

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Global-Local Mixing

Cícero Calheiros Dos Santos Filho

MACEIÓ - AL
FEVEREIRO DE 2023

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Global-Local Mixing

por

Cícero Calheiros dos Santos Filho

sob a orientação do

Prof. Dr. Davi dos Santos Lima

MACEIÓ - AL
MARÇO DE 2023

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

S237g

Santos Filho, Cícero Calheiros dos.

Global-local mixing / Cícero Calheiros dos Santos Filho. - 2023.
[71] f. : il.

Orientador: Davi dos Santos Lima.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió,
2023.

Bibliografia: f. [71].

1. Sistemas dinâmicos. 2. Teoria ergódica. 3. Lin, Teorema de. 4. *Global-local mixing*. 5. Mapa de Boole. 6. Mapa de Manneville-Pomeau. I. Título.

CDU: 519.218.84

Global-Local Mixing

por

Cícero Calheiros dos Santos Filho

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos

Aprovada em 27 de Fevereiro de 2023.

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
 DAVI DOS SANTOS LIMA
Data: 06/03/2023 01:36:46-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Davi dos Santos Lima (PPGMAT/UFAL)
(Orientador)

Documento assinado digitalmente
 RAFAEL NOBREGA DE OLIVEIRA LUCENA
Data: 03/03/2023 15:35:31-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena (PPGMAT/UFAL)
(Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente
 RICARDO TUROLA BORTOLOTTI
Data: 02/03/2023 18:53:34-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Ricardo Turola Bortolotti (PGDMAT/UFPE)
(Examinador Externo)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais (Seu cíceró e Dona Edleuza) e a minha família por sempre me apoiarem nos meus estudos. Ao professor Davi, que é meu orientador, agradeço imensamente por desde o início da minha graduação vir me ajudando , me mostrando o que deveria estudar, quais caminhos seguir e também por todas as contribuições e dúvidas tiradas. Agradeço a todos os demais professores que contribuíram na minha formação.

A todos os amigos que fiz nessa caminhada. Em especial: meus amigos de salinha, meus amigos que ainda estavam na graduação no dia dessa defesa, a alguns professores mais chegados. Não quero citar mais nomes pra num esquecer nenhum. Minha vida é muito melhor com vocês presente.

RESUMO

Esta dissertação visa apresentar conceitos, exemplos e técnicas consolidados e recentes em Teoria Ergódica. O principal novo conceito é o de Mistura Local-Global, que seguiremos chamando de Global-Local Mixing, uma ideia recente, datada de 2010, para entendermos o comportamento de um sistema dinâmico que preserva uma medida infinita que é sigma-finita. Mostraremos que os famosos mapas de Boole e de Manneville-Pomeau são, ambos, Global-Local Mixing.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos. Teoria Ergódica. Teorema de Lin. Global Local Mixing. Medidas infinitas. Mapa de Boole. Manneville-Pomeau.

ABSTRACT

This dissertation aims to present consolidated and recent concepts, examples and techniques in Ergodic Theory. The main new concept is Local-Global Mixing, which we will continue to call Global-Local Mixing, a recent idea, dating back to 2010, to understand the behavior of a dynamical system that preserves an infinite measure that is sigma-finite. We will show that the famous Boole and Manneville-Pomeau maps are both Global-Local Mixing.

Keywords: Dynamic Systems. Ergodic Theory. Lin's Theorem. Global Local Mixing. Infinite measure. Boole map. Manneville-Pomeau.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	7
2	PRELIMINARES	9
2.1	O Mapa de Gauss	16
2.2	Mapas Mixing e fracamente Mixing	25
2.3	O mapa de Chacon	27
3	EXEMPLOS DE MAPAS QUE PRESERVAM UMA MEDIDA INFINITA	33
3.1	Mapas induzidos	34
3.2	O mapa de Farey	37
3.3	Operador de Transferência e o Teorema De Lin	40
4	GLOBAL LOCAL MIXING	45
4.1	Pomeau-Manneville são Global-Local-Mixing	54
	Bibliografia	71

1 Introdução

Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de probabilidade e $T : X \rightarrow X$ preservando uma medida μ , a definição clássica de mixing significa que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B) \quad (1.1)$$

quaisquer que sejam os conjuntos mensuráveis A, B . Estender essa definição para o caso em que μ é σ -finita mas $\mu(X) = +\infty$ é fundamental em teoria ergódica infinita. Há uma definição fraca de mixing, que é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} |\mu(T^{-k}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0$$

para todos conjuntos mensuráveis A, B . Provaremos no capítulo 2 que T mixing implica T fracamente mixing que por sua vez implica T ergódica. Entretanto não valem as recíprocas. No final do capítulo 2 daremos um exemplo de um mapa (mapa de Chacon) que é fracamente mixing, mas não é mixing no sentido clássico. Provaremos no capítulo 4 que se $T : X \rightarrow X$ é exata e $\mu(X) = +\infty$, então a definição clássica de mixing não se aplica pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = 0$$

quaisquer que sejam os conjuntos mensuráveis A, B com medida finita. Isso seguirá do Teorema de Lin (3.15), que caracteriza mapas exatos por meio do seu operador de transferência, a saber

Teorema 1.1. (Teorema de Lin) *Seja (X, \mathcal{B}, μ, T) um sistema dinâmico que preserva medida. Então, T é exato se, e somente se, para toda $f \in L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ com $\int f d\mu = 0$ tivermos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P^n(f)\|_1 = 0$.*

Lenci em [5] propôs uma definição de mixing para observáveis globais com um volume médio infinito. Mapas que têm essa propriedade nós diremos que eles são Global-Local Mixing. Nós veremos no texto diversos exemplos de mapas que preservam uma medida invariante infinita. A prova de que certos mapas preservam uma medida infinita usa a ideia de mapa induzido, uma técnica importante para se estudar propriedades ergódicas de diversas classes de mapas. Dois mapas importantes que aparecerão no texto são o mapa de Boole $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $T(x) = x - \frac{1}{x}$, e o mapa de Pomeau-Manneville $T : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$, dado por $T(x) = x + x^p \pmod{1}$, nós mostraremos que eles têm a propriedade de ser global-local mixing. Os mapas que apresentaremos podem servir como inspiração para trabalhos futuros, para investigarmos se tais dinâmicas ou variações delas têm essa mesma propriedade.

2 Preliminares

Para deixar este trabalho o mais autocontido quanto possível, vamos definir, enunciar e provar alguns resultados de teoria da medida e de análise funcional que usaremos ao longo do texto.

Dado X um conjunto não vazio, dizemos que uma família \mathcal{B} de subconjuntos de X é uma álgebra se

- $X \in \mathcal{B}$;
- Se $A \in \mathcal{B}$, então $X \setminus A \in \mathcal{B}$;
- Se $A, B \in \mathcal{B}$ então $A \cup B \in \mathcal{B}$.

Uma álgebra \mathcal{B} é dita ser uma σ -álgebra se

- Para toda família enumerável $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de conjuntos de \mathcal{B} tem-se $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{B}$.

Abaixo, temos alguns exemplos de σ -álgebra.

Exemplo 2.1.

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{P}(X).$$

$$\mathcal{B}_2 = \{X, \emptyset\}.$$

Observação 2.2. *É fácil de verificar que a interseção de σ -álgebras ainda é uma σ -álgebra. Seja $T : (X, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{B})$ um mapa mensurável, podemos definir uma σ -álgebra em X como $T^{-n}(\mathcal{B}) := \{T^{-n}(B) : B \in \mathcal{B}\}$.*

Exemplo 2.3. *Seja \mathcal{B} uma σ -álgebra e $T : (X, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{B})$ uma transformação, definimos a σ -álgebra caudal como*

$$\bigcap_{n \geq 0} T^{-n}(\mathcal{B}).$$

Uma forma padrão e importante de se obter σ -álgebras é através das chamadas σ -álgebras geradas.

Definição 2.4. *Considere uma família \mathcal{A} de subconjuntos de X . A σ -álgebra gerada por \mathcal{A} é a interseção de todas as σ -álgebras que contém \mathcal{A} .*

Definição 2.5. *Considere um par (X, \mathcal{B}) onde \mathcal{B} é uma σ -álgebra definida em X . Chamamos (X, \mathcal{B}) de espaço mensurável. Uma medida μ definida em (X, \mathcal{B}) é uma função $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ que verifica*

- $\mu(\emptyset) = 0$

- $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ para toda família enumerável de conjuntos dois a dois disjuntos. Esta propriedade é denominada de σ -aditividade. Diremos então que (X, \mathcal{B}, μ) é um espaço de medida.

Se $\mu(X) < \infty$ diremos que μ é finita. Se $\mu(X) = 1$ diremos então que (X, \mathcal{B}, μ) é um espaço de probabilidade. Um espaço de medida (X, \mathcal{B}, μ) é dito ser σ -finito se existe uma quantidade enumerável de conjuntos A_1, A_2, \dots mensuráveis com $\mu(A_i) < +\infty$ e $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Uma propriedade \mathcal{P} vale em μ -quase toda parte (μ -q.t.p) se existe um conjunto Z com $\mu(Z) = 0$ tal que \mathcal{P} vale fora do conjunto Z .

Chamamos de σ -álgebra de Borel a σ -álgebra gerada pelos intervalos de \mathbb{R} . Os conjuntos mensuráveis da σ -álgebra de Borel nós chamaremos de borelianos. Podemos definir uma medida λ nos intervalos (a, b) como sendo

$$\lambda((a, b)) = b - a.$$

Gostaríamos de estender essa função para todos os Borelianos. Observe que podemos definir uma álgebra \mathcal{B}_0 em $[0, 1]$ da seguinte forma: um conjunto I está em \mathcal{B}_0 se, e somente se, I é união finita de intervalos abertos dois a dois disjuntos. A extensão da medida λ a todos os borelianos é dada pelo seguinte clássico teorema:

Teorema 2.6. (Extensão de Caratheodory) *Considere um conjunto X , uma álgebra \mathcal{B}_0 definida em X e uma função finitamente aditiva $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow [0, \infty]$ Seja \mathcal{B} a σ -álgebra gerada em X por \mathcal{B}_0 . Então existe uma única medida $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ que estende μ_0 , ou seja, $\mu(A) = \mu_0(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}_0$. Uma prova desse teorema pode ser encontrada em [3]*

A medida que estende λ dos intervalos de $[0, 1]$ é a *medida de Lebesgue*.

Exemplo 2.7. *Seja $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e positiva. Definimos*

$$\lambda_{\phi}([a, b]) = \int_a^b \phi(x) dx.$$

E usando o teorema anterior podemos estender λ_{ϕ} para todos os borelianos.

Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida, dizemos que duas funções integráveis $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ com respeito a μ são μ -equivalentes se $f_1(x) = f_2(x)$ μ -q.t.p $x \in X$. Sabemos nesse caso que

$$\int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu.$$

Essa equivalência dá origem a uma classe da seguinte forma :

$$[f] = \{g : X \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ é } \mu\text{-equivalente a } f\}$$

Definimos então

$$L_1(\mu) = \{[f] : \int |f| d\mu < \infty\}.$$

Ao invés de ficarmos trabalhando com classes vamos identificar todas as funções da classe e simplesmente escrever

$$L_1(\mu) = \{f : \int |f| d\mu < \infty\}.$$

Em $L_1(\mu)$ definimos uma norma $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Mais geralmente, dado $p \geq 1$ definimos

$$L_p(\mu) = \{f : \int |f|^p d\mu < \infty\},$$

em $L_p(\mu)$ definimos uma norma $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$. Podemos definir ainda

$$L_\infty(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável tal que existe } C > 0 \text{ com } |f(x)| \leq C \text{ } \mu.\text{q.t.p } x \in X\}.$$

Definimos uma norma em L_∞ por $\|f\|_\infty = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ } \mu.\text{q.t.p } x \in X\}$

Teorema 2.8. *Para $1 \leq p \leq \infty$, $(L_p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach.*

Teorema 2.9. *(Representação de Riesz) Seja $\varphi \in (L_1)^*$. Então existe uma única função $u \in L_\infty$ tal que*

$$\varphi(f) = \int u f \quad \forall f \in L_1. \quad (2.1)$$

Esse teorema nos diz que cada funcional contínuo em L_1 pode ser representado como uma integral. Ele também nos permite fazer a identificação $(L_1)^* \simeq L_\infty$.

Teorema 2.10. *(Banach-Alaoglu-Bourbaki) Seja E um espaço de Banach. A bola unitária fechada*

$$B_{E^*} = \{f \in E^*; |f| \leq 1\} \quad (2.2)$$

é compacta na topologia fraca.*

Para mais detalhes sobre esses teoremas veja [2]. Esses teoremas serão usados para provar o teorema de Lin. Ver teorema (3.15).

Definição 2.11. *Dizemos que uma família \mathcal{M} de subconjuntos de X é uma Classe monótona se \mathcal{M} contém X e é fechada para uniões e interseções enumeráveis e monótonas, ou seja,*

- Se $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ estão em \mathcal{M} , então $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}$;
- Se $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ estão em \mathcal{M} então $\bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}$.

Se $\{C_i\}_{i \in I}$ são classes monótonas, então $\bigcap_{i \in I} C_i$ é uma classe monótona. Podemos portanto considerar a menor classe monótona que contém um conjunto dado. É possível então enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.12. (*Classes monótonas*) Seja \mathcal{B}_0 uma álgebra de subconjuntos de X . A classe monótona \mathcal{M} gerada por \mathcal{B}_0 coincide com a σ -álgebra $\sigma(\mathcal{B}_0)$ gerada por \mathcal{B}_0 .

Demonstração. Como $\sigma(\mathcal{B}_0)$ é uma classe monótona então $\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{B}_0)$. Resta-nos provar que $\sigma(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{M}$. Primeiramente, vejamos que \mathcal{M} é uma álgebra. Dado $E \in \mathcal{M}$, defina

$$\mathcal{M}(E) := \{F \in \mathcal{M} : E \setminus F, F \setminus E, E \cap F \in \mathcal{M}\}.$$

Claramente, tem-se $\emptyset, E \in \mathcal{M}(E)$; e também, pela simetria do conjunto, vale que $E \in \mathcal{M}(F)$ se, e somente se, $F \in \mathcal{M}(E)$. Facilmente se mostra que $\mathcal{M}(E)$ é uma classe monótona. Além disso, vamos terminar a demonstração provando as seguintes afirmações :

1. $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}(E)$;
2. \mathcal{M} é uma álgebra;
3. \mathcal{M} é uma σ -álgebra.

Prova das Afirmações. (1) Primeiramente, se $E \in \mathcal{B}_0$ então pela definição de $\mathcal{M}(E)$ tem-se $E \in \mathcal{B}_0$. Daí, sendo \mathcal{M} a menor classe monótona gerada por \mathcal{B}_0 segue que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}(E)$. Portanto, dado $F \in \mathcal{M}(E)$, temos que $F \in \mathcal{M}(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}_0$. Pela simetria de $\mathcal{M}(E)$, tem-se que $E \in \mathcal{M}(F)$ para todo $E \in \mathcal{B}_0$ donde $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{M}(E)$. Sendo assim, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}(F)$ para todo $F \in \mathcal{M}$.

(2) $X \in \mathcal{M}$, pois $X \in \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{M}$. Além disso, se $E \in \mathcal{M}$ então pelo item 1, temos que $E \in \mathcal{M}(X)$ donde $X \setminus E \in \mathcal{M}$. Falta mostrar que é fechado para a união. Sejam $E, F \in \mathcal{M}$. Queremos que $E \cup F \in \mathcal{M}$. Ora, $E, F \in \mathcal{M}(X)$ e portanto, $X \setminus E, X \setminus F \in \mathcal{M}$. Agora, observando que $X \setminus E \in \mathcal{M}(X \setminus F)$ e assim, $(X \setminus E) \cap (X \setminus F) \in \mathcal{M}$. Por fim, $(X \setminus E) \cap (X \setminus F) \in \mathcal{M}(X)$ e logo $X \setminus [(X \setminus E) \cap (X \setminus F)]$. Pelas Leis de Morgan, $E \cup F = X \setminus [(X \setminus E) \cap (X \setminus F)] \in \mathcal{M}$.

□

Usaremos o teorema das Classes monótonas para provar alguns fatos úteis ao longo do texto.

Lema 2.13. Seja μ uma medida definida em \mathcal{B} então

- Se $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ estão em \mathcal{B} , então

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \lim \mu(A_n)$$

- Se $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ estão em \mathcal{B} e $\mu(A_1) < \infty$ então

$$\mu \left(\bigcap_{n \geq 1} A_n \right) = \lim \mu(A_n)$$

Uma prova desse lema pode ser encontrada em [3]. Vamos enunciar algumas propriedades úteis relacionadas com a derivada de Radon-Nikodym.

Definição 2.14. Uma medida λ é dita absolutamente contínua com respeito a uma medida μ se $\mu(E) = 0$ implicar $\lambda(E) = 0$ para cada mensurável E . Neste caso escrevemos $\lambda \ll \mu$.

Teorema 2.15. (Radon-Nikodym). Sejam λ e μ medidas σ -finitas e suponha que $\lambda \ll \mu$, então existe uma função h positiva e mensurável tal que

$$\lambda(E) = \int_E h d\mu \text{ para cada } E \in \mathcal{B}.$$

Além disso, h é unicamente determinada em quase todo ponto. Neste caso h é conhecida como a derivada de Radon-Nikodym de λ com respeito a μ e escrevemos $h = \frac{d\lambda}{d\mu}$.

Demonstração. Para a prova desse teorema consulte [3]. □

Proposição 2.16. Sejam $\lambda \ll \mu$ e $h = \frac{d\lambda}{d\mu}$. Então para cada função g mensurável e positiva temos

$$\int g d\lambda = \int gh d\mu$$

Demonstração. Para provar essa proposição usaremos a técnica das funções simples que diz que toda função integrável e positiva pode ser aproximada por uma sequência crescente de funções simples. Façamos então para $g = \mathbb{1}_B$, daí

$$\int \mathbb{1}_B d\lambda = \lambda(B) = \int_B h d\mu = \int \mathbb{1}_B h d\mu$$

Por linearidade vale para funções simples. Usando o teorema da convergência monótona concluímos o resultado. □

Proposição 2.17. Seja $\nu \ll \lambda$ e $\lambda \ll \mu$ então

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu}.$$

Demonstração. Chame $f = \frac{d\nu}{d\lambda}$ e $g = \frac{d\lambda}{d\mu}$. Usando 2 vezes a proposição anterior temos

$$\nu(B) = \int_B f d\lambda = \int_B fg d\mu \tag{2.3}$$

e por unicidade da derivada de Radon-Nikodym temos que

$$\frac{d\nu}{d\mu} = fg$$

que é o que queríamos provar. □

Definição 2.18. *Sejam (X, \mathcal{B}_1, μ) e (Y, \mathcal{B}_2) dois espaços mensuráveis e $f : X \rightarrow Y$ uma função mensurável. Definimos o Push-Forward de μ como sendo $f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ para cada $B \in \mathcal{B}_2$.*

O push-forward é de fato uma medida e ainda vale a seguinte fórmula de mudança de variável:

Proposição 2.19. *Seja g integrável então*

$$\int_E g d(f_*\mu) = \int_{f^{-1}(E)} g \circ f d\mu$$

Demonstração. A prova desta proposição é análoga. Basta usar a técnica das funções simples. \square

Definição 2.20. *Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida e $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável. Um sistema dinâmico é simplesmente uma quádrupla (X, \mathcal{B}, μ, T) . Muitas vezes vamos nos referir ao sistema dinâmico simplesmente pela transformação T .*

Definição 2.21. *Seja (X, \mathcal{B}, μ, T) um sistema dinâmico. A medida μ é chamada T -invariante ou que T preserva μ se*

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \text{para todo } A \in \mathcal{B}.$$

As duas próximas proposições nos dão formas de se mostrar que uma transformação T é invariante por uma medida.

Proposição 2.22. *Seja $T : X \rightarrow X$ em um espaço (X, \mathcal{B}, μ) . Então T é μ -invariante se, e somente se,*

$$\int f d\mu = \int f \circ T d\mu \quad \forall f \in L_1(\mu). \quad (2.4)$$

Demonstração. (\Leftarrow) Dado $B \in \mathcal{B}$, tomando $f = \mathbb{1}_B$, obtemos

$$\mu(B) = \int \mathbb{1}_B d\mu = \int \mathbb{1}_B \circ T d\mu = \mu(T^{-1}(B)).$$

(\Rightarrow) Suponha que T preserva medida. O que fizemos na primeira parte mostra que a equação (2.4) vale para funções características. Por linearidade também vale para funções simples. Agora dada $f \in L_1$ qualquer, tomemos φ_n funções simples crescendo para f . Portanto $\varphi_n \circ T$ cresce para $f \circ T$. O teorema da convergência monótona garante então que

$$\int f d\mu = \lim \int \varphi_n d\mu = \lim \int \varphi_n \circ T d\mu = \int f \circ T d\mu.$$

\square

Proposição 2.23. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma medida finita em X . Suponha que exista uma álgebra \mathcal{B}_0 de subconjuntos de X tal que $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}_0$. Então o mesmo vale para todo A na σ -álgebra \mathcal{B} gerada por \mathcal{B}_0 . Isto é, μ é f -invariante.*

Demonstração. $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}_0 : \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)\}$ é uma classe monótona.

