



**UNIVERSIDADE FEDERAL
DE ALAGOAS**

Técnicas de Álgebra Linear para Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias

Autora: Monique Paulo de Melo

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

M528t Melo, Monique Paulo de.
Técnicas de álgebra linear para resolução de equações diferenciais ordinárias / Monique Paulo de Melo. – 2022.
70 f. : il. color.

Orientador: Isnaldo Isaac Barbosa.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 70.

1. Álgebra linear. 2. Equação diferencial ordinária linear. 3. Diagonalização. 4. Forma canônica de Jordam. 5. Retratos de fases. I. Título.

CDU: 517.91

"Não são nossas habilidades que mostram quem realmente somos, são as nossas escolhas."

Alvo Dumbledore
(J.K. Rowling)

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por me ajudar durante toda a minha trajetória e conceder-me forças nos momentos difíceis para que este sonho tenha finalmente se realizado.

Também agradeço à minha família. Em especial, agradeço ao meu pai, José Leite de Melo, que sempre me impulsionou a lutar pelos meus sonhos e nunca colocou limite na minha capacidade de conquista durante a minha vida. Agradeço à minha mãe, Francisca Paulo de Melo, por me incentivar desde muito cedo a estudar. Agradeço aos meus irmãos, Pedro Henrique Paulo de Melo e Mayara Paulo de Melo pelos momentos de descontração e companheirismo durante todo o processo de graduação. Agradeço à minha avó, Ana Delfina dos Santos e agradeço em memória dos meus avôs, Cícera Leite de Melo e Sebastião Paranhos de Melo (que já partiram deste plano, mas continuam presentes em meu coração e na minha conquista de concluir o ensino superior), aos três por terem sido meus exemplos de força e superação. Agradeço à minha prima Samara Fernandes pelos conselhos, pelo apoio e por ter me demonstrado, sendo a primeira mulher da família a se formar no ensino superior, que com esforço e dedicação pode-se atingir o sucesso. Meus agradecimentos também se estendem ao Professor Isnaldo Isaac, por todo o incentivo e durante todo curso, pelos conselhos e pelos projetos que participei com a sua orientação, os quais foram cruciais para desenvolver este trabalho de conclusão de curso. Agradeço ao Professor Hilário Alencar que me mostrou que ser professor vai muito além do conteúdo e que devemos observar o ser humano que está em nossa frente e pelas muitas vezes que me animou enquanto fui sua aluna. Agradeço à Professora Elisa Sena, pois encontrei nela a inspiração da professora que pretendo ser.

E agradeço aos meus amigos. Em especial, agradeço a Milena Farias por todos os conselhos e cafés que tomamos juntas. Agradeço aos meus colegas de PIBIC, Jhonatan Brunno e Victor Lohan por todas as conversas sobre matemática e sobre coisas aleatórias e pelo apoio nos momentos difíceis. Agradeço ao Gleydson Santos por me ouvir em meus momentos de melancolia e por conversar sobre qualquer assunto comigo. Agradeço à Talita Araújo por todas as conversas, pelo apoio e pela companhia em comer bolo de pote. Agradeço à Joyce Monteiro pela sua sinceridade que afugentava as minhas paranoias e pelos cafés que tomamos juntas. Agradeço ao Erick Alberto pela sua paciência e pela grande ajuda em algumas matérias na época de sua tutoria. Agradeço às minhas amigas do ensino médio que me acompanharam até hoje. Agradeço à Kerolayne Oliveira por ter me ajudado na inscrição do Sisu na época que eu não tinha computador e por todo o carinho que temos uma pela outra até aqui. Agradeço à Aline Gabriely que, desde 2012, vem me apoiando, incentivando e me consolando quando as coisas não saem como planejei, mais que uma amiga, a Aline é uma irmã para mim. Agradeço ao meu namorado, Maxmilian Barros de Siqueira por toda a compreensão, pelo carinho, pelas conversas e pelas muitas coisas que sou incapaz de descrever nessas pequenas linhas. Também agradeço a todas as pessoas que abordei no corredor e me ajudaram em algum problema, todas essas pessoas contribuíram para que eu chegasse ao presente momento.

Por último, agradeço aos meus gatos: Kiara, Floquinho, Jack, Ivy e Pichilinguinha por terem me ajudado bastante quando eu estava desanimada.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo, estudar técnicas de Álgebra Linear para solucionar Equações Diferenciais Ordinárias Lineares no espaço \mathbb{R}^n com $n > 1$, através da Diagonalização e da Forma Canônica de Jordan. Além disso, é feito um estudo sobre os retratos de fases das soluções de EDOs nos espaços \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Palavras - chave: Equações Diferenciais Ordinárias, Diagonalização, Forma Canônica de Jordan, Retrato de Fases.

Abstract

The aim of this work is to study techniques to solve Ordinary Linear Differential Equations at spaces \mathbb{R}^n , with $n > 1$, through the use of Linear Algebra, particularly through the Diagonalization and Jordan's Canonical Form. Furthermore, we make a study carried out on the phase portraits of ODE solutions in the spaces \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 .

Keywords: Ordinary Differential Equations, Diagonalization, Jordan Canonical Form, Phase Portrait.

Sumário

1	Introdução	9
2	Equações Diferenciais Ordinárias Lineares	10
2.1	Diagonalização	10
2.2	Características de diagonalização	16
2.3	Multiplicidade algébrica e geométrica	18
2.4	Teorema espectral para operadores lineares em espaços de dimensão finita .	21
2.5	Autovalores generalizados	23
3	Forma Canônica de Jordan	31
3.1	Exponencial de matrizes	31
3.2	Forma canônica de Jordan real	40
3.3	Exponencial de matrizes em blocos	47
4	Estudo de Planos de Fase	53
4.1	Planos de fase em dimensão 2	53
4.2	Planos de fase em dimensão 3	61
5	Conclusões	71

1 Introdução

Neste trabalho, estudamos sobre a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares em \mathbb{R}^n e seus comportamentos, ou seja, seus retratos de fase em dimensões menores (\mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3), onde podemos entender e visualizar a dinâmica das soluções graças ao estudo do comportamento de seus autovalores e autovetores. Fazemos isso usando álgebra linear como ferramenta crucial para todo o escopo deste trabalho que podem ser encontrados nos seguintes livros, Álgebra Linear do autor Elon Lages [6] e Álgebra Linear e suas Aplicações do autor Petronio Pulino [7].

O objetivo de todo este trabalho é criar uma base sólida para modelar problemas além destas páginas, onde nos depararemos com EDOs não lineares, pois para resolvê-las localmente é necessário o conhecimento desenvolvido neste trabalho juntamente com o Teorema de Grobman-Hartman devidamente enunciados na conclusão.

Os estudos contidos neste texto estão divididos da seguinte forma: No capítulo II serão apresentadas algumas definições e teoremas essenciais para resolução de EDOs lineares e todos aparato necessário sobre autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes. Seguindo para o capítulo III será desenvolvido como efetuar exponencial de matrizes de alguns casos particulares, prosseguimos explicando como calcular a forma canônica de Jordan Real e a exponencial em blocos de matrizes. Por fim, no capítulo IV, discutiremos os retratos de fases nos casos de EDOs em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , como todo aparato que construímos nas seções anteriores.

Contudo, progredimos sequencialmente proporcionando ao leitor a aprendizagem dos tópicos de Álgebra linear, mesmo que não possua familiaridade com tais conceitos. Entretanto, é necessário alertar que alguns conceitos de Equações Diferenciais Ordinárias serão admitidos de antemão, sendo esses quando uma EDO é linear, homogênea, autônoma e os métodos de solução de EDOs de primeira ordem, que podem ser encontrados no livro Equações Diferenciais Elementares e Problemas de valores de contorno dos autores William E. Boyce e Richard C. DiPrima [1].

2 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Neste capítulo, discutiremos as soluções das equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes, ou autônomas que são equações nas quais a variável independente não aparece explicitamente, ou seja, da forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Do nosso ponto de vista, trata-se do estudo de campos lineares

$$f(x) = T_A(x) = A \cdot x = Ax,$$

onde o operador linear $f = T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dado pela ação $A \cdot x = A \cdot x$ da matriz real $A(a_{ij})_{n \times n}$ sobre o vetor x , ou seja, pelo produto da matriz A com o vetor coluna $n \times 1$ formado pelas coordenadas (canônicas) de $x \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que um caminho $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução da equação diferencial linear autônoma

$$x' = Ax,$$

se x é derivável em \mathbb{R} e, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$x'(t) = Ax(t).$$

Equivalentemente, as funções coordenadas $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, de $x(t)$ são soluções do sistema associado à matriz A , ou seja, do sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

de equações diferenciais lineares homogêneas a coeficientes constantes.

Observe que resolver cada EDO separadamente será demasiadamente cansativo, por isso utilizaremos da Álgebra Linear para facilitar nossos cálculos. Dito isso, o teorema a seguir define a existência e a unicidade da solução do sistema apresentado acima.

Teorema 2.1. Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$ é uma matriz real, então, para cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma única solução do problema de valor inicial $x' = Ax$, $x(0) = x_0$.

Sabemos que podemos determinar soluções do sistema disposto acima, então o próximo passo é encontrar mecanismos para exibir as mesmas. Como foi informado de antemão alguns conceitos de Álgebra linear são necessários.

2.1 Diagonalização

Primeiramente é importante entender o porquê de querermos diagonalizar matrizes de operadores lineares (lembre que é assim que estamos encarando os problemas de equações diferenciais ordinárias).

Exemplo 2.1. Considere a equação diferencial linear vetorial

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x,$$

e resolva a mesma com valor inicial $x(0) = (k_1, k_2)$.

Solução: O sistema linear $x_1' = 2x_1$, $x_2' = -3x_2$ associado a equação vetorial acima, determina as soluções $x_1(t) = k_1e^{2t}$, $x_2(t) = k_2e^{-3t}$ pelo teorema 2.1, temos que

$$x(t) = \begin{pmatrix} k_1e^{2t} \\ k_2e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

é a única solução que satisfaz a condição inicial $x(0) = (k_1, k_2)$.

Exemplo 2.2. Seja $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ resolva a equação linear $x' = Ax$.

Solução : Neste caso, a equação define o sistema

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 \\ x_2' = x_1 + \lambda x_2. \end{cases}$$

Deste modo, resolvendo a primeira equação, estabelecemos que $x_1(t) = k_1e^{\lambda t}$. Substituindo essa solução na segunda equação do sistema obtemos, agora, uma equação diferencial linear escalar que é de primeira ordem na variável x_2 .

$$x_2' = k_1e^{\lambda t} + \lambda x_2.$$

Para resolver uma equação dessas é necessário usar a técnica do fator integrante. Isso significa que multiplicaremos a equação toda por $e^{-\lambda t}$, obtemos $e^{-\lambda t}x_2' = k_1 + \lambda e^{-\lambda t}x_2$ e, portanto, $(e^{-\lambda t}x_2)' = e^{-\lambda t}x_2' - \lambda e^{-\lambda t}x_2 = k_1$; agora integramos

$$e^{-\lambda t}x_2 = \int (e^{-\lambda t}x_2)' dt = \int k_1 dt = k_1t + k_2.$$

E voltamos a multiplicar, mas dessa vez por $e^{\lambda t}$, resultando

$$x_2(t) = k_1te^{\lambda t} + k_2e^{\lambda t}.$$

Assim,

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (k_1e^{\lambda t}, k_1te^{\lambda t} + k_2e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

é solução de $x' = Ax$ com condição inicial $x(0) = (k_1, k_2)$

Como podemos ver nos exemplos 2.1 e 2.2, resolver a EDO associada à matriz diagonal foi muito mais prático do que resolver a EDO associada à matriz não diagonal (esta matriz é um caso especial que será explicado mais adiante). Observe que se estendermos este sistema para dimensões maiores, resolvê-lo ficaria cada vez mais cansativo.

Por outro lado, generalizando o exemplo 2.1 temos:

Seja $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ uma matriz diagonal com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ constantes reais. Tomando coordenadas, observamos que, para cada $1 \leq j \leq n$, a equação $x_j'(t) = \lambda_j x_j(t)$

do sistema linear associado à equação diferencial vetorial $x' = Dx$ determina a solução $x_j(t) = k_j e^{\lambda_j t}$ e, portanto, a solução geral da equação diferencial

$$x' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)x, \quad x(0) = (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

é dada por

$$x(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \cdot x(0), \quad (1)$$

onde o ponto indica, como antes, o produto da matriz diagonal $n \times n$ pelo vetor coluna $x(0)$ de tamanho $n \times 1$; observe que estamos escrevendo vetores coluna $n \times 1$ como vetores de \mathbb{R}^n . Por esse motivo nosso intuito é diagonalizar as matrizes associadas às EDOs.

Para isso é necessário definir o que são autovalores e autovetores de uma matriz ou operador linear e encontrar métodos de determinar esses objetos.

Definição 2.2. Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se existem $v \in V - \{0\}$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$, então o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T e o elemento v é um autovetor de T associado ao autovalor λ .

Sabemos o que são os autovalores e autovetores de acordo com a definição 2.2, porém precisamos saber uma forma de encontrá-los.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{R} , digamos que $\dim(V) = n$, e T é um operador linear sobre V . O problema de encontrar os autovalores do operador T será resolvido através de cálculos de determinantes. Queremos encontrar escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que a equação $T(v) = \lambda v$ tenha solução $v \in V$, não nula. A equação $T(v) = \lambda v$ pode ser escrita na forma: $(T - \lambda I_d)v = 0$.

A equação acima terá solução v não nula se, somente se, $\text{Ker}(T - \lambda I_d) \neq 0$. Assim, se A é a representação matricial do operador T , com relação a qualquer base ordenada de V , então a matriz $A - \lambda I_n$ é a representação matricial para o operador $(T - \lambda I_d)$. Desse modo, a matriz $A - \lambda I_n$ deve ser singular, isto é, $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Portanto, $\lambda \in \mathbb{F}$ é um autovalor do operador T se, somente se, satisfaz a equação

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Daqui, segue que para encontrar os autovetores do operador T basta obter a solução do sistema $T(v) = \lambda v$ que pode ser reescrito como $A \cdot v = \lambda v$ onde A é uma matriz $n \times n$ e v um vetor escrito da forma $n \times 1$.

Outra definição que precisamos é a de matrizes semelhantes que segue adiante:

Definição 2.3. Sejam A e $B \in \mathbb{M}_n$ (Espaço das matrizes $n \times n$, onde os elementos de cada entrada na matriz pertencem \mathbb{R}). Dizemos que B é semelhante à matriz A , se existe uma matriz invertível $Q \in \mathbb{M}_n$ de maneira que $B = Q^{-1}AQ$.

Observação 2.1. Seja T o operador linear tal que $T = T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ associado a uma matriz $A \in \mathbb{M}_n$ é caracterizado por $T(e_j) = Ae_j$ e, por isso, A é a matriz do operador T na base canônica de \mathbb{R}^n . Se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é outra base de \mathbb{R}^n , então

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij}v_i,$$

onde a matriz $B = (b_{ij})$ é a matriz do operador T nessa base. A relação entre as duas matrizes A e B de T é dada pela matriz Q de mudança de base, que tem os vetores v_1, v_2, \dots, v_n como colunas, ou seja, $Qe_i = v_i$. A matriz Q é invertível e

$$AQe_j = Av_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}v_i = \sum_{i=1}^n b_{ij}Qe_i = Q(\sum_{i=1}^n b_{ij}e_i) = QT(e_j) = QBe_j.$$

Para cada $1 \leq j \leq n$. Assim, temos $AQ = QB$, ou seja, segundo a definição 2.3, A é semelhante a B .

Do ponto de vista de um operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dadas duas matrizes A e B de T , os sistemas lineares $x' = Ax$ e $y' = By$ são, simplesmente, a mesma equação diferencial $x' = T(x)$, só que nas coordenadas de duas bases de \mathbb{R}^n . Do ponto de vista de matrizes conjugadas A e B , os sistemas $x' = Ax$ e $y' = By$ são, na realidade, iguais a menos de uma mudança de coordenadas dada pela matriz de mudança de base como veremos a seguir.

Proposição 2.1. Se Q conjuga as matrizes reais $A, B \in \mathbb{M}_n$, então Q transforma as soluções de $y' = By$ nas soluções de $x' = Ax$. Mais precisamente, se $A = QBQ^{-1}$, então são equivalentes as afirmações:

1. $y(t)$ é uma solução de $y' = By$;
2. $Qy(t)$ é solução de $x' = Ax$.

Demonstração: Ora, as matrizes A e B são independentes de t , logo Q também, portanto derivando $x(t) = Qy(t)$ obtemos (pela regra da cadeia ou pela derivação produto)

$$x'(t) = Qy'(t) = QBQ^{-1}Qy(t) = AQy(t) = Ax(t).$$

Como Q é invertível, a demonstração da recíproca é análoga.

Observação 2.2. O resultado acima pode ser interpretado da seguinte maneira: a matriz de conjugação Q faz o papel de mudança de coordenadas, isto é, $Q(y) = x$ leva a variável y na variável x , transformando a ação de B na ação de A e, por ser invertível, $y = Q^{-1}(x)$ faz o papel inverso.

Desse modo, se conseguirmos resolver o sistema linear $y' = By$ na variável y , conseguimos também resolver o sistema $x' = Ax$ na variável x .

Vimos anteriormente que resolver EDOs relacionadas a matrizes diagonais é muito mais prático. Assim, o objetivo agora é resolver EDOs relacionadas a matrizes diagonalizáveis, ou seja, onde $A \in \mathbb{M}_n$ relacionada a $x' = Ax$ seja semelhante a uma matriz diagonal.

Exemplo 2.3. Seja T o operador linear tal que $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde A é a matriz do operador T .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontre os autovalores e autovetores de T .

Solução: O primeiro passo é encontrar os autovalores associados ao operador T , através do determinante $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Então:

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -(2 + \lambda) & 1 \\ 0 & 0 & -(1 + \lambda) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1 - \lambda) \cdot (2 + \lambda) \cdot (1 + \lambda) = 0.$$

Logo, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$ são os autovalores do operador T .

Daqui, segue-se que os autovetores de T , são os vetores $v \in \mathbb{R}^3$ tais que $T(v) = \lambda_i v_i$, onde $i = 1, 2$ e 3 .

Portanto resolvendo estes sistema, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Deste sistema, obtemos $v_1 = (1, 0, 0)$. Seguindo para o próximo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Deste sistema, obtemos $v_2 = (1, -2, -2)$. Novamente seguindo para o próximo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Deste sistema, obtemos $v_3 = (0, 1, 0)$. Portanto encontramos os autovalores e autovetores do operador T .

Com isso, temos que a matriz A associada ao operador T é semelhante à matriz diagonal D composta pelos autovalores de T , ou seja, $A = QDQ^{-1}$ e Q é uma matriz composta pelos autovetores de T dispostos em colunas, onde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.4. Resolva $x' = Ax$, onde A é a matriz associada ao operador T do exemplo anterior.

Solução: Do exemplo anterior, sabemos que $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ é diagonalizável, por ser conjugada por D através da mudança de coordenadas definida pela matriz Q , necessariamente invertível.

Sabemos da equação (1) que a solução de uma EDO relacionada a uma matriz diagonal é:

$$x(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \cdot x(0),$$

onde $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ são as entradas desta matriz. Se relacionarmos uma EDO a essa matriz D , ou seja, $y' = Dy$ com $y(0) = (l_1, l_2, l_3)$ temos a seguinte solução:

$$y(t) = \text{Diag}(e^{1t}, e^{(-1)t}, e^{(-2)t}) \cdot y(0) = (l_1 e^t, l_2 e^{-t}, l_3 e^{-2t}).$$

Usando a proposição 2.1, a solução geral da equação diferencial $x' = Ax$ é dada por $x(t) = Qy(t)$.

Essa solução geral de $x' = Ax$ pode ser entendida melhor como uma combinação linear de três soluções básicas. Basta tomar $y(0)$ como os vetores da base canônica e aplicar a matriz de conjugação Q , ou seja, $Q(e_i)$, onde $i = 1, 2$ e 3 (pode ser generalizado para o caso de uma matriz $n \times n$), com isso, pela proposição 2.1, as soluções básicas

$$s_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ e } s_3(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de $x' = Ax$, com condições iniciais dadas pelos vetores coluna $Q \cdot A$. A solução geral $x(t) = Qy(t)$ é simplesmente a combinação linear

$$x(t) = l_1 s_1 + l_2 s_2 + l_3 s_3.$$

Podemos, ainda, obter as coordenadas cartesianas da condição inicial $x(0) = Qy(0)$ resolvendo a sistema linear

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = Qy(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 + l_2 \\ l_3 - 2l_2 \\ -2l_2 \end{pmatrix}$$

ou, então, calculando $(l_1, l_2, l_3) = Q^{-1}(k_1, k_2, k_3)$ para obter

$$(l_1, l_2, l_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = (k_1 + \frac{1}{2}k_3, -\frac{1}{2}k_3, k_2 - k_3).$$

Assim, resulta

$$\begin{aligned} x(t) = Qy(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 e^t \\ l_2 e^{-t} \\ l_3 e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 e^t + l_2 e^{-t} \\ -2l_2 e^{-t} + l_3 e^{-2t} \\ -2l_2 e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \left(\left(k_1 + \frac{1}{2}k_3 \right) e^t - \frac{1}{2}k_3 e^{-t}, k_3 e^{-t} + (k_2 - k_3) e^{-2t}, k_3 e^{-t} \right). \end{aligned}$$

Que é a solução explícita de $x' = Ax$, $x(0) = (k_1, k_2, k_3)$.

