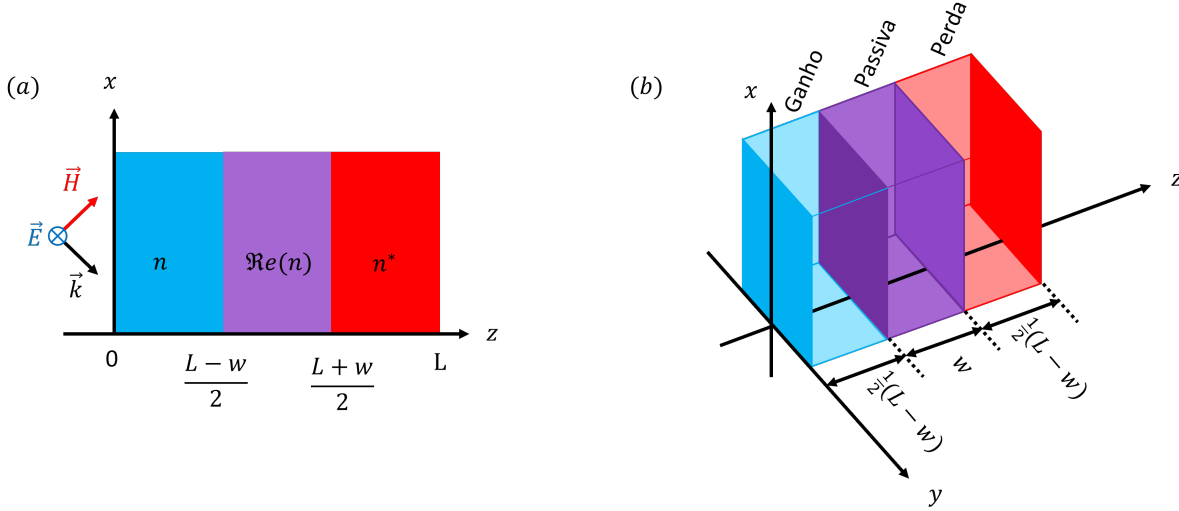
O principal objetivo desse trabalho é a análise da incidência de um feixe gaussiano sobre uma estrutura dielétrica tri-camada com simetria PT. Iniciamos usando a equação de Helmholtz, vista na subseção 2.2.2, e o formalismo da matriz de transferência, presente na seção 2.3, para o tratamento de uma onda plana monocromática em incidência oblíqua sobre a estrutura PT-simétrica, investigando como a transmissão e a reflexão da mesma depende das dimensões das camadas e do ângulo de incidência. Reservamos o estudo da dependência com a parte imaginária do índice de refração para a subseção 3.2.1, para comparar com o feixe gaussiano, na subseção seguinte completamos a análise tratando da dependência da reflectância e da transmitância com a largura do feixe gaussiano. Na última seção, 3.2.2, utilizamos uma superposição de ondas planas para obter o feixe gaussiano, na subseção 3.2.2 investigamos o resgate do modelo da onda plana através do feixe gaussiano.

3.1 MATERIAL PT-SIMÉTRICO COM 3 CAMADAS SUJEITO A INCIDÊNCIA OBLÍQUA DE UMA ONDA PLANA MONOCROMÁTICA

O sistema alvo de estudo desse trabalho está apresentado na figura 11, onde temos um material com 3 camadas dielétricas homogêneas, isotrópicas, lineares e planares de comprimento L ao longo do eixo z . A camada central é passiva com largura w , a primeira e a última camada possuem espessuras iguais e são, respectivamente, camadas de ganho e perda. A estrutura recebe a incidência de ondas eletromagnéticas¹ cuja direção de polarização do campo elétrico está na direção do eixo y .

¹ Na realidade devemos imaginar que o material e a onda estão interagindo, sem a concepção de que a onda partiu de algum lugar, já que inicialmente trataremos o problema sob incidência de uma onda plana e tal modelo é apenas uma idealização da realidade que não tem restrições espaciais e temporais.

Figura 11 – Sistema com 3 camadas. (a) visualização do problema bidimensional, com as coordenadas das interfaces de cada camada, na presença de uma onda com polarização TE no eixo y . (b) visualização 3D da sequência das camadas ganho, passiva e perda com suas dimensões apresentadas.



Fonte: Autor

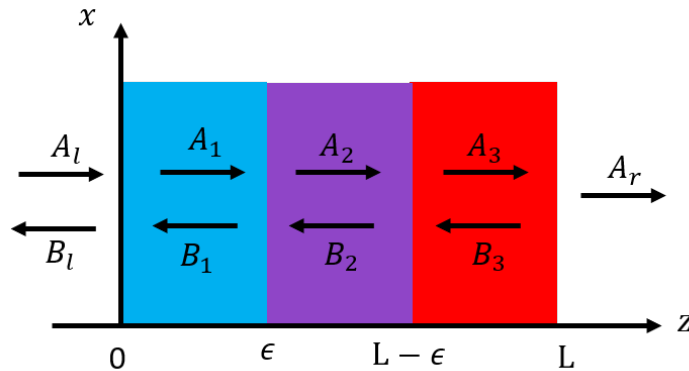
Assumimos que o índice de refração mude no material apenas ao longo do eixo z . A simetria PT presente no material decorre da paridade sobre o plano de simetria em $z = L/2$ das partes real e imaginária do índice de refração,

$$n(z) = \begin{cases} n_r + in_i, & 0 \leq z \leq \frac{1}{2}(L-w) \\ n_r, & \frac{1}{2}(L-w) < z < \frac{1}{2}(L+w) \\ n_r - in_i, & \frac{1}{2}(L+w) \leq z \leq L \\ 1, & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (3.1)$$

Onde n_r e n_i são, respectivamente, as partes real e imaginária do índice de refração da primeira camada. Claramente, a última condição surge para tratar o ambiente externo ao material como sendo o vácuo. Como a figura 11 apresenta, desejamos estabelecer a primeira camada como sendo de ganho, basta tomar $n_i < 0$, automaticamente a última passa a ser um meio com perda. A escolha da parte real do índice de refração constante para todo o material é meramente uma escolha pessoal, a camada passiva pode índice de refração diferente da parte real dos índices das demais camadas sem que haja perda da simetria PT.

Com a onda plana incidente à esquerda da primeira interface do material, há a ocorrência de reflexão e transmissão em todas as interfaces, onde a transmissão por uma interface passa a ser a incidência na interface seguinte, uma ilustração dessa descrição pode ser encontrada na figura 12.

Figura 12 – Amplitudes de incidência, reflexão e Transmissão de uma onda eletromagnética sobre as interfaces de um material com 3 camadas.



Fonte: Autor

As setas na figura 12 englobam reflexões e transmissões múltiplas e não servem para informar que estudaremos necessariamente uma incidência normal, na verdade, as setas representam apenas a distinção entre o efeito da reflexão da onda e a transmissão da mesma. Para o formalismo da matriz de transferência (M) a relação entre as amplitudes na primeira e última interface pode ser equacionada por:

$$\begin{bmatrix} A_r \\ 0 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Como a equação de Helmholtz admite a onda plana como solução, usaremos, inicialmente, uma onda plana para incidir sobre o nosso material. As condições de contorno adotadas são as condições de continuidade do campo e da sua derivada normal sobre cada interface do material, essas duas quantidades podem ser escritas de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} E(x, z) \\ \partial_z E(x, z) \end{bmatrix} = e^{ik_x x} \begin{bmatrix} e^{ik_z z} & e^{-ik_z z} \\ ik_z e^{ik_z z} & -ik_z e^{-ik_z z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Onde A e B são constantes e $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z}$ é o vetor de onda. A componente k_z do vetor de onda pode ser trabalhada em função da componente k_x e do índice de refração em (3.1),

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} = k_0 \sqrt{n^2 - \left(\frac{k_x}{k_0}\right)^2}. \quad (3.4)$$

Onde k_0 é o módulo do vetor de onda quando a mesma se propaga no vácuo. Para reduzir o uso excessivo da matriz apresentada em (3.3) nomeamos-a de $F_k(z)$,

$$\begin{bmatrix} E_j(x, z) \\ \partial_z E_j(x, z) \end{bmatrix} = e^{ik_x x} F_j(z) \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

O índice j na matriz $F_j(z)$ serve para identificar qual meio a onda plana está sendo analisada. Desta forma, Podemos escrever M em termos do produto de matrizes $F_j(z)$, apenas observando

as condições de contorno, já citadas, em cada uma das 4 interfaces:

$$F_{j+1}(z_j) \begin{bmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{bmatrix} = F_j(z_j) \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Onde $j = 0, 1, 2, 3$, $A_0(B_0) = A_l(B_l)$, $A_4(B_4) = A_r(0)$ e $F_4 = F_0$, pois após a quarta interface "a onda retorna ao vácuo". A matriz $F_j(z)$ é inversível, uma vez que seu determinante coincide com o Wronskiano das funções $e^{ik_z z}$ e $e^{-ik_z z}$, que por sua vez são funções linearmente independentes. Portanto, com o auxílio das equações 3.2 e 3.6 (a equação 3.6 para $j = 0, 1, 2, 3$):

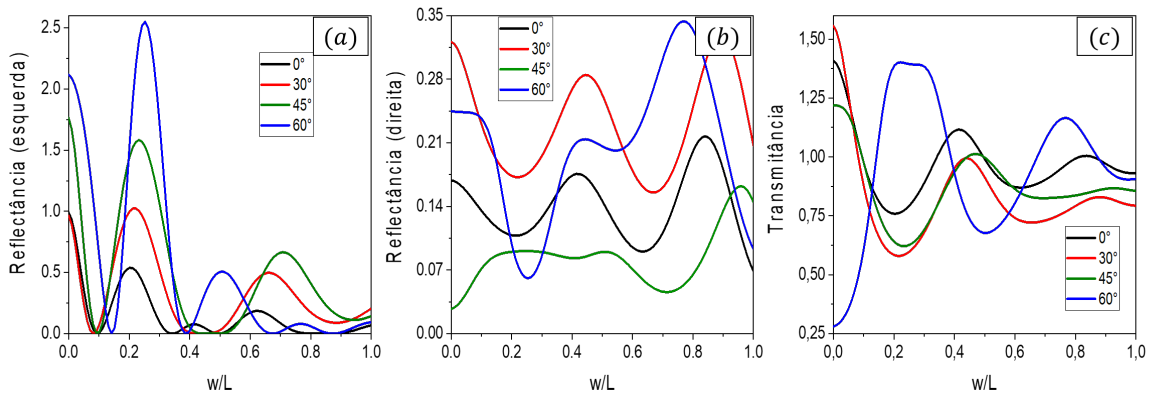
$$M = F_0^{-1}(z_3)F_3(z_3)F_3^{-1}(z_2)F_2(z_2)F_2^{-1}(z_1)F_1(z_1)F_1^{-1}(z_0)F_0(z_0). \quad (3.7)$$

Com os elementos da matriz de transferência somos capazes de calcular a transmitância e a reflectância ocasionadas pelo espalhamento da onda plana incidente, selecionamos valores para as quantidades envolvidas no problema, o seno do ângulo de incidência (k_x/k_0), a fração do comprimento do material que está relacionada a largura da camada passiva central (w/L), as partes real e imaginária do índice de refração (n_r e n_i) e o módulo do vetor de onda quando se propaga pelo vácuo (k_0L), o qual multiplicamos pelo comprimento do material para trabalhar apenas com quantidades adimensionais.