De fato, Seja $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ uma seqüência de elementos em \mathcal{C} e seja $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Precisamos provar que $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$. Ora, pelo lema (2.13), temos que

$$\mu(A) = \lim \mu(A_n) \quad \text{e} \quad \mu(f^{-1}(A)) = \lim \mu(f^{-1}(A_n))$$

e como $A_i \in \mathcal{C}$, então

$$\mu(A) = \lim \mu(A_n) = \lim \mu(f^{-1}(A_n)) = \mu(f^{-1}(A)).$$

De maneira totalmente análoga se mostra pra interseção. Isto prova portanto que \mathcal{C} é uma classe monótona. E como, por hipótese, $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}_0$ então pelo teorema das classes monótonas, $\mathcal{C} = \mathcal{B}_0$. \square

Exemplo 2.24. (*Doubling Map*) Definiremos $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por $T(x) = 2x \pmod{1}$

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 1, & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

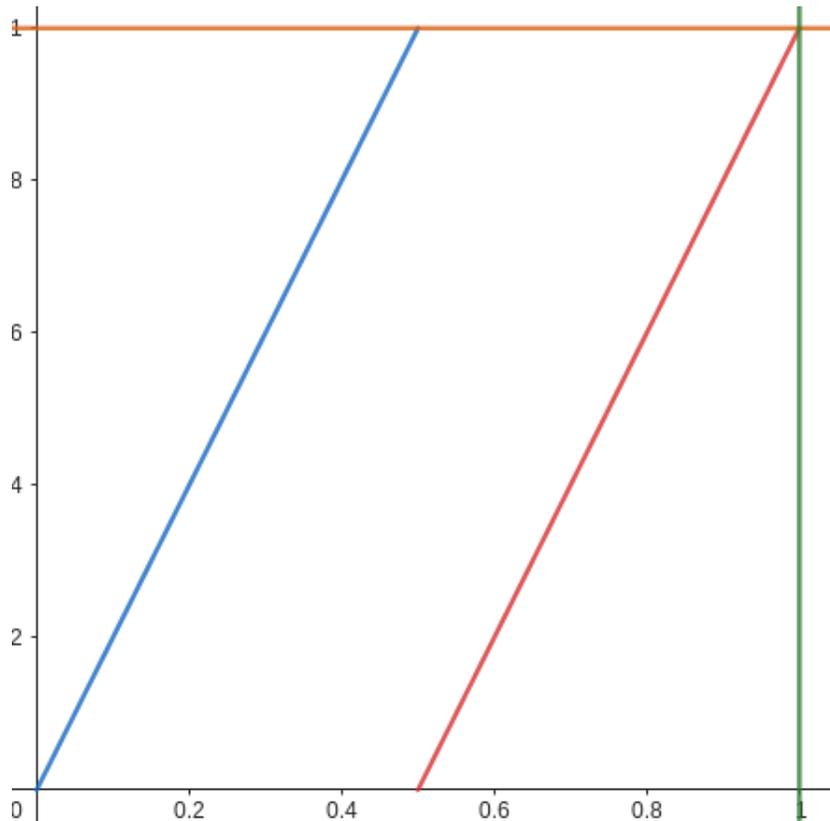


Figura 1 – $2x \pmod{1}$

Vamos usar a proposição (2.23) para mostrar que T é invariante pela medida de Lebesgue λ . Como os intervalos geram a σ -álgebra de Borel, então basta mostrar que $\lambda(T^{-1}(I)) = \lambda(I)$ é verdade para todo intervalo I . Seja $I = [a, b] \subset [0, 1]$, então

$$T^{-1}([a, b]) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cup \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \lambda(T^{-1}([a, b])) &= \lambda\left(\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cup \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{b-a}{2} + \frac{b+1-a-1}{2} = b-a = \lambda([a, b]) \end{aligned}$$

e assim pela proposição (2.23) $\lambda(T^{-1}(A)) = \lambda(A)$ para qualquer mensurável $A \subset [0, 1]$ de modo que T preserva a medida de Lebesgue.

Exemplo 2.25. (Mapa Tenda)

$$T(x) = \begin{cases} 2-2x, & \text{se } x \in (1/2, 1]; \\ 2x, & \text{se } [0, 1/2). \end{cases}$$

O mapa Tenda também preserva a medida de Lebesgue. De fato,

$$\begin{aligned} \lambda(T^{-1}([a, b])) &= \lambda\left(\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cup \left(\frac{2-b}{2}, \frac{2-a}{2}\right)\right) \\ &= \frac{b-a}{2} + \frac{2-a+b-2}{2} = b-a = \lambda([a, b]) \end{aligned}$$

e pela proposição (2.23) $\lambda(T^{-1}(A)) = \lambda(A)$ vale para qualquer mensurável $A \subset [0, 1]$ e isso mostra T preserva a medida de Lebesgue.

2.1 O Mapa de Gauss

Definição 2.26. A transformação de Gauss G é definida por

$$G : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

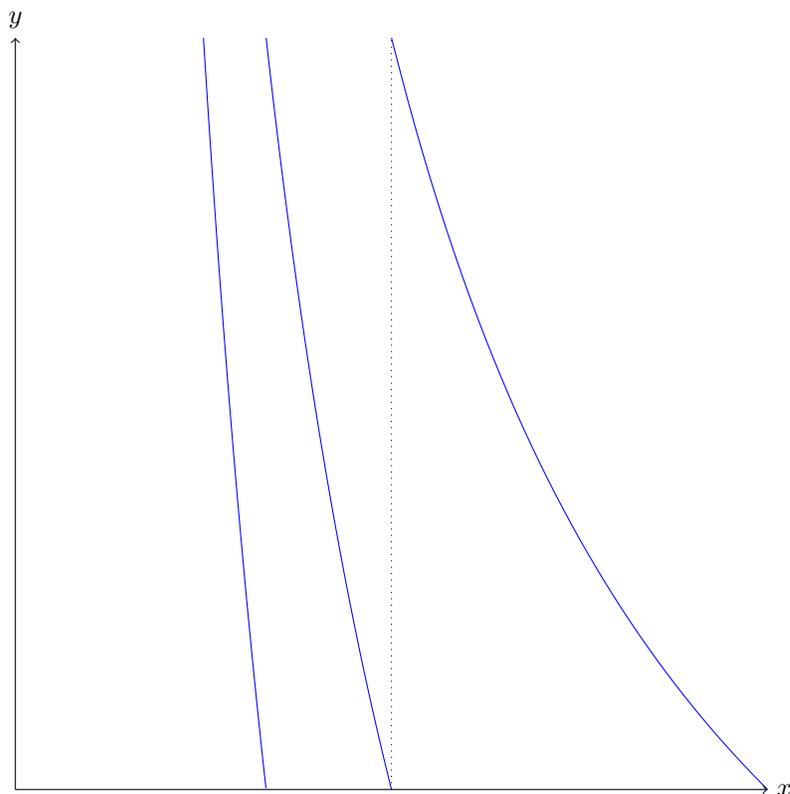


Figura 2 – Gauss map

G não é invariante pela medida de Lebesgue. Para ver isso, considere $A = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, então $G^{-1}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1/2}, \frac{1}{n}\right)$ e portanto $\lambda(G^{-1}(A)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n} = 2 - 2\log 2$. Note que

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \implies \ln(1-x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} \implies \int_0^1 \ln(1-x^2) dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n}.$$

Um cálculo rápido nos dá que $\int_0^1 \ln(1-x^2) dx = 2\log(2) - 2$ e por isso

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n} = 2 - \log(2) \neq \frac{1}{2} = \lambda(A).$$

Vamos definir uma outra medida que é absolutamente contínua com respeito à Lebesgue e que preserva o mapa de Gauss. Essa medida é definida como segue.

Definição 2.27. A medida de Gauss m_G de um intervalo $(a, b) \subset [0, 1]$ é definida como

$$m_G(a, b) = \frac{1}{\log 2} \int_a^b \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{1+b}{1+a} \right).$$

Provaremos que a medida de Gauss é G -invariante e ergódica. Apesar de a medida de Lebesgue não ser invariante pela transformação de Gauss G , nós ainda podemos relacioná-la com a medida de Gauss da seguinte forma:

$$\frac{1}{2 \log 2} < \frac{1}{\log 2(1+x)} < \frac{1}{\log 2}.$$

Portanto, para qualquer mensurável $A \subset [0, 1]$

$$\int_A \frac{1}{2 \log 2} dx < \int_A \frac{1}{\log 2(1+x)} dx < \int_A \frac{1}{\log 2} dx.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2 \log 2} \lambda(A) < m_G(A) < \frac{1}{\log 2} \lambda(A). \quad (2.5)$$

Proposição 2.28. *A medida de Gauss m_G é G -invariante.*

Demonstração. É suficiente provar pra intervalos, pois estes geram a σ -álgebra de Borel e portanto podemos usar a proposição (2.23) e concluir que vale para qualquer mensurável.

Em primeiro lugar, veja que

$$x \in I_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n.$$

Portanto, qualquer $x \in I_n$ pode ser escrito da forma $x = \frac{1}{n+\alpha}$ com $\alpha \in (0, 1)$. Daí,

$$G(x) = G\left(\frac{1}{n+\alpha}\right) = n + \alpha - [n + \alpha] = \alpha$$

a pré-imagem de (a, b) em I_n é $\left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right)$ e como cada intervalo (a, b) tem uma pré-imagem em cada intervalo I_n , temos que

$$G^{-1}((a, b)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} m_G(G^{-1}((a, b))) &= m_G\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m_G\left(\left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{1 + \frac{1}{n+a}}{1 + \frac{1}{n+b}}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{n+a+1}{n+a} \frac{n+b}{n+b+1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+a+1) - \log(n+a) + \log(n+b) - \log(n+b+1)}{\log 2}. \end{aligned}$$

Essa é uma série telescópica e portanto a soma é igual a

$$\frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{1+b}{1+a} \right) = m_G((a, b)).$$

Provamos então que

$$m_G(G^{-1}((a, b))) = m_G((a, b)).$$

O que conclui a proposição. □

O mapa de Gauss tem relação com a expansão em fração contínua de um número x . Enunciaremos fatos importantes sobre frações contínuas que iremos utilizar ao longo do texto. Usaremos a notação

$$[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots] = \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Ademais $\frac{p_n}{q_n} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ será chamado de convergente da fração contínua.

Proposição 2.29. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que

1. $p_{n+1} = x_{n+1}p_n + p_{n-1}$;
2. $q_{n+1} = x_{n+1}q_n + q_{n-1}$;
3. $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$.

Demonstração. Para a prova desse fato veja [\[4\]](#). □

Proposição 2.30. Para $x = [x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$ definimos o resto de x como sendo

$$r_n = \frac{1}{[x_n, x_{n+1}, \dots]}. \text{ A seguinte igualdade vale}$$

$$x = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}.$$

Demonstração. A prova desse fato se dá por indução e pode ser encontrada em [\[4\]](#). □

Definição 2.31. Para $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ defina o cilindro $C(x_1, x_2, \dots, x_k)$ por

$$C(x_1, x_2, \dots, x_k) = \{[y_1, y_2, \dots] : y_i = x_i \text{ para } 1 \leq i \leq k\}. \quad (2.6)$$

Para $n \in \mathbb{N}$ fixado, se $x \in C(n)$ então

$$x = \frac{1}{n + [x_2, x_3, \dots]}.$$

E como $[x_2, x_3, \dots]$ está entre 0 e 1, temos que $\lambda(C(n)) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

De modo geral, para $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}$ fixados, se $x \in C(x_1, x_2, \dots, x_k)$, então

$$x = \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \dots + \frac{1}{x_{k-1} + \frac{1}{x_k + [y_1, y_2, \dots]}}}}.$$

Desde que $[y_1, y_2, \dots]$ está entre 0 e 1, temos que $x \in ([x_1, \dots, x_{k-1}, x_k], [x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + 1])_{\pm}$ onde o \pm significa que os extremos do intervalo podem estar em ordem trocada dependendo da paridade do k . Agora usando a proposição 2.30 temos que

$$[x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k} \quad (2.7)$$

e

$$[x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + 1] = \frac{(x_k + 1)p_{k-1} + p_{k-2}}{(x_k + 1)q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}, \quad (2.8)$$

onde as últimas igualdade de (2.7) e (2.8) seguem da proposição 2.30. Portanto

$$\lambda(C(x_1, x_2, \dots, x_k)) = \left| \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k-1})} \quad (2.9)$$

onde a última igualdade segue da proposição 2.29. Desta forma provamos que

Proposição 2.32. $\lambda(C(x_1, x_2, \dots, x_k)) = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k-1})}$.

Definição 2.33. Seja (X, \mathcal{B}, μ, T) um sistema dinâmico. Um conjunto $W \in \mathcal{B}$ é chamado um conjunto errante para T se $\{T^{-n}(W) : n \geq 0\}$ é uma coleção de conjuntos disjuntos.

Definição 2.34. Seja (X, \mathcal{B}, μ, T) um sistema dinâmico. T é dito ser conservativo se cada conjunto errante para T é um conjunto nulo para μ .

Proposição 2.35. Qualquer sistema dinâmico (X, \mathcal{B}, μ, T) que preserva medida com $\mu(X) < \infty$ é conservativo.

Demonstração. Seja $W \in \mathcal{B}$ um conjunto errante. Temos por σ -aditividade

$$\mu(X) \geq \mu\left(\bigcup_k T^{-k}(W)\right) = \sum_k \mu(T^{-k}(W)) = \sum_k \mu(W).$$

Logo, $\mu(W) = 0$.

□

Em particular, $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x + 1$ não é conservativo.

Definição 2.36. $T : X \rightarrow X$ é dita ser não-singular se para cada conjunto mensurável $B \in \mathcal{B}$ com $\mu(B) = 0$ nós tivermos $\mu(T^{-1}(B)) = 0$.

Definição 2.37. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Definição 2.38. Escrevemos $A = B \pmod{\mu}$ para indicar que $\mu(A \Delta B) = 0$. De maneira análoga escreveremos $A \subset B \pmod{\mu}$ para indicar que $\mu(A \setminus B) = 0$.

Definição 2.39. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida e $T : X \rightarrow X$ um mapa mensurável. Um conjunto $A \in \mathcal{B}$ é chamado um Sweep-out para T se $0 < \mu(A) < \infty$ e

$$\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(A) = X \pmod{\mu}.$$

Lema 2.40. Se (X, \mathcal{B}, μ, T) é conservativo, ergódico e não-singular, então cada conjunto de medida positiva e finita é um sweep-out para T .

Demonstração. Seja $E \in \mathcal{B}$ com medida positiva. Defina $E' = E \setminus W$, onde

$$W = \{x \in E : T^n(x) \notin E \text{ para todo } n \geq 1\} = E \setminus \bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(E).$$

Afirmamos que $\mu(W) = 0$. De fato, seja $x \in W$ então $T^n(x) \notin E$ e portanto $T^n(x) \notin W$. Logo, $W \cap T^{-n}(W) = \emptyset$ para todo $n \geq 1$. Daí, se $i < j$, temos $T^{-i}(W) \cap T^{-j}(W) = T^{-i}(W \cap T^{-(j-i)}(W)) = T^{-i}(\emptyset) = \emptyset$. Sendo assim $\{T^{-n}(W)\}_{n \geq 0}$ são todos disjuntos o que mostra que W é errante. Como T é conservativo, segue que $\mu(W) = 0$. Por conseguinte $\mu(E') = \mu(E) > 0$. Agora note que

$$x \in \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(E') \iff x \in \bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(E').$$

Para verificar isso, basta provar que $x \in E'$ implica que $x \in \bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(E')$. Seja $x \in E'$ e suponha que $x \notin \bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(E')$. Disso temos que $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(E')$ é invariante por T . Como $\mu(\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(E')) \geq \mu(E') > 0$ então pela ergodicidade de T segue que

$$\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(E') = X \pmod{\mu}.$$

Por fim, note que

$$\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(E') = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(E) \setminus \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(W).$$

Como $\mu(W) = 0$ e T é não-singular então $\mu(\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(W)) = 0$. Logo vale que

$$\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(E') = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(E) = X \pmod{\mu}.$$

□

Proposição 2.41. Para um sistema dinâmico não-singular (X, \mathcal{B}, μ, T) são equivalentes:

- (a) T é ergódica com respeito a μ ;
- (b) Para $B \in \mathcal{B}$, se $B = T^{-1}(B) \pmod{\mu}$, então $\mu(B) = 0$ ou $\mu(X \setminus B) = 0$;
- (c) Para $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável, se $f \circ T = f$ μ -q.t.p., então f é constante μ -q.t.p.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b). Suponha que T é ergódica e seja B um conjunto mensurável tal que $B = T^{-1}(B) \pmod{\mu}$. Vamos construir um conjunto T -invariante com a mesma medida de B . Como

$$A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta C),$$

então

$$B \Delta T^{-k}(B) \subset \bigcup_{i=0}^{k-1} T^{-i}(B) \Delta T^{-(i+1)}(B) = \bigcup_{i=0}^{k-1} T^{-i}(B \Delta T^{-1}(B)).$$

Usando que T é não-singular temos

$$\mu(B \Delta T^{-k}(B)) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \mu(T^{-i}(B \Delta T^{-1}(B))) = \sum_{i=0}^{k-1} \mu(B \Delta T^{-1}(B)) = 0.$$

Segue que

$$\mu(B \Delta T^{-k}(B)) = 0. \tag{2.10}$$

Como

$$B \Delta \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(B) \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} B \Delta T^{-k}(B),$$

Então chamando $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(B)$ vale por (2.10) que

$$\mu(B \Delta B_n) = 0.$$

Tome $A = \bigcap B_n$, logo $\mu(A \Delta B) = \mu(B \Delta \bigcap B_n) = \mu(\bigcap (B_n \Delta B)) = 0$, portanto $\mu(A) = \mu(B)$. Além disso, A é T -invariante. Pela ergodicidade segue o resultado.

(b) \Rightarrow (c). Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável tal que $f \circ T = f$ μ -q.t.p. Para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $D_c = \{x \in X : f(x) \leq c\}$ é T -invariante. Portanto $\mu(D_c) = 0$ ou $\mu(D_c) = \mu(X)$. Seja $c_0 = \inf\{c \in \mathbb{R} : \mu(D_c) = \mu(X)\}$. Então

$$\{f = c_0\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ f \leq c_0 + \frac{1}{n} \right\} \setminus \bigcup_{n \geq 1} \left\{ f \leq c_0 - \frac{1}{n} \right\} = X \pmod{\mu}.$$

Ou seja, $f = c_0$ μ -q.t.p.

(c) \Rightarrow (a). Suponha que vale (c) e seja B um conjunto T -invariante. Escolhendo $f = \mathbb{1}_B$ temos que $\mathbb{1}_B \circ T = \mathbb{1}_B$ e portanto $\mathbb{1}_B$ é constante em quase todo ponto. Logo, por definição de $\mathbb{1}_B$, $\mu(B) = 0$ ou $\mu(X \setminus B) = 0$. □

Proposição 2.42. Para um sistema dinâmico não-singular conservativo (X, \mathcal{B}, μ, T) são equivalentes :

(a) T é ergódico com respeito a μ .

(b) Para cada conjunto $A \in \mathcal{B}$ com $\mu(A) > 0$ tem-se $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(A) = X \pmod{\mu}$.

(c) Para quaisquer conjuntos $A, B \in \mathcal{B}$ com medida positiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b) Segue diretamente do lema [2.40](#)

(b) \Rightarrow (c). Sejam $A, B \in \mathcal{B}$ conjuntos com medida positiva. Como (b) vale, temos

$$\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(A) = X \pmod{\mu}.$$

Logo,

$$0 < \mu(B) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} B \cap T^{-n}(A)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap T^{-n}(A)).$$

Segue que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$.

(c) \Rightarrow (a). Seja A um conjunto T -invariante, então para cada $n \in \mathbb{N}$, $T^{-n}(A) = A$, logo

$$0 = \mu((X \setminus A) \cap A) = \mu((X \setminus A) \cap T^{-n}(A)).$$

Então por (c) temos que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(X \setminus A) = 0$. Assim T é ergódica. \square

Definição 2.43. Uma transformação não-singular T de um espaço σ -finito (X, \mathcal{B}, μ) é dita ser exata se cada conjunto mensurável B na σ -álgebra caudal $\bigcap_{n \geq 0} T^{-n}(\mathcal{B})$ tem-se $\mu(B) = 0$ ou $\mu(X \setminus B) = 0$.

Observação 2.44. Se $T : X \rightarrow X$ é exata e B é T -invariante então $T^{-n}(B) = B$ para cada n , logo $B \in \bigcap_{n \geq 0} T^{-n}(\mathcal{B})$ e portanto $\mu(B) = 0$ ou $\mu(X \setminus B) = 0$. Sendo assim T é ergódica.

Vamos provar agora que o mapa de Gauss G com a medida de Gauss m_G é exato. Para isso, vamos a uma série de lemas.

Lema 2.45. Seja q_n o denominador do n -ésimo convergente da fração contínua de um número $x = [x_1, x_2, \dots]$ e $c, d \in [0, 1]$ números reais quaisquer então

$$\frac{1}{2} \leq \frac{q_n(q_n + q_{n-1})}{(q_n + cq_{n-1})(q_n + dq_{n-1})} \leq 2. \quad (2.11)$$

Demonstração. Primeiramente note que dividindo por q_n^2 a equação [\(2.11\)](#), a parcela do meio pode ser reescrita como

$$\frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{\left(1 + c \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(1 + d \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.$$

Como q_n é crescente então $1 + \frac{q_{n-1}}{q_n} < 2$, portanto

$$\frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{\left(1 + c \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(1 + d \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \leq 2.$$

Para o outro lado, note que $1 + c \frac{q_{n-1}}{q_n} \leq 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}$ e $1 + d \frac{q_{n-1}}{q_n} \leq 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}$. Logo,

$$\frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{\left(1 + c \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(1 + d \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} \geq \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{\left(1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right) \left(1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{q_n}{q_{n-1}}} \geq \frac{1}{2}.$$

□

Usaremos a notação $a \asymp b$ para dizer que existe $C > 0$ tal que $C^{-1} \cdot b \leq a \leq C \cdot b$.

