

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA LICENCIATURA**

LUCAS QUEIROZ CORDEIRO DE MOURA

**LIVROS EXAME DE ARTILHEIROS (1744) E EXAME DE BOMBEIROS (1748):
ALGUNS PROBLEMAS RELACIONADOS COM OS ELEMENTOS DE
EUCLIDES**

**Maceió-AL
2022**

LUCAS QUEIROZ CORDEIRO DE MOURA

**LIVROS EXAME DE ARTILHEIROS (1744) E EXAME DE BOMBEIROS (1748):
ALGUNS PROBLEMAS RELACIONADOS COM OS ELEMENTOS DE
EUCLIDES**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do curso de Matemática Licenciatura, da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dra. Viviane de Oliveira Santos

Maceió-AL

2022

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

M9291 Moura, Lucas Queiroz Cordeiro de.
 Livros Exame de Artilheiros (1744) e Exame de Bombeiros (1748) :
 alguns problemas relacionados com os elementos de Euclides / Lucas Queiroz
 Cordeiro de Moura. - 2022.
 52 f. : il.

Orientadora: Viviane de Oliveira Santos.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática :
Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática.
Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 48-52.

1. Alpoim, José Fernandes Pinto, 1700-1765. Exame de Artilheiros. Exame
de Bombeiros. 2. Euclides. Os elementos. 3. Matemática - Historiografia. I.
Título.

CDU: 51(091)

Folha de Aprovação

LUCAS QUEIROZ CORDEIRO DE MOURA

LIVROS EXAME DE ARTILHEIROS (1744) E EXAME DE BOMBEIROS (1748): ALGUNS PROBLEMAS RELACIONADOS COM OS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca examinadora do curso de Matemática Licenciatura, da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática e apresentado em 04 de agosto de 2022.

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **VIVIANE DE OLIVEIRA SANTOS**
Data: 04/08/2022 12:06:07-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos (Orientadora)
I Universidade Federal de Alagoas

Documento assinado digitalmente
 **EDIEL AZEVEDO GUERRA**
Data: 04/08/2022 13:41:39-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra
Universidade Federal de Alagoas

Documento assinado digitalmente
 **GRACIANA FERREIRA DIAS**
Data: 04/08/2022 18:58:21-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Profa. Dra. Graciana Ferreira Dias
Universidade Federal da Paraíba

AGRADECIMENTOS

Gostaria de dedicar esse trabalho para às seguintes pessoas:

Minha esposa Louyse, por todo amor, apoio e incentivo e por ter me dado meu maior presente: Levi, nosso filho.

Minha família, minha irmã Lorena, meus pais Everaldo e Luciane minha tia Fabiane por todo amor e suporte dado.

Minha orientadora, Profa. Dra Viviane Oliveira, por ter sido uma grande amiga que tanto me apoiou e incentivou.

Ao meu amigo/irmão Nickson, por tantos trabalhos realizados em conjunto, por tantos momentos vividos que foram essenciais para minha formação. Aos meus amigos que ingressaram comigo no curso de Matemática Licenciatura da Ufal: Adson, Denilson, Gustavo e Tatiane. Aos amigos que considero como irmãos Pedro Fidelis e Yúdi. Por todos os amigos que contribuíram diretamente ou indiretamente a minha formação.

Por todos os companheiros no grupo de pesquisa “História da Matemática e Educação Matemática” da Universidade Federal de Alagoas e do projeto de extensão “Sem mais nem menos” por colaborações no desenvolvimento do trabalho, momentos de aprendizagem e descontração por todos esses anos.

RESUMO

Este trabalho é parte da pesquisa do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic), denominado “Problemas geométricos da História da Matemática em livros didáticos”, realizado pelo Grupo de Pesquisa História da Matemática e Educação Matemática da Universidade Federal de Alagoas (Ufal). Dentro dos contextos de História da Matemática e História da Educação Matemática, abordarmos os livros didáticos *Exame de Artilheiros* (1744) e o *Exame de Bombeiros* (1748), ambos de José Fernandes Pinto Alpoim (1700 – 1765), buscando identificar o uso da Geometria e a relação dessas obras com *Os Elementos de Euclides*. O trabalho teve como objetivo geral relacionar alguns problemas das obras Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros de Alpoim com *Os Elementos de Euclides* para entender o processo geométrico e destacar a importância dessas obras na História da Educação Matemática. Ao estudarmos os primeiros passos do ensino da Geometria no Brasil, podemos perceber que esse ensino não acontece em paralelo com a vinda dos portugueses ao Brasil, mas sim que esse ensino se encontra emparelhado com as necessidades bélicas, ou seja, de guerra. Com isso, iremos focar nos primeiros passos do ensino da geometria no Brasil, por meio da chegada do engenheiro português José Fernandes Pinto Alpoim (1700 – 1765), e iremos abordar sobre sua vida e suas duas obras *Exame de Artilheiros* (1744) e *Exame de Bombeiros* (1748). Usando as duas obras de Alpoim, iremos estudar alguns problemas buscando as possíveis relações de tais problemas encontrados com *Os Elementos de Euclides*, bem como descreveremos brevemente sobre *Euclides* e sua obra grega. Além dessa análise de problemas, iremos apresentar uma breve Revisão Sistemática Literária (RSL) com os anais das edições do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM), entre os anos de 1995 e 2021. Ao analisar os problemas, notamos as relações entre os conceitos matemáticos com as práticas militares devido ao avanço da indústria bélica no século XVII. Vale ressaltar que os problemas foram resolvidos com o auxílio da régua e compasso e o *software GeoGebra*.

Palavras-chave: Exame de Artilheiros. Exame de Bombeiros. Os Elementos. Alpoim. História da Matemática.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	7
2. PRIMEIROS PASSOS DO ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL.....	12
3. JOSÉ FERNANDES PINTO ALPOIM E SUAS OBRAS.....	14
3.1 José Fernandes Pinto Alpoim	14
3.2 Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros	16
3.3 Exame de Artilheiros	17
3.4 Exame de Bombeiros.....	19
4. OS ELEMENTOS DE EUCLIDES E OS PROBLEMAS NOS LIVROS DE ALPOIM ...	21
4.1 Os Elementos de Euclides	21
4.2 Revisão Sistemática Literária	24
4.2.1 Sobre as pesquisas encontradas.....	27
4.3 Alguns problemas.....	31
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	46
REFERÊNCIAS.....	48

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho é parte da pesquisa do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic) denominado “Problemas geométricos da História da Matemática em livros didáticos” realizado pelo Grupo de Pesquisa História da Matemática e Educação Matemática da Universidade Federal de Alagoas (Ufal). A pesquisa teve como foco verificar como a Geometria está sendo abordada em livros didáticos e relacionar tal conteúdo encontrado com a Geometria apresentada até a antiguidade clássica.