3.1.1 REFLEXÃO E TRANSMISSÃO DA ONDA PLANA PARA INCIDÊNCIAS OBLÍQUAS SOB MUDANÇA NAS DIMENSÕES DAS CAMADAS

Iniciamos a discussão mexendo na geometria do material, alterando as espessuras das camadas sob diferentes ângulos de incidência (ver figura 13).

Figura 13 – (a) Reflectância à esquerda, (b) Reflectância à direita e (c) Transmitância em função da largura da camada passiva central para diferentes ângulos de incidência com $n_1 = 1.5 - 0.2i$ e $k_0L = 10$.



Nos gráficos, observamos o caso particular em que o sistema tri-camada passa a ser a ter apenas uma camada, caso que ocorre quando $w/L = 1$. Neste regime, recuperamos o modelo hermitiano clássico, pois não há camadas de ganho ou perda. Para o caso $w/L = 0$ as camadas de ganho e perda sufocam a camada passiva central e, portanto, a estrutura passa a ser uma bi-camada. Para uma incidência normal sob o caso hermitiano, observamos que a transmissão ocorre com mais facilidade que as demais incidências, enquanto a reflexão ocorre com mais dificuldade, esse efeito é sustentado pelo vínculo $R + T = 1$ ($R_L = R_R = R$), como podemos observar na tabela 1.

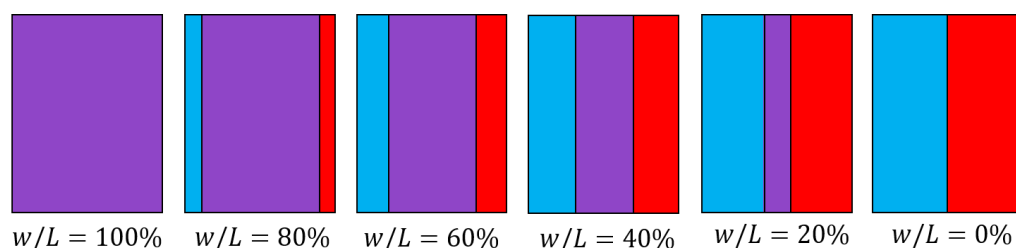
Tabela 1 – Validade da relação $R + T = 1$ na situação $w/L = 1.0$, $n_1 = 1.5 - 0.2i$ para diversos ângulos de incidência.

Ângulo de incidência	R_L	R_R	T	$R + T$
0°	0.0683	0.0683	0.9316	1.0000
30°	0.0928	0.0928	0.9071	1.0000
45°	0,1444	0,1444	0,8555	1.0000
60°	0,2066	0,2066	0,7933	1.0000

A relação $R + T = 1$ estabelece a conservação da probabilidade, visto que as porções transmitida e refletida da onda incidente totalizam 100%, tal interpretação não é obtida nos demais casos, já que sistemas não hermitianos podem não satisfazer essas condições. Sob o ângulo de incidência de 60° e em $w/L = 0.2$, por exemplo, temos $R \approx 1.495$ e $T \approx 1.385$, onde verificamos que ambas as quantidades ultrapassaram o valor 1.

Invertendo os papéis, tomando os gráficos das reflectâncias/transmitâncias em função da componente normalizada k_x/k_0 (seno do ângulo de incidência) quando a largura w varia de 20 em 20% do tamanho total do material visamos 6 configurações possíveis (figura 14), as configurações $w/L = 1$ e $w/L = 0$, estrutura com uma camada e bi-camada respectivamente, e as demais configurações são da estrutura tri-camada.

Figura 14 – Alteração relativa da dimensão da largura da camada passiva central.

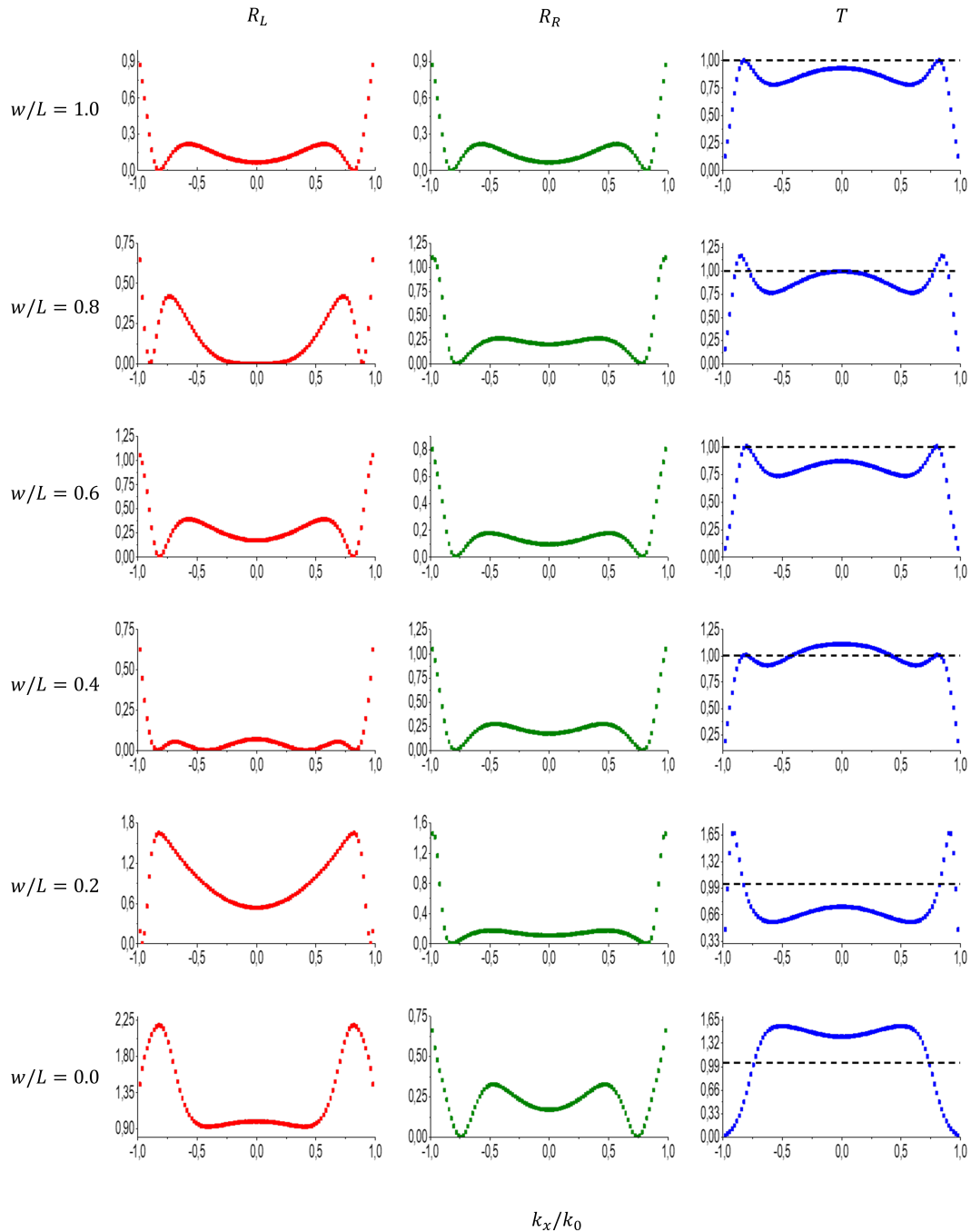


Fonte: Autor

Observamos um caráter simétrico (figura 15) que é esperado devido a paridade da função seno, a continuidade das curvas e a paridade de função par produz em todas as curvas um máximo ou mínimo local quando $k_x/k_0 = 0$, ou seja, em incidência normal. Uma razão física do efeito da

paridade nas curvas vem da simetria do índice de refração do material tri-camada ao longo do eixo x , visto que o índice de refração é função apenas da variável z .

Figura 15 – Reflectância à esquerda (vermelho), à direita (verde) e a transmitância (azul), onde a linha tracejada indica $T = 1$, em função do seno do ângulo de incidência para diferentes dimensões relativas da camada passiva central com $k_0L = 10$ e $n_1 = 1.5 - 0.2i$.