Lema 2.46. Para qualquer intervalo $B = [c, d] \subset [0, 1]$ vale

$$m_G(G^{-n}(B) \cap C(x_1, \dots, x_n)) \asymp m_G(B) m_G(C(x_1, \dots, x_n)). \quad (2.12)$$

Demonstração. Note que $x \in G^{-n}(B) \cap C(x_1, \dots, x_n)$ se, e só se, $G^n(x) \in [c, d]$. Uma conta igual à de (2.8) nos dá

$$G^{-n}(B) \cap C(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{p_n + cp_{n-1}}{q_n + cq_{n-1}}, \frac{p_n + dp_{n-1}}{q_n + dq_{n-1}} \right)_{\pm}. \quad (2.13)$$

Portanto

$$\lambda(G^{-n}(B) \cap C(x_1, \dots, x_n)) = \left| \frac{p_n + cp_{n-1}}{q_n + cq_{n-1}} - \frac{p_n + dp_{n-1}}{q_n + dq_{n-1}} \right| = |d - c| \frac{1}{(q_n + cq_{n-1})(q_n + dq_{n-1})}$$

Como

$$\lambda(C(x_1, \dots, x_n)) = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})},$$

então

$$\lambda(G^{-n}(B) \cap C(x_1, \dots, x_n)) = \lambda(B) \lambda(C(x_1, \dots, x_n)) \frac{q_n(q_n + q_{n-1})}{(q_n + cq_{n-1})(q_n + dq_{n-1})}.$$

Portanto, usando o lema anterior temos

$$\lambda(G^{-n}(B) \cap C(x_1, \dots, x_n)) \asymp \lambda(B) \lambda(C(x_1, \dots, x_n)).$$

Como a medida de Lebesgue é equivalente à medida de Gauss, segue então o resultado. □

Vamos mostrar a seguir que o conjunto dos mensuráveis que satisfazem (2.12) é uma classe monótona e como já mostramos que vale para intervalos, então pelo teorema das classes monótonas (2.12), vale para todo mensurável.

Lema 2.47. $\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{B} : m_G(G^{-n}(B) \cap C(x_1, \dots, x_n)) \asymp m_G(B)m_G(C(x_1, \dots, x_n))\}$ é uma classe monótona.

Demonstração. Sejam $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ em \mathcal{M} . Vamos mostrar que $B = \bigcup_{k \geq 1} B_k \in \mathcal{M}$. De fato,

$$\begin{aligned} m_G(G^{-n}(B) \cap C(x_1, \dots, x_n)) &= m_G\left(G^{-n}\left(\bigcup_{k \geq 1} B_k\right) \cap C(x_1, \dots, x_n)\right) \\ &= m_G\left(\bigcup_{k \geq 1} G^{-n}(B_k) \cap C(x_1, \dots, x_n)\right) \\ &= \lim_k m(G^{-n}(B_k) \cap C(x_1, \dots, x_n)) \asymp \lim_k m_G(B_k)m_G(C(x_1, \dots, x_n)) \\ &= m_G(B)m_G(C(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

A prova de que se $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ estão em \mathcal{M} então $\bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}$ é inteiramente análoga. Portanto \mathcal{M} é uma classe monótona. \square

Proposição 2.48. *O mapa de Gauss G com a medida de de gauss m_G é exato.*

Demonstração. Seja $B \in \bigcap_{n \geq 0} G^{-n}(\mathcal{B})$ então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $B = G^{-n}(B_n)$. Como G é m_G -invariante, então $m_G(B) = m_G(B_n)$.

$$\begin{aligned} m_G(B \cap C(x_1, \dots, x_n)) &= m_G(G^{-n}(B_n) \cap C(x_1, \dots, x_n)) \asymp m_G(B_n)m_G(C(x_1, \dots, x_n)) \\ &= m_G(B)m_G(C(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Também vale para uniões finitas de cilindros e como os cilindros geram a σ -álgebra de Borel, concluímos que

$$m_G(B \cap A) \asymp m_G(B)m_G(A) \quad \text{para todo } A \in \mathcal{B}.$$

Escolhendo então $A = [0, 1] \setminus B$ temos que $m_G(B) = 0$ ou $m_G([0, 1] \setminus B) = 0$ e portanto G é exato. \square

2.2 Mapas Mixing e fracamente Mixing

Definição 2.49. *Seja (X, \mathcal{B}, μ, T) um sistema dinâmico que preserva a medida μ tal que $\mu(X) = 1$. Dizemos que T é mixing se para cada $A, B \in \mathcal{B}$ nós temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

Proposição 2.50. *Se T for mixing, então T é ergódico. De fato, Suponha T mixing e seja A um conjunto invariante, isto é, $A = T^{-1}(A)$, daí tomando $B = A$ na definição de mixing temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-n}(A)) = \mu(A)\mu(A) = \mu(A)^2.$$

Logo, $\mu(A) = \mu(A)^2$ e portanto $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$. Sendo assim, T é ergódico.

Um conceito útil que fica localizado entre ergodicidade e mixing é o de fracamente mixing.

Definição 2.51. Uma transformação $T : X \rightarrow X$ preservando uma probabilidade μ é dita **fracamente mixing** se para quaisquer mensuráveis A, B

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(T^{-i}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

As relações entre ergodicidade, mixing fraco e mixing são dadas na seguinte proposição.

Proposição 2.52. T mixing $\implies T$ fracamente mixing $\implies T$ ergódico. Mas não valem as recíprocas.

Para provar essa proposição vamos enunciar um lema de análise na reta.

Lema 2.53. Se $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - a| = 0$.

Demonstração do Lema. Dado $\varepsilon > 0$ existe N_1 tal que se $i \geq N_1$ nós temos $|a_i - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como a_i é limitada então $|a_i| \leq M$ e daí $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - a| \leq \frac{N_1(M + |a|)}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ se n for maior que um certo N_2 . Portanto para $n > \max\{N_1, N_2\}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - a| &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{N_1-1} |a_i - a| + \frac{1}{n} \sum_{i=N_1}^{n-1} |a_i - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n - N_1)\varepsilon}{2n} < \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Isso encerra a prova do lema.

Demonstração. (Da proposição). Mixing \implies fracamente mixing. Defina $a_i(A, B) = \mu(T^{-i}(A) \cap B)$. Como T é mixing então a_i converge para $\mu(A)\mu(B)$ e pelo lema temos então que T é fracamente mixing.

Fracamente mixing \implies ergódica. Seja A invariante por T , isto é, $A = T^{-1}(A)$. Na definição de fracamente mixing faça $B = A^c$, daí

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(T^{-i}(A) \cap A^c) - \mu(A)\mu(A^c)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(A)\mu(A^c) = \mu(A)\mu(A^c). \end{aligned}$$

Portanto $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$ e logo T é ergódica. \square

Definição 2.54. Dizemos que uma transformação T é duplamente ergódica se para quaisquer conjuntos A, B mensuráveis com medida positiva existe um natural n tal que

$$\mu(T^{-n}(A) \cap A) > 0 \text{ e } \mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0.$$

Em particular, se T é duplamente ergódica então T é ergódica. Vale um pouco mais :

Proposição 2.55. *Seja T preservando medida finita então T é fracamente mixing se, e só se, T é duplamente ergódica.*

Demonstração. Para a prova dessa proposição veja [7].

□

Veremos na próxima seção um exemplo de um mapa que mostra que mixing não é equivalente a fracamente mixing. Um exemplo que mostra que ergodicidade não é equivalente a fracamente mixing é dado pelas rotações irracionais.

Exemplo 2.56. (Rotações) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ a rotação por α é a transformação $R_\alpha : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ dada por $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$.

Proposição 2.57. *Para α irracional, R_α é uma transformação ergódica.*

Demonstração. Para a prova dessa proposição consulte [7].

□

Proposição 2.58. *Rotações irracionais não são fracamente mixing.*

Demonstração. Para provar isso, considere $I = [0, 1/8)$ e $J = [1/2, 5/8)$ dois intervalos em $[0, 1)$. Então para qualquer n tal que $R_\alpha^n(I) \cap J \neq \emptyset$ segue que $R_\alpha^n(I) \cap I = \emptyset$ e portanto R_α não é duplamente ergódica e usando a proposição (2.55) concluímos que R_α não é fracamente misturadora. □

2.3 O mapa de Chacon

Queremos definir um mapa $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$. Procederemos indutivamente.

No passo 0 teremos a coluna $C_0 = \left\{ \left[0, \frac{2}{3} \right) \right\}$ consistindo de um único intervalo. No passo 1 nós "cortamos" o intervalo $\left[0, \frac{2}{3} \right)$ em 3 intervalos menores de igual tamanho. A saber $\left[0, \frac{2}{9} \right)$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{4}{9} \right)$, $\left[\frac{4}{9}, \frac{6}{9} \right)$. Pegamos também o próximo intervalo de mesmo comprimento que será $\left[\frac{6}{9}, \frac{8}{9} \right)$ que chamaremos de espaçador. Empilhamos eles da seguinte forma :

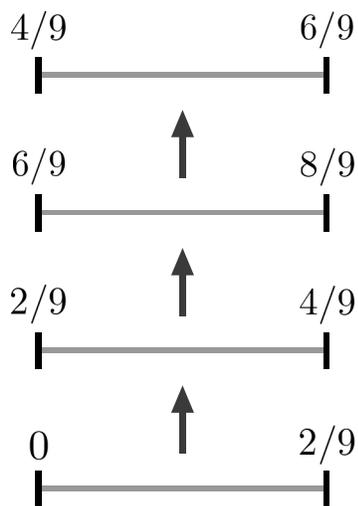


Figura 3 –

Teremos então a coluna $C_1 = \left\{ \left[0, \frac{2}{9}\right), \left[\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right), \left[\frac{6}{9}, \frac{8}{9}\right), \left[\frac{4}{9}, \frac{6}{9}\right) \right\}$ e definimos T bijetoramente enviando um nível da coluna no nível imediatamente acima seguindo essa ordem. A bijeção é simplesmente fazer o seguinte: considere dois intervalos $I = [a, b)$ e $J = [c, d)$ com $|I| = |J|$. Defina $T : I \rightarrow J$ por $T(x) = x - a + c$. Voltando a construção, no próximo passo cortamos cada um dos 4 níveis da Coluna C_1 em 3 pedaços de igual tamanho e colocamos um espaçador acima da coluna do meio como na figura abaixo :

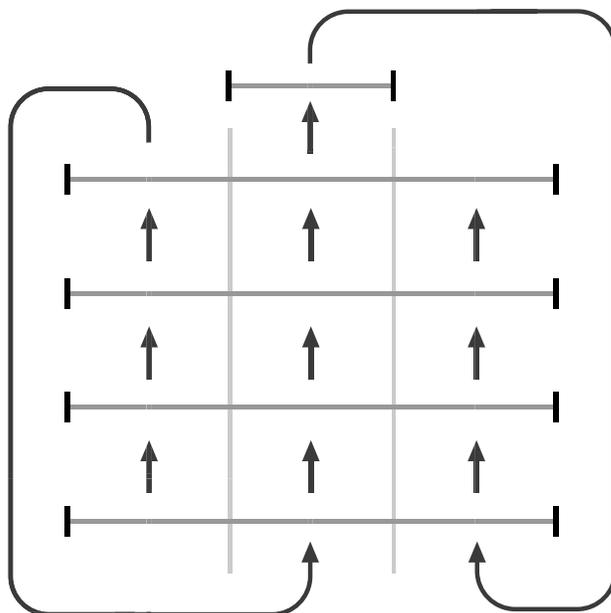


Figura 4 – Caption

Se denotarmos por h_n a altura da coluna C_n , ou seja a quantidade de intervalos de C_n então seguindo a nossa construção teremos $C_n = \{I_{n,0}, T(I_{n,0}), \dots, T^{h_n-1}(I_{n,0})\}$. Isso permite definir T em C_n para cada n . Definimos então $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{C_n}(x)$. O que significa que dado $x \in [0, 1)$ existe um natural n tal que x pertence a algum nível de C_n que não é o topo e portanto T está bem definida. Desde que a cada passo cortamos cada intervalo em 3 intervalos e acrescentamos um espaçador então vale a seguinte recorrência:

$$h_n = 3h_{n-1} + 1,$$

resolvendo a recorrência encontramos

$$h_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Além disso, por construção, se I for um nível de C_n então $|I| = \frac{2}{3^{n+1}}$. Vamos mostrar que o mapa de Chacon preserva a medida de Lebesgue. Para tal usaremos o lema a seguir.

Lema 2.59. Dado $B_n \subset [0, 1]$ com $\mu(B_n) \rightarrow 1$ então $\mu(A \cap B_n) \rightarrow \mu(A)$ qualquer que seja o conjunto mensurável $A \subset [0, 1]$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu(A) &= \mu(A \cap B_n) + \mu(A \setminus B_n) \implies \\ \mu(A) - \mu(A \cap B_n) &= \mu(A \setminus B_n) \leq \mu([0, 1] \setminus B_n) = 1 - \mu(B_n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

portanto $\mu(A \cap B_n) \rightarrow \mu(A)$. □

Proposição 2.60. O mapa de Chacon T preserva a medida de Lebesgue em $[0, 1)$.

Demonstração. Seja $A \subset [0, 1)$ mensurável. Note que para cada n podemos escrever

$$A = (A \cap I_{n,0}) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{h_n-1} A \cap I_{n,k} \right) \cup (A \cap X_n),$$

onde X_n é o restante do intervalo que T ainda não foi definido. Logo,

$$\mu(A) = \mu((A \cap I_{n,0})) + \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{h_n-1} A \cap I_{n,k}\right)\right) + \mu((A \cap X_n)).$$

Note que $\mu((A \cap I_{n,0})) \leq \mu(I_{n,0}) = \frac{2}{3^{n+1}} \rightarrow 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mu(X_n) &= 1 - \mu\left(\left(\bigcup_{k=0}^{h_n-1} I_{n,k}\right)\right) = 1 - \sum_{k=0}^{h_n-1} \mu(I_{n,k}) \\ &= 1 - h_n \cdot \frac{2}{3^{n+1}} = 1 - \frac{3^{n+1} - 1}{2} \cdot \frac{2}{3^{n+1}} \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

e portanto $\mu(A \cap X_n) \leq \mu(X_n) \rightarrow 0$. Logo,

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\left(\bigcup_{k=1}^{h_n-1} A \cap I_{n,k} \right) \right).$$

Agora note que T^{-1} está bem definida em $I_{n,k}$ se $k \geq 1$ então pela forma como definimos T vale

$$\mu \left(\left(\bigcup_{k=1}^{h_n-1} A \cap I_{n,k} \right) \right) = \mu \left(T^{-1} \left(\left(\bigcup_{k=1}^{h_n-1} A \cap I_{n,k} \right) \right) \right) \quad (2.16)$$

$$= \mu \left(T^{-1}(A) \cap \bigcup_{k=0}^{h_n-2} I_{n,k} \right) \quad (2.17)$$

A conta que fizemos em [\(2.15\)](#) mostra que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{k=0}^{h_n-2} I_{n,k} \right) = 1$$

e portanto pelo lema anterior segue que $\mu \left(T^{-1}(A) \cap \bigcup_{k=0}^{h_n-2} I_{n,k} \right) \rightarrow \mu(T^{-1}(A))$. Logo, $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ e provamos assim que T preserva a medida de Lebesgue. \square

Iremos mostrar agora que o Mapa de Chacon T não é mixing mas é fracamente mixing. Para tal começaremos com um lema que nos será útil.

Lema 2.61. *Sejam $k > 0$ e I, J níveis em C_k então*

1. *Para todo $n \geq k$ vale que*

$$\lambda(T^{h_k}(I) \cap I) \geq \frac{1}{3}\lambda(I).$$

2. *Se I e J estão no máximo afastado por l níveis com I acima de J , então existe um inteiro $H = H(k, l)$ tal que*

$$\lambda(T^H(I) \cap J) \geq \frac{1}{3^l}\lambda(J).$$

Demonstração. (De 1.) Procedamos indutivamente, no passo $k + 1$ cortaremos A em 3 pedaços, digamos A_1, A_2 e A_3 . Daí,

$$T^{h_k}(A) \cap A = (T^{h_k}(A_1) \cap A) \cup (T^{h_k}(A_2) \cap A) \cup (T^{h_k}(A_3) \cap A).$$

Observe que $T^{h_k}(A_1) = A_2$ e $T^{h_k}(A_2) =$ espaçador que não intersecta A e portanto temos que $\mu(T^{h_k}(A_1) \cap A) = \mu(A_2 \cap A) = \mu(A_2) = \frac{1}{3}\mu(A)$ e $\mu(T^{h_k}(A_2) \cap A) = \mu(\emptyset) = 0$ e assim $\mu(T^{h_k}(A) \cap A) \geq \frac{1}{3}\mu(A)$. No passo $k + 2$ analogamente ao que fizemos no passo $k + 1$ teremos

$$\mu(T^{h_k}(A_i) \cap A_i) \geq \frac{1}{3}\mu(A_i) = \frac{1}{9}\mu(A) \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

De modo que

$$\mu(T^{h_{k+1}}(A) \cap A) \geq 3 \cdot \frac{1}{9} \mu(A) = \frac{1}{3} \mu(A).$$

Usando um processo indutivo concluímos que

$$\mu(T^{h_n}(A) \cap A) \geq 3^{n-k} \cdot \frac{1}{3^{n-k+1}} \mu(A) = \frac{1}{3} \mu(A).$$

□

Para provar (2), veja [7].

Proposição 2.62. *O mapa de Chacon T não é mixing.*

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que se I for um nível de C_k tenhamos $\lambda(I) < \frac{1}{3}$. Pelo lema (2.61) teremos para todo $n \geq k$

$$\lambda(T^{h_n}(I) \cap I) \geq \frac{1}{3} \lambda(I) > \lambda(I) \lambda(I).$$

Suponha que T fosse mixing então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-h_n}(I) \cap I) = \mu(I) \mu(I).$$

Mas como T preserva medida então $\mu(T^{-h_n}(I) \cap I) = \mu(T^{h_n}(I) \cap I) \geq \frac{1}{3} \lambda(I) > \lambda(I) \lambda(I)$ e tomando limites chegamos em um absurdo, portanto T não é mixing. □

Antes de provarmos que o mapa de Chacon é fracamente mixing vamos a uma definição de aproximação que usaremos na prova.

Definição 2.63. *Dados conjuntos mensuráveis A e I e δ um número real entre 0 e 1. Dizemos que I é δ -cheio em A se $\mu(A \cap I) \geq \delta \mu(I)$.*

Vamos agora a prova da proposição :

Proposição 2.64. *o mapa de Chacon T é fracamente mixing.*

Demonstração. Vamos provar que T é duplamente ergódica. Sejam A_1 e B_1 conjuntos de medida positiva. É possível escolher I_1 e J_1 em alguma coluna C_n de modo que eles são $\frac{2}{3}$ -cheios em A_1 e B_1 respectivamente. Além disso, escolhamos I_1 e J_1 de modo que eles estejam separados por no máximo l níveis. Seja $\delta = \frac{1}{3^l}$. Usando um processo de aproximação podemos escolher subintervalos I e J de I_1 e J_1 respectivamente que são $(1 - \frac{\delta}{3})$ -cheios em I_1 e J_1 . Escreva $A = A_1 \cap I$ e $B = B_1 \cap J$. Seja H como no lema (2.61). Então $\mu(T^H I \cap J) \geq \frac{1}{3^l} \mu(J)$ e $\mu(T^H I \cap I) \geq \frac{1}{3^l} \mu(I)$. Então

$$\begin{aligned} \mu(T^H A \cap B) &\geq \mu(T^H I \cap J) - \mu(I \setminus A) - \mu(J \setminus B) \\ &\geq \delta \mu(I) - \frac{\delta}{3} \mu(I) - \frac{\delta}{3} \mu(J) > 0 \end{aligned}$$

e

$$\mu(T^H A \cap A) \geq \mu(T^H I \cap I) - \mu(I \setminus A) - \mu(I \setminus A) > 0$$

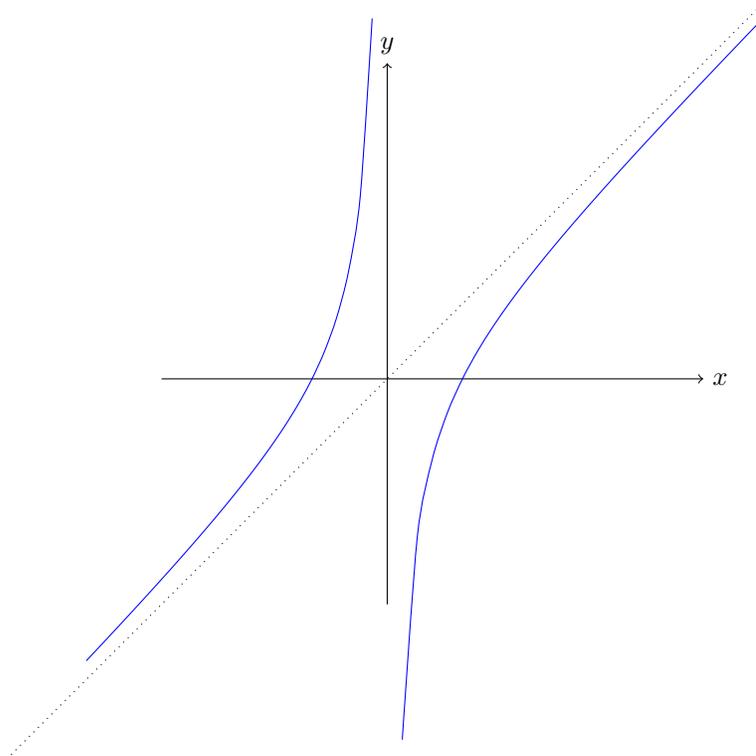
Isso mostra que T é duplamente ergódica e portanto usando (2.55) concluímos que T é fracamente mixing. □

3 Exemplos de mapas que preservam uma medida infinita

Vamos introduzir agora um mapa que preserva uma medida infinita e que tem outras boas propriedades que veremos mais pra frente.