Generalizaremos esse exemplo para matrizes diagonalizáveis.

Proposição 2.2. Sejam $A \in \mathbb{M}_n$ uma matriz diagonalizável com $Q, D \in \mathbb{M}_n$ tais que Q é invertível e $Q^{-1}AQ = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Então, dado $1 \leq i \leq n$ e escrevendo $Qe_i = v_i$, o caminho $s_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$s_i(t) = e^{\lambda_i t} Qe_i = e^{\lambda_i t} v_i, \quad t \in \mathbb{R}$$

é a solução de $x' = Ax$ com valor inicial $x(0) = v_i$. Além disso, qualquer solução $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de $x' = Ax$ é combinação linear de s_1, \dots, s_n a saber,

$$x(t) = \sum_{j=1}^n l_j s_j(t) = \sum_{j=1}^n l_j e^{\lambda_j t} v_j$$

define a única solução de $x' = Ax$, $x(0) = \sum l_j v_j = Q(l_1, \dots, l_n)$.

Demonstração: Como já vimos anteriormente na equação (1), a solução geral de $y' = Dy$ é dada por $y(t) = (l_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, l_n e^{\lambda_n t}) = \sum l_j e^{\lambda_j t} e_j$, com $y(0) = \sum l_j e_j$. Pela proposição 1, a solução geral de $x' = Ax$ é dada por

$$x(t) = Qy(t) = Q \sum l_j e^{\lambda_j t} e_j = \sum l_j e^{\lambda_j t} Qe_j = \sum l_j e^{\lambda_j t} v_j,$$

com $x(0) = \sum l_j v_j = Q(l_1, \dots, l_n)$. Em particular, tomando $y(0) = e_i$, a solução básica de $y(t) = e^{\lambda_i t} e_i$ de $y' = Dy$ fornece a solução básica $s_i = e^{\lambda_i t} v_i$ de $x' = Ax$.

Observe que essa proposição diz que as soluções s_1, \dots, s_n constituem uma base do espaço S de todas as soluções de $x' = Ax$. Se quisermos, podemos explicitar cada solução geral em termos de $x(0) = (k_1, \dots, k_n)$, como no exemplo 2.4, resolvendo o sistema $(k_1, \dots, k_n) = Q(l_1, \dots, l_n)$ ou invertendo Q .

Vemos, assim, como resolver, pelo menos em teoria, a equação diferencial linear $x' = Ax$ no caso em que A é diagonalizável. Porém graças ao exemplo 2.3 sabemos encontrar as matrizes D diagonal e Q de conjugação, mas ainda há uma dificuldade: reconhecer se uma matriz dada é ou não diagonalizável. E é partindo deste ponto que seguiremos a exposição deste trabalho.

2.2 Características de diagonalização

Revisando alguns pontos que já foram vistos, temos que se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é uma matriz diagonalizável com $Q^{-1}AQ = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonal então, pela proposição 2.2 cada vetor coluna $Qe_j = v_j$ de Q dá origem a uma solução básica $s_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ do sistema $x' = Ax$. Por outro lado, observando que $De_j = \lambda_j e_j$ para cada vetor e_j da base canônica do \mathbb{R}^n resulta que

$$Av_j = AQe_j = QDe_j = Q\lambda_j e_j = \lambda_j Qe_j = \lambda_j v_j$$

onde λ_j são autovalores e v_j são autovetores.

O que acabamos de ver significa, portanto, que cada vetor coluna da matriz Q da conjugação de A com uma matriz diagonal é, necessariamente, um autovetor de A que define uma solução do sistema $x' = Ax$ (o que explicamos neste paragrafo pode ser visto nos exemplos 2.3 e 2.4 acima).

Esse fato é bem mais geral, ou seja, quaisquer autovetores de A geram soluções de $x' = Ax$, independentemente de A ser, ou não, diagonalizável, como segue.

Proposição 2.3. Seja $v \in \mathbb{R}^n$ um autovetor de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ com autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$x(t) = e^{\lambda t} v, \quad t \in \mathbb{R},$$

é a solução de $x' = Ax$, $x(0) = v$.

Demonstração: Basta derivar $x(t) = e^{\lambda t} v$, para obter

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} \lambda v = e^{\lambda t} Av = Ax(t).$$

Definição 2.4. Sejam V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Fixando um autovalor λ do operador T , o subconjunto

$$V_\lambda = \{v \in V / T(v) = \lambda v\}$$

é denominado subespaço associado ao autovalor λ .

Observação 2.3. Observe que, dado $v \in V_\lambda$, qualquer $w = \alpha v \in V$ vai pertencer ao espaço V_λ , pois $T(w) = T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha \lambda v = \lambda \alpha v = \lambda w$ com $\alpha \in \mathbb{R}$. O que significa que V_λ é invariante sob a ação de T e, necessariamente, sob a ação da matriz deste operador.

Observação 2.4. Note que na definição 2.4 supondo que λ está associado a apenas um autovetor, o espaço V_λ será uma reta e as soluções de EDOs com condições iniciais em V_λ nunca saem deste espaço.

Proposição 2.4. Uma matriz $A \in \mathbb{M}_n$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base \mathbb{R}^n constituída de autovetores de A . Mais precisamente, dadas matrizes $A, Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, temos: as colunas de Q formam uma base de autovetores de A se, somente se, Q é invertível e $Q^{-1}AQ$ é uma matriz diagonal.

Demonstração: Provaremos primeiro a ida, se $A \in \mathbb{M}_n$ é diagonalizável, então A é semelhante a uma matriz diagonal $D \in \mathbb{M}_n$, ou seja,

$$Q^{-1}AQ = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

onde λ_i com $i = 1, 2, \dots, n$ são autovalores de A . Daqui seguiremos a demonstração dividindo dois casos, temos:

- i. Suponha que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para cada $i \neq j$. Logo, como A é uma matriz diagonalizável, a cada λ_i está relacionado a um autovetor. Da forma,

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Note que temos o conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ constituído de autovetores e queremos provar que o mesmo é uma base, para isso é necessário garantir que os autovetores v_i são L.I (linearmente independente). Com isso, considere

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0. \tag{2}$$

Sabemos que $v_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$, pois estamos trabalhando com autovetores e por definição os mesmos são diferentes do vetor nulo. Portanto, para que 2 seja satisfeita $a_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Então, concluímos que o conjunto β é uma base de autovetores em \mathbb{R}^n .

- ii. Suponha que existe pelo menos um $\lambda_i = \lambda_j$ com $i \neq j$ e $i, j = 1, 2, \dots, n$. Então este λ_i estará relacionado a dois autovetores, pois por hipótese A é diagonalizável, com isso, teremos o conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de autovetores em \mathbb{R}^n , para concluir isso segue-se analogamente ao caso i.

Portanto se $A \in \mathbb{M}_n$ é diagonalizável, existe uma base do \mathbb{R}^n constituída de autovetores de A .

Demonstração da volta, se $Av_j = \lambda_j v_j$ vale para cada vetor v_j de uma base de \mathbb{R}^n , então a matriz D do operador $T = T_A$ nessa base é simplesmente a matriz diagonal com entradas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ na diagonal. Seja Q a matriz de mudança de base da canônica para $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, então $Qe_j = v_j$. Então

$$AQe_j = Av_j = \lambda_j v_j = \lambda_j Qe_j = Q\lambda_j e_j = QDe_j$$

vale para cada $1 \leq j \leq n$ e, portanto, $AQ = QD$ e A é diagonalizável.

2.3 Multiplicidade algébrica e geométrica

Mais duas noções que precisamos estabelecer são:

Definição 2.5. Chamamos de multiplicidade algébrica de um autovalor λ , de uma transformação T , como sendo a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico de T .

Definição 2.6. Chamamos de multiplicidade geométrica de um autovalor λ , de uma transformação T , como sendo a dimensão do subespaço V_λ associado ao autovalor λ .

Observação 2.5. No exemplo 2.3, encontramos os autovalores e autovetores da matriz A relacionada a um operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde encontramos 3 autovalores e cada um deles estava relacionado a um autovetor, ou seja, multiplicidade algébrica e geométrica igual 1. Mas este não é o único caso possível.

Sabendo das definições acima, seguiremos com alguns exemplos:

Exemplo 2.5. Considere a matriz $A \in \mathbb{M}_3$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine os autovalores e autovetores da matriz A .

Solução: Inicialmente, vamos encontrar o polinômio característico da matriz A

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4). \end{aligned}$$

Os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 2$, com multiplicidade algébrica igual a 2, e $\lambda_2 = 4$ com multiplicidade algébrica igual a 1.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ é necessário resolver o sistema $Av = 2v$. Segue-se então

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Assim, obtemos a solução $z = y = -x$. Portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ são do tipo $v_1 = (x, -x, -x)$ com $x \neq 0$. Desse modo o autovalor $\lambda_1 = 2$ tem multiplicidade geométrica igual a 1, ou seja, diferente da multiplicidade algébrica. De modo análogo, obtemos que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 4$ são do tipo $v_2 = (x, -x, x)$ com $x \neq 0$. Note que o autovalor λ_2 tem multiplicidade geométrica igual a 1. Podemos tomar $x = 1$ então $v_1 = (1, -1, -1)$ e $v_2 = (1, -1, 1)$.

Observe que os autovetores encontrados no exemplo 2.5 não formam uma base de \mathbb{R}^3 , ou seja, a matriz A não é diagonalizável.

Exemplo 2.6. Considere a matriz $A \in \mathbb{M}_3$ dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determine os autovalores e autovetores da matriz A .

Solução: Novamente, como fizemos no exemplo anterior, vamos encontrar o polinômio característico da matriz A :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda)(4 - \lambda) - 6(2 - \lambda) - 2(4 - \lambda) - 3(3 - \lambda) + 12 \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda)(4 - \lambda) - 6(2 - \lambda) + 11\lambda - 17 = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7. \end{aligned}$$

Fatorando o polinômio acima temos

$$p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 7).$$

Logo, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 7$. Note que λ_1 tem multiplicidade algébrica igual a 2 e λ_2 tem multiplicidade algébrica igual a 1.

A partir de agora, vamos encontrar os autovalores associados a cada autovalor que encontramos, acima. Para isso é necessário resolver o seguinte sistema $Av_i = \lambda_i v_i$ com $i = 1$ e 2. Daqui, segue-se que

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 = v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema acima, temos que $v_1 = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$, ou seja, λ_1 está relacionado a dois autovetores, então sua multiplicidade geométrica também é igual a dois. Tomaremos $x = 1$ e $y = 1$, chamaremos de $u_1 = (1, 0, -1)$ e $u_2 = (0, 1, -1)$.

Seguindo com a solução

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 = 7v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Como resultado do sistema disposto acima, temos $v_2 = x(1, 2, 3)$ tomando novamente $x = 1$, obtemos $v_2 = (1, 2, 3)$. Note que λ_2 possui multiplicidade geométrica igual a 1.

Portanto, pela proposição 2.4 a matriz A é diagonalizável. Onde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

ou seja, a matriz A é semelhante a uma matriz diagonal, então $AQ = QD$.

Observação 2.6. Observando os dois exemplos acima, podemos perceber que uma matriz A é diagonalizável se a multiplicidade algébrica e geométrica de seus autovalores são iguais.

Nosso intuito é diagonalizar matrizes para resolver EDOs relacionadas as mesmas de maneira mais prática, usando a proposição 2.1. Porém com tudo que vimos até então, ainda não podemos dizer (de forma rápida) se uma matriz é diagonalizável ou não. Mesmo sabendo sobre a igualdade das multiplicidades algébrica e geométrica de um autovalor, isto não diminui o quão trabalhoso é chegar nos mecanismos necessários para resolver nosso problema. O lema e o teorema a seguir são de grande ajuda para contornar este obstáculo.

Lema 2.1. Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Demonstração: Como todo autovetor é não nulo, nenhum autovetor é linearmente dependente e, portanto, o resultado é óbvio para um autovetor. Para dois ou mais autovetores, vamos provar o resultado por contra positiva, ou seja, vamos provar que dois ou mais autovetores linearmente dependentes têm pelo menos dois autovalores associados iguais.

Sejam $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ autovetores linearmente dependentes de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, autovalores associados λ_1, λ_2 , respectivamente. Então existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 0$ e $v_2 = av_1$ e, portanto,

$$\lambda_2 v_2 = Av_2 = aAv_1 = a\lambda_1 v_1 = \lambda_1 av_1 = \lambda_1 v_2,$$

ou seja, $(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0 \in \mathbb{R}$. Como $v_2 \neq 0$, por ser autovetor, resulta $\lambda_1 = \lambda_2$. Assim, a afirmação vale para dois autovetores.

Logo, procedendo por indução, vamos supor que o lema valha para $k - 1$ autovetores, com $1 < k - 1 < n$ fixado, ou seja, que quaisquer $k - 1$ autovetores linearmente dependentes de A têm pelo menos dois autovalores iguais. Sejam, agora, $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ autovetores linearmente dependentes de A com autovalores associados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ respectivamente. Se v_1, v_2, \dots, v_{k-1} são linearmente dependentes, então existe dois autovalores iguais, por hipótese de indução, e acaba a prova. Podemos, portanto, supor que v_1, v_2, \dots, v_{k-1} constituem um conjunto linearmente independente de vetores.

Como v_1, v_2, \dots, v_k formam um conjunto linearmente dependente e $v_k \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, decorre que v_k é combinação linear não trivial de v_1, v_2, \dots, v_{k-1} e, portanto, $v_k = \sum a_i v_i$ com algum $a_i \neq 0$; aqui, e até o final da prova, os somatórios são todos em i de 1 a $k - 1$. Assim, por um lado, multiplicando por λ_k , obtemos $\lambda_k v_k = \sum a_i \lambda_k v_i$ e, por outro lado, aplicando A , obtemos $\lambda_k v_k = Av_k = \sum a_i Av_i = \sum a_i \lambda_i v_i$, de modo que, subtraindo essas duas igualdades termo a termo e reordenando as parcelas, resulta

$$0 = \lambda_k v_k - \lambda_k v_k = \sum a_i (\lambda_k - \lambda_i) v_i.$$

Como estamos supondo v_1, v_2, \dots, v_{k-1} linearmente independentes, decorre que $a_i (\lambda_k - \lambda_i) = 0$ para cada $1 \leq i \leq k - 1$; como algum $a_i \neq 0$ resulta que $\lambda_k = \lambda_i$, para algum $1 \leq i \leq k - 1$, terminando a prova também nesse caso.

Teorema 2.7. Se a matriz $A \in \mathbb{M}_n$ tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

Demonstração: Se A tem n autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ associados a autovetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ então, pelo lema 2.1, esses autovetores v_1, v_2, \dots, v_n formam uma base de \mathbb{R}^n e pela proposição 2.4 A é diagonalizável.

O Teorema 2.7, nos dá uma forma de saber quando a matriz é diagonalizável, porém quando não temos autovalores distintos de uma matriz, teremos que recorrer para multiplicidade algébrica e geométrica, já comentada nesta seção.

2.4 Teorema espectral para operadores lineares em espaços de dimensão finita

Há também uma classe de operadores onde os cálculos serão simplificados e estes são chamados de operadores Auto-Adjuntos.

Definição 2.8. Um operador $T : E \rightarrow E$, num espaço vetorial munido de produto interno, chama-se **auto-adjunto** quando $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ para quaisquer $u, v \in E$.

Observação 2.7. Quando falamos de produto interno estamos nos referindo ao produto interno usual em \mathbb{R}^n , ou seja, se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, então o produto interno entre x e y é definido por $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

Todos os teoremas e o corolário a seguir são necessários para a demonstração do Teorema Espectral.

Observação 2.8. Uma base ortonormal é composta por vetores ortogonais dois a dois e unitários.

Teorema 2.9. $T : E \rightarrow E$ é auto-adjunta se, e somente se, sua matriz $a = [a_{ij}]$ relativamente a uma (e portanto a qualquer) base ortonormal $U = \{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ é uma matriz simétrica.

Para ver a demonstração deste resultado, conferir na página 157 na referência [6].

Teorema 2.10. Seja $T : E \rightarrow E$ um operador auto-adjunto. Se o subespaço $F \subset E$ é invariante por T , seu complemento ortogonal F^\perp também é.

Para ver a demonstração deste resultado, conferir na página 158 na referência [6].

Teorema 2.11. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são autovalores dois a dois diferentes do operador auto-adjunto $T : E \rightarrow E$, os autovetores correspondentes v_1, \dots, v_m são dois a dois ortogonais.

Demonstração: Para $i \neq j$ quaisquer:

$$\begin{aligned} (\lambda_i - \lambda_j)\langle v_i, v_j \rangle &= \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle - \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle - \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \langle Av_i, v_j \rangle - \langle v_i, Av_j \rangle = \\ &= \langle Av_i, v_j \rangle - \langle Av_i, v_j \rangle = 0, \end{aligned}$$

Pois T é auto-adjunto. Como $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ e $(\lambda_i - \lambda_j)\langle v_i, v_j \rangle = 0$ resulta $\langle v_i, v_j \rangle = 0$.

Teorema 2.12. Seja $T : E \rightarrow E$ um operador auto-adjunto num espaço vetorial de dimensão 2, munido de produto interno. Existe uma base ortonormal $\{u_1, u_2\} \subset E$ formada por autovetores de T .

Demonstração: Seja $\{v, w\} \subset E$ uma base ortonormal arbitrária. Em virtude do teorema 2.9, temos $Tv = av + bw, Tw = bv + cw$. Note que a matriz relacionada ao operador T , nesta base é

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

com isso, os autovalores de T ou da matriz A são as raízes do polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$. O discriminante deste trinômio é $\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$. Daqui segue - se

- i. Se $\Delta = 0$, então $(a - c)^2 + 4b^2 = 0$, isso equivale a $b = 0, a = c$. Desse modo, o polinômio característico torna - se $p(\lambda) = (\lambda - a)^2$ e concluímos que $A = aI_2$. Logo, todo vetor não-nulo em E é um autovetor.
- ii. Se $\Delta > 0$, então o trinômio $p(\lambda)$ possui duas raízes reais distintas λ_1, λ_2 . Isto, como sabemos, quer dizer que os operadores $A - \lambda_1 I_2$ e $A - \lambda_2 I_2$ são ambos não invertíveis, logo existem vetores não-nulos (que podemos supor unitários) $u_1, u_2 \in E$ tais que $(A - \lambda_1 I_2)u_1 = 0$ e $(A - \lambda_2 I_2)u_2 = 0$, ou seja, $Au_1 = \lambda_1 u_1$ e $Au_2 = \lambda_2 u_2$. Pelo teorema 2.11, $\{u_1, u_2\} \subset E$ é uma base ortonormal de autovetores do operador T .
- iii. Se $\Delta < 0$, então teríamos autovalores complexos que serão estudados na próxima seção.

Portanto, nos casos i) e ii) conseguimos uma base ortonormal formada de autovetores do operador T .

Corolário 2.13. Todo operador auto-adjunto $T : E \rightarrow E$, num espaço de dimensão finita com produto interno, possui um autovetor.

Para ver a demonstração deste resultado, conferir na pagina 160 na referencia [6]

Teorema 2.14. [Teorema Espectral] Para todo operador auto-adjunto $T : E \rightarrow E$, num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno, existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ formada por autovetores de T .

Demonstração: Usaremos indução na dimensão de E . O teorema é evidente se a $\dim E = 1$. Supondo-o verdadeiro em dimensão $n - 1$, seja $\dim E = n$. Pelo corolário do teorema 2.12, existe um autovetor unitário u_n , portanto um subespaço $F \subset E$, de dimensão 1, invariante por T . Pelo teorema 2.10, o complemento ortogonal F^\perp também é invariante por T . Como $\dim F^\perp = n - 1$, a hipótese de indução assegura a existência de uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_{n-1}\} \subset F^\perp$ formada por autovetores da restrição $T : F^\perp \rightarrow F^\perp$. Segue - se que $\{u_1, \dots, u_{n-1}, u_n\} \subset E$ é uma base ortonormal formada por autovetores de T .