Esse trabalho teve como objetivo geral relacionar alguns problemas das obras *Exame de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros* de Alpoim com *Os Elementos de Euclides* para entender o processo geométrico e destacar a importância dessas obras na História da Educação Matemática. Além disso, teve como objetivos específicos: estudar os problemas das obras de Alpoim, refletindo sobre procedimentos matemáticos que ocorreram ao longo da História da Matemática; analisar como a geometria tem sido abordada em livros didáticos, relacionando problemas geométricos da História da Matemática encontrados em livros didáticos; e realizar construção geométricas encontradas nas obras de Alpoim, usando o software *GeoGebra*.

No primeiro momento, estudou-se os passos do ensino da Geometria no Brasil, identificando suas causas e o contexto histórico em que está inserido. De acordo com Meneses (2007), o ensino no Brasil desde a chegada dos portugueses foi dominado pelos jesuítas por cerca de 200 anos e que boa parte não considerava a Matemática como algo para a formação do homem. O ensino da Geometria no Brasil está atrelado às necessidades de guerra no fim do século XVII.

No segundo momento foi realizado uma pesquisa sobre a vida de José Fernandes Pinto Alpoim e seus livros *Exame de Artilheiros* (1744) e *Exame de Bombeiros* (1748), descrevemos como Alpoim abordava os conteúdos em seus livros, fizemos uma análise da demonstração de alguns problemas e, por fim, conectamos as obras com *Os Elementos de Euclides*.

O *Exame de Artilheiros* foi reimpresso em forma fac-similar¹ em 1987 pela Xerox do Brasil numa edição limitada e distribuída a quem por ela se interessasse. Já o *Exame de Bombeiros* é bem menos conhecido, uma vez que não existem reimpressões modernas, e só são encontrados alguns poucos exemplares nas seções de obras raras de um número limitado de bibliotecas (PIVA; FILGUEIRAS, 2008).

Dentro desse contexto, abordarmos os livros *Exame de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros*. A essência desses livros é que as informações geométricas abordadas, em boa parte, são executadas na prática e elaborado com um método de perguntas e respostas. Meneses (2007) afirma que, por um certo tempo, a educação do Brasil tinha como referência as obras de Alpoim. Valente (1999, p. 60, *apud* MENESES, 2007, p. 35) também complementa que “esses textos representam a fonte mais remota para investigação das origens da matemática escolar no Brasil”.

No terceiro momento, foi apresentada a clássica obra grega *Os Elementos de Euclides*, no qual é apresentado sua vida e como seu trabalho está distribuído, e realizou-se uma Revisão Sistemática Literária utilizando os anais das edições do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) entre os anos de 1995 e 2021 buscando encontrar trabalhos que identificassem possíveis relações do *Exame de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros* com *Os Elementos de Euclides*.

Lintz (2007) apresenta que a obra *Os Elementos* que estudamos hoje na verdade é uma mera cópia do texto original da obra, apesar de todo o esforço de incontáveis especialistas em História da Matemática. Goulart (2020) complementa que apesar da dificuldade em entender a obra de Euclides traduzida por Irineu Bicudo, é possível utilizar *Os Elementos* como um recurso didático apoiada em um direcionamento ou em outros objetos de ensino e aprendizagem, como por exemplo, a tendência da História da Matemática e as Tecnologias.

Por fim, foram feitos alguns problemas das obras de Alpoim buscando analisar o processo geométrico realizado e relacionar tais problemas com *Os Elementos de Euclides*.

¹ É uma edição nova geralmente de um livro ou artigo que apresenta uma reprodução exata da edição original, incluindo fontes de letras, escalas, ilustrações.

Em busca de compreender melhor a relação entre as obras de Alpoim com *Os Elementos de Euclides*, destaca-se a importância da obra grega no ensino da Matemática. Segundo Goulart (2020), a Geometria Euclidiana foi e ainda é o retrato utilizado no ensino de Matemática, é por essa e outras razões que os conhecimentos compilados por Euclides há mais de dois mil anos constituem uma obra de grande importância para a comunidade matemática.

Para a realização dessa pesquisa, utilizamos algumas fontes em História da Matemática como: Alpoim (1744), Alpoim (1748), Amati (2010), Barbosa (2018), Barros e Mendes (2015), Berlinski (2018), Bicudo (2020) Brasil (1998), Campos (1999), D'Ambrosio (1995), D'Ambrosio (1999), D'Ambrosio (2003), D'Ambrosio (2008), Euclides (2009), Eves (2004), Garbi (2010), Goulart (2020), Gulin e Rosário (2014), Juliani (2009), Leão (2017), Lintz (2020), Meneses (2007), Monteiro (2015), Mori e Filete (1999), Nobre (2008), Nobre (2009), Nobre (2021) Piva e Filgueiras (2008), Piva e Filgueiras (2011), Piva e Santos (2011), Ribeiro (2001), Ribeiro (2003), Ribeiro (2009), Roque (2012), Saito (2015), Sena e Dorneles (2013), Silva (2001), SNHM (2021), Valente (1999) e Vieira (1997).

Por ser um trabalho voltado para a História da Matemática e História da Educação Matemática, vale ressaltar o que diz Saito (2015, p. 31), História da Matemática é o “estudo das formas de elaboração, transformação e transmissão de conhecimentos sobre as matemáticas, a natureza, as técnicas e as sociedades, em diferentes épocas e culturas”. A História da Matemática pode oferecer uma grande contribuição para o processo de ensino e aprendizagem, entre elas, segundo Goulart (2020, p. 7): “a História da Matemática como abordagem de ensino tem o potencial de levar os estudantes a perceberem a Matemática como produção humana, historicamente situada, pautada nas necessidades e interesses de cada época e sociedade.”

De acordo com Brito e Mendes (2012) uma das principais razões para usar a História da Matemática é de que história aumenta a motivação para a aprendizagem da matemática e, de acordo com Cavalcante (2002, p. 84, *apud* GULIN; ROSÁRIO, 2014, p. 12), “a matemática traz grandes contribuições para o desenvolvimento do aluno, pois ela tem relações estreitas com diversas áreas do

conhecimento e da atividade humana”. Portanto, a História da Matemática pode ser desenvolvida como estratégia de abordagem e motivação para o ensino de conteúdos matemáticos.