Exemplo 3.1. (Mapa de Boole) Seja $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$T(x) = x - \frac{1}{x}.$$



Vamos usar a proposição [\(2.22\)](#) pra mostrar que esse mapa preserva a medida de Lebesgue.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx + \int_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx \quad (3.1)$$

na primeira integral, fazendo a mudança de variável $u = \frac{-1}{x}$, temos

$$\int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \int_0^{+\infty} f\left(u - \frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2}.$$

Portanto, a equação [3.1](#) se torna

$$\int_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx. \quad (3.2)$$

Fazendo agora $u = x - \frac{1}{x}$ temos $du = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$. Além disso,

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow -\infty \quad e \quad x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty$$

logo, [3.1](#) se torna

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du.$$

Desde que f foi arbitrária, por [2.22](#), mostramos que $T(x) = x - \frac{1}{x}$ preserva a medida de Lebesgue. Vamos provar adiante que esse mapa tem uma certa propriedade de mistura que definiremos depois e chamaremos de *Global-Local Mixing* (veja [4.3](#)). Antes disso, vamos falar sobre mapas induzidos.

3.1 Mapas induzidos

Lembremos que A é dito ser um *sweep-out* para T se $\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) = X \pmod{\mu}$.

Definição 3.2. *Seja A um sweep-out de um mapa não-singular, conservativo $T : X \rightarrow X$. Definimos a função de primeiro retorno $\varphi : X \rightarrow \mathbb{N}$ por*

$$\varphi(x) = \inf\{n \geq 1 : T^n(x) \in A\}.$$

Desde que A é um sweep-out, então $\varphi(x) < \infty$ para quase todo ponto.

Definição 3.3. *Definimos o mapa induzido $T_A : A \rightarrow A$ por*

$$T_A(x) = T^{\varphi(x)}(x).$$

Para o que segue iremos usar a notação $\{\varphi = n\} = \{x \in X : \varphi(x) = n\}$ e de forma similar $\{\varphi > n\}$ e $\{\varphi < n\}$.

A ideia é que através dos mapas induzidos nós consigamos recuperar propriedades ergódicas para o mapa. Em especial, quando o mapa T preserva uma medida infinita, o mapa induzido serve como um auxílio para "enxergar" T através de um conjunto com medida finita que pode ser mais fácil de trabalhar. Vamos enunciar uma série de proposições a respeito dos mapas induzidos.

Proposição 3.4. *Se A é um sweep-out para uma transformação não-singular e conservativa $T : X \rightarrow X$ então para todo $B \subset X$ temos*

$$T_A^{-1}(A \cap B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{\varphi = n\} \cap T^{-n}(B).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
T_A^{-1}(A \cap B) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{\varphi = n\} \cap T_A^{-1}(A \cap B) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{\varphi = n\} \cap T_A^{-1}(A) \cap T_A^{-1}(B) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{\varphi = n\} \cap T_A^{-1}(B) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{\varphi = n\} \cap T^{-n}(B).
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que $T_A = T^n$ em $A \cap \{\varphi = n\}$. □

Proposição 3.5. *Assuma que $T_A : A \rightarrow A$ preserve uma medida finita ν . Então existe uma medida T -invariante m dada por*

$$m(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu(A \cap \{\varphi > n\} \cap T^{-n}(B)) \text{ para todo } B \in \mathcal{B}, \quad (3.3)$$

que satisfaz $m|_A = \nu$.

Demonstração. Primeiramente note que $\{\varphi > n\} = \{\varphi = n + 1\} \cup \{\varphi > n + 1\}$. Daí

$$\begin{aligned}
m(T^{-1}(B)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \nu(A \cap \{\varphi > n\} \cap T^{-(n+1)}(B)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \nu(A \cap \{\varphi > n + 1\} \cap T^{-(n+1)}(B)) + \sum_{n=0}^{\infty} \nu(A \cap \{\varphi = n + 1\} \cap T^{-(n+1)}(B)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap \{\varphi > n\} \cap T^{-n}(B)) + \sum_{n=0}^{\infty} \nu(A \cap \{\varphi = n + 1\} \cap T^{-(n+1)}(B)). \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Agora desde que $\{A \cap \{\varphi = n + 1\} \cap T^{-(n+1)}(B)\}_n$ são disjuntos, então

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \nu(A \cap \{\varphi = n + 1\} \cap T^{-(n+1)}(B)) &= \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A \cap \{\varphi = n + 1\} \cap T^{-(n+1)}(B)\right) \\
&= \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{\varphi = n\} \cap T^{-n}(B)\right) \\
&= \nu(T_A^{-1}(A \cap B)) \\
&= \nu(A \cap B). \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Onde usamos nas duas últimas igualdades usamos a proposição anterior e o fato de T_A preservar ν .

Portanto,

$$\begin{aligned}
m(T^{-1}(B)) &= \nu(A \cap B) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap \{\varphi > n\} \cap T^{-n}(B)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \nu(A \cap \{\varphi > n\} \cap T^{-n}(B)) \\
&= m(B).
\end{aligned}$$

□

A próxima proposição nos diz quando mapas induzidos ergódicos implicam mapas ergódicos.

Proposição 3.6. *Seja (X, \mathcal{B}, μ, T) conservativo e não-singular.*

1. *Assuma que A é um sweep-out para T e $(T_A, \mu|_A)$ é ergódico, então (T, μ) é ergódico.*
2. *Se (T, μ) é ergódico, então $(T_A, \mu|_A)$ é ergódico.*

Demonstração. (1). Seja B mensurável com $T^{-1}(B) = B$. Daí pela proposição (3.4) temos que

$$\begin{aligned}
T_A^{-1}(A \cap B) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{\varphi = n\} \cap T^{-n}(B) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap \{\varphi = n\} \cap (B) \\
&= A \cap B.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

portanto $A \cap B$ é invariante por T_A . Como estamos assumindo que T_A é ergódico, então

$$\mu|_A(A \cap B) = 0 \text{ ou } \mu|_A((A \cap B)^c) = 0.$$

No primeiro caso,

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) \cap B\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A \cap B)\right) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-n}(A \cap B)) = 0.
\end{aligned}$$

No segundo caso, veja que $0 = \mu|_A((A \cap B)^c) = \mu(A \cap (A \cap B)^c) = \mu(A \cap B^c)$. Daí

$$\begin{aligned}
\mu(B^c) &= \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) \cap B^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A \cap B^c)\right) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-n}(A \cap B^c)) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto (T, μ) é ergódico.

□

3.2 O mapa de Farey

O mapa de Farey $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é definido por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-x}{x}, & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

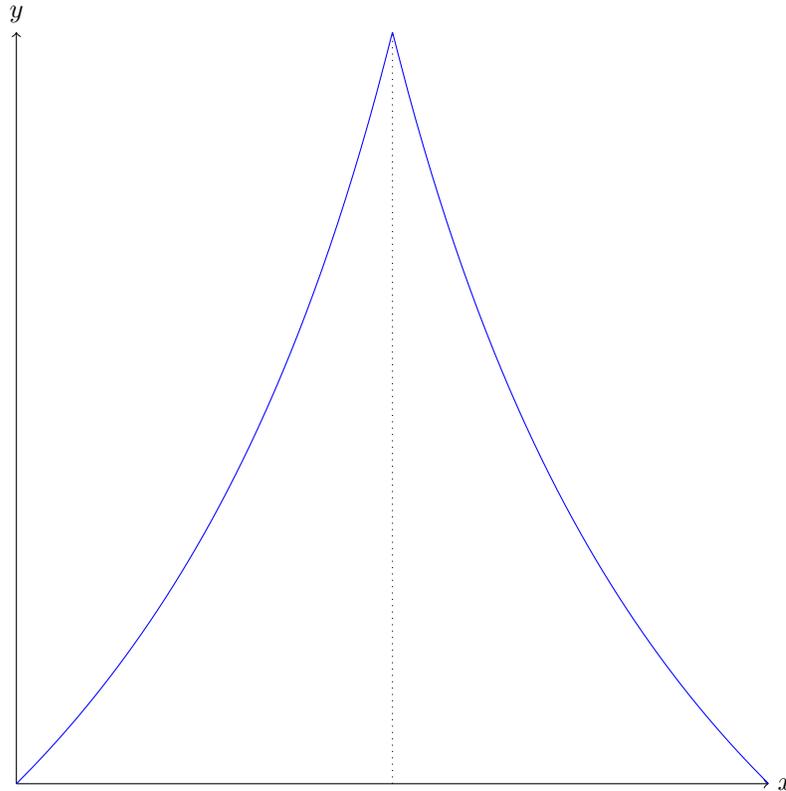


Figura 5 – Farey map

Os seus ramos inversos são $F_0 : (0, 1) \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $F_1 : (0, 1) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ definidos por

$$F_0(x) = \frac{x}{1+x} \quad \text{e} \quad F_1(x) = \frac{1}{1+x}.$$

O mapa de Farey se parece muito com o mapa de Gauss quando age em números expandidos em fração contínua. Seja $x = [x_1, x_2, \dots]$ então

$$F(x) = \begin{cases} [x_1 - 1, x_2, \dots] & \text{se } x_1 > 1 \\ [x_2, x_3, \dots] & \text{se } x_1 = 1 \end{cases}.$$

De fato, se $x_1 = 1$ então $x \in (1/2, 1)$ e logo $F(x) = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{[1, x_2, \dots]} - 1 = [x_2, x_3, \dots]$.
 Por outro lado, se $x_1 > 1$ então $x \in (0, 1/2)$ e assim $F(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{[x_1, x_2, \dots]} - 1} = [x_1 - 1, x_2, \dots]$.

Provaremos no capítulo seguinte que o Farey map preserva uma medida ν_F infinita cuja densidade é $h(x) = \frac{1}{x}$. Vamos usar agora a ideia de mapas induzidos para mostrar que o sistema (F, ν_F) é ergódico.

Teorema 3.7. *O mapa de Farey F com a medida ν_F é ergódico.*

Lema 3.8. $A = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ é um sweep-out para F .

Demonstração. Temos que mostrar que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(A) = [0, 1].$$

Seja $x = [x_1, x_2, \dots] \in [0, 1]$. Se $x_1 = 1$ então $x \in A$. Ou seja $x \in F^{-0}(A)$. Se for $x_1 > 1$, então $F^{x_1}(x) = [1, x_2, \dots] \in A$. Ou seja, $x \in F^{-x_1}(A)$. \square

Vamos agora definir o mapa de Farey induzido por A . $F_A : A \rightarrow A$. Primeiramente observe que se $x \in A$ então $x = [1, x_2, x_3, \dots]$. Neste caso, $\varphi(x) = x_2$, daí $F_A(x) = F^{x_2}(x)$. Ou seja, $F_A([1, x_2, x_3, \dots]) = [x_2, x_3, \dots]$.

Proposição 3.9. *O mapa de Farey induzido por F_A e o mapa de Gauss G são conjugados. Isto é, existe $\varphi : A \rightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi \circ F_A = G \circ \varphi$.*

Demonstração. Seja $\varphi(x) = F|_A(x)$. Tome $x = [1, x_2, x_3, \dots] \in A$. Daí

$$\begin{aligned} F|_A(F_A(x)) &= F|_A(F_A([1, x_2, x_3, \dots])) = F|_A([1, x_3, x_4, \dots]) = \\ &= G([x_2, x_3, \dots]) = G(F|_A([1, x_2, x_3, \dots])) = G(F|_A(x)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

e como x foi arbitrário, provamos que $F|_A \circ F_A = G \circ F|_A$. Mostramos então que F_A e G são conjugados. \square

Note que $F|_A^{-1}(x) = \frac{1}{1+x}$ e portanto $F|_A^{-1}([a, b]) = \left(\frac{1}{1+b}, \frac{1}{1+a}\right)$. Daí

$$\nu|_A(F|_A^{-1}([a, b])) = \nu|_A\left(\frac{1}{1+b}, \frac{1}{1+a}\right) = \nu\left(\left(\frac{1}{1+b}, \frac{1}{1+a}\right) \cap A\right) / \nu(A)$$

Como $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ então $\frac{3}{2} \leq a+1 \leq 2$ daí $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+a} \leq \frac{2}{3} < 1$. Claro que vale o mesmo para b . Sendo assim, $\left(\frac{1}{1+b}, \frac{1}{1+a}\right) \cap A = \left(\frac{1}{1+b}, \frac{1}{1+a}\right)$. Além disso,

$$\nu(A) = \int_{1/2}^1 \frac{1}{x} dx = \ln(1) - \ln(1/2) = \ln(2) \text{ e } \nu\left(\left(\frac{1}{1+b}, \frac{1}{1+a}\right)\right) = \ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right).$$

Logo,

$$(F|_A) * \nu_A([a, b]) = \nu|_A(F|_A^{-1}([a, b])) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right) = m([a, b])$$

onde m_G é a medida de Gauss. Portanto, desde que (G, m_G) é ergódico, então $(F_A, \nu|_A)$ também é ergódico. Como em (3.8) provamos que o conjunto mensurável A é um sweep-out para F então usando a proposição (3.6) concluímos que (F, ν) é ergódico.

Exemplo 3.10. (α -Farey map)

Começamos definindo $\alpha = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma partição de $[0, 1]$ consistindo de intervalos fechados à direita e abertos à esquerda. Para cada $A_n \in \alpha$ denote a_n a medida de Lebesgue $\lambda(A_n)$, e $t_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

Observe que $t_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$ e que podemos dizer explicitamente quem são os A_n em função dos t_n , $A_n = (t_{n+1}, t_n]$.

Para cada partição α , o α -Farey map $F_\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é definido por

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{a_1}, & \text{se } x \in A_1 \\ a_{n-1} \frac{x-t_{n+1}}{a_n} + t_n, & \text{se } x \in A_n, n \geq 2 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Observe que $F_\alpha(A_1) = [0, 1]$ e $F_\alpha(A_n) = A_{n-1}$ para $n \geq 2$. Ainda podemos definir os ramos inversos de F_α que denotaremos por $F_{\alpha,0}$ e $F_{\alpha,1}$ definidos por $F_{\alpha,0} : [0, 1] \rightarrow [0, t_2]$ e $F_{\alpha,1} : [0, 1] \rightarrow [t_2, 1]$

$$F_{\alpha,0}(x) = \frac{a_{n+1}}{a_n}(x - t_{n+1}) + t_{n+2} \text{ para } x \in A_n, n \geq 1.$$

e

$$F_{\alpha,1}(x) = 1 - a_1 x, \text{ para } x \in [0, 1].$$

$F_{\alpha,0}$ mapeia A_n em A_{n+1} , ou seja, $F_{\alpha,0}(A_n) = A_{n+1}$. Vamos calcular F_α explicitamente para a partição $\alpha = \left\{ \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right] : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Primeiramente, note que $a_n = \lambda(A_n) = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$ e que $t_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Logo, se $x \in A_1 = \left(\frac{1}{2}, 1 \right]$ então $F_\alpha(x) = \frac{1-x}{a_1} = \frac{1-x}{1/2} = 2-2x$. Por outro lado, se $x \in A_n = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right]$, então $F_\alpha(x) = a_{n-1} \frac{x-t_{n+1}}{a_n} + t_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left(x - \frac{1}{2^n} \right) / \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} = 2x$ seja qual for o $n \geq 2$. Logo,

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} 2-2x & \text{se } x \in (1/2, 1] \\ 2x, & \text{se } [0, 1/2) \end{cases}.$$

Ou seja, neste caso, F_α coincide com o mapa Tenda definido no exemplo (2.25).

3.3 Operador de Transferência e o Teorema De Lin

Dada uma transformação não-singular T definida em um espaço σ -finito (X, \mathcal{B}, μ) , definimos o seu operador de transferência $P_T : L_1(\mu) \rightarrow L_1(\mu)$ implicitamente para $F \in L_\infty(\mu)$ e $g \in L_1(\mu)$ pela seguinte igualdade

$$\int F \cdot P_T(g) d\mu = \int g \cdot (F \circ T) d\mu.$$

Para mais detalhes a respeito do operador de transferência consulte [8]. Sempre que tiver claro qual dinâmica estivermos trabalhando, vamos denotar simplesmente P ao invés de P_T . A próxima proposição mostra que pontos fixos do operador de transferência nos dão medidas invariantes para a nossa transformação.

Proposição 3.11. *Seja $T : X \rightarrow X$ um mapa mensurável e ν uma medida cuja densidade é h . Então $P(h) = h$ se, e somente se, ν é T -invariante.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{B}$ então

$$\nu(T^{-1}(A)) = \int_{T^{-1}(A)} h d\mu = \int (\mathbb{1}_A \circ T) \cdot h d\mu = \int \mathbb{1}_A \cdot P(h) d\mu = \int \mathbb{1}_A h d\mu = \nu(A).$$

□

Proposição 3.12. *A medida ν_F cuja densidade é $h(x) = \frac{1}{x}$ é F -invariante, infinita e σ -finita.*

Demonstração. Não podemos usar a proposição anterior pois $h(x) = \frac{1}{x}$ não é integrável. Vamos dá uma prova direta da invariância de ν_F . Primeiro note que os ramos inversos do mapa de Farey são

$$F_0(x) = \frac{x}{1+x} \quad \text{e} \quad F_1(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Vamos mostrar que $\nu_F(F^{-1}([a, b])) = \nu_F([a, b])$ para todo intervalo $[a, b]$.

$$F^{-1}([a, b]) = \left[\frac{a}{1+a}, \frac{b}{1+b} \right] \cup \left[\frac{1}{1+b}, \frac{1}{1+a} \right].$$

Logo,

$$\nu_F(F^{-1}([a, b])) = \int_{\frac{a}{1+a}}^{\frac{b}{1+b}} \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{1}{1+b}}^{\frac{1}{1+a}} \frac{1}{x} dx. \quad (3.8)$$

Afirmamos que $\int_a^b \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx = \int_{\frac{a}{1+a}}^{\frac{b}{1+b}} \frac{1}{x} dx$ e $\int_a^b (x+1) \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx = \int_{\frac{1}{1+b}}^{\frac{1}{1+a}} \frac{1}{x} dx$.

De fato, para a primeira integral, faça a mudança de variável $y = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$, assim $dy = \frac{1}{(1+x)^2} dx$.

$$\int_a^b \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx = \int_{\frac{a}{1+a}}^{\frac{b}{1+b}} \frac{1}{y} dy.$$

A segunda integral se prova do mesmo jeito. Portanto,

$$\begin{aligned}
\nu_F(F^{-1}([a, b])) &= \int_{\frac{a}{1+a}}^{\frac{b}{1+b}} \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{1}{1+b}}^{\frac{1}{1+a}} \frac{1}{x} dx \\
&= \int_a^b \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx + \int_a^b (x+1) \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx \\
&= \int_a^b \frac{1}{x} dx = \nu_F([a, b]).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Como os intervalos geram a σ -álgebra de Borel, então usando a proposição (2.23) segue que $\nu_F(F^{-1}(A)) = \nu_F(A)$ qualquer que seja o conjunto mensurável A . Assim ν_F é invariante pelo mapa de Farey.

Para ver que ν_F é infinita, basta notar que

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty.$$

Por fim, para mostrar que é σ -finita, note que

$$\bigcup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] = (0, 1]$$

$$\text{e que } \nu_F \left(\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \right) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} dx < \infty. \quad \square$$

Observação 3.13. *Observamos que os intervalos que consideramos na proposição anterior são tais que $a \neq 0$. Porém é possível mostrar que a σ -álgebra gerada pelos intervalos cujos extremos formam um conjunto denso também gera a σ -álgebra de Borel.*

Proposição 3.14. *Seja F_α o mapa definido no exemplo (3.10). Para cada partição α , o sistema (F_α, ν_α) é invariante, onde ν_α é definida pela densidade h_{F_α} dada por*

$$h_{F_\alpha} = \frac{d\nu_\alpha}{d\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{a_n} \cdot \mathbb{1}_{A_n}.$$

Além disso, ν_α é σ -finita e temos que ν_α é infinita se e só se $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$ diverge.

Demonstração. Pela proposição (3.11) é suficiente mostrarmos que $P_{F_\alpha}(h_{F_\alpha}) = h_{F_\alpha}$. Ora, segundo (??) a forma analítica do operador de transferência P_{F_α} é dada por

$$P_{F_\alpha}(f) = |F'_{\alpha,0}| \cdot (f \circ F_{\alpha,0}) + |F'_{\alpha,1}| \cdot (f \circ F_{\alpha,1})$$

Lembre-se que os ramos inversos são dados por $F_{\alpha,0}(x) = \frac{a_{n+1}}{a_n}(x - t_{n+1}) + t_{n+2}$ para $x \in A_n, n \geq 1$ e $F_{\alpha,1}(x) = 1 - a_1x$ e portanto $F'_{\alpha,0}(x) = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ se $x \in A_n$ e $F'_{\alpha,1}(x) = -a_1$. Reescrevendo temos para

todo x , $F'_{\alpha,0}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x)$ (perceba que como os A_n são todos disjuntos essa soma se torna apenas $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ para $x \in A_n$.) Logo

$$|F'_{\alpha,0}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \mathbb{1}_{A_n} \text{ e } |F'_{\alpha,1}| = a_1 = a_1 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}.$$

Por outro lado, $h_{F_\alpha} \circ F_{\alpha,1}(x) = h_{F_\alpha}(F_{\alpha,1}(x))$ e desde que $F_{\alpha,1}(x) \in [t_2, 1] = A_1$ então $h_{F_\alpha} \circ F_{\alpha,1} = \frac{t_1}{a_1} \cdot \mathbb{1}_{A_1}$. De forma análoga para $x \in A_n$. $F_{\alpha,0}(x) \in A_{n+1}$ logo $h_{F_\alpha} \circ F_{\alpha,0} = \frac{t_{n+1}}{a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \mathbb{1}_{A_n}$. Portanto,

$$\begin{aligned} P_{F_\alpha}(h_{F_\alpha}) &= |F'_{\alpha,0}| \cdot (h_{F_\alpha} \circ F_{\alpha,0}) + |F'_{\alpha,1}| \cdot (h_{F_\alpha} \circ F_{\alpha,1}) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \mathbb{1}_{A_m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_{n+1}}{a_n} \cdot \mathbb{1}_{A_n} + a_1 \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \mathbb{1}_{A_1} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \mathbb{1}_{A_m} \cdot \frac{t_{n+1}}{a_n} \cdot \mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{A_1}. \end{aligned}$$

Desde que os A_n são disjuntos então $\frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \mathbb{1}_{A_m} \cdot \frac{t_{n+1}}{a_n} \cdot \mathbb{1}_{A_n} = 0$ se $n \neq m$. Logo

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \mathbb{1}_{A_m} \cdot \frac{t_{n+1}}{a_n} \cdot \mathbb{1}_{A_n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_{m+1}}{a_{m+1}} \cdot \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \mathbb{1}_{A_m}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} P_{F_\alpha}(h_{F_\alpha}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_{m+1}}{a_{m+1}} \cdot \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \mathbb{1}_{A_m} + \mathbb{1}_{A_1} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_{m+1}}{a_m} \cdot \mathbb{1}_{A_m} + \mathbb{1}_{A_1} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{t_{m+1}}{a_m} + 1 \right) \cdot \mathbb{1}_{A_m} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{a_n} \cdot \mathbb{1}_{A_n} = h_{F_\alpha}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Portanto pela proposição (3.11) ν_α é invariante por F_α . □

Vamos agora ao Teorema de Lin que será uma ferramenta importante ao longo deste texto. Referência para ele pode ser vista em [6].