É natural se perguntar como o teorema espectral nos ajuda para resolver EDOs. De acordo com o teorema 2.9, quando temos uma matriz A relativa a um operador T , se o mesmo é auto-adjunto sua matriz é simétrica, ou seja, se uma EDO está relacionada a uma matriz simétrica o mesmo é diagonalizável, pelo Teorema Espectral (2.14). Porém, uma matriz ser diagonalizável não significa que o operador relacionado a mesma é auto-adjunto. Para ilustrar o que estamos querendo dizer, temos o seguinte exemplo 2.7. □

Exemplo 2.7. Seja A a matriz do exemplo 2.3. Suponha que $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um operador onde A é sua matriz . Sabemos que esta matriz é diagonalizável pelo exemplo 2.3, prove que T não é auto-adjunto.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solução : Por definição, para um operador ser auto-adjunto, basta satisfazer a seguinte relação

$$\langle u, Tv \rangle = \langle Tu, v \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

Logo, sem perda de generalidade, podemos tomar $u = e_1, v = e_3$ vetores da base canônica do \mathbb{R}^3 . Com isso, $T(x, y, z) = (x + z, z - 2y, -z)$ então

$$\begin{aligned} \langle (1, 0, 0), T(0, 0, 1) \rangle &= \langle (1, 0, 0), (1, 1, -1) \rangle = 1 \\ &\text{e} \\ \langle T(1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle &= \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\langle (1, 0, 0), T(0, 0, 1) \rangle \neq \langle T(1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle$. Portanto, T não é auto-adjunto, mas mesmo assim sua matriz é diagonalizável.

Com isso, concluímos que todo operador auto-adjunto é diagonalizável, mas nem todo operador cuja matriz é diagonalizável é um operador auto-adjunto.

Exemplo 2.8. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

encontre os autovalores da matriz A .

Solução: Ao calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

que não possui raízes reais, de modo que $A \in \mathbb{M}_2$ não possui autovalores nem autovetores.

2.5 Autovalores generalizados

No exemplo anterior temos que o polinômio característico $p(\lambda)$ não possui raízes reais, ou seja, a matriz A não possui autovetores nem autovalores.

Geometricamente é evidente que a matriz A não possua autovetores, pois a ação $A(x, y) = (y, -x)$ de A no plano é a de uma rotação de ângulo reto no sentido horário, portanto desprovido de retas invariantes.

No entanto, podemos encarar o polinômio do exemplo 2.7, como um polinômio complexo e então escrever $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$. Observe que toda matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ pode ser considerada uma matriz complexa, simplesmente pelo fato que todo número real pode ser considerado um número complexo; em particular, o polinômio $p(\lambda)$ dessa matriz, que é sempre um polinômio real, pode ser considerado um polinômio complexo. Para esses polinômios complexos, o Teorema Fundamental da Álgebra garante fatoração completa, portanto sempre podemos escrever

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (z - \gamma_1)(z - \gamma_2) \dots (z - \gamma_n),$$

com raízes complexas $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ que, distintas ou não, são possivelmente reais. Para polinômios de grau 2, isso é evidente, pois sempre temos duas raízes que, distintas ou não, são reais ou complexas conjugadas.

Definição 2.15. Dados uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e um número complexo $\gamma = a + ib$, com $b \neq 0$, dizemos que γ é um autovalor complexo de A se γ é raiz do polinômio característico $p(\lambda)$ de A .

Lembre que se $\gamma = a + ib$ é um número complexo, com $a, b \in \mathbb{R}$, então a e b são denominados a parte real e imaginária de γ , respectivamente.

Definição 2.16. Dizemos que as raízes do polinômio característico $p(\lambda)$ de A são os **autovalores generalizados** de A : se reais, então são autovalores associados a autovetores de A e se são complexas com parte imaginária não-nula, são autovalores complexos de A , que não estão associados a autovetores de A . No entanto, podemos estender a ação de A de \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n e obter autovetores complexos associados aos autovalores complexos.

Exemplo 2.9. Voltando ao exemplo 2.8 e encontrando os autovalores e autovetores ambos complexos. Temos:

Sabemos que o polinômio característico de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ é $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, onde seus autovalores complexos são i e $-i$. Seguiremos como fazemos no caso de autovetores reais para encontrar os autovetores complexos. Logo,

$$Av_1 = iv_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema,

$$y = ix \text{ e } -x = iy.$$

Ou seja, são a mesma equação. Assim, $v_1 = x(1, i)$ onde $v_1 \in \mathbb{C}^2$, repetindo o processo para o autovalor $-i$, obtemos $v_2 = x(1, -i)$ onde $v_2 \in \mathbb{C}^2$. Observe que $v_2 = \overline{v_1}$, onde a barra denota a conjugação de números complexos, ou seja

$$\overline{a + ib} = a - ib$$

se $a, b \in \mathbb{R}$; o conjugado de um vetor em \mathbb{C}^n é o vetor dos conjugados. Note também que seguindo estendendo a ação de A , temos que a mesma é semelhante à matriz complexa diagonal $\text{diag}(i, -i)$, ou da forma

$$A \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

só que a matriz de semelhança é, também, complexa: as colunas dessa matriz Q são dadas por v_1, v_2 , ou seja, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$. Desse modo, A não é diagonalizável segundo nossa definição, como aliás, nem poderia ser, já que não possui autovalores. Por outro lado, o teorema 2.7 continua valendo em \mathbb{C}^n : n autovalores (complexos) distintos garantem uma base de autovetores (complexos) e diagonalização (complexa).

Definição 2.17. Dados uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e um autovalor complexo γ de A , dizemos que um vetor não-nulo, $w \in \mathbb{C}^n$, é um **autovetor complexo** de A associado ao autovalor γ se $Aw = \gamma w \in \mathbb{C}^n$.

Note que dada uma matriz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, essa matriz é invertível como uma matriz complexa se, e somente se, $\det B \neq 0$. Assim, temos que $\gamma \in \mathbb{C}$ é um autovalor complexo de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ se, e somente se, $\det(\gamma I_n - A) = 0$, se e somente se, existe um autovetor complexo de A associado ao autovalor complexo γ . Pelo Teorema Fundamental da Álgebra decorre, portanto, que qualquer matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ sempre possui autovalores (generalizados) e autovetores (possivelmente complexos).

Proposição 2.5. Dados uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, um número complexo com parte imaginária não-nula γ e um vetor não-nulo $w \in \mathbb{C}^n$, temos:

1. γ é um autovalor complexo de A se, e somente se, $\bar{\gamma}$ é um autovalor complexo de A ;
2. w é um autovetor complexo de A com autovalor γ se, e somente se, \bar{w} é um autovetor complexo de A com autovalor $\bar{\gamma}$;
3. Se w é um autovetor complexo de A com autovalor γ , então $\{w, \bar{w}\}$ é linearmente independente em \mathbb{C}^n .

Demonstração: Como A é uma matriz real, o polinômio característico de $p(z)$ de A tem coeficientes reais e, deste modo, $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$; se γ é um autovalor complexo de A , resulta

$$p(\bar{\gamma}) = \overline{p(\gamma)} = \bar{0} = 0$$

e assim, $\bar{\gamma}$ também é um autovalor complexo de A . Se $w \in \mathbb{C}^n$ é um autovetor de A com autovalor γ , então

$$A\bar{w} = \overline{Aw} = \overline{\gamma \cdot w} = \bar{\gamma} \cdot \bar{w},$$

já que A é uma matriz real e, portanto, \bar{w} é um autovetor complexo de A com autovalor $\bar{\gamma}$. Além disso, como $\gamma \neq \bar{\gamma}$ o lema 2.1 garante que $\{w, \bar{w}\}$ é linearmente independente em \mathbb{C}^n .

Assim, os autovalores complexos de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ sempre aparecem aos pares conjugados e os correspondentes autovetores complexos são sempre conjugados e linearmente independentes; observe que isso vale porque as matrizes de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ são sempre reais.

Note que se $w \in \mathbb{C}^n$ é um autovetor complexo da matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, então $zw \in \mathbb{C}^n$ também é autovetor complexo de A , para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Assim, a cada autovetor real de A corresponde a uma reta (real) em \mathbb{R}^n invariante por A e a cada autovalor complexo corresponde uma "reta complexa" em \mathbb{C}^n invariante por A ; essa "reta complexa" define um plano em \mathbb{R}^n que é invariante por A .

Para ver isso, passamos a identificar $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$ ou, o que vem a ser o mesmo, separamos cada coordenada complexa de um vetor em suas partes real e imaginária e, assim, dado $w \in \mathbb{C}^n$, podemos escrever $w = u + iv$, com $u, v \in \mathbb{R}^n$. Em particular, como u, v são vetores reais, se torna imediato ver que sempre

$$\bar{w} = \overline{u + iv} = u - iv.$$

No caso $n = 1$, isso significa simplesmente tomar as partes real e imaginária do escalar complexo. Já em \mathbb{C}^2 , por exemplo os vetores complexos conjugados do exemplo 2.7, a saber, $w_1 = (1, i)$ e $w_2 = \bar{w}_1 = (1, -i) \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^2 + i\mathbb{R}^2$, podem ser decompostos em

$$w_1 = (1, 0) + i(0, 1) \quad \text{e} \quad w_2 = (1, 0) - i(0, 1).$$

Observe também que $w_1 + w_2 = 2(1, 0)$ e $w_1 - w_2 = 2i(0, 1)$. Isso é geral, não sendo difícil verificar que, dado $w \in \mathbb{C}^n$,

$$u = \frac{1}{2}(w + \bar{w}) \quad \text{e} \quad v = \frac{1}{2i}(w - \bar{w}) \tag{3}$$

são os únicos vetores em \mathbb{R}^n tais que $w = u + iv$.

Proposição 2.6. Sejam $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $w \in \mathbb{C}^n$ um autovetor complexo de A associado ao autovalor $a + ib \in \mathbb{C}$, com $b \neq 0$. Escrevendo $w = u + iv$, com $u, v \in \mathbb{R}^n$ dados por [3], temos que $\{u, v\}$ é linearmente independente em \mathbb{R}^n e

$$\begin{cases} Au = au - bv \\ Av = bu + av \end{cases} .$$

Demonstração : Suponha que w seja um autovetor complexo de A e sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $w = u + iv$, como em (3). Vamos supor que $\{u, v\}$ seja linearmente dependente em \mathbb{R}^n , isto é, que exista $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha u$. Então $w - \bar{w} = 2iv = 2i\alpha u = i\alpha(w + \bar{w})$ e, portanto, $(1 - i\alpha)w = (1 + i\alpha)\bar{w}$. Daqui segue-se que essa igualdade nunca será zero, pois w e \bar{w} são autovetores de A e $1 - i\alpha \neq 0 \neq 1 + i\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, isso significa que $\{w, \bar{w}\}$ é linearmente dependente em \mathbb{C}^n , contrariando o estabelecido no lema 2.1, pois w e \bar{w} são autovetores de A associados a autovalores distintos. Segue que $\{u, v\}$ é linearmente independente em \mathbb{R}^n .

Seja $\gamma = a + ib$, com $b \neq 0$, o autovalor associado a w . Pela unicidade da decomposição [3], a segunda afirmação da proposição decorre da igualdade

$$Au + iAv = A(u + iv) = aw = \gamma w = (a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(bu + av),$$

Já que, por $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, temos que $Au, Av \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.10. Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

encontre a matriz J tal que A é semelhante a mesma.

Solução : Começaremos calculando os autovalores de A . Então

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 5) = (\lambda - 1)(\lambda + 2 - i)(\lambda + 2 + i)$$

Temos apenas 1 autovalor real, porém olhando os autovalores generalizados temos 3 que são $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 + i$ e $\lambda_3 = -2 - i$. Daqui segue-se que o próximo passo é encontrar os autovetores associados aos autovalores dispostos acima. Resolvendo o sistema $Aw_i = \lambda_i w_i$ com $i = 1, 2, 3$. Logo

$$Aw_1 = w_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow w_1 = x_1(1, 1, 0)$$

tomando $x_1 = 1$ temos que $w_1 = (1, 1, 0)$.

Agora para encontrar o autovetor complexo resolveremos o sistema com o autovalor complexo. Então

$$Aw_2 = (-2 + i)w_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = (-2 + i) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} .$$

Daí segue que

$$\begin{cases} z_1 = z_1 \\ z_2 = \frac{(-3+i)z_1}{2} \\ z_3 = \frac{(3-i)z_1}{2} \end{cases} .$$

Tomando $z_1 = 2$, obtemos $z_3 = 3 - i$, então $z_2 = -3 + i$, de modo que $w_2 = (2, -3 + i, 3 - i) \in \mathbb{C}^3$ é um autovetor complexo de A de autovalor complexo $-2 + i$ e usando a proposição 2.6, temos

$$Au = A \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2u - v$$

e

$$Av = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = u - 2v,$$

onde decomparamos $w_2 = (2, -3 + i, 3 - i) = (2, -3, 3) + i(0, 1, -1) = u + iv$.

Das contas que acabamos de fazer, decorre que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

são tais que Q é invertível e $AQ = QJ$, ou seja, A é semelhante a J .

Observe que J não é diagonal e nem poderia por toda a teoria que vimos até aqui, veremos mais sobre a mesma no decorrer deste trabalho. Note também que, para obter Q , não utilizamos o autovalor complexo associado ao autovalor complexo $-2 - i$, pois, pela proposição 2.6, basta um autovetor de um dos dois autovalores conjugados. Isso porque, como vimos, o conjugado do autovetor é um autovetor do autovalor conjugado: $w_3 = \overline{w_2} = (2, -3 - i, 3 + i)$ é um autovetor associado a $-2 - i$.

Para resolver o caso geral de sistemas de equações diferenciais ordinárias $x' = Ax$, com $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz qualquer, necessitamos da decomposição de uma matriz em forma canônica de dada pelo Teorema da Decomposição de Jordan. Em seguida apresentaremos uma demonstração desse teorema no caso de matrizes 2×2 .

Observação 2.9. Sejam A e B duas matrizes quadradas, $A \sim B$ significa que as matrizes são semelhantes.

Teorema 2.18. [Forma Canônica de Jordan 2×2] Dependendo de duas raízes λ_1 e λ_2 do polinômio característico $p_A(\lambda)$ de uma matriz 2×2 real $A \in \mathbb{M}_2$, ocorre exatamente um dos seguintes casos de classes de equivalência de semelhança de matrizes:

1. Se λ_1, λ_2 são reais e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, sendo as colunas da matriz de conjugação linear dadas por quaisquer autovetores associados aos λ_1 e λ_2 ;

2. Se $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ é real e

- (a) $\dim \text{Nuc}(\lambda_0 I_2 - A) = 2$, então $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I_2$;

(b) $\dim Nuc(\lambda_0 I_2 - A) = 1$ então $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, sendo as colunas da matriz de conjugação linear dadas por qualquer vetor u fora do autoespaço $Nuc(\lambda_0 I_2 - A)$ e o autovetor $v = Au + \lambda_0 u$ de A associado ao autovalor λ_0 ;

3. Se $\lambda_1 = a + ib$ e $\lambda_2 = a - ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, são números complexos conjugados, então $A \sim \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, sendo as colunas da matriz de conjugação linear dadas pelas partes real e imaginária de qualquer autovetor complexo de A associado ao autovalor λ_1 .

Demonstração: O caso (1) de autovalores reais e distintos, foi demonstrado no teorema 2.7 e na proposição 2.4 acima, até mesmo em \mathbb{R}^n .

Para provar o caso (2), supomos que as raízes do polinômio característico sejam iguais a λ_0 , de modo que $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$. Se $\dim Nuc(\lambda_0 I_2 - A) = 2$, então λ_0 está associado a dois autovetores, ou seja, $w = au + bv$, logo $\lambda_0 I_2 - A = 0 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e, portanto, $A = \lambda_0 I_2$, provando esse caso. Se $\dim Nuc(\lambda_0 I_2 - A) = 1$, então também a $\dim Im(\lambda_0 I_2 - A) = 1$ pelo teorema do núcleo e da imagem. Mas pelo teorema de Cayley, (Teorema de Cayley : Uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ anula seu polinômio característico, ou seja, $p_A(A) = 0 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$). Logo em \mathbb{R}^2

$$(\lambda_0 I_2 - A)(\lambda_0 I_2 - A) = (\lambda_0 I_2 - A)^2 = p(A) = 0 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}).$$

Assim o operador $(\lambda_0 I_2 - A)^2$ é o operador nulo, tal que

$$\begin{aligned} (\lambda_0 I_2 - A)^2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\mapsto 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

logo $Nuc((\lambda_0 I_2 - A)^2) = Im(\lambda_0 I_2 - A)^2 = 2$, daqui segue que $(\lambda_0 I_2 - A)[(\lambda_0 I_2 - A)u] = 0 \in \mathbb{R}^2$ para cada $u \in \mathbb{R}^2$. Seja $r = (\lambda_0 I_2 - A)u$ onde $r \in Im(\lambda_0 I_2 - A)$, ou seja, $\forall r \in Im(\lambda_0 I_2 - A) \rightarrow (\lambda_0 I_2 - A)r = 0$, com isso $r \in Nuc(\lambda_0 I_2 - A)$, então $Im(\lambda_0 I_2 - A) \subseteq Nuc(\lambda_0 I_2 - A)$. Como esses dois espaços tem a mesma dimensão, decorre que

$$Im(\lambda_0 I_2 - A) = Nuc(\lambda_0 I_2 - A).$$

Tomemos um vetor $u \in \mathbb{R}^2 - Nuc(\lambda_0 I_2 - A)$ qualquer. Então $u \neq 0$ e $(\lambda_0 I_2 - A)u \neq 0$. Definindo $v = -(\lambda_0 I_2 - A)u$, decorre que $Au = \lambda_0 u + v$ e, pelo o que acabamos de ver, $0 \neq v \in Im(\lambda_0 I_2 - A) = Nuc(\lambda_0 I_2 - A)$. Assim v é um autovetor de A associado ao autovalor λ_0 , $\{u, v\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 e a matriz $Q \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ de colunas $Qe_1 = u, Qe_2 = v$ é invertível. Escrevendo $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, temos $Je_1 = \lambda_0 e_1 + e_2$ e $Je_2 = \lambda_0 e_2$ e, portanto,

$$\begin{cases} AQe_1 = Au = \lambda_0 u + v = \lambda_0 Qe_1 + Qe_2 = Q(\lambda_0 e_1 + e_2) = QJe_1 \\ AQe_2 = Av = \lambda_0 v = \lambda_0 Qe_2 = Q\lambda_0 e_2 = QJe_2, \end{cases}$$

De modo que $AQ = QJ$, ou seja, $A \sim J$, provando o caso (2)(b).

Para provar o caso (3), supomos que as raízes do polinômio característico de A são complexas conjugadas $\gamma_1 = a + ib = \gamma$ e $\lambda_2 = a - ib = \bar{\gamma}$, com a, b reais e $b \neq 0$. Seja $w \in \mathbb{C}^2$ um autovetor complexo de A com autovalor complexo γ e seja $w = u + iv$ a decomposição de w dada em [3], com $u, v \in \mathbb{R}^n$. Pela proposição 2.6 $\{u, v\}$ é linearmente independente em \mathbb{R}^2 , portanto, a matriz real $Q \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ de colunas $Qe_1 = u, Qe_2 = v$ é invertível e $Au = au - bv, Av = bu + av$. Escrevendo $J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, temos $Je_1 = ae_1 - be_2$ e $Je_2 = be_1 + ae_2$ e, portanto,

$$\begin{cases} AQe_1 = Au = au - bv = aQe_1 - bQe_2 = Q(ae_1 - be_2) = QJe_1 \\ AQe_2 = Av = bu + av = bQe_1 + aQe_2 = Q(be_1 + ae_2) = QJe_2, \end{cases}$$

De modo que $AQ = QJ$, ou seja, $A \sim J$.

Passamos, agora, à resolução da equação $x' = Ax$. No caso de autovalores complexos, precisamos do seguinte corolário da proposição 2.6, que é a versão complexa da proposição 2.3, em que usamos a definição da exponencial complexa $e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$, conhecida como a fórmula de Euler.

Corolário 2.19. Seja $w \in \mathbb{C}^2$ um autovetor complexo de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ com autovalor complexo associado $\lambda = a + ib$, com $b \neq 0$. Seja $w = u + iv$ a decomposição de w dada em (1.0), com $u, v \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}[(\cos bt)u - (\sin bt)v] \\ y(t) = e^{at}[(\sin bt)u + (\cos bt)v] \end{cases}$$

definem as únicas soluções de $x' = Ax$, com $x(0) = u$ e $y(0) = v$, respectivamente.