No Brasil, é provável compreender os estudos sobre História do Ensino de Matemática fazendo parte das pesquisas sobre História da Matemática. De acordo com Nobre (2008),

O movimento internacional de investigação científica em História da Matemática e Educação Matemática é permeado por diferentes frentes, cujos projetos se desenvolvem de forma aparentemente independente, mas que estão intimamente ligados. Em uma visão abrangente do universo das pesquisas em História da Matemática, publicadas nos principais periódicos internacionais, verifica-se que o campo da investigação se divide nos seguintes grandes temas: história dos problemas e dos conceitos; história das relações entre matemática, ciências naturais e técnicas; biografias; análise histórica de fontes literárias; organizações institucionais. Na última década, a investigação científica ganhou novos componentes que, embora tenham mantido a hegemonia da matemática produzida no mundo ocidental, adentrou no campo da investigação científica que tem como tema central a matemática como parte da cultura humana. Decorrente desse tema, a investigação científica que visa analisar a matemática como parte da formação geral do indivíduo abre caminho para o estudo sobre a história do ensino da matemática (NOBRE, 2008, p. 129).

Por ser um trabalho onde aborda e analisa problemas geométricos, destaca-se a importância da Geometria na História da Matemática e sua relevância para o ensino.

Ao longo desse trabalho veremos a relação entre armamentos bélicos com a Geometria, por isso, é importante destacar os momentos políticos, sociais e organizacionais vividos em cada época no país. D'Ambrosio (2008) trata a importância de o professor de Matemática conhecer a História da Matemática no Brasil e seus trabalhos para compreender a prática do encontro cultural de gerações, o desafio no mundo escolar, os programas escolares, os livros adotados, entre outros.

Segundo Sena e Dorneles (2013), os livros *Exames de Artilheiros* e *Exames de Bombeiros* foram escritos por José Fernandes Pinto Alpoim, esse designado pela corte portuguesa para ministrar aulas aos combatentes. Neles, os conceitos geométricos presentes tinham como objetivo alcançar conhecimentos que

contribuíssem para a atuação na carreira militar e o ensino da geometria organizado com definição, explicação e exemplo numérico.

Monteiro (2015, p. 27) se refere à Geometria como “uma ferramenta capaz de desenvolver a capacidade de compreensão, descrição e interrelação com o espaço em que vivemos.”. Além disso, a Geometria, em sua essência, tem suas origens na antiguidade e foi o desejo de filósofos e pensadores.

O uso de conhecimentos geométricos para resolver problemas de ordem prática já era bem conhecido entre os egípcios, chineses e outras antigas civilizações. Entretanto, a ideia de prova em geometria parece ser essencialmente grega. Até o período da decadência do mundo antigo, a característica mais marcante das matemáticas gregas foi geometria demonstrativa, cujo modelo de prova inspirou outras ciências. (SAITO, 2015, p. 39)

Sendo assim, os resultados desse trabalho serão de grande valia para pesquisadores, professores e estudantes, pois tais resultados mostrarão a relação da História da Matemática com os problemas encontrados em livros didáticos.

Este trabalho se propõe a diminuir tais incertezas com relação à Geometria usada nesses livros didáticos, bem como aproximar tais problemas com *Os Elementos de Euclides*.

Além da Introdução e Considerações Finais, o trabalho está dividido em mais três seções: Primeiros passos do ensino da Geometria no Brasil; José Fernandes Pinto Alpoim e suas obras; e *Os Elementos de Euclides* e os problemas dos livros de Alpoim.

2. PRIMEIROS PASSOS DO ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL

Antes de abordarmos alguns problemas encontrados nos livros didáticos, relataremos a respeito dos primeiros passos do ensino da Geometria no Brasil. Diante disso, iniciaremos com a seguinte pergunta: Como aconteceu os primeiros passos do ensino da Geometria no Brasil?

Segundo Meneses (2007), por cerca de duzentos anos, iniciando com a chegada dos portugueses ao Brasil, o ensino foi comandado pelos jesuítas, porém eles não foram responsáveis pelo começo da Matemática no sistema escolar, pois consideravam que ensinar a Matemática era um desperdício.

O estudo das ciências especulativas como a geometria, a astronomia e a física é um divertimento em vão. Todos esses conhecimentos estéreis e infrutíferos são inúteis por eles mesmo. Os homens não nascem para medir linhas, para examinar a relação entre ângulos e para empregar todo seu tempo em considerar os diversos movimentos da matéria. Seu espírito é muito grande, a vida muito curta, seu tempo muito precioso para se ocupar de tão pequenas coisas; (...) (DAINVILLE, 1978, p. 332, *apud* VALENTE, 1999, p. 35)

O ensino da Geometria no Brasil está vinculado com as necessidades de guerra. Platão afirmara que a Geometria utilizada no desenvolvimento de armas e das fortificações nada tinha a ver com a Matemática, ficando assim dividida a Geometria em duas partes: geometria prática ligada à mecânica, cujas características eram medir distâncias, altura, profundidades, níveis, área, corpos etc.; e a geometria especulativa, ligada à Filosofia e baseada em três pontos: *Elementos de Euclides*, *Esféricos de Theodosio* e *Cônicos de Apollonio* (VALENTE, 1999, p. 40). Saito (2015, p. 42) ainda ressalta que, para Platão, a “geometria era o conhecimento daquilo que sempre existe” e que não deveria ser exclusiva apenas para responder problemas geométricos e sim para encaminhar para o verdadeiro pensamento filosófico, pois Platão visava o aprendizado aprofundado das áreas da matemática para os futuros governantes.

De acordo com Piva e Filgueiras (2008), foi a partir do século XIV que a pólvora passou a ser utilizada para fins bélicos, porém, somente no século XVI com a fase de conquistas, descobrimento e ocupação de novas terras vindo dos europeus, aumentou sua relevância. Além disso, Meneses (2008) diz que os

canhões no século XV possuíam pontaria duvidosa e a partir da relação de estratégias de guerra com a Geometria, rapidamente passaram a ser armas de boa precisão e, com esse avanço, proporcionou um avanço simbólico na indústria bélica com fins de possibilitar melhores defesas e predomínio de poder.

Devido a essa necessidade de desenvolvimento no campo militar, foram criadas as primeiras aulas de Artilharia e Fortificação e a matemática ganhou destaque nesse novo campo, sendo assim criado um novo posto para um profissional do exército, o engenheiro, e a geometria se tornou o principal objeto de conhecimento do engenheiro. (MONTEIRO, 2015, p. 8)

E como esse conhecimento voltado ao ensino da Geometria chegou ao Brasil? De acordo com Monteiro (2015), Portugal, a fim de defender suas terras, passou a enviar especialistas no século XVII pessoas experientes e capacitadas para formar pessoas qualificadas em fortificações militares. Meneses (2008) afirma que tal fato demorou a ser concretizado, mesmo com o empenho da criação da *Aula de Fortificação* em 1699. Em Valente (1999, p. 43) encontramos que:

Em 1699, é criada a Aula de Fortificações no Rio de Janeiro. O objetivo era ensinar a desenhar e a fortificar. O número de alunos seria três e deveriam ter, no mínimo, dezoito anos. Tal aula, apesar de instituída em 1699, ainda em 1710 não tinham iniciado porque “nesta data eram reclamados livros, compassos e instrumentos”. (PONDE *apud* TELLES, 1984, p. 66)

Segundo Piva e Filgueiras (2008), Portugal viu como um custo elevadíssimo enviar e manter profissionais europeus capacitados para os trabalhos de fortificações e, com o objetivo de melhorar essa situação, designou professores e criou escolas que formassem pessoas qualificadas para o trabalho. Isso não implica em dizer que os portugueses não haviam ministrado antes *Aulas de Fortificação* no Brasil, defender a colônia era uma preocupação antiga.