Teorema 3.15. (Teorema de Lin) *Seja (X, \mathcal{B}, μ, T) um sistema dinâmico que preserva medida. Então, T é exato se e só se para toda $f \in L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$ com $\int f d\mu = 0$ nós tivermos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P^n(f)\|_1 = 0$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que T é exata e considere $g \in L_1$ com $\int g d\mu = 0$. Como $\|P^n(g)\|_1 \leq \|P^n\| \|g\| \leq \|g\|_1 < +\infty$, logo $\{\|P^n(g)\|_1\}$ é limitada. Portanto existe $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|P^n(g)\|_1$. Seja

$\{n_k\}_k$ uma subseqüência tal que

$$\lim_k \|P^{n_k}(g)\|_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|P^n(g)\|_1.$$

Defina $f_n = \text{sign}(P^n(g)) \in L_\infty$, temos então que

$$\begin{aligned} \|P^n(g)\|_1 &= \int |P^n(g)| d\mu = \int f_n \cdot P^n(g) d\mu \\ &= \int (f_n \circ T^n) g d\mu. \end{aligned}$$

O teorema de representação de Riesz (2.9) garante que $f_n \circ T^n$ pode ser visto como um funcional de $L_1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Ou seja, podemos fazer a identificação $(L_1)^* \simeq L_\infty$. Sabemos pelo teorema de Banach-Alaoglu (2.10) que a bola fechada é compacta na topologia fraca*. Observe que $T^{-n-1}(\mathcal{B}) \subset T^{-n}(\mathcal{B})$, pois se $B \in T^{-n-1}(\mathcal{B})$ então $B = T^{-n-1}(A)$ com $A \in \mathcal{B}$. Podemos escrever $T^{-n-1}(A) = T^{-n}(T^{-1}(A))$. logo $B \in T^{-n}(\mathcal{B})$, pois sendo T mensurável, $T^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Logo

$$L_1(X, T^{-n-1}(\mathcal{B}), \mu)^* \subset L_1(X, T^{-n}(\mathcal{B}), \mu)^*.$$

Para cada $J \in \mathbb{N}$ defina

$$G_J = \{f \in L_1(X, T^{-n_k}(\mathcal{B}), \mu)^* : f \text{ é ponto de acumulação de } (f_{n_k} \circ T^{n_k})_{k \geq J}\}.$$

Observe que G_J é compacto, não-vazio e $G_{J+1} \subset G_J$. Logo, sendo uma seqüência encaixada de compactos não-vazios, segue que

$$\bigcap_{J \in \mathbb{N}} G_J \neq \emptyset.$$

seja $f \in G_J$. Como $L_1(X, T^{-n_k}(\mathcal{B}), \mu)^* \simeq L_\infty(X, T^{-n_k}(\mathcal{B}), \mu)$, então f é mensurável com respeito a σ -álgebra caudal. Como T é exata, então f é constante μ -q.t.p. De fato, Seja $A_\alpha = (\alpha, +\infty)$ então $f^{-1}(A_\alpha)$ pertence a σ -álgebra caudal. Portanto $f^{-1}(A_\alpha)$ tem medida zero ou medida total. Defina

$$\alpha_0 = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(f^{-1}(A_\alpha)) = \mu(X)\}.$$

Por um argumento análogo ao da proposição 2.41 temos que

$$\{f = \alpha_0\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ f \leq \alpha_0 + \frac{1}{n} \right\} \setminus \bigcup_{n \geq 1} \left\{ f \leq \alpha_0 - \frac{1}{n} \right\} = X \quad \text{mod } \mu$$

Ou seja, $f = \alpha_0$ μ -q.t.p.. Desde que f é ponto de acumulação de $f_{n_k} \circ T^{n_k}$ então existe n_{k_l} tal que

$$\lim_l \int f_{n_{k_l}} \circ T^{n_{k_l}} \cdot g d\mu = \int f \cdot g d\mu.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_n \|P^n(g)\|_1 &= \lim_k \|P^{n_k}(g)\|_1 = \lim_l \int f_{n_{k_l}} \circ T^{n_{k_l}} \cdot g d\mu \\ &= \lim_l \int f_{n_{k_l}} \circ T^{n_{k_l}} \cdot g d\mu = \int f g d\mu = c \int g d\mu = 0, \end{aligned}$$

portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P^n(f)\|_1 = 0$.

(\Leftarrow) Se T não fosse exata, existiria $A \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(\mathcal{B})$ tal que

$$\mu(A) > 0 \quad \text{e} \quad \mu(X \setminus A) > 0.$$

Como X é σ -finito, então podemos assumir que ambos os conjuntos tem medida finita. Chame por simplicidade $B = X \setminus A$. Definimos então $g = \mathbf{1}_A - \frac{\mu(A)}{\mu(B)} \mathbf{1}_B$. Note que $\int g d\mu = 0$. Como $A \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(\mathcal{B})$ então existem $A_n \in \mathcal{B}$ tal que $T^{-n}(A_n) = A$. Daí

$$\begin{aligned} \|P^n(g)\|_1 &\geq \int_{A_n} |P^n(g)| d\mu \geq \int_{A_n} P^n(g) d\mu = \int \mathbf{1}_{A_n} P^n(g) d\mu \\ &= \int (\mathbf{1}_{A_n} \circ T^n) g d\mu = \int \mathbf{1}_{T^{-n}(A)} g d\mu = \int_A g d\mu > 0. \end{aligned}$$

Contradizendo a hipótese. Isso conclui a prova do teorema. \square

Corolário 3.16. *Seja (X, \mathcal{B}, μ, T) um sistema dinâmico que preserva medida tal que $\mu(X) = 1$. Se T é exata, então T é mixing.*

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathcal{B}$. Queremos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

Note que $\mu(A \cap T^{-n}(B)) = \int \mathbf{1}_{T^{-n}(A) \cap B} d\mu = \int \mathbf{1}_{T^{-n}(A)} \mathbf{1}_B d\mu = \int \mathbf{1}_A \circ T^n \cdot \mathbf{1}_B d\mu$.

Escolhendo $g = \mathbf{1}_B - \mu(B)$ temos que $\int g d\mu = 0$. Estamos então nas condições do teorema de Lin.

Logo,

$$\begin{aligned} \int \mathbf{1}_A \circ T^n \cdot \mathbf{1}_B d\mu &= \int \mathbf{1}_A \circ T^n \cdot (\mathbf{1}_B - \mu(B)) d\mu + \int \mathbf{1}_A \circ T^n \cdot \mu(B) d\mu \\ &= \int \mathbf{1}_A \circ T^n \cdot g d\mu + \mu(B) \int \mathbf{1}_A \circ T^n d\mu \\ &= \int \mathbf{1}_A P^n(g) d\mu + \mu(B) \mu(T^{-n}(A)) = \int \mathbf{1}_A P^n(g) d\mu + \mu(B) \mu(A). \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$|\mu(A \cap T^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B)| = \left| \int \mathbf{1}_A P^n(g) d\mu \right| \leq \|P^n(g)\|_1 \rightarrow 0$$

Portanto T é mixing. \square

4 Global Local Mixing

Vimos no capítulo anterior que T exata implica T mixing se tivermos um espaço de probabilidade. Porém, se for $\mu(X) = \infty$ então para quaisquer conjuntos mensuráveis A, B com medida finita temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{-n}(B)) = 0.$$

Marco Lenci propôs em [1] uma nova definição que busca generalizar a noção de mixing para espaços com medida infinita. Vamos a algumas definições .

Definição 4.1. *Seja $F \in L_\infty(\mathbb{R}, m)$ é chamado um observável global se existe o limite*

$$\bar{m}(F) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a F dm. \quad (4.1)$$

$\bar{m}(F)$ é chamado de volume médio infinito.

Definição 4.2. *Qualquer $g \in L_1(\mathbb{R}, m)$ é chamado um observável local.*

Usaremos a notação padrão $m(f) = \int f dm$.

Definição 4.3. *Dizemos que um mapa $T : (\mathbb{R}, m) \rightarrow (\mathbb{R}, m)$ é dito ser Global-Local Mixing se para todo observável global F e observável local g tivermos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m((F \circ T^n) \cdot g) = \bar{m}(F)m(g). \quad (4.2)$$

Teorema 4.4. *O mapa de Boole é Global-Local Mixing com respeito à medida de Lebesgue m .*

Para provar esse teorema, vamos a alguns lemas iniciais.

Lema 4.5. *Seja T exata e F um observável global. Se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m((F \circ T^n) \cdot g) = \bar{m}(F)m(g).$$

vale para um observável local g_0 com $m(g_0) \neq 0$ então vale para todo observável local.

Demonstração. Seja g_0 onde vale (4.2) e g qualquer outro observável local. Defina $h = g - \frac{m(g)}{m(g_0)}g_0$. Nesse caso, $m(h) = 0$, logo estamos nas condições do teorema de Lin.

$$\begin{aligned} m((F \circ T^n)g) &= m\left((F \circ T^n) \cdot \left(g - \frac{m(g)}{m(g_0)}g_0\right)\right) + m\left((F \circ T^n) \cdot \left(\frac{m(g)}{m(g_0)}g_0\right)\right) \\ &= m((F \circ T^n) \cdot h) + \frac{m(g)}{m(g_0)}m((F \circ T^n)g_0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Note que pelo teorema de Lin (3.15), desde que T é exata,

$$\begin{aligned} |m((F \circ T^n) \cdot h)| &= \left| \int F \circ T^n h dm \right| \\ &= \left| \int F \cdot P^n(h) dm \right| \leq \|f\|_\infty \|P^n(g)\|_1 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Portanto,

$$\lim m((F \circ T^n)g) = \lim \frac{m(g)}{m(g_0)} m((F \circ T^n)g_0) = \frac{m(g)}{m(g_0)} \overline{m}(F)m(g_0) = \overline{m}(F)m(g).$$

□

Lema 4.6. *Seja T exata e $F \in L_\infty$. Se para algum $l \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \geq 0$ vale que*

$$\limsup \left| \frac{\mu((F \circ T^n)g)}{\mu(g)} - l \right| \leq \varepsilon$$

vale para algum $g_0 \in L_1$ com $\mu(g_0) \neq 0$ então vale para todo $g \in L_1$ com $\mu(g) \neq 0$.

Demonstração. A Prova é completamente análoga a do lema anterior. □

Lema 4.7. *Seja $T : X \rightarrow X$ exata em um espaço σ -finito com $\mu(X) = +\infty$ então para quaisquer $f \in L_\infty \cap L_1$ e $g \in L_1$ vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu((f \circ T^n) \cdot g) = 0.$$

Demonstração. Como o espaço é σ -finito, então dado $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $\|f\|_1/\varepsilon < \mu(A) < \infty$. Defina $g_\varepsilon = \frac{\mathbf{1}_A}{\mu(A)}$, nós temos então

$$\left| \frac{\mu((f \circ T^n)g_\varepsilon)}{\mu(g_\varepsilon)} \right| = |\mu((f \circ T^n)g_\varepsilon)| \leq \|f\|_1 \|g_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$$

e pelo lema anterior, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu((f \circ T^n) \cdot g) \leq \varepsilon \quad \text{vale para todo } g \in L_1$$

e como ε é arbitrário segue o resultado. □

Usando (??) o operador de transferência do mapa de Boole tem sua forma analítica expressa da seguinte forma

$$P(g)(x) = |\phi'_+(x)|g(\phi_+(x)) + |\phi'_-(x)|g(\phi_-(x)),$$

onde ϕ_+ e ϕ_- são os ramos inversos de T .

$$\phi_\pm(x) = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + 1} \quad \text{e} \quad \phi'_\pm(x) = \frac{1}{2} \pm \frac{x}{4\sqrt{\frac{x^2}{4} + 1}}.$$

Note que

$$\phi_-(x) = -\phi_+(-x) \quad \text{e} \quad \phi'_-(x) = \phi'_+(-x).$$

Daí, se g for par, teremos

$$P(g)(x) = \phi'_+(x)g(\phi_+(x)) + \phi'_+(-x)g(\phi_+(-x)).$$

Consideremos um mapa genérico $S : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que é Markov e C^3 por partes com respeito à partição $I_0 = [a, \infty)$, $I_1 = (0, a]$ que satisfaz as seguintes propriedades :

$$(H1) \quad S(I_0) = S(I_1) = \mathbb{R}^+;$$

$$(H2) \quad \forall x \in I_0, S'(x) \rightarrow 1 \text{ quando } x \rightarrow \infty; \forall x \in I_1, S'(x) < -1;$$

(H3) S preserva a medida de Lebesgue m .

Denote $\varphi_0 = (S_{I_0})^{-1}$ e $\varphi_1 = (S_{I_1})^{-1}$.

O operador de transferência pode ser escrito então como

$$Lg(x) = \varphi'_0(x)g(\varphi_0(x)) - \varphi'_1(x)g(\varphi_1(x)). \quad (4.5)$$

(H3) é equivalente a

$$(H3') \quad \forall x \geq 0, \varphi'_0(x) - \varphi'_1(x) = 1.$$

Note que (H3') implica que

$$\varphi''_0(x) = \varphi''_1(x) \quad \text{e} \quad \varphi'''_0(x) = \varphi'''_1(x).$$

Assumimos que vale também (H4):

$$i. \quad \forall x \in \mathbb{R}, 1 + 2\varphi'_1(x) > 0$$

$$ii. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \varphi''_1(x) - (\varphi'_1(x))^2 > 0$$

iii. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ uma das seguintes coisas é válida

$$a) \quad \varphi'''_1(x) + \varphi''_1(x) > 0 \text{ e } 3\varphi''_1(x) - (\varphi'_1(x))^2 + \varphi'_1(x) > 0 \text{ ou}$$

$$b) \quad \varphi'''_1(x) + \varphi''_1(x) - (\varphi'_1(x))^2 > 0.$$

Lema 4.8. *Seja S um mapa C^3 por partes com respeito a uma partição $I_0 = [a, +\infty)$, $I_1 = (0, a]$ e assumamos que vale (H1)-(H4). Então*

$$\mathcal{F} = \{g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : g \in C^2, g > 0, g' < 0, g'' + g' < 0\}$$

é invariante por L .

Demonstração. Precisamos mostrar que dada $g \in \mathcal{F}$, valem as seguintes afirmações:

1. $Lg \in C^2$;
2. $Lg > 0$;
3. $(Lg)' < 0$;
4. $(Lg)'' + (Lg)' < 0$.

Como $Lg(x) = \varphi_0'(x)g(\varphi_0(x)) - \varphi_1'(x)g(\varphi_1(x))$ e $g \in C^2$ então $Lg \in C^2$ e (1) fica provado. (2) segue do fato de que $\varphi_0' > 0$ e $\varphi_1' < 0$ e $g > 0$. Pela fórmula do operador em (4.5) temos

$$(Lg)'(x) = \varphi_0''(x)g(\varphi_0(x)) + (\varphi_0'(x))^2 g'(\varphi_0(x)) - \varphi_1''(x)g(\varphi_1(x)) - (\varphi_1'(x))^2 g'(\varphi_1(x)). \quad (4.6)$$

Desde que $\varphi_0''(x) = \varphi_1''(x)$, $\varphi_0'(x) - \varphi_1'(x) = 1$, e usando o teorema fundamental do cálculo (TFC) nós podemos reescrever (4.6) como

$$\begin{aligned} (Lg)'(x) &= \varphi_1''(x) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_0(x)} g'(t)dt + (1 + \varphi_1(x)')^2 g'(\varphi_0(x)) - (\varphi_1'(x))^2 g'(\varphi_1(x)) \\ &= \varphi_1''(x) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_0(x)} g'(t)dt + (\varphi_1'(x))^2 [g'(\varphi_0(x)) - g'(\varphi_1(x))] + (1 + 2\varphi_1'(x))g'(\varphi_0(x)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Mais uma vez usando o TFC, (4.7) vira

$$Lg'(x) = \varphi_1''(x) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_0(x)} g'(t)dt + (\varphi_1'(x))^2 \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_0(x)} g''(t)dt + (1 + 2\varphi_1'(x))g'(\varphi_0(x)). \quad (4.8)$$

Desde que $g \in \mathcal{F}$ então $g'' + g' < 0$ e logo $g'' < -g'$. Logo temos que (4.8) implica em

$$Lg'(x) < (\varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_0(x)} g'(t)dt + (1 + 2\varphi_1'(x))g'(\varphi_0(x)). \quad (4.9)$$

Usando que $g' < 0$ e (H4)(iii) segue que $Lg' < 0$.

Nos resta mostrar que $(Lg)'' + (Lg)' < 0$. Para tal, note que derivando (4.6) obtemos

$$\begin{aligned} Lg''(x) &= \varphi_0'''(x)g(\varphi_0(x)) + \varphi_0''(x)g'(\varphi_0(x))\varphi_0'(x) \\ &+ 2\varphi_0'(x)\varphi_0''(x)g'(\varphi_0(x)) + (\varphi_0'(x))^3 g''(\varphi_0(x)) \\ &- \varphi_1'''(x)g(\varphi_1(x)) - \varphi_1''(x)g'(\varphi_1(x))\varphi_1'(x) \\ &- 2\varphi_1'(x)\varphi_1''(x)g'(\varphi_1(x)) - (\varphi_1'(x))^3 g''(\varphi_1(x)) \\ &= \varphi_1'''(x) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_0(x)} g'(t)dt + 3\varphi_0''(x)\varphi_0'(x)g'(\varphi_0(x)) - 3\varphi_1''(x)\varphi_1'(x)g'(\varphi_1(x)) \\ &+ (\varphi_0'(x))^3 g''(\varphi_0(x)) - (\varphi_1'(x))^3 g''(\varphi_1(x)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(Lg)'(x) + (Lg)''(x) &= (\varphi_1''(x) + \varphi_1'''(x)) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_0(x)} g'(t) dt + \\
&+ g'(\varphi_0(x)) [3\varphi_1''(x)\varphi_0'(x) + (\varphi_0'(x))^2] + (\varphi_0'(x))^3 g''(\varphi_0(x)) \\
&- g'(\varphi_1(x)) [3\varphi_1''(x)\varphi_1'(x) + (\varphi_1'(x))^2] - (\varphi_1'(x))^3 g''(\varphi_1(x)).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Desde que $g'' < -g'$ então

$$\begin{aligned}
(Lg)'(x) + (Lg)''(x) &< (\varphi_1''(x) + \varphi_1'''(x)) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_0(x)} g'(t) dt \\
&+ g'(\varphi_0(x)) [3\varphi_1''(x)\varphi_0'(x) + (\varphi_0'(x))^2 - (\varphi_0'(x))^3] \\
&+ g'(\varphi_1(x)) [-3\varphi_1''(x)\varphi_1'(x) - (\varphi_1'(x))^2 + (\varphi_1'(x))^3].
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\tag{4.13}$$

Suponha primeiro que x satisfaz $(H4)(iii)(a)$. Vamos mostrar que as 3 parcelas acima são negativas. De fato, a primeira parcela é negativa pois $\varphi_1''(x) + \varphi_1'''(x) > 0$ e $g' < 0$. Perceba agora que a segunda parcela é

$$g'(\varphi_0(x))\varphi_0'(x) [3\varphi_1''(x) + \varphi_0'(x) - (\varphi_0'(x))^2] \tag{4.14}$$

olhando só para o fator dentro do colchete temos

$$\begin{aligned}
3\varphi_1''(x) + \varphi_0'(x) - (\varphi_0'(x))^2 &= 3\varphi_1''(x) + 1 + \varphi_1'(x) - (1 + \varphi_1'(x))^2 \\
&= 3\varphi_1''(x) - \varphi_1'(x)^2 - \varphi_1'(x)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

e como estamos supondo $(H4)(a)$ então vale $3\varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2 + \varphi_1'(x) > 0$ e assim

$$3\varphi_1''(x) - \varphi_1'(x)^2 - \varphi_1'(x) > -2\varphi_1'(x). \tag{4.16}$$

Como $\varphi_0'(x) > 0$ e $g' < 0$ então

$$g'(\varphi_0(x))\varphi_0'(x) [3\varphi_1''(x) + \varphi_0'(x) - (\varphi_0'(x))^2] < -2\varphi_1'(x)\varphi_0'(x)g'(\varphi_0(x)). \tag{4.17}$$

Como $\varphi_0'(x) > 0$, $\varphi_1'(x) < 0$ e $g' < 0$ então segue que $-2\varphi_1'(x)\varphi_0'(x)g'(\varphi_0(x)) < 0$. Isso prova que a segunda parcela é negativa. Nos resta a terceira parcela. De forma análoga, temos

$$g'(\varphi_1(x))\varphi_1'(x) [-3\varphi_1''(x) - \varphi_1'(x) + (\varphi_1'(x))^2]. \tag{4.18}$$