Demonstração: Como $w \in \mathbb{C}^n$ é um autovetor complexo de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ com autovalor complexo associado λ , temos $Aw = \lambda w$; escrevendo $z(t) = e^{\lambda t}w$, obtemos

$$z'(t) = \lambda e^{\lambda t}w = e^{\lambda t}Aw = Ae^{\lambda t}w = Az(t)$$

de modo que $z(t)$ é uma solução complexa de $x' = Ax$. (Esse é o análogo complexo da afirmação real) Escrevendo $w = u + iv$, com $u, v \in \mathbb{R}^n$, e $\lambda = a + ib$, com $b \neq 0$, a fórmula de Euler garante que

$$z(t) = e^{(a+ib)t}w = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(u + iv) = e^{at}[(\cos bt)u - (\sin bt)v] + ie^{at}[(\sin bt)u + (\cos bt)v],$$

de modo que, escrevendo $z(t) = x(t) + iy(t)$, resulta

$$x(t) = e^{at}[(\cos bt)u - (\sin bt)v], \quad y(t) = e^{at}[(\sin bt)u + (\cos bt)v].$$

Essas partes real e imaginária da solução complexa $z(t)$ de $x' = Ax$ são, de fato, soluções de $x' = Ax$. Para ver isso, basta lembrar que $Au = au - bv$ e $Av = bu + av$, pela proposição (2.6), e desenvolver:

$$x'(t) = ae^{at}[(\cos bt)u - (\sin bt)v] - e^{at}[(b \sin bt)u + (b \cos bt)v] = e^{at} \cos bt(au - bv) - e^{at} \sin bt(bu + av) = A(e^{at}(\cos bt)u - e^{at}(\sin bt)v) = Ax(t).$$

Analogamente, constatamos que $y'(t) = Ay(t)$.

Exemplo 2.11. No exemplo 2.8 calculamos que $w = (2, -3 + i, 3 - i) = (2, -3, 3) + i(0, 1, -1) = u + iv$ é um autovetor complexo de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

associado ao autovalor complexo $-2 + i$. Pelo resultado acima,

$$x(t) = e^{-2t} \cos t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - e^{-2t} \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e

$$y(t) = e^{-2t} \sin t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{-2t} \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

definem as (únicas) soluções (reais) de $x' = Ax$ com condições iniciais $x(0) = u = (2, -3, 3)$ e $y(0) = (0, 1, -1)$.

Exemplo 2.12. Resolva $x' = Ax$ relacionada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Solução: Observe que a matriz A é exatamente a forma (3) do Teorema da Decomposição de Jordan e tem autovalores complexos $a \pm ib$ com autovetores complexos associados dados, respectivamente, por $W = (1, i), \bar{w} = (1, -i) \in \mathbb{C}^2$. Pelo resultado acima,

$$x(t) = e^{at} \cos bt \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^{at} \sin bt \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$y(t) = e^{at} \sin bt \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{at} \cos bt \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são as soluções de $x' = Ax$, com $x(0) = (1, 0)$ e $y(0) = (0, 1)$. Daqui segue-se $k_1 x(t) + k_2 y(t)$, ou seja,

$$\begin{aligned} & e^{at}(k_1 \cos bt + k_2 \sin bt, -k_1 \sin bt + k_2 \cos bt) \\ &= e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é a única solução de $x' = Ax, x(0) = (k_1, k_2)$. Observe que essa solução é periódica de período $\frac{2}{b}\pi$, se $a = 0$ e $x(0) \neq (0, 0)$.

Generalizando o exemplo acima, se $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ tem dois autovalores complexos conjugados, digamos $a \pm ib, b \neq 0$, então, pela forma canônica de Jordan, existe uma matriz real $Q \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Decorre da proposição 2.1 que a solução de $x' = Ax$ é dada por

$$x(t) = e^{at}Q \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix},$$

com $x(0) = Q(k_1, k_2)$. Se quisermos ser mais explícitos, podemos tomar $Q = (u, v) \in (\mathbb{R}_2)^2 = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, onde $u, v \in \mathbb{R}^2$ são as partes real e imaginária do autovetor complexo $w = u + iv$, dado por $Aw = (a + ib)w$. Em particular, obtemos as soluções explícitas

$$x(t) = e^{at}[(\cos bt)u - (\sin bt)v],$$

$$y(t) = e^{at}[(\sin bt)u + (\cos bt)v]$$

de $x' = Ax$, com $x(0) = u, y(0) = v$, já fornecidas, até em \mathbb{R}^n , no corolário 2.19.

3 Forma Canônica de Jordan

Anteriormente, vimos a forma canônica de Jordan no caso (2×2) , o objetivo nesta seção é vê-la na sua forma geral e aprender a utilizá-la para resolver EDOs como estávamos fazendo no capítulo anterior, mas agora contando com essa ferramenta a mais, caso a matriz associada a EDO na qual queremos resolver, não seja diagonalizável, como aprendemos anteriormente.

3.1 Exponencial de matrizes

Passamos agora ao conceito central da teoria de equações lineares, o de exponencial de uma matriz. A ideia inicial é de estender a expressão da solução $x(t) = e^{at}x_0$ da equação escalar $x' = ax$ a uma expressão da solução $x(t) = e^{at}x_0$ da equação vetorial $x' = Ax$. Usando a expressão em série de Taylor

$$e^a = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} a^j.$$

da exponencial escalar, observamos que, para estender essa definição diretamente à exponencial de uma matriz, precisamos de séries convergentes de matrizes; para convergência de séries de matrizes, precisamos de normas no espaço de matrizes e, para definir normas no espaço de matrizes, procedemos como em espaços vetoriais normados abstratos.

O espaço das matrizes $n \times n$ com entradas reais, ou seja, $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real. O elemento neutro (para a operação de soma) em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é a matriz nula 0 com todas as entradas nulas. Além das operações de soma de matrizes e multiplicação por escalar real, temos também a multiplicação de matrizes. O elemento neutro para a operação de produtos em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é a matriz identidade $I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$, ou seja, a matriz diagonal com todas as entradas na diagonal iguais a 1. Uma matriz B é a matriz inversa de A se valer $BA = I = AB$; denotamos a inversa de A por A^{-1} .

Os espaços euclidianos não são, em geral, álgebras vetoriais, mas a presença de um produto no espaço de matrizes $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, que é linearmente isomorfo a \mathbb{R}^{n^2} , faz desse particular espaço vetorial uma álgebra vetorial (não comutativa, já que o produto de matrizes não é comutativo).

Observação 3.1. Vamos exemplificar a parte do isomorfismo citado no parágrafo anterior. Com isso, segue-se:

Sejam $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$, onde $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, e $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $T(A) = ((a, b), (c, d)) = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Observe que $T(A) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Logo, o espaço de matrizes 2×2 com entradas reais é isomorfo a \mathbb{R}^4 . Note que podemos estender este conceito para $T : \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n \cdot m}$, então o espaço de matrizes $n \times m$ é isomorfo ao espaço $\mathbb{R}^{n \cdot m}$. Portanto, $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é isomorfo a \mathbb{R}^{n^2}

Como em todo espaço vetorial, temos muitas normas à nossa disposição no espaço $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ mas, para nossos propósitos, a norma mais conveniente é a norma de operador definida por

$$\|A\| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax| = \sup_{|x|=1} |Ax| \quad (4)$$

para $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ Aqui, $|\cdot|$ é a norma euclidiana de \mathbb{R}^n .

Observação 3.2. Geometricamente falando, se imaginarmos esta norma em \mathbb{R}^2 estamos calculando a norma euclidiana $|Ax|$ de vetores $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $|x| \leq 1$, ou seja dos vetores que compõem uma circunferência e $\sup |Ax|$ significa a menor circunferência que contenha estes vetores. Se generalizarmos esta ideia estaremos falando de bolas nos espaços que estamos trabalhando que é o caso de \mathbb{R}^n .

A definição de norma (4) nos leva a validade de uma propriedade fundamental para nossos estudos:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad (5)$$

onde $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Escrevendo

$$A^0 = I, \quad A^1 = A \quad \text{e} \quad A^{m+1} = A^m A^1$$

para as potências A^m de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, por indução resulta

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m, \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N}.$$

A propriedade (5) da norma de operador em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ faz de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ uma álgebra vetorial normada. Exemplos triviais de álgebras normadas (nas quais vale a igualdade em (5)) são os corpos \mathbb{R} e \mathbb{C} dos números reais e complexos, munidos, respectivamente, dos valores absolutos $|x| = \sqrt{x^2}$ e $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Agora podemos definir a matriz exponencial de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ por

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{j!}A^j + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j. \quad (6)$$

Também escrevemos $\exp(A) = \exp A = e^A$.

A primeira pergunta que nos surge é saber se a série que define a exponencial converge ou não no espaço normado $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, isto é, desejamos saber se esse conceito está bem definido. No caso $n = 1$, temos $e^{(a)} = (e^a)$ e a série de Taylor exponencial escalar converge. No caso geral, tomando a norma $\|\cdot\|$ de operador $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, obtemos:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{j!}A^j \right\| = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A\|^j = e^{\|A\|}, \quad (7)$$

onde usamos, de maneira essencial, a propriedade 5. Note que $\|A\|$ é um número real, então pelo teste da comparação a série $\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{j!}A^j \right\|$ é absolutamente convergente e em particular $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j$ é convergente. Isso mostra que a exponencial de uma matriz está bem definida.

Exemplo 3.1. Calcule a exponencial de uma matriz diagonal, ou seja,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Solução: Partindo da definição de exponencial de matrizes apresentada em (6), temos que

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{j!}A^j + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j.$$

Note que $D^j = \text{diag}(\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j)$, aplicando isso a definição, então

$$\begin{aligned} e^D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{1}{2!}\lambda_1^2 + \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 + \frac{1}{2!}\lambda_2^2 + \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \lambda_n + \frac{1}{2!}\lambda_n^2 + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\lambda_1^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\lambda_2^j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\lambda_n^j \end{pmatrix} \\ &= \text{diag} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\lambda_1^j, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\lambda_2^j, \dots, \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\lambda_n^j \right) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}) \end{aligned}$$

Isso é válido para todo $j \in \mathbb{N}$ e com isso, em particular, temos $e^0 = I$ e $e^I = \text{diag}(e, e, e, \dots, e) = eI$. Portanto, quando calculamos a exponencial de uma matriz diagonal, isso nada mais é, do que a exponencial das entradas da diagonal desta matriz.

Com isso, a solução de $x' = Ax$ quando A é matriz diagonal, tornam-se $x(t) = e^{tA}x_0, x(0) = x_0$

Exemplo 3.2. Calcule a exponencial da matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

Solução: Observe que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}^j = 0 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, para cada $j \geq 2$, de modo que, usando a definição novamente

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

conseguimos calcular a $\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, como está ilustrado acima.

Mais geralmente, podemos calcular a exponencial de qualquer matriz desse tipo "sub conjugada", por exemplo,

$$G_c(l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),$$

já que essas matrizes são **nilpotentes**, ou seja, vale $G_c(l)^l = 0$. Por exemplo, observe que

$$\begin{aligned} G_c(4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}, & G_c(4)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 \end{pmatrix} \\ G_c(4)^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & G_c(4)^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, podemos calcular imediatamente, pela definição,

$$\begin{aligned} e^{G_c(4)} &= I + G_c(4) + \frac{1}{2!}G_c(4)^2 + \frac{1}{3!}G_c(4)^3 + \frac{1}{4!}G_c(4)^4 + \dots \\ &= I + G_c(4) + \frac{1}{2!}G_c(4)^2 + \frac{1}{3!}G_c(4)^3 + \dots \\ &= G_c(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!} & c & 1 & 0 \\ \frac{c^3}{3!} & \frac{c^2}{2!} & c & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em geral, obtemos

$$G_c(l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!} & c & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^3}{3!} & \frac{c^2}{2!} & c & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{c^{l-1}}{(l-1)!} & \frac{c^{l-2}}{(l-2)!} & \frac{c^{l-3}}{(l-3)!} & \dots & c & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),$$

como não é difícil verificar.

Exemplo 3.3. Obtenha a exponencial da matriz $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

Solução: Primeiramente vamos observar como a matriz se comporta, calculando algumas de suas potências,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0 & b^5 \\ -b^5 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde podemos deduzir (por indução) que

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{2j} = (-1)^j \begin{pmatrix} b^{2j} & 0 \\ 0 & b^{2j} \end{pmatrix},$$

para potências pares e

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}^{2j+1} = (-1)^j \begin{pmatrix} 0 & b^{2j+1} \\ -b^{2j+1} & 0 \end{pmatrix},$$

para potências ímpares.

Daqui segue-se por definição que

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -b^3 \\ b^3 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{4!}b^4 + \dots & b - \frac{1}{3!}b^3 + \frac{1}{5!}b^5 + \dots \\ -b + \frac{1}{3!}b^3 - \frac{1}{5!}b^5 + \dots & 1 - \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{4!}b^4 + \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lembrando das séries de Taylor

$$\begin{aligned} \cos b &= 1 - \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{4!}b^4 - \frac{1}{6!}b^6 + \dots = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2j!} b^{2j}; \\ \sin b &= b - \frac{1}{3!}b^3 + \frac{1}{5!}b^5 - \frac{1}{7!}b^7 + \dots = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1!} b^{2j+1}, \end{aligned}$$

que resulta

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

O seguinte resultado é de fundamental importância para o nosso estudo, afirmando que, para calcular a exponencial de uma matriz qualquer, basta calcular a exponencial de alguma matriz conjugada e depois conjugar.

Teorema 3.1. Se $A, B, Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ são tais que $AQ = QB$, então $e^A Q = Q e^B$. Em particular, se as matrizes A e B de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ são conjugadas, então também as matrizes e^A e e^B são conjugadas e, além disso, podemos usar a mesma matriz de conjugação; ou seja, se $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é invertível e $A = QBQ^{-1}$, então

$$e^A = e^{QBQ^{-1}} = Qe^BQ^{-1}.$$

Demonstração: Como $AQ = QB$ segue $A^2Q = AAQ = AQB = QBB = AB^2$ e, por indução, $A^jQ = QB^j$, para $J \in \mathbb{N}$. Assim

$$\begin{aligned} e^AQ &= \left(\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^l \frac{1}{j!} A^j \right) Q = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^l \frac{1}{j!} A^j Q = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^l \frac{1}{j!} QB^j \\ &= Q \left(\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^l \frac{1}{j!} B^j \right) Q = Qe^B, \end{aligned}$$

Provando o teorema.

Pelo o teorema anterior reanalisando o exemplo 2.3, temos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

satisfazem $A = QDQ^{-1}$. Pelo exemplo 5, sabemos calcular a exponencial de D e, portanto,

$$e^A = Q \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

O Teorema 3.1 afirma que é suficiente saber calcular a exponencial de uma matriz de cada classe de conjugação. Por exemplo, poderíamos calcular a exponencial da matriz real $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ lembrando que, essa matriz é linearmente conjugada como matriz complexa à matriz complexa $\text{diag}(a + ib, a - ib)$; no exemplo 3.1 já vimos que a exponencial de uma matriz diagonal é a matriz diagonal com as exponenciais dos elementos da diagonal, portanto resta usar a fórmula de Euler e a decomposição 5.

Entretanto, é mais fácil ver $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, não como matriz linearmente conjugada à matriz diagonal complexa, mas como a soma da matriz diagonal real $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ com a matriz real $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ do exemplo 3.2 e, então, usar a propriedade característica da exponencial: $e^{A+B} = e^A e^B$. Ocorre que isso é uma propriedade que só vale para todas as matrizes de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, o único espaço de matrizes que é comutativo; para matrizes maiores, a validade dessa relação só é garantida para matrizes arbitrárias A e B que comutem, e a prova disso não é de todo imediata.

A maneira que escolhemos para provar $e^{A+B} = e^A e^B$ (Corolário 3.3, adiante) passa pela propriedade fundamental das exponenciais, qual seja, a de fornecer as soluções da equação diferencial $x' = Ax$, como segue.

Fixando a matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e dado $t \in \mathbb{R}$, temos

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}).$$

A fim de motivar a próxima proposição, faremos um exemplo ilustrativo da mesma.

Exemplo 3.4. Pelo exemplo 3.3, fixando $b \in \mathbb{R}$, temos

$$e^{t \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix},$$

portanto podemos derivar cada componente para obter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{t \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} -b \sin bt & b \cos bt \\ -b \cos bt & -b \sin bt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} e^{t \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} e^{t \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}}, \end{aligned}$$

ou seja, para essa matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, temos que $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$. Em particular, cada coluna da matriz exponencial é uma solução da equação diferencial $x' = Ax$.

Proposição 3.1. Dados uma matriz $A \in \mathbb{M}_n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, os caminhos $t \mapsto e^{tA}$ em \mathbb{M}_n e $t \mapsto e^{tA}x_0$ em \mathbb{R}^n são deriváveis e

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \quad \frac{d}{dt} e^{tA}x_0 = A e^{tA}x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Fixando uma matriz $A \in \mathbb{M}_n$ e também um vetor $x_0 \in \mathbb{R}^n$, o caminho derivável

$$t \mapsto e^{tA}x_0 \in \mathbb{R}^n$$

desempenha um papel proeminente, como vemos no principal resultado desta seção, a seguir, que é um corolário imediato da proposição acima que substitui e amplia o Teorema 2.1 enunciado na primeira seção.

Teorema 3.2. Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, então o caminho

$$x(t) = e^{tA}x_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

define a única solução de $x' = Ax$ com condição inicial $x(0) = x_0$.

Corolário 3.3. Dados matrizes A e B em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, temos:

- (1) se $AB = BA$ então $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$; e
- (2) a matriz e^A sempre é invertível, com $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Demonstração: Se A, B são tais que $BA = AB$, então $B(tA) = (tA)B$ e, pelo teorema 3.1, decorre $B e^{tA} = e^{tA} B$. Fixemos $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Definindo $x(t) = e^{tA} e^{tB} x_0$, a regra da derivada do produto garante

$$x'(t) = A e^{tA} e^{tB} x_0 + e^{tA} B e^{tB} x_0 = A e^{tA} e^{tB} x_0 + B e^{tA} e^{tB} x_0 = (A + B)x(t),$$

o que mostra que $x(t)$ é solução de $x' = (A + B)x$ com a condição inicial $x(0) = x_0$. Mas $t \mapsto e^t A + Bx_0$ é a única solução de $x' = (A + B)x$ com condição inicial $x(0) = x_0$; decorre que $x(t) = e^t A + Bx_0$ e, assim, tomando $t = 1$, obtemos $e^t A + Bx_0 = e^{tA} e^{tB} x_0$. Como isso vale para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, as matrizes $e^t A + B$ e $e^{tA} e^{tB}$ resultam iguais.

Em particular, como $A - A = 0$ e $e^0 = I$ pelo exemplo 2.1 acima, decorre que $e^{-A} e^A = I = e^A e^{-A}$, ou seja, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Exemplo 3.5. Calcule a exponencial da matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.

Solução: Observe que A pode ser reescrita como,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

onde, chamaremos a matriz diagonal e a nilpotente de B e C respectivamente. Se $BC = CB$ podemos usar o corolário anterior para calcular sua exponencial.

$$BC = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ac & 0 \end{pmatrix} e$$

$$CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ac & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, as matrizes B e C comutam. Daqui segue que:

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} &= \exp \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ ce^a & e^a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Além do corolário 2.4 usamos o exemplo 3.1. Assim obtivemos as exponenciais de duas das três classes de conjugação dadas pelo Teorema da Decomposição de Jordan (2×2).

Exemplo 3.6. Vejamos também a exponencial das matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ da classe que corresponde a autovalores complexos.

Solução: Novamente, vamos decompor a matriz dada e checar a questão da comutatividade da sua decomposição. Então

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ -ab & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Logo, temos que as matrizes são comutativas e de acordo com a corolário 2.4 e o exemplo 3.3 a $\exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ é:

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \exp \left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} \\ &= e^a \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.7. Para $n = 1$, o Teorema 3.2 diz que $x(t) = e^{ta}x_0$ é a solução da equação escalar $x' = ax$, $x(0) = x_0$, o que confere com o que já sabemos desde o primeiro exemplo.

Vejamos para o caso $n = 2$. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, considere a equação diferencial $x' = Ax$ com a condição inicial $x(0) = x_0$.

No exemplo 3.1 obtivemos e^A e, portanto,

$$x(t) = e^{tA}x_0 = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} x_0$$

é a solução de $x' = Ax$ com $x(0) = x_0$, o que confere com o resultado obtido sem usar a aplicação exponencial, apenas resolvendo EDOs onde a matriz relacionada era diagonal que explicamos na seção anterior.

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$, considere a equação diferencial $x' = Ax$ com a condição inicial $x(0) = x_0$.

No exemplo 3.5 obtivemos a e^A e com isso

$$e^{tA} = e^{\begin{pmatrix} t\lambda & 0 \\ t & t\lambda \end{pmatrix}} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix},$$

portanto

$$x(t) = e^{tA}x_0 = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x_0$$

é solução de $x' = Ax$ com $x(0) = x_0$, o que confere com o resultado obtido sem usar aplicação exponencial no exemplo 2.2.

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, considere a equação diferencial $x' = Ax$ com a condição inicial $x(0) = x_0$.

No exemplo 3.6, obtivemos e^A e, portanto,

$$x(t) = e^{tA}x_0 = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} x_0$$

é a solução de $x' = Ax$ com $x(0) = x_0$, o que confere com o resultado obtido no exemplo 2.12, sem usar a aplicação exponencial.

Recapitulando o que vimos nesta seção até aqui é se quisermos resolver a equação diferencial $x' = Ax$ com a condição inicial $x(0) = x_0$, devemos entender e^{At} , pois a solução é dada explicitamente por $x(t) = e^{tA}x_0$.

