UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DJALMA BENTO DA SILVA JUNIOR

# ANÁLISE DO IMPACTO DO ENSINO DA TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA, COM ÊNFASE NOS ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

MACEIÓ – AL
2022

**Catalogação na fonte**
**Universidade Federal de Alagoas**
**Biblioteca Central**
**Divisão de Tratamento Técnico**
Bibliotecária: Girlaine da Silva Santos – CRB-4 – 1127

S586a Silva Junior, Djalma Bento da.
Análise do impacto do ensino da trigonometria na educação básica, com ênfase nos alunos do 2º ano do ensino médio / Djalma Bento da Silva Junior. – 2022.
46 f.

Orientador: Prof. Vanio Fragoso de Melo.
Monografia (Trabalho de Conclusão Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 43-45.
Anexos: f. 46.

1. Ensino- aprendizagem. 2.Apredizagem significativa. 3. Trigonometria. 4. Ensino médio. I. Título.

CDU: 514.116

**DJALMA BENTO DA SILVA JUNIOR**

# ANÁLISE DO IMPACTO DO ENSINO DA TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA, COM ÊNFASE NOS ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado para a disciplina de Pesquisa Educacional, na Universidade Federal de Alagoas – UFAL.

Orientador: Prof. Vanio Fragoso de Melo.

MACEIÓ – AL

2022

**RESUMO**

O presente trabalho tem o objetivo de demonstrar como o ensino de relações trigonométricas no triângulo retângulo é construído com um ensino dinâmico e participativo do aluno, sob a aplicação do modelo de Van Hiele na 2ª série do Ensino Médio em um colégio da rede privada de ensino na cidade de Maceió/AL. O estudo fez um levantamento com 11 alunos a respeito do ensino da trigonometria no triangulo retângulo, apresentando o nível de entendimento que o aluno trouxe do Ensino Fundamental. Levando em conta aspectos do conhecimento que o aluno já tem e como esse conhecimento será útil na construção do processo de ensino aprendizagem do conteúdo em questão. Para isso, foram apresentados aspectos da Teoria da aprendizagem significativa e a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, além de levantar a importância do uso de softwares como Geogebra e tecnologia da informação e comunicação (TIC) durante o ensino. Vale ressaltar também os papeis que devem ser empenhados pelo professor e aluno, o professor assumindo seu local e mediação entre conhecimento a ser construído e conhecimento já absorvido pelo aluno, e o aluno como peça ativa no seu processo de ensino-aprendizagem. Conclui-se que, o professor tem o potencial para modificar a forma de ensino, garantindo uma melhor aprendizagem dos alunos, os estímulos certo desenvolve o aluno e leva ao seu máximo potencial.

**Palavras-chave:** Aprendizagem significativa. Trigonometria. Ensino Médio.

## ABSTRACT

The present work aims to demonstrate how the teaching of trigonometric relations in the right triangle is built with a dynamic and participatory teaching of the student, under the application of the Van Hiele model in the 2nd grade of High School in a private school in the city of Maceió/AL. The study will survey 11 students about the teaching of trigonometry in the right triangle, presenting the level of understanding that the student brought from Elementary School. Taking into account aspects of the knowledge that the student already has and how this knowledge will be useful in the construction of the teaching-learning process of the content in question. For this, aspects of the Theory of Meaningful Learning and the Theory of Conceptual Fields of Vergnaud were presented, in addition to raising the importance of using software such as Geogebra and ICTs during teaching. It is also worth mentioning the roles that must be played by the teacher and student, the teacher assuming his place and mediation between knowledge to be built and knowledge already absorbed by the student, and the student as an active part in his teaching-learning process. It is concluded that the teacher has the potential to change the way of teaching, ensuring better student learning, the right stimuli develops the student and leads to his maximum potential.

**Keywords:** Meaningful learning. Trigonometry. High school.

SUMÁRIO

# 1. INTRODUÇÃO

Para começar, o papel do professor é fundamental no desenvolvimento de metodologias e estratégias, para uma maior compreensão do que está sendo ensinado com o uso das tecnologias da informação e comunicação (TIC). Por isso, é importante que o professor esteja preparado para construir um novo paradigma educacional. A tarefa de ensinar o conteúdo de trigonometria para estudantes do ensino médio é uma tarefa complexa. A maioria dos jovens não adquiriu a maturidade mental para entender declarações e teoremas desse tipo, e a isso se soma o despreparo quanto as diferentes estratégias para obtenção de êxito no processo de ensino de tal conteúdo por parte do professor. Por isso, esta pesquisa promove o desenvolvimento de estratégias utilizando o método de Van Hiele como base fundamental para o ensino e aprendizagem da trigonometria.

Para o desenvolvimento desta pesquisa, será proposto um conjunto de atividades que constituem uma sequência didática baseada no modelo Van Hiele; aplicado ao conteúdo temático da trigonometria. Com o desenho dessas atividades pretende-se que o processo educativo seja eficaz e conciso, fazendo com que alunos e professores se interessem pelo ensino da trigonometria, com o objetivo de atingir altos níveis de habilidades (saber, fazer e ser) e no desenvolvimento de diferentes tipos de pensamento geométrico e espacial.

A partir de uma metodologia e estratégia inovadora que permite ao aluno aprofundar o conhecimento sobre trigonometria, através de atividades que o aluno foi levado a aprimorar suas habilidades, algumas que já possuíam e outras que faltavam, abrindo um quadro de possibilidades de aplicação desse conhecimento em diversos contextos. No ensino da trigonometria, as funções trigonométricas são uma questão de complexidade para os alunos do décimo ano. Por essa razão, foram abordados usando o modelo de Van Hiele, fazendo com que os alunos se apropriassem de cada conceito, desde a representação gráfica até a representação simbólica (equação) ali apresentada (ANDRADE, 2019).

No desenvolvimento desta pesquisa, a sequência dos diversos conteúdos foi muito importante: algébrica e geométrica, pois sabe-se que o ensino de funções trigonométricas requer o uso conjunto dessas duas áreas. O modelo de Van Hiele é aplicado neste contexto, tendo em conta que tanto a álgebra quanto a geometria andam lado a lado favorecendo a adaptação dos alunos em cada nível de aprendizagem e habilidade a serem desenvolvidas. Estes níveis são: visualização, análise, ordenação ou classificação, dedução formal e rigor. Agora, as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos são: visual, verbal, desenho, lógica e aplicada.

Para a conclusão desta pesquisa objetiva-se organizar as informações adquiridas ao longo de toda pesquisa.

## 1.1 Problema

O ensino das relações trigonométricas no triângulo retângulo tem uma grande importância durante a Educação Básica. Na Matemática é possível observar que a compreensão resulta do interesse, e o interesse resulta da compreensão. Ante isso, se faz necessário um ensino que estimule o crescimento do aluno desde os seus primeiros anos do Ensino Fundamental, para que durante o seu Ensino Médio, ele possa usufruir de uma base sólida de conceitos, onde a sua compreensão possa mostrar-lhe que a matemática não tem aquela dificuldade imensa, como a maioria dos alunos acreditam ser (DORTA, 2013).

Dito isso, um ensino superficial e mecanizado, que gera um aprendizado somente para passar de bimestre, e que desestimula uma busca aprofundada feita pelo próprio aluno, deixa rastros de uma base desfalcada para o aprendizado do estudo das relações trigonométricas, visto que muitos alunos não lembram das relações trigonométricas e nem como usá-las no triângulo retângulo.

Ante isso, surge a seguinte questão: "Os conhecimentos sobre o triângulo retângulo do Ensino Fundamental trazidos pelos alunos constituem uma ancoragem suficiente para a aprendizagem de relações trigonométricas no triângulo retângulo na 2ª série do Ensino Médio?" Com isto, pretende-se identificar as potencialidades de uma prática educacional que proporcione uma aprendizagem significativa no ensino.

## 1.2 Justificativa

O ensino de trigonometria no Ensino Médio é um conteúdo de grande importância, sendo ele trabalhado em diferentes situações no cotidiano, na formação de situações problemas, além de ser um dos principais assuntos base para graduações de áreas de exatas. Infelizmente, é comum escutarmos e tomarmos conhecimento de colegas e alunos que nunca estudaram tal conteúdo durante o seu ensino básico, ou que foi estudado de uma forma muito rasa e superficial, fazendo com que o conteúdo seja "mal compreendido", ou seja, se torne um conteúdo que recebe uma dificuldade inicial maior do que realmente tem.

É necessário repensar uma forma para discutirmos um melhor método de ensinar o conhecimento desse conteúdo aos alunos, fazendo-se necessário saibamos o que os alunos trazem de bagagem sobre o conteúdo de Trigonometria. Após isso é valorizar o que o aluno já detém como conhecimento, fortalecer as teorias que necessitarem de uma revisão, e por fim construir uma ligação entre o conhecimento já trazido e o conhecimento a ser construído, com o auxílio e potencialização que as TICs proporcionam no ensino, possibilitando assim a aplicação de relações trigonométricas no triângulo retângulo no que diz respeito ao estudo da matemática. (FONSECA, 2012).

Portanto, esse trabalho se torna relevante à medida que o processo de ensino aprendizagem leva em consideração fatores do conhecimento do aluno, fazendo dele uma peça ativa na construção do seu conhecimento e dando um significado maior ao que o aluno está aprendendo, visto que ele já tem uma melhor noção do que se trata o conteúdo com que se está trabalhando.

### 1.3 Objetivos

#### 1.3.1. Objetivo Geral

Analisar os conhecimentos trazidos pelos alunos sobre o triângulo retângulo, buscando mecanismos para a aprendizagem de relações trigonométricas no triângulo retângulo no modelo Van Hiele, aplicando a 2ª série do Ensino Médio em um colégio municipal na cidade de Maceió/AL.

#### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Analisar os conhecimentos dos alunos do Ensino Fundamental sobre o triângulo retângulo e suas relações trigonométricas;
- Identificar as dificuldades que os alunos apresentam na aprendizagem do triângulo retângulo e suas relações trigonométricas;
- Propor uma sequência didática para o ensino do conteúdo de triângulo retângulo e suas relações trigonométricas a partir de suas aplicações.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Definição, desenvolvimento e planejamento de uma unidade de ensino

Para o desenvolvimento de um bom processo na atividade matemática dentro da sala de aula, alguns fatores determinantes intervêm através da definição, elaboração e planejamento de uma unidade didática. Na medida em que esta unidade é executada, o aluno avança na conquista de seus conhecimentos e habilidades matemáticas. Com as diferentes atividades desenvolvidas para o ensino de funções trigonométricas, são organizadas uma unidade didática exposta nos parágrafos seguintes.

### 2.1.1 Definição da unidade didática

Vários pesquisadores têm estado ocupados definindo o que é uma unidade didática, aqui estão algumas delas (LINS, 2011):

- A unidade didática ou unidade de programação será o planejamento de todos os elementos que intervenham no processo ensino-aprendizagem com coerência metodológica interna e por um determinado período de tempo;
- A unidade didática é a inter-relação de todos os elementos que intervêm no processo ensino-aprendizagem com coerência metodológica interna e por um determinado período de tempo;
- Unidade de programação e ensino configurada por um conjunto de atividades que são desenvolvidas em um determinado tempo para atingir objetivos didáticos. Uma unidade didática responde a todas as questões curriculares sobre o que ensinar (objetivos e conteúdos), quando ensinar (sequência ordenada de atividades e conteúdos), como ensinar (atividades, organização do espaço e do tempo, materiais e recursos didáticos) e avaliação (critérios e instrumentos de avaliação), tudo em um tempo claramente delimitado;
- A unidade didática é uma forma de planejar o processo ensino-aprendizagem em torno de um elemento de conteúdo que se torna o eixo integrador do processo, proporcionando-lhe consistência e significância.

Essa forma de organizar conhecimentos e experiências deve considerar a diversidade de elementos que contextualizam o processo (nível de desenvolvimento do aluno, sociocultural e familiar, Projeto Curricular, recursos disponíveis) para regular a prática dos conteúdos, selecionar os objetivos básicos que pretende alcançar, as diretrizes metodológicas com que trabalhará, as experiências de ensino-aprendizagem necessárias para aperfeiçoar esse processo. Em resumo e simplificação, pode-se apontar que a unidade didática é a unidade básica de programação (LINS, 2011).