Por $(H4)(a)$ vale que $-3\varphi_1''(x) - \varphi_1'(x) + (\varphi_1'(x))^2 < 0$. Como $\varphi_1'(x) < 0$ e $g' < 0$ segue o resultado. Sendo assim, $(Lg)'(x) + (Lg)''(x) < 0$ quando x satisfaz $(H4)(iii)(a)$. Pra finalizar, vamos mostrar

que vale a mesma conclusão se x satisfaz (H4)(iii)(b). Adicionando (4.8) a última expressão de (4.10) obtemos

$$\begin{aligned}
(Lg)'(x) + (Lg)''(x) &= (\varphi_1''(x) + \varphi_1'''(x)) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_0(x)} g'(t)dt + (\varphi_1'(x))^2 \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_0(x)} g''(t)dt \\
&+ 3\varphi_0''(x)\varphi_0'(x)g'(\varphi_0(x)) + (\varphi_0'(x))^3 g''(\varphi_0(x)) \\
&- 3\varphi_1''(x)\varphi_1'(x)g'(\varphi_1(x)) - (\varphi_1'(x))^3 g''(\varphi_1(x)) \\
&+ (1 + 2\varphi_1'(x))g'(\varphi_0(x)) \\
&< (\varphi_1''(x) + \varphi_1'''(x) - (\varphi_1'(x))^2) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_0(x)} g'(t)dt \\
&+ [3\varphi_1''(x)\varphi_0'(x) + 1 + 2\varphi_1'(x) - (\varphi_0'(x))^3] g'(\varphi_0(x)) \\
&+ [-3\varphi_1''(x)\varphi_1'(x) + (\varphi_1'(x))^3] g'(\varphi_1(x)). \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Vamos mostrar mais uma vez que cada uma das 3 parcelas é negativa. A primeira é negativa porque desde que estamos assumido que vale (H4)(iii)(b) então $\varphi_1''(x) + \varphi_1'''(x) - (\varphi_1'(x))^2 > 0$ e desde que $g' < 0$ então segue o resultado. Para a segunda parcela, note que

$$\begin{aligned}
3\varphi_1''(x)\varphi_0'(x) + 1 + 2\varphi_1'(x) - (\varphi_0'(x))^3 &= \varphi_0'(x) [3\varphi_1''(x) - (\varphi_0'(x))^2] + 1 + 2\varphi_1'(x) \\
&= \varphi_0'(x) [3\varphi_1''(x) - 1 - 2\varphi_1'(x) - (\varphi_1'(x))^2] + 1 + 2\varphi_1'(x) \\
&\quad \varphi_0'(x) [3\varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2] + (1 + 2\varphi_1'(x))(1 - \varphi_0'(x)). \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Como $\varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2 > 0$ então $3\varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2 > 2(\varphi_1'(x))^2 > 0$, portanto a primeira parcela dessa última expressão é positiva. A última parcela também é positiva pois por (H3)(i), $1 + 2\varphi_1'(x) > 0$ e desde que $\varphi_0'(x) < 1$, nós temos $1 - \varphi_0'(x) > 0$. Assim

$$3\varphi_1''(x)\varphi_0'(x) + 1 + 2\varphi_1'(x) - (\varphi_0'(x))^3 > 0$$

e como $g' < 0$ segue o resultado. A terceira parcela é negativa porque como $\varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2 > 0$ então $-3\varphi_1''(x) + (\varphi_1'(x))^2 > -2(\varphi_1'(x))^2$. Assim

$$\begin{aligned}
[-3\varphi_1''(x)\varphi_1'(x) + (\varphi_1'(x))^3] g'(\varphi_1(x)) &= [-3\varphi_1''(x) + (\varphi_1'(x))^2] g'(\varphi_1(x))\varphi_1'(x) \\
&< -2(\varphi_1'(x))^3 g'(\varphi_1(x)) < 0 \tag{4.21}
\end{aligned}$$

pois $\varphi_1', g' < 0$, portanto $(Lg)'(x) + (Lg)''(x) < 0$. Isso termina a prova do Lema. \square

Vamos justificar que o mapa de Boole T satisfaz tais propriedades. Na verdade, vamos definir um outro mapa que é essencialmente o mapa de Boole e que tem tais propriedades. Defina

$$\tilde{T} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

por

$$\tilde{T}(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x}, & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{x} - x, & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Vamos provar que \tilde{T} satisfaz as hipóteses do lema [\(4.8\)](#) acima.

\tilde{T} é C^3 por partes com respeito à partição $I_0 = [1, +\infty)$, $I_1 = (0, 1]$. Além disso, $\tilde{T}(I_0) = \tilde{T}(I_1) = \mathbb{R}^+$, e portanto vale (H1). Note também que as fórmulas para os ramos inversos e suas derivadas são dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, \varphi_1(x) = \frac{-x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \\ \varphi'_0(x) &= \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 4}}, \varphi'_1(x) = \frac{-1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 4}} \\ \varphi''_0(x) &= \frac{2}{(x^2 + 4)^{3/2}} = \varphi''_1(x) \\ \varphi'''_0(x) &= \frac{-6x}{(x^2 + 4)^{5/2}} = \varphi'''_1(x) \end{aligned}$$

Para ver que vale (H2), primeiramente note que $\varphi_0(0) = \varphi_0(1) = 1$ e desde que $0 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} < 1$ então $0 < \varphi'_0(x) < 1$ e $-1 < \varphi'_1(x) < 0$ e portanto vale (H2). (H3) claramente é satisfeita. Agora resta mostrar que vale (H4).

- (H4)(i) , $1 + \varphi'_1(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} > 0$.
- (H4)(ii) ,

$$\begin{aligned} \varphi''_1(x) - (\varphi'_1(x))^2 &= \frac{2}{(x^2 + 4)^{3/2}} - \left(\frac{-\sqrt{x^2 + 4} + x}{2\sqrt{x^2 + 4}} \right)^2 \\ &= \frac{2}{(x^2 + 4)^{3/2}} - \frac{(-\sqrt{x^2 + 4} + x)^2}{4\sqrt{x^2 + 4}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{x^2 + 4}} \left(\frac{8}{\sqrt{x^2 + 4}} - (-\sqrt{x^2 + 4} + x)^2 \right) \\ &= \frac{-1}{4\sqrt{x^2 + 4}} \left(-\sqrt{x^2 + 4} + x \right)^2 \sqrt{x^2 + 4} - 8 \right). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a expressão dentro dos parênteses é negativa. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(-\sqrt{x^2 + 4} + x \right)^2 \sqrt{x^2 + 4} - 8 &= \\ (3x\sqrt{x^2 + 4} - 3x^2 - 8) \frac{\sqrt{x^2 + 4} - x}{\sqrt{x^2 + 4}} &< 0. \end{aligned}$$

Onde essa última expressão é facilmente verificada. Daí $f(x) = (-\sqrt{x^2 + 4} + x)^2 \sqrt{x^2 + 4} - 8$ é decrescente e portanto para $x > 0$, $f(x) < f(0) = -8 < 0$. Sendo assim $\varphi''_1(x) - (\varphi'_1(x))^2 > 0$ o que acaba a prova desse item.

- (H4)(iii) Para checar esse item, definiremos alguns conjuntos.

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^+ : \varphi_1'''(x) + \varphi_1''(x) > 0\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}^+ : 3\varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2 + \varphi_1'(x) > 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^+ : \varphi_1'''(x) + \varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2 > 0\}.$$

(H4)(iii) É equivalente a mostrarmos que $(A_1 \cap A_2) \cup B = \mathbb{R}^+$. Note primeiramente que $x \in B \implies \varphi_1'''(x) + \varphi_1''(x) \geq \varphi_1'''(x) + \varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2 > 0 \implies x \in A_1 \implies B \subset A_1$. Afirmamos que $A_1 = \mathbb{R}^+$. De fato,

$$\begin{aligned} \varphi_1'''(x) + \varphi_1''(x) &= \frac{-6x}{(x^2 + 4)^{5/2}} + \frac{2}{(x^2 + 4)^{3/2}} \\ &= \frac{2}{(x^2 + 4)^{5/2}}(x^2 - 3x + 4) \\ &= \frac{2}{(x^2 + 4)^{5/2}}((x - 3/2)^2 + 7/4) > 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} 3\varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2 + \varphi_1'(x) &= \frac{6}{(x^2 + 4)^{3/2}} - \left(\frac{-\sqrt{x^2 + 4} + x}{2\sqrt{x^2 + 4}} \right)^2 + \frac{-\sqrt{x^2 + 4} + x}{2\sqrt{x^2 + 4}} \\ &= \frac{1}{4(x^2 + 4)^{3/2}} \left[24 - (-\sqrt{x^2 + 4} + x)^2 \sqrt{x^2 + 4} + 2(x^2 + 4)(-\sqrt{x^2 + 4} + x) \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Vamos denotar por $f(x) = 24 - (-\sqrt{x^2 + 4} + x)^2 \sqrt{x^2 + 4} + 2(x^2 + 4)(-\sqrt{x^2 + 4} + x)$. Notemos que $f(0) = 0$ e que (derivando a expressão) f cresce até $x_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}(7\sqrt{33} - 9)}$ e decresce daí por diante. Também vemos que $f(5) > 0$. Assim $3\varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2 + \varphi_1'(x) > 0$ em $(0, 5)$. Desde que $A_1 = \mathbb{R}^+$ então $(0, 5) \subset A_1 \cap A_2$. Vamos analisar agora o conjunto B .

$$\begin{aligned} \varphi_1'''(x) + \varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2 &= \frac{-6x}{(x^2 + 4)^{5/2}} + \frac{2}{(x^2 + 4)^{3/2}} - \left(\frac{-\sqrt{x^2 + 4} + x}{2\sqrt{x^2 + 4}} \right)^2 \\ &= \frac{-24x + 2(x^2 + 4)4 - (-\sqrt{x^2 + 4} + x)^2(x^2 + 4)^{3/2}}{4(x^2 + 4)^{5/2}} \\ &= \frac{1}{4(x^2 + 4)^{5/2}} \left[8x^2 - 24x + 32 - (x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}(2x^2 + 4 - 2x\sqrt{x^2 + 4}) \right] \\ &= \frac{1}{2(x^2 + 4)^{5/2}} \left[4x^2 - 12x + 16 - (x^2 + 4)(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 4} + x(x^2 + 4)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2(x^2 + 4)^{5/2}} \left[x^5 + 8x^3 + 4x^2 + 4x + 16 - \sqrt{x^2 + 4}(x^4 + 6x^2 + 8) \right]. \end{aligned}$$

Segue que $\lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi_1'''(x) + \varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2) = +\infty$. Veja também que $\varphi_1'''(x) + \varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2 = 0 \iff x^5 + 8x^3 + 4x^2 + 4x + 16 - \sqrt{x^2 + 4}(x^4 + 6x^2 + 8) = 0 \iff$

$p(x) = 2x^6 - 7x^5 + 24x^4 - 56x^3 + 72x^2 - 76x + 32 = 0$. Dividindo $p(x)$ por $x - 4$ temos

$$p(x) = (x - 4)(2x^5 + x^4 + 28x^3 + 36x^2 + 296x + 1108) + 4464$$

Vemos então que para $x > 4, p(x) > 0$ e portanto $(\varphi_1'''(x) + \varphi_1''(x) - (\varphi_1'(x))^2) > 0$. Assim, $(4, +\infty) \subset B$. Logo, $(A_1 \cap A_2) \cup B \supset (0, 5) \cup (4, +\infty) = \mathbb{R}^+$. Isso termina a prova.

Observando que se denotarmos por \tilde{P} o operador de transferência de \tilde{T} , vemos que \tilde{P} coincide essencialmente com P . Temos então o seguinte corolário.

Corolário 4.9. *Se $g \in L^1, C^2$, par, positiva e $g'(x) < 0, g''(x) + g'(x) < 0$ para $x > 0$ então Pg tem as mesmas propriedades. Portanto $P^n g$ também tem essas propriedades.*

Estamos prontos para provar o teorema.

Demonstração. (Do teorema (4.4))

Basta fazer o caso onde $\bar{m}(F) = 0$. Só tomar depois $F_1 = F - \bar{m}(F)$. Fixe $\varepsilon > 0$. Existe, portanto um $\bar{a} > 0$ tal que se $a \geq \bar{a}$ temos

$$\frac{1}{2a} \left| \int_{-a}^a F dm \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Defina $\gamma_n(x) = \min\{P^n(g)(\bar{a}), P^n(g)(x)\}$, γ_n satisfaz as seguintes propriedades:

- γ_n é positiva;
- γ_n é par;
- γ_n é constante em $[-\bar{a}, \bar{a}]$;
- γ_n é decrescente em $[\bar{a}, \infty)$.

Assim,

$$\begin{aligned} m(FP^n(g)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} FP^n(g) dm \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F\gamma_n dm + \int_{-\infty}^{+\infty} F(P^n(g) - \gamma_n) dm. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Agora note que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(P^n(g) - \gamma_n) dm = \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} F(P^n(g) - \gamma_n) dm$$

e

$$\int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} (P^n(g) - \gamma_n) dm \leq \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} P^n(g) dm = m(\mathbb{1}_{[-\bar{a}, \bar{a}]} P^n(g)).$$

portanto,

$$\left| \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} F(P^n(g) - \gamma_n) dm \right| \leq |f|_{\infty} m(\mathbb{1}_{[-\bar{a}, \bar{a}]} P^n(g)) \rightarrow 0,$$

pelo lema (4) já que $\mathbb{1}_{[-\bar{a}, \bar{a}]} \in L_{\infty} \cap L_1$.

Para a outra integral, chame de $a(r) = \gamma_n^{-1}(r)$, daí

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\gamma_n(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \int_0^{\gamma_n(x)} dr dx = \int_0^{\gamma_n(\bar{a})} \int_{-a(r)}^{a(r)} F(x) dr dx \\ &= \int_0^{\gamma_n(\bar{a})} \int_{-a(r)}^{a(r)} F(x) dx dr \end{aligned} \quad (4.25)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\gamma_n(x)dx \right| &\leq \int_0^{\gamma_n(\bar{a})} \left| \int_{-a(r)}^{a(r)} F(x) dx \right| dr \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{\gamma_n(\bar{a})} 2a(r) dr \leq \frac{\varepsilon}{2} m(\gamma_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Portanto, provamos que o mapa de Boole é Global-Local Mixing. \square

4.1 Pomeau-Manneville são Global-Local-Mixing

Nesta seção o objetivo é provar que a família de mapas de Pomeau-Manneville (vamos denotar no texto por PM) são Global-Local-Mixing. Definimos o mapa de Pomeau-Manneville como

$$T_{PM} : (0, 1] \rightarrow (0, 1] \quad \text{por} \quad T_{PM}(x) = x + x^{p+1} \pmod{1}, \quad p \geq 1. \quad (4.27)$$

Seja $\{a_n\}$ uma sequência (finita ou infinita) tal que $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k < \dots \leq 1$. Se a sequência é finita, denote por a_N o último elemento e $a_N = 1$. Se for infinita, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Denote por $I_j = (a_j, a_{j+1}]$. Seja $T : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ um mapa satisfazendo para todo j

(A1) $T|_{I_j}$ possui uma extensão contínua $\tau_j : [a_j, a_{j+1}] \rightarrow [0, 1]$ que é estritamente crescente, bijetiva e duas vezes diferenciável em (a_j, a_{j+1}) ;

(A2) Existe $k > 0$, $p \geq 1$ e $b_0 \in (0, a_1)$ tal que $\tau_0(x) = x + kx^{p+1} + o(x^{p+1})$, quando $x \rightarrow 0^+$ e τ é estritamente convexa em $[0, b_0]$. Isto implica em particular que $\tau'_0(0) = 1$ e $\tau'_0(x) > 1$, para $x \in (0, b_0)$;

(A3) Existe $\Lambda > 1$ tal que $T'(x) \geq \Lambda$ para todo $x \in [b_0, 1) \setminus \{a_j\}$;

(A4) Existe $K > 0$ tal que $\frac{|T''(x)|}{(T'(x))^2} \leq K$ para todo $x \in (0, 1) \setminus \{a_j\}$;

(A5) Seja $\varphi_j = \tau_j^{-1}$. Para todo J a função $\sum_{k \geq j} \left(\frac{\xi}{\varphi_k(\xi)} \right)^{p+1} \varphi'_k(\xi)$ é crescente.

Sobre as condições (A1) – (A4) acima, Thaler em [\[9\]](#) provou o seguinte resultado :

Teorema 4.10. *Seja $T : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ satisfazendo as condições (A1) – (A4) :*

1. T preserva uma medida infinita μ que é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue com densidade

$$h_\mu(x) = \frac{d\mu(x)}{dm} = \frac{H_\mu(x)}{x^p}$$

Onde H_μ é positiva e contínua em $[0, 1]$.

2. T é conservativo e exato.

Defina $\mathcal{G}((0, 1], \nu) := \left\{ F \in L_\infty((0, 1], \nu) \mid \exists \bar{\nu}(F) := \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{\nu[a, 1]} \int_a^1 F d\nu \right\}$. Igual fizemos na seção anterior para o mapa de Boole, F será chamado de observável global e $\bar{\nu}(F)$ é volume médio infinito de F e $f \in L_1((0, 1], \nu)$ será chamado de observável local.

Definição 4.11. Dada uma medida ν , um subconjunto $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}((0, 1], \nu)$ e $\mathcal{L} \subset L_1((0, 1], \nu)$ nós diremos que o mapa T é **Global-Local Mixing** com respeito a $\nu, \mathcal{G}, \mathcal{L}$ se para quaisquer $F \in \mathcal{G}$ e $g \in \mathcal{L}$ nós tivermos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu((F \circ T^n)g) = \bar{\nu}(F)\nu(g).$$

Se $\mathcal{G} = \mathcal{G}((0, 1], \nu)$ e $\mathcal{L} = L_1((0, 1], \nu)$ então T é dita ser **Totalmente Global-Local Mixing** com respeito a ν .

Observação 4.12. Seja ν uma medida infinita no zero. Então para todo $F \in \mathcal{G}((0, 1], \nu)$ e para todo $0 < b < 1$, vale que $\bar{\nu}(F) = \bar{\nu}(F\mathbb{1}_{(0,b]})$. Em particular, se ν_1 é absolutamente contínua com respeito à ν_2 e $\frac{d\nu_1}{d\nu_2}(x)$ tende a uma constante positiva quando $x \rightarrow 0^+$ então $\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2$.

Vamos introduzir agora uma medida que serve como auxiliar para provar o resultado principal. Para $p \geq 1$, Seja ν_p uma medida absolutamente contínua com respeito à Lebesgue definida pela densidade

$$h_{\nu_p} = \frac{d\nu_p}{dm} = \frac{1}{x^{p+1}}.$$

Teorema 4.13. Seja T satisfazendo (A1)-(A5). Então

- (a) T é Totalmente Global-Local Mixing relativamente a medida ν_p .

No que diz respeito a medida invariante μ , vale o seguinte:

1. Se $p > 1$, então T é Totalmente Global-Local Mixing relativamente a μ .
2. Se $p = 1$, então $\mathcal{G}((0, 1], \nu_1) \subsetneq \mathcal{G}((0, 1], \mu)$ com $\bar{\mu}(F) = \bar{\nu}_1(F)$ para todo $F \in \mathcal{G}((0, 1], \nu_1)$. Além disso, T é Global-Local Mixing com respeito a μ , $\mathcal{G}((0, 1], \nu_1)$ e $L_1((0, 1], \mu)$.

Nós iremos provar esse teorema mais para frente com o auxílio de um outro teorema. Para checar que um mapa satisfaz (A5) nós iremos mostrar que ele satisfaz a condição mais forte abaixo :

(A5)' Para todo j a função $\left(\frac{\tau_j(x)}{x}\right)^p \frac{1}{\tau_j'(x)}$ é crescente em (a_j, a_{j+1}) .

De fato, se vale (A5)' então como $x = \varphi_j(\xi)$ é crescente por (A1), temos então que $\left(\frac{\xi}{\varphi_k(\xi)}\right)^{p+1} \varphi_k'(\xi)$ é crescente como composição de funções crescentes e portanto $\sum_{k \geq j} \left(\frac{\xi}{\varphi_k(\xi)}\right)^{p+1} \varphi_k'(\xi)$ é crescente como soma de funções crescentes, sendo assim vale (A5). Vamos provar que o mapa de Pomeau-Manneville generalizado definido por $T(x) = x + kx^{p+1} \pmod 1$ onde $k \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$ um parâmetro real satisfaz (A1)-(A5). Em particular vale para o mapa introduzido em (4.27).

(A1) Há um único $x = a_j$ tal que $x + kx^{p+1} = j$. Nesse caso, $\tau_j(x) = x + kx^{p+1} - j$. que é claramente uma bijeção em $[a_j, a_{j+1}]$. Além do mais é crescente e duas vezes derivável;

(A2) Tomemos por simplicidade $b_0 = \frac{a_1}{2}$. Desde que $\tau_0'(x) = 1 + (p+1)kx^p$ então b_0 satisfaz o pedido;

(A3) $T'(x) = 1 + (p+1)kx^p \geq 1 + (p+1)kb_0^p = \Lambda$; se $x \in [b_0, 1]$

(A4) $\frac{T''(x)}{(T'(x))^2} = \frac{p(p+1)x^{p-1}}{(1+(p+1)x^p)^2} \frac{p(p+1)x^p}{1} \leq p(p+1) = K$;

(A5) Vamos verificar (A5)'. Ora,

$$g(x) = \left(\frac{\tau_j(x)}{x}\right)^{p+1} \frac{1}{\tau_j'(x)} = \frac{(1 + kx^p - jx^{-1})^{p+1}}{1 + k(p+1)x^p}.$$

Para mostrar que g é crescente, vamos provar que $\frac{d}{dz} \log(g(z)) > 0$ onde $z = kx^p$. Desde que \log é crescente seguirá que g é não decrescente.