Por enquanto, somente sabemos calcular a exponencial de matrizes de ordem 2×2 em forma canônica de Jordan mas adiante apresentaremos o Teorema da Decomposição de Jordan para matrizes $n \times n$, com o que poderemos calcular a exponencial de qualquer matriz e então, finalmente, resolver explicitamente a equação $x' = Ax$ em \mathbb{R}^n .

3.2 Forma canônica de Jordan real

No teorema 3.2 acima vimos que $x(t) = e^{tA}x_0$ é a solução da equação diferencial linear

$$x' = Ax,$$

com a condição inicial $x(0) = x_0$, quando $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, pelo Teorema 3.1, sabemos que a exponencial e^{tA} pode ser dada explicitamente se soubermos calcular explicitamente e^{tP} , para alguma matriz P linearmente conjugada a A , ou seja, uma matriz $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dada por

$$P = Q^{-1}AQ,$$

com $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ invertível. Nosso foco nesta parte da teoria é resolver EDOs relacionadas a qualquer matriz real $n \times n$. Sabemos como fazer isso para $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ e queremos estender esse conceito, para isso é necessário introduzir o Teorema da Forma Canônica de Jordan que essencialmente seria encontrar essa matriz P , onde

$$P = \text{diag}(P_1, P_2, \dots, P_k) = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_k \end{pmatrix}$$

é uma matriz quadrada que tem as matrizes quadradas P_1, \dots, P_k dispostas ao longo da diagonal, com todas as entradas fora dessas matrizes iguais a zero. Dizemos que P é uma matriz diagonal em blocos sendo cada P_i um bloco de P . Observe que as matrizes diagonais em blocos incluem as matrizes diagonais, que podem ser consideradas diagonais em blocos com todos os blocos de mesmo tamanho 1×1 .

Teorema 3.4. [Forma canônica de Jordan]. Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, então A é linearmente conjugada a uma matriz real

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_n) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}).$$

Em que cada J_i é um bloco de Jordan, real ou complexo. A matriz J é única, a menos da ordem dos blocos na diagonal.

A matriz J desse teorema é conhecida como a forma canônica de Jordan de A . Todos os autovalores de A necessariamente estão representados nos blocos afinal, por ser semelhante a A a matriz J tem os mesmos autovalores, mas o mesmo autovalor de A pode repetir em mais de um bloco, de modo que o número r de blocos varia desde o número de autovalores distintos de A até no máximo n .

Exemplo 3.8. Seja A a matriz do exemplo 2.10, então

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$$

sabemos que $p_A = (\lambda - 1)(\lambda + 2 - i)(\lambda + 2 + i)$ pois já calculamos no exemplo 9, onde encontramos que a matriz J semelhante a A era

$$J = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \text{diag}(J_1(1), J_{-2,1}(1))$$

é a forma forma canônica de jordan de A . Note que temos dois blocos um correspondente ao autovalor real e o outro aos autovalores complexos.

Cada bloco J_i da forma canônica de Jordan de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ descreve a ação de A sobre um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n invariante por A , que é um subespaço generalizado associado a algum autovalor, restrito ao qual A é linearmente conjugada a J_i .

Vejamoinicialmente o caso de autovalores reais. Se $J_i = J_\lambda(l)$ de $\mathbb{M}_l(\mathbb{R})$, então existem vetores linearmente independentes u_1, u_2, \dots, u_l de \mathbb{R}^n que geram um subespaço $V_\lambda(l)$ de \mathbb{R}^n tal que A restrita a $V_\lambda(l)$ é linearmente conjugada a J_i . Identificando a base $\{u_1, u_2, \dots, u_l\}$ de $V_\lambda(l)$ com a base canônica de \mathbb{R}^l e A com J_i , observamos que

$$\begin{aligned} Au_1 &= \lambda u_1 + u_2, \\ Au_2 &= \lambda u_2 + u_3, \\ &\vdots \\ Au_{l-1} &= \lambda u_{l-1} + u_l, \\ Au_l &= \lambda u_l \end{aligned}$$

e, portanto, de todos os vetores da base de $V_\lambda(l)$, somente u_l é um autovetor de A , associado a um autovalor λ . Logo, o bloco de Jordan real de autovalor λ e tamanho l por

$$J_\lambda(l) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_l(\mathbb{R}).$$

Note também que este caso descrito acima para matrizes $l \times l$ reais, nada mais é do que uma generalização do caso 2) b) da forma canônica de Jordan 2×2 .

Exemplo 3.9. Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ qualquer de polinômio característico $p_A(\lambda) = (\lambda - 7)^3$. Qual é a forma canônica de Jordan de A ?

Solução: A resposta depende somente da dimensão do autoespaço associado a $\lambda = 7$ que pode ser 1, 2 ou 3. Então:

- i. Se a dimensão do $\text{Nuc}(7I_3 - A) = 1$, ou seja, a matriz A tem apenas um autovetor a forma canônica de Jordan da mesma é dada como no caso acima, por um único bloco da forma,

$$J = J_7(3) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

- ii. Se a dimensão do $\text{Nuc}(7I_3 - A) = 2$, ou seja, a matriz A tem dois autovetores a forma canônica de Jordan da mesma tem dois blocos, como segue,

$$J = \text{diag}(J_7(2), J_7(1)) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- iii. Finalmente, se a dimensão do $\text{Nuc}(7I_3 - A) = 3$, ou seja, a matriz A tem três autovetores então a mesma é diagonalizável e a forma canônica de A é $J = \text{diag}(7, 7, 7) = \text{diag}(J_7(1), J_7(1), J_7(1))$ com três blocos. Observe que não há duas dentre essas formas de Jordan que sejam semelhantes. De fato, matrizes semelhantes tem autoespaços isomorfos, portanto, de mesma dimensão.

Neste exemplo, a forma canônica de Jordan ainda pôde ser lida a partir do polinômio característico e da dimensão do autoespaço associado ao autovalor, já que não havia folga dimensional para ambiguidade. Em geral, a partir de \mathbb{M}_4 , precisamos conferir também as dimensões de outros núcleos, como segue.

Vejam como são determinados todos os blocos de Jordan de um mesmo autovalor real. Seja $A \in \mathbb{M}_n$ uma matriz real com um autovalor real λ de multiplicidade geométrica $d = \dim \text{Nuc}(\lambda I - A)$, ou seja, com d autovetores linearmente independentes associados a λ . Com isso, vale a seguinte continência, para $j \geq 1$

$$\{0\} \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A) \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A)^2 \subseteq \dots \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A)^j \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Usaremos indução para demonstrar a continência acima.

- i. Inicialmente, provaremos a validade para $j = 1$. E para este caso, temos

$$\{0\} \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A).$$

Note que a continência acima é verdadeira, pois todo núcleo de uma transformação linear contém o vetor nulo.

- ii. Suponhamos que a continência é válida para $j = k$. Então

$$\{0\} \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A) \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A)^2 \subseteq \dots \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A)^k \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (8)$$

- iii. Finalizaremos, provando que a continência é válida para $j = k + 1$. Como, por hipótese de indução, temos que (8) é verdadeira, basta provar

$$\text{Nuc}(\lambda I - A)^k \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A)^{k+1}.$$

Daqui segue - se que, queremos encontrar $u \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$(\lambda I - A)^{k+1}u = 0 \Rightarrow (\lambda I - A)[(\lambda I - A)^k u] = 0.$$

Note que $\forall u \in \text{Nuc}(\lambda I - A)^k$ a igualdade acima é satisfeita.

Logo, $\text{Nuc}(\lambda I - A)^k \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A)^{k+1}$. Portanto,

$$\{0\} \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A) \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A)^2 \subseteq \dots \subseteq \text{Nuc}(\lambda I - A)^j \subseteq \mathbb{R}^n$$

é válida para $j \in \mathbb{N}$, ou seja, $j \geq 1$.

Além disso, como todos esses núcleos são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^n , existe $k = k(\lambda)$ a partir do qual todos são iguais. Assim, escrevendo $d_j = \dim Nuc(\lambda I - A)^j$, temos, então,

$$1 \leq d = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_k = d_{k+1} = \dots \leq n.$$

Dizemos que $Nuc(\lambda I - A)^k$ é o autoespaço generalizado associado ao autovalor λ e pode ser provado que $d_k = \dim Nuc(\lambda I - A)^k$ é exatamente a multiplicidade algébrica de λ como raiz do polinômio característico, de A , ou seja, o número de vezes que λ aparece na fatoração completa (garantida pelo Teorema Fundamental da Álgebra) desse polinômio.

Também pode ser provado que $Nuc(\lambda I - A)^k$ é invariante por A e que restrito a esse subespaço vetorial, a ação de A é linearmente conjugada à matriz em blocos dada por todos blocos de Jordan que têm λ na diagonal. Como cada bloco fornece um único autovetor, é exatamente d o número desses blocos, ou seja, juntamente as d matrizes de Jordan da forma de A têm λ na diagonal, resulta uma matriz do tipo

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & * & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{d_k}(\mathbb{R}),$$

em que exatamente $d - 1$ dessas $d_k - 1$ entradas subdiagonais denotadas por $*$ são iguais a 0 e as demais são iguais a 1.

Finalmente, a particular maneira de compor esses d blocos de Jordan depende de maneira muito especial das dimensões $d \leq d_2 \leq \dots \leq d_k$ que são, todas, invariantes da classe de conjugação da matriz A ; para cada sequência dessas dimensões existe uma única sequência de blocos de Jordan (a menos da ordem) que dá a matriz

$$J_\lambda = \text{diag}(J_\lambda(l_1, \dots, l_d))$$

que é a parte da matriz de Jordan de A que exhibe todos os blocos de Jordan reais com o mesmo autovalor λ .

Exemplo 3.10. Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_4$ qualquer de polinômio característico $p_A(\lambda) = (\lambda - 5)^4$. Qual é a forma canônica de Jordan de A ?

Solução: A resposta depende, inicialmente, da dimensão do autoespaço $Nuc(5I - A)$ associado a $\lambda = 5$. Se essa dimensão for 1, 3 ou 4, então A tem, respectivamente, só 1, 3 ou 4 autovetores linearmente independentes, e tem formas canônica, dadas, respectivamente, por

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

sendo que, no último caso, A é diagonalizável. Entretanto, se ocorrer $\dim Nuc(5I - A) = 2$, ou seja, se A tiver apenas 2 autovetores linearmente independentes, a forma canônica de A pode ser dada por

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{quanto} \quad J' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

De fato, essas duas matrizes em forma canônica de Jordan produzem

$$5I - J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad 5I - J' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de modo que $5I - J$ possui dois autovetores $u_1 = (0, b, 0, 0)$ e $u_2 = (0, 0, 0, d)$ onde $b, d \in \mathbb{R}$ e $5I - J'$ também possui, dois autovetores $v_1 = (0, 0, c, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 0, d)$ onde $c, d \in \mathbb{R}$, então a $\dim Nuc(5I - J) = 2 = \dim Nuc(5I - J')$ e, portanto não podemos distinguir essas matrizes (que até poderiam ser linearmente conjugadas) apenas pela dimensão de seu autoespaço. Para poder distinguir entre J e J' devemos passar para as potências seguintes. Como

$$(5I - J)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (5I - J')^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resulta que $(5I - J)^2$ qualquer vetor de \mathbb{R}^4 está no núcleo pois estamos tratando de um operador nulo, então a $\dim Nuc(5I - J)^2 = 4$, já no segundo caso temos os seguintes autovetores, $u_1 = (0, a, 0, 0)$, $u_2 = (0, 0, b, 0)$, $u_3 = (0, 0, 0, c)$, então a $\dim Nuc(5I - J')^2 = 3$, de modo que J e J' de fato não são semelhantes, pois matrizes semelhantes têm esses espaços isomorfos, portanto, de mesma dimensão. Assim, a forma canônica de $A \in \mathbb{M}_4$ é decidida pela dimensão de $Nuc(5I - A)^2$, sempre que a $\dim Nuc(5I - A) = 2$.

Mais precisamente, se $\dim Nuc(5I - A) = 2$ e $\dim Nuc(5I - A)^2 = 4$, então a forma canônica de Jordan de A é

$$J = \text{diag}(J_5(2), J_5(2))$$

e se $\dim Nuc(5I - A) = 2$ e $\dim Nuc(5I - A)^3 = 3$, então a forma canônica de Jordan de A é

$$J' = \text{diag}(J_5(3), J_5(1)).$$

Observe que, em todos os casos desse exemplo, o número de blocos de Jordan na forma canônica de Jordan de A é exatamente igual a $\dim Nuc(5I - A)$.

Exemplo 3.11. Dada

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \\ 8 & -10 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4,$$

encontre a forma canônica de Jordan de A .

Solução: O primeiro passo é encontrar os autovalores associados à matriz A e para isso é necessário, calcular o seguinte determinante:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 5 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda b - 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda + 2 & -1 \\ -8 & 10 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 = (\lambda + 1)^4$$

Com isso, temos apenas um autovalor que é $\lambda = -1$ e este autovalor deve nós fornecer os autovetores da matriz A , então

$$(-I - A)u = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -8 & 10 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 0)$$

resolvendo este sistema, encontramos dois autovetores linearmente independentes, $u_1 = x_2(\frac{4}{2}, 1, \frac{2}{3}, 0)$, $u_2 = x_4(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 1)$, onde $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$. Logo, $\dim Nuc(-I - A) = 2$ e como foi explicado anteriormente precisamos calcular a $\dim Nuc(-I - A)^2$ para sabermos de qual forma canônica de Jordan estamos tratando, e isso nada mais é que calcular $(-I - A)^2 u = 0$. Note que elevando a matriz $-I - A$ ao quadrado, obtemos a matriz nula de $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$, ou seja, qualquer vetor pertencente ao \mathbb{R}^4 é um autovetor de $(-I - A)^2$, então $\dim Nuc(-I - A)^2 = 4$, nos revelando que sua forma canônica de Jordan possui dois blocos 2×2 e é

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vejamos, agora o caso de autovalores complexos. Considerando uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ como uma matriz complexa, pode ser observado que, para um autovalor complexo real, vale o mesmo procedimento algébrico descrito no caso real, acima, acarretando, agora, dimensão real dobrada, pois cada autovalor complexo define um plano em \mathbb{R}^n que é invariante por A . (proposição 2.6).

Se $J_i = J_{a,b}(l)$ é um bloco de Jordan de uma matriz $A \in \mathbb{M}_{2l}(\mathbb{R})$, então existe vetores $u_1, u_2, \dots, u_{2l-1}, u_{2l}$ linearmente independentes de \mathbb{R}^n que geram o subespaço $V_{a,b}(l)$ de \mathbb{R}^n tal que A restrita a $V_{a,b}$ é conjugada a J_i . Identificando essa base de $V_\lambda(l)$ com a base canônica de \mathbb{R}^{2l} e A com J_i , observamos que

$$\begin{aligned} Au_1 &= au_1 - bu_2 + 1u_3 + 0u_4, \\ Au_2 &= bu_1 + au_2 + 0u_3 + 1u_4, \\ Au_3 &= au_3 - bu_4 + 1u_5 + 0u_6, \\ Au_4 &= bu_3 + au_4 + 0u_5 + 1u_6, \\ &\vdots \\ Au &= au_{2l-1} - bu_{2l} \\ Au &= bu_{2l-1} + au_{2l} \end{aligned}$$

e, portanto, somente o vetor $u_{2l-1} + iu_{2l} \in \mathbb{C}^n$, dentre todos os vetores complexos $u_{2l-1} + iu_{2l} \in \mathbb{C}^n$ da base complexa de $V_{a,b}(l)$, é um autovetor complexo de A , associado ao autovalor complexo $a + ib$. Restrita ao subespaço vetorial bidimensional real gerado por u_{2l-1} e u_{2l} , a ação de A é dada pela matriz

$$J_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

E definindo, para $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $l \geq 1$, o bloco de Jordan complexo de autovalor $\gamma = a + ib$ e tamanho $2l$ por

$$J_{a,b}(l) = \begin{pmatrix} J_{a,b} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & J_{a,b} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & J_{a,b} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & J_{a,b} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2l}(\mathbb{R}).$$

onde as matrizes $0, I \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ são dadas

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e lembrando que $J_{a,b}$ está definida acima.

Exemplo 3.12. Dada

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -29 & 18 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -29 & 18 \\ 5 & 7 & -34 & 21 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R}),$$

encontre a forma canônica de Jordan de A .

Solução: O primeiro passo é encontrar os autovalores da matriz $A \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$, com isso, basta calcular o $\det(\lambda I - A)$, então

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -8 & 29 & -18 \\ 0 & \lambda + 1 & 3 & -2 \\ -4 & -6 & \lambda + 29 & -18 \\ -5 & -7 & 34 & \lambda - 21 \end{pmatrix} \\ &= \lambda^4 + 6\lambda^3 + 14\lambda^2 + 14\lambda + 5 = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2 - i)(\lambda + 2 + i). \end{aligned}$$

Em seguida, calcularemos os autovetores de A , resolvendo o seguinte sistema

$$(-I - A)u = 0$$

e também

$$((-2 \pm i)I - A)u = 0,$$

onde $u \in \mathbb{R}^4$, ou seja, iremos encontrar a $\dim \text{Nuc}(-I - A)$ e $\dim \text{Nuc}((-2 \pm i)I - A)$. Daqui segue-se que o autovalor -1 está associado a apenas um autovetor e os autovalores complexos estão associados cada um a um autovetor. Com isso,

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \text{diag}(J_{-1}(2), J_{-2,1}(1)).$$

Logo, acima temos a forma canônica de Jordan de A .

3.3 Exponencial de matrizes em blocos

Passamos agora ao problema de calcular a exponencial de uma matriz qualquer em forma canônica de Jordan. Essencialmente, isso depende de duas coisas: Saber calcular a exponencial de uma matriz em blocos e saber calcular a exponencial de uma matriz nilpotente. É fácil verificar, generalizando o caso de blocos 1×1 , que

$$\text{diag}(A_1, \dots, A_k)^j = \text{diag}(A_1^j, \dots, A_k^j)$$

e que, deste modo,

$$e^{\text{diag}(A_1, \dots, A_k)} = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_k}),$$

ou seja, a exponencial de uma matriz diagonal em blocos é obtida tomando a exponencial de cada bloco individualmente ao longo da diagonal.

Assim, resta aprender a calcular a exponencial de blocos de Jordan. Observe que sempre podemos decompor o bloco de Jordan real $J_\lambda(l)$ de autovalor na diagonal, ou seja, $\lambda I \in \mathbb{M}_l(\mathbb{R})$, com uma matriz "subdiagonal" nilpotente:

$$J_\lambda(l) = \lambda I + G_1(l).$$

Lembrando que

$$J_\lambda(l) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_l(\mathbb{R}).$$

Como já sabemos calcular exponencial de matrizes diagonais e também da matriz nilpotentes $G_1(l)$ e como estas matrizes comutam (podemos generalizar o caso que foi feito anteriormente 2×2 , por indução que se uma matriz é diagonal e a outra nilpotente a multiplicação de ambas comutam) o item (1) do corolário 3.3 garante que

$$e^{J_\lambda(l)} = e^{\lambda I + G_1(l)} = e^{\lambda I} e^{G_1(l)} = e^\lambda e^{G_1(l)}$$

e, assim,

$$e^{J_\lambda(l)} = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(l-1)!} & \frac{1}{(l-2)!} & \frac{1}{(l-3)!} & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_l(\mathbb{R}).$$

Vamos agora considerar os blocos associados a autovalores complexos. Escrevendo $J_{a,b}^0(l) = \text{diag}(J_{a,b}, J_{a,b}, \dots, J_{a,b}) \in \mathbb{M}_{2l}(\mathbb{R})$ e, imitando o caso real, escrevendo

$$G_{c,I}(l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ cI & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & cI & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & cI & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2l}(\mathbb{R}).$$

temos que $J_{a,b}(l) = J_{a,b}^0(l) + G_{c,I}(l)$.