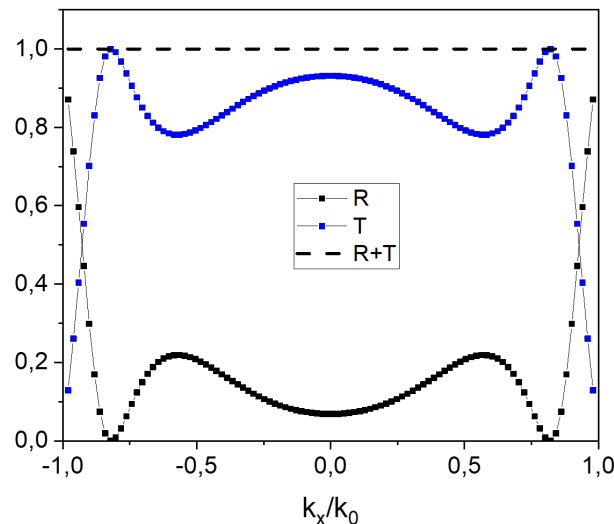


Na situação hermitiana ($w/L = 1$) observamos que os gráficos das reflectâncias R_L e R_R coincidem, nas demais situações há uma dependência quanto ao lado do material que a onda incide, em tais casos tomamos uso da relação $^2|T - 1| = \sqrt{R_L R_R}$ em $T = 1$, pois nessa situação pelo menos uma das reflectâncias é nula. Ao contar o número de zeros das reflectâncias para um dado w fixo, observamos que o número coincide exatamente o a quantidade de vezes que o gráfico da transmitância corta a reta $T = 1$. Em $w/L = 0.8$, por exemplo, a transmitância assume o valor 1 em 5 momentos distintos, $k_x/k_0 \approx \pm 0.893$, $k_x/k_0 \approx \pm 0.779$ e em incidência normal. Em $k_x/k_0 \approx \pm 0.893$ e $k_x/k_0 = 0$ ocorrem os zeros de R_L e em $k_x/k_0 \approx \pm 0.779$ ocorrem os zeros de R_R . Em particular, na estrutura bi-camada ($w/L = 0$) e na estrutura hermitiana ($w/L = 1$) foram os únicos casos em que observamos apenas dois zeros na reflectância, observação peculiar já que ambas situações são casos limites da estrutura tri-camada.

Curiosamente as curvas obtidas para R_R são muito semelhantes, todas têm exatamente dois máximos locais e dois zeros, os quais juntamente com o mínimo em $k_x/k_0 = 0$ totalizam 3 mínimos locais para cada curva.

Uma análise extra surge na possibilidade de validar novamente o resultado $R + T = 1$, que ocorre quando $w/L = 1$, verificação a qual pode ser encontrada na figura 16.

Figura 16 – Verificação do vínculo $R + T = 1$, para $k_0 L = 10$, em um meio material com apenas uma camada passiva para diferentes ângulos de incidência.



Fonte: Autor

Para $\varepsilon/L = 0$, em $k_x/k_0 = \pm 0.82178$ ocorrem os máximos na transmitância, conseqüentemente ocorrem os mínimos na reflectância. Para os demais valores de ε/L observamos que os máximos e mínimos ocorrem em ângulos acima de 30° , com exceção aos casos em que os máximos se encontram na incidência normal.

² Equação satisfeita por sistemas PT simétricos apresentada e demonstrada na seção 2.3

3.2 INCIDÊNCIA DE UM FEIXE GAUSSIANO ATRAVÉS DA EXPANSÃO POR ONDAS PLANAS

Continuamos com o estudo do mesmo material PT-simétrico com 3 camadas imerso no vácuo. Entretanto, superpomos ondas eletromagnéticas planas sobre as possíveis componentes do vetor de onda que são paralelas a interface da primeira camada para obter um resultado mais próximo do que é possível observar em laboratório, pois a onda plana é apresentada sem restrições espaciais e temporais, o que mostra que a mesma está presente e distribuída em todo espaço físico em todo instante de tempo. Para um modelo mais realista usaremos um feixe gaussiano, cuja forma do campo elétrico na entrada do material ($z = 0$) têm a forma de uma função gaussiana,

$$\psi_i(x, 0) = Ae^{-x^2/2\delta^2}. \quad (3.8)$$

Onde δ está associada a cintura do feixe. Quando o feixe incide sobre o material, originam-se dois novos feixes, um refletido e feixe transmitido, assim como no caso da onda plana gera duas novas ondas. A superposição sobre as componentes $k_x \in (-k_0, k_0)$ nos permite expressar a forma do campo elétrico incidente, transmitido e refletido independentes do tempo sob as seguintes expansões integrais:

$$\psi_i(x, z) = \int_{k_x \in (-k_0, k_0)} \psi_i(k_x) e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x, \quad z < 0 \quad (3.9)$$

$$\psi_t(x, z) = \int_{k_x \in (-k_0, k_0)} \psi_t(k_x) e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x, \quad z > L \quad (3.10)$$

$$\psi_r(x, z) = \int_{k_x \in (-k_0, k_0)} \psi_r(k_x) e^{i(k_x x - k_z z)} dk_x, \quad z < 0 \quad (3.11)$$

Onde $\psi_i(k_x)$ é o envelope da onda incidente $e^{i(k_x x + k_z z)}$ associada a componente k_x , a mesma interpretação é válida para $\psi_t(k_x)$ e $\psi_r(k_x)$ como envelopes das ondas transmitida e refletida. Há um vínculo entre k_x e k_z que surge pelo módulo do vetor de onda,

$$k_z = \pm \sqrt{k_0^2 - k_x^2}, \quad (3.12)$$

Os sinais + e - apresentam o sentido de propagação da onda, entretanto esse resultado inserimos manualmente em (3.9)-(3.11). Usamos o fato de que a transformada integral de Fourier de uma função gaussiana também é uma função gaussiana, para comparar (3.9) em $z = 0$ em valores de k_0 , de forma que $\psi_i(k_x)$ possa ser trabalhada também como uma função gaussiana. Em suma, para um feixe gaussiano:

$$\psi_i(x, 0) = \int_{-k_0}^{k_0} \psi_i(k_x) e^{ik_x x} dk_x \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(k_x) e^{ik_x x} dk_x \quad (3.13)$$

Tal consideração garante a existência da inversa da transformada:

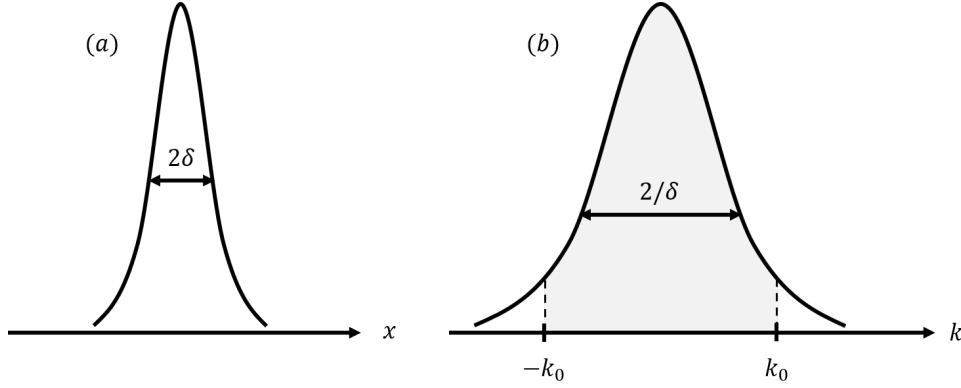
$$\psi_i(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(x, 0) e^{-ik_x x} dx \quad (3.14)$$

Por fim, obtemos a forma do envelope gaussiano:

$$\psi_i(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-x^2/2\delta^2} e^{-ik_x x} dx = B e^{-k_x^2 \delta^2 / 2} \quad (3.15)$$

Onda B é uma constante. A ideia da aproximação em (3.13) possui uma validade que pode ser entendida com o auxílio da figura 17, onde vemos que a maior porção da área da curva se concentra em torno do centro da gaussiana, em nosso caso no intervalo $(-k_0, k_0)$.

Figura 17 – (a) Função gaussiana e (b) sua transformada integral de Fourier.



Fonte: Autor

Determinar qual a fração relativa da luz que é refletida ou transmitida decorre das sentenças:

$$R = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_r(x, z_-)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_i(x, z_-)|^2 dx} \quad (3.16)$$

$$T = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_t(x, z_+)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_i(x, z_-)|^2 dx} \quad (3.17)$$

Onde z_- e z_+ são as respectivas posições anterior e posterior ao meio material. Iniciamos com o cálculo a partir do termo $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_t(x, z)|^2 dx$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_t(x, z)|^2 dx = \int_{-k_0}^{k_0} dk'_x \int_{-k_0}^{k_0} dk_x \psi_t^*(k'_x) \psi_t(k_x) e^{i(k_z - k'_z)z} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k_x - k'_x)x} \quad (3.18)$$

A integral em x pode ser solucionada com a transformada de Fourier inversa da função delta de Dirac,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k_x - k'_x)x} = 2\pi \delta(k'_x - k_x), \quad (3.19)$$

a delta de Dirac elimina uma das integrações, bem como a dependência com a variável z ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_t(x, z)|^2 dx = 2\pi \int_{-k_0}^{k_0} |\psi_t(k_x)|^2 dk_x. \quad (3.20)$$

Em termos da amplitude transmitida ($t(k_x)$) podemos relacionar os envelopes das ondas incidente e transmitida por $\psi_t(k_x) = t(k_x) \psi_i(k_x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_t(x, z)|^2 dx = 2\pi B \int_{-k_0}^{k_0} |t(k_x)|^2 e^{-k_x^2 \delta^2} dk_x, \quad (3.21)$$

E para a integral $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_i(x, z)|^2 dx$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_i(x, z)|^2 dx = 2\pi B \int_{-k_0}^{k_0} e^{-k_x^2 \delta^2} dk_x, \quad (3.22)$$

Finalmente, substituímos (3.21), (3.22) em (3.17) para obter:

$$T = \frac{\int_{-k_0}^{k_0} |t(k_x)|^2 e^{-k_x^2 \delta^2} dk_x}{\int_{-k_0}^{k_0} e^{-k_x^2 \delta^2} dk_x} \quad (3.23)$$

Para a reflectância em (3.16) basta tomar a troca $t \rightarrow r$ na equação 3.23,

$$R = \frac{\int_{-k_0}^{k_0} |r(k_x)|^2 e^{-k_x^2 \delta^2} dk_x}{\int_{-k_0}^{k_0} e^{-k_x^2 \delta^2} dk_x} \quad (3.24)$$

As amplitudes r e t são obtidas através da matriz de transferência. Para deixar a cintura do feixe sob medida adimensional, multiplicamos por k_0 .