Ora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \log(g(z)) &= \frac{d}{dz} \log\left(\frac{(1 + z - jk^{1/p}z^{-1/p})^{p+1}}{1 + (p+1)z}\right) \\ &= \frac{d}{dz}(p+1) \log(1 + z - jk^{1/p}z^{-1/p}) - \frac{d}{dz} \log(1 + (p+1)z) \\ &= (p+1) \frac{\frac{j}{p} k^{1/p} z^{-1-1/p}}{1 + z - jk^{1/p}z^{-1/p}} - (p+1) \frac{1}{1 + (p+1)z} \\ &= (p+1) \frac{pz + jk^{1/p}z^{-1/p}(z^{-1} + 2p+)}{(1 + z - jk^{1/p}z^{-1/p})(1 + (p+1)z)} > 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

para todo z tal que $1 + z - jk^{1/p}z^{-1/p} > 0$. Mas $1 + z - jk^{1/p}z^{-1/p} = x + kx^p - j > 0$ se $x > a_j$ o que é verdade. Portanto provamos que vale (A5)' e logo (A5). Isso mostra que o mapa de Pomeau-Manneville satisfaz tanto as hipóteses do teorema de Thaler quanto do teorema principal.

Iremos introduzir uma classe de mapas definidos em $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$. Para estes mapas nós iremos provar Totalmente Global-Local Mixing com respeito a uma certa medida. Provaremos que o teorema (4.14) implicará o teorema análogo definido no intervalo $(0, 1]$ (4.13). Vamos as definições precisas.

Seja $T : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Existe uma sequência de números $a_1 > a_2 > \dots > a_k > \dots \geq 0$. Se a sequência for finita, o seu último termo, digamos $a_N = 0$, se for infinita, $\lim a_n = 0$. Denote por $I_j = [a_{j+1}, a_j]$. Por convenção colocaremos $a_0 = +\infty$. Assuma que T satisfaz

(B1) Para cada j , a função $\tau_j = T|_{I_j} : I_j \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ é um difeomorfismo crescente;;

(B2) T é exata com respeito à medida de Lebesgue em \mathbb{R}_0^+ ;

(B3) Denotando por $\varphi_j = \tau_j^{-1}$. Para cada j a função $\sum_{k \geq j} \varphi'_k$ é decrescente.

Seja ν uma medida infinita em \mathbb{R}_0^+ . Em analogia ao que fizemos para mapas do intervalo $(0, 1]$, nós definimos a classe dos observáveis globais com respeito à medida ν como sendo

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \nu) := \left\{ F \in L_\infty(\mathbb{R}_0^+, \nu) \mid \exists \bar{\nu}(F) := \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\nu[0, a]} \int_0^a F d\nu \right\}.$$

De novo nós chamaremos de observável local as funções $f \in L_1(\mathbb{R}_0^+, \nu)$.

Para $0 < q \leq 1$ nós introduzimos uma medida λ_q que é absolutamente contínua com respeito à Lebesgue definida pela densidade (infinita)

$$h_{\lambda_q} = \frac{d\lambda_q}{dm} = \frac{1}{(1+y)^q}. \quad (4.29)$$

Seja $\Psi : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definido por

$$\Psi(x) = \int_x^1 h_{\nu_p}(\xi) d\xi = \int_x^1 \xi^{-p-1} d\xi = \frac{x^{-p} - 1}{p}.$$

Seja T satisfazendo (B1)-(B3). Temos então o seguinte teorema :

Teorema 4.14. *Seja T satisfazendo (B1)-(B3):*

- (a) T é Totalmente Global-Local Mixing relativamente à medida de Lebesgue m .
- (b) T é totalmente Global-Local Mixing com respeito a λ_q para todo $q \in (0, 1)$.
- (c) $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m) \subsetneq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_1)$ com $\bar{\lambda}_1(F) = \bar{m}(F)$ para todo $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$. Além disso, T é Totalmente Global-Local Mixing com respeito a $\lambda_1, \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m), L_1(\mathbb{R}_0^+, \lambda_1)$.

Nosso objetivo é provar este teorema, para tal vamos a uma série de lemas.

Lema 4.15. *Para $q \in (0, 1]$, $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m) \subset \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q)$ e $\bar{\lambda}_q(F) = \bar{m}(F)$, para todo $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$.*

Demonstração. Seja $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$. Suponha sem perda de generalidade que $\bar{m}(F) = 0$. Para mostrar que $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q)$, vamos mostrar então que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_q([0, a])} \int_0^a F d\lambda_q = 0 = \bar{m}(F) = 0.$$

Desde que $d\lambda_q = \frac{1}{(1+y)^q} dy$ então $\int_0^a F d\lambda_q = \int_0^a \frac{1}{(1+y)^q} dy$. Vamos fazer primeiro o caso em que $q \in (0, 1)$. Usando integração por partes, temos

$$\int_0^a \frac{1}{(1+y)^q} dy = (1+a)^{-q} \int_0^a F(y) dy + q \int_0^a \frac{(\int_0^y F(s) ds)}{(1+y)^{q+1}} dy \quad (4.30)$$

Fixe $\varepsilon > 0$, por definição de \bar{m} existe $M > 0$ tal que para todo $a > M$ temos que

$$\left| \int_0^a F(y) dy \right| < \varepsilon a. \quad (4.31)$$

Assim, para todo $a > M$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_q([0, a])} \int_0^a F d\lambda_q &= \frac{(1+a)^{-q}}{\lambda_q([0, a])} \int_0^a F(y) dy \\ &+ \frac{q}{\lambda_q([0, a])} \int_0^M \frac{(\int_0^y F(s) ds)}{(1+y)^{q+1}} dy \\ &+ \frac{q}{\lambda_q([0, a])} \int_M^a \frac{(\int_0^y F(s) ds)}{(1+y)^{q+1}} dy. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Note que

$$\begin{aligned} \lambda_q([0, a]) &= \int_0^a \frac{1}{(1+y)^q} dy \\ &= \frac{(1+y)^{1-q}}{1-q} \Big|_0^a = \frac{(1+a)^{1-q} - 1}{1-q}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Usando a equação (4.31) a primeira parcela da equação (4.32) fica

$$\begin{aligned} \frac{(1+a)^{-q}}{\lambda_q([0, a])} \left| \int_0^a F(y) dy \right| &\leq \frac{\varepsilon a (1+a)^{-q}}{\lambda_q([0, a])} \\ &\leq \varepsilon a (1+a)^{-q} \frac{(1-q)}{(1+a)^{1-q} - 1} \\ &= \varepsilon (1-q) \frac{a}{(1+a) - (1+a)^{-q}}. \end{aligned}$$

Mais uma vez por (4.31) temos que $|\int_0^y F(s) ds| \leq \varepsilon y$. Assim a terceira parcela de (4.32) fica

$$\begin{aligned} \frac{q}{\lambda_q([0, a])} \left| \int_M^a \frac{(\int_0^y F(s) ds)}{(1+y)^{q+1}} dy \right| &\leq \frac{q}{\lambda_q([0, a])} \int_M^a \frac{\varepsilon y}{(1+y)^{q+1}} dy \\ &\leq \frac{q\varepsilon}{\lambda_q([0, a])} \int_M^a \frac{1+y}{(1+y)^{q+1}} dy \\ &= \frac{q\varepsilon}{\lambda_q([0, a])} \int_M^a \frac{1}{(1+y)^q} dy \end{aligned} \quad (4.34)$$

Na segunda parcela de (4.32) chame de $c(F, M, q) = q(1-q) \int_0^M \frac{(\int_0^y F(s) ds)}{(1+y)^{q+1}} dy$ que é uma constante que não depende de a . Sendo assim,

$$\left| \frac{1}{\lambda_q([0, a])} \int_0^a F d\lambda_q \right| \leq \varepsilon (1-q) \frac{a}{(1+a) - (1+a)^{-q}} + \frac{c(F, M, q)}{(1+a)^{1-q} - 1} + \varepsilon q \frac{\lambda_q([M, a])}{\lambda_q([0, a])} \quad (4.35)$$

Desde que $q \in (0, 1)$ então $1 - q > 0$ e portanto $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{c(F, M, q)}{(1+a)^{1-q} - 1} = 0$. Por outro lado, desde que $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(1+a)^{-q}}{a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a(1+a)^q} = 0$ então $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{(1+a) - (1+a)^{-q}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a} + 1 - \frac{(1+a)^{-q}}{a}} = 1$.

Por fim, para a última parcela, note que

$$\lambda_q([M, a]) = \int_M^a \frac{1}{(1+y)^q} dy = \frac{(1+a)^{1-q} - (1+M)^{1-q}}{1-q}$$

e logo,

$$\frac{\lambda_q([M, a])}{\lambda_q([0, a])} = \frac{(1+a)^{1-q} - (1+M)^{1-q}}{1-q} \cdot \frac{1-q}{(1+a)^{1-q} - 1} = \frac{(1+a)^{1-q} - (1+M)^{1-q}}{(1+a)^{1-q} - 1}$$

que tende a 1 quando a vai pra infinito. Portanto

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\lambda_q([0, a])} \int_0^a F d\lambda_q \right| \leq \varepsilon(1-q) + \varepsilon q = \varepsilon. \quad (4.36)$$

Desde que ε foi arbitrário, provamos que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_q([0, a])} \int_0^a F d\lambda_q = 0 = \overline{m}(F).$$

Vamos agora ao caso $q = 1$, note que neste caso,

$$\lambda_1([0, a]) = \int_0^a \frac{1}{1+y} dy = \log(1+a). \quad (4.37)$$

Desde que $d\lambda_1 = \frac{1}{1+y} dy$ então $\int_0^a F d\lambda_1 = \int_0^a \frac{1}{1+y} F dy$. Usando integração por partes, temos

$$\int_0^a \frac{1}{1+y} F dy = (1+a)^{-1} \int_0^a F(y) dy + \int_0^a \frac{(\int_0^y F(s) ds)}{(1+y)^2} dy$$

e portanto, do mesmo modo que fizemos antes

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\lambda_1([0, a])} \int_0^a F d\lambda_1 \right| &= \frac{(1+a)^{-1}}{\lambda_1([0, a])} \int_0^a F(y) dy \\ &+ \frac{1}{\lambda_1([0, a])} \int_0^M \frac{(\int_0^y F(s) ds)}{(1+y)^2} dy \\ &+ \frac{1}{\lambda_1([0, a])} \int_M^a \frac{1}{1+y} dy. \\ &\leq \frac{\varepsilon a}{(1+a) \log(1+a)} + \frac{c(F, M)}{\log(1+a)} + \varepsilon \frac{\log(1+a) - \log(1+M)}{\log(1+a)}. \end{aligned}$$

A primeira e a segunda parcela tendem claramente para 0 quando a vai pra infinito. Enquanto que a terceira parcela tende para 1. Daí

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\lambda_1([0, a])} \int_0^a F d\lambda_1 \right| \leq \varepsilon. \quad (4.38)$$

Isso conclui a prova da proposição. \square

Lema 4.16. *Valem as seguintes coisas :*

(i) Para $q \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$;

(ii) Para qualquer $q_1 \in (0, 1)$ fixo, $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{q_2}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{q_1})$ qualquer que seja o $q_2 \in \left(q_1, \frac{1+q_1}{2}\right)$.

Demonstração. (i). Para mostrar (i) nós iremos mostrar a contrapositiva, ou seja, mostrar que se $F \notin \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$ então $F \notin \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q)$. Como $F \notin \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$ então

$$A = \limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_0^a F(y) dy > B = \liminf_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_0^a F(y) dy. \quad (4.39)$$

Existem portanto duas sequências σ_k e τ_k crescentes e divergentes tais que

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_k} \int_0^{\sigma_k} F(y) dy \text{ e } B = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_k} \int_0^{\tau_k} F(y) dy. \quad (4.40)$$

Fazendo $a = \sigma_k$ na equação (4.30) nós obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_q([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} F(y) \frac{1}{(1+y)^q} dy &= \frac{(1+\sigma_k)^{-q}}{\lambda_q([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} F(y) dy \\ &+ q \int_0^{\sigma_k} \frac{1}{(1+y)^{q+1}} \left(\int_0^y F(s) ds \right) dy. \end{aligned}$$

Desde que $\lambda_q([0, \sigma_k]) = \frac{(1+\sigma_k)^{1-q} - 1}{1-q}$ temos então que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_q([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} F d\lambda_q &= \frac{(1-q)(1+\sigma_k)^{-q}}{(1+\sigma_k)^{1-q} - 1} \int_0^{\sigma_k} F(y) dy \\ &+ \frac{q}{\lambda_q([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} \frac{1}{(1+y)^{q+1}} \left(\int_0^y F(s) ds \right) dy. \end{aligned}$$

Fixe $\varepsilon > 0$, por definição de limite em (4.40) existe $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq \bar{k}$ então

$$\frac{1}{\sigma_k} \int_0^{\sigma_k} F(y) dy > A - \varepsilon.$$

Por definição de lim inf em (4.39) existe \bar{y} tal que se $y > \bar{y}$ então

$$\frac{1}{y} \int_0^y F(s) ds > B - \varepsilon.$$

Desde que $\sigma_k \rightarrow \infty$ podemos achar um $K \geq \bar{k}$ tal que $\sigma_k < \bar{y}$ para todo $k \geq K$. Portanto, a primeira parcela de (4.41) fica

$$\frac{(1-q)(1+\sigma_k)^{-q}}{(1+\sigma_k)^{1-q} - 1} \int_0^{\sigma_k} F(y) dy > \frac{(1-q)(1+\sigma_k)^{-q}}{(1+\sigma_k)^{1-q} - 1} \sigma_k (A - \varepsilon). \quad (4.41)$$

e desde que $\int_0^y F(s)ds > (B - \varepsilon)y$ nós temos que a segunda parcela de (4.41) fica

$$\begin{aligned} \frac{q}{\lambda_q([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} \frac{1}{(1+y)^{q+1}} \left(\int_0^y F(s)ds \right) dy &> q \int_0^{\sigma_k} \frac{(B - \varepsilon)y}{(1+y)^{q+1}} \\ &= \frac{q}{\lambda_q([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} \frac{(B - \varepsilon)(y + 1 - 1)}{(1+y)^{q+1}} \\ &= \frac{q}{\lambda_q([0, \sigma_k])} \left[\int_0^{\sigma_k} \frac{B - \varepsilon}{(1+y)^q} dy - \int_0^{\sigma_k} \frac{B - \varepsilon}{(1+y)^{q+1}} dy \right] \\ &= q(B - \varepsilon) \left[1 - \frac{1}{\lambda_q([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} (1+y)^{-q-1} dy \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_q([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} F d\lambda_q &> \\ \frac{(1-q)(1+\sigma_k)^{-q}}{(1+\sigma_k)^{1-q} - 1} \sigma_k (A - \varepsilon) + q(B - \varepsilon) &\left[1 - \frac{1}{\lambda_q([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} (1+y)^{-q-1} dy \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Desde que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1+\sigma_k)^{-q}}{(1+\sigma_k)^{1-q} - 1} \sigma_k = 1$ (já fizemos uma conta dessa antes) e

$$\int_0^{\sigma_k} (1+y)^{-q-1} dy = \frac{1 - (\sigma_k)^{-q}}{q} = \frac{(1+\sigma_k)^q - 1}{q(1+\sigma_k)^q}.$$

Dai

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_q([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} (1+y)^{-q-1} dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q-1}{(1+\sigma_k)^q - 1} \cdot \frac{(1+\sigma_k)^q - 1}{q(1+\sigma_k)^q} = 0. \quad (4.44)$$

Logo,

$$A = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_k} \int_0^{\sigma_k} F(y)dy \geq (A - \varepsilon)(1 - q) + (B - \varepsilon)q = A(1 - q) + Bq - \varepsilon$$

e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_k} \int_0^{\sigma_k} F(y)dy \geq A(1 - q) + Bq.$$

Fazendo $a = \tau_k$ e usando um processo totalmente análogo nós obtemos

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_k} \int_0^{\tau_k} F(y)dy \geq B(1 - q) + Aq.$$

Agora observamos que como $q < \frac{1}{2}$, então $1 - q > q$ e como $A > B$ então $(A - B)(1 - q) > (A - B)q$ e jogando pro outro lado temos que $A(1 - q) + Bq > B(1 - q) + Aq$. Sendo assim

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_k} \int_0^{\sigma_k} F(y)dy &\geq A(1 - q) + Bq \\ &> B(1 - q) + Aq \\ &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_k} \int_0^{\tau_k} F(y)dy. \end{aligned}$$

Isso mostra que não existe

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_q([0, a])} \int_0^a F d\lambda_q$$

e portanto $F \notin \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q)$. Assim terminamos a prova do item (i). Nós iremos usar um argumento bem parecido para mostrar (ii). Seja $F \in L_\infty(\mathbb{R}_0^+)$ com $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{q_1})$ isto significa que

$$A = \limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{q_1}([0, a])} \int_0^a F d\lambda_{q_1} > B = \liminf_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{q_1}([0, a])} \int_0^a F d\lambda_{q_1}.$$

O que implica que existem duas seqüências $\{\sigma_k\}$ e $\{\tau_k\}$ crescentes e divergentes tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{q_1}([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} F d\lambda_{q_1} = A, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{q_1}([0, \tau_k])} \int_0^{\tau_k} F d\lambda_{q_1} = B.$$

Veja que

$$\int_0^a F d\lambda_{q_2} = \int_0^a F(y) \frac{1}{(1+y)^{q_2}} dy.$$

Fazendo $u = (1+y)^{-q_2+q_1}$ e $dv = \frac{F}{(1+y)^{q_1}} dy$ temos pela fórmula de integração por partes que

$$\int_0^a F(y) \frac{1}{(1+y)^{q_2}} dy = (1+a)^{q_1-q_2} \int_0^a \frac{F(y)}{(1+y)^{q_1}} dy + (q_2-q_1) \int_0^a \frac{1}{(1+y)^{q_2-q_1+1}} \left(\int_0^y \frac{F(s)}{(1+s)^{q_1}} ds \right) dy$$

Usando que

$$\lambda_{q_i} = \frac{(1+a)^{1-q_i} - 1}{1-q_i},$$

então

$$\begin{aligned} (1+a)^{q_1-q_2} \int_0^a \frac{F(y)}{(1+y)^{q_1}} dy &= (1+a)^{q_1-q_2} \cdot \frac{1}{\lambda_{q_2}([0, a])} \cdot \lambda_{q_1}([0, a]) \frac{1}{\lambda_{q_1}([0, a])} \int_0^a \frac{F(y)}{(1+y)^{q_1}} dy \\ &= (1+a)^{q_1-q_2} \cdot \frac{1-q_2}{(1+a)^{1-q_2}-1} \cdot \frac{(1+a)^{1-q_1}-1}{1-q_1} \cdot \frac{1}{\lambda_{q_1}([0, a])} \int_0^a F d\lambda_{q_1} \\ &= \frac{1-q_2}{1-q_1} \cdot \frac{(1+a)^{1-q_2} - (1+a)^{q_1-q_2}}{(1+a)^{1-q_2}-1} \cdot \frac{1}{\lambda_{q_1}([0, a])} \int_0^a F d\lambda_{q_1}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_{q_2}([0, a])} \int_0^a F d\lambda_{q_2} &= \frac{1-q_2}{1-q_1} \cdot \frac{(1+a)^{1-q_2} - (1+a)^{q_1-q_2}}{(1+a)^{1-q_2}-1} \cdot \frac{1}{\lambda_{q_1}([0, a])} \int_0^a F d\lambda_{q_1} \\ &+ \frac{q_2-q_1}{\lambda_{q_2}([0, a])} \int_0^a \frac{1}{(1+y)^{q_2-q_1+1}} \left(\int_0^y \frac{F(s)}{(1+s)^{q_1}} ds \right) dy. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Fazendo $a = \sigma_k$ e repetindo um processo análogo ao do item (i) concluímos que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{q_2}([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} F d\lambda_{q_2} \geq \frac{(A-\varepsilon)(1-q_2) + (B-\varepsilon)(q_2-q_1)}{1-q_1} \quad (4.46)$$

e fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ temos

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{q_2}([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} F d\lambda_{q_2} \geq \frac{A(1-q_2) + B(q_2-q_1)}{1-q_1}. \quad (4.47)$$

Fazendo $a = \tau_k$ obteremos

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{q_2}([0, \tau_k])} \int_0^{\tau_k} F d\lambda_{q_2} \leq \frac{A(1 - q_2) + B(q_2 - q_1)}{1 - q_1}. \quad (4.48)$$

Análogo ao que fizemos no item (i) é possível mostrar que

$$\frac{A(1 - q_2) + B(q_2 - q_1)}{1 - q_1} > \frac{A(1 - q_2) + B(q_2 - q_1)}{1 - q_1}.$$

Basta usar que $q_2 \in \left(q_1, \frac{q_1 + 1}{2}\right)$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{q_2}([0, \sigma_k])} \int_0^{\sigma_k} F d\lambda_{q_2} &\geq \frac{A(1 - q_2) + B(q_2 - q_1)}{1 - q_1} \\ &> \frac{A(1 - q_2) + B(q_2 - q_1)}{1 - q_1} \\ &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{q_2}([0, \tau_k])} \int_0^{\tau_k} F d\lambda_{q_2} \end{aligned} \quad (4.49)$$

e portanto não existe

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{q_2}([0, a])} \int_0^a F d\lambda_{q_2}.$$

Portanto $F \notin \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{q_2})$ o que termina a prova de (ii). \square

Lema 4.17. (a) Para $q \in (0, 1)$, $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q) = \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$ e $\bar{\lambda}_q(F) = \bar{m}(F)$ para todo $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q)$.

(b) $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m) \subsetneq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_1)$ e $\bar{\lambda}_1(F) = \bar{m}(F)$ para todo $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$.