Não é difícil verificar que $G_{c,I}(l)^l = 0$, portanto essa matriz é nilpotente e decorre

$$e^{G_{c,I}(l)} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ cI & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!}I & I & I & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^3}{3!}I & \frac{c^e}{2!}I & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{c^{l-1}}{(l-1)!}I & \frac{c^{l-2}}{(l-2)!}I & \frac{c^{l-3}}{(l-3)!}I & \dots & cI & I \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2l}(\mathbb{R}).$$

Pelo exemplo 3.6 sabemos que $e^{J_{a,b}} = e^a R_b \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, onde

$$R_b = \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix},$$

portanto,

$$e^{J_{a,b}^0(l)} = \text{diag}(e^{J_{a,b}}, e^{J_{a,b}}, \dots, e^{J_{a,b}}) = e^a \text{diag}(R_b, R_b, \dots, R_b).$$

Como $J_{a,b}^0(l)$ é diagonal em blocos, é fácil verificar que as matrizes em blocos $J_{a,b}^0(l)$ e $G_{1,I}^0(l)$ comutam, de modo que, usando o item (1) do corolário 3.3, obtemos

$$e^{J_{a,b}(l)} = e^{J_{a,b}^0 + G_{1,I}(l)} = e^{J_{a,b}^0} e^{G_{1,I}(l)}$$

e, assim,

$$e^{J_{a,b}(l)} = \begin{pmatrix} R_b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ R_b & R_b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2!}IR_b & R_b & R_b & \dots & 0 & 0 \\ \frac{c^3}{3!}R_b & \frac{c^e}{2!}R_b & R_b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{c^{l-1}}{(l-1)!}R_b & \frac{c^{l-2}}{(l-2)!}R_b & \frac{c^{l-3}}{(l-3)!}R_b & \dots & R_b & R_b \end{pmatrix}.$$

Isso explicita a exponencial de cada um dos dois tipos de blocos que podem aparecer na forma canônica de Jordan. Como qualquer matriz A é linearmente conjugada a uma matriz J em forma canônica de Jordan, o teorema 3.1 garante que a exponencial de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ qualquer é dada pela exponencial de J conjugada pela mesma matriz que conjuga A e J .

Exemplo 3.13. Vejamos agora, a exponencial de algumas matrizes de exemplos anteriores:

(a) Dada as matrizes

$$J_1 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

calcule a exponencial de $J_1, J_2 \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$.

Solução: Note que as duas matrizes dadas, são diagonais em blocos e podemos decompor as mesmas, na soma de uma matriz diagonal e a outra nilpotente, então

$$J_1 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que as duas matrizes acima que decompõem J_1 na soma apropriada, sua multiplicação é comutativa. Chamando-as de D e G , respectivamente a matriz diagonal e nilpotente, temos

$$e^{J_1} = e^{D+G} = e^D e^G.$$

Logo, como foi explicado anteriormente

$$e^{J_1} = e^7 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Já para a matriz J_2 também faremos o mesmo processo, então

$$J_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chamando as matrizes de D' e G' respectivamente a matriz diagonal e a nilpotente. Observe que a multiplicação dessas matrizes é comutativa, então de acordo com o item (1) do corolário 3.3, temos

$$e^{J_2} = e^{D'+G'} = e^{D'} e^{G'}.$$

Daqui, segue-se que

$$e^{D'} = e^7 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad e^{G'} = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pois $G'^2 = 0$, onde 0 é a matriz nula, com isso

$$e^{J_2} = e^7 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, encontramos as exponenciais de $J_1, J_2 \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 6 & 11 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}),$$

a matriz do exemplo 2.10, calcule a exponencial de A .

Solução: Como A possui os autovalores 1 e $-2 \pm i$, então cada autovalor tem um autovetor associado e sua matriz de Jordan é

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que A é semelhante a J , que significa $AQ = QJ \Rightarrow A = QJQ^{-1}$, onde Q é a matriz de conjugação, então a exponencial de A é dada

$$e^A = Qe^JQ^{-1}$$

e que a exponencial de J nada mais é do que a exponencial de cada bloco em que consiste a mesma. Note que temos dois blocos $J_1(1), J_{-2,1}(1)$, assim

$$e^{J_1(1)} = e^1 \quad e \quad e^{J_{-2,1}(1)} = e^{-2} \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a exponencial de A é

$$e^A = Q \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2}\cos 1 & e^{-2}\sin 1 \\ 0 & -e^{-2}\sin 1 & e^{-2}\cos 1 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Para finalizar esta seção resolveremos EDOs lineares exponenciando matrizes a partir de agora.

De posse da forma canônica de Jordan voltamos, agora a estudar o caso geral da equação diferencial linear $x' = Ax$, onde $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. No teorema 3.2 vimos que a solução geral do problema de valor inicial linear $x' = Ax, x(0) = x_0$, é dada por

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Para calcular a exponencial e^{tA} de tA basta saber calcular a exponencial e^{tP} para alguma matriz P linearmente conjugada a A .

Lema 3.1. Se $P, Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e Q é invertível, então

$$e^{t(QPQ^{-1})} = Qe^{tP}Q^{-1}.$$

Demonstração: A afirmação decorre imediatamente do Teorema 3.1, já que temos

$$t(QPQ^{-1}) = Q(tP)Q^{-1}.$$

Como a forma canônica de Jordan de uma matriz é linearmente conjugada à matriz, cada exponencial e^{tA} de A é linearmente conjugada à exponencial de e^{tJ} da forma canônica de Jordan J de A , todas com a mesma matriz de conjugação.

Repare como o resultado reformula a proposição 2.1. De fato como afirma aquela proposição, se $y(t) = e^{tJ}y_0$ é a solução de $y' = Jy, y(0) = y_0$, então

$$x(t) = Qe^{tJ}y_0 = Qe^{tJ}Q^{-1}Qy_0 = e^{tQJQ^{-1}}Qy_0 = e^{tA}x_0$$

é a solução de $x' = Ax, x(0) = Qy_0 = x_0$, onde $A = QJQ^{-1}$.

Passamos a explicitar a exponencial e^{tJ} das matrizes em forma canônica de Jordan. Como $tJ_\lambda(l) = \lambda tI + tG_1(l)$ e qualquer matriz comuta com a identidade, o item (1) do corolário 3.3 garante que

$$e^{tJ_\lambda(l)} = e^{\lambda tI}e^{G_t(l)} \in \mathbb{M}_l$$

onde a matriz a matriz $e^{G_t(l)}$ é uma matriz subdiagonal que já vimos anteriormente. \square

Exemplo 3.14. Resolvendo a Equação diferencial relacionada as matrizes de (a) e (b), temos:

- Seja a EDO $x' = J_1x$ resolvendo a mesma, já encontramos anteriormente a matriz e^{J_1} o que queremos é e^{tJ_1} . Seguindo de (a)

$$e^{tJ_1} = \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 & 0 \\ te^{7t} & e^{7t} & 0 \\ \frac{t^2}{2}e^{7t} & te^{7t} & e^{7t} \end{pmatrix}$$

e sendo $x(0) = (k_1, k_2, k_3)$ a solução desta EDO será $x(t) = (k_1e^{7t}, k_1te^{7t} + k_2e^{7t}, k_1\frac{t^2}{2}e^{7t} + k_2te^{7t} + k_3e^{7t})$.

Contudo uma EDO da forma $y' = Ay$ onde as matrizes A e J_1 são semelhantes, então a solução da mesma seria

$$e^{tA} = Qe^{tJ_1}Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 & 0 \\ te^{7t} & e^{7t} & 0 \\ \frac{t^2}{2}e^{7t} & te^{7t} & e^{7t} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

sendo Q a matriz de conjugação.

- Seja a EDO $x' = J_2x$ resolvendo a mesma, já encontramos anteriormente a matriz e^{J_2} o que queremos é e^{tJ_2} . Seguindo de (a)

$$e^{tJ_2} = \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 & 0 \\ te^{7t} & e^{7t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix}$$

e sendo $x(0) = (k_1, k_2, k_3)$ a solução desta EDO será $x(t) = (k_1 e^{7t}, k_1 t e^{7t} + k_2 e^{7t}, k_3 e^{7t})$.
 Contudo uma EDO da forma $y' = Ay$ onde as matrizes A e J_2 são semelhantes, então a solução da mesma seria

$$e^{tA} = Q e^{tJ_2} Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 & 0 \\ t e^{7t} & e^{7t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{7t} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

sendo Q a matriz de conjugação.

- Seja a EDO $x' = Jx$ resolvendo a mesma, já encontramos anteriormente a matriz e^J o que queremos é e^{tJ} e ainda temos a matriz A onde J é sua matriz de conjugação. Seguindo de (b)

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \cos t & e^{-2t} \sin t \\ 0 & -e^{-2t} \sin t & e^{-2t} \cos t \end{pmatrix}$$

e sendo $x(0) = (k_1, k_2, k_3)$ a solução desta EDO será $x(t) = (k_1 e^t, k_2 e^{-2t} \cos t + k_3 e^{-2t} \sin t, -k_2 e^{-2t} \sin t + -k_3 e^{-2t} \cos t)$.

Contudo uma EDO da forma $y' = Ay$ onde as matrizes A e J são semelhantes, então a solução da mesma seria

$$e^{tA} = Q e^{tJ} Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \cos t & e^{-2t} \sin t \\ 0 & -e^{-2t} \sin t & e^{-2t} \cos t \end{pmatrix} Q^{-1}$$

sendo Q a matriz de conjugação.

Agora que já sabemos resolver uma Equação Diferencial Ordinária Linear associada a qualquer matriz $A \in \mathbb{M}_n$, estudaremos o comportamento geométrico dessas EDOs.

4 Estudo de Planos de Fase

Neste capítulo iremos investigar o comportamento geométrico das equações diferenciais ordinárias lineares, ou seja, discorreremos sobre os retratos de fases nos espaços \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 nas respectivas seções [4.1] e [4.2].

4.1 Planos de fase em dimensão 2

O estudo das seções anteriores nos proporcionou analisar a solução de EDOs lineares relacionadas a $A \in \mathbb{M}_n$, em particular as relacionadas a matrizes 2×2 , ou seja, no plano, temos em mente como se resolve tais equações lineares vetoriais, basta usar o teorema da forma canônica de Jordan 2×2 . Nosso objetivo nesta seção é estudar o comportamento geométrico das soluções de

$$x' = Ax, \quad x(0) = (k_1, k_2), \quad (9)$$

também usando o teorema citado acima, através do número de autovalores distintos (isto é, 2, 1 ou 0 autovalores de $A \in \mathbb{M}_2$). Observe que cada solução $x = (x_1, x_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de $x' = Ax$ pode ser identificada com uma curva parametrizada no plano, denominada **órbita**, que é simplesmente o conjunto de pontos

$$\{(x_1(t), x_2(t)) | t \in \mathbb{R}\},$$

munido de uma orientação dada pelo sentido de percurso com t crescente, desde $-\infty$ até ∞ . Ao esboçarmos uma solução no plano, é costume indicar esse sentido de percurso com uma seta. Pela unicidade das soluções, por cada ponto do plano passa uma única órbita e, dadas quaisquer duas órbitas ou elas são iguais ou são disjuntas. Lembrando que estudaremos o comportamento em módulo dessas soluções.

Esboçando (de maneira esquemática) algumas dessas curvas parametrizadas definidas por soluções da equação (9), obtemos o **retrato de fase** da equação diferencial, cujo objetivo é dar uma ideia do comportamento global da totalidade das soluções da equação (9), com diferentes valores iniciais. Seguindo os casos do teorema da forma canônica de Jordan para matrizes 2×2 .

Vamos analisar cada caso considerando o número de autovalores.

Caso 1) O polinômio característico da matriz A tem duas raízes reais distintas $\lambda_1 < \lambda_2$: pelo Teorema da Decomposição de Jordan, o sistema linear $x' = Ax$ é conjugado ao sistema linear diagonal

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y \quad (10)$$

através de uma mudança de coordenadas linear. Sabemos que a solução da condição inicial $y(0) = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$ desse sistema diagonal é

$$y(t) = (l_1 e^{\lambda_1 t}, l_2 e^{\lambda_2 t}) \quad (11)$$

Segue que as soluções $x' = Ax$ são dadas por combinações lineares dessas soluções e, geometricamente, são obtidas através da mudança de coordenadas linear inversa, que leva as trajetórias de um sistema no outro, conforme a Proposição [2.1] na pag. 11. Note que toda mudança de coordenadas linear mantém a origem fixa e leva os eixos invariantes

do sistema [10] nos dois autoespaços de A , que são duas retas que passam pela origem, invariantes por A .

Dividiremos o primeiro em caso de seguinte maneira, quando os autovalores distintos são positivos, negativos ou há algum nulo.

Caso 1a) Quando $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são autovalores negativos.

Da expressão da solução $x(t) = Qy(t)$ obtida segue que, independentemente da condição inicial não nula, ambas as coordenadas da solução $x(t)$ tendem a $+\infty$ com $t \rightarrow -\infty$ e tendem a 0 com $t \rightarrow +\infty$, ou seja, todas as curvas definidas como soluções da equação "vêm desde o infinito até a origem do plano".

Dizemos que um campo linear com esse comportamento é um **atrator linear**, ou então que a origem é um **poço**; mais precisamente nesse caso dizemos que a origem é um **nó estável**. Sem levar em consideração a particular maneira qual todas as soluções se aproximam da origem do plano, com $t \rightarrow +\infty$, podemos pensar em um retrato de fase da forma:

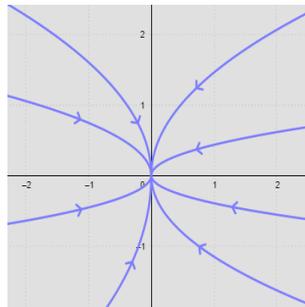


Figura 1: Plano de fase - caso 1a): Elaborado em [5]

Caso 1b) Quando $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são autovalores positivos.

Novamente da expressão da solução $x(t) = Qy(t)$ obtida segue que, independentemente da condição inicial não nula, ambas as coordenadas da solução $x(t)$ tendem a $+\infty$ com $t \rightarrow +\infty$ e tendem a 0 com $t \rightarrow -\infty$, ou seja, todas as curvas definidas como soluções da equação "vêm desde a origem até o infinito no plano". Dizemos que um campo linear com esse comportamento é um **repulsor linear**, ou então, que a origem é uma **fonte**; mais precisamente nesse caso dizemos que a origem é um **nó instável**.

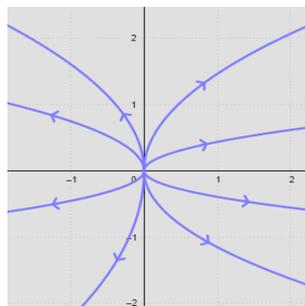


Figura 2: Plano de fase - caso 1b): Elaborado em [5]

Caso 1c) Quando λ_1 é negativo e λ_2 é positivo.

Da expressão da solução $y(t)$ obtida em (11) segue que qualquer solução $y(t)$ de (10), com condição inicial $y(0) = (l_1, 0)$ no eixo y_1 , tende a $\pm\infty$ com $t \rightarrow -\infty$ e tende a 0 com

$t \rightarrow +\infty$. Analogamente, qualquer solução $y(t)$ com condição inicial $y(0) = (0, l_2)$ no eixo y_2 , tende a $\pm\infty$ com $t \rightarrow +\infty$ e tende a 0 com $t \rightarrow -\infty$ (estamos levando em consideração o sinal de l_1 e l_2). Quando a condição inicial $y(0) = (l_1, l_2)$ está fora dos eixos ($l_1 l_2 \neq 0$) a solução tem um comportamento que combina o comportamento dos dois eixos, numa espécie de compensação, em que uma coordenada tende a $\pm\infty$ enquanto a outra tende a 0. Por exemplo, se $\lambda_1 = -\lambda_2$ exatamente, temos $x_1(t)x_2(t) = k_1 k_2$ é constante, de modo que a solução descreve exatamente uma hipérbole; em geral, a curva descrita pela solução parece uma hipérbole e todas têm os eixos como assíntotas. Dizemos que um campo linear ou que a origem de um campo linear com esse comportamento é uma **sela**.

No caso geral, o retrato de fase de $x' = Ax$ é uma sela muito parecida, a saber, a imagem da sela canônica (10) pela conjugação, que é uma mudança de variáveis linear, que leva os eixos nos autoespaços V_1 e V_2 gerados por autovetores de A v_1 e v_2 associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente. As demais soluções são linearmente distorcidas pela conjugação e se encaixam no novo sistema de coordenadas dos autoespaços de A , pois são inversamente proporcionais, ou seja, $x_1 = \frac{e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{x_2}$ e se comportam da forma:

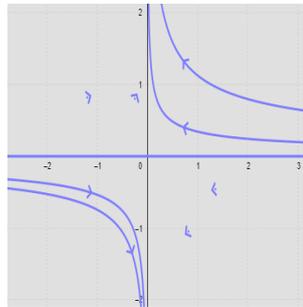


Figura 3: Plano de fase - caso 1c): Elaborado em [5]

Caso 1d) Quando λ_1 negativo e $\lambda_2 = 0$.

Da expressão da solução $y(t)$ obtida (11), segue que qualquer solução $y(t)$ de (10), com condição inicial $y(0) = (l_1, l_2)$ fora do eixo das ordenadas ($l_1 \neq 0$), é horizontal, tendendo a $\pm\infty$ com $t \rightarrow -\infty$ (dependendo do sinal de l_1), e a 0 com $t \rightarrow +\infty$. As soluções com condição inicial no eixo das ordenadas são todas constantes e constituem o núcleo do operador linear. No caso geral, o retrato de fase de $x' = Ax$ apresenta uma reta de soluções constantes e todas as demais soluções paralelas entre si e transversais ao núcleo, tendendo ao núcleo com tempo crescente. No esboço dado a seguir, apresentamos o autoespaço associado ao autovalor negativo horizontal e o autoespaço associado ao autovator nulo inclinado.

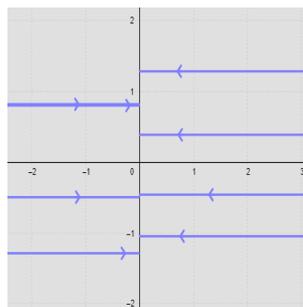


Figura 4: Plano de fase - caso 1d): Elaborado em [5]

Caso 1e) Quando $\lambda_1 = 0$ e λ_2 positivo.

O retrato de fase é como o anterior, apenas com os eixos trocados e o sentido das retas invertido, ou seja, agora as soluções verticais se afastam do eixo correspondente ao autovalor nulo. Como ilustrado, na figura 5

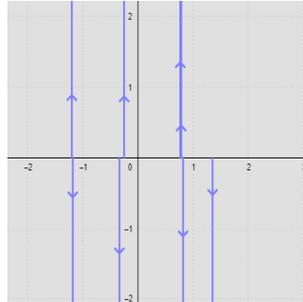


Figura 5: Plano de fase - caso 1e): Elaborado em [5]

Em seguida vamos analisar cada caso considerando a multiplicidade geométrica de cada autovalor, sendo ela igual ou diferente da multiplicidade algébrica.

Caso 2) O polinômio característico da matriz A tem duas raízes iguais $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$: ou $(A = \lambda I)$ é um múltiplo da identidade ou não é. Começemos pela primeira possibilidade, em que a solução com a condição inicial $x(0) = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ é dada por $x(t) = e^{\lambda t}(k_1, k_2) = e^{\lambda t} \cdot x(0)$. Se $\lambda \neq 0$, as curvas definidas pelas soluções são todas semirretas partindo da origem.

Caso 2a) λ negativo.

Pelo visto acima, ambas as coordenadas das soluções tendem a 0 com $t \rightarrow +\infty$ ao longo da semirreta definida pelo autovetor e a $+\infty$ com $t \rightarrow -\infty$. O retrato de fase é perfeitamente radial como indica a figura do caso 1a). Dizemos que um campo linear com esse comportamento é um **atrator linear**, ou que a origem é um **poço**; mais precisamente, nesse caso dizemos que a origem é um **foco estável**.

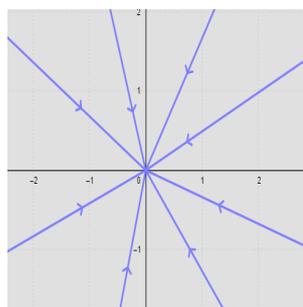


Figura 6: Plano de fase - caso 2a): Elaborado em [5]

Caso 2b) λ positivo.

Analisando como no caso anterior o comportamento de ambas coordenadas das soluções serão da seguinte forma, as coordenadas das soluções tendem a 0 quando $t \rightarrow -\infty$ ao longo da semirreta definida pelo autovetor e a $+\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$. O retrato de fase é perfeitamente radial como indica a figura do caso 1b). Dizemos que um campo linear com esse comportamento é um **repulsor linear**, ou então, que a origem é uma fonte; mais precisamente nesse caso, dizemos que a origem é um **foco instável**.

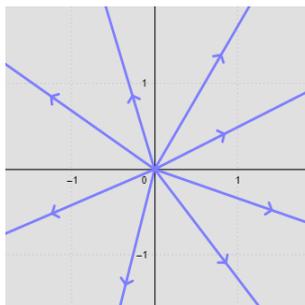


Figura 7: Plano de fase - caso 2b): Elaborado em [5]

Caso 2c) $\lambda = 0$, ou seja, um autovalor nulo.

Nesse caso, $A = 0 \in \mathbb{M}_2$ é a matriz nula e todas as soluções são constantes. Para esboçar o retrato de fase nesse caso, basta pintar alguns pontos no plano (veja a figura 8).