Para isso, Meneses (2007) afirma que a Corte Portuguesa indicou José Fernandes Pinto Alpoim, autor dos livros *Exame de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros*, primeiros livros escritos em português voltados ao ensino da Geometria. Na próxima seção, aborda sobre um dos percussores em trazer o ensino da Geometria para o Brasil aplicando de uma forma didática: Alpoim.

3. JOSÉ FERNANDES PINTO ALPOIM E SUAS OBRAS

Segundo Piva e Filgueiras (2008), José Fernandes Pinto Alpoim (1700 - 1765) chegou no Rio de Janeiro no ano de 1739 e seu trabalho pode ser examinado em três maneiras: engenheiro e arquiteto, militar e, por último, professor e autor de obras didáticas de engenharia e matemática aplicada à engenharia.

3.1 José Fernandes Pinto Alpoim

(...) *Quem é, continuava o castelhano,
Aquele velho vigoroso e forte,
Que de branco e amarelo e de ouro ornado
Vem os seus artilheiros conduzindo?
Vês o grande Alpoim. Este o primeiro
Ensinou entre nós por que caminho
Se eleva aos céus a curva e grave bomba
Prenhe de fogo; e com que força do alto
Abate os tetos da cidade e lança
Do roto seio, envolta em fumo, a morte. (...)*

José Basílio da Gama, O Uruguai, 1769

É nos versos desse poema de Basílio da Gama que, de acordo com Piva e Filgueiras (2011), se percebe a admiração de D. João V pelo brigadeiro Alpoim, o engenheiro enviado ao Brasil.

José Fernandes Pinto Alpoim nasceu em Viana do Castelo em Portugal, em 14 de julho de 1700, filho de Vasco Fernandes de Lima, militar, e Revocata Pinto Alpoim. Ele estudou na *Academia de Viana* durante sua formação militar, foi professor substituto nessa *Academia*, mestre de engenhos (engenheiro) até que, em 1738, foi promovido a sargento-mor do *Batalhão de Artilharia* do Rio de Janeiro, para ministrar aulas nos cursos de *Artilharia e Fortificações*. Faleceu em 7 de janeiro de 1765. (AMATI, 2010)

Filgueiras e Piva (2011) fazem uma ressalva a respeito do nascimento do engenheiro:

As fontes bibliográficas são contraditórias quanto ao local de nascimento de Alpoim, porém investigações em Portugal, particularmente no Livro de Batismos do Arquivo Distrital de Viana do Castelo, comprovaram que ele nasceu em 14 de julho de 1700, na

vila de Viana do Minho, atual Viana do Castelo. (FILGUEIRAS; PIVA, 2011, p. 120)

Segundo Amati (2010), Alpoim realizou diversos trabalhos em Portugal, participou de trabalhos envolvendo arquitetura, urbanismo e até espionagem durante guerras contra a Espanha. Por todos esses feitos, Dom João V o nomeou comandante do novo *Batalhão de Artilharia* que acabara de ser criado no Rio de Janeiro, e que um ano após a sua nomeação, Alpoim viajou para o Brasil. Paulo Pardal, em nota biográfica no *Exame de Artilheiros* indica que o *Conselho Ultramarino* havia indicado outros militares para o posto (AMATI, 2010)

A seguir teremos um Trecho da Carta Régia de 19 de agosto de 1738, encontrado em Amati (2010, p. 11), que nomeia Alpoim para ocupar suas funções no Rio de Janeiro:

Fui servido haver por bem por Decreto de treze presente mês e ano que estabeleça a dita Aula para Mestre dela nomeei a José Fernandes Pinto Alpoim, que proximamente provi no Posto de Sargento-Mor do referido Terço, o qual além dos exercícios a que é obrigado pelo mesmo Posto o será a ditar postila e ensinar a teoria da Artilharia a todos os que quiserem aplicar-se a ela e especialmente aos oficiais do dito Terço, nesta primeira criação forem providos, os quais serão igualmente obrigados a assistir as Lições da Aula ao menos por tempo de cinco anos e faltando a ela serão castigados a vosso arbítrio.

Segundo Piva e Santos (2011), a situação histórica brasileira na qual foi posto Alpoim se remete à quando a *Aula de Terço*² foi estabelecida no Rio de Janeiro. A sua incumbência como professor foi ensinar as técnicas da artilharia, além disso, precisava anotar suas aulas, conhecido como “*ditar postila*”, ou seja, registrar os seus ensinamentos em forma de apostila, devido a não existir livros requisitados para as suas aulas. Os autores ressaltam que a extensão do litoral do Brasil e uma quantidade escassa de embarcações de guerra causaram um estímulo para Portugal, proporcionar uma estrutura militar terrestre no Brasil. A *Aula de Terço* serviu para aprimorar a *Aula de Fortificação*, existente desde 1699.

Com essa necessidade, Piva e Filgueiras (2008) mostram que Alpoim escreveu dois livros com caráter didático e rigorosamente comprometido com a

² Aula de Terço é um acréscimo à Aula de Fortificação

formação ideal e eficaz de artilheiros e bombeiros (lançadores de bombas) capacitado para defender com eficácia o Brasil. Os livros são: *Exame de Artilheiros*, publicado em 1744, e o *Exame de Bombeiros*, publicado em 1748.

3.2 Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros

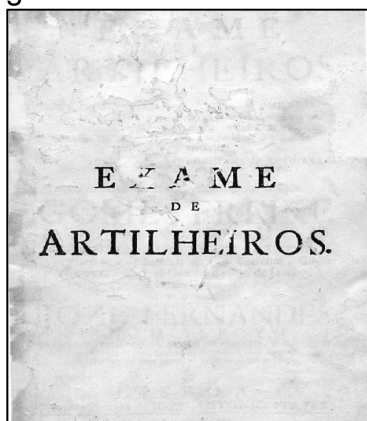
Sobre onde os livros *Exame de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros* foram impressos houve bastante discussão, pois inicialmente ambos os livros foram impressos em uma tipografia no Rio de Janeiro, já que Alpoim morava no Brasil. No entanto, Felix Pacheco esclareceu em sua publicação *Duas Charadas Bibliográficas* no ano de 1931, após um levantamento e comparações entre os caracteres tipográficos dos livros e os da oficina tipográfica Jozé Antonio Plattes, localizada em Lisboa, e da oficina de Francisco Martinezabad, Madri e outras obras impressas nas oficinas tipográficas, que o livro *Exame de Artilheiros* fora impresso em Lisboa e o *Exame de Bombeiros* em Madri. (PIVA; SANTOS, 2011)

Para esse trabalho, os problemas encontrados nas obras de Alpoim foram traduzidos do português de Portugal para o português do Brasil com o intuito de ser mais acessível para os leitores.

