

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

LUCAS HENRIQUE CORREIA DA ROCHA

**ESTUDO DO FENÔMENO DE FLAMBAGEM ELÁSTICA EM
BARRAS PRISMÁTICAS UTILIZANDO VISUALIZAÇÃO GRÁFICA**

MACEIÓ
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

LUCAS HENRIQUE CORREIA DA ROCHA

**ESTUDO DO FENÔMENO DE FLAMBAGEM ELÁSTICA EM
BARRAS PRISMÁTICAS UTILIZANDO VISUALIZAÇÃO GRÁFICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal de Alagoas - CTEC/UFAL, como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Barbosa dos Santos

Coorientador: Prof. Dr. William Wagner Matos Lira

MACEIÓ
2022

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

R67e Rocha, Lucas Henrique Correia da.
 Estudo do fenômeno de flambagem elástica em barras prismáticas
 utilizando visualização gráfica / Lucas Henrique Correia da Rocha. – 2022.
 41 f. : il. color.

 Orientador: Luciano Barbosa dos Santos.
 Coorientador: William Wagner Matos Lira.
 Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Civil)
 – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2022.

 Bibliografia: f. 41.

 1. Simulações gráficas. 2. Engenharia de estruturas. 3. Flambagem. 4.
 Programa computacional. I. Título.

CDU: 624: 004.42

Resumo

Diante da disponibilidade tecnológica atual, um recurso bastante pertinente para o estudo de fenômenos físicos, em especial os que não são facilmente acessíveis a experimentação, seja pela dificuldade de visualização ou de execução dos experimentos, e a utilização de visualizações gráficas. Este tipo de aplicação computacional permite modelar o problema e manipular as variáveis, obtendo em tempo real uma resposta de como o comportamento do fenômeno se configura. Um dos fenômenos estudados na engenharia de estruturas é a perda de estabilidade por flambagem, que depende de diversos parâmetros, como módulo de elasticidade longitudinal e características geométricas da seção e da barra, tornando esse efeito imprescindível no estudo das estruturas, em especial na presença de peças mais esbeltas. No entanto, nem sempre é fácil determinar, à primeira vista, como diferentes modelos se comportam. Assim, aliando os recursos computacionais a um modelo matemático do fenômeno, o objetivo deste trabalho é fazer um estudo através do desenvolvimento de um programa computacional de simulação baseado na visualização do fenômeno e analisando casos com o auxílio do mesmo, tendo assim uma compreensão mais completa do fenômeno e do seu comportamento frente às diversas variáveis que o influenciam.

Palavras-chave: Flambagem, estruturas, visualização gráfica.

Abstract

Due to the current technological availability, a very relevant resource for the study of physical phenomena, especially those that are not easily accessible to experimentation, because the difficulty of visualizing or executing the experiments, is the use of graphics visualizations. This type of computational application allows modeling the problem and manipulating the variables to obtain in real time a response of the behavior of the phenomenon. One of the phenomena studied in structural engineering is the loss of stability due to buckling, which depends on several parameters, such as longitudinal elastic modulus and geometric characteristics of the section and the member, making this effect essential to the study of structures, especially in the presence of slender parts. However, it is not always easy to determine, at a glance, how different models behave. Thus, combining the resources computational data to a mathematical model of the phenomenon, the objective of this work is to make a study through the development of a computational simulation program based on visualization the phenomenon and analyzing cases its help, having a more complete understanding of the phenomenon and its behavior into the various variables that influences it.

Keywords: Buckling, structures, graphic visualization

Lista de Figuras

1	Flambagem por flexão	9
2	Flambagem lateral com torção	9
3	Flambagem local	10
4	Perturbação do equilíbrio do pilar sob uma ação de intensidade P	11
5	Flambagem por flexão de coluna sob efeito de uma carga centrada	12
6	Modos de flambagem para a ocorrência de apoios intermediários	14
7	Esquema de uma seção retangular	16
8	Esquema de uma seção em perfil I	17
9	Divisão das áreas da seção I para cálculo dos parâmetros geométricos	18
10	Janela principal da interface gráfica do programa	25
11	Janela de definição da geometria	26
12	Janela de definição dos apoios	27
13	Janela de definição de material	27
14	Esquema das escoras em aço e alumínio	28
15	Entrada de dados no programa para a escora de aço	29
16	Resultados para a escora de aço	30
17	Entrada de dados no programa para a escora de alumínio	30
18	Resultados para a escora de alumínio	31
19	Possibilidades de arranjo para as três pranchas	31
20	Entrada de dados no programa para a seção retangular	32
21	Simulação do arranjo em seção retangular	33
22	Entrada de dados no programa para a seção em I	33
23	Simulação do arranjo em perfil I	34
24	Entrada de dados no programa para a seção sem apoios intermediários	35
25	Resultados para o caso sem apoio intermediário	36
26	Entrada de dados no programa para a seção com 1 apoio intermediário	37
27	Resultados para o caso com um apoio intermediário	37
28	Entrada de dados no programa para a seção com 2 apoios intermediários	38
29	Resultados para o caso com dois apoios intermediários	38

Lista de Tabelas

1	Valores básicos para o módulo de Young (E)	20
---	--	----

Sumário

1	Introdução	6
1.1	Objetivo	7
1.2	Metodologia	7
1.2.1	Modelo de cálculo do fenômeno de flambagem	7
1.2.2	Programa gráfico computacional	7
1.2.3	Estudos de casos	8
1.3	Delimitação	8
2	Fundamentação Teórica	9
2.1	Flambagem	9
2.2	Modelo de cálculo do fenômeno de flambagem	10
2.2.1	Modelo de Euler	11
2.2.2	Condições de contorno	14
2.3	Propriedades geométricas da barra	15
2.3.1	Seção retangular	15
2.3.2	Perfil I	17
2.4	Propriedades mecânicas do material	19
3	Sistema Computacional	21
3.1	Implementação	21
3.1.1	Linguagem de programação Python	21
3.1.2	Programação orientada a objetos	22
3.1.3	Bibliotecas externas	22
3.1.4	Módulos internos	23
3.2	Tutorial de utilização	25
4	Resultados e discussões	28
4.1	Caso de estudo 1	28
4.2	Caso de estudo 2	31
4.3	Caso de estudo 3	34
5	Conclusões	39
6	Referências bibliográficas	40

1 Introdução

Dentre os fenômenos abordados na área de engenharia de estruturas, dois conceitos que contemplam uma fração significativa do estudo são o equilíbrio e a estabilidade. O equilíbrio de uma estrutura está associado às forças que atuam sobre ele e às reações que este corpo precisa exercer em seus apoios e internamente para que ele mantenha-se em repouso e não sofra deslocamentos globais, sucumbindo à ação desta forças.

Já a estabilidade está relacionada com a capacidade da estrutura de manter este estado de equilíbrio mediante à ação de perturbações externas sobre ela, podendo levá-la adquirir uma nova configuração de equilíbrio. Isso permite classificar o equilíbrio de uma estrutura em estável, quando há dificuldade em quebrar este estado atual, e instável, quando esta dificuldade é nula ou ínfima.

Um exemplo de falha de uma estrutura por perda de estabilidade, comum em peças esbeltas sujeitas ao esforço axial de compressão, é o de flambagem global por flexão. A ocorrência de ações compressivas atuando sobre peças com imperfeições geométricas gera esforços de flexão ao longo da peça, podendo levá-los à uma condição de equilíbrio indesejada, apresentando deformações e, ainda que não submeta a estrutura ao seu estado limite último, pode prejudicar os parâmetros de serviço da edificação.

Este fenômeno ocorre com frequência em pilares, especialmente em estruturas metálicas, por exemplo, devido à larga utilização de perfis com abas esbeltas. Isso faz com que seja um aspecto relevante de se considerar cuidadosamente em dimensionamentos e verificações, já que são elementos importantes para a estabilidade, equilíbrio e transferência dos esforços ao longo de toda a estrutura.

Dependendo de variáveis como comprimento, dimensões da seção transversal, módulo de elasticidade longitudinal do material e condições de travamento, esse efeito pode acontecer de maneiras diferentes. Por isso, entender essas particularidades é uma tarefa complicada à primeira vista, porém importante para um engenheiro tomar decisões capazes de evitar este efeito.

Entretanto, com o avanço tecnológico no desenvolvimento de dispositivos de visualização e computação gráfica, hoje é possível realizar programas capazes de fornecer saídas gráficas destes fenômenos, ainda que de forma simplificada, para estudá-los e ter uma compreensão de como essas diversas variáveis que os compõem interferem no resultado final. Este tipo de metodologia permite manipular as diversas variáveis inerentes ao problema e visualizar o resultado que essas variações geram no modelo de forma gráfica.

A simulação também pode ser usada na educação e treinamento de profissionais. Ela ajuda os administradores a enxergar as causas implícitas dos problemas a partir dos sintomas

superficiais. Além disso, permite a reorganização das percepções em uma imagem mais clara e coerente da dinâmica dos sistemas. (GAVIRA, 2003)

1.1 Objetivo

O objetivo deste trabalho é estudar o fenômeno de flambagem elástica por flexão em barras de seções transversais em I e retangulares por meio da elaboração de um programa visualização gráfica que implementa o modelo de flambagem por flexão de Euler para diferentes condições de contorno e barras prismáticas.

1.2 Metodologia

Para a elaboração deste trabalho, decidiu-se utilizar o modelo de flambagem de Euler, modelo clássico para estudo do fenômeno, limitando-se a uma barra biapoiada com carga axial de compressão centrada e possibilidade de inserção de apoios intermediários no eixo de menor inércia, de modo a visualizar a mudança do eixo de flambagem. Já para a visualização do estudo de maneira gráfica, foi implementado um programa computacional utilizando-se de ferramentas de código aberto, permitindo a disponibilização do programa para fins educacionais.

1.2.1 Modelo de cálculo do fenômeno de flambagem

Para a modelagem do fenômeno em estudo, o modelo de cálculo utilizado para implementação computacional e obtenção dos resultados foi o modelo de Euler para barras biapoiadas. As características, simplificações e particularidades do modelo serão discutidas de maneira mais aprofundadas posteriormente na seção de fundamentação teórica.

1.2.2 Programa gráfico computacional

O programa gráfico computacional desenvolvido para auxílio dos estudos realiza cálculo e exibe uma representação visual do fenômeno de flambagem, permitindo ao usuário manipular as variáveis inerente ao problema e ver as alterações que isso gera no modelo. Ele é implementado utilizando a linguagem de programação Python integrada à biblioteca *open source* do Qt e à API gráfica OpenGL.

1.2.3 Estudos de casos

Foram elaborados estudos de casos estrategicamente selecionados de modo a abordar a maior quantidade possível de situações diferentes para aplicação do fenômeno da flambagem à flexão, permitindo relacionar, a partir dos resultados obtidos, como os parâmetros inerentes ao problema podem afetá-lo.

Além disso, esses estudos de casos também têm o objetivo de demonstrar e validar a ferramenta desenvolvida para os casos aos quais se propõe fazendo um paralelo entre o resultado obtido pelo modelo analítico do fenômeno e os valores calculados pelo programa.

1.3 Delimitação

O estudo trata do efeito de flambagem elástica global da peça, descartando-se a existência de excentricidade da aplicação do carregamento e de imperfeições geométricas da barra e admitindo o comportamento do material como elástico-linear.