### 2.1.2 Desenvolvimento de uma unidade de ensino

O desenvolvimento das unidades didáticas deve levar em conta os documentos oficiais e o projeto educacional institucional. Envolve a tomada de decisão em diferentes áreas de concretude até culminar em um documento no qual o professor especifica os objetivos, conteúdos, atividades, recursos e materiais, instrumentos de avaliação e seleção de estratégias metodológicas. Este documento será um instrumento de planejamento e gestão do trabalho de classe com os alunos (FLORES, 2008).

### 2.1.3 Planejamento de uma unidade de ensino

O desenho das unidades de ensino deve baseá-lo nesses seis elementos descritos abaixo (DORTA, 2013):

- As informações disponíveis sobre os objetivos e conteúdos do currículo e do projeto central correspondente.

Essas informações não são suficientes para garantir que os alunos realizem uma atividade matemática "rica" que contemple os diferentes aspectos dessa atividade. É, portanto, apropriado levar em conta o elemento dois em segundo lugar (DORTA, 2013).

- Os tipos de problemas que são o campo de aplicação dos conteúdos matemáticos selecionados.

De acordo com Fernandes *et. Al.* (2012), as situações do cotidiano e das outras ciências podem nos ajudar mostrando os problemas que podem ser resolvidos com os conteúdos da unidade didática, enquanto a história da matemática pode nos ajudar a saber como e por que eles foram criados.

Os tipos de problemas são resolvidos com certos procedimentos, entre os quais teremos que fazer uma seleção. Esses procedimentos são justificados por conceitos que terão que ser definidos de uma ou várias formas diferentes, esses conceitos e procedimentos terão que ser representados por algumas das diferentes representações que são normalmente utilizadas etc. Portanto, também é conveniente levar em conta o seguinte elemento (TIBÚCIO, 2016).

- O conjunto organizado de práticas institucionais, operacionais e discursivas, que fornecem a solução para os tipos de problemas selecionados (conteúdo processual, conceitual e formas de representação).

Uma análise aprofundada dos conteúdos a serem ensinados, sua organização, estrutura, relações lógicas, técnicas de resolução, formas de representação etc., sendo essencial para projetar uma sequência didática.

Para esse tipo de análise, o estudo das unidades didáticas propostas pelos livros didáticos também pode ser muito útil. Uma análise comparativa da organização apresentada pelos livros didáticos é um elemento importante a ser levado em conta no desenvolvimento de uma proposta para uma unidade didática (FONSECA, 2012).

Os três pontos acima são os fundamentais para o desenho das unidades. Agora, há outros aspectos a serem contabilizados. O primeiro deles são os recursos e materiais didáticos, pois estes têm um impacto importante no processo ensino-aprendizagem e podem condicionar a organização, conteúdos e metodologia da unidade didática (SOUZA, 2010).

- Materiais e recursos disponíveis para o estudo do tema, incluindo livros didáticos e experiências didáticas descritas nas publicações acessíveis. Outro elemento que deve ser levado em conta é o conhecimento dos erros e dificuldades recorrentes no estudo do tema que a pesquisa didática documentou. Portanto, será o quinto aspecto a ser considerado.
- Conhecimento dos erros e dificuldades recorrentes no estudo do tema que a pesquisa didática documentou.
- Os critérios metodológicos e de avaliação incluídos nas orientações curriculares, bem como as recomendações fornecidas pela pesquisa didática descrita em publicações acessíveis.

## 2.2 O ensino da Geometria

### 2.2.1 A importância do ensino de geometria

Para começar, o conhecimento geométrico é um componente matemático que ocupa um lugar privilegiado nos currículos escolares por sua contribuição para a formação do indivíduo. Além disso, não é considerado apenas como um conhecimento básico e necessário para a vida dos alunos, mas como uma disciplina científica que repousa na base do rigor, da abstração e da generalidade.

Borges (2012) identificou dimensões com as quais a geometria está ligada em diferentes áreas e ciências, para reivindicar seu valor de rigor; assim, a geometria pode ser vista como:

- Uma ciência do espaço e da forma.
- Um método para representar visualmente conceitos e processos de outras áreas do conhecimento.
- Um ponto de encontro entre abstração e modelagem.

- Uma maneira de desenvolver o pensamento e a compreensão.
- Uma ferramenta em vários campos de aplicação.

Para Shulte (1994, p. 23), a importância reside no fato de que "a consciência dessa multidimensionalidade se deve à mudança no ponto de vista da matemática, sendo vista mais como uma atividade humana e sua relação é reconhecida em contextos científicos e sociais". Além disso, o autor aponta que a geometria tem uma longa história sempre ligada às atividades humanas; se é visto como uma ciência que molda nossa realidade espacial, como um sistema formal que evolui e muda permanentemente.

Atualmente, a percepção dessa concepção de geometria vem mudando no sentido de que ela é concebida como resultado da combinação de vários processos cognitivos e comunicativos ao longo da história. Nesse sentido, o conhecimento geométrico não é absoluto e impessoal, mas uma construção de toda a humanidade, a partir de experiências individuais e em grupo mediadas por ferramentas simbólicas, que ajudam a resolver e interpretar diversos problemas e a encontrar a explicação dos fatos. Além disso, o ensino da geometria deve refletir a preocupação por parte dos professores no desenvolvimento de atividades que lhes permitam alcançar nos alunos uma ampla experiência e gosto pelo conhecimento geométrico, resolvendo diferentes problemas e fatos que são demonstrados (FONSECA, 2012).

De acordo com Fonseca (2012, p. 56), "dependendo do nível escolar, uma ou outra dimensão da geometria será privilegiada por essa razão, sugere-se que nos primeiros níveis educacionais sejam enfatizadas as atividades de exploração para compreender os objetos concretos do plano e do espaço, ou seja, descobrir a geometria através da experiência; no entanto, é importante que os alunos entendam que há mais de uma dimensão, também baseada em regras e operações aritméticas; assim como as relações entre objetos tridimensionais e suas representações bidimensionais.

Nos níveis mais elevados do ensino fundamental e médio, recomenda-se fortalecer o conhecimento mais amplo e profundo, para que os alunos possam vivenciar grande parte do contexto geométrico. Por meio de atividades como a construção de conceitos, a investigação de propriedades geométricas, resolução de problemas e aplicações, sendo especialmente importantes cujas experiências podem ser desenvolvidas em diferentes áreas, como a construção de modelos geométricos físicos e sua relação com a percepção visual.

Para Bulos (2014), diversas dimensões do panorama geométrico são apoiadas por processos de visualização cognitiva associados ao pensamento espacial. Por essa razão, nas diretrizes curriculares da área da matemática, se torna necessário direcionar o ensino da geometria para o desenvolvimento da percepção espacial, representações bidimensionais de figuras, suas relações e suas propriedades, produzindo teorias axiomáticas de natureza dedutível.

Para projetar ambientes de aprendizagem ricos em atividades geométricas nas diversas dimensões, os professores de matemática devem experimentar várias facetas da paisagem geométrica; para que os alunos gostem de aprender geometria.

Atualmente, softweres, plataformas e aplicativos de geometria como o GeoGebra revolucionaram a forma de fazer matemática e a forma de ensiná-los, proporcionando contextos de aprendizagem e poderosas possibilidades de representação, onde os alunos passam de fazer perguntas como “Por quê?” para perguntas como “E se?”, tomando medidas para o pensamento dedutivo (BULOS, 2014).

A partir da intuição e baseada na experiência, a abordagem eficaz é baseada na exploração, descoberta e compreensão, conceitos e propriedades geométricas que nos permitem explicar aspectos e situações do mundo em que vivemos. Mas, o professor deve saber que seu objetivo é criar condições para que o aluno avance no aprofundamento da natureza dedutiva e rigorosa deste ramo da matemática.

Nesse sentido, Bulos (2014, p. 48) afirmou: "geometria é a matemática do espaço, sendo que através do estudo do espaço físico e dos objetos que nele são encontrados que o aluno tem que acessar os conceitos mais abstratos da matemática. Então é possível admitir que a sensação de espaço e, portanto, o sentido geométrico, começa com a experiência direta que as pessoas têm sobre os objetos que os cercam.

Dentre as habilidades que o ensino da geometria deve desenvolver, Hoffer (1981) as classifica em cinco áreas: visual, verbal, desenho, lógica e aplicação.

- **Habilidades visuais:** A maioria das informações que percebemos entra em nossos olhos; mas o processo que nos permite entender o espaço é a visualização, através dele podemos representar mentalmente formas visuais externas e internas. Esse processo é realizado por meio de dois tipos de habilidades, uma relacionada à captura de representações visuais externas e a segunda, relacionada ao pensamento e construção de imagens mentais (representações visuais internas). Isso implica que visualizar é percepção com compreensão;
- **Habilidades de desenho e construção:** Como referido no ponto anterior, a fim de dar uma ideia de um conceito de qualquer área de conhecimento, geralmente recorremos ao uso de representações externas escrita, desenho, etc. Com o qual se dá vida visual a

imagens e objetos mentais. Na geometria, símbolos e representações também servem ao pensamento para criar mais conhecimento, pois permitem a manipulação abstrata de muitos elementos e as relações e propriedades que jogam entre eles. Para o aprendizado da geometria, os alunos devem desenvolver habilidades de desenho e construção relacionadas à representação de figuras e corpos, bem como ser capazes de fazer uma reprodução a partir de modelos propostos e fazer uma construção em um banco de dados dado oralmente, por escrito ou graficamente;

- **Habilidades de comunicação:** A habilidade de comunicação é a competência que permite ao aluno ler, interpretar e se comunicar com significado, na forma oral e escrita, informação geométrica e de todos os tipos, utilizando o vocabulário e símbolos da linguagem matemática de forma adequada. Fonseca (2012) aponta que possuir essa habilidade de comunicação pressupõe a capacidade de ouvir e falar sobre matemática, bem como ler e escrever sobre ela;
- **Reconhecemos como habilidades de comunicação:** ouvir, localizar, ler e interpretar informações geométricas apresentadas em diferentes formatos. Para a aquisição dessas habilidades de comunicação é muito importante levar em conta, tanto a linguagem quanto a boa escolha de materiais que devem ser escolhidos para o desenvolvimento do pensamento geométrico;
- **A aquisição de conceitos e linguagem é um processo dinâmico:** O trabalho em equipe estimula e promove tal dinamismo, pois permite que os alunos pratiquem a comunicação de suas ideias, forçando-os a externalizar as associações mentais que fazem entre símbolos e seus significados, bem como os conceitos que utilizam ou elaboram;
- **Habilidades de raciocínio:** Para raciocinar dedutivamente e indutivamente, exigimos habilidades de raciocínio analítico, ou seja, são as habilidades necessárias para desenvolver um argumento lógico.

As habilidades lógicas que devem ser desenvolvidas com o estudo da geometria no ensino básico e secundário referem-se à abstração de conceitos e relacionamentos, geração e justificativa de conjecturas, formulação de contraexemplos entre outros. Indução e dedução são duas formas de pensamento consideradas dentro do raciocínio lógico, na verdade eles compõem dois dos métodos matemáticos para produzir conhecimento.

O raciocínio indutivo é a capacidade de realizar com sucesso atividades como: comparar série completa de símbolos ou figuras, classificar objetos e generalizar propriedades a partir de exemplos concretos, entre outros. O método indutivo é considerado o caminho do raciocínio que vai do particular ao geral (FONSECA, 2012).

A dedução, por outro lado, é um método de raciocínio que vai do geral ao particular. Por meio do raciocínio dedutivo, demonstra-se a veracidade das proposições que chegaram por indução. Algumas das atividades que ajudam os alunos a desenvolver o pensamento lógico são: inferir, dadas as propriedades de um objeto, deduzir qual objeto geométrico é; classificar objetos geométricos por seus atributos etc. (FONSECA, 2012).