Segundo Sena e Dorneles (2013), ambos os livros possuíam conceitos geométricos e o principal objetivo era alcançar conhecimentos que contribuíssem para a atuação na carreira militar, sendo o ensino de Geometria organizado com definição, explicação e exemplo numérico. Pode-se perceber que, nessa época, a preocupação principal era que os militares aprendessem na prática, sem o rigor científico dos teoremas, demonstrações e corolários.

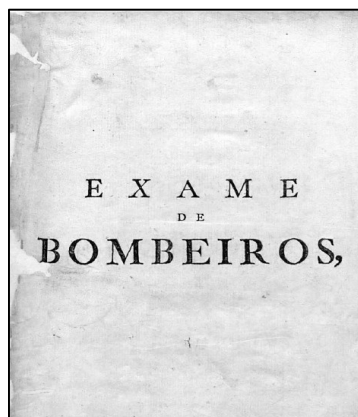
Monteiro (2015) ressalta que apesar dos livros possuírem a essência voltada a objetivos militares, os livros também tinham objetivos didáticos pedagógicos. O autor afirma que o *Exame de Artilheiros* tinha como foco principal a Geometria e o *Exame de Bombeiros* tinham como focos principais a Geometria e a Trigonometria. Seguem nas Figura 1 e Figura 2, as capas dos livros utilizados como alicerce para essa pesquisa.

Figura 1 – Exame de artilheiros



Fonte: Alpoim, 1744.

Figura 2 – Exame de Bombeiros



Fonte: Alpoim, 1748.

Notamos que Alpoim se preocupava com o público que iria ler os seus livros, que são os artilheiros e os bombeiros.

3.3 Exame de Artilheiros

Sobre o *Exame de Artilheiros*, o livro possui 236 páginas e é dividido em três partes: Tratado de Aritmética, Tratado de Geometria e o Tratado de Artilharia, sendo o último composto por quatro apêndices. O Tratado de Aritmética está localizado nas páginas 1 a 33, o Tratado de Geometria entre as páginas 35 e 57 e o Tratado de Artilharia entre 59 e 91. O terceiro tratado é constituído de quatro apêndices das páginas 193 a 236 e as páginas não citadas são ocupadas por ilustrações de materiais de guerra e tabelas.

Segundo Meneses (2007), a essência do livro *O Exame de Artilheiros* era a Geometria, porém, no primeiro capítulo, o livro prioriza a Aritmética, tendo em vista que os ensinamentos referentes à Geometria necessitam de um conhecimento aritmético, enfatizando as quatro operações fundamentais. Piva e Santos (2011) relatam também unidades de grandeza, frações e regra de três, como podemos ver na Figura 3. Além disso, Piva e Filgueiras (2011) afirmam que a Geometria encontrada aborda conceitos de ponto, linha e reta. Sobre o Tratado de Artilharia, temos que:

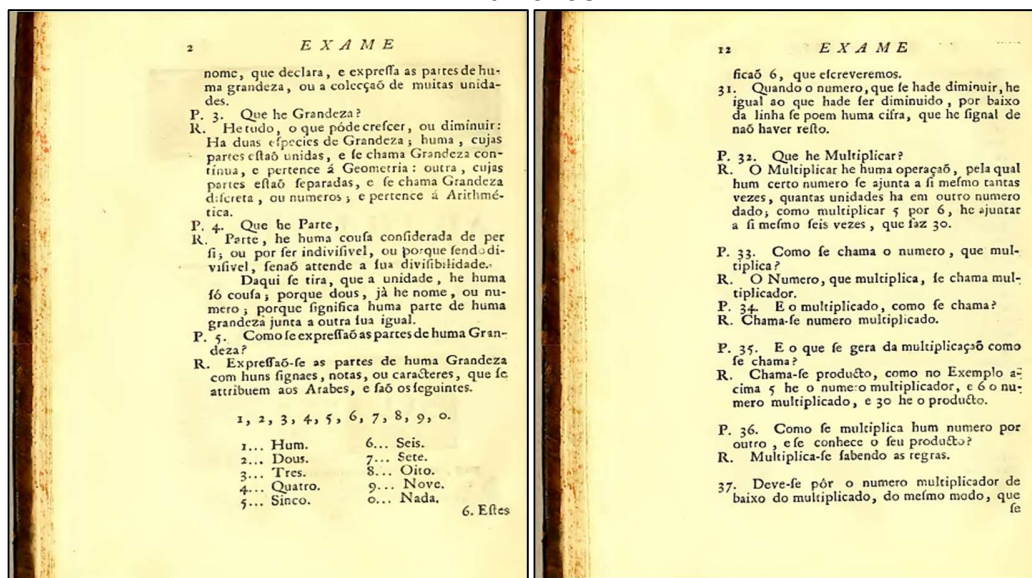
Os quatro *Apêndices* dizem respeito a assuntos específicos de Artilharia. Um deles em especial, o *Apêndice II*, aborda cálculos interessantes, como a determinação do número de balas de canhão

que se podem empilhar em pirâmides de base triangular, quadrada ou retangular, em que Alpoim lança mão de conceitos de análise combinatória explicados por meio de cálculos de frações, de forma a serem mais facilmente compreendidos por seus alunos (PIVA; FILGUEIRAS, 2011, p. 126).

A forma didática abordada no livro, de acordo com Piva e Santos (2011), é baseada no método de perguntas e respostas que foram elaboradas e respondidas pelo próprio autor. Encontramos em Piva e Santos (2011, p. 110) uma crítica realizada por Paulo Pardal sobre o *Exame de Artilheiros*:

Paulo Pardal ao fazer uma análise crítica do *Exame de Artilheiros*, reconheceu a importância histórica da obra cultural técnica no Brasil, ressaltando que a matemática utilizada no livro era elementar, tendo em vista que a finalidade do mesmo era servir de instrumento para a prática de técnicos de artilharia.

Figura 3 – Conceitos aritméticos encontrados no Tratado I do livro *Exame de Artilheiros*



Fonte: Alpoim, 1744, p. 3 e p. 12.

Valente (1999) salienta que o prosseguimento abordado por Alpoim era da seguinte forma: definição, explicação e exemplo numérico, o qual era bastante comum na época, pois os livros continham pouca notação matemática.