Além disso, não foram consideradas estruturas com apoios engastados, já que, para contemplá-las, seria necessária uma modelagem mais complexa, a qual agregaria pouco em relação à visualização do fenômeno em si. Assim, o estudo se limita apenas a estruturas simplesmente apoiadas com e sem apoios laterais afetando o fenômeno de flambagem em relação ao eixo de menor inércia da seção.

2 Fundamentação Teórica

Nesta seção são apresentadas informações acerca da modelagem do fenômeno de flambagem, bem como a descrição sobre a seção geométrica utilizada e os parâmetros considerados relevantes para o problema em análise.

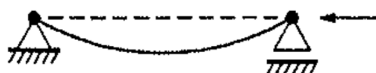
2.1 Flambagem

Algumas peças estruturais, dentro de uma concepção de projeto, são predominantemente submetidas a esforços de compressão, flexão ou ambos combinados (flexão composta) como pilares, vigas, barras comprimidas de treliças, algumas barras de contraventamento, entre outros. Este tipo de solicitação, aliado à características geométricas, como comprimento da barra e dimensões da seção transversal, e do material utilizado, como flexibilidade e ductilidade, traz consigo uma possibilidade de falha de estabilidade por flambagem.

O termo flambagem, de modo geral, refere-se ao colapso de um elemento estrutural pela perda de instabilidade. Entretanto, o nome é mais comumente usado para designar fenômenos específicos de instabilidade em que a peça sofre deflexões laterais, sendo este o fenômeno ao qual este trabalho se dedica. Desta forma, estes fenômenos são subdivididos em dois grupos:

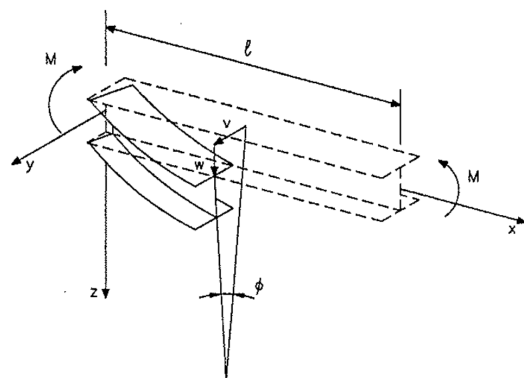
- **Flambagem global:** Está associada a perda de instabilidade da barra como um todo. Pode-se citar como exemplo desse tipo de efeito a flambagem por flexão (Figura 2.1) e a flambagem lateral com torção (Figura 2.1). A primeira pode acontecer em peças submetidas à uma carga de compressão além do limite de sua capacidade, afetados ou não por defeitos pré-existentes na peça, que pode levá-las a desenvolver esforços de flexão. Já o segundo, está associado a peças sob flexão simples.

Figura 1: Flambagem por flexão



Fonte: Reis e Camotin (2001).

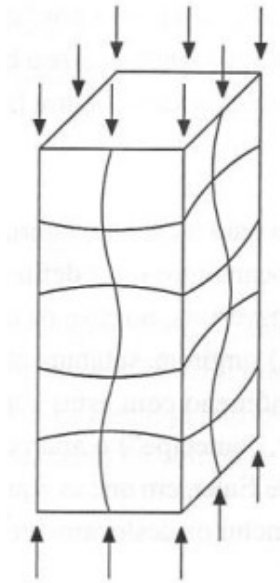
Figura 2: Flambagem lateral com torção



Fonte: Reis e Camotin, 2001.

- **Flambagem local:** Diz respeito a perda de instabilidade de pontos específicos da estrutura quando ela é constituída de chapas delgadas (Figura 2.1). Em estruturas metálicas, por exemplo, em pilares em perfis I, pelo contraste entre seu comprimento livre e a espessura da chapa, a solicitação pode gerar flambagem local da alma ou da mesa.

Figura 3: Flambagem local



Fonte: Reis e Camotin, 2001.

Assim, estes elementos constituintes precisam de uma atenção especial, pois são componentes essenciais para o equilíbrio e estabilidade de uma edificação e esta observação deve ser feita desde o processo de concepção da estrutura, já que, mais do que os parâmetros resistentes do material, a geometria e as condições de travamento são essenciais para evitar essa possibilidade de falha.

Com muita frequência, a flambagem de uma coluna pode resultar em uma falha repentina e dramática de uma estrutura ou mecanismo e, por isso, é preciso dedicar especial atenção ao projeto de colunas para que estas possam suportar com segurança as cargas pretendidas sem sofrer flambagem. (HIBBELER, 2007)

2.2 Modelo de cálculo do fenômeno de flambagem

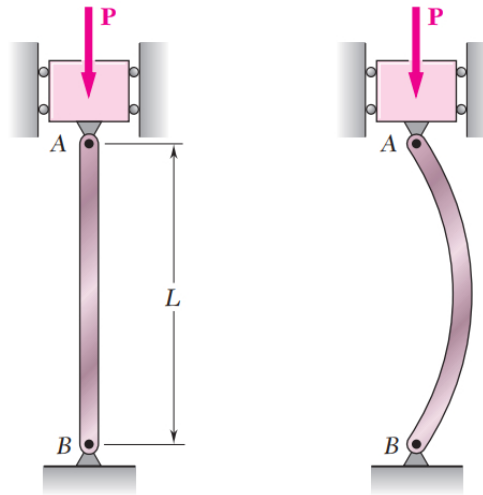
Considerando a flambagem elástica em regime linear, o modelo de flambagem proposto por Leonhard Euler em 1744 fornece um embasamento teórico suficiente para um primeiro estudo do fenômeno de instabilidade por flambagem global.

2.2.1 Modelo de Euler

Considera-se uma barra vertical de comprimento L , seção transversal com momento de inércia I , módulo de elasticidade E , biapoada com o apoio de segundo gênero situado na parte inferior, de modo que o apoio superior permita o deslocamento na direção longitudinal ao eixo principal. Supondo a barra inicialmente sem deformações e perfeitamente reta, aplicando-se uma carga de intensidade P sobre a sua extremidade superior, de modo a submetê-la a um esforço de compressão, a barra se manterá em equilíbrio.

Entretanto, ao ser aplicada uma perturbação de intensidade P , ver Figura 2.2.1, surge uma deflexão v na barra e com ela surgem esforços de flexão devido ao momento da força pela deflexão. Quando esta perturbação é retirada, a depender da magnitude da carga P , a posição de equilíbrio pode ser diferente. Se P for inferior ao valor da carga crítica de flambagem, a barra pode voltar à sua posição original. Se for superior, a barra assumirá uma nova posição de equilíbrio que apresenta deslocamentos laterais.

Figura 4: Perturbação do equilíbrio do pilar sob uma ação de intensidade P



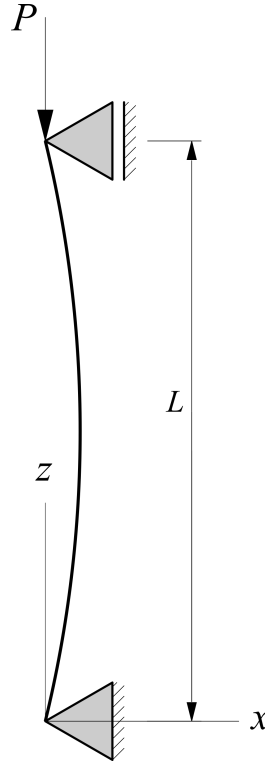
Fonte: BEER et al, 2011.

Assim, definindo o eixo vertical z com sentido positivo para cima, ao longo do eixo longitudinal da barra indeformada (Figura 2.2.1), tem-se que o momento fletor $M(z)$ que surge a partir da aplicação da carga para cada ponto do eixo z é equivalente ao produto da intensidade da carga pelo valor do deslocamento transversal, $v(z)$, da barra neste ponto, ou seja:

$$M(z) = Pv(z) \quad (1)$$

Porém, é sabido dos estudos de flexão que, para o regime de pequenos deslocamentos e considerando o comportamento do material como elástico linear, o momento $M(z)$ pode ser

Figura 5: Flambagem por flexão de coluna sob efeito de uma carga centrada



Fonte: Autor, 2022.

aproximado por $EIv''(z)$, de tal forma que, substituindo na expressão anterior, tem-se:

$$EIv''(z) = Pv(z) \quad (2)$$

$$v''(z) = \frac{P}{EI}v(z) \quad (3)$$

A Equação 3 obtida anteriormente trata-se de uma equação diferencial linear ordinária homogênea de coeficientes constantes para a determinação da deformada $v(z)$. Para simplificar a notação, é possível definir $k^2 = \frac{P}{EI}$ e rearranjar o termo da equação, obtém-se então:

$$v''(z) = k^2v(z) \quad (4)$$

$$v''(z) - k^2v(z) = 0 \quad (5)$$

Resolvendo a equação então obtém-se a solução geral:

$$v(z) = C_1 \text{sen}(kz) + C_2 \cos(kz) \quad (6)$$

Por fim, aplicando como condições de contorno a restrição do deslocamento nas extremidades, obtém-se os valores das constantes para o caso específico.

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

A partir da primeira condição, tem-se como resultado o valor nulo para a constante C_2 :

$$v(0) = 0 \rightarrow C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad (8)$$

A partir da segunda condição, para que a constante C_1 não seja anulada, anulando-se assim a função da equação da linha elástica, o argumento da função seno deve ser um múltiplo de π , ou seja, considerando $n \in \mathbb{N}^*$, obtém-se:

$$v(L) = 0 \rightarrow C_1 \sin(kL) = 0 \quad (9)$$

$$kL = n\pi \rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{n\pi}{L} \rightarrow P = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI \quad (10)$$

A equação 10, portanto, determina a carga necessária para que a peça sofra instabilidade por flambagem. É nítido que, ao avaliar a equação acima, variando-se n , a carga também varia de modo que a menor carga crítica possível para levar a barra a sofrer flambagem está associada a $n = 1$, ou seja:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (11)$$

Reescrevendo então a solução, tem-se:

$$v(z) = C_1 \sin(kz) \quad (12)$$

Entretanto, o parâmetro C_1 , equivalente ao valor máximo para $v(z)$ situado no ponto médio da barra para o caso em estudo, é indeterminado. Para efeitos de simulação, este parâmetro será controlado pelo usuário, como uma espécie de fator de escala, permitindo a visualização do fenômeno com intensidade variada.

Além disso, a partir da equação geral para a deflexão, é possível determinar a equação para o ângulo de rotação transversal $\theta(z)$ em cada ponto extraíndo a sua derivada em relação à variável z .

$$\theta(z) = \frac{dv(z)}{dz} = k C_1 \cos(kz) \quad (13)$$

Assim, obtém-se a equação da linha elástica para o caso da flambagem por flexão de uma coluna com dois apoios rotulados nas extremidades sujeita a uma carga P . É preciso destacar ainda que estas equações só são válidas para cargas $P \geq P_{cr}$, pois fora deste intervalo, a estrutura mantém sua estabilidade.