De acordo com Borges (2012) intuição é uma forma de perceber, sem muita análise, conceitos e situações para tentar entender o mundo ao nosso redor, ou seja, se tenta, em primeiro plano, a compreensão do que queremos saber, no entanto, dada a sua imprecisão por ser uma percepção da primeira instância, geralmente cometemos erros ou o adquirimos com limitações, mas mesmo com essas deficiências, a intuição é tremendamente útil para nós.

Nesse trabalho de ensino, verificou-se que é impossível separar atividades que envolvem o desenvolvimento de habilidades lógicas daquelas que têm a ver com a aplicação e transferência de conhecimento (resolução de problemas). Tanto os processos cognitivos quanto os metacognitivos estão envolvidos na resolução de problemas onde todas as formas de raciocínio criativo e lógico mencionadas acima são colocadas em jogo, em seguida, aplicando modelagem.

Uma das coisas a ter em mente no ensino da geometria, é que você não pode forçar os alunos a avançar rapidamente e levá-los a níveis de alta dificuldade, sem antes levá-los em um processo de construção de ideias e conhecimentos, através da visualização e das cinco habilidades para desenvolver mencionadas acima, para que os jovens possam formalizar essa disciplina com a ajuda da experimentação.

## 2.3 Ensino e aprendizagem da Trigonometria

Abaixo se apresentarão algumas ideias importantes do ensino e aprendizagem da trigonometria que temos levado em conta na concepção de nossa unidade de ensino de funções trigonométricas.

Nesse sentido, baseia-se uma proposta de ensino e aprendizagem em quatro eixos (PEDROSO, 2012):

1. **Conceitual:** Em relação ao aprendizado dos conceitos e propriedades matemáticas envolvidas;

2. **Curricular:** Relativo aos conteúdos matemáticos sugeridos nos currículos oficiais e trabalhados nos livros didáticos. Incorporação dos processos de raciocínio e demonstração, conexões e representação;
3. **Metodológica:** Quanto ao uso de uma abordagem geométrica para o ensino de proporções trigonométricas, que inclui um Sistema de Geometria Dinâmica (DMS) como suporte em um contexto de ensino guiado de descobertas, o uso das fases de aprendizagem do modelo Van Hiele para o desenho das atividades;
4. **Formação:** Relacionada ao objetivo de melhorar a capacidade de demonstração matemática dos alunos, exigindo que eles validem seus resultados e descobertas.

O ensino e aprendizagem da trigonometria é um campo pouco explorado por pesquisadores em didática matemática. Muniz Neto (2013) argumenta que a trigonometria no plano de coordenadas é um assunto difícil para os alunos e que muito pouco foi feito para investigar as razões de tais dificuldades. Há muitos fatores que podem estar envolvidos.

Um desses problemas é que a trigonometria é uma questão complicada e interconectada que leva os alunos a mudar as definições dadas para as relações trigonométricas de acordo com a abordagem e o contexto colocados. Por exemplo, mudando do estudo das relações trigonométricas no triângulo retângulo para o plano cartesiano muda de uma definição geométrica para uma definição analítica, muda de analisar os valores dos lados do triângulo retângulo para analisar os valores das coordenadas do plano e do raio da circunferência, muda de um conceito de ângulo como uma região entre dois lados do triângulo para um conceito de ângulo. os valores do ângulo vão de valores de ângulos agudos ou retos ($0^o \leq \varphi \leq 90^o$) para ângulos positivos e negativos, pelo menos na faixa $-360^o \leq \varphi \leq 360^o$. Agora, as relações trigonométricas não são apenas uma razão ou quociente entre dois lados de um triângulo retângulo, mas distâncias direcionadas no plano cartesiano ou coordenadas do ponto de intersecção entre o lado terminal do ângulo e o círculo trigonométrico (FERREIRA, 2016).

Nesse contexto, Abreu (2011) identifica os seguintes fatores que afetam a clara compreensão dos conceitos trigonométricos: definições fracas de ideias importantes sobre rotações e o círculo goniométrico; pouca ou nenhuma compreensão do papel da unidade no círculo goniométrico ou aplicação inconsistente da unidade; dificuldade em interpretar gráficos de coordenadas como informações geométricas e numéricas combinadas, o que implica não ver as coordenadas de um ponto como números e comprimentos direcionados dos segmentos horizontal e vertical que conectam o ponto aos eixos; dificuldade em entender o sen(x) e cos(x) como coordenadas, o que implica a falta de associação dos sinais positivos ou negativos das coordenadas x, y aos sinais do sen(x) e cos(x) de ângulos não agudos; dificuldade em entender números racionais como números e como quocientes. Isso se relaciona com o fato de que o sen(x) é um único valor, quando está sendo descrito como uma distância ou uma coordenada, ou um quociente de dois números na trigonometria do triângulo.

As ideias de Nascimento (2012) sobre o tema "razão" nos aproximam da complexidade implícita no tema "relações trigonométricas": A razão é uma função de um par ordenado de números ou valores de magnitude. Assim como a soma, a diferença, o produto e o quociente, mas estes estão no sentido algorítmico: há uma receita para obter o valor da função correspondente a um determinado par ou pelo menos agir como se tivesse sido obtido – de fato, o que foi obtido se alguém responde 3:4 cos(x)?

Para Andrade (2019), a razão também pode ser obtida transformando-a em um quociente, mas esta é a violação da razão. Se for feito, a razão é privada do que a torna valiosa como razão. A razão é uma função de um par ordenado de números ou valores de magnitude. Mas, e os valores dessa função? Números ou valores de magnitude, de novo? Pode ser interpretado dessa forma, mas é a maneira errada de fazê-lo. Na verdade, isso identificaria a razão com o quociente. O significado adequado da razão é falar sobre igualdade (ou desigualdade) de razões sem saber o tamanho da razão.

Muniz Neto (2013) também argumenta que a razão, em termos de conceito e até mesmo em termos de objeto mental, requer um nível consideravelmente alto de desenvolvimento. No entanto, as crianças podem lidar com a similaridade como uma equivalência operacional. Congruências e semelhanças são características incorporadas na parte do sistema nervoso central que processa nossas percepções ópticas, é evidente que a criança está longe de ser similar como objeto mental e como conceito.

Já os critérios para a conservação da razão como: conservação da igualdade de comprimentos, conservação da congruência, conservação de razões internas, constância da razão externa, conservação de ângulos e decisão sobre a necessidade e suficiência de tais critérios, são necessários para a formação da similaridade do objeto mental. Uma familiaridade precoce com aplicações que preservam a razão ajuda a visualizar os contextos da razão que não são visuais a priori, mas a razão visualizada é necessária para ser lançada de alguma forma a partir do contexto de semelhanças globais, a fim de que se construa uma ponte de razões não visuais para visuais, a visualização rigorosa por similaridade tem que ser enfraquecida (IEZZI, 2013).

## 2.4 O modelo Van Hiele

O modelo de Van Hiele consiste em dois componentes: um componente descritivo formado pelos níveis de raciocínio, que detalha a forma como os alunos raciocinam quando realizam diversas atividades para um tema, desde o raciocínio intuitivo até o raciocínio abstrato formal e um componente instrutivo, as fases de aprendizagem, que ajudam o professor a organizar as atividades para que seus alunos possam avançar de um nível de raciocínio para um nível imediatamente superior (USISKIN, 1982).

O modelo considera cinco níveis de raciocínio, sendo o último o nível de rigor, que não é alcançado no ensino médio, por isso nesta pesquisa não será levado em conta. É característico da teoria a ordem, a adjacência, as relações e a linguagem de cada um dos níveis. No modelo considera-se que passar de um nível de pensamento e conhecimento para outro não está associado à idade e só atingirá um nível quando já alcançou um nível imediatamente anterior a ele, além disso, duas pessoas que raciocinam em diferentes níveis não se fazem compreender uma pela outra. (USISKIN, 1982).

O modelo de Van Hiele é a proposta que parece descrever essa evolução com bastante precisão e que está ganhando cada vez mais aceitação internacionalmente em termos de geometria escolar. Van Hiele também propõe cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico que mostram uma forma de estruturar o aprendizado da geometria. Estes níveis são:

a. Nível 0. Visualização.

Também chamado de familiarização, em que o aluno percebe as figuras como um todo global, sem detectar relações entre tais formas ou entre suas partes. Por exemplo, uma criança de seis anos pode reproduzir um quadrado, um losango, um retângulo; pode se lembrar de seus nomes de cor. Mas ele não é capaz de ver que o quadrado é um tipo especial de figura geométrica. Para ele são formas diferentes e isoladas.

Neste nível, os objetos sobre os quais os alunos aprendem são classes de figuras reconhecidas visualmente como:

- Processo de descrição: Os alunos fundamentam conceitos básicos, como formas simples, principalmente através de considerações visuais do conceito como um todo.
- Processo de definição: Os alunos descrevem as propriedades e elementos físicos dos objetos matemáticos.
- Processo de demonstração: Não há raciocínio matemático, por isso eles não realizam nenhum tipo de demonstração.

b. Nível 1. Análise. Conhecimento dos componentes das figuras, de suas propriedades básicas.

Essas propriedades são compreendidas através de observações feitas durante trabalhos práticos como medições, desenho, construção de modelos, etc. A criança, por exemplo, vê que um retângulo tem quatro ângulos retos, que as diagonais são do mesmo comprimento, e que os lados opostos também têm o mesmo comprimento. A igualdade dos pares de lados opostos do paralelogramo geral é reconhecida, mas a criança ainda é incapaz de ver o retângulo como um paralelogramo particular.

Nesse nível, os objetos utilizados pelos alunos na razão resolutiva de questões trigonométricas são os tipos de números utilizados, eles pensam em termos de conjuntos de propriedades e associam a figuras.

- Processo de descrição: Os alunos fundamentam conceitos através de uma análise informal de relacionamentos e propriedades, estabelecem-se as propriedades necessárias do conceito;
- Processo de definição: Os alunos descrevem propriedades e elementos matemáticos de conceitos, usam definições de estrutura lógica simples, constroem definições a partir de uma lista de propriedades conhecidas;
- Processo de demonstração: Os alunos realizam demonstrações de tipo empírico ingênuo, experimento baseado em exemplo crucial, experimento crucial construtivo e exemplo analítico genérico.

c. Nível 2. Ordenação ou Classificação.

Os relacionamentos e definições começam a ficar claros, mas apenas com ajuda e orientação. Podem classificar figuras hierarquicamente ordenando suas propriedades e dando argumentos informais para justificar suas classificações; por exemplo, um quadrado é identificado como um losango porque pode ser considerado como "Um rombo com propriedades adicionais". A praça já é vista como um caso particular do retângulo, que é um caso particular do paralelogramo. Conexões lógicas começam a ser estabelecidas através de experimentações práticas e raciocínio (RODRIGUES, 2017).

Neste nível, os objetos que são utilizados pelos alunos para solucionar as razões são as propriedades de conhecimento obtidas nas aulas de figuras. (NASSER, 2004):

- Processo de descrição: Considera-se que neste nível a descrição não é dada;

- Processo de definição: Os alunos logicamente ordenam as propriedades dos conceitos, constroem definições abstratas e podem distinguir entre a necessidade e a suficiência de um conjunto de propriedades ao determinar um conceito matemático. Eles usam qualquer tipo de definição;
- Processo de demonstração: Realizam demonstrações de exemplo intelectual genérico, experimento de pensamento transformador e experimento de pensamento estruturado.

d. Nível 3. Raciocínio dedutivo.

Nele o significado dos axiomas, as definições, os teoremas são compreendidos, mas apenas o raciocínio abstrato não é feito, nem o significado do rigor das provas é suficientemente compreendido.

Pesquisas de Van Hiele e psicólogos soviéticos mostram que a passagem de um nível para outro não é automática e é independente da idade. Muitos adultos estão no nível 0 porque não tiveram a oportunidade de lidar com experiências que os ajudaram a subir para o nível 1 (NASSER, 2004):

- Processo de descrição: Considera-se que neste nível a descrição não é dada.
- Processo de definição: Os alunos formalmente raciocinam no contexto de um sistema matemático completo, com termos indefinidos, axiomas, um sistema lógico subjacente, definições e teoremas. Admite-se a existência de definições equivalentes, podendo ser demonstrada a equivalência das definições;
- Processo de demonstração: Os alunos realizam demonstrações de experimento de pensamento estruturado, dedutivo formal transformador e dedutivo formal estruturado.