Piva e Santos (2011, p. 111) definem Artilharia como “uma arte com muitas regras e que possui muitos instrumentos de fogo como peças, morteiros e petardos que seriam úteis na guerra”. Além disso, segundo os autores, Alpoim utilizou o

método axiomático em boa parte dos problemas de Geometria, ou seja, partiu de um sistema lógico sem precisar fazer uso de provas. Como um panorama para melhorar a pontaria e calcular a quantidade de pólvora necessária para fazer os cartuchos que carregavam armas, a matemática abordada por Alpoim era composta por exemplos práticos.

3.4 Exame de Bombeiros

A finalidade do livro era o ensino e a preparação dos soldados da *Aula de Terço e Fortificações* do Rio de Janeiro. Amati (2010) nos apresenta uma carta de oferecimento para Gomes Freire de Andrada (1757-1817) pois, além de ter sido professor de engenharia em Portugal, foi governador no mesmo período que Alpoim foi professor da *Aula de Terço*. Alpoim destaca Gomes Freire por seu conhecimento, sua capacidade e competência tanto em batalha como a serviço do rei.

O *Exame de Bombeiros* possui 396 páginas e o livro é composto por dez tratados. Assim como o *Exame de Artilheiros*, o livro foi abordado no formato de perguntas e respostas, segundo Meneses (2007), o conteúdo foi mais aprofundado e havia uma preocupação maior com o rigor. Amati (2010) classifica esses dez tratados como: Geometria, Nova Trigonometria, Longemetria, Altimetria, Morteiros, Morteiros pedreiros, Obus, Petardos, Baterias de morteiros (acrescido de dois apêndices) e Fogos de artifício (acrescido de dois apêndices).

Valente (1999) conclui que:

Pela análise desses dois compêndios concluímos que os livros de Alpoim eram mais preocupados em instruir como proceder dentro das atividades militares do que criar seqüências de princípios, exemplos, generalização, exercícios. No entanto podemos perceber a utilização de conceitos geométricos em sua obra, mesmo que sob o título de Geometria prática. O fato importante que podemos observar nessas obras é que a Geometria, objeto de nosso estudo no Brasil, já se fazia presente e necessária desde um longo tempo e, mais do que isso, “esses textos representam a fonte mais remota para investigação das origens da matemática escolar no Brasil” (VALENTE, 1999, p. 60).

Segundo Amati (2010), Alpoim passou por algumas dificuldades na *Aula de Terço*, como problemas com falta de material, por haver restrições com materiais de consulta pelo fato de que alguns livros só podiam circular em domínios

portugueses com permissão, e a fragilidade das formações dos soldados limitava o seu curso, pois não permitia que utilizasse materiais em outras línguas. O autor complementa que além de Alpoim ensinar o processo matemático empregando noções de Geometria ou de Álgebra, ensina como construir o instrumento e nota que o conhecimento matemático está aplicado durante todo o processo pois é possível verificar a sua preocupação com a aprendizagem dos seus alunos.

Amati (2010) nos apresenta alguns processos de construções de instrumentos encontrados no *Exame de Bombeiros*, como a sua esquadra diretora, um petipé³, e no tratado sobre morteiros, descreve as bombas e ensina o método prático para separá-las e classificá-las pelos diferentes tamanhos. (AMATI, 2010, p. 34)

Em busca de relacionar as obras de Alpoim com *Os Elementos de Euclides*, para a próxima seção, apresentaremos a vida e a principal obra de Euclides, bem como a relação das obras de Alpoim com o livro grego.

³ Tipo de régua com divisões.

4. OS ELEMENTOS DE EUCLIDES E OS PROBLEMAS DOS LIVROS DE ALPOIM

Nesta seção, abordaremos sobre Euclides e sua principal obra: *Os Elementos*. Apresentaremos uma breve revisão sistemática literária com base nos anais do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM), nos quais buscamos trabalhos que relacionam as obras de Alpoim com a obra grega, e, por fim, uma análise de alguns problemas do *Exame de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros*.

4.1 Os Elementos de Euclides

O pouco que sabemos sobre Euclides é devido a outros autores, principalmente Proclus (411 – 465). Nobre (2009) apresenta três grandes hipóteses sobre sua biografia: a primeira é que Euclides vivera entre 325 a.E.C e 265 a.E.C., em Alexandria, e que realmente escreveu tanto *Os Elementos* como outras também; outra hipótese é que Euclides fora líder de um grupo de matemáticos de Alexandria e que escreveram juntos vários trabalhos, porém, eram assinados em seu nome; e a última é que as obras cuja autoria tem seu nome foram escritas por um grupo de matemáticos que adotara o nome Euclides em referência a Euclides de Mergara, que vivera cerca de 100 anos antes. Euclides (2009, p. 41) afirma que “Acontece com Euclides o mesmo que com outros matemáticos da Grécia Antiga: restam-nos apenas macérrimas informações sobre a vida e a personalidade do homem”.

De acordo com Berlinski (2018), Euclides de Alexandria nascera em IV a.E.C e morrera no século III a.E.C., possivelmente Euclides estudou na Academia de Platão onde foi influenciado por seus seguidores e lecionou na Biblioteca de Alexandria, fundada por Ptolomeu I e, como professor, Euclides foi urbano, prestativo e delicado. Ainda diz que:

O tema de Euclides é a geometria, o negócio dele é a prova, e Euclides não foi um matemático disposto a dar um passo para trás para pegar a si mesmo no ato de pisar atrás. Que seus argumentos eram válidos, ele não tinha dúvidas, mas não tinha qualquer interesse no que os tornava válidos. (BERLINSKI, 2018, p. 15)

Segundo Garbi (2010), Euclides, além de ensinar na Biblioteca de Alexandria, escreveu também os seus trabalhos, dentre eles temos: Falácias (pseudaria), Dados, Sobre Divisões (de figuras), Porimos, Superfícies que são Lugares Geométricos, Cônicas, Fenômenos, Óptica e Elementos da Música e a sua principal obra na qual este trabalho irá explorar uma pequena parte do conteúdo que foi *Os Elementos*.

Um dos fatos que mais impressiona na História da Matemática, em relação a seus diversos autores e aos desmembramentos de suas pesquisas e opiniões, citações e norteamientos, é a atenção especial dado ao livro *Os Elementos*, de Euclides. A obra, tantas vezes citada e estudada, continua a abrigar teores os mais elevados, a estruturar a propagação do fazer matemático no mundo grego antigo. (LEÃO, 2017, p. 25)

Segundo Berlinski (2018), Euclides projetou que suas provas fossem baseadas através de suas noções e definições comuns. Frequentemente suas demonstrações são induzidas às suas próprias noções comuns e, em muitas demonstrações, às suas definições ou às ideias que decorrem naturalmente de suas definições.