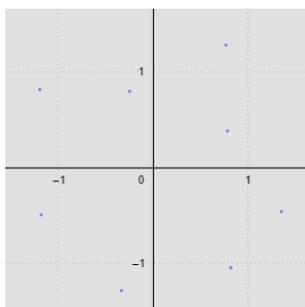


Figura 8: Plano de fase - caso 2c): Elaborado em [5]

A segunda opção de forma canônica de Jordan, no caso de autovalores iguais, é o sistema linear $x' = Ax$ ser conjugado a um sistema linear não diagonal

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} y \quad (12)$$

através de uma mudança de coordenadas linear. Sabemos que a solução dessa última equação diferencial com condições inicial $y(0) = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$ é

$$y(t) = (l_1 e^{\lambda t}, [tl_1 + l_2] e^{\lambda t}). \quad (13)$$

Como se sabe do Cálculo, se $\lambda \neq 0$, o fator $e^{\lambda t}$ domina o fator t quando $t \rightarrow \pm\infty$ (por exemplo podemos utilizar a regra de L'Hospital). Assim, os limites das coordenadas de $y(t)$ são idênticos aos limites das coordenadas das soluções de (10) vistos no caso 1) acima, exceto pelo fato de que (por existir apenas um autoespaço invariante) as curvas determinadas por todas as soluções não triviais são assintoticamente tangentes à mesma e única reta invariante vertical. Com uma mudança de coordenadas linear obtemos o retrato de fase de $x' = Ax$.

Analizaremos os novos caso seguintes, levando em consideração o sinal de λ e notaremos pequenas distorções em seus retratos de fases, comparando com os anteriores.

Caso 2d) λ negativo.

Nesse caso, ambas as coordenadas da solução $x(t) = Qy(t)$ (onde $y(t)$ foi definida anteriormente em (13)) de $x' = Ax$ tendem a $+\infty$ com $t \rightarrow -\infty$ e tendem a 0 com $t \rightarrow +\infty$, ou seja, todas as soluções vêm desde o infinito até a origem do plano. Dizemos que um campo linear com esse comportamento é um **atrator linear**, ou que a origem é um **poço**; mais precisamente, nesse caso dizemos que a origem é um **nó impróprio estável**. Sem levar em conta a particular maneira pela qual todas as soluções se aproximam da origem do plano, quando $t \rightarrow +\infty$, podemos pensar num retrato de fase como o do foco estável, no caso 1a).

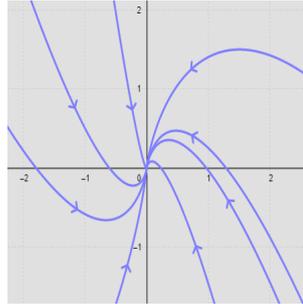


Figura 9: Plano de fase - caso 2d): Elaborado em [5]

Caso 2e) λ positivo.

Nesse caso, ambas as coordenadas da solução $x(t) = Qy(t)$ (onde $y(t)$ foi definida anteriormente em (13)) de $x' = Ax$ tendem a 0 com $t \rightarrow -\infty$ e tendem a $+\infty$ com $t \rightarrow +\infty$. Dizemos que um campo linear com esse comportamento é um **repulsor linear**, ou que a origem é um **fonte**; mais precisamente, nesse caso dizemos que a origem é um **nó impróprio instável**. Sem levar em conta a particular maneira pela qual todas as soluções se aproximam da origem do plano com $t \rightarrow -\infty$, podemos pensar num retrato de fase como o do foco instável, no caso 1b).

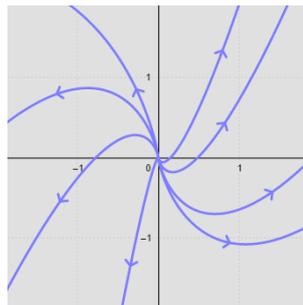


Figura 10: Plano de fase - caso 2e): Elaborado em [5]

Cado 2f) $\lambda = 0$, ou seja, temos um autovalor nulo.

Nesse caso degenerado, $A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e as soluções do sistema associado à matriz são dadas simplesmente pelas soluções constantes $y(t) = (0, l_2)$, no caso em que $l_1 = 0$, e pelas retas verticais $y(t) = (l_1, tl_1 + l_2)$, se $l_1 \neq 0$; nesse caso, as retas verticais são percorridas para baixo se $l_1 < 0$ e para cima $l_1 > 0$. Com uma mudança de coordenadas linear obtemos o retrato de fase de $x' = Ax$.

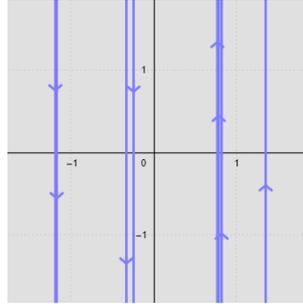


Figura 11: Plano de fase - caso 2f): Elaborado em [5]

Nos casos abaixo, trabalharemos com autovalores generalizados, ou seja da forma $a \pm bi$ com $b \neq 0$.

Caso 3) Se o polinômio característico da matriz A tem dois autovalores complexos conjugados $\lambda_1 = a + ib$ e $\lambda_2 = a - ib$, com $b \neq 0$, então, de acordo com a forma canônica de Jordan 2×2 em [2.18], o sistema estudado é equivalente ao seguinte sistema

$$y' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} y.$$

O qual sabemos solucionar, basta lembrar do exemplo (3.6), onde calculamos a exponencial desta matriz, porém consideraremos $x(0) = (k_1, k_2)$, com isso temos a seguinte solução:

$$y(t) = e^{at}(k_1 \cos bt + k_2 \sin bt, -k_1 \sin bt + k_2 \cos bt)$$

Contudo, efetuando seguinte substituição $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ e supondo $r > 0$, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos \theta = \frac{k_1}{r}$ e $\sin \theta = \frac{k_2}{r}$. Então

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{at}(r \cos \theta \cos bt + r \sin \theta \sin bt, -r \cos \theta \sin bt + r \sin \theta \cos bt) \\ \Rightarrow y(t) &= re^{at}(\cos \theta \cos bt + \sin \theta \sin bt, -\cos \theta \sin bt + \sin \theta \cos bt) \end{aligned}$$

Em seguida, lembrando das relações de seno e cosseno da diferença,

$$y(t) = re^{at}(\cos b(t - \frac{\theta}{b}), -\sin b(t - \frac{\theta}{b}))$$

e substituindo $\alpha = \frac{\theta}{b}$, com $0 \leq \alpha < \frac{2\pi}{b}$, as soluções dessa equação diferencial podem ser escritas da seguinte forma:

$$y(t) = re^{at}(\cos b(t - \alpha), -\sin b(t - \alpha)).$$

Sendo assim, o movimento de $y(t)$ na direção do tempo crescente é a composição de uma rotação de um ângulo α com uma contração (respectivamente dilatação) exponencial no caso em que $a < 0$ (respectivamente $a > 0$). Se $a = 0$, a solução simplesmente fica girando em torno de $(0, 0)$ sobre uma circunferência. Como sabemos pela proposição 1, a solução de $x' = Ax$ é dada por $x(t) = Qy(t)$, onde Q define um isomorfismo linear com $Q(0) = 0$ que carrega o retrato de fase dado por $y(t)$ no retrato de fase de A .

Caso 3a) Se $a < 0$, ou seja, com parte real negativa.

Ambas as coordenadas de $x(t)$ (com condição inicial fora da origem) ficam oscilando ao tenderem a $+\infty$ com $t \rightarrow -\infty$ e a 0 com $t \rightarrow +\infty$; a curva parametrizada pela solução parece uma espiral como é indicado na figura a seguir, que é referente a y . Dizemos que um campo linear com esse comportamento é um **atrator linear**, ou que a origem é um **poço**; mais precisamente, nesse caso dizemos que a origem é uma **espiral estável**. Sem levar em conta a particular maneira pela qual todas as soluções se aproximam da origem do plano, quando $t \rightarrow +\infty$, o retrato de fase é da forma:

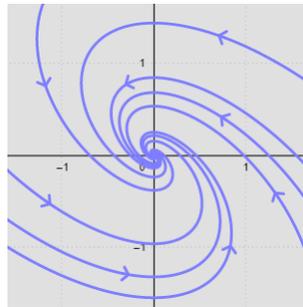


Figura 12: Plano de fase - caso 3a): Elaborado em [5]

Caso 3b) Se $a > 0$, ou seja, com parte real positiva.

Ambas as coordenadas de $x(t)$ (com condição inicial fora da origem) ficam oscilando ao tenderem a 0 com $t \rightarrow -\infty$ e a $+\infty$ com $t \rightarrow +\infty$; a curva parametrizada pela solução parece uma espiral como é indicado na figura a seguir, que é referente a y . Dizemos que um campo linear com esse comportamento é um **repulsor linear**, ou que a origem é um **fonte**; mais precisamente, nesse caso dizemos que a origem é um **espiral instável**. Sem levar em conta a particular maneira pela qual todas as soluções se aproximam da origem do plano quando $t \rightarrow -\infty$. Logo o retrato de fase é da forma:

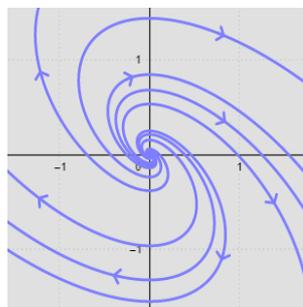


Figura 13: Plano de fase - caso 3b): Elaborado em [5]

Caso 3c) Se $a = 0$, ou seja, com parte real nula.

Pelo que vimos acima, todas as soluções $y(t)$, exceto a solução constante $(0,0)$, são periódicas de período $\frac{2}{b}\pi$, "rodando" em circunferências, centradas na origem sem convergir, portanto, a infinito ou a zero, como mostra a figura a seguir. Quando aplicamos a mudança de coordenadas essas circunferências se transformam em elipses. Neste caso, dizemos que o campo linear, ou a singularidade na origem, é o **centro** (veja a figura 14).

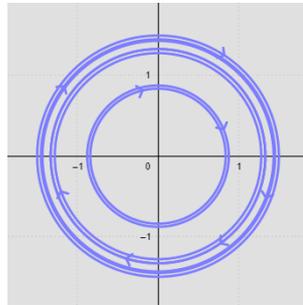


Figura 14: Plano de fase - caso 3c): Elaborado em [5]

Pelo Teorema de decomposição de Jordan, isso acaba com todas as possibilidades de retratos de fase de sistemas de equações diferenciais lineares no plano, classificando qualquer equação $x' = Ax$ a partir da classe de conjugação da matriz $A \in \mathbb{M}_n$, em 14 tipos. Reduzindo a exigência sobre conjugação e não exigindo mais um isomorfismo mas apenas um homeomorfismo (ou seja, uma bijeção contínua com inversa contínua), podemos agrupar a maioria dos casos estudados acima em uma nova classificação, por conjugação topológica. Dizemos que uma matriz $A \in \mathbb{M}_2$ é **hiperbólica** se a parte real de cada um de seus dois autovalores generalizados é não nula.

Assim, podemos observar que existem apenas três tipos topológicos de retratos de fase de equações diferenciais lineares hiperbólicas no plano, classificados de acordo com o número de autovalores generalizados com parte real positiva, a saber:

- **Os atratores**, em que ambos os autovalores generalizados possuem parte real negativa: todas as soluções tendem à origem quando $t \rightarrow +\infty$;
- **Os repulsores**, em que ambos os autovalores generalizados possuem parte real positiva: todas as soluções tendem à origem quando $t \rightarrow -\infty$;
- **As selas**, em que um autovalor real positivo e o outro negativo: duas soluções tendem à origem com $t \rightarrow -\infty$, duas com $t \rightarrow +\infty$ e as demais não tendem à origem com $t \rightarrow \pm\infty$.

Uma terceira classificação considera todas as matrizes que não possuem autovalor nulo (ou seja, todas as matrizes invertíveis). Nesse caso, além dos três tipos topológicos acima, temos ainda um quarto tipo, o centro 3c), em que nenhuma trajetória não trivial tende à origem com $t \rightarrow \pm\infty$.

4.2 Planos de fase em dimensão 3

Como foi feito na seção anterior, no caso dos retratos de fase de EDOs lineares no plano, será obtido de forma análoga os retratos de fase no espaço, ou seja, a descrição geométrica das soluções da equação vetorial

$$x' = Ax, \quad x(0) = (k_1, k_2, k_3) \quad (14)$$

através do uso do Teorema da forma canônica de Jordan, isto é, de acordo com a quantidade de autovalores distintos da matriz $A \in \mathbb{M}_3$.

Novamente teremos que cada solução $x = (x_1, x_2, x_3) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de $x' = Ax$ pode ser identificada como uma curva parametrizada no espaço, que chamaremos de **órbita** (como no plano), que é simplesmente o conjunto de pontos

$$\{(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) | t \in \mathbb{R}\}$$

munido de uma orientação dada pelo sentido de percurso com t crescente, de $-\infty$ até $+\infty$. Assim como foi feito no plano, esboçaremos algumas dessas curvas parametrizadas no espaço com diferentes soluções iniciais (já que não temos duas órbitas que passem pelo mesmo ponto no espaço) para ter uma aproximação do comportamento geral das soluções. Lembrando que estudaremos o comportamento em módulo dessas soluções.

Caso 1) O polinômio característico de A tem três raízes distintas $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Pela forma canônica de Jordan temos que A é conjugada a uma matriz diagonal, ou seja, de blocos 1×1 . Se A está relacionada ao sistema linear $x' = Ax$, então o mesmo é conjugado a um sistema linear diagonal $y' = Dy$

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} y$$

através de uma mudança de coordenadas linear. Dada a condição inicial $y(0) = (l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{R}^3$ a solução desse sistema diagonal é

$$y(t) = (l_1 e^{\lambda_1 t}, l_2 e^{\lambda_2 t}, l_3 e^{\lambda_3 t}).$$

Como anteriormente, temos que as soluções de $x' = Ax$ são dadas por combinações lineares dessas soluções e, geometricamente, são obtidas através da mudança de coordenadas linear inversa, que leva as trajetórias de um sistema no outro conforme a proposição 1. Sabendo disso, vamos analisar os casos a seguir:

Caso 1a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ e **ambos os autovalores são negativos**.

Sabemos, pela proposição (2.1), que $x(t) = Qy(t)$ (mudança de base) analisando o comportamento de $y(t)$ que será o mesmo de $x(t)$ a menos de uma mudança de base. Quando $t \rightarrow -\infty$ ambas as coordenadas de $x(t)$ tendem a $+\infty$ e quando $t \rightarrow +\infty$ ambas as coordenadas de $x(t)$ tendem a 0, ou seja, temos que a origem é um **poço**; um campo linear com este comportamento é chamado de **atrator linear**. Sem levar em consideração como as soluções se aproximam da origem, a figura 15 exemplifica esse comportamento.

Caso 1b) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ e **ambos os autovalores são positivos**.

Seguindo o mesmo raciocínio de antes, quando $t \rightarrow -\infty$ ambas as coordenadas de $x(t)$ tendem a 0 e quando $t \rightarrow +\infty$ ambas as coordenadas de $x(t)$ tendem a $+\infty$, ou seja, a origem é uma **fonte**; e um campo linear com esse comportamento é chamado de **repulsor linear**. Sem levar em consideração como as soluções se afastam da origem quando $t \rightarrow +\infty$, temos o retrato de fase ilustrado na figura 16.

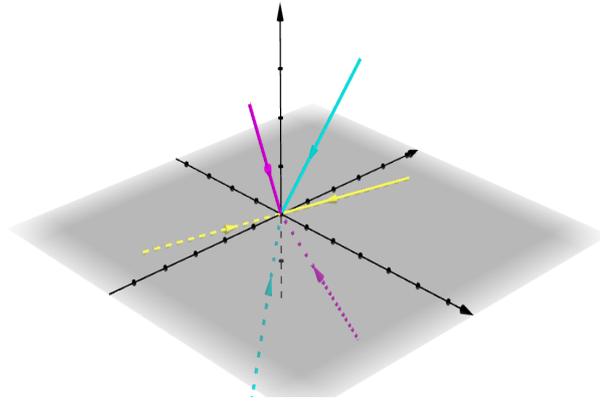


Figura 15: Plano de fase (caso 1a)

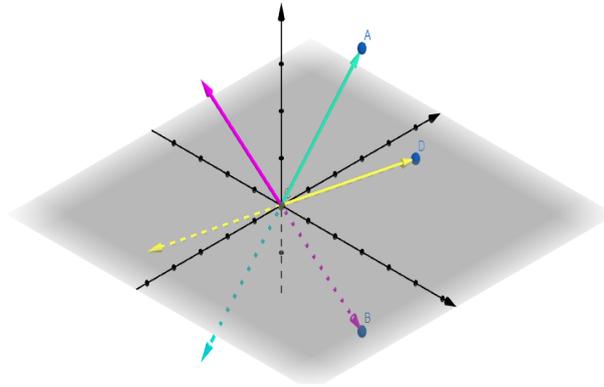


Figura 16: Plano de fase (caso 1b)

Caso 1c) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são autovalores negativos e λ_3 é um autovalor positivo.

Segue que analisando a solução no eixo v_3 temos $y(0) = (0, 0, l_3)$, quando $t \rightarrow -\infty$ as coordenadas de $y(t)$ tendem a 0 e quando $t \rightarrow +\infty$ as coordenadas tendem a $+\infty$, ou seja, a origem é uma **fonte** na direção v_3 . Já no plano gerado por v_1 e v_2 temos a solução $y(0) = (l_1, l_2, 0)$, que quando $t \rightarrow -\infty$ as coordenadas de $y(t)$ tendem a $+\infty$ e quando $t \rightarrow +\infty$ as coordenadas de $y(t)$ tendem a 0, ou seja, a origem é um **poço** no plano.

Quando a condição inicial $y(0) = (l_1, l_2, l_3)$ está fora da direção v_3 e do plano gerado por v_1 e v_2 , a solução tem um comportamento que combina os comportamentos na direção e no plano dados, numa espécie de compensação, enquanto o plano vai para 0, a direção v_3 tende ao $+\infty$ e o inverso também acontece. Como na figura 17.

Caso 1d) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são autovalores positivos e λ_3 é um autovalor negativo.

Segue que analisando a solução no eixo v_3 temos $y(0) = (0, 0, l_3)$. Quando $t \rightarrow -\infty$ as coordenadas de $y(t)$ tendem a $+\infty$ e quando $t \rightarrow +\infty$ as coordenadas tendem a 0, ou seja, a origem é um **poço** na direção v_3 . Já no plano gerado por v_1 e v_2 temos que $y(0) = (l_1, l_2, 0)$. Quando $t \rightarrow -\infty$ as coordenadas de $y(t)$ tendem a 0 e quando $t \rightarrow +\infty$ as coordenadas de $y(t)$ tendem a $+\infty$, ou seja, a origem é uma **fonte** no plano.

Quando a condição inicial $y(0) = (l_1, l_2, l_3)$ está fora da direção v_3 e do plano gerado por v_1 e v_2 , a solução tem um comportamento que combina os comportamentos na direção

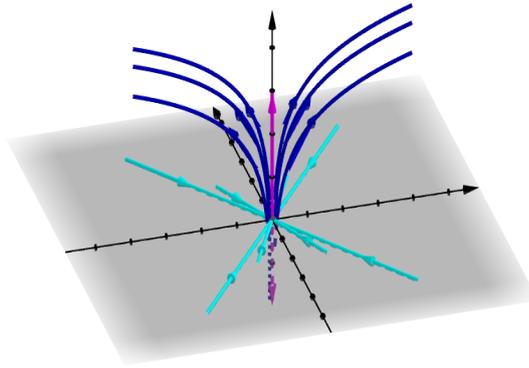


Figura 17: Plano de fase (caso 1c)

e no plano dados, enquanto o plano vai para 0, a direção v_3 tende a $+\infty$ e o inverso também acontece. Como na figura 18.

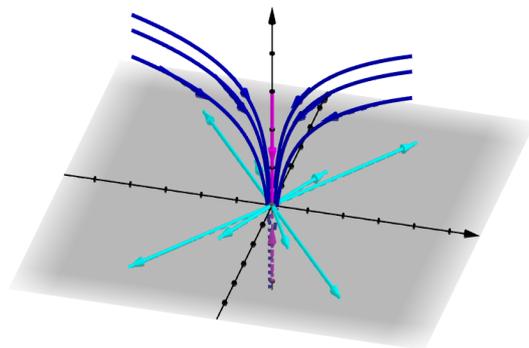


Figura 18: Plano de fase (caso 1d)

Caso 1e) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são autovalores negativos e $\lambda_3 = 0$.

Temos que $y(t) = (l_1 e^{t\lambda_1}, l_2 e^{t\lambda_2}, l_3)$ fora do eixo v_3 , ou seja, $l_1, l_2 \neq 0$. Analisando o comportamento de soluções dessa forma observamos que os retratos de fase são planos paralelos ao plano xOy , pois a última coordenada é constante enquanto as outras duas coordenadas tendem a $+\infty$ quando $t \rightarrow -\infty$ e tendem a 0 quando $t \rightarrow +\infty$. Logo, obtemos o seguinte retrato de fase da figura 19.

Caso 1f) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são autovalores positivos e $\lambda_3 = 0$.