Uma observação, a integral nos denominadores de (3.23) e (3.24) pode ainda ser escrita em termos da função gama incompleta,

$$\int_{-k_0}^{k_0} e^{-k_x^2 \delta^2} dk_x = \frac{1}{\delta} \gamma\left(\frac{1}{2}, (k_0 \delta)^2\right). \quad (3.25)$$

Em posse das equações (3.23) e (3.24), somos capazes de realizar o mesmo estudo feito quanto a onda plana, mas com resultados mais próximos dos experimentos. Note que construímos as expressões para R e T a partir de ondas planas, veremos na última seção desse trabalho que podemos obter o resultado reverso.

3.2.1 PARTE IMAGINÁRIA DO ÍNDICE DE REFRAÇÃO

Iniciamos essa seção tomando as somas parciais cujo limite resulta nas integrais em (3.23) e (3.24), tais somas parciais correspondem a discretizar R e T através da variável k_x com N valores igualmente espaçados no intervalo $(-k_0, k_0)$. Podemos interpretar as somas parciais como sendo a média ponderada dos valores de $|r(k_x)|^2$ e $|t(k_x)|^2$ para cada uma das N ondas planas superpostas com k_x uniformemente distribuída em $(-k_0, k_0)$ e com pesos proporcionais as gaussianas da forma $e^{-\delta^2 k_{xj}^2}$.

$$R \sim \langle |r(k_x)|^2 \rangle = \sum_{j=1}^N P(k_{xj}) |r(k_{xj})|^2 \quad (3.26)$$

$$T \sim \langle |t(k_x)|^2 \rangle = \sum_{j=1}^N P(k_{xj}) |t(k_{xj})|^2 \quad (3.27)$$

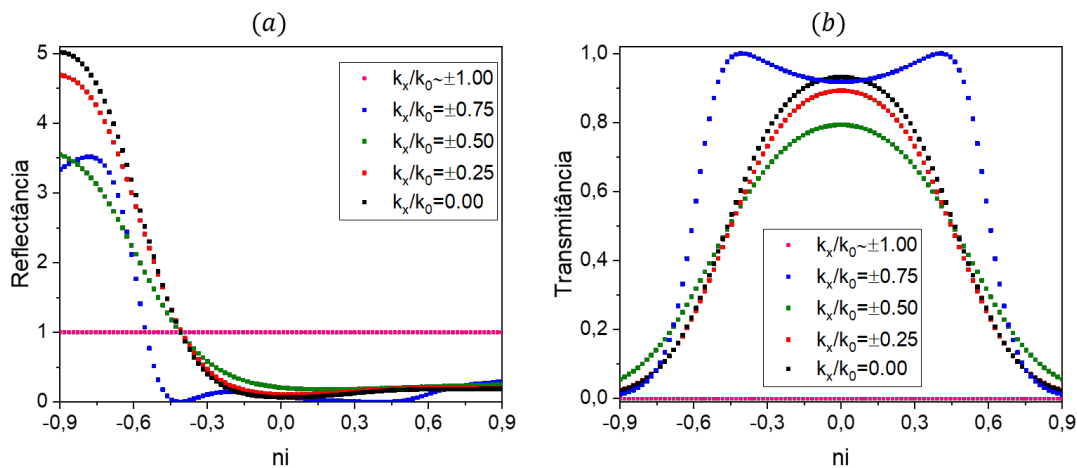
Onde os pesos são normalizados pela soma $\sum_{m=1}^N e^{-\delta^2 k_{xm}^2}$,

$$P(k_{xj}) = \frac{e^{-\delta^2 k_{xj}^2}}{\sum_{m=1}^N e^{-\delta^2 k_{xm}^2}}. \quad (3.28)$$

Portanto, o maior peso corresponde a onda que está em incidência normal e os demais pesos diminuem com o aumento do ângulo de incidência.

Usamos a premissa de que as médias sobre $|r(k_x)|^2$ e $|t(k_x)|^2$ ocorriam com ondas em que a componente k_x estivesse uniformemente distribuída em $(-k_0, k_0)$ para expressar R e T por somas parciais, entretanto um problema claro surge por estarmos trabalhando com um intervalo aberto, pois $k_x = \pm k_0$ não está bem definido. Remediamos o problema usando $N - 2$ pontos internos e igualmente espaçados no intervalo $[-k_0, k_0]$ e usamos $k_x = \pm 99,99\%k_0$ como extremos. Na figura 18 temos uma referência de 9 ondas planas em função de n_{1i} , observamos que há pares de ondas com o mesmo espectro, com exceção da incidência normal, pois o sistema é simétrico em relação a k_x como vimos na seção anterior.

Figura 18 – (a) reflectância e (b) transmitância de 9 ondas planas em incidência oblíqua na estrutura tri-camada com a camada central tendo 60% do tamanho da estrutura e cujos valores de k_x/k_0 estão uniformemente distribuídos em $(-k_0, k_0)$

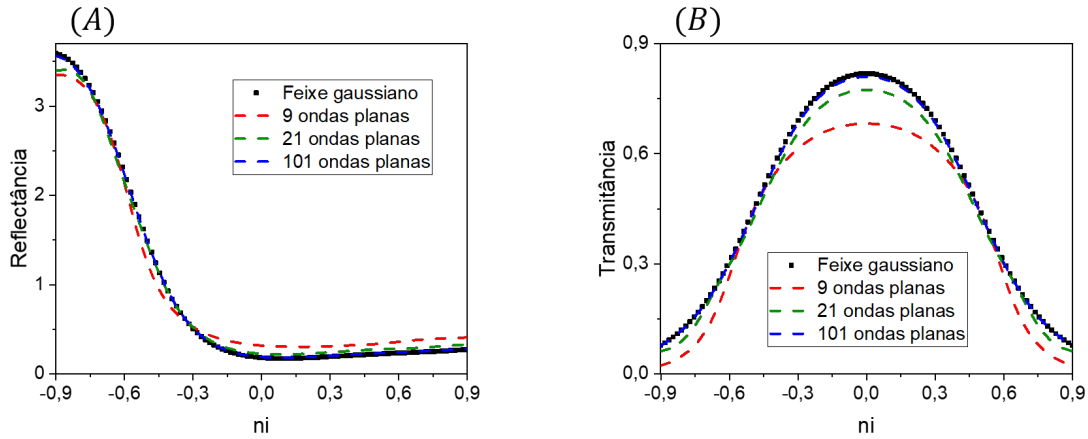


Fonte: Autor

A princípio observamos que em uma incidência com $k_x \sim \pm k_0$ praticamente toda onda é refletida, e a parte transmitida é quase nula, o que já esperávamos. Quanto a simetria e a assimetria nos gráficos comentamos após a construção dos gráficos para o modelo do feixe gaussiano. Para ganhos e perdas altos, observamos que a reflectância (figura 18(a)) se apresenta com valores altos quando a incidência ocorre na interface da camada de ganho, independentemente do ângulo de incidência, mas para a primeira camada sendo de perda a reflectância passa a ser relativamente baixa, esse último pode ser explicado com o argumento clássico de que a luz é atenuada o suficiente pela primeira camada impedindo que possa ser amplificada o suficiente para se obter uma intensidade mais alta transmitida.

Para verificar a convergência das equações (3.26) e (3.27),

Figura 19 – (a) reflectância e (b) transmitância de um feixe gaussiano em função do parâmetro n_i pela estrutura tri-camada com a camada central sendo $0.6L$ sendo a largura da camada central, obtidos por integração numérica e pela média ponderada de somas parciais de ondas planas.

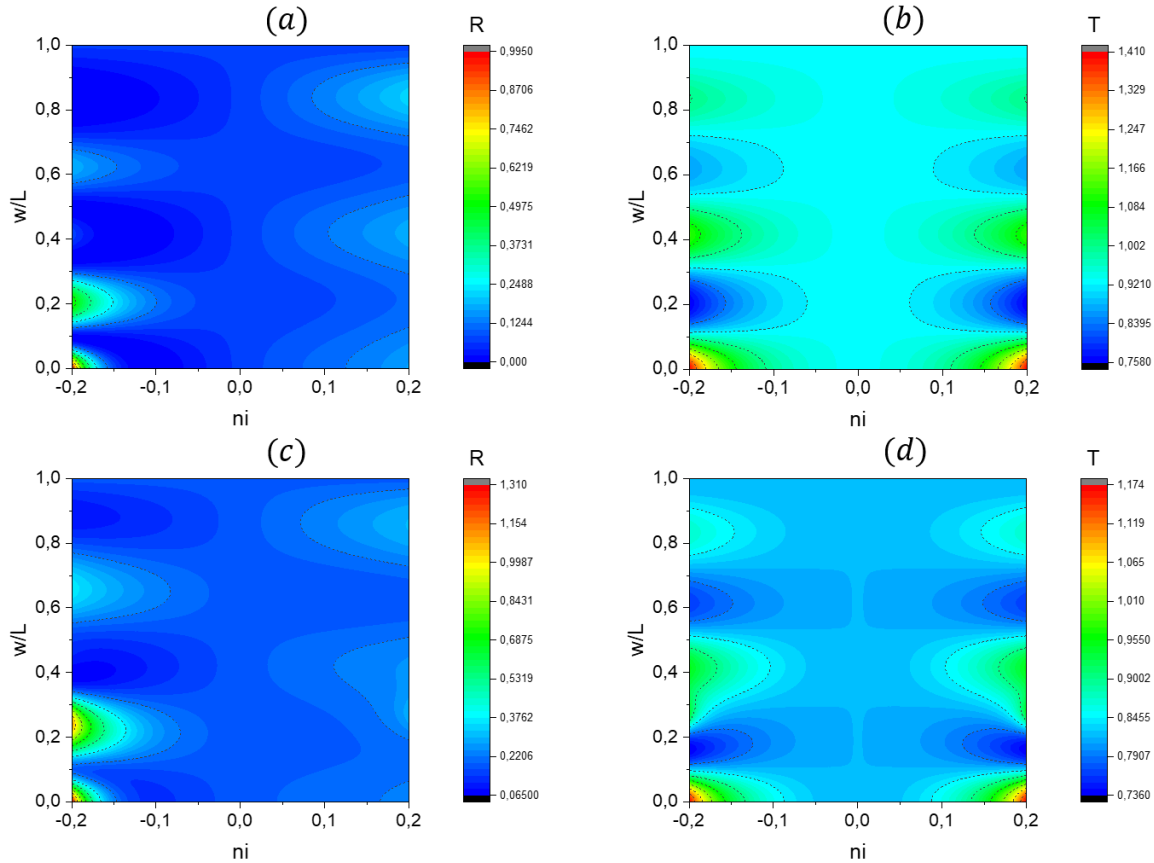


Fonte: Autor

O gráfico pontilhado é obtido pelo método de integração numérica de Romberg cujo número de passos é determinado via extrapolação. Em comparação com a superposição de cerca de 101 ondas planas observamos que os resultados são praticamente coincidentes, o que qualifica o estudo das quantidades R e T através de somas parciais de ondas planas como um método viável para extração dos resultados a cerca do feixe gaussiano.