A Tabela 1 mostra a relação entre processos e níveis de raciocínio. As células sombreadas representam os níveis em que certos processos não ocorrem.

No modelo de Van Hiele, uma série de fases de aprendizagem são propostas para passar de um nível para outro, as fases não estão associadas a um certo nível. Para Crowley (1987), o método e organização da instituição, bem como os conteúdos e materiais utilizados, são áreas importantes de interesse pedagógico.

- **Informações da Fase 1:** Crowley (1987) afirma que nesta fase inicial o professor e os alunos conversam e realizam atividades sobre os objetos de estudo neste nível.

A este respeito, Silva (2015) expressam que:

Tabela 1. Relação entre processos e níveis de raciocínio.

| | **Nível 0** | **Nível 1** | **Nível 2** | **Nível 3** |
|---|---|---|---|---|
| **DESCRIÇÃO** | Descrição das propriedades e elementos físicos dos objetos matemáticos. | Descrição de propriedades matemáticas e elementos de conceitos. | | |
| **USO DE DEFINIÇÕES** | | Definições com uma estrutura lógica simples. | Qualquer tipo de definição. | Admite a existência de definições equivalentes. |
| **FORMULAÇÃO DE DEFINIÇÕES** | Descrição das características físicas das figuras. | Lista das propriedades conhecidas desse conceito. | Conjunto de propriedades necessárias e suficientes. | A equivalência de definições pode ser mostrada. |
| **DEMONSTRAÇÃO** | | Verificação empírica das propriedades em um ou vários exemplos. | Provas dedutivas informais, mas geralmente com a ajuda de exemplos concretos. | Provas dedutivas formais. |

Fonte: Silva (2015).

É uma fase de contato: o professor deve informar os alunos sobre o campo de estudo em que vão trabalhar, que tipo de problemas eles vão apresentar, quais materiais eles vão usar, etc. Da mesma forma, os alunos aprenderão a lidar com o material e adquirirão uma série de conhecimentos básicos e essenciais para poder iniciar o trabalho matemático em si.

Trata-se também de uma fase informativa para o professor, pois serve para que ele descubra o conhecimento prévio dos alunos sobre o assunto a ser abordado. O objetivo dessas atividades é duplo: (1) o professor vê qual é o conhecimento prévio dos alunos em relação ao tema, e (2) os alunos veem que direção os estudos futuros tomarão.

- **Fase 2 - Orientação direcionada:** De acordo com Crowley (1987) nesta fase:

> Os alunos exploram o tema do estudo através de materiais que o professor pediu cuidadosamente. Essas atividades devem revelar gradualmente aos alunos as estruturas características desse nível, de modo que a maior parte do material será tarefas simples projetadas para obter respostas específicas (CROWLEY, 1987, p. 44).

Para Silva (2015), o objetivo principal é fazer com que os alunos descubram, compreendam e aprendam os principais conceitos, propriedades, figuras, etc. Na área de geometria são estudados, pois serão construídos os elementos básicos da rede de relações do novo nível.

A organização e o desenho das atividades que o professor realiza nesta fase depende, em grande medida, do sucesso dos alunos para passar de um nível de raciocínio para um mais alto.

- **Explicitação da Fase 3:** Crowley (1987) expressa que, com base em suas experiências anteriores, os alunos expressam e trocam suas opiniões incipientes sobre as estruturas que observaram.

Para Rodrigues (2017):

> Um dos principais objetivos da terceira fase é fazer com que os alunos troquem experiências, comentem sobre as regularidades que observaram, expliquem como resolveram as atividades, tudo dentro de um contexto de diálogo no grupo. É interessante que surjam pontos de vista divergentes, uma vez que a tentativa de cada aluno de justificar sua opinião fará com que ele tenha que analisar cuidadosamente suas ideias (ou as de seu parceiro), que irão ordenar e expressá-las claramente (RODRIGUES, 2017, p. 24).

O papel do professor é ajudar os alunos a usar linguagem precisa e adequada para descrever suas experiências e comunicar seus conhecimentos, o que ajuda a fortalecer novos conhecimentos.

- **Fase 4 - Orientação livre:** Crowley expressa que nesta fase os alunos encontram tarefas mais complexas, tarefas com muitas etapas, tarefas que podem ser realizadas de várias maneiras e atividades abertas.

Para Usiskin (1982), é nesta fase que os alunos aperfeiçoam seus conhecimentos através de problemas, nos quais serão colocadas indicações que mostram o caminho a seguir, para que os alunos tenham que combiná-los adequadamente aplicando o conhecimento e a forma de raciocínio que adquiriram nas fases anteriores. Com essas atividades, os alunos podem completar a rede de relacionamentos que começaram a formar nas fases anteriores.

- **Integração fase 5:** Para os alunos de Crowley analisarem e resumirem o que aprenderam, a fim de ter uma visão global da nova rede de objetos e relacionamentos, o professor ajuda com observações globais, mas é importante que os resumos não contenham nada de novo.

Nasser (2004), por sua vez, explica que nesta fase os alunos adquirem uma visão geral dos conteúdos e métodos que têm à sua disposição, relacionando os novos conhecimentos com outras áreas que estudaram anteriormente, além de completar a fase terão uma nova rede de relações mentais e terão adquirido um novo nível de raciocínio.

Quanto à avaliação, é considerada da mesma forma que é levada em conta no modelo, uma vez que é uma das chaves para a atribuição de níveis, por isso algumas ideias anteriores são necessárias (NASSER, 2004):

1. O nível de raciocínio dos alunos depende da área de Matemática que é tratada.
2. Deve ser avaliado como os alunos respondem e o porquê de suas respostas, mas não o que eles omitem, ou respondem bem ou mal.
3. Nas perguntas não está o nível dos alunos, mas está em suas respostas.
4. Em alguns conteúdos você pode estar em um nível diferente e, em diferentes, em um nível diferente.
5. Quando eles estão na travessia de um nível para outro pode ser difícil determinar a situação real em que eles se encontram.

## 2.5 Conteúdo: Funções Trigonométricas

A origem da palavra trigonometria vem dos gregos "trigones" (triângulo) e "metros" (mesário). Os babilônios e egípcios (mais de 3000 anos atrás) foram os primeiros a usar os ângulos de um triângulo e proporções trigonométricas para fazer medições na agricultura e construir pirâmides. Posteriormente, foi desenvolvido com o estudo da astronomia, prevendo as rotas e posições dos corpos celestes e para melhorar a precisão na navegação e no cálculo do tempo e dos calendários (GONÇALVES, 2014).

O estudo da trigonometria então passou para a Grécia, onde o matemático grego e astrônomo Hipparco de Niceia se destaca. Mais tarde, espalhou-se para a Índia e a Arábia, onde foi usado na astronomia. Da Arábia, espalhou-se pela Europa, onde acabou se afastando da Astronomia para se tornar um ramo independente da Matemática.

No final do século VIII, os astrônomos árabes trabalharam com a função sen(x) e no final do século X já haviam completado a função sen(x) e as outras cinco funções. Eles também descobriram e provaram teoremas fundamentais da trigonometria. Já no início do século XVII, o matemático John Napier inventou logaritmos e graças a este o cálculo trigonométrico recebeu um grande impulso. (GONÇALVES, 2014).

As funções trigonométricas foram incorporadas à análise, onde ainda desempenham um papel importante na matemática pura e aplicada. Finalmente, no século XVIII, o matemático Leonhard Euler mostrou que as propriedades da trigonometria eram o produto da aritmética de números complexos e também definiam funções trigonométricas usando expressões com exponenciais de números complexos (GONÇALVES, 2014).

Em seguida, faremos uma breve revisão sobre as proporções trigonométricas, isso porque para estudar as funções trigonométricas é necessário saber os motivos primeiro.

### 2.5.2 Razões trigonométricas

As relações trigonométricas são comumente definidas como o quociente entre dois lados de um triângulo retângulo associado com seus ângulos. Há seis proporções trigonométricas básicas.

Para definir as relações trigonométricas do ângulo α, do vértice A, baseia-se em um triângulo retângulo arbitrário contendo este ângulo. O nome dos lados deste triângulo retângulo que será usado nos sucessivos será (ABREU, 2011):

- A hipotenusa (h) é o lado oposto ao ângulo reto, ou lado de maior medida do triângulo retângulo.
- O cateto oposto (a) é o lado oposto do ângulo que queremos determinar.
- O cateto adjacente (b) é o lado adjacente ao ângulo do qual queremos determinar.

Todos os triângulos considerados estão no Plano Euclidiano, de modo que a soma de seus ângulos internos é igual a π radianos (ou 180°). Consequentemente, em qualquer triângulo retângulo, os ângulos não retos estão entre 0 e π/2 radianos. As definições abaixo definem estritamente funções trigonométricas para ângulos nesta faixa (DIAS, 2015).

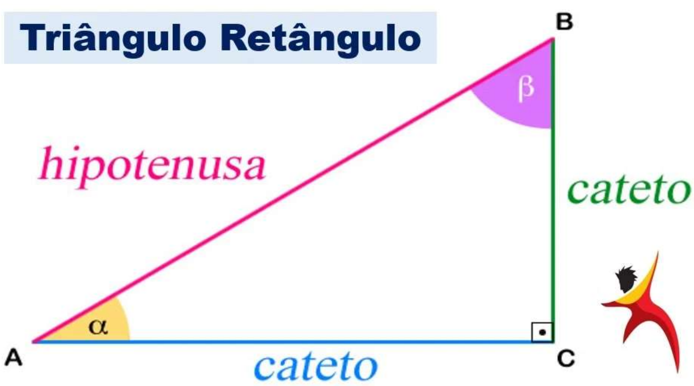


Figura 1. Representação do triângulo retângulo.
Fonte: Dias (2015).

- O sen(x) de um ângulo é a razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento da hipotenusa: O valor dessa relação não depende do tamanho do triângulo retângulo que escolhemos, desde que tenha o mesmo ângulo α, nesse caso são triângulos semelhantes;
- O cos(x) de um ângulo é a relação entre o comprimento do cateto adjacente e o comprimento da hipotenusa;
- O tg(x) de um ângulo é a razão do comprimento do cateto oposto ao do cateto adjacente.

### 2.5.3 Funções trigonométricas

São estabelecidas funções trigonométricas para estender a definição de relações trigonométricas a todos os números reais e complexos; são de grande importância na física, astronomia, cartografia, náutica, telecomunicações, representação de fenômenos periódicos e outras aplicações.

As funções trigonométricas definidas no círculo goniométrico são seis: sen(x), cos(x), tan(x), cotg(x) (recíproco do cotg(x), sec(x) (recíproca do cos(x)) e csc(x) (recíproco do sen(x)). Para este projeto, as atividades foram desenvolvidas apenas para os três primeiros.

a. Sen(x) função.

Na trigonometria, o pecado sen(x) (pecado abreviado, abreviação de latim sənus) de um ângulo em um triângulo retângulo é definido como a razão entre o cateto oposto e hipotenusa. Na matemática o seno de x, sen(x), é uma função contínua e periódica obtida por variar a razão mencionada, sendo uma das funções transcendentes.

O astrônomo hindu e matemático Aria Bhatta (476-550 D.C.) estudou o conceito de "sen(x)" com o nome *ardhá-jya*, sendo *ardhá*: "metade, médio" e *jya* ("corda"). Quando os escritores árabes traduziram essas obras científicas para o árabe, referiram-se a este termo em sânscrito como *jiba*. No entanto, em árabe escrito as vogais são omitidas, de modo que o termo foi abreviado jb. Escritores posteriores que não sabiam a origem estrangeira da palavra acreditavam que jb era abreviação de *jiab* (que significa "baía") (FERREIRA, 2016).

No final do século XII, o tradutor italiano Gherardo de Cremona (1114-1187) traduziu esses escritos do árabe para o latim substituindo o jiab tolo por seu sinuso homólogo latino ("oco, cavidade, baía"). Então esse seio tornou-se o português "sen(x)".