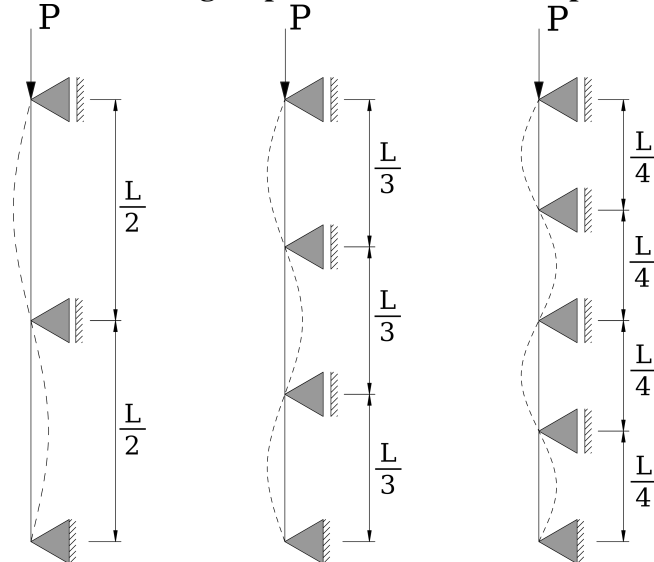
Assim, o modelo apresentado é aplicado para os eixos principais x e y , calculando o deslocamento e a rotação em cada ponto da barra tendo como referência seu centroide.

2.2.2 Condições de contorno

A formulação desenvolvida anteriormente é válida apenas para a determinação de uma barra de comprimento L presa nas suas duas extremidades por apoios rotulados, porém, é necessário generalizá-la, a fim de que ela possa modelar também os demais tipos de restrições de movimento.

Contudo, para este estudo, a única possibilidade diferente a ser explorada em relação às variações das condições de contorno será a adição de apoios intermediários igualmente espaçados ao longo do comprimento da barra, conforme mostra a Figura 2.2.2.

Figura 6: Modos de flambagem para a ocorrência de apoios intermediários



Fonte: Autor, 2022.

A modelagem matemática deste efeito a partir das relações já obtidas está relacionada ao valor do parâmetro n discutido anteriormente na solução de equação diferencial, de maneira que o modo de ordem n está associado a uma quantidade $n - 1$ de apoios intermediários, ou seja, o modo de flambagem de ordem $n = 1$ corresponde à barra sem apoios centrais, o modo de

ordem $n = 2$ está associado à deformada com um apoio e assim por diante. Assim, as equações do modelo tomam a forma:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (14)$$

$$v(z) = C_1 \text{sen}(nkz) \quad (15)$$

$$\theta(z) = n k C_1 \cos(nkz) \quad (16)$$

A interpretação visual disso é que a barra se deforma como se cada trecho entre apoios fosse uma barra conforme o modelo anterior respeitando-se as conformidades de rotação entre um trecho e outro. Esse comportamento está demonstrado na Figura 2.2.2, verificando-se respectivamente os modos $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$.

Porém, é importante salientar que a seção transversal possui dois eixos principais, como será aprofundado no tópico seguinte. Assim, faz-se necessário a análise em cada um deles, de forma que a barra irá flambar no eixo cuja carga crítica for inferior. Desta forma, deve-se levar em conta que, ao acrescentar apoios intermediários travando o deslocamento ao longo do eixo de menor inércia, desde que haja uma quantidade suficiente, pode-se fazer com que a flambagem ocorra no outro sentido.

2.3 Propriedades geométricas da barra

Por serem perfis largamente utilizados na concepção de estruturas em gerais, foram escolhidos dois tipos de seção: retangular e perfis I. Ambos têm uma aplicabilidade comercial extensa, em especial em elementos estruturais comprimidos, como pilares, sendo casos relevantes para o estudo.

2.3.1 Seção retangular

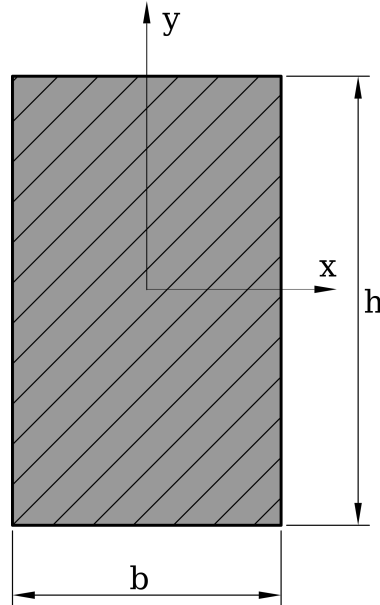
As seções retangulares, fortemente utilizadas para estruturas de concreto e madeira, são mecanicamente mais simples e previsíveis. Este tipo de seção transversal é modelada sem muito esforço a partir das suas duas dimensões básicas:

b : Largura da seção

h : Altura da seção

Ver Figura 2.3.1.

Figura 7: Esquema de uma seção retangular



Fonte: Autor, 2022.

A partir daí, define-se todos os parâmetros necessários para a modelagem geométrica. A começar pela área da seção transversal, que nada mais é do que o produto entre as duas dimensões.

$$A = b h \quad (17)$$

Além disso, obtém-se também os parâmetros associados à flexão para cada um dos eixos principais x e y , com determinação igualmente triviais, sendo eles o momento de inércia, que representa a parcela geométrica de resistência da seção ao giro, e o raio de giração, que pode ser entendido como a distância em que a área da figura pode ser concentrada numa faixa estreita com o mesmo momento de inércia.

$$I_x = \frac{b h^3}{12} \quad I_y = \frac{h b^3}{12} \quad (18)$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (19)$$

Por fim, determina-se ainda o índice de esbeltez. Correspondente à razão entre o comprimento útil da peça suscetível à flambagem da peça, denominado comprimento de flambagem, pelo seu raio de giração, é uma grandeza que mede, como o próprio nome diz, o grau de esbeltez da peça, sendo extremamente importante para avaliar as chances de apresentar instabilidades.

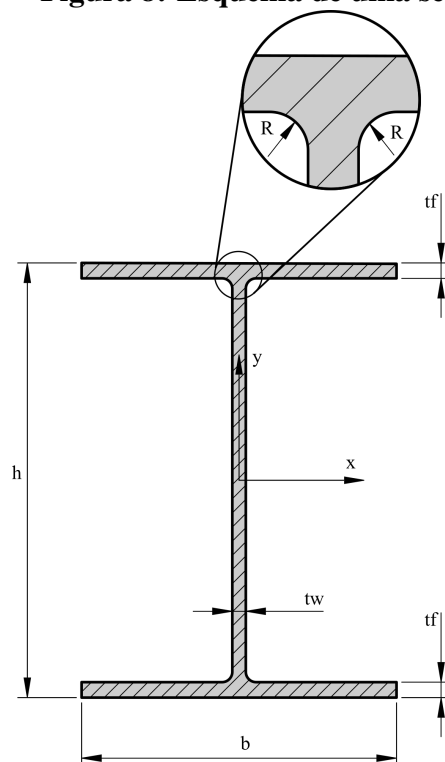
$$\lambda_x = \frac{L_x}{r_x} \quad \lambda_y = \frac{L_y}{r_y} \quad (20)$$

2.3.2 Perfil I

Já os perfis I, por sua vez, também são largamente utilizados em projetos de estruturas metálicas na concepção de elementos comprimidos como pilares, que são frequentemente suscetíveis ao fenômeno de flambagem.

No que se refere a este tipo de seção, também possuem duas direções principais, sendo x a direção de maior inércia e y , a de menor. Um esquema com a representação da seção I e seus eixos principais é apresentado abaixo na Figura 2.3.2.

Figura 8: Esquema de uma seção em perfil I



Fonte: Autor, 2022.

Considerando a seção mostrada, define-se para ela as seguintes dimensões:

b : Largura da seção

h : Altura da seção

t_w : Largura da alma

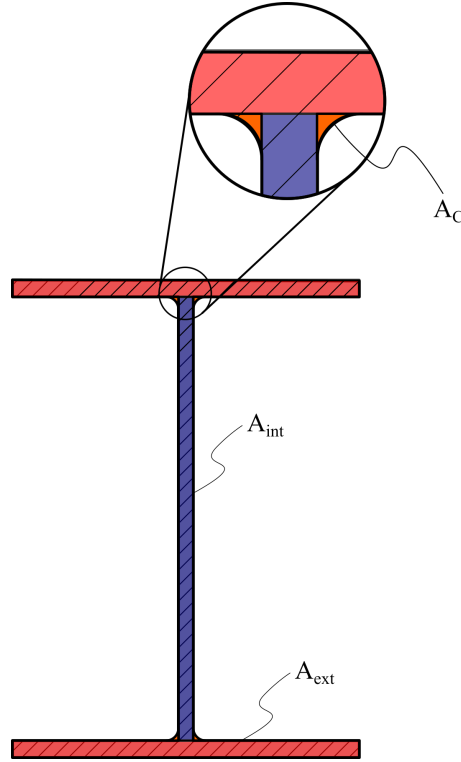
t_f : Largura da mesa

R : Raio de concordância

Ver Figura 2.3.2.

A partir daí, é possível definir os parâmetros geométricos necessários para o estudo do fenômeno de flambagem em função desses dados. Para isso, em virtude de sua complexidade, a seção será dividida em três áreas retangulares, conforme ilustrado na Figura 2.3.2.

Figura 9: Divisão das áreas da seção I para cálculo dos parâmetros geométricos



Fonte: Autor, 2022.

O primeiro deles é a área A da seção, que nada mais é do que a composição das subáreas que compõem a seção, ou seja:

$$\begin{cases} A_{int} = t_w (h - 2t_f) \\ A_{ext} = b \cdot t_f \\ A_c = R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \quad (21)$$

$$A = A_{int} + 2 A_{ext} + 4 A_c \quad (22)$$

Determina-se também o momento de inércia, ou de segunda ordem, usufruindo-se da mesma divisão da seção conforme ilustrado anteriormente. Fazendo-se as devidas composições, tem-se:

$$\begin{cases} I_x = I_{x,int} + 2 I_{x,ext} + 4 I_{x,c} \\ I_y = I_{y,int} + 2 I_{y,ext} + 4 I_{y,c} \end{cases} \quad (23)$$

Onde, aplicando as expressões conhecidas para a determinação dos momentos de inércia

para cada geometria e aplicando o Teorema dos Eixos Paralelos conforme necessário, transferindo a referência do sistema de coordenadas local da figura para o da seção:

$$I_{x,int} = \frac{t_w (h - 2t_f)^3}{12} \quad I_{x,ext} = \frac{b \cdot t_f^3}{12} + A_{ext} \left(\frac{h - t_f}{2} \right)^2 \quad (24)$$

$$I_{x,c} = R^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{36(1 - \frac{\pi}{4})} \right) + A_c \left(\frac{h}{2} - t_f - R + \frac{R}{6(1 - \frac{\pi}{4})} \right)^2 \quad (25)$$

$$I_{y,int} = \frac{(h - 2t_f) t_w^3}{12} \quad I_{y,ext} = \frac{t_f \cdot b^3}{12} \quad (26)$$

$$I_{y,c} = R^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{36(1 - \frac{\pi}{4})} \right) + A_c \left(\frac{t_w}{2} + R - \frac{R}{6(1 - \frac{\pi}{4})} \right)^2 \quad (27)$$

Por fim chega-se, para cada eixo, finalmente com os parâmetros obtidos aos parâmetros de raio de giração e índice de esbeltez, essenciais para o fenômeno de instabilidade por flambagem, que é calculado como a raiz quadrada do quociente entre o momento de inércia e a área da seção, ou seja:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (28)$$

$$\lambda_x = \frac{L_x}{r_x} \quad \lambda_y = \frac{L_y}{r_y} \quad (29)$$

2.4 Propriedades mecânicas do material

Além da geometria, um parâmetro necessário para a modelagem de praticamente qualquer fenômeno envolvendo deformações de peças estruturais são os que estão relacionados ao material do elemento, modelando seu comportamento quando submetido a cargas.