Temos que $y(t) = (l_1 e^{t\lambda_1}, l_2 e^{t\lambda_2}, l_3)$ fora do eixo v_3 , ou seja, $l_1, l_2 \neq 0$. Analisando o comportamento de soluções dessa forma observamos que os retratos de fase são planos paralelos ao plano xOy , pois a última coordenada é constante enquanto as outras duas coordenadas tendem a $+\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$ e tendem a 0 quando $t \rightarrow -\infty$. Este caso é similar ao caso 1e). Assim, omitiremos seu retrato de fase.

Caso 1g) λ_1 é negativo λ_2 é positivo e $\lambda_3 = 0$.

Temos que $y(t) = (l_1 e^{t\lambda_1}, l_2 e^{t\lambda_2}, l_3)$ fora do eixo v_3 , ou seja, $l_1, l_2 \neq 0$. Analisando o

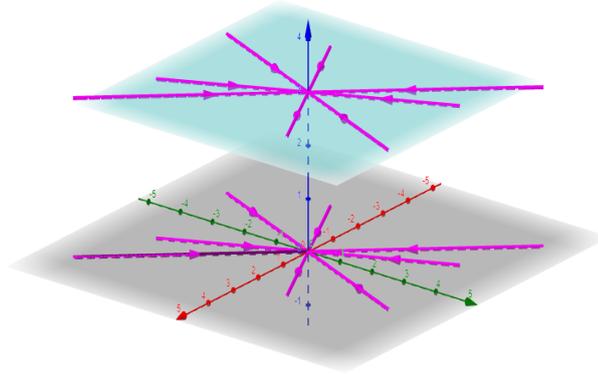


Figura 19: Plano de fase (caso 1e)

comportamento de soluções dessa forma observamos que os retratos de fase são planos paralelos ao plano xOy , pois a última coordenada é constante enquanto a primeira coordenada tende $+\infty$ quando $t \rightarrow -\infty$ e tende a 0 quando $t \rightarrow +\infty$, já a segunda coordenada tende $+\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$ e tende a 0 quando $t \rightarrow -\infty$; estas coordenadas têm o comportamento de compensação e o retrato de fase desse tipo de comportamento é similar ao caso **1e**).

Caso 2) O polinômio da matriz A tem três raízes reais iguais $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$: ou é um múltiplo da identidade ou não é. Começemos pela primeira possibilidade, em que a solução com condição inicial $y(0) = (l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{R}^3$ é dada por $y(t) = e^{\lambda t}(l_1, l_2, l_3)$. Considerando $\lambda \neq 0$

Caso 2a) λ negativo. Temos que ambas as coordenadas da solução $y(t)$. Tendem a 0 quando $t \rightarrow +\infty$ e tendem a $+\infty$ quando $t \rightarrow -\infty$, note que a origem é um poço e temos um comportamento de **atrator linear**.

Observe o retrato de fase do caso **2a**) da seção (4.1).

Caso 2b) λ positivo temos que ambas as coordenadas da solução $y(t)$.

Tendem a 0 quando $t \rightarrow -\infty$ e tendem a $+\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, note que a origem é uma **fonte** e temos um comportamento de **repulsor linear**.

Observe o retrato de fase do caso **2b**) da seção (4.1).

Caso 2c) $\lambda = 0$.

Nesse caso, A é a matriz nula e todas as soluções são constantes. Para esboçar o retrato de fase nesse caso, basta pintar alguns pontos no espaço.

A segunda opção de forma canônica de Jordan, no caso de autovalores iguais, é o sistema linear $y' = Ay$ ser conjugado a um sistema linear não diagonal que vai depender de quantos autovetores estão relacionados ao autovalor em questão. Estamos falando da forma de Jordan para a matriz A de polinômio característico $P_A = (x - \lambda)^3$. Daqui segue-se que

1. Se $\dim Nuc(\lambda I_3 - A) = 1$, temos a forma canônica de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Se $\dim \text{Nuc}(\lambda I_3 - A) = 2$, temos a forma canônica de Jordan

$$J' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Caso 2d) Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, com $\dim \text{Nuc}(\lambda - \lambda_1) = 1$.

Temos a forma canônica de Jordan $J \in \mathbb{M}_3$ ilustrada acima, sendo $A \sim J$, assim a EDO relacionada a J , $x' = Jx$ é igual a $y' = Ay$, a menos de uma mudança de base. E temos que a solução de $y' = Ay$ é dada por

$$e^{At} = Q^{-1}e^{Jt}Q.$$

e

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ te^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}.$$

Daqui segue, com $x(0) = (k_1, k_2, k_3)$ que $x(t) = (k_1 e^{\lambda_1 t}, k_1 t e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_1 t}, k_1 \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} + k_2 t e^{\lambda_1 t} + k_3 e^{\lambda_1 t})$.

Quando λ_1 é negativo temos que, quando $t \rightarrow -\infty$, ambas as coordenadas da solução tendem $+\infty$ e quando $t \rightarrow +\infty$ ambas as coordenadas da solução tendem a 0, ou seja, a solução tem o comportamento de **atrator linear** onde a origem é um **poço**.

Como $y' = Ay$ é semelhante a $x' = Ax$, a menos de uma mudança de base, temos o mesmo comportamento sem considerar a maneira particular como a solução de $y' = Ay$ aproxima-se da origem.

Caso 2e) Considerando as mesmas condições do item anterior sendo λ_1 positivo.

Temos que, quando $t \rightarrow -\infty$, ambas as coordenadas da solução tendem a 0 e quando $t \rightarrow +\infty$ ambas as coordenadas da solução tendem a $+\infty$, ou seja, a solução tem o comportamento de **repulsor linear** onde a origem é uma **fonte**.

Como $y' = Ay$ é semelhante a $x' = Ax$ a menos uma mudança de base, temos o mesmo comportamento sem considerar a maneira particular como a solução $y' = Ay$ afastam-se da origem.

Caso 2f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, com a $\dim \text{Nuc}(\lambda - \lambda_1) = 2$.

Temos a forma canônica de Jordan $J' \in \mathbb{M}_3$ ilustrada acima, sendo $A \sim J'$, assim a EDO relacionada a J , $x' = J'x$ é igual a $y' = Ay$, a menos de uma mudança de base. E temos que a solução de $y' = Ay$ é dada por

$$e^{At} = Q^{-1}e^{J't}Q.$$

e

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ te^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}.$$

Daqui segue, com $x(0) = (k_1, k_2, k_3)$ que $x(t) = (k_1 e^{\lambda_1 t}, k_1 t e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_1 t}, k_3 e^{\lambda_1 t})$.

Sendo λ_1 negativo temos que, quando $t \rightarrow -\infty$, ambas as coordenadas da solução tendem a $+\infty$ e quando $t \rightarrow +\infty$ ambas as coordenadas da solução tendem a 0, ou seja, a solução tem o comportamento de **atrator linear** onde a origem é um **poço**.

Como $y' = Ay$ é semelhante a $x' = Ax$ a menos de uma mudança de base, temos o mesmo comportamento, sem considerar a maneira particular como a solução aproxima-se da origem.

Caso 2g) Considerando as mesmas condições do item anterior sendo λ_1 é positivo.

Temos que, quando $t \rightarrow -\infty$ ambas as coordenadas da solução tendem a 0 e quando $t \rightarrow +\infty$ ambas as coordenadas da solução tendem a $+\infty$, ou seja, a solução tem o comportamento de **repulsor linear** onde a origem é uma **fonte**.

Como $y' = Ay$ é semelhante a $x' = Ax$ a menos de uma mudança de base, temos o mesmo comportamento sem considerar a maneira particular como a solução afasta-se da origem.

Além dos casos com os três autovalores iguais, também temos os casos onde existem dois autovalores iguais de tal modo que o polinômio característico $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2$; com isso temos a seguinte forma canônica de Jordan

$$J'' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Sendo $x' = J''x$ a EDO associada à matriz $J'' \sim A$, então as EDOs $x' = J''x$ e $y' = Ay$ são semelhantes, a menos de uma mudança de base. O que significa que a solução de $y' = Ay$ é

$$e^{At} = Q^{-1}e^{J''t}Q.$$

e

$$e^{J''t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & te^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Daqui segue-se com $x(0) = (k_1, k_2, k_3)$ e $x(t) = (k_1 e^{\lambda_1 t}, k_2 e^{\lambda_2 t}, k_2 t e^{\lambda_2 t} + k_3 e^{\lambda_2 t})$.

Continuando nossos estudos de retratos de fase temos:

Caso 2h) $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ tal que λ_1 e λ_2 são negativos.

Quando $t \rightarrow -\infty$ ambas as coordenadas da solução tendem $+\infty$ e quando $t \rightarrow +\infty$ ambas as coordenadas da solução tendem a 0, ou seja, a solução tem o comportamento de **atrator linear** onde a origem é um **poço**.

Como $y' = Ay$ é semelhante a $x' = J''x$, a menos de uma mudança de base, temos o mesmo comportamento sem considerar a maneira particular como a solução aproxima-se da origem.

Caso 2i) $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ tal que λ_1 e λ_2 são positivos.

Quando $t \rightarrow -\infty$ ambas as coordenadas da solução tendem a 0 e quando $t \rightarrow +\infty$ ambas as coordenadas da solução tendem a $+\infty$, ou seja, a solução tem o comportamento de **repulsor linear** onde a origem é uma **fonte**.

Como $y' = Ay$ é semelhante a $x' = Jx$, a menos de uma mudança de base, temos o mesmo comportamento sem considerar a maneira particular como a solução afasta-se da origem.

Caso 2j) $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ tal que $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$.

Se $k_1 \neq 0$ e $k_2 = k_3$, quando $t \rightarrow -\infty$ a solução $x(t)$ tende a $+\infty$ e se $k_1 = 0$ e $k_2 \neq k_3 \neq 0$ quando $t \rightarrow -\infty$ a solução $x(t)$ tende a 0.

Já quando $t \rightarrow +\infty$ e $k_1 \neq 0, k_2 = k_3 = 0$ temos que a solução $x(t)$ tende a 0, agora seja $k_1 = 0$ e $k_2 \neq k_3 \neq 0$, a solução $x(t)$ tende a $+\infty$.

Note que a solução geral tem o comportamento de compensação, enquanto a primeira coordenada tende a $+\infty$ as outras duas tendem a 0 e o processo inverso também acontece.

Em seguida, temos os casos onde temos duas raízes nulas e o sistema não é diagonal, ou seja, trabalharemos com a forma canônica de Jordan. Onde o polinômio característico é da forma $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \lambda^2$. Sendo,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix},$$

com $x(0) = (k_1, k_2, k_3)$, e $x(t) = (k_1 e^{t\lambda_1}, k_2, tk_2 + k_3)$. Estudaremos a seguir o comportamento de retratos de fase que possuem as características citadas acima.

Caso 2k) λ_1 é negativo.

Supondo $k_1 \neq 0$ e $k_2 = k_3 = 0$, temos que quando $t \rightarrow -\infty$ a primeira coordenada vai para $+\infty$ e quando $t \rightarrow +\infty$ a primeira coordenada vai para 0, ou seja, a solução dessa forma tem comportamento de **atrator linear**. Quando k_2 e k_3 são diferentes de zero, temos que a primeira coordenada mantém o comportamento descrito acima, a segunda é constante então apenas se mantém e a terceira coordenada é uma reta na variável t , quando $t \rightarrow -\infty$ ou $t \rightarrow +\infty$ a mesma pode tender a $\pm\infty$ (obs.: na última coordenada não consideramos o módulo habitual que usamos no decorrer do estudo de retratos de fases).

Caso 2l) λ_1 é positivo.

Supondo $k_1 \neq 0$ e $k_2 = k_3 = 0$, temos que quando $t \rightarrow -\infty$ a primeira coordenada tende para 0 e quando $t \rightarrow +\infty$ a primeira coordenada vai para $+\infty$, ou seja, a solução dessa forma tem comportamento de **repulsor linear**. Já quando k_2 e k_3 são diferentes de zero, temos que a primeira coordenada mantém o comportamento descrito acima, a segunda é constante então apenas se mantém e a terceira coordenada é uma reta na variável t , quando $t \rightarrow -\infty$ ou $t \rightarrow +\infty$ a mesma pode tender a $\pm\infty$ (obs: na última coordenada não considerarei o módulo habitual que usamos no decorrer do estudo de retratos de fases).

Caso 3) Se o polinômio característico da matriz A tem um autovalor real λ_1 e dois autovalores complexos conjugados $\lambda_2 = a + ib$ e $\lambda_3 = a - ib$, com $b \neq 0$. Temos a seguinte matriz canônica de Jordan,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix},$$

onde sua exponencial é da forma

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{at} \cos bt & e^{at} \sin bt \\ 0 & -e^{at} \sin bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix},$$

e temos a EDO $x' = Jx$ com a condição inicial $x(0) = (k_1, k_2, k_3)$. Logo, sua solução é $x(t) = (k_1 e^{\lambda_1 t}, e^{at}(k_2 \cos bt + k_3 \sin bt), e^{at}(-k_2 \sin bt + k_3 \cos bt))$.

Lembrando das relações trigonométricas do seno e do cosseno da diferença, podemos reescrever alguns termos da solução acima. Daí segue que denotando $r = \sqrt{k_2^2 + k_3^2}$ e supondo que $r > 0$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\cos \alpha = \frac{k_2}{r}$ e $\sin \alpha = \frac{k_3}{r}$; portanto,

$$k_2 \cos bt + k_3 \sin bt = r \cos \alpha \cos bt + r \sin \alpha \sin bt = r \cos(\alpha - bt) = r \cos(bt - \alpha)$$

e, analogamente, $-k_2 \sin bt + k_3 \cos bt = -r \sin(bt - \alpha)$.

Agora, escolhendo θ tal que $\alpha = b\theta$ e $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{b}$, resulta que

$$x(t) = (k_1 e^{\lambda_1 t}, r e^{at} \cos b(t - \theta), r e^{at} \sin b(t - \theta)).$$

Analisaremos esta solução nos casos a seguir:

Caso 3a) λ_1 e a são negativos.

Quando $t \rightarrow -\infty$ a primeira coordenada da solução tende a $+\infty$, já a segunda e terceira coordenadas da solução ficam oscilando ao tenderem a $+\infty$ (basta usar a desigualdade do cosseno e do seno e em seguida calcular o limite em módulo), e quando $t \rightarrow +\infty$ ambas as coordenadas tendem a 0 (basta usar o teorema do confronto), ou seja, temos um comportamento de atrator linear (em forma de hélice, sem considerar a maneira com a qual as soluções tendem à origem).

Caso 3b) λ_1 é negativo e a é positivo.

Quando $t \rightarrow -\infty$ a primeira coordenada da solução tende a $+\infty$ e as outras duas coordenadas da solução tendem a 0 e quando $t \rightarrow +\infty$ a primeira coordenada da solução tende a 0 e as outras duas coordenadas ficam oscilando ao tenderem a $+\infty$. Logo, na direção do autovetor associado ao autovalor real temos um comportamento de atrator linear, já no plano formado pelos autovetores associados aos autovalores complexos temos um comportamento de repulsor linear.

Caso 3c) λ_1 é negativo e $a = 0$.

Quando $t \rightarrow -\infty$ a primeira coordenada da solução $x(t)$ tende a $+\infty$ e quando $t \rightarrow +\infty$ a primeira coordenada da solução tende a 0. Já as outras duas coordenadas da solução são periódicas de período $\frac{2\pi}{b}$, olhando essa solução apenas no plano complexo temos uma solução constante $(0, 0)$ e as outras soluções ficam "rodando" em circunferências centradas na origem sem convergir, portanto, para infinito ou a zero. Combinando os dois comportamentos analisados teremos um retrato de fase cilíndrico.

Caso 3d) λ_1 é positivo e a é negativo.

Quando $t \rightarrow -\infty$ a primeira coordenada da solução tende a 0 e as outras duas coordenadas ficam oscilando ao tenderem a $+\infty$ e quando $t \rightarrow +\infty$ a primeira coordenada da solução tende a $+\infty$ e as outras duas coordenadas da solução tendem a 0. Logo, na direção do autovetor associado ao autovalor real temos um comportamento de repulsor linear, já no plano formado pelos autovetores associados aos autovalores complexos temos um comportamento de atrator linear.

Caso 3e) λ_1 e a são positivos.

Quando $t \rightarrow -\infty$ ambas as coordenadas tendem a 0 (basta usar o teorema do confronto) a primeira coordenada da solução tende a $+\infty$, já a segunda e terceira coordenadas da solução ficam oscilando ao tenderem a $+\infty$, (basta usar a desigualdade do cosseno e do seno e em seguida calcular o limite em módulo) e quando $t \rightarrow +\infty$ a primeira coordenada da solução tende a $+\infty$, já a segunda e terceira coordenadas da solução ficam oscilando ao tenderem a $+\infty$ (basta usar a desigualdade do cosseno e do seno e em seguida calcular o limite em módulo), ou seja, temos um comportamento de atrator linear (em forma de hélice, sem considerar a maneira particular com o qual as soluções tendem à origem).

Caso 3f) λ_1 é positivo e $a = 0$.

Quando $t \rightarrow -\infty$ a primeira coordenada da solução tende a 0 e quando $t \rightarrow +\infty$ a primeira coordenada da solução tende a $+\infty$. Já as outras duas coordenadas da solução são periódicas de período $\frac{2\pi}{b}$, olhando essa solução apenas no plano complexo temos uma solução constante (0,0) e as outras soluções ficam "rodando" em circunferências centradas na origem sem convergir, portanto, para infinito ou a zero. Combinando os dois comportamentos analisados teremos um retrato de fase cilíndrico.

Caso 3g) $\lambda_1 = 0$ e a é negativo.

Temos que a primeira coordenada é constante definindo um plano em \mathbb{R}^3 e as duas coordenadas restantes da solução têm o mesmo comportamento do **Caso 3a)** em \mathbb{R}^2 . Logo, seu retrato de fase será uma espiral em cada plano definido pela primeira coordenada da solução (sem levar em consideração como as soluções se aproximam da origem).

Caso 3h) $\lambda_1 = 0$ e a é positivo.

Temos que a primeira coordenada é constante definindo um plano em \mathbb{R}^3 e as duas coordenadas restantes da solução têm o mesmo comportamento do **Caso 3b)** em \mathbb{R}^2 . Logo, seu retrato de fase será uma espiral em cada plano definido pela primeira coordenada da solução (sem levar em consideração como as soluções se afastam da origem).

Caso 3i) $\lambda_1 = 0$ e $a = 0$. Temos que a primeira coordenada é constante definindo um plano em \mathbb{R}^3 e as duas coordenadas restantes da solução têm o mesmo comportamento do **Caso 3c)** em \mathbb{R}^2 . Nesse caso, a singularidade na origem é um centro que aparecerá em cada plano definido pela primeira coordenada da solução.

5 Conclusões

Neste trabalho, foi realizado o estudo da teoria de resolução de EDOs lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n no sentido em que foi possível construir a base para o desenvolvimento dos estudos mais avançados de EDOs não lineares. Em particular, chamamos a atenção para aplicações no Teorema de Grobman-Hartman (veja [2]) que nos diz: se $x_0 \in E$ (E aberto de \mathbb{R}^n) é um ponto de equilíbrio do campo de vetores f de classe C^1 , definido em E , e x_0 é uma singularidade hiperbólica, então f em x_0 é localmente topologicamente conjugada ao campo linear $Df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ na origem.

De fato, podemos estudar localmente o comportamento de uma EDO não linear como uma EDO linear. Todos estes conceitos podem ser aprofundados através dos resultados obtidos em [2].

Com o auxílio de calculadoras gráficas, construímos os retratos de fase de sistemas lineares em \mathbb{R}^2 e de diversos sistemas lineares em \mathbb{R}^3 . Exemplificamos algumas figuras dos retratos de fase para os casos em \mathbb{R}^3 no presente trabalho. Contudo, esperamos que estas figuras sejam produzidas para posterior publicação.

Referências

- 1 Boyce, E. W. ; DiPrima C. R Equações Diferenciais Ordinárias e Problemas de Valores de Contorno, 9^a edição, Rio de Janeiro, LTC, 2010.
- 2 Doering, C. I.; Lopes, A. O. Equações Diferenciais Ordinárias, 6^a edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2016.
- 3 Geogebra 3D Endereço: <https://www.geogebra.org/3d?lang=pt_PT>; Acesso em: 13 de maio de 2022
- 4 Hoffman, K. Álgebra Linear, Editora Polígono S.A, São Paulo, 1971.
- 5 Instituto Goiano de Matemática, Sistemas Lineares de EDO: Plano de fase; Endereço eletrônico: <<https://www.geogebra.org/m/tuywnfgr>>; Acesso em: 05 de abril de 2022.
- 6 Lima, L. E. Álgebra Linear, 1^a edição, IMPA, 2014.
- 7 Pulino, P. Álgebra Linear e suas aplicações; Unicamp; Endereço eletrônico: <<http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/>>; Acesso em: 06 de maio de 2022.
- 8 Sotomayor, J. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, 1^a edição, Rio de Janeiro, IMPA, 1979.