Para uma visualização melhor da dependência de R e T com as características estruturais, analisamos a dependência da transmissão e da reflexão com a parte imaginária do índice de refração e simultaneamente a dependência com a largura da camada central da estrutura tri-camada. Para tal usaremos mapas de contorno, como observamos na figura 20, onde observamos ao lado direito de cada gráfico uma escala de cores que indica qual cor está associada a uma dada curva de nível, em especial, tons avermelhados apresentam os pontos mais altos da superfície definida pelos pontos $(n_i, w/L, R)$ ou $(n_i, w/L, T)$, enquanto tons azuis apresentam as regiões mais baixas. Em um domínio simétrico $([-n_i, n_i])$, observamos que a transmitância apresenta paridade de função par (25), enquanto a reflectância apresenta um caráter assimétrico (figura 20), característica comum em sistemas não hermitianos (26).

Figura 20 – (a) reflectância e (b) transmitância de uma onda plana em função da parte imaginária do índice de refração da primeira camada e da largura da camada central do material PT-simétrico com 3 camadas enquanto a (c) reflectância e a (d) transmitância para um feixe gaussiano com cintura $\delta = 0.01$ sob a dependência das mesmas variáveis.



Fonte: Autor

No gráfico da reflectância para uma onda plana (20 (a)) seus máximos e mínimos não são tão evidentes quanto o que observamos no feixe gaussiano (20 (c)). O gráfico da transmitância para a onda plana (20 (b)) têm máximos e mínimos com fronteiras bem definidas, já o modelo gaussiano (20 (d)) apresenta máximos invadindo a região que, no modelo da onda plana, pertenciam aos mínimos, tal efeito tem um melhor contraste pouco abaixo de $w/L = 0.2$.

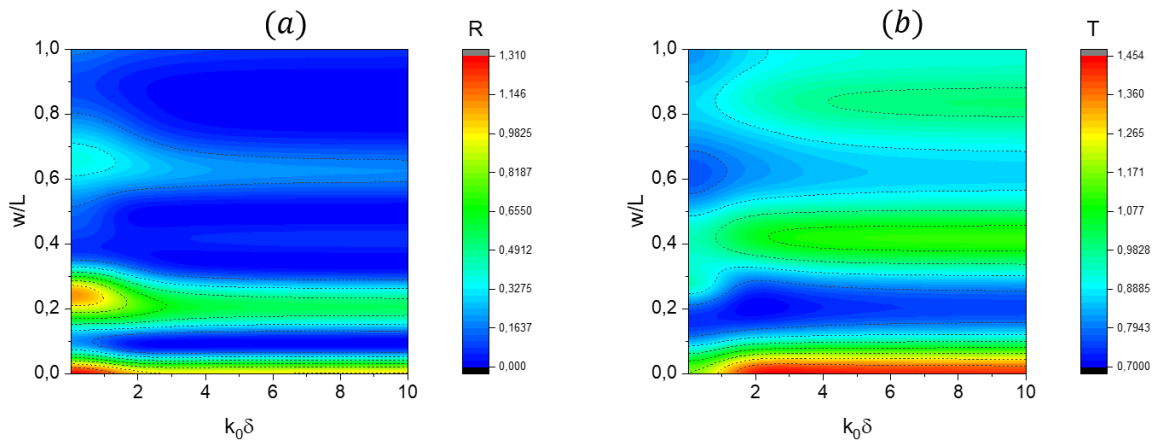
A região $[-n_i, 0)$ especifica o ganho na camada que recebe o feixe/onda incidente, enquanto que na região $(0, n_i]$ especifica a camada que recebe a incidência como meio de perda, ou seja, a figura 20 apresenta o efeito de troca entre as camadas de ganho e perda ao escolher uma das metades do gráfico para análise. Tal resultado é observado tanto para o feixe gaussiano (20 (c) e (d)) quanto para a onda plana (20 (a) e (b)). Como último caso, quando tomamos $n_i = 0$ ou $w/L = 1$ retornamos ao caso clássico de uma única camada sem ganho ou perda, o que explica a motivação da nossa escolha sobre n_r constante em toda a estrutura, pois às intersecções das superfícies da figura 20 com cada um dos planos $n_i = 0$ e $w/L = 1$ são equivalentes.

3.2.2 CINTURA E LIMITE DO FEIXE GAUSSIANO

A cintura do feixe gaussiano delimita espacialmente onde o feixe gaussiano têm relevância em termos de medida. Para fins didáticos, δ na gaussiana $e^{-x^2/2\delta^2}$ indica a metade da distância entre os pontos de inflexão da mesma. A dependência que o espalhamento possui com a cintura do feixe diz quão próximo ou distante os resultados obtidos pelo feixe gaussiano estão da onda plana.

Iniciamos essa discussão com R e T em função de ε/L e δ (figura 21).

Figura 21 – (a) reflectância e (b) transmitância para um feixe gaussiano em função da sua cintura e da espessura da primeira camada do material PT-simétrico com 3 camadas, onde $n_i = 0.2$.

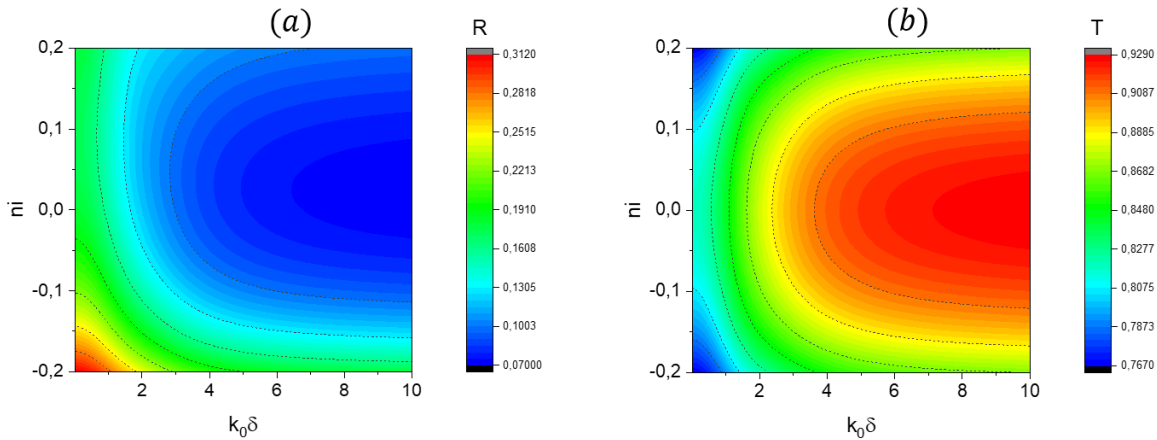


Fonte: Autor

A cintura do feixe provoca alterações nos gráficos apenas quando $k_0\delta$ é pequeno, a saturação da reflectância e transmitância é percebida pouco antes de $k_0\delta < 10$. Além disso, os maiores valores para R e T se concentram nas redondezas de $w/L = 0.5$, indicando a estrutura bi-camada como ideal para efeitos de máxima amplificação de R e T .

Já investigamos a dependência de R e T com n_i e com $k_0\delta$, uma situação ainda não explorada é a dependência conjunta com $k_0\delta$ e n_i (figura 22).

Figura 22 – (a) reflectância e (b) transmitância para um feixe gaussiano em função da sua cintura e da parte imaginária do índice de refração da primeira camada do material PT-simétrico com 3 camadas, onde $\epsilon/L = 0.2$.