Pelo fato do estudo estar restringido à flambagem elástica, os materiais obedecem à Lei de Hooke, de forma que seu comportamento tensão (σ) versus deformação (ε) é linear e determinado por:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (30)$$

O Módulo de Elasticidade Longitudinal (E), também conhecido como Módulo de Young,

é um parâmetro inerente ao material que também está estritamente relacionado à flexão da peça, sendo responsável por modelar a parcela de rigidez que depende do material que ela é feita.

Para efeitos de exemplo, utiliza-se com frequência os materiais aço, concreto e madeira. Segue abaixo na Tabela 2.4 valores básicos para os módulos de elasticidades destes materiais. Entretanto, é importante lembrar que, para cada um destes materiais, estes valores variam, com o tipo de madeira, do aço ou com a tensão resistente do concreto, por exemplo, de modo que esses valores não são definitivos, mas apenas valores médios para cada um deles.

Tabela 1: Valores básicos para o módulo de Young (E)

Material	E (GPa)
Aço	200
Concreto	30
Madeira	13

Fonte: Autor, 2022.

Vale salientar ainda que a tensão resistiva do material é indiferente para a análise em estudo, já que se trata de um fenômeno de instabilidade e deve ser evitada a ocorrência em qualquer magnitude, independente da capacidade máxima de tensão do material. Desta forma, este parâmetro será irrelevante para a análise.

3 Sistema Computacional

O sistema computacional implementado para o estudo trata-se de um *software* para demonstrar uma visualização gráfica do fenômeno, permitindo visualizar o efeito de diversas perspectivas diferentes e a alteração das variáveis inerentes ao problema como geometria, material e restrições da barra.

Ao definir o desenvolvimento de um programa computacional, é imprescindível conceber, a partir dos seus objetivos e funcionalidades, todas as ferramentas necessárias e a interoperabilidade entre elas para que o sistema seja funcional e entregue o resultado esperado com precisão. Desta forma, é disposto nesta seção sobre as escolhas realizadas para a implementação do programa auxiliar que está associado ao trabalho em discussão.

3.1 Implementação

O desenvolvimento da aplicação contou com diversos conceitos e ferramentas essenciais referentes ao universo de implementações de *software*, tais como a linguagem de programação Python, o paradigma de orientação a objetos e algumas ferramentas que serão detalhadas adiante.

3.1.1 Linguagem de programação Python

A linguagem de programação escolhida para a implementação do programa foi o Python¹ por se tratar de uma linguagem de alto nível, possuindo uma sintaxe simples, ampla difusão dentro do meio acadêmico e facilmente acessível por ter uma licença de *software* livre. Dessa maneira, é possível, para aqueles que tenham interesse, abrir o código fonte do programa e entender como ele funciona.

Embora existam outras linguagens com melhor desempenho com relação à computação gráfica e numérica, para os fins aos quais a aplicação desenvolvida se destina, Python desempenha seu papel com eficiência em função da simplicidade da solução.

Além disso, aproveitou-se também da ferramenta de ambiente virtual da linguagem. A distribuição da aplicação acompanha um ambiente virtual pré-configurado com a versão 3.9 do interpretador, na qual o programa foi desenvolvido, e todas as dependências pré-instaladas. Isso é interessante pois, desta forma, não se faz necessário realizar a instalação prévia do interpretador Python ou a instalação das bibliotecas necessárias, garantindo facilidade na distribuição e utilização e evitando possíveis problemas de compatibilidade.

¹Site oficial do Python: <https://www.python.org/>

Assim, o programa ainda está preparado para atender usuários de Windows e Linux, reservando para cada um deles um ambiente virtual e um binário correspondente com a plataforma que inicializa o programa a partir do interpretador Python configurado.

3.1.2 Programação orientada a objetos

Especialmente requerida pelo *framework* Qt e suportada nativamente pela linguagem Python, o paradigma de programação orientada a objetos surge com o intuito de facilitar a abstração de diversos problemas dentro da programação.

Para isso, a POO, como costuma ser abreviada, é baseada nos conceitos de classes e objetos. As classes são um conjunto de características e comportamentos que são inerentes a um grupo de objetos da realidade que precisam ser abstraídos e transformados em uma estrutura passível de ser armazenada no computador.

Assim, classes são definições de como um determinado grupo de objetos em comum se comportam e de quais são suas características, enquanto os objetos são efetivamente instâncias de uma classe, ou seja, a definição de uma entidade com base em uma determinada classe com seus devidos comportamentos e características.

Além de necessária, a POO é muito útil para garantir a escalabilidade e manutenção de um programa. Isso ocorre porque, aliado à modularização, é possível dividir um programa complexo em implementações mais simples, cada qual com suas responsabilidades, e fazer a posterior união dessas partes, obtendo o programa final.

3.1.3 Bibliotecas externas

Bibliotecas externas são programas e rotinas pré-implementados a fim de abstrair algumas tarefas. Para a implementação do *software* de simulação, foram utilizadas duas bibliotecas clássicas: o *framework* Qt, muito utilizado para a implementação de interfaces gráficas para soluções *desktop*, e a *API* gráfica OpenGL, para renderização de gráficos em tempo real.

- **API gráfica OpenGL**

A visualização tridimensional do modelo da barra é exibido visualmente com o auxílio da *API* gráfica OpenGL² (abreviação em inglês para Open Graphical Library). Projetada como uma máquina de estado, a OpenGL opera a partir da manipulação de variáveis que definem o estado corrente da aplicação, buffers para armazenamento temporário dos dados e, com isso, fazendo a renderização das imagens. Essa *API* foi escolhida por possuir

²Site oficial da OpenGL: <https://www.opengl.org/>

também licença *open source*, como o próprio nome sugere, além de ter bastante conteúdo acessível a nível básico de aprendizado.

- **Qt**

Já para a implementação da interface gráfica, é utilizada a biblioteca *open source* do *framework* Qt³ na versão 5 na sua implementação para Python denominada PyQt5⁴. Uma das justificativas para a escolha desta biblioteca é a possibilidade de utilização do *software* Qt Designer para a criação das diversas janelas necessárias para a interface do programa. Além disso, ela possui uma integração nativa com a API do OpenGL, permitindo a criação e manipulação de um contexto com facilidade e fluidez.

- **GLM**

O trabalho com computação gráfica, requer o uso intensivo de matrizes e vetores, fazendo-se necessário bibliotecas que permitam essa manipulação com facilidade. Desta forma, a própria OpenGL dispõe da biblioteca GLM, distribuída separadamente, que permite fazer esta manipulação de maneira otimizada, além de conter a implementação de *arrays* no formato que a OpenGL espera.

3.1.4 Módulos internos

De maneira geral, a estrutura básica de modularização do programa começa com um arquivo *main* na raiz, responsável pela inicialização do programa, e uma pasta denominada *pkg* contendo pacotes com módulos internos desenvolvidos, de modo a isolar as diversas funcionalidades do programa. Cada um deles será detalhado mais adiante.

Além disso, na pasta *pkg*, tem-se ainda uma série de códigos-fonte que são dependências internas criadas para o funcionamento do programa. Estas dependências estão divididas em:

- **Classes:** Conforme explicado no item anterior, elas são responsáveis por determinar o comportamento e as características de determinados objetos que são implementados pelo programa. São eles: Apoios, Barra, Câmera, Relatório, Resultado e *Vertex*.

A classe *Vertex* define os objetos de vértices da aplicação, de modo que cada um deles, além de conter uma posição, recebe também uma cor. Enquanto isso, as classes Apoio e Barra são responsáveis por definir a geometria dos elementos gráficos, construindo seus vértices, a partir de instância da classe anterior, e faces, além de fazer as devidas transformações de deformação, translação e rotação.

³Site oficial do Qt: <https://www.qt.io/home>

⁴Documentação da biblioteca PyQt5: <https://www.riverbankcomputing.com/static/Docs/PyQt5/index.html>

Câmera, como o próprio nome sugere, implementa o objeto de câmera, ou seja, o ponto de vista do observador, definindo sua posição, direção e suas respectivas matrizes de *Model*, *View* e *Projection*, responsáveis por gerar a visualização correta a partir do ponto de vista definido. Além disso, ela também implementa as funções de translação e rotação dessa visualização.

Já a classe de resultado é responsável por calcular, a partir das propriedades geométricas e mecânicas da barra, os valores e funções referentes ao fenômeno de flambagem, como carga crítica nos dois eixos principais da barra, o eixo de flambagem (correspondente ao de menor carga crítica) e as funções de deslocamento e rotação, conforme definidos na seção anterior.

- **Shaders:** São programas escritos numa linguagem de programação apropriada que a *API* gráfica compila em tempo de execução do programa para ser executado pela placa gráfica. Como a placa gráfica de um computador é otimizada para efetuar operações associadas a geração de imagens, essas manipulações tornam-se mais ágeis quando aplicadas por ela do que pelo processador.

Cada *API* contém uma especificação de linguagem para a implementação dos programas de *shaders* e a OpenGL tem a sua própria, denominada GLSL. Além disso, de modo geral, existem vários tipos de *shaders*, porém, dentro do escopo do projeto, são utilizados dois tipos de *shaders*: *vertex shaders*, aplicados a cada vértice aplicando as transformações nas suas respectivas posições e os *fragment shaders*, que é aplicado a cada *pixel* da imagem formada definindo seus atributos finais como cor e transparência.

Para o programa em questão, esses *shaders* são extremamente básicos. O *vertex shader* é responsável por aplicar as transformações de câmera, para que a cena seja renderizada no ponto de vista correto. Já o *fragment shader*, calcula a cor final do pixel, simulando a presença de uma fonte de luz que parte da direção do observador.

- **UI:** Sigla em inglês para Interface de Usuário, guarda os módulos e classes necessários para implementar e controlar as janelas que permitem a interação do usuário com as diversas funcionalidades do programa, bem como algumas dependências necessárias. São elas: Apoios, CanvasOGL, Geometria, OpenGLutils e Tela Inicial.

Os arquivos de Apoios, Geometria e Tela Inicial montam cada uma das janelas utilizando a biblioteca PyQt5, definindo como cada uma delas deve ser configurada pela aplicação e implementando a passagem das informações recebidas na interface para o programa. Já a classe CanvasOGL herda e estende a classe *QOpenGLWidget* original do Qt, definindo o comportamento do contexto OpenGL da aplicação com relação ao desenho e às manipulações de mouse e teclado.