De acordo com outra explicação, a sequência de um único, é chamada em corda inscrita em latim ou simplesmente inscrita. Metade dessa corda é chamada *semis insccriptae*. Sua abreviação foi *s. ins.*, que acabou simplificada como pecados. Para se assemelhar a uma palavra latina bem conhecida, era chamada de sinuso (FERREIRA, 2016).

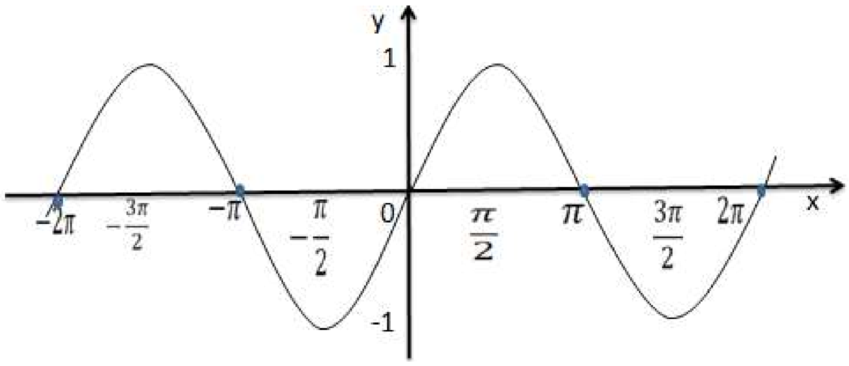



Figura 2. Função de representação gráfica sen(x).
Fonte: Carvalho (2018).

b. Cos(x) função.

Na trigonometria, o cos(x) (abreviado cos) de um ângulo agudo em um triângulo retângulo é definido como a razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa:

$$\text{Cos}(x) = b/\text{c}$$

Sob o teorema de Tales, este número não depende do triângulo retângulo escolhido e, portanto, é bem construído e define uma função do ângulo. Outra maneira de obter o cos(x) de um ângulo é representá-lo na circunferência, ou seja, a circunferência da unidade centrada na origem. Neste caso, o valor do cos(x) coincide com a abscissa do ponto de intersecção do ângulo com a circunferência. Esta construção é a que permite obter o valor do cos(x) para ângulos não agudos.

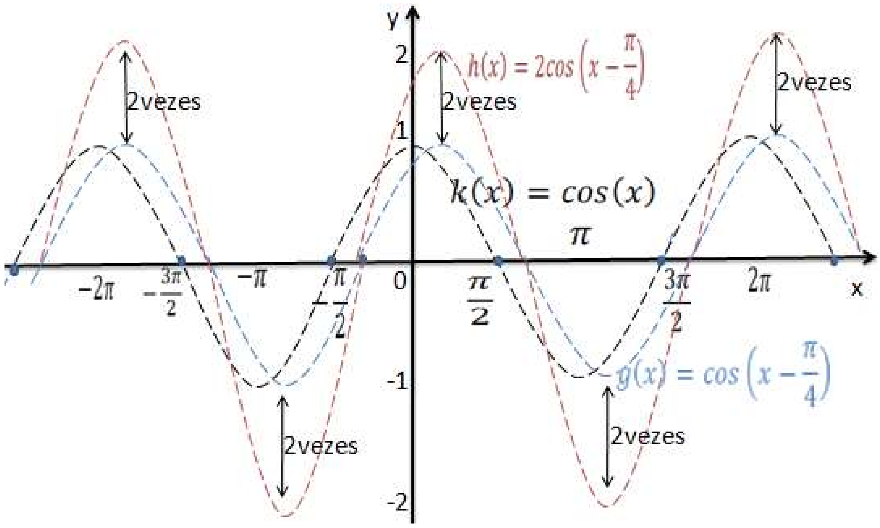



Figura 3. Função de representação gráfica cos(x).
Fonte: Andrade (2019).

c. Função Tan(x).

Na trigonometria, o bronzeado(x) (bronzeado abreviado) de um ângulo em um triângulo retângulo é definido como a razão entre o cateto oposto e adjacente: Tan (x) = a/b Ou também como a relação entre Sen(x) e Cos(x): Tan (x) = sen (x)/ cos(x).

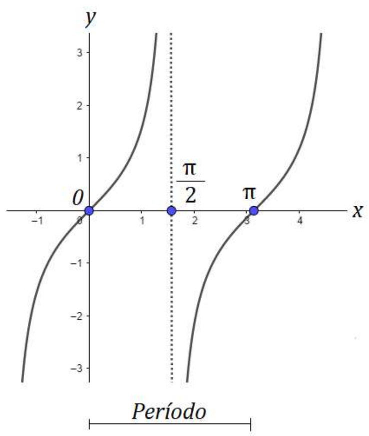



Figura 4. Função de representação gráfica Tan(x).
Fonte: Andrade (2019).

## 3. METODOLOGIA

### 3.1 Tipo de estudo

Essa proposta estava no campo da didática matemática; com uma abordagem descritiva; utilizou-se a metodologia de Pesquisa de Ação. Dois métodos foram levados em conta para sua análise; um método qualitativo o qual permite dar sentido ao estudo do comportamento dos sujeitos submetidos ao estudo; e um método quantitativo que fornece dados suscetíveis à análise estatística que permitiu validar os resultados. Os instrumentos para o recolhimento das informações foram: observação direta, diário de campo para coletar as informações do que foi observado, questionários, gravações de áudio e vídeo, mapas conceituais, exposições, dentre outros.

### 3.2. Caracterização do objeto e delineamento da pesquisa

Silveira e Córdova dizem que "a pesquisa científica é o resultado de um inquérito ou exame minucioso, realizado com o objetivo de resolver um problema, recorrendo a procedimentos científicos (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 31)", fala que mostra a importância de uma pesquisa bem estruturada, a fim de se alcançar um objetivo proposto inicialmente.

Uma pesquisa bem estruturada apresenta características relevantes, sendo elas métodos e procedimentos que deixem claro a teoria de estudo colocada pelo pesquisador, onde deve explicitar o tipo de pesquisa escolhida, os meios a serem seguidos, as etapas de pesquisa e etc., para que assim, seja validada a hipótese de pesquisa apresentada inicialmente.

Neste projeto de pesquisa, optamos pela pesquisa qualitativa e exploratória, onde é possível analisar o desempenho dos alunos com base em determinadas competências e habilidades.

Um processo de exploração passa por etapas como a escolha inicial de um campo de pesquisa, a seleção prévia e definição de problemas, além de haver o estabelecimento de relações para que se possa iniciar a pesquisa (Ludke e André 1986). O que nos possibilita firmar o processo de observação, proporcionando a compreensão do objeto escolhido para pesquisa, assim como a definição dos meios e pontos de pesquisa.

### 3.3 População e amostra

A população era dos alunos da 2ª série do Ensino Médio em um colégio municipal, na cidade de Maceió/AL, sendo que a amostra era composta por 11 alunos da população acima mencionada, que voluntariamente queriam participar deste projeto. Para a análise, idade e sexo não foram levados em conta.

### 3.4 Fases da investigação

A pesquisa foi realizada levando em conta a seguinte sequência:

- **FASE 1 - Fase de revisão teórica:** As diretrizes curriculares propostas pela UFAL e o MEC foram estudadas detalhadamente e foram selecionadas o nível e alguns aspectos históricos, bem como seu impacto no ensino-aprendizagem da geometria no ensino médio e fundamental; além do aprofundamento dos conteúdos em pesquisa;
- **FASE 2 - Fase de desenho:** Projeto de ferramentas de monitoramento e avaliação; bem como o desenho das atividades da unidade didática, com base nos níveis de Van Hiele de tal forma que proporcionou um ambiente de aprendizagem favorável;
- **FASE 3 - Fase de validação:** As estratégias foram experimentadas e validadas, através de um teste piloto;
- **FASE 4 - Fase de análise:** Por meio da observação direta, diários de campo e atividades desenvolvidas pelos alunos, foi determinado o impacto das estratégias e a compreensão do aluno sobre os conceitos. O processamento e a análise contínua dos resultados obtidos foram realizados, sendo realizados os respectivos ajustes de acordo com as necessidades dos alunos, em coordenação com o titular do sujeito.
- **FASE 5. Momento de síntese:** Elaboração deste documento com suas conclusões e recomendações.

# 4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

## 4.1 Descrição das atividades

Abaixo está a descrição das atividades realizadas, os guias completos estão nos anexos deste trabalho. Para cada atividade, são mostrados os objetivos de aprendizagem, a explicação de cada subatividade, se necessário, são descritos os arquivos utilizados no Geogebra e, finalmente, algumas das ações para cada processo que são esperados dos alunos durante o desenvolvimento das atividades são modeladas.

### 4.1.1 Atividade 1. História da trigonometria

Com essa atividade são perseguidos os seguintes objetivos: 1) Conhecer o histórico, definição e aplicações da trigonometria. 2) Identificar os ramos e áreas de aplicação da trigonometria. 3) Incentivar a reflexão e a discussão sobre conceitos básicos de trigonometria. 4) Promover o desenvolvimento de processos de descrição, definição e demonstração.

Nesta atividade não é feita a utilização de software, os alunos devem identificar os aspectos relevantes que possibilitam a construção do argumento teórico da trigonometria. Os vários problemas que os sábios da antiguidade tiveram para resolver situações e como através da trigonometria eles foram capazes de resolvê-los.

- DESCRIÇÃO: Os alunos revisaram a apresentação do Power Point "História, Definição e Campos de Aplicação da Trigonometria". Identificaram características dela como: sua definição e seus ramos fundamentais, algumas aplicações, além da importância desse ramo da matemática no estudo de disciplinas como arquitetura, engenharia, topografia etc.;
- DEFINIÇÃO: Os jovens entraram em contato com a história da trigonometria. Eles identificaram que a trigonometria não é simplesmente baseada em fazer triângulos e fazer cálculos. Mas possui uma construção conceitual de centenas de anos, desenvolvida com a contribuição de diferentes culturas e épocas da história para obter funções trigonométricas e suas aplicações para diversas áreas da ciência moderna;
- DEMONSTRAÇÃO: Nesta atividade os alunos ainda não realizam manifestações.

Tabela 2. Resumos "História da Trigonometria"

| ATIVIDADE | ASPECTOS POSITIVOS | ASPECTOS NEGATIVOS | PONTOS A MELHORAR. |
|---|---|---|---|
| História da trigonometria. | Os alunos revisam a apresentação na plataforma;<br>Eles desenvolvem a oficina que consistia em perguntas sobre a definição e importância da trigonometria. | Dificuldade para entrar na plataforma;<br>Apesar de ter acesso à apresentação, alguns alunos acharam difícil escrever sobre a importância da trigonometria. | Melhorar o acesso à plataforma virtual; |

Fonte: O autor (2022)

### 4.1.2 Atividade 2: Construção do gráfico da função SEN(x)

Com esta atividade são perseguidos os seguintes objetivos: 1) Conhecer as diferentes aplicações da função sen(x). 2) Construir a função sen(x) no software GeoGebra. 3) Identificar os elementos que possibilitam a construção da função sen(x). 4) Determinar e a amplitude, período, fase e constante de fase dos elementos com base no gráfico. 5) Determinar as transformações da função sen(x) com base em sua estrutura. 6) Incentivar a reflexão e a discussão sobre conceitos básicos de funções trigonométricas. 7) Promover o desenvolvimento de processos de descrição, definição e demonstração.

a. Situação 1: Aplicações da função sen(x).

Com essa atividade, algumas aplicações da função sen(x) são definidas, enfatizando a importância que ela tem para a resolução de problemas, estudo de fenômenos, avanços tecnológicos e outras ciências.