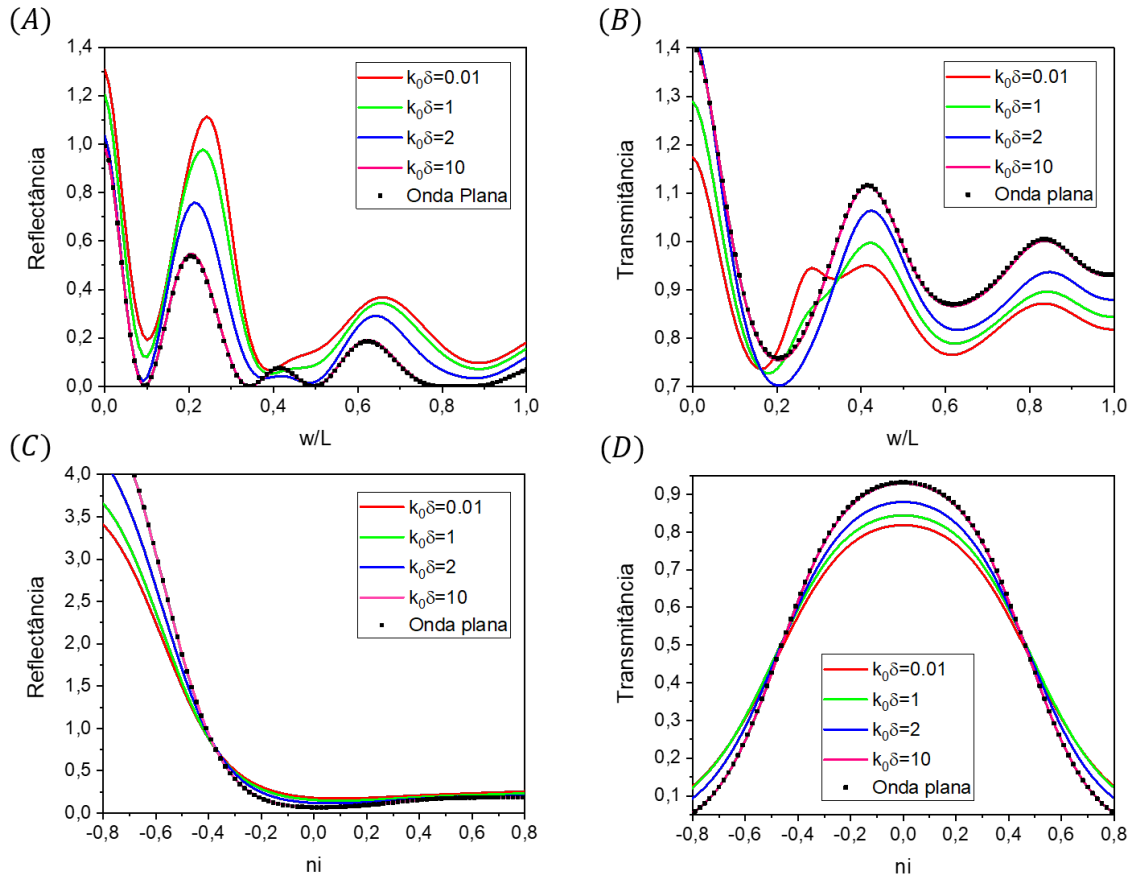
Fonte: Autor

Conforme aumentamos o ganho e a perda a transmissão é dificultada, ao passo que o caso hermitiano se apresenta com altas transmissões, principalmente com o crescimento da cintura do feixe. A reflectância cresce com a menor cintura possível para uma camada de ganho recepcionando o feixe incidente, tal efeito se perpetuou nesse trabalho, isto é, a reflectância à esquerda resultou em valores mais altos em relação a reflectância com incidência à direita. Essa observação não é uma regra, mas sim uma tendência.

Uma última observação surge ao observarmos que os resultados a cerca do feixe gaussiano, quando visto sob função da cintura δ apresentam uma certa saturação quantos aos resultados, fato que passaremos a investigar adiante.

Há uma possibilidade de recuperar os resultados obtidos no estudo da incidência normal de uma onda plana, mas dessa vez por meio da incidência do feixe gaussiano, como se o comportamento da onda plana em incidência normal pudesse ser visto como uma saturação de uma quantidade associada ao feixe gaussiano. A razão física da saturação ao caso da onda plana decorre de $k_0\delta \gg 1$ torna a cintura do feixe comparável as dimensões do material, permitindo que o feixe gaussiano esteja em "todo o espaço" do ponto de vista do material. A figura 23 ilustra essa tendência a medida que a cintura do feixe é esticada, não importando as dimensões das camadas nem se o ganho e a perda são altos ou baixos.

Figura 23 – Regressão ao caso da onda plana com $k_0L = 10$ e $n_r = 1.5$. (A) e (B) são respectivamente a reflectância e a transmitância de um feixe gaussiano em função da largura da camada central com $n_1 = 1.5 - i0.2$ sendo o índice de refração da primeira camada, (C) e (D) são respectivamente a reflectância e a transmitância de um feixe gaussiano em função da parte imaginária do índice de refração com $w/L = 0.6$.



Fonte: Autor

Por uma visão global, com baixos ganho e perda na estrutura tri-camada, observamos que há uma tendência na reflectância de redução de sua amplitude a medida que a cintura do feixe gaussiano aumenta, essa tendência desaparece quando a incidência do feixe se dá sobre a camada de ganho com ganho e perda altos. Já a transmitância, mantendo n_i baixo, apresenta crescimento de seus valores quando aumentamos a cintura do feixe, tal efeito têm sua tendência invertida para valores de n_i mais altos.

A observação anterior está associada as figuras 23(C) e (D) e não é geral, pois especificamos a geometria do material com a camada central possuindo a largura $0.6L$. Observamos, por exemplo, que w entre $0.2L$ e $0.3L$ na figura 23(B), onde $n_i = 0.2$ é pequeno, a transmitância é maior para a curva vermelha ($k_0\delta = 10$) e menor para a curva azul ($k_0\delta = 2$), o que revela uma dependência não monótona entre T e δ para um dado valor de w .

Matematicamente, a regressão a situação da onda plana pode ser derivada através das

equações 3.24 e 3.23, uma vez que a função gaussiana sob certos limites se comporte como uma função delta de Dirac.

As condições que definem a delta de Dirac são duas, sua integração sobre o domínio dos números reais resulta na unidade e sua imagem fora da origem é nula. Para uma função δ_n ser considerada uma função sequência delta de Dirac a mesma precisa convergir para a delta de Dirac (27, p. 83), no caso da função gaussiana, consideramos a função apresentada em (27, p. 84),

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}, \quad (3.29)$$

a constante $\frac{n}{\sqrt{\pi}}$ serve para normalizar a sua integral. Sob integração δ_n , para qualquer limite sobre n , temos o valor 1 como a integral sobre o domínio dos números reais, já o cálculo do limite em que $n \rightarrow \infty$ e $x \neq 0$ temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{n^2 x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n x^2 e^{n^2 x^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, no limite $n \rightarrow \infty$ (27, p. 86) nos permite trabalhar $\delta_n(x) = \delta_D(x)^3$. Esse resultado aplicado as equações (3.24) e (3.23) nos garante a onda plana sob regime de incidência normal como sendo o limite para o feixe gaussiano,

$$\begin{aligned} \lim_{k_0 \delta \rightarrow \infty} R &= \lim_{k_0 \delta \rightarrow \infty} \frac{(\delta/\sqrt{\pi}) \int_{-k_0}^{k_0} |r(k_x)|^2 e^{-k_x^2 \delta^2} dk_x}{(\delta/\sqrt{\pi}) \int_{-k_0}^{k_0} e^{-k_x^2 \delta^2} dk_x} \\ &= \frac{\int_{-k_0}^{k_0} |r(k_x)|^2 \delta_D(k_x) dk_x}{\int_{-k_0}^{k_0} \delta_D(k_x) dk_x} = |r(0)|^2 \\ \lim_{k_0 \delta \rightarrow \infty} T &= \lim_{k_0 \delta \rightarrow \infty} \frac{(\delta/\sqrt{\pi}) \int_{-k_0}^{k_0} |t(k_x)|^2 e^{-k_x^2 \delta^2} dk_x}{(\delta/\sqrt{\pi}) \int_{-k_0}^{k_0} e^{-k_x^2 \delta^2} dk_x} \\ &= \frac{\int_{-k_0}^{k_0} |t(k_x)|^2 \delta_D(k_x) dk_x}{\int_{-k_0}^{k_0} \delta_D(k_x) dk_x} = |t(0)|^2 \end{aligned}$$

A efeitos de cálculo, tomamos uso de $k_0 L = 10$ em todos os gráficos desse trabalho, a figura 23 apresenta um boa concordância entre a onda plana e o feixe gaussiano quando $k_0 \delta = 10$, entretanto a convergência perto desse valor não é coincidência, pois $L \approx \delta$ já nos fornece um feixe cuja cintura é da mesma ordem de grandeza das dimensões do nosso material, o que permite confirmar que "o material enxerga uma onda plana quando o feixe gaussiano satisfaz $L \approx \delta$ ".

³ Usamos δ_D como delta de Dirac para distinguir de δ , cintura do feixe gaussiano.

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho investigamos quais as condições para que houvesse simetria PT em um dado sistema e qual a implicação da presença dessa simetria no contexto da óptica, em especial, na equação de Helmholtz. O estudo foi dirigido sob a análise de como um feixe gaussiano era espalhado por um meio composto por 3 camadas e descrito por um índice de refração complexo, onde a sua parte imaginária controla o equilíbrio entre ganhos e perdas. Em tal estrutura, fomos capazes de observar uma simetria quanto a transmissão do feixe sob incidência à esquerda e à direita da mesma, resultado esperado pela teoria, mas com reflectância diferentes, tal assimetria é conhecida quando tratamos de materiais não hermitianos.

A camada passiva central de nossa estrutura teve um papel fundamental, pois com a alteração de sua largura podemos obter 3 sistemas distintos, o sistema proposto com a dimensão de todas as camadas não nulas e as estruturas com uma e duas camadas, quando a largura da camada passiva é igual ao comprimento do material e quando é nula, respectivamente. O modelo com uma única camada foi útil para verificação dos resultados, não introduzindo novidades na teoria, já que trata-se de um sistema hermitiano bem conhecido. O modelo com 2 camadas nos chamou a atenção, pois apresentou transmissões mais altas que as demais configurações, mesmo modificando a cintura do feixe.

Os resultados obtidos a cerca da transmissão e reflexão do feixe gaussiano foram derivados do modelo de incidência por uma onda plana, onde as superpomos gerando um feixe com o uso da transformada de Fourier. A escolha fundamental sobre um feixe gaussiano surge principalmente por duas razões, a primeira pelo fato de descrever a saída da maioria, mas não todos, os lasers, a segunda razão é que tal feixe pode ser concentrado o suficiente em torno do centro da gaussiana que o descreve, surtindo na permissão de aproximações que leva-o diretamente a teoria de Fourier. Construir o feixe gaussiano por ondas planas foi um artifício para comparar as transmissões e reflexões em ambos os casos, mas um fato curioso surgiu quando a cintura do feixe teve um tamanho próximo ao comprimento do material, pois houve uma convergência entre os resultados do feixe e da onda plana em incidência normal. O resgate do modelo original da onda plana foi, portanto, obtido e a permissão sobre essa simetria foi alcançada algebricamente devido a teoria de distribuições ter cedido a distribuição delta como ferramenta de regresso.