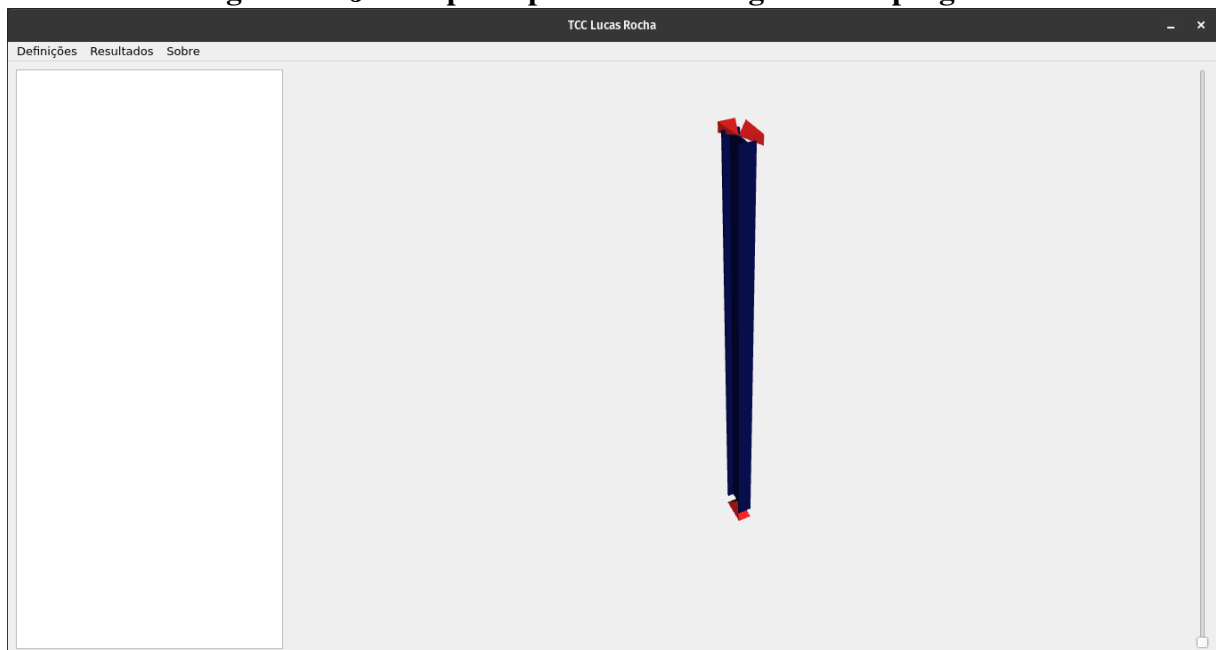
Por fim, o arquivo OpenGLutils, como o próprio nome sugere, implementa três funções utilitárias para o funcionamento do contexto OpenGL. A primeira é a função de compilação dos shaders, necessária principalmente para a fase de desenvolvimento, pois é responsável também por exibir *logs* de eventuais erros de compilação. A segunda lê os dados de geometria dos objetos da cena e envia-os para a memória da placa gráfica e a última aplica efetivamente as funções de desenho.

3.2 Tutorial de utilização

Ao iniciar o programa abrindo o binário *runner*, encontrado na pasta raiz, a tela principal do aplicativo exibe a simulação gráfica da barra, definindo a princípio uma barra em seção I pré-configurada com 1m de comprimento, 100mm de base, 200mm de altura, 15mm de espessura da alma e das mesas e raio de concordância nulo. Essas medidas são meramente arbitrárias e servem apenas para mostrar uma visualização inicial do programa para que o usuário veja à primeira vista o sistema funcionando, ver Figura 3.2. A janela pode ser redimensionada conforme desejado para melhor visualização.

Além disso, é possível visualizar à esquerda um campo de saída de texto em branco no qual o relatório de cálculo gerado pelo programa é exibido conforme a solicitação do usuário e à direita um controle que permite modificar a intensidade de aplicação do efeito na simulação.

Figura 10: Janela principal da interface gráfica do programa



Fonte: Autor, 2022.

A visualização pode ser explorada através de comandos com o mouse. Ao segurar qual-

quer botão e arrastar, um movimento de translação será realizado permitindo mover a câmera e fazendo o mesmo com o botão Shift do lado esquerdo do teclado pressionado a visualização fará um movimento de rotação permitindo uma visão da barra a partir do ângulo desejado. Além disso, ao rolar o *scroll* do mouse, o usuário pode também aproximar ou afastar, realizando movimentos de zoom.

Esta primeira janela é constituída de um menu superior com três opções: Definições, Resultados e Sobre. Abrindo o menu Definições, são disponibilizadas opções para configurar os parâmetros geométricos, de travamento e material da barra. Ao clicar na primeira opção, correspondente à definição das dimensões, é exibida uma janela secundária, onde pode-se alternar a geometria da barra entre perfil retangular e seção I, além de atribuir os valores de base, altura, espessuras da alma e da mesa e comprimento (Figura 3.2).

Para melhor experiência, todos os campos de valores devem ser preenchidos com as dimensões em milímetros, assim o próprio programa se encarrega de convertê-las para metros para que o cálculo seja feito com as unidades corretas. É importante salientar ainda que, caso algum destes campos estejam em branco, o sistema considera a medida corrente para a respectiva dimensão.

Com relação ao perfil I, pode-se ter um analisar um perfil soldado ou laminado. Para modelar um perfil soldado, basta atribuir valor nulo ao raio de concordância. Além disso, para facilitar o desenho e economizar no processamento gráfico, o programa não desenha o raio de concordância de seções I, porém ele é contabilizado no cálculo dos parâmetros geométricos e nos que decorrem destes.

Figura 11: Janela de definição da geometria

Definir geometria

Tipo de seção: I

Largura da seção (b):

Altura da seção (h):

Espessura da alma (tw):

Espessura da mesa (tf):

Raio de concordância (R):

Comprimento da barra (L):

Unidades em milímetros (mm)

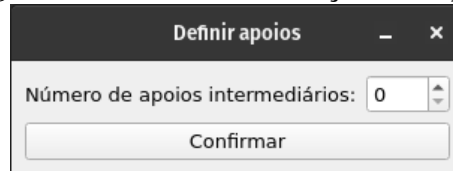
Confirmar

Fonte: Autor, 2022.

A opção seguinte é responsável pela determinação dos travamentos intermediários da barra, conforme Figura 3.2. Note que, inicialmente o sistema já define a barra com um apoio de rótula na base, restringindo os deslocamentos laterais e longitudinal, e dois apoios móveis

no topo, cada um impedindo a translação lateral da barra em relação a cada um dos eixos principais. A partir daí, o usuário pode selecionar um número desejado de apoios intermediários e, confirmando, o programa se encarrega de gerá-los.

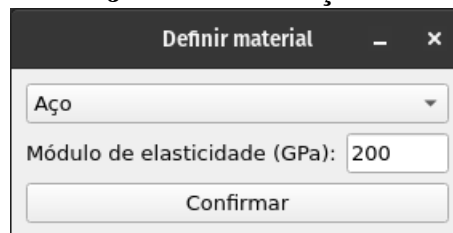
Figura 12: Janela de definição dos apoios



Fonte: Autor, 2022.

Já para a definição dos parâmetros associados ao material, abre-se uma janela secundária, ver Figura 3.2, onde pode ser selecionado o material entre as opções de aço, concreto, madeira e um material genérico. Selecionando uma das três primeiras, o sistema sugere no campo de entrada de texto um valor padrão para o dado material, porém esse valor pode ser alterado conforme necessidade do usuário. Este campo está preparado para receber um valor em GPa.

Figura 13: Janela de definição de material



Fonte: Autor, 2022.

A penúltima opção do menu é responsável por limpar as definições, fazendo com que a barra volte ao seu estado inicial e a última encerra o programa.

O menu intitulado de Resultados, por sua vez, contém um comando para gerar um relatório acerca do modelo que está sendo gerado com os dados informados pelo usuário, mostrando os dados de entrada e saída da simulação tais como os parâmetros geométricos, de apoios e material discutidos anteriormente, como os parâmetros de carga calculados para caso em estudo. Este relatório então é exibido no campo de saída lateral da tela inicial do programa.

Por fim, o menu Sobre apresentam opções com informações sobre o programa como versão, autor e outros dados que forem necessários para identificação do *software*.

4 Resultados e discussões

Nesta seção, serão abordados casos de estudos com o objetivo de validar a ferramenta computacional e demonstrar as possibilidades de utilização as quais ela se aplica. Além disso, os casos foram selecionados de modo a fazer um estudo do fenômeno de flambagem dentro do escopo que o programa se destina a estudar, verificando o comportamento do fenômeno frente à manipulação de variáveis associadas a ele.

Dessa forma, cada um dos casos foi analisado e discutido partindo da resolução analítica do modelo, seguindo a formulação teórica abordada na seção de Fundamentação Teórica, e utilizando o programa computacional, fazendo assim um paralelo entre as duas soluções.

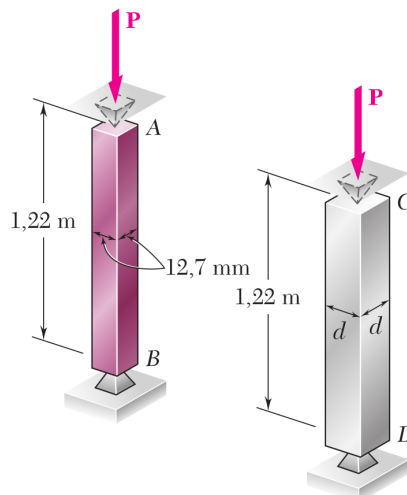
Todos os casos de estudos foram obtidos a partir de ligeiras adaptações de exercícios propostos enunciados nos livros da literatura comumente utilizados em sala de aula.

4.1 Caso de estudo 1

O objetivo deste primeiro caso de estudo é verificar o efeito da variação do material e seu módulo de elasticidade correspondente para o fenômeno de flambagem. Este caso é adaptado do exercício 10.12 do livro Mecânica dos Materiais (BEER et al., 2011).

Suponha uma escora de seção transversal quadrada de lado $d = 12,7\text{ mm}$ confeccionada em aço ($E = 200\text{ GPa}$) com 1,22m de comprimento simplesmente apoiada sobre as suas extremidades. Se esta escora for confeccionada em alumínio ($E = 69,6\text{ GPa}$), qual deve ser a dimensão do lado da seção transversal para que ela suporte a mesma carga crítica da escora de aço? Ver Figura 4.1

Figura 14: Esquema das escoras em aço e alumínio



Fonte: BEER et al., 2011.

Deve-se primeiramente determinar a intensidade da carga crítica para a coluna de aço, já que esse valor vai se manter inalterado para as duas barras, servindo de referência para a determinação das dimensões da seção transversal da segunda. Assim, de posse dos valores dados, tem-se:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{d^4}{12} = \frac{0,0127^4}{12} = 2,168 \cdot 10^{-9} m^4$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2,168 \cdot 10^{-9}}{1,22^2} = 2875,04 N \approx 2,88 kN$$

Alimentando o programa com os mesmos dados, Figura 4.1, conforme as imagens seguintes, obtém-se então o mesmo resultado, conforme pode ser visualizado na Figura 4.1.

Figura 15: Entrada de dados no programa para a escora de aço

The figure shows three screenshots of a software interface for defining parameters for a steel beam. The first window, 'Definir geometria', has fields for 'Tipo de seção' (Retangular), 'Largura da seção (b):' (12.7), 'Altura da seção (h):' (12.7), 'Espessura da alma (tw):', 'Espessura da mesa (tf):', 'Raio de concordância (R):', and 'Comprimento da barra (L):' (1220). The second window, 'Definir material', has a dropdown for 'Aço' and a field for 'Módulo de elasticidade (GPa):' (200). The third window, 'Definir apoios', has a field for 'Número de apoios intermediários:' (0). Each window has a 'Confirmar' button.

Fonte: Autor, 2022.

Agora, partindo do valor de carga crítica obtido e fazendo o caminho reverso, encontra-se o valor do lado d' do quadrado da seção transversal da escora de alumínio.