Além disso, existem as ideias de Euclides sobre o espaço e a ação humana e a exaltação da geometria, uma característica tão chamativa de seus pensamentos. (BERLINSKI, 2018, p. 16)

Para Eves (2004, p. 169), não há dúvidas de que Euclides teve que dar muitas informações e aperfeiçoar outras tantas, mas o grande mérito do seu trabalho reside na seleção feliz de proposições e no seu arranjo feliz numa sequência lógica, presumivelmente a partir de umas poucas suposições iniciais.

De acordo com Barbosa, Galvão e Santos (2015), *Os Elementos* foi a primeira obra a usar de uma forma rigorosa o método de dedução e axiomático, que provavelmente teria sido idealizado por Aristóteles.

Segundo Bicudo (2011),

(...) O tratado *Éléments des Mathématiques* não se destina a ensinar àqueles que não sabem, mas a mostrar, a quem já possua sólido conhecimento matemático, como a matemática pode ser desenvolvida, com base em uma lógica de regras bem estabelecidas, a partir de um pequeno núcleo de noções e proposições aceitas de início.

De acordo com Euclides (2009), o conhecimento matemático grego é influenciado pelos egípcios e os babilônicos, porém, os gregos foram além e transformaram esse tal conhecimento em uma ciência dedutiva que é um dos passos mais importantes da história cultural devido a não encontrar documentos egípcios ou babilônicos que esbocem qualquer demonstração semelhante a algo conceitual.

Segundo Roque (2012), apesar de Euclides não deixar visível a utilização de régua e compasso na sua obra, é atribuído as construções realizadas com o auxílio desses materiais. Há diversos indícios, mas a principal explicação para o uso desse material foi supostamente a ordem pedagógica.

De acordo com Garbi (2010), *Os Elementos de Euclides* é composto por 13 livros e tratava-se de um material didático para o ensino de Geometria para iniciantes. O autor ainda ressalta que nenhum outro matemático conseguiu êxito comparável a Euclides. Euclides (2009) esclarece que o título referente à principal obra de Euclides possui um sentido técnico.

Garbi (2010, p. 59) ressalta:

Os Elementos foram agrupados em 13 livros, na realidade 13 rolos, já que esse era o formato das obras escritas de então. São, ao todo, 465 proposições (podem chegar a 470, dependendo da origem da fonte), precedidas por definições, postulados e noções comuns.

Em Roque (2012, pp. 163-164), encontramos a organização composta no livro da seguinte forma:

- Livro I: Referente à geometria plana.
- Livro II: Voltada da mesma forma para a geometria plana e que contém a suposta “álgebra geométrica” dos gregos.
- Livros III e IV: Propriedades de círculos e figuras circunscritas em um círculo.
- Livro V: Teoria das proporções de Eudoxo.
- Livro VI: Aplicações do livro anterior à geometria.
- Livros VII a IX: Estudo dos números inteiros, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas.
- Livro X: propriedades e classificações das linhas incomensuráveis.

Livros XI a XIII: Geometria espacial, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares.

As obras, no entanto, tinham um modo peculiar para abordar o ensino, Euclides (2009) relata que o método de abordagem de ensino de algumas obras na Antiguidade e na Idade Média era através do “Comentário”. Esse método de ensino foi herdado dos padres e dos escritores árabes e utilizado como principal instrumento pedagógico. O autor ressalta que Proclus foi considerado o principal escoliasta⁴ da obra *Os Elementos*, o próprio ressalta que “poder-se-ia dizer que ele está para este como Alexandre de Aphrodisia, para Aristóteles” (Euclides, 2009, p. 63). Porém, Proclus não foi o único, antes dele, houve outros. Entre os mais importantes, temos: Herão de Alexandria, Porfírio, Pappus e posterior a Proclus, teremos Simplicio.

É evidente o impacto da obra de Euclides na História da Matemática, por tudo que pode ser abordado na sua obra. Para a próxima subseção, faremos uma breve Revisão Sistemática da Literatura (RSL) nos anais do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) entre os anos de 1995 e 2021, com a finalidade de responder ao questionamento: o que está sendo abordado sobre as possíveis relações entre as obras *Exame de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros* de Alpoim e *Os Elementos de Euclides* em trabalhos de História da Matemática? Essa RSL tem como objetivo apresentar produções referente a Alpoim e às suas obras: *Exame de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros*.

4.2 Revisão Sistemática Literária (RSL)

Para localização e seleção das pesquisas, foram utilizados os anais das edições do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM), entre os anos de 1995 e 2021. O SNHM é um evento que prioriza a divulgação de estudos e pesquisas sobre História da Matemática a professores dos vários níveis educacionais, alunos de graduação e pós-graduação, pesquisadores em História da Matemática e História da Educação Matemática, bem como a todos os interessados nessa temática (SNHM, 2021, *on-line*). Os anais do evento possuem as pesquisas

⁴ Comentador.

apresentadas no evento e, por considerarmos tais pesquisas bem-conceituadas, fizemos a escolha dessa fonte para a busca de trabalhos.

Com essa RSL, encontramos diversos trabalhos relacionados a Alpoim e as suas obras, porém, apenas um trabalho apresenta uma relação entre os problemas dos livros e *Os Elementos de Euclides*. Por se tratar de anais, os trabalhos foram baixados em formato PDF, e as palavras-chave para a pesquisa foram: Alpoim, Artilheiros e Bombeiros.

Figura 4 – Gráfico das buscas encontradas nos anais do SNHM entre os anos de 1995 e 2021.



Fonte: Autor, 2022

No I SNHM, realizado em Recife, Pernambuco, no ano de 1995, ao realizar as buscas das palavras-chave, não foi encontrado trabalho referente a Alpoim e as suas obras.

O II SNHM, realizado em Águas de São Pedro, São Paulo, em 1997, aconteceu junto com o II Encontro Luso-brasileiro de História da Matemática. Ao realizar as buscas das palavras-chave no documento, foram encontrados dois trabalhos: *Contribuição dos militares portugueses para a introdução da cultura Matemática no Brasil*, de Belchior Vieira; e *O Iluminismo e seus reflexos na Matemática luso-brasileira*, de Ubiratan D'Ambrosio.

No III SNHM, realizado em Vitória, Espírito Santo, no ano de 1999, ao realizar uma pesquisa no documento, foram encontrados dois trabalhos que são comunicações orais referentes a nossa busca: *Livros e bibliotecas no Brasil colônia*,

de Ricardo de Almeida Mori e Hermes Polece Fileti; e *A Aritmética presente na obra “Exame de Artilheiros” (1744) de José Fernandes Pinto Alpoim*, de Maria Estela Silveira Campos.