Demonstração. (De (a)). Seja $q \in (0, 1)$. A inclusão $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m) \subset \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q)$ e a igualdade $\bar{\lambda}_q(F) = \bar{m}(F)$ para todo $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$ já foram feitas na proposição (4.15). Resta-nos provar que $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q) \subset \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$. Se $q \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ também já fizemos na proposição (4.16) item (i). Vamos provar agora o caso $q \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Primeiramente note que

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right) = \bigcup_{n \geq 1} \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Chamemos de $A_n = \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. Vamos mostrar indutivamente que se $q \in A_n$ então $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q) \subset \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$. Isso acabará a prova do item (a). Para $n = 1$, $A_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. Primeiramente vamos mostrar para $q = \frac{1}{2}$. Escolha $q_1 = \frac{1}{4}$. Daí $\frac{1}{2} \in \left(q_1, \frac{q_1 + 1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{8}\right)$. Logo pela proposição (4.16) temos que $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{1/2}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{1/4})$. Desde que $1/4 \in (0, 1/2)$ então $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{1/4}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$. Sendo assim, $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{1/2}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$. Agora seja $q \in (1/2, 3/4)$. Escolha $q_1 = 1/2$ então pela proposição (4.16) vale que

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{1/2}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m).$$

Para $n = 2$, $A_2 = \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$. Se $q = \frac{3}{4}$ então escolha $q_1 = \frac{5}{8}$ daí como $\frac{3}{4} \in \left(\frac{5}{8}, \frac{13}{16}\right)$ então $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{3/4}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{5/8})$ e como $5/8 \in A_1$ temos que $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{3/4}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{5/8}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$. Agora seja $q \in (3/4, 7/8)$. Escolhendo $q_1 = \frac{3}{4}$ temos que $q \in \left(q_1, \frac{q_1 + 1}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$. Daí pela proposição (4.16) vale que

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{3/4}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m).$$

Suponha agora que tenhamos feito para A_1, \dots, A_{k-1} . Vamos mostrar para $A_k = \left[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$. Primeiramente façamos para $q = 1 - \frac{1}{2^k}$. Escolha $q_1 = 1 - \frac{3}{2^{k+1}}$, Daí $\left(q_1, \frac{q_1 + 1}{2}\right) = \left(1 - \frac{3}{2^{k+1}}, 1 - \frac{3}{2^{k+2}}\right)$. Note que $1 - \frac{1}{2^k} \in \left(1 - \frac{3}{2^{k+1}}, 1 - \frac{3}{2^{k+2}}\right)$. De fato,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{3}{2^{k+1}} < 1 - \frac{1}{2^k} < 1 - \frac{3}{2^{k+2}} &\iff \frac{2^{k+1} - 3}{2^{k+1}} < \frac{2^k - 1}{2^k} < \frac{2^{k+2} - 3}{2^{k+2}} \\ &\iff 2^{k+2} - 6 < 2^{k+2} - 4 < 2^{k+2} - 3 \end{aligned}$$

que é verdade. Pela proposição (4.16) vale que $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{1-2^{-k}}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{1-3 \cdot 2^{-k-1}})$. Desde que $q_1 \in A_{k-1}$ então $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{1-2^{-k}}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{1-3 \cdot 2^{-k-1}}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$. Por fim seja $q \in \left(1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$. Tomando $q_1 = 1 - \frac{1}{2^k}$ temos que

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_{1-2^{-k}}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m).$$

A indução está concluída assim. Portanto vale para todo $q \in (0, 1)$. Isso acaba a prova do item (a).

Para (b) primeiro veja que o fato de que $\mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_1)$ e $\bar{\lambda}_1(F) = \bar{m}(F)$ foram provados em (4.15). Resta mostrar que a inclusão é estrita. Ou seja, existe $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_1) \setminus \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$. Defina para $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = k^k - 1$ e $\beta_k = 2k^k - 1$. $\alpha_k < \beta_k < \alpha_{k+1}$. $\alpha_k < \beta_k$ é óbvio. Agora para a outra desigualdade, desde $k \geq 1$ então $k + 1 \geq 2$ e portanto

$$(k + 1)^{k+1} = (k + 1)(k + 1)^k \geq 2k^k \Rightarrow \beta_k < \alpha_{k+1}.$$

Defina $F : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ por

$$F(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in [\alpha_k, \beta_k) \\ 0, & \text{se } y \in [\beta_k, \alpha_{k+1}). \end{cases}$$

Vamos mostrar que $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_1)$ por mostrar que

$$\bar{\lambda}_1(F) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1([0, a])} \int_0^a F(y) \frac{1}{1+y} dy = 0.$$

Fazendo $a = \alpha_n$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_1([0, \alpha_n])} \int_0^{\alpha_n} F(y) \frac{1}{1+y} dy &= \frac{1}{\log(1 + \alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} F(y) \frac{1}{1+y} dy = \\
&= \frac{1}{\log(1 + \alpha_n)} \sum_{k=1}^{n-1} \left[\int_{\alpha_k}^{\beta_k} F(y) \frac{1}{1+y} dy + \int_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} F(y) \frac{1}{1+y} dy \right] \\
&= \frac{1}{\log(1 + \alpha_n)} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{1}{1+y} dy = \frac{1}{\log(1 + \alpha_n)} \sum_{k=1}^{n-1} \log \left(\frac{1 + \beta_k}{1 + \alpha_k} \right) \\
&= \frac{1}{n \log(n)} \sum_{k=1}^{n-1} \log(2) = \frac{n-1}{n} \frac{\log(2)}{\log(n)} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, fazendo $a = \beta_n$ nós temos

$$\frac{1}{\lambda_1([0, \beta_n])} \int_0^{\beta_n} F(y) \frac{1}{1+y} dy = \frac{n \log(2)}{\log(2) + n \log(n)} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, usando a monotonicidade do log e da integral temos que

$$\text{se } a \in (\alpha_n, \beta_n) \text{ tem-se } \frac{1}{\lambda_1([0, a])} \int_0^a F(y) \frac{1}{1+y} dy \leq \frac{1}{\lambda_1([0, \beta_n])} \int_0^{\alpha_{n+1}} F(y) \frac{1}{1+y} dy$$

$$\text{se } a \in (\beta_n, \alpha_{n+1}) \text{ tem-se } \frac{1}{\lambda_1([0, a])} \int_0^a F(y) \frac{1}{1+y} dy \leq \frac{1}{\lambda_1([0, \beta_n])} \int_0^{\alpha_{n+1}} F(y) \frac{1}{1+y} dy.$$

Desde que $\lambda_1([0, \alpha_n]) \sim \lambda_1([0, \alpha_{n+1}]) \sim \lambda_1([0, \beta])$ então $\bar{\lambda}_1(F) = 0$ o que mostra que $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_1)$.

Provemos agora que $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$. Vamos mostrar que não existe

$$\bar{m}(F) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_0^a F(y) dy.$$

Para tal, seja $a = \alpha_n$, então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\alpha_n} F(y) dy &= \frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} dy = \frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=1}^{n-1} (\beta_k - \alpha_k) \\
&= \frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=1}^{n-1} k^k \leq \frac{1}{n^n - 1} \sum_{k=1}^{n-1} n^k \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $a = \beta_n$ nós teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta_n} \int_0^{\beta_n} F(y) dy &= \frac{1}{2n^n - 1} \sum_{k=1}^n k^k \\
&= \frac{n^n}{2n^n - 1} + \frac{1}{2n^n - 1} \sum_{k=1}^{n-1} k^k \geq \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

o que mostra que não existe $\bar{m}(F)$ e portanto $F \in \mathcal{G}(R_0^+, m)$ e isso encerra a prova do lema. \square

Vamos agora a um último lema análogo ao lema [\(4.9\)](#) que apareceu na prova quando fomos mostrar que o mapa de Boole era Global-Local Mixing.

Lema 4.18. *Se $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ é integrável e não-decrescente então Pg também o é. Ou seja, P preserva o cone das funções decrescentes.*

Demonstração. O cone mencionado acima é gerado por combinações lineares finitas de funções do tipo $\mathbb{1}_{[0,a]}$ com $a > 0$. Portanto é suficiente provarmos para $g = \mathbb{1}_{[0,a]}$. Seja j o único índice tal que $a \in I_j$ e chame de $b := \tau_j(a)$. Daí, pela fórmula analítica do operador de transferência temos

$$Pg(y) = \begin{cases} \sum_{k \geq j} \varphi'_k(y), & \text{se } y < b; \\ \sum_{k \geq j+1} \varphi'_k(y), & \text{se } y \geq b. \end{cases}$$

Pg pois vale (B3) e o gap entre eles é $-\varphi'_j(b)$ que é negativo por (B1). Isso encerra então a prova do lema. Vamos agora a prova do teorema. \square

Demonstração. (Do item (a))

Basta fazer o caso onde $\bar{m}(F) = 0$. Só tomar depois $F_1 = F - \bar{m}(F)$. Fixe $\varepsilon > 0$, existe um $M > 0$ tal que se $a \geq M$ temos

$$\frac{1}{a} \left| \int_0^a F dm \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Defina para $y \in \mathbb{R}_0^+$ e $n \in \mathbb{N}$ $\gamma_n(y) = \min\{P^n(g)(M), P^n(g)(y)\}$, γ_n satisfaz as seguintes propriedades:

- γ_n é positiva;
- γ_n é constante em $[0, M]$;
- γ_n é decrescente.

$$\begin{aligned} m(FP^n(g)) &= \int_0^{+\infty} FP^n(g) dm \\ &= \int_0^{+\infty} F\gamma_n dm + \int_0^{+\infty} F(P^n(g) - \gamma_n) dm. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Agora note que

$$\int_0^{+\infty} F(P^n(g) - \gamma_n) dm = \int_0^M F(P^n(g) - \gamma_n) dm$$

e

$$\int_0^M (P^n(g) - \gamma_n) dm \leq \int_0^M P^n(g) dm = m(\mathbb{1}_{[0,M]} P^n(g))$$

portanto,

$$\left| \int_0^M F(P^n(g) - \gamma_n) dm \right| \leq |f|_\infty m(\mathbb{1}_{[0,M]} P^n(g)) \rightarrow 0,$$

pelo lema [\(4\)](#)

Para a outra integral, chame de $a(r) = \gamma_n^{-1}(r)$, daí

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} F(y)\gamma_n(y)dy &= \int_0^{+\infty} F(x) \int_0^{\gamma_n(y)} drdy = \int_0^{\gamma_n(M)} \int_0^{a(r)} F(y)dYdr \\ &= \int_0^{\gamma_n(M)} \int_0^M F(y)dydr. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} F(x)\gamma_n(x)dx \right| &\leq \int_0^{\gamma_n(M)} \left| \int_0^{a(r)} F(x)dx \right| dr \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{\gamma_n(M)} a(r)dr \leq \frac{\varepsilon}{2} m(\gamma_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

(b) e (c).

Seja $0 < q \leq 1$ e tome qualquer $F \in \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m)$ e $g \in L_1(\mathbb{R}_0^+, \lambda_q)$. Usando o lema (4.17) e o provado no item (a) nós temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_q((F \circ T^n)g) = \lim_{n \rightarrow \infty} m((F \circ T^n)gh_{\lambda_q}) = \bar{m}(F)m(gh_{\lambda_q}) = \bar{\lambda}_q(F)\lambda_q(g). \quad (4.53)$$

Isso encerra a prova dos últimos itens e também do teorema. \square

Usaremos esse teorema para provar o teorema principal (4.13). Para tal, dado um mapa $T : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ denotaremos por $T_0 = \Psi \circ T \circ \Psi^{-1}$ o seu conjugado em \mathbb{R}_0^+ . Vale a seguinte proposição que estabelece a relação entre ser Global-Local Mixing em $(0, 1]$ e $[0, +\infty)$.

Proposição 4.19. 1. *Seja ν infinita em $(0, 1]$ então o seu push-forward $\nu_0 = \Psi_*\nu = \nu \circ \Psi^{-1}$ é infinita em \mathbb{R}_0^+ . Além disso, se ν for absolutamente contínua com respeito a Lebesgue, então ν_0 também o é.*

2. *Dado qualquer observável local $f \in L_1((0, 1], \nu)$, então seu conjugado $f_0 = f \circ \Psi^{-1} \in L_1(\mathbb{R}_0^+, \nu_0)$.*

3. *Para qualquer observável global $F \in \mathcal{G}((0, 1], \nu)$, então o seu conjugado $F_0 = F \circ \Psi^{-1} \in \mathcal{G}((0, 1], \nu)$. Além disso, $\bar{\nu}(F) = \bar{\nu}_0(F_0)$.*

Demonstração. (1). $\nu_0(\mathbb{R}_0^+) = \nu(\Psi^{-1}(\mathbb{R}_0^+)) = \nu(0, 1] = +\infty$. Além disso, Se $\nu \ll m$ então vamos provar que $\nu_0 \ll m$. Para isso, seja E um conjunto mensurável com $m(E) = 0$. Como Ψ é um difeomorfismo de classe C^1 então $m(\Psi^{-1}(E)) = 0$. Como $\nu \ll m$ então $\nu(\Psi^{-1}(E)) = 0$. Ou seja, $\nu_0(E) = 0$.

(2) Segue diretamente de (2.19).

(3) Vamos provar a última afirmação $\bar{\nu}(F) = \bar{\nu}_0(F_0)$. E em particular valerá a primeira afirmação. Por definição

$$\bar{\nu}_0(F_0) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_0([0, a])} \int_0^a F_0 d\nu_0.$$

Primeiro note que $\nu_0([0, a]) = \nu(\Psi^{-1}([0, a])) = \nu([\Psi^{-1}(a), \Psi^{-1}(0)]) = \nu([\Psi^{-1}(a), 1])$. Por outro lado, usando mais uma vez (2.19) temos que

$$\int_0^a F_0 d\nu_0 = \int_{\Psi^{-1}(a)}^1 F d\nu$$

Façamos $c = \Psi^{-1}(a)$. Como Ψ é decrescente, quando $a \rightarrow \infty$ então $c \rightarrow 0^+$. Sendo assim,

$$\bar{\nu}_0(F_0) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{\nu([c, 1])} \int_c^1 F d\nu = \bar{\nu}(F).$$

□

Os mapas que levam $f \mapsto f_0$ e $F \mapsto F_0$ são bijeções. Portanto chamando de \mathcal{L}_0 e \mathcal{G}_0 as imagens de \mathcal{L} e \mathcal{G} respectivamente. Assim temos um isomorfismo dos sistemas dinâmicos $((0, 1], \nu, T) \cong (\mathbb{R}_0^+, \nu_0, T_0)$ no sentido de que T é Global-Local Mixing com respeito a $\nu, \mathcal{G}, \mathcal{L}$ se e só se T_0 é Global-Local Mixing com respeito a $\nu_0, \mathcal{G}_0, \mathcal{L}_0$. Então para provar o teorema (4.13) nós iremos provar o teorema (4.14). Considere um mapa T satisfazendo as hipóteses do teorema (4.13) Vamos provar que T_0 satisfaz (B1)-(B3).

Para (B1) note que $\tau_{0,j} = T_0|_{I_j} = \Psi \circ T|_{I_j} \circ \Psi^{-1}$ e logo $\varphi_{0,j} = \Psi \circ \varphi_j \circ \Psi^{-1}$. Por (A1) φ é crescente e derivável, segue então (B1). (B2) segue do teorema (4.10). Para provar (B3), comece observando que pela regra da cadeia

$$\varphi'_{0,k}(y) = \Psi'(\varphi_k(\Psi^{-1}(y))) \cdot \varphi'_k(\Psi^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{\Psi'(\Psi^{-1}(y))}.$$

Como $\Psi(x) = \frac{x^{-p} - 1}{p}$ então $\Psi'(x) = -x^{-p-1}$ e portanto

$$\varphi'_{0,k}(y) = \left(\frac{\varphi_k(\Psi^{-1}(y))}{\Psi^{-1}(y)} \right)^{-p-1} \cdot \varphi'_k(\Psi^{-1}(y)).$$

Então para cada j ,

$$\sum_{k \geq j} \varphi'_{0,k}(y) = \sum_{k \geq j} \left(\frac{\varphi_k(\Psi^{-1}(y))}{\Psi^{-1}(y)} \right)^{-p-1} \cdot \varphi'_k(\Psi^{-1}(y)).$$

Fazendo a mudança $y = \Psi(\xi)$ que é decrescente, temos que

$$\sum_{k \geq j} \varphi'_{0,k}(\Psi(\xi)) = \sum_{k \geq j} \left(\frac{\varphi_k(\xi)}{\xi} \right)^{-p-1} \cdot \varphi'_k(\xi).$$

que é decrescente por (A5), então provamos (B3). Portanto podemos aplicar o teorema (4.14) e concluir que

1. T_0 é Totalmente Global-Local Mixing com respeito a m .
2. T_0 é Totalmente Global-Local Mixing com respeito a λ_q para todo $q \in (0, 1)$.

3. T_0 é Global-Local Mixing com respeito a $\lambda_1, \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, m), \mathcal{L}(\mathbb{R}_0^+, \lambda_1)$.

Então pela discussão acima temos que

1. T é Totalmente Global-Local Mixing com respeito a $\Psi_*^{-1}m$.
2. T é Totalmente Global-Local Mixing com respeito a $\Psi_*^{-1}\lambda_q$ para $q \in (0, 1)$.
3. T é Global-Local Mixing com respeito a $\Psi_*\lambda_1, \mathcal{G}(\mathbb{R}_0^+, \Psi_*^{-1}m), \mathcal{L}(\mathbb{R}_0^+, \Psi_*^{-1}\lambda_q)$.

Para provar o teorema (4.13) vamos mostrar que $d\Psi_*^{-1}m = \nu_p$ (isso mostrará o item (a)). Para provar isso, vamos mostrar a seguinte coisa :

Lema 4.20. *Se $\nu_0 \ll m$ então*

$$\frac{\Psi_*^{-1}\nu_0}{d\nu_p} = \frac{d\nu_0}{dm} \circ \Psi.$$

Demonstração. Como $\nu_0 \ll m$ então por (2) existe uma função mensurável e positiva h tal que

$$\nu_0(E) = \int_E h dm, \text{ para qualquer mensurável } E.$$

Em particular,

$$\nu_0([a, b]) = \int_a^b h(x) dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = \Psi(y)$ então $dx = \Psi'(y)dy = -y^{-p-1}dy$. Logo

$$\nu_0([a, b]) = \int_{\Psi^{-1}(b)}^{\Psi^{-1}(a)} -h(\Psi(y))y^{-p-1}dy = \int_{\Psi^{-1}(a)}^{\Psi^{-1}(b)} h(\Psi(y))y^{-p-1}dy.$$

Lembremos que

$$\frac{d\nu_p}{dm} = y^{-p-1},$$

e portanto

$$\nu_0([a, b]) = \int_{\Psi^{-1}(a)}^{\Psi^{-1}(b)} h(\Psi(y))d\nu_p.$$

Chamando $\Psi^{-1}(a) = c$ e $\Psi^{-1}(b) = d$ temos que

$$\Psi_*^{-1}\nu_0([c, d]) = \nu_0([\Psi(c), \Psi(d)]) = \int_c^d h \circ \Psi d\nu_p.$$

Por unicidade da derivada de Radon-Nikodyn o lema está provado. □

Fazendo no lema $\nu_0 = m$ temos que

$$\frac{\Psi_*^{-1}m}{d\nu_p} = \frac{dm}{dm} \circ \Psi = 1.$$

e logo $\Psi_*^{-1}m = \nu_p$. Faça no lema agora $\nu_0 = \lambda_q$ temos então

$$\frac{\Psi_*^{-1}\lambda_q}{d\nu_p} = \frac{d\lambda_q}{dm} \circ \Psi = \frac{1}{(1 + \Psi(x))^q}.$$

Onde na última igualdade usamos (4.29). Portanto pela regra da cadeia (2)

$$\frac{d\Psi_*^{-1}\lambda_q}{dm} = \frac{\Psi_*^{-1}\lambda_q}{d\nu_p} \cdot \frac{d\nu_p}{dm} = \frac{1}{(1 + \Psi(x))^q} \cdot \frac{1}{x^{p+1}} \sim p^q x^{pq-p-1} \text{ quando } x \rightarrow 0^+.$$

Portanto usando (4.10) item (a) e a regra da cadeia (2) e tomando $q = 1/p$ nós temos

$$\frac{d\Psi_*^{-1}\lambda_{1/p}}{d\mu} = \frac{d\Psi_*^{-1}\lambda_{1/p}}{dm} \cdot \frac{dm}{d\mu} \sim p^{1/p} x^{-p} \frac{x^p}{H_\mu(0)} \sim \frac{p^{1/p}}{H_\mu(0)} > 0.$$

Usando a observação (4.12) nós temos que $\overline{\Psi_*^{-1}\lambda_{1/p}} = \bar{\mu}$. Essas observações mostram que o teorema (4.13) vem do teorema (4.14). Isso conclui a prova do teorema principal.

Bibliografia

- [1] Claudio Bonanno, Paolo Giulietti e Marco Lenci. “Global-local mixing for the Boole map”. Em: *Chaos, Solitons & Fractals* 111 (2018), pp. 55–61.
- [2] Haim Brezis e Haim Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Vol. 2. 3. Springer, 2011.
- [3] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. Vol. 40. John Wiley & Sons, 1999.
- [4] Marc Kesseböhmer, Sara Munday e Bernd Otto Stratmann. “Infinite ergodic theory of numbers”. Em: *Infinite Ergodic Theory of Numbers*. de Gruyter, 2016.
- [5] Marco Lenci. “On infinite-volume mixing”. Em: *Communications in Mathematical Physics* 298 (2010), pp. 485–514.
- [6] Michael Lin. “Mixing for Markov operators”. Em: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 19 (1971), pp. 231–242.
- [7] César Ernesto Silva. *Invitation to ergodic theory*. Vol. 42. American Mathematical Soc., 2008.
- [8] Wouter Slegers. *Spectral Theory for Perron-Frobenius operators*. 2019.
- [9] Maximilian Thaler. “Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points”. Em: *Israel Journal of Mathematics* 37 (1980), pp. 303–314.