Abaixo estão os resultados obtidos para este processo:

- DESCRIÇÃO: Nesta atividade, os alunos descrevem as aplicações da função sen(x). Uma dessas aplicações descreve como a função sen(x) é evidenciada no estudo das ondas de rádio. Para isso no arquivo (função trigonométrica sen(x), anexo 6), um par de endereços de internet foram deixados para o aluno procurar as informações lá. Assim, os jovens identificam rapidamente as aplicações dessa função.
- DEFINIÇÃO: Os alunos explicam e discutem suas conjecturas sobre as aplicações da função sen(x). A atividade permite que os jovens compartilhem com seus pares os usos que o homem deu à função sen(x).
- DEMONSTRAÇÃO: Com essa atividade os alunos ainda não realizam manifestações.

b. Situação 2: Construção da função sen(x) no programa GeoGebra.

Nesta atividade é feito o uso do software GeoGebra. Os alunos são introduzidos às ferramentas que este software possui; para isso, foi realizado um passo a passo, onde podem observar a sequência para realizar a construção da função sen(x).

Abaixo estão os resultados obtidos para este processo:

- DESCRIÇÃO: Descreva os elementos geométricos presentes na construção. Descrevem variantes geométricas e numéricas e invariantes. Eles descrevem a variação dos valores e sinais da função sen(x) para diferentes ângulos. Eles descrevem a mudança dos valores e sinais da função, com base nas flutuações que tem como o oposto do ângulo geométrico da figura varia de um ponto máximo em 1 a um ponto mínimo em -1;
- DEFINIÇÃO: Nesta atividade os alunos demonstram os elementos que possibilitam a construção da função sen(x). Através dessa atividade, os jovens aplicaram os conceitos anteriores sobre as relações trigonométricas e como as funções trigonométricas são construídas a partir delas;
- DEMONSTRAÇÃO: Os estudantes devem demonstrar a relação entre a variação do ângulo varrido e o comprimento do arco de circunferência. A partir da dedução formal eles explicam como a função sen(x) é formada a partir da variação do comprimento do

cateto oposto e da projeção do comprimento do arco no eixo do x, neste caso pontos em radianos.

c. Situação 2.1. Construção da função sen(x) em papel milimetrado

Nesta atividade não é feito o uso do software GeoGebra. Os alunos recebem uma introdução sobre as ferramentas a serem usadas para fazer o gráfico da função sen(x), para isso o professor faz o gráfico no quadro explicando aos alunos os passos a seguir.

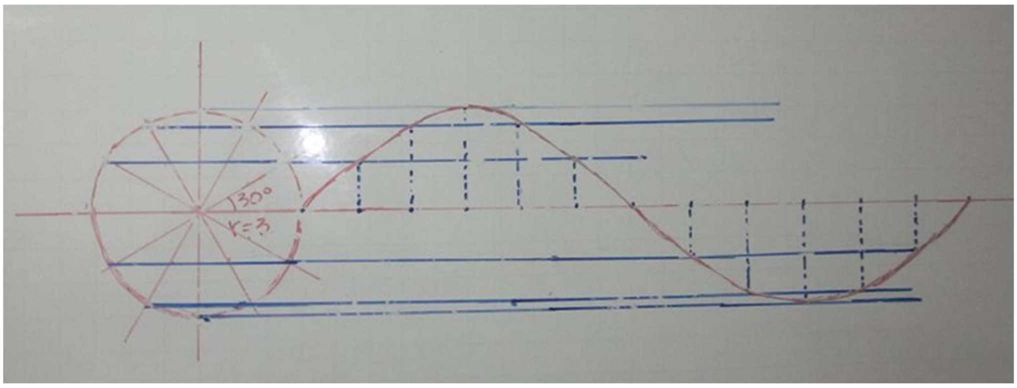



Figura 5: Construção da função Sen(x) no tabuleiro.
Fonte: O autor (2022)

- DESCRIÇÃO: O objetivo deste problema foi construir a função trigonométrica sen(x). A construção é realizada por meio de papel milímetro, régua, para conseguir essa reprodução, o professor faz o gráfico no quadro. Explica os passos a seguir à medida que os alunos fazem a reprodução, para isso o gráfico é construído a partir de uma linha horizontal e uma circunferência em uma extremidade do tabuleiro. Posteriormente, a circunferência é dividida em ângulos de medição 30º. As linhas horizontais são atraídas para cada um dos pontos da circunferência onde os ângulos foram marcados. Ter essa construção gráfica agora só era necessário para fazer um gráfico da função. O cabo é usado para medir o arco de circunferência de cada ângulo. Em seguida, o cabo é esticado na forma de uma linha reta e o ponto correspondente a cada ângulo está localizado com seu paralelo. Finalmente, os pontos são unidos e a função sen(x) é obtida;
- DEFINIÇÃO: A atividade permite que os alunos discutam e expliquem o processo de construção da função sen(x). A partir disso, os alunos identificam os elementos que viabilizam essa construção. Eles observam como o cateto oposto varia dependendo da abertura do ângulo. Eles mostram a relação entre o ângulo, o cateto oposto e o comprimento do arco. Eles observam que o comprimento do cáto oposto determina a

sucessão de pontos no eixo y (amplitude) e na projeção do arco como o comprimento de mudança da função no eixo x;

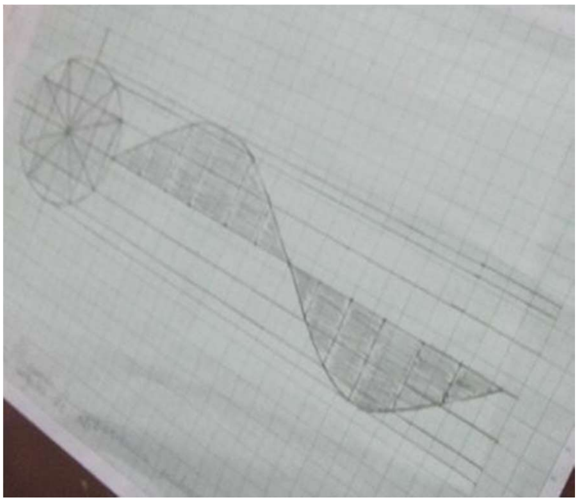


Figura 6. Construção da função sen(x).
Fonte: O autor (2022)

- DEMONSTRAÇÃO: Os alunos explicam e discutem suas conjecturas e demonstrações sobre as variações do cáto oposto quando o ângulo varia. Eles verificam a relação entre o arco, ângulo e raio, por meio da equação. Com esta equação eles determinam mais precisamente o comprimento do arco ao contrário do método do cabo. Mas para alcançar este gerenciamento de equações eles fazem uso de seus preconceitos sobre a conversão de graus para radianos, a fim de determinar o comprimento do arco da circunferência respectivamente para o ângulo.

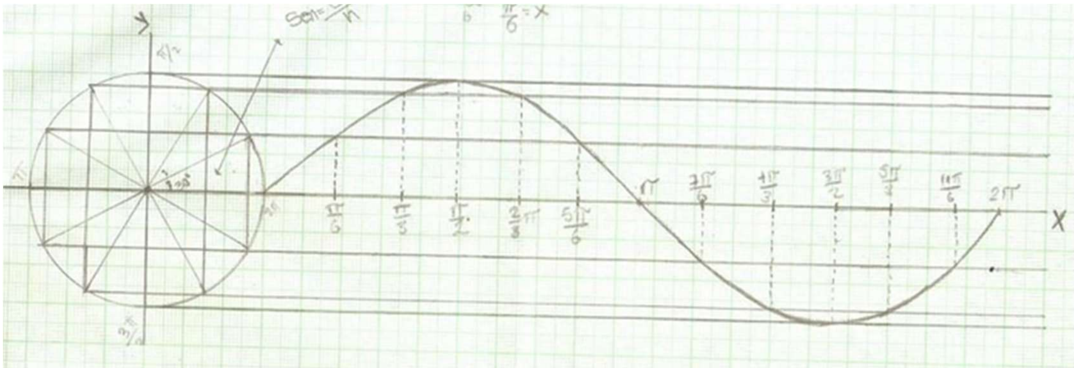


Figura 7: Construção da função sen(x) com seus respectivos radianos.
Fonte: O autor (2022).

Abaixo, serão apresentados os aspectos positivos, negativos e aprimorados na atividade.

Tabela 3: Resumo dos aspectos "construção do gráfico da função Sen(x)"

| ATIVIDADE | ASPECTOS POSITIVOS | ASPECTOS NEGATIVOS | PONTOS A MELHORAR. |
|---|---|---|---|
| Construção do gráfico da função Sen(x). | Os alunos são capazes de representar graficamente a função sen(x);<br>Os jovens são motivados por trabalhar de forma prática.<br>Eles manipulam os elementos para construir os gráficos e participam constantemente, fazendo perguntas quando têm dúvidas. | Os alunos apresentaram dificuldades em manusear o comprimento do arco ao deslocá-lo para as linhas paralelas ao eixo x. | Faça uma breve introdução à equação do arco S=$\theta r$. Isso para que os jovens identifiquem que esse comprimento está associado à construção da função Sen(x) no eixo x. |

Fonte: O autor (2022)

d. Situação 3. Elementos da função sen(x).

Nesta atividade, o software GeoGebra é usado para determinar os elementos da função sen(x). Para isso foi criado um arquivo, onde os alunos encontrariam quatro gráficos diferentes. Nestes gráficos o aluno determinará os elementos que pertencem a cada um deles. Esses elementos são amplitude, período, fase e fase constante.

- DESCRIÇÃO: Descrevem os elementos geométricos presentes nas funções: compreensão e alongamento, amplitude, defasagem de período e fase ou deslocamento. Descrevem variantes geométricas e numéricas e invariantes;
- DEFINIÇÃO: A atividade permite que os alunos associem formulários e façam suposições. Por exemplo; na função F(x) = sen(2x + $\pi$) eles determinam que adicionando a constante de fase à função original F(x) = sen(2x) o gráfico da função corre uma distância para a esquerda portanto o gráfico da função F(x) = sen(2x + $\pi$) no ponto pi/4 tem como imagem -1.

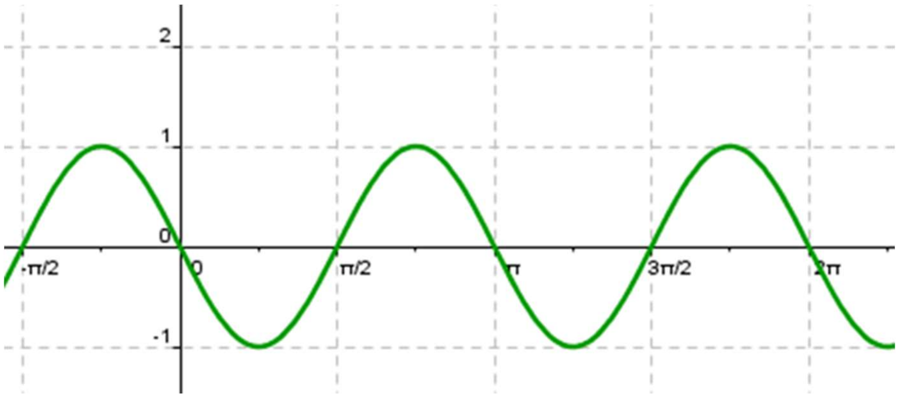



Figura 8. Gráfico da função F(x) = sen (2x + $\pi$) no programa Geogebra.
Fonte: Pedroso (2012).

- DEMONSTRAÇÃO: Eles usam argumentos teóricos que lhes permitem encontrar relações entre diferentes conceitos (período, amplitude, fase e constante de fase) e gráficos de função.

e. Situação 4. Gráficos da função sen(x).

Nesta atividade, o geogebra é usado para determinar como a função sen(x) varia dependendo de sua estrutura. Os alunos identificarão quais elementos possibilitam que a função varie de certa forma, entre eles a amplitude, período, fase, fase constante, compressão e alongamento.