Como perspectiva desejamos analisar sistemas de camadas mais complexos sob a incidência de outros feixes, além de analisar o ângulo de fase dos campos elétrico e magnético. Tais considerações permitem entender a existência da direção de invisibilidade do material. Esperamos que nosso estudo contribua para o entendimento de sistemas não hermitianos com simetria PT.

REFERÊNCIAS

- 1 COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum Mechanics, Volume 1*. [S.l.]: Wiley-VCH, 1973. Citado na página 13.
- 2 BENDER, C. M.; BOETTCHER, S. Real spectra in non-hermitian hamiltonians having pt symmetry. *Physical Review Letters*, APS, v. 80, n. 24, p. 5243, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 20.
- 3 ÖZDEMİR, Ş. K. et al. Parity–time symmetry and exceptional points in photonics. *Nature materials*, Nature Publishing Group, v. 18, n. 8, p. 783–798, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 25.
- 4 LIN, Z. et al. Unidirectional invisibility induced by pt -symmetric periodic structures. *Physical Review Letters*, APS, v. 106, n. 21, p. 213901, 2011. Citado na página 13.
- 5 FENG, L. et al. Experimental demonstration of a unidirectional reflectionless parity-time metamaterial at optical frequencies. *Nature materials*, Nature Publishing Group, v. 12, n. 2, p. 108–113, 2013. Citado na página 13.
- 6 MAKRIS, K. G. et al. Beam dynamics in $p t$ symmetric optical lattices. *Physical Review Letters*, APS, v. 100, n. 10, p. 103904, 2008. Citado na página 13.
- 7 WEIMANN, S. et al. Topologically protected bound states in photonic parity–time-symmetric crystals. *Nature materials*, Nature Publishing Group, v. 16, n. 4, p. 433–438, 2017. Citado na página 13.
- 8 LONGHI, S. Pt -symmetric laser absorber. *Physical Review A*, APS, v. 82, n. 3, p. 031801, 2010. Citado na página 13.
- 9 CHONG, Y.; GE, L.; STONE, A. D. $P t$ -symmetry breaking and laser-absorber modes in optical scattering systems. *Physical Review Letters*, APS, v. 106, n. 9, p. 093902, 2011. Citado na página 13.
- 10 WONG, Z. J. et al. Lasing and anti-lasing in a single cavity. *Nature photonics*, Nature Publishing Group, v. 10, n. 12, p. 796–801, 2016. Citado na página 13.
- 11 MIAO, P. et al. Orbital angular momentum microlaser. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 353, n. 6298, p. 464–467, 2016. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<https://science.sciencemag.org/content/353/6298/464>>. Citado na página 13.
- 12 REGENSBURGER, A. et al. Parity–time synthetic photonic lattices. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 488, n. 7410, p. 167–171, 2012. Citado na página 13.
- 13 FARHAT, M. et al. Parity-time symmetry and exceptional points for flexural-gravity waves in buoyant thin-plates. *Crystals*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 10, n. 11, p. 1039, 2020. Citado na página 13.
- 14 DEKA, J. P.; SARMA, A. K. Highly amplified light transmission in a parity-time symmetric multilayered structure. *Applied Optics*, Optical Society of America, v. 57, n. 5, p. 1119–1126, 2018. Citado na página 13.

- 15 HILL, N. R. Gaussian beam migration. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 55, n. 11, p. 1416–1428, 1990. Citado na página 13.
- 16 SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. *Modern quantum mechanics, revised edition*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 17.
- 17 BENDER, C. M. *PT symmetry: In quantum and classical physics*. [S.l.]: World Scientific, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- 18 HAWKINS, R.; KALLMAN, J. Lasing in tilted-waveguide semiconductor laser amplifiers. *Optical and quantum electronics*, Springer, v. 26, n. 3, p. S207–S217, 1994. Citado na página 24.
- 19 RAMAKRISHNA, S. A.; PENDRY, J. B. Removal of absorption and increase in resolution in a near-field lens via optical gain. *Physical Review B*, APS, v. 67, n. 20, p. 201101, 2003. Citado na página 25.
- 20 BOYD, R. W. *Nonlinear optics*. [S.l.]: Academic press, 2020. Citado na página 26.
- 21 MARKOŠ, P.; SOUKOULIS, C. Wave propagation. from electrons to photonic crystals and left-handed materials, princeton university press. 2008. Citado na página 29.
- 22 ZHAO, D. et al. Optical bistability of graphene embedded in parity-time-symmetric photonic lattices. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 36, n. 7, p. 1731–1737, 2019. Citado na página 30.
- 23 GE, L.; CHONG, Y.; STONE, A. D. Conservation relations and anisotropic transmission resonances in one-dimensional pt-symmetric photonic heterostructures. *Physical Review A*, APS, v. 85, n. 2, p. 023802, 2012. Citado na página 30.
- 24 ACHILLEOS, V.; AURÉGAN, Y.; PAGNEUX, V. Scattering by finite periodic p t-symmetric structures. *Physical Review Letters*, APS, v. 119, n. 24, p. 243904, 2017. Citado na página 30.
- 25 MOSTAFAZADEH, A. Transfer matrix in scattering theory: A survey of basic properties and recent developments. *arXiv preprint arXiv:2009.10507*, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 47.
- 26 BRANDÃO, P. A.; MENDONÇA, J. P.; CAVALCANTI, S. Low coherence-induced resonance in double-layer structures having parity–time symmetry. *Optics Letters*, Optical Society of America, v. 46, n. 4, p. 717–720, 2021. Citado na página 47.
- 27 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists; sixth edition*. [S.l.]: Elsevier, 2005. Citado na página 52.

APÊNDICE A – IDENTIDADES MATEMÁTICAS

A.1 IDENTIDADES DO CÁLCULO VETORIAL

Iniciamos com a demonstração de propriedades vetoriais usadas na manipulação das equações de Maxwell na primeira seção da fundamentação teórica.

A.1.1 PRODUTO DE UM ESCALAR E UM VETOR

As identidades que se assemelham a regra do produto, conhecido do cálculo diferencial em uma variável, envolvendo o rotacional e a divergência do produto de um escalar por um vetor são apresentadas a seguir:

$$\nabla \cdot (a\vec{F}) = a\nabla \cdot \vec{F} + (\nabla a) \cdot \vec{F} \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times (a\vec{F}) = a\nabla \times \vec{F} + (\nabla a) \times \vec{F}. \quad (\text{A.2})$$

Para a equação (A.1) temos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (a\vec{F}) &= \sum_i \partial_i (aF_i) \\ &= \sum_i (a\partial_i F_i + (\partial_i a)F_i) \\ &= a \sum_i \partial_i F_i + \sum_i (\partial_i a)F_i \\ &= a\nabla \cdot \vec{F} + (\nabla a) \cdot \vec{F} \end{aligned}$$

Para a equação (A.2) temos:

$$\begin{aligned} \nabla \times (a\vec{F}) &= \left(\sum_i \hat{e}_i \partial_i \right) \times (aF_j \hat{e}_j) \\ &= \sum_{ij} (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \partial_i a F_j \\ &= \sum_{ij} (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) (a\partial_i F_j + (\partial_i a)F_j) \\ &= a \sum_{ij} (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \partial_i F_j + \sum_{ij} (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) (\partial_i a) F_j \\ &= a \left(\sum_i \hat{e}_i \partial_i \right) \times \left(\sum_j F_j \hat{e}_j \right) + \left(\sum_i \hat{e}_i \partial_i a \right) \times \left(\sum_j \hat{e}_j F_j \right) \\ &= a\nabla \times \vec{F} + (\nabla a) \times \vec{F} \end{aligned}$$

Com isso, concluímos a demonstração da regra do produto para a multiplicação de um escalar com um vetor.

A.1.2 ROTACIONAL DO ROTACIONAL

Uma identidade do cálculo vetorial recorrentemente usada na manipulação das equações de Maxwell é dada por:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \quad (\text{A.3})$$

A derivação dessa equação inicia com a ideia intuitiva de representar as quantidades vetoriais do primeiro membro da relação como uma soma sobre suas componentes nas direções de seus respectivos vetores,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) &= \sum_i \partial_i \hat{e}_i \times \left(\sum_j \partial_j \hat{e}_j \times \sum_k F_k \hat{e}_k \right) \\ &= \sum_{i,j,k} \partial_i \partial_j F_k (\hat{e}_i \times (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)) \end{aligned}$$

Para provar a identidade que envolve o laplaciano vetorial, tomamos uso da delta de Kronecker (δ_{ij}) e do símbolo de permutação (ϵ_{ijk}) também conhecido como épsilon de Levi-Civita, cujas suas respectivas definições são apresentadas a seguir:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{se } i = j \\ 0; & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1; & \text{se } ijk = 123, 231, 312 \\ -1; & \text{se } ijk = 321, 213, 132 \\ 0; & \text{para índices repetidos} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Claramente, as duas primeiras sentenças em (A.5) indicam que $\epsilon_{ijk} = 1$ quando seus índices estão em ordem cíclica, $\epsilon_{ijk} = -1$ quando seus índices estão em ordem anti-cíclica. O que permite afirmar que a troca de dois índices consecutivos troca o sinal de ϵ_{ijk} . Para a delta de Kronecker temos um comportamento peculiar em somatórios:

$$\sum_i \delta_{ij} a_{ij} = a_{jj} \quad (\text{A.6})$$

Já o símbolo de permutação permite representar determinantes e, portanto, produtos vetoriais em termos de somatórios. Para o caso de produtos vetoriais a representação surge devido a possibilidade de escrever o produto vetorial de versores ortonormais unitários:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_{k=1,2,3} \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad (\text{A.7})$$