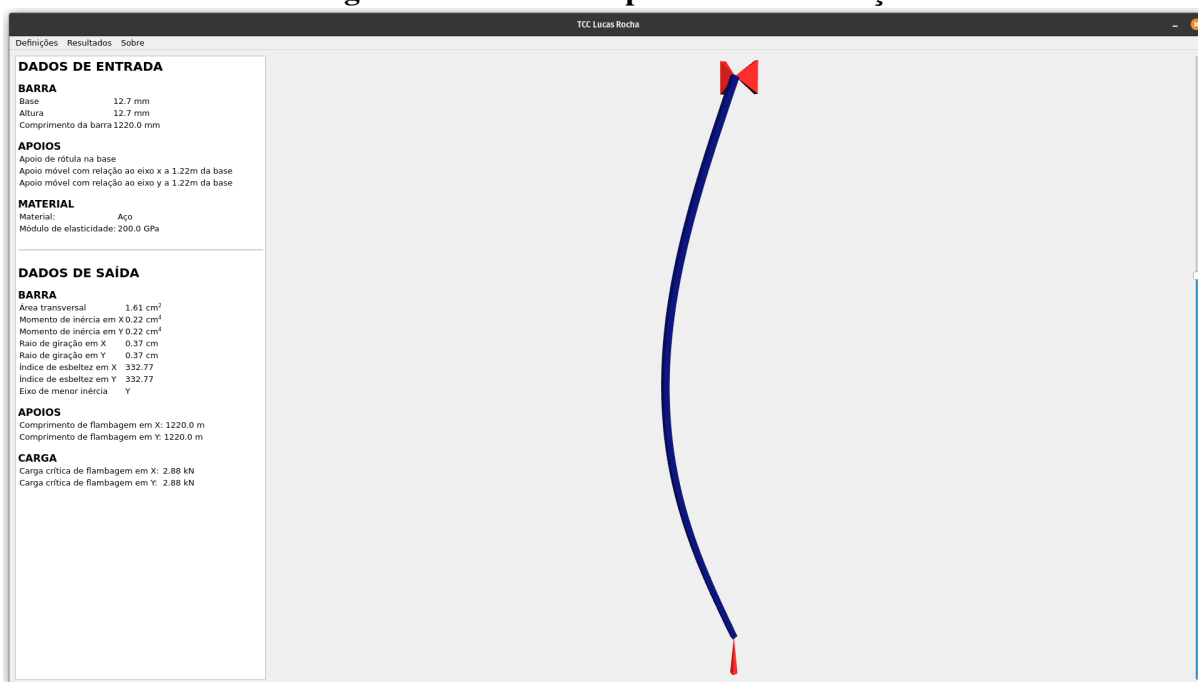
$$I' = \frac{P_{cr} L^2}{\pi^2 E} = \frac{2875,21 \cdot 1,22^2}{\pi^2 \cdot 69,6 \cdot 10^9} \approx 6,23 \cdot 10^{-9} m^4$$

$$d' = \sqrt[4]{12 \cdot I'} = \sqrt[4]{12 \cdot 6,23 \cdot 10^{-9}} \approx 0,01654 m = 16,54 mm$$

Novamente, este resultado pode ser confirmado substituindo os valores no programa, Figura 4.1, e verificando a semelhança nos resultados apresentados na Figura 4.1.

Analisando os resultados, é possível perceber ainda que, ao utilizar um material significativamente mais flexível, é preciso compensar a rigidez da seção transversal elevando seu momento de inércia. Fazendo isso, entretanto, o resultado obtido é uma seção e, consequentemente, uma peça 70% maior e, em virtude da leveza do alumínio, uma peça 40% mais leve do

Figura 16: Resultados para a escora de aço



Fonte: Autor, 2022.

Figura 17: Entrada de dados no programa para a escora de alumínio

The screenshot shows three dialog boxes for data entry:

Definir geometria

Tipo de seção: Retangular
 Largura da seção (b): 16.54
 Altura da seção (h): 16.54
 Espessura da alma (tw):
 Espessura da mesa (tf):
 Raio de concordância (R):
 Comprimento da barra (L): 1220
 Unidades em milímetros (mm)
 Confirmar

Definir material

Arbitrário
 Módulo de elasticidade (GPa): 69.6
 Confirmar

Definir apoios

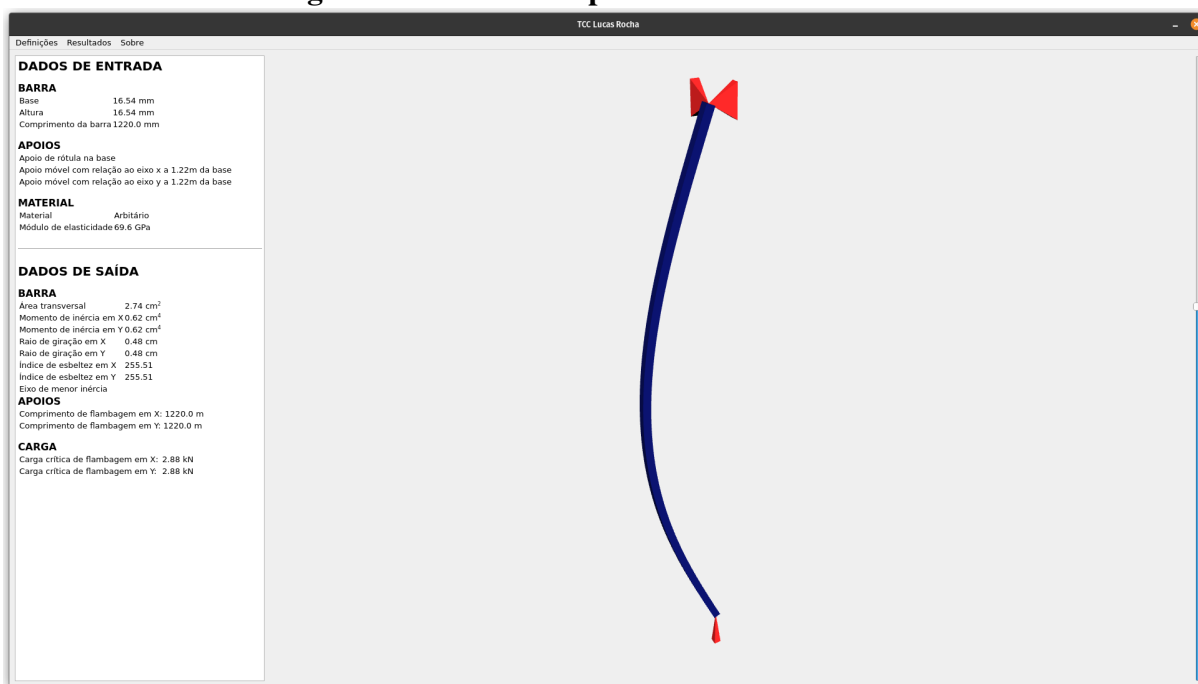
Número de apoios intermediários: 0
 Confirmar

Fonte: Autor, 2022.

que a de aço.

Dessa forma, considerando exclusivamente o fenômeno de flambagem, pode-se concluir que a escora de alumínio seria mais vantajosa nesse caso por se tratar de um material mais leve e o acréscimo nas dimensões não ser exorbitante. Entretanto, essa realidade pode ser diferente se forem consideradas outras propriedades, como a tensão resistiva do material, por exemplo.

Figura 18: Resultados para a escora de alumínio

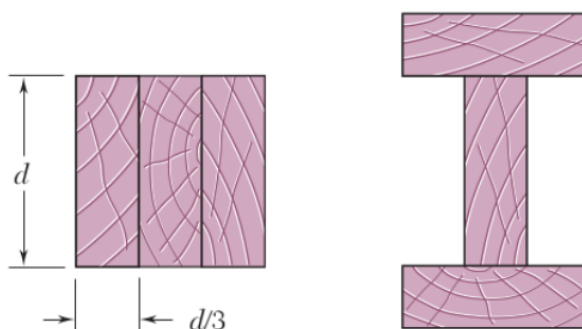


Fonte: Autor, 2022.

4.2 Caso de estudo 2

Para o segundo caso, adaptado do exercício 10.14 da mesma referência do caso anterior, suponha três pranchas idênticas em madeira ($E = 13GPa$) com 4m de comprimento e seção retangular com dimensões 50x150mm. Estas três pranchas podem ser arranjadas colando-as segundo um dos arranjos mostrados na Figura 4.2.

Figura 19: Possibilidades de arranjo para as três pranchas



Fonte: BEER et al, 2011.

Desta forma, é possível formar uma seção transversal quadrada de dimensões 150x150mm ou em I com 150mm de base, 250mm de altura e 50mm de largura da mesa e da alma, ambas contendo a mesma quantidade de material, permitindo avaliar comparativamente como cada uma se comporta frente ao fenômeno de flambagem.

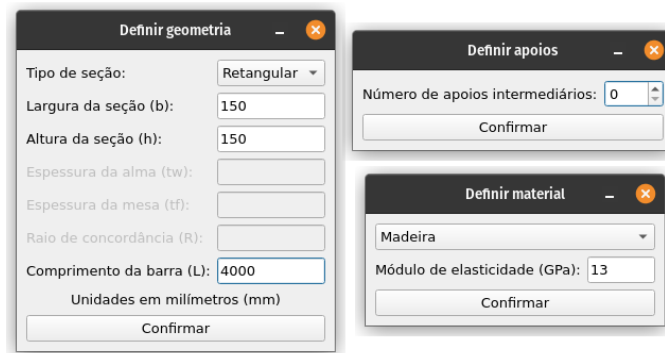
Para isso, calcula-se para cada uma delas seus respectivos momentos de inércia e cargas críticas em relação aos dois eixos principais. Começando-se com a seção quadrada, têm-se os seguintes resultados:

$$I_x = I_y = \frac{d^4}{12} = \frac{0,15^4}{12} \approx 4,22 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$P_{cr,x} = P_{cr,y} = \frac{\pi^2 \cdot 13 \cdot 10^9 \cdot 4,22 \cdot 10^{-5}}{4^2} \approx 338303,82 N = 338,30 kN$$

Confirmando-se o resultado emitido pelo programa, conforme mostrado nas Figuras 4.2 e 4.2, tem-se:

Figura 20: Entrada de dados no programa para a seção retangular



Fonte: Autor, 2022.