- DESCRIÇÃO: Esta atividade consiste em estudantes organizados em grupos que grafam algumas funções e identificam seus elementos e suas variações em relação aos outros. Os alunos fazem os gráficos no software Geogebra e explicam aos outros colegas como o grupo de funções que correspondia a eles ao gráfico se comportava. Por sua vez, os outros grupos realizam esse trabalho com grupos de diferentes funções e passam a socializar. Descrevem os elementos geométricos presentes nas funções: compressão e alongamento, amplitude, período e defasagem de fase ou deslocamento. Descrevem variantes geométricas e numéricas e invariantes.
- DEFINIÇÃO: A atividade permite que os alunos observem como as funções variam de acordo com sua estrutura. Por exemplo, se a amplitude de uma determinada função aumentar ou diminuir.
- DEMONSTRAÇÃO: Eles encontram e demonstram que a função sen(x) tem infinitas possibilidades. A função sen(x) depende de muitas variantes e invariantes e cada um dos elementos que a compõem altera a estrutura dela. Os alunos são capazes de identificar em que aspecto uma função muda se um determinado elemento é variado.

### 4.2 Discussão dos resultados

Neste tópico, se apresentarão as análises das atividades levando em consideração os níveis de Van Hiele, que já foram enunciados em um capítulo anterior; levamos em conta os níveis de visualização ou reconhecimento, análise e, finalmente, o nível de ordenação ou classificação.

4.2.1 Atividade 1. História da trigonometria

- NÍVEL 0: VISUALIZAÇÃO OU RECONHECIMENTO.

Nesse nível, os alunos identificaram elementos de trigonometria que foram construídos ao longo da história. Na apresentação "História, definição e campos de aplicação da trigonometria" eles conseguiram visualizar como a trigonometria era evidenciada nos tempos antigos. Eles observaram que nas antigas pirâmides do Egito, zigurate da Mesopotâmia, astrolábios, etc. havia uma constante. Esta constante é a trigonometria do triângulo retângulo.

- NÍVEL 1: ANÁLISE.

Eles identificaram que para cada uma dessas construções da antiguidade tinha que usar ferramentas básicas como um *gnomon* e um *escárquio*, regras e quadrados. Eles determinaram que os antigos arquitetos e engenheiros devem ter usado ferramentas matemáticas para resolver vários problemas da vida cotidiana.

Abaixo está a tabela resumida dos níveis alcançados pelos alunos durante a primeira atividade.

Tabela 4. Níveis de alunos primeira atividade.

| **ESTUDANTE** | **ATV 0** | **ATV1** | **ATV2** | **ATV3** |
|---|---|---|---|---|
| E1 | X | | | |
| E2 | X | | | |
| E3 | X | X | | |
| E4 | X | | | |
| E5 | X | X | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| E6 | X | X | | |
| E7 | X | X | | |
| E8 | X | | | |
| E9 | X | X | | |
| E10 | X | X | | |
| E11 | X | X | | |

Fonte: O autor (2022)

Durante o desenvolvimento da primeira atividade, a maioria dos alunos atingiu os níveis 0 e 1. Eles evidenciaram a construção histórica da trigonometria dos tempos primitivos aos tempos modernos.

4.2.2 Atividade 2: Construção do gráfico da função sen(x)

- NÍVEL 0: VISUALIZAÇÃO OU RECONHECIMENTO.

O objetivo desta atividade foi construir a função trigonométrica sen(x). A construção é realizada por meio de papel milimetrado régua, transportador e cabo. Para conseguir essa reprodução, o professor fez o gráfico no quadro. Explicando os passos a seguir à medida que os alunos realizam a reprodução. O professor construiu o gráfico a partir de uma linha horizontal e uma circunferência em uma extremidade do tabuleiro.

Posteriormente, divide a circunferência dos ângulos de 30° a 30°. As linhas horizontais são atraídas para cada um dos pontos da circunferência onde os ângulos foram marcados. Ter essa construção gráfica agora só era necessário para fazer um gráfico da função. O cabo é usado para medir o arco de circunferência de cada ângulo. Em seguida, o cabo é esticado na forma de uma linha reta e o ponto correspondente a cada ângulo está localizado com seu paralelo. Finalmente, os pontos são unidos e a função sen(x) é obtida.

- NÍVEL 1: ANÁLISE.

Propriedades de objetos geométricos são percebidas. Os jovens entendem que para construir a função sen(x) eles precisam da ajuda das relações trigonométricas vistas acima. Os alunos determinam que para sua construção devem ser necessárias várias ferramentas e conceitos anteriores.

Os alunos identificam elementos como a circunferência, o triângulo retângulo que se forma dentro, as linhas paralelas que partem do ponto onde a hipotenusa cruza um ponto da circunferência. Neste ponto, os alunos tiveram dificuldade em pensar sobre por que realizar essas linhas; uma vez que eles não conheciam sua função como referência no plano cartesiano onde eles se cruzavam com o comprimento do arco que seria determinado a partir de cada ângulo medido em radianos.

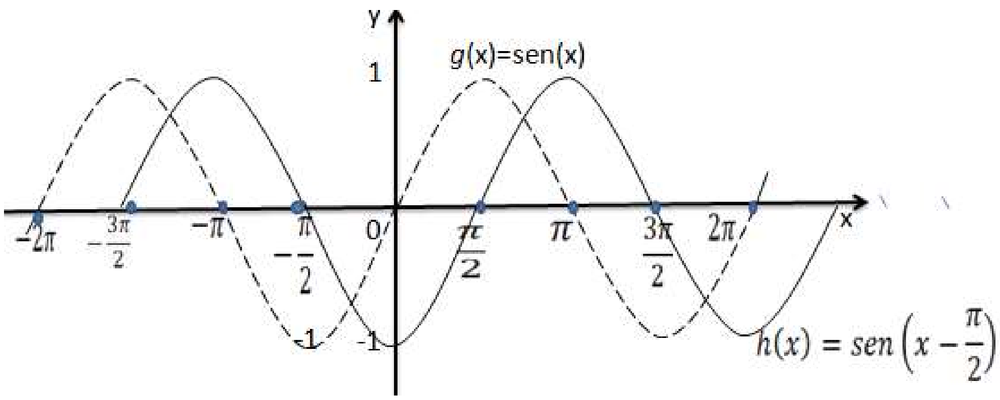



Figura 9. Função de exibição sen(x).

Fonte: Pedroso (2012).

Os alunos tiveram dificuldades nessa associação e na conversão de notas para radianos. Por esta razão, eles só usaram a medição do arco do primeiro ângulo e continuaram movendo-o no eixo x e, assim, desenhar uma vertical pontilhada que se cruzou com as linhas paralelas. Isso para associar o comprimento do arco com a linha paralela e, assim, obter os pontos que definiriam a função sen(x).

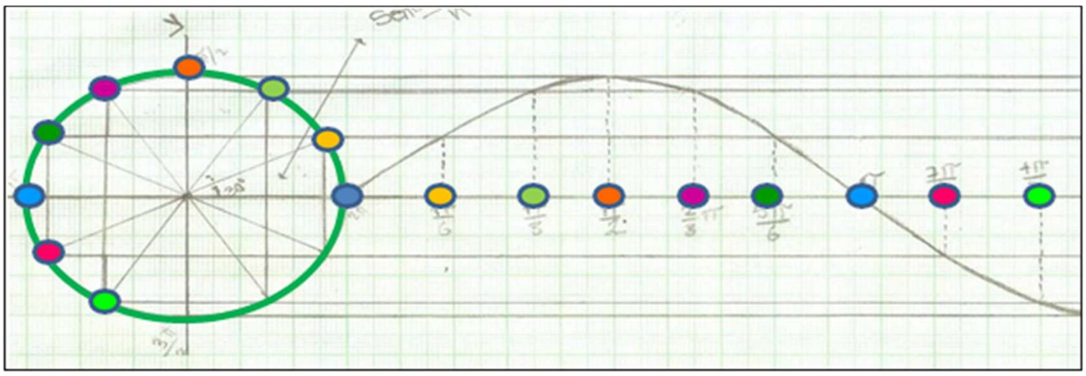


Figura 10. Função de elaboração do exemplo sen(x).

Fonte: O autor (2022).

Nesse sentido, esses alunos construíram a função sen(x) como exercício mecânico, mas sem fazer uma associação entre conceitos como arco, cateto, radiano, etc. e procedimentos como a conversão de graus para radianos.

- NÍVEL 2: CLASSIFICAÇÃO.

Os alunos realizaram a construção da função sen(x) estabelecendo relações entre vários elementos que a compõem. Eles entendem os significados das definições (arco, radiano, ângulo, linhas paralelas, entre outros). Eles realizaram procedimentos matemáticos para determinar a equivalência entre graus e radianos para certos ângulos. Eles realizaram procedimentos geométricos e de desenho para determinar a curvatura que representa a função sen(x).

Os jovens determinaram a relação entre a abertura do ângulo e o comprimento do arco da circunferência. Com isso em mente, eles dividiram a circunferência goniométrica em seções de a. Eles realizaram cálculos sobre a equivalência em radianos desses graus por meio de uma regra simples de três.

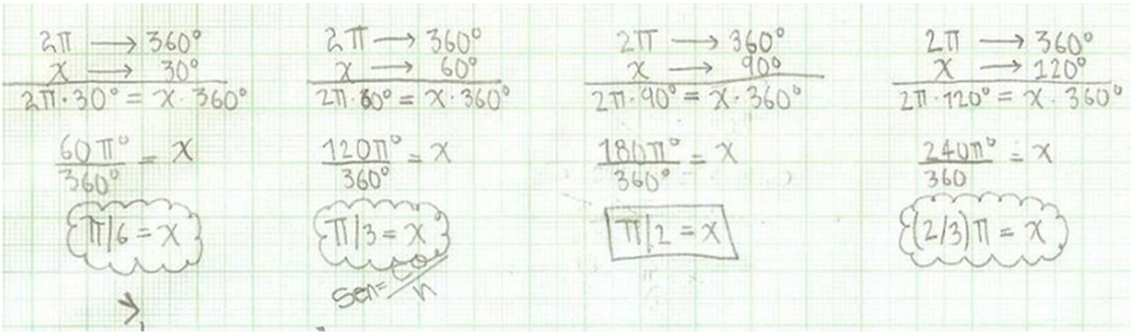



Figura 11. Graus de conversão para radianos.
Fonte: O autor (2022).

Os alunos realizam a conversão de A na atividade. Eles observam que cada ângulo tem uma medida igual, então apenas cada ângulo é adicionado um valor, a fim de determinar o valor em radianos para os ângulos. Assim, conseguiram relacionar o conceito de arco e sua projeção no eixo x medido em radianos.

Geometricamente, os jovens puderam verificar a razão pela qual foram traçadas linhas paralelas ao eixo x. Eles identificaram que o comprimento da hipotenusa cruzou um ponto na circunferência. A partir deste ponto eles determinaram a altura do cateto em frente ao ângulo e, portanto, a amplitude que a função sen(x) tomaria. Neste ponto, os alunos argumentaram que cada comprimento de cateto no eixo y dado pelo ângulo de abertura corresponderia a um respectivo comprimento de arco em radianos no eixo x.

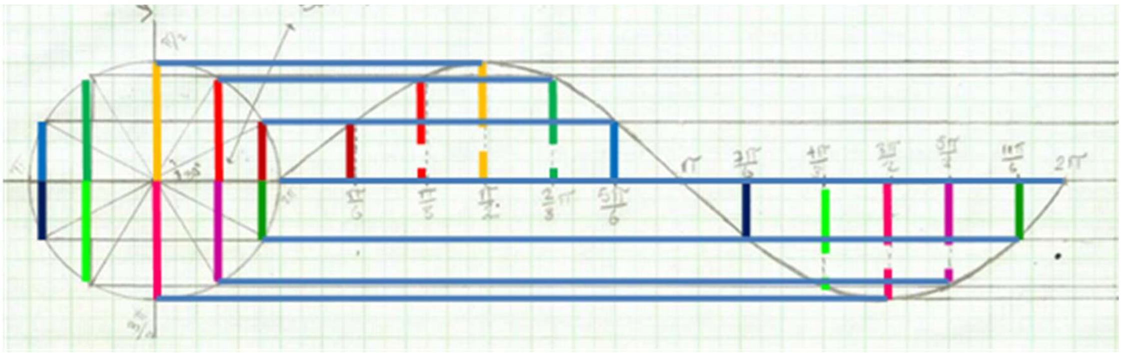


Figura 12. Função de construção sen(x).

Fonte: O autor (2022).