Como i, j e k assumem apenas valores 1, 2 e 3, só há um termo não nulo na soma, que aparece para $i \neq k \neq j$. As características do paralelismo dos vetores advêm do índices repetidos, pois $\epsilon_{ijk} = 0$ neste caso. Uma última relação importante é dada por:

$$\sum_m \epsilon_{jkm} \epsilon_{nim} = \delta_{jn} \delta_{ki} - \delta_{ji} \delta_{kn} \quad (\text{A.8})$$

Esta última relação pode ser verificada diretamente por tentativa e comparação, sob teste dos possíveis valores de i, j, k e n , portanto deixamos a cargo do leitor. Retornando a identidade em (A.3), mas trabalhando com o termo $\hat{e}_i \times (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)$ e fazendo uso das relações em (A.6), (A.7) e (A.8).

$$\begin{aligned}
\hat{e}_i \times (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) &= \hat{e}_i \times \sum_m \varepsilon_{jkm} \hat{e}_m \\
&= \sum_m \varepsilon_{jkm} (\hat{e}_i \times \hat{e}_m) \\
&= \sum_m \varepsilon_{jkm} \varepsilon_{imn} \sum_n \hat{e}_n \\
&= \sum_n \hat{e}_n \sum_m \varepsilon_{jkm} \varepsilon_{imn} \\
&= \sum_n \hat{e}_n \sum_m \varepsilon_{jkm} \varepsilon_{nim} \\
&= \sum_n \hat{e}_n (\delta_{jn} \delta_{ki} - \delta_{ji} \delta_{kn}) \\
&= \hat{e}_j \delta_{ki} - \hat{e}_k \delta_{ji}
\end{aligned}$$

Por fim, substituímos o último resultado em (A.3):

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) &= \sum_{i,j,k} \partial_i \partial_j F_k (\hat{e}_j \delta_{ki} - \hat{e}_k \delta_{ji}) \\
&= \sum_{i,j} \partial_i \partial_j F_i \hat{e}_j - \sum_{i,k} \partial_i \partial_i F_k \hat{e}_k \\
&= \left(\sum_j \partial_j \hat{e}_j \right) \left(\sum_i \partial_i F_i \right) - \left(\sum_i \partial_i \partial_i \right) \left(\sum_k F_k \hat{e}_k \right) \\
&= \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração da identidade.

A.2 INTEGRAL GAUSSIANA

Um resultado útil envolvendo a função gaussiana é a sua integral sobre o domínio dos números reais. Neste trabalho, usamos a integral da função gaussiana na última seção de resultados e discussões, onde houve a análise do limite entre o feixe gaussiano e a onda plana.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a} \quad (\text{A.9})$$

Batizamos a integral gaussiana pela letra I , por economia de notação,

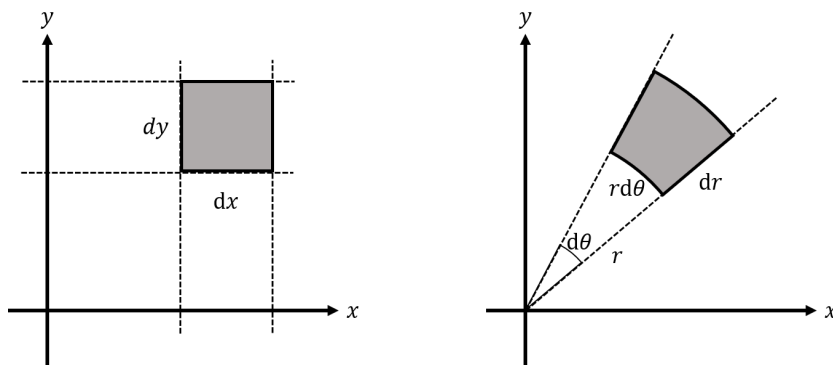
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2}.$$

Em seguida tomamos o seu quadrado,

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ay^2} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-a(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

Agora temos uma integração que corresponde a um volume, cujo domínio é o plano \mathbb{R}^2 , para resolver a integral tomamos uma mudança de coordenadas, de coordenadas cartesianas para coordenadas polares. O elemento de área em coordenadas polares consiste na diferença de área

Figura 24 – Elementos de área em coordenadas cartesianas e polares.



entre dois setores circulares,

$$\begin{aligned} dx dy &= \frac{1}{2}(r + dr)^2 d\theta - \frac{1}{2}r^2 d\theta \\ &= r d\theta dr + \frac{1}{2}dr^2 d\theta, \end{aligned}$$

como a diferencial $dr^2 d\theta$ é de terceira ordem, podemos à ignorar. Como a integração é feita sobre todo plano, os limites possíveis para r estão no intervalo $[0, \infty]$ e os de θ no intervalo $[0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} d\theta dr r e^{-ar^2} \\ &= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2a} \right) e^{-ar^2} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

Como $I^2 = \pi/a$, concluímos $I = \sqrt{\pi/a}$.

A.3 TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada de Fourier é uma transformada integral que permite mapear uma função g por uma nova função G que têm como base funções ortogonais da forma e^{-ikx} ,

$$G(k) = \mathcal{F}[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} g(x), \quad (\text{A.10})$$

Um fato que à torna útil, é poder recuperar a função original através de uma transformada inversa,

$$g(x) = \mathcal{F}[G(k)]^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} G(k). \quad (\text{A.11})$$

Com a apresentação da transformada e de sua inversa, usaremos-as para encontrar relações a cerca da função gaussiana e da distribuição delta de Dirac

A.3.1 DELTA DE DIRAC

Desejamos expressar a delta de Dirac como transformada de Fourier de alguma função,

$$\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx}. \quad (\text{A.12})$$

Basta calcular a transformada inversa de Fourier:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta(k - k')]^{-1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{ik'x} \delta(k - k') \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{ikx} \end{aligned}$$

Portanto, $\delta(k - k')$ é a transformada de Fourier da função $e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$

$$\begin{aligned} \delta(k - k') &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[e^{ikx}] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \end{aligned}$$

Esse último resultado foi útil para calcular a transmitância e a reflectância no caso do feixe gaussiano.

A.3.2 GAUSSIANA

A transformada de Fourier da função gaussiana retorna outra função gaussiana, usamos esse fato em uma aproximação para poder estudar o feixe gaussiano com um envelope também gaussiano, mas considerando o feixe com uma cintura finita.

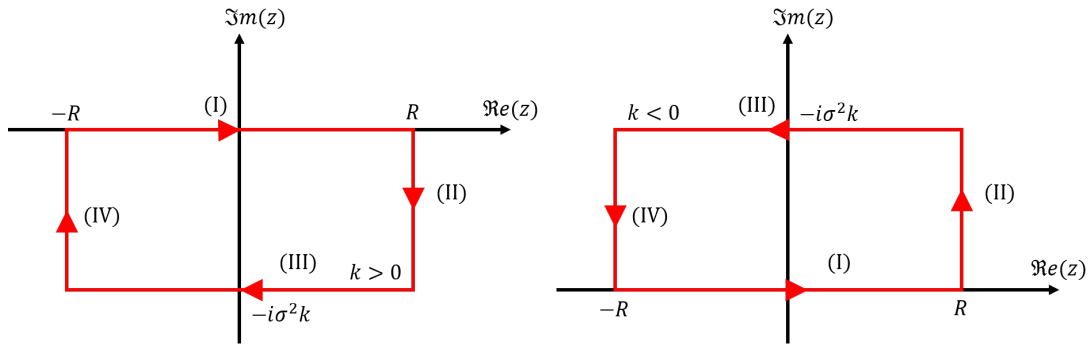
$$\mathcal{F}[e^{-x^2/2\sigma^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (\text{A.13})$$

$$= e^{-\sigma^2 k^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/2\sigma^2 - ikx + \sigma^2 k^2/2} \quad (\text{A.14})$$

$$= e^{-\sigma^2 k^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - i\sigma^2 k)^2} \quad (\text{A.15})$$

A última integral não pode ser obtida diretamente devido a presença do termo $-i\sigma^2 k$. Portanto, a depender do sinal de k escolhemos um dos caminhos da figura 25 para avaliar a integral $\int_C e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz$.

Figura 25 – Caminho de integração.



Como a função $e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$ é analítica nos contornos e em seus interiores, o teorema dos resíduos garante que a função dada têm integral nula nos contornos fechados,

$$\oint_C = \int_{(I)} + \int_{(II)} + \int_{(III)} + \int_{(IV)} = 0.$$

Analisando a integral sobre os caminhos (II) e (IV) observamos que ambas se anulam, os caminhos são descritos pelas retas verticais $z = \pm R + iy$ ($dz = idy$),

$$\begin{aligned} \left| \int_{(II) \text{ ou } (IV)} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz \right| &= \left| \int_0^{-\sigma^2 k} e^{-\frac{(\pm R + iy)^2}{2\sigma^2}} dy \right| \\ &= e^{-R^2/2\sigma^2} \left| \int_0^{-\sigma^2 k} e^{-\frac{\pm 2iyR - y^2}{2\sigma^2}} dy \right| \\ &\leq e^{-R^2/2\sigma^2} \int_0^{-\sigma^2 k} \left| e^{-\frac{\pm 2iyR - y^2}{2\sigma^2}} \right| dy \\ &= e^{-R^2/2\sigma^2} \int_0^{-\sigma^2 k} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &\rightarrow 0, R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

Logo, as integrais (I) e (III) são iguais, quando $R \rightarrow \infty$, exceto por um sinal,

$$\begin{aligned} \int_{(III)} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz &= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x - i\sigma^2 k)^2}{2\sigma^2}} dx \\ \int_{(I)} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx. \end{aligned}$$

Agora temos permissão de igualar as integrais:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x - i\sigma^2 k)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Usando a integral gaussiana, resultado obtido em (A.9),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x - i\sigma^2 k)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi\sigma^2} = \sigma\sqrt{2\pi}$$

Substituindo o último resultado em (A.15):

$$\mathcal{F}[e^{-x^2/2\sigma^2}] = \sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2k^2/2} \quad (\text{A.16})$$

O que conclui a demonstração