Já para a seção em I, tem-se:

- Para o eixo x:

$$I_{x,int} = \frac{0,050 (0,250 - 2 \cdot 0,050)^3}{12} \approx 1,41 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$I_{x,ext} = \frac{0,150 \cdot 0,050^3}{12} + (0,150 \cdot 0,050) \left(\frac{0,250 - 0,050}{2} \right)^2 \approx 7,66 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$I_x = 1,41 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 7,66 \cdot 10^{-5} = 1,67 \cdot 10^{-4} m^4$$

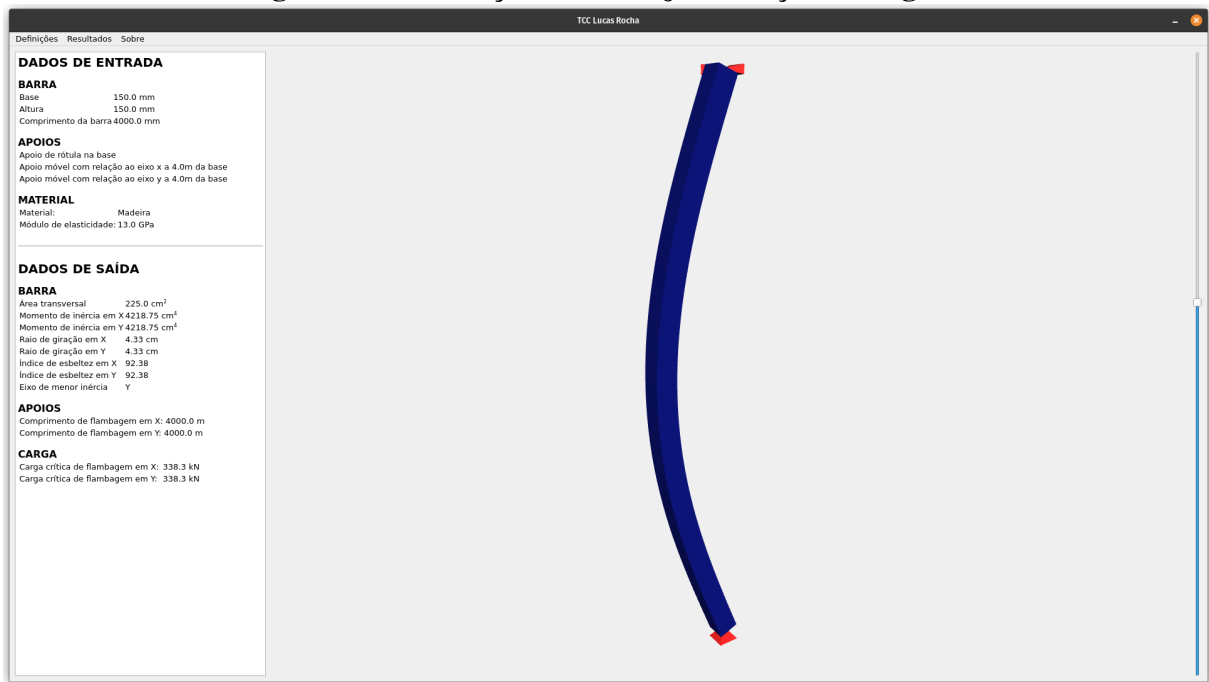
$$P_{cr,x} = \frac{\pi^2 \cdot 13 \cdot 10^9 \cdot 1,67 \cdot 10^{-4}}{4^2} \approx 1340685,52 N = 1340,69 kN$$

- Para o eixo y:

$$I_{y,int} = \frac{(0,250 - 2 \cdot 0,050) 0,050^3}{12} \approx 1,56 \cdot 10^{-6} m^4$$

$$I_{y,ext} = \frac{0,050 \cdot 0,150^3}{12} \approx 1,41 \cdot 10^{-5} m^4$$

Figura 21: Simulação do arranjo em seção retangular



Fonte: Autor, 2022.

$$I_x = 1,56 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 1,41 \cdot 10^{-5} = 2,97 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$P_{cr,y} = \frac{\pi^2 \cdot 13 \cdot 10^9 \cdot 2,97 \cdot 10^{-5}}{4^2} \approx 238065,66 N = 238,07 kN$$

Figura 22: Entrada de dados no programa para a seção em I

Definir geometria

Tipo de seção: I

Largura da seção (b): 150

Altura da seção (h): 250

Espessura da alma (tw): 50

Espessura da mesa (tf): 50

Raio de concordância (R): 0

Comprimento da barra (L): 4000

Unidades em milímetros (mm)

Confirmar

Definir apoios

Número de apoios intermediários: 0

Confirmar

Definir material

Madeira

Módulo de elasticidade (GPa): 13

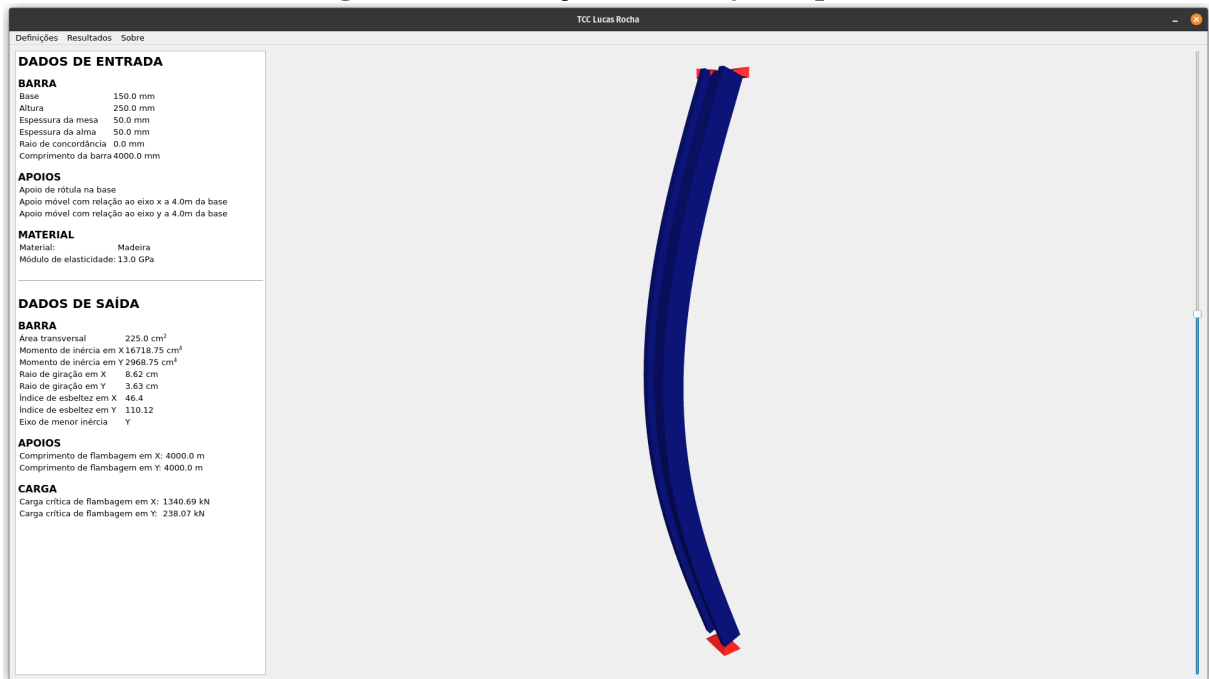
Confirmar

Fonte: Autor, 2022.

É possível verificar novamente que, para ambos os casos, os resultados da determinação analítica é semelhante ao resultado impresso pelo programa. Além disso, ao comparar as duas situações, nota-se que para a barra em perfil I, apesar de uma pequena redução na carga crítica com relação ao eixo y , a carga crítica no eixo x sofreu um acréscimo evidente em virtude da geometria da seção em relação ao primeiro caso.

Portanto, é importante enxergar que cada tipo de seção transversal tem a sua particularidade. De modo geral, a seção retangular possui uma carga crítica maior e a mesma capacidade com relação aos dois eixos, enquanto o perfil I tem uma ligeiramente menor no eixo y , porém um valor significativamente maior em x . Porém, essa característica do segundo caso pode ser compensada, como será visto no caso de estudo posterior.

Figura 23: Simulação do arranjo em perfil I



Fonte: Autor, 2022.

4.3 Caso de estudo 3

Por fim, o caso de estudo 3 é adaptado do exercício 11.3-11 do livro Mecânica dos Materiais (GERE, 2003), onde será analisado o efeito da ocorrência de apoios intermediários em uma barra em seção I. Supõe-se, então, uma coluna prismática de aço de seção transversal em perfil I do tipo W10x45 com 200,5mm de base, 252,5mm de altura, 8,75mm de espessura da alma, 15,5mm de espessura da mesa e 5500mm de comprimento.

Sabe-se que essa seção transversal tem seus respectivos eixos principais com momento de inércia máximo e mínimo e, como foi visto no caso anterior, essa diferença pode ser discrepante a depender das dimensões. Portanto, ao analisar a expressão para a carga crítica, conclui-se que uma forma de compensar isso sem alterar as dimensões da peça é a redução do comprimento de flambagem da barra pela inserção de apoios intermediários.

Para verificar isso, calcula-se a carga crítica em ambos os eixos sem a presença de apoios

intermediários. Desta forma, têm-se:

- Para o eixo x:

$$I_{x,int} = \frac{0,00875 (0,2525 - 2 \cdot 0,0155)^3}{12} \approx 7,92 \cdot 10^{-6} m^4$$

$$I_{x,ext} = \frac{0,2005 \cdot 0,0155^3}{12} + (0,2005 \cdot 0,0155) \left(\frac{0,2525 - 0,0155}{2} \right)^2 \approx 4,37 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$I_x = 7,92 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 4,37 \cdot 10^{-5} = 9,53 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$P_{cr,x} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 9,53 \cdot 10^{-5}}{5,5^2} \approx 6220500,64 N = 6220,50 kN$$

- Para o eixo y:

$$I_{y,int} = \frac{(0,2525 - 2 \cdot 0,0155) 0,00875^3}{12} \approx 1,24 \cdot 10^{-8} m^4$$

$$I_{y,ext} = \frac{0,0155 \cdot 0,2005^3}{12} \approx 1,04 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$I_y = 1,24 \cdot 10^{-8} + 2 \cdot 1,04 \cdot 10^{-5} = 2,08 \cdot 10^{-5} m^4$$

$$P_{cr,y} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2,08 \cdot 10^{-5}}{5,5^2} \approx 1359519,25 N = 1359,52 kN$$

É possível então comparar este resultado com os dados fornecidos pelo programa apresentado nas Figuras 4.3 e 4.3.

Figura 24: Entrada de dados no programa para a seção sem apoios intermediários

The figure shows three overlapping windows from a software application:

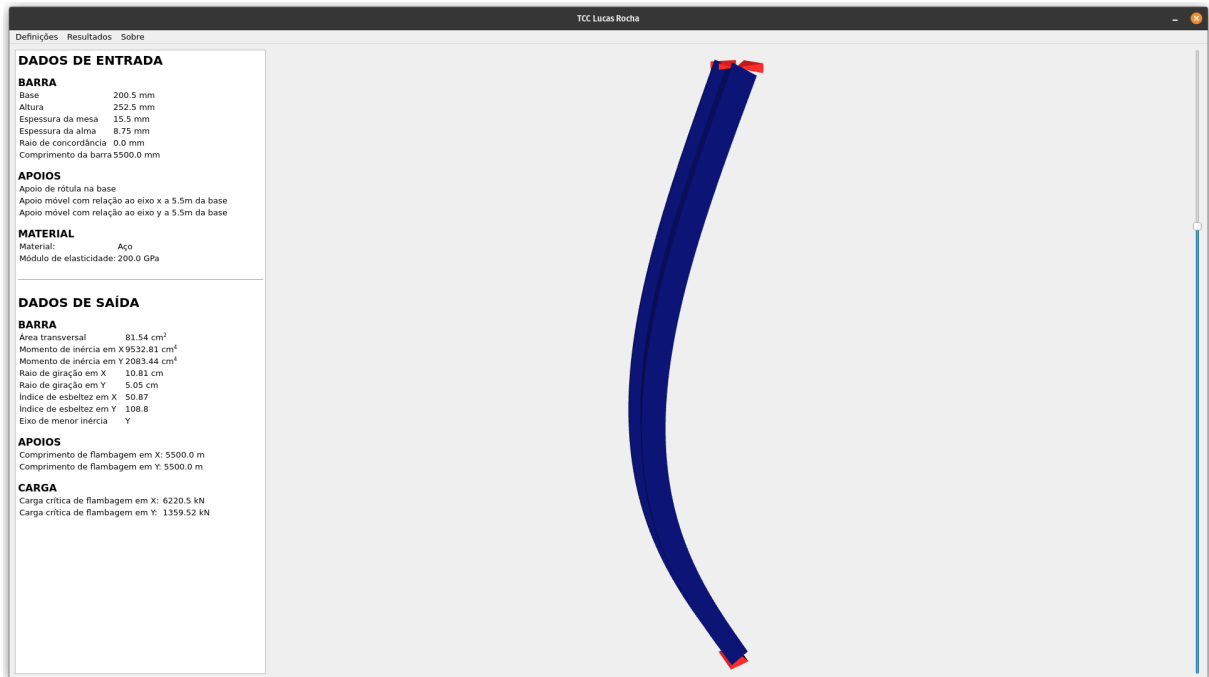
- Definir geometria:** A form with fields for 'Tipo de seção' (set to 'I'), 'Largura da seção (b):' (200.5), 'Altura da seção (h):' (252.5), 'Espessura da alma (tw):' (8.75), 'Espessura da mesa (tf):' (15.5), 'Raio de concordância (R):' (0), and 'Comprimento da barra (L):' (5500). It includes a unit label 'Unidades em milímetros (mm)' and a 'Confirmar' button.
- Definir apoios:** A smaller form with a field for 'Número de apoios intermediários:' (set to 0) and a 'Confirmar' button.
- Definir material:** A form with a dropdown menu for material (set to 'Aço') and a field for 'Módulo de elasticidade (GPa):' (200), with a 'Confirmar' button.