Tabela 5. Níveis alcançados pelos alunos durante a segunda atividade.

| **ESTUDANTE** | **ATV 0** | **ATV1** | **ATV2** | **ATV3** |
|---|---|---|---|---|
| E1 | X | X | | |
| E2 | X | X | | |
| E3 | X | X | X | |
| E4 | X | X | | |
| E5 | X | X | X | |
| E6 | X | X | X | |
| E7 | X | X | X | |
| E8 | X | X | | |
| E9 | X | X | X | |
| E10 | X | X | X | |
| E11 | X | X | X | |

Fonte: O autor (2022)

Durante o desenvolvimento da segunda atividade, a maioria dos alunos atingiu o nível 2. Os alunos usaram ideias e preconceitos anteriores sobre proporções trigonométricas e conversão de graus para radianos para a construção da função sen(x). Identificaram os elementos que a compõem e suas variações, contrações e expansões com base em sua estrutura.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para encerrar, as diferentes formas de raciocínio dos alunos mostram que, dependendo das atividades propostas, os processos matemáticos de descrição, definição e demonstração estão presentes em suas ações e nos trabalhos elaborados. Os procedimentos desenvolvidos, por meio da implementação das atividades, permitiram que os alunos avançassem em seus níveis de raciocínio, pôde-se observar que, através da descrição dos arquivos, os alunos estavam generalizando propriedades e utilizando definições que os levaram a adquirir habilidades na demonstração.

Embora as atividades não pudessem ser desenvolvidas em sua totalidade, pois o processo de aprendizagem e desenvolvimento de habilidades de descrição, definição e demonstração foi feito em um contexto normal de classe de uma instituição oficial, onde a maioria dos alunos tem deficiências em conceitos e processos, pré-requisitos para o estudo de relações e funções trigonométricas.

Os alunos apresentaram importantes avanços em seu raciocínio quando comparados aos cursos anteriores em que não haviam recebido a formação necessária em Geometria, nem desenvolveram os processos que foram trabalhados. Inicialmente, os alunos apresentaram algumas dificuldades na análise das oficinas propostas, pois tentaram justificar seus procedimentos com base em argumentos visuais, mas à medida que avançavam na realização das atividades, tomaram conhecimento da necessidade de utilizar definições e argumentar logicamente as situações levantadas.

Por outro lado, pode-se concluir que o uso da tecnologia favoreceu a análise, generalização, dedução e, principalmente, a relação entre conceitos e a geração de ideias, uma vez que os arquivos se tornaram uma ferramenta de aprendizagem, o que facilitou a reflexão e a comunicação de ideias entre alunos e, entre alunos e professores, este último, focando aprendizes na construção do conhecimento matemático. Isso possibilitou enfatizar a elaboração de descrições, definições, construção e validação de conjecturas e demonstrações e a descoberta de propriedades. Mas, acima de tudo, foi resgatada uma ideia de que o aluno é responsável por seu próprio aprendizado; para que o valor da ferramenta aumentasse à medida que era utilizada, possibilitando uma maior gama de ideias matemáticas, com mais formas de representá-las e manipulá-las. Esse fato também foi acomodado às diferentes formas de aprendizagem, pois os alunos poderiam utilizar as diversas representações oferecidas pelo software; isso os ajudou a desenvolver diferentes formas de pensar sobre as tarefas propostas e se tornar independente da tecnologia.

Com os resultados encontrados é confirmado que a tecnologia por si só não atinge o objetivo, é o professor que atua como mediador entre o conhecimento e o aluno para que ele através da observação, análise, produção de conjecturas e elaboração de demonstrações, ele avance em seu nível de raciocínio. Assim, se um aluno está no primeiro nível de raciocínio, ele fica na parte estática do raciocínio, mas se o professor o motiva e questiona corretamente, então é necessário usar e formular a teoria na busca de justificativas teóricas para a solução dos problemas propostos. Essa forma de usar a tecnologia requer uma preparação correta dos professores para projetar e aplicar atividades nas quais buscam desenvolver processos e ajudar os alunos a avançar em seus níveis de raciocínio.

Como resultado deste trabalho, não só foi desenvolvida uma unidade didática para o ensino de funções trigonométricas no ensino médio utilizando o modelo Van Hiele como também conjunto e objetivo, mas também, com a organização detalhada da unidade de acordo com as fases do modelo, permitiu ao professor entender como as atividades devem ser orientadas com relação a cada processo e as ações dos alunos para motivar aqueles que precisavam maior atenção e mediação e, por sua vez, identificar aqueles que estavam avançando mais rapidamente.

Destaca-se que a fase de orientação voltada para o desenvolvimento dos processos foi fundamental para que os alunos desenvolvessem os conteúdos e estruturassem seu trabalho para que as descrições, definições e demonstrações elaboradas fossem visíveis e a fase explícita também contribuísse para o alcance dos objetivos de aprendizagem e constituísse uma nova fonte de motivação e participação para os membros do grupo graças ao compromisso de cada um na implementação das atividades propostas; Além disso, a fase de explicitação foi fundamental para que os alunos observassem e entendessem outras formas de demonstração, aprendessem vocabulário, aumentassem suas intervenções e melhorassem a produção de seus argumentos.

## REFERÊNCIAS

ABREU, Astúrio Cardoso. **O Uso de Software na Aprendizagem da Matemática.** 2011. 37 f. Monografia (Especialização) — Universidade Federal do Mato Grosso, São Paulo, 2011.

ANDRADE, Jackson Tavares de. **Trigonometria: da teoria às aplicações.** TCC (Especialização em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2019.

BORGES, Marta Maia de Assis. **Geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: novas perspectivas.** In: XXV CONADE – UFG, Goiás, Brasil, 2012.

BULOS, Adriana Mascarenhas Mattos. **O Ensino da Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.** In: XIII CIAEM – IACME, Recife, Brasil, 2014.

CARVALHO, Kissia. **Uma análise das questões de trigonometria no ENEM considerando habilidades, competências e conteúdo.** CONEDU V - Campina Grande-PB - ANO 2018.

CROWLEY, M. **The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought**. 1987.

DIAS, Natali Medeiros. **O Uso de Softwares na Aprendizagem na Matemática**. 2015. 20 f. Monografia (Especialização) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Santo Angelo - RS, 2015.

DORTA, Fernando. **Os paradoxos e as aulas de matemática: Algumas reflexões e sugestões**. 2013. 162p. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR.

FERREIRA, Cristhiane de Souza. **O ensino de semelhança de triângulos com o auxílio do software régua e compasso.** Anais do Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Ocidental, n. 1, 2016.

FERNANDES, A.R.B. et al. **Principais motivos que dificultam a aprendizagem da Matemática.** Universidade Federal da Paraíba (UFPB) - PRG - XI Encontro de Iniciação à Docência. Paraíba, 2012. Disponível em: <http://www.prac.ufpb.br/anais/xenex_xienid/xi_enid/prolicen/ANAIS/Area4/4CFTDCBSPLIC05.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2021.

FLORES, C. R. **Olhar, Saber, Representar: Ensaios sobre a representação em perspectiva**. Tese de Doutorado em Educação – Ensino de Ciências. UFSC – Florianópolis, 2008.

FONSECA, Maria da Conceição F. R. **O ensino da geometria na escola fundamental – três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais.** Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

FONSECA, J.F.O. **Dificuldade na aprendizagem**. Rio de Janeiro, 2012. Monografia apresentada ao Programa de Pós-Graduação Lato Sensu - Faculdades Integradas de Jacarepaguá, 2012.

GONÇALVES, George Wesley Barbalho. **Geometria do triângulo: teoremas, problemas e aplicações em olimpíadas de matemática.** 2014. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília - DF, 2014.

HOFFER, A. **Geometry is more than Proof.** The Mathematics Teachers, vol 74, nº1, USA, janeiro, 1981.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar: Trigonometria.** 9. ed. São Paulo: Editora Atual, 2013.

LINS, Mônica. **A aprendizagem de Matemática por alunos adolescentes na Modalidade Educação de Jovens e Adultos: analisando as dificuldades na resolução de problemas de estrutura aditiva.** Boletim de Educação Matemática, vol. 24, núm. 38, abril, 2011, pp. 75-96 Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil, 2011.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. Editora Pedagógica e Universitária LTDA, São Paulo, 1986.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Geometria.** 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NASCIMENTO, Eimard G. A. do. **Avaliação do uso do software geogebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola**. Anais XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor, v. 8457, p. 8, 2012

NASSER, Lílian. **Geometria segundo a teoria de van Hiele.** Rio de Janeiro. IM/UFRJ - Projeto Fundão. 2004.

PESCAROLO, Henrique Marques. **Uma Proposta de Ensino Aprendizagem de Trigonometria em Triângulos por meio do Software Geogebra**. 2018. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

PEDROSO, Leonor Wierzynski. **Uma proposta de ensino da trigonometria com uso do software GeoGebra.** 2012. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre - RS, 2012.

RODRIGUES, Alessandra Coelho. **O Modelo de Van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico.** Trabalho de Conclusão de curso. Universidade Católica de Brasília, 2017. Disponível em: www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/AlessandraCoelhoRodrigues.pdf. Acesso em: 12 nov. 2021.

SHULTE, Alberto P., orgs. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

SILVA, Cleidison Cândido da. **Os níveis do pensamento geométrico no modelo Van Hiele: um estudo de caso envolvendo quadriláteros.** Monografia. 70f. Ciências Exatas. Curso de Matemática. Universidade Federal da Paraíba – UFPB. Rio Tinto/PB: UFPB, 2015.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. **A pesquisa científica.** In: GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. Métodos de pesquisa. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

SOUZA, M. R. **Uma sequência de ensino para o estudo da perspectiva cônica.** Mestrado Acadêmico em Educação Matemática - Universidade Bandeirante de São Paulo, 2010.

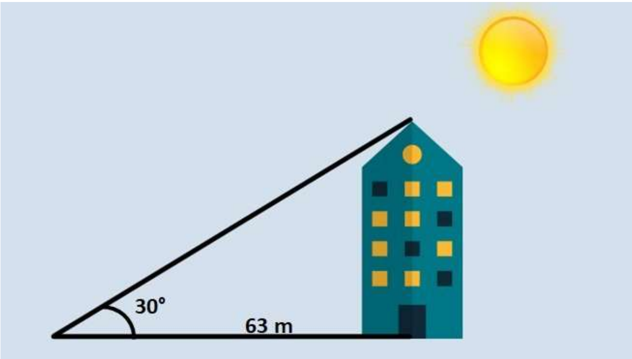
TIBÚRCIO, R. **Processo de desenvolvimento de software educativo: um estudo da prototipação de um software para o ensino de função**. Mestrado Acadêmico em Educação Matemática e Tecnológica – Universidade Federal de Pernambuco, 2016.

USISKIN, Z. **Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry**. 1982. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Chicago, 1982, 227 p.

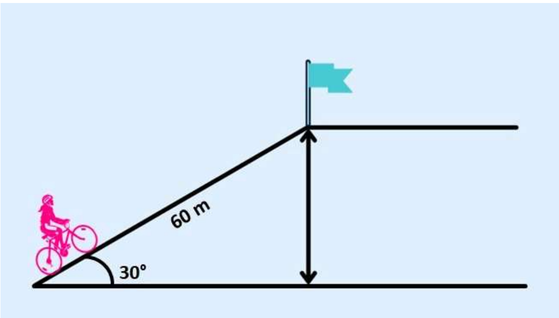
# ANEXO

## ANEXO1. Modelo de atividade aplicada aos alunos

1) Observando pela manhã a sombra de um prédio no chão, uma pessoa verificou que essa média 63 metros quando os raios de Sol faziam um ângulo de 30° com a superfície. Baseado nessas informações, calcule a altura do prédio.




2) Uma ciclista participando de um campeonato se aproxima da linha de chegada que se encontra no alto de uma ladeira. O comprimento total dessa última parte da prova é de 60 m e o ângulo formado entre a rampa e a horizontal é de 30°. Sabendo disso, calcule a altura vertical que a ciclista precisa subir.




3) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo, um ângulo de 30º (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1 000 metros, qual a altura atingida pelo avião?