Fonte: Autor, 2022.

Comparando estes resultados com os obtidos via simulação na Figura 4.3, novamente os resultados são equivalentes e o maior momento de inércia da seção é mais de 4 vezes superior ao menor.

É possível verificar então como a barra se comporta ao inserir um apoio intermediário impedindo a flambagem em relação ao eixo de menor inércia, diminuindo o seu coeficiente de flambagem e, conseqüentemente, reduzindo a carga crítica. Isso é feito acrescentando um apoio intermediário bloqueando a movimentação da barra na direção do eixo x no seu ponto médio.

Figura 25: Resultados para o caso sem apoio intermediário



Fonte: Autor, 2022.

Ao fazer isso, tem-se, portanto, para o eixo y :

$$P_{cr,y} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2,08 \cdot 10^{-5}}{2,75^2} \approx 5438082,24N = 5438,08kN$$

Desta forma, é possível notar que, em virtude da redução pela metade do comprimento de flambagem e pela carga crítica ser inversamente proporcional ao quadrado do comprimento, a carga crítica é quadruplicada. Apesar disso, a flambagem continua ocorrendo na direção do eixo y , como ilustra a Figura 4.3.

Porém, acrescentando mais um apoio, totalizando dois apoios, a situação muda. Com o comprimento de flambagem reduzido na terça parte, a carga crítica em relação ao eixo y torna-se 9 vezes maior, superando o valor em relação ao eixo x e alternando a direção da flambagem.

$$P_{cr,y} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2,08 \cdot 10^{-5}}{1,8333^2} \approx 12235685,04N = 12235,69kN$$

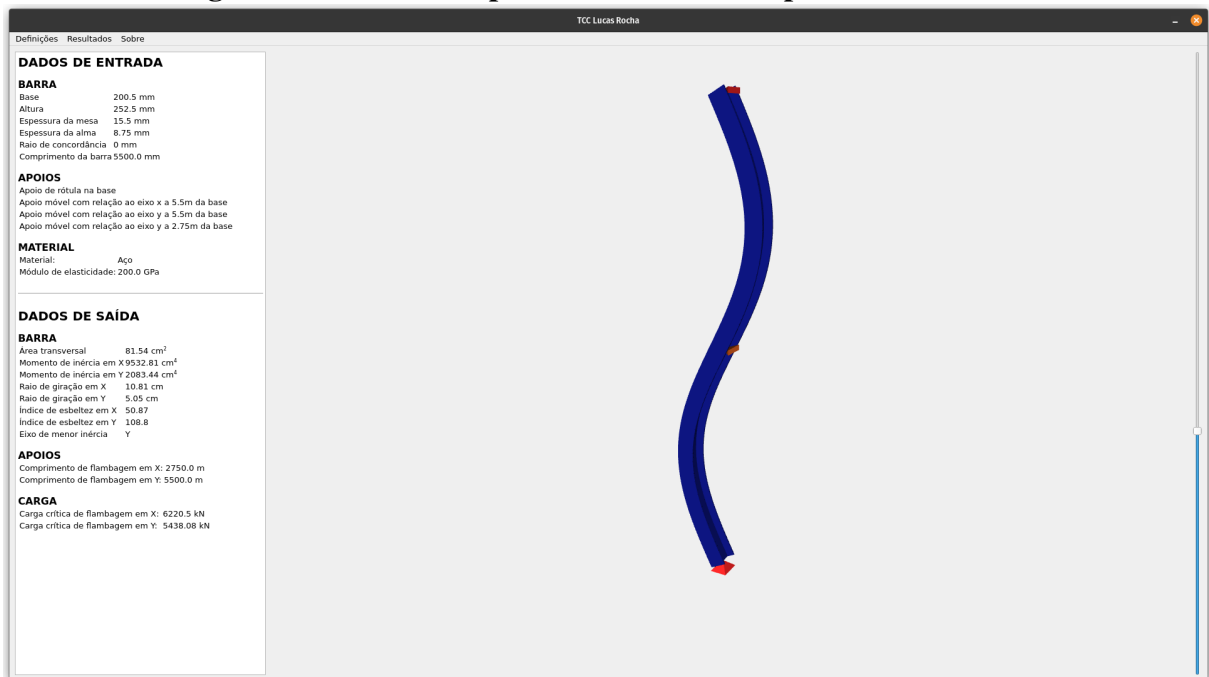
Fazendo uma comparativo com a prática, este efeito simula a colocação de barras de

Figura 26: Entrada de dados no programa para a seção com 1 apoio intermediário

The figure shows three separate dialog boxes for data entry. The first, 'Definir geometria', contains fields for section type (I), width (200.5), height (252.5), web thickness (8.75), flange thickness (15.5), radius of gyration (0), and length (5500), with units in mm. The second, 'Definir apoios', has a field for the number of intermediate supports (1) and a 'Confirmar' button. The third, 'Definir material', has a dropdown for material (Aço) and a field for the modulus of elasticity (200 GPa), also with a 'Confirmar' button.

Fonte: Autor, 2022.

Figura 27: Resultados para o caso com um apoio intermediário



Fonte: Autor, 2022.

contraventamento, tornando a peça estrutural mais rígida sem necessariamente mexer nas suas dimensões, mas controlando o comprimento de flambagem, conforme demonstrado.

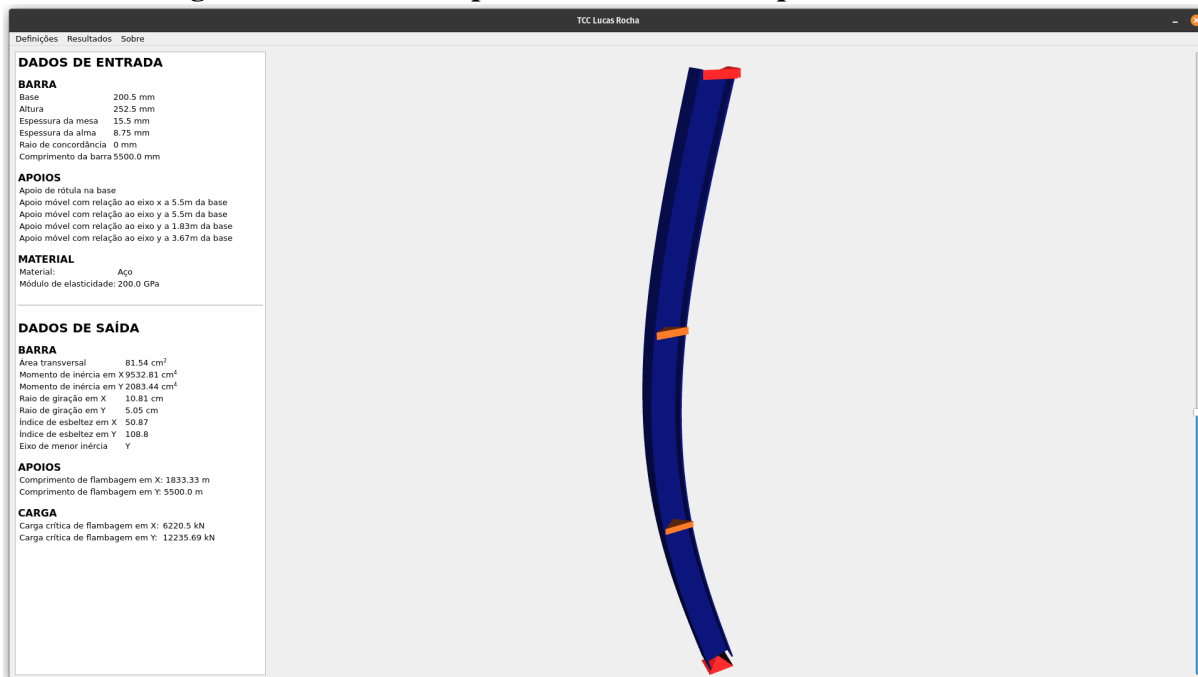
Figura 28: Entrada de dados no programa para a seção com 2 apoios intermediários

The figure shows three separate dialog boxes for data entry:

- Definir geometria:**
 - Tipo de seção: I
 - Largura da seção (b): 200.5
 - Altura da seção (h): 252.5
 - Espessura da alma (tw): 8.75
 - Espessura da mesa (tf): 15.5
 - Raio de concordância (R): 0
 - Comprimento da barra (L): 5500
 - Unidades em milímetros (mm)
 - Confirmar
- Definir apoios:**
 - Número de apoios intermediários: 2
 - Confirmar
- Definir material:**
 - Aço
 - Módulo de elasticidade (GPa): 200
 - Confirmar

Fonte: Autor, 2022.

Figura 29: Resultados para o caso com dois apoios intermediários



Fonte: Autor, 2022.

5 Conclusões

A partir dos resultados apresentados, é possível observar que o desenvolvimento do trabalho permitiu fazer um estudo do fenômeno de flambagem, ainda que restrito pelas delimitações propostas, levantando suas principais características e comportamentos, evidenciando, por exemplo, os parâmetros que afetam o fenômeno, bem como alguns comportamentos frente a alterações feitas nestes parâmetros.

A ferramenta de simulação computacional desenvolvida agregou ao trabalho à medida que se faz necessário um domínio pleno do comportamento do modelo de flambagem para que ele seja implementado computacionalmente com eficiência e precisão considerando todas as possibilidades de comportamento frente à combinação dos dados de entrada.

Além disso, o programa está inserido dentro de contexto educacional. Assim, ele pode ser disponibilizado como recurso de aprendizado para demonstração dos efeitos discutidos com relação ao fenômeno de flambagem de maneira visual, facilitando o entendimento, além do código permanecer aberto para os interessados que desejarem se dedicar a estudá-lo e até expandí-lo em trabalhos posteriores.

6 Referências bibliográficas

BEER, F. P.; E. JOHNSTON, R. Jr., DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F., **Mecânica dos Materiais. 5. ed.**, McGraw-Hill: 2011.

GAVIRA, M. O., **Simulação computacional como uma ferramenta de aquisição de conhecimento**, São Carlos: Universidade de São Paulo, 2003

GERE, J. E., **Mecânica dos materiais**, Thomson, 2003

HIBBELER, **Resistência dos materiais**, 7 ed, São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007

REIS, A.; CAMOTIM, D., **Estabilidade estrutural**, Departamento de Engenharia Civil e Arquitetura (DECivil), Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2001