No IV SNHM, realizado em Natal, Rio Grande do Norte, no ano de 2001, ao realizar uma pesquisa no documento, foram encontrados dois trabalhos, uma conferência plenária e uma comunicação científica referentes a nossa busca: *Matemática Brasileira: Histórias e relações políticas*, de Circe Mary Silva da Silva; e *Matemática para engenheiros no século XVIII em Portugal: Análise da obra de Manoel de Azevedo Fortes*, de Ducylene Maria Ribeiro.

No V SNHM realizado em Rio Claro, São Paulo, no ano de 2003, ao realizar uma pesquisa no documento, foram encontrados dois trabalhos, uma conferência e uma comunicação científica: *A transferência de conhecimento matemático para a América Latina: Um estudo de dinâmica cultural*, de Ubiratan D'Ambrosio; e *Lógica racional, geométrica e analítica (1774), de Azevedo Fortes e Exame de Artilheiros (1744) de Alpoim – alguns encontros*, de Dulcyene Maria Ribeiro.

Nos VI e VII SNHM, realizados em Brasília, Distrito Federal, e Guarapuava, Paraná, nos anos de 2005 e 2007, respectivamente, não foi encontrado trabalho em relação a busca sobre Alpoim e suas obras.

No VIII SNHM, realizado no Belém, Pará, no ano de 2009 ao realizar uma pesquisa no documento, foram encontrados dois trabalhos: *A Matemática nos escritos de Diogo da Silveira Veloso: um dos engenheiros militares que ensinou no Brasil no século XVIII*, de Dulcyene Maria Ribeiro; e *Análise Matemática do Exame de Bombeiros (José Fernandes Pinto Alpoim)*, de Rafael Tavares Juliani.

Nos IX e X SNHM realizados em Aracajú, Sergipe e Campinas, São Paulo, nos anos de 2011 e 2013, respectivamente, não foi encontrado trabalho em relação a busca sobre Alpoim e suas obras.

No XI SNHM, realizado em Natal, Rio Grande do Norte, no ano de 2015, ao realizar uma pesquisa no documento, foi encontrado apenas um trabalho referente a nossa busca: *Descrição das dissertações em história e epistemologia da matemática que abordam conteúdo do Ensino Médio, produzidas no Brasil entre 1990 e 2010*, de Rafael José Alves Rego de Barros e Iran Abreu Mendes.

Nos XII e XIII SNHM, realizados em Itajubá, Minas Gerais e Fortaleza, Ceará, nos anos de 2017 e 2019, respectivamente, não foi encontrado trabalho em relação a busca sobre Alpoim e suas obras.

Por fim, XIV SNHM, realizado em Uberaba, Minas Gerais, no ano de 2021, foi encontrado apenas um trabalho referente a nossa busca: *A escrita da História da Matemática. Origem e institucionalização na Comunidade Internacional. Primórdios no Brasil*, de Sergio Nobre.

4.2.1 Sobre as pesquisas encontradas

Agora que encontramos as pesquisas relacionadas às palavras-chave Alpoim, Artilheiros e Bombeiros, vamos conhecer o conteúdo dos trabalhos.

No trabalho de Belchior (1997), o autor aponta dois fatores que trouxeram o ensino da Matemática no Brasil por volta da metade do século XVII: a primeira era a necessidade imediata de técnicos em engenharia capazes de construir fortificações em lugares mais vulneráveis para defender o enorme território e a segunda era a falta de um ensino universitário no Brasil. O autor ressalta que apesar de o ensino militar ser uma prioridade, o ensino superior era lento ou até proibido. Ele explica como era a caracterização do ensino militar em Portugal nos séculos XVII e XVIII, e as academias e as aulas militares no Brasil-Colônia nos séculos XVII e XVIII. Belchior (1997) explica que em 19 de agosto de 1738 foi criada uma aula de artilharia no curso de *Terço de Artilharia do Rio*, e é para essa aula que foi designado José Fernandes Pinto Alpoim. É também nessa época que Alpoim cria os seus dois trabalhos: *Exame de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros*. Belchior (1997) conclui que a compreensão matemática introduzida no Brasil pelos portugueses foi com a finalidade de defesa dos interesses em sua colônia, o que se tornou um fator decisivo.

A obra de D'Ambrosio (1997) não remete em si a Alpoim e as suas obras, mas contém notas de rodapé, sem se aprofundar. O autor relata uma relação interessante entre a obra *O Verdadeiro Método de Estudar*, de Luis Antonio Verney (1713 – 1793), publicado em 1746, e o ano de publicação do *Exame de Artilheiros*

e *Exame de Bombeiros*, possivelmente podendo ser entre os intervalos de publicações dos livros.

O trabalho de Mori e Filete (1999) restaura alguns fragmentos da história do livro na época do Brasil colônia, em especial os livros de Matemática abordando assuntos como as bibliotecas religiosas, o comércio de livros, a censura, as tentativas de estabelecer uma tipografia, relatando a importância dos livros *Exames de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros*. Os autores afirmam que são os primeiros livros de Matemática escrita no Brasil. Eles também ressaltam que na verdade o *Exame de Bombeiros* foi impresso em Madrid, por Francisco Martinez Abade, em 1748, e o *Exame de Artilheiros* foi impresso em Lisboa, por Afonso Taunay, em 1744.

A obra de Campos (1999) apresenta a Aritmética encontrada no *Exame de Artilheiros*, mais precisamente no seu primeiro tratado. Antes de abordar sobre a Aritmética no livro, o autor cita algumas informações sobre a vida do escritor e o método de abordagem da sua obra. Assim como em todo livro, Campos (1999) afirma que o *Tratado I* da obra é desenvolvida com perguntas seguidas de respostas, concluindo que toda essa parte Aritmética é necessária para a compreensão os tratados posteriores, que são os de Geometria e o de Artilharia.

A obra de Silva (2001) apresenta concepções da História da Matemática no Brasil destacando eventos políticos que contribuíram para o desenvolvimento desta ciência no país durante os séculos XIX e XX. O trabalho possui uma breve citação referente a Alpoim, que é uma tábua de multiplicação usada com frequência em livros de Aritmética no século XIX, inclusive no livro *Exame de Artilheiros*. A autora ressalta que essa tabuada de multiplicação é a primeira figura do livro e que Alpoim salienta a necessidade de memorizar essa tabuada.

Em Ribeiro (2001), assim como o trabalho do parágrafo anterior, o trabalho não aborda exclusivamente sobre Alpoim ou suas obras, o trabalho relata a formação dos engenheiros em Portugal no início do século XVIII em Portugal, e, por consequência, os engenheiros que trabalharam no Brasil, inclusive Alpoim, que de acordo com Ribeiro (2001), seu livro foi baseado no estudo da obra *O Engenheiro Português*, de Manoel de Azevedo Fortes.

D'Ambrosio (2003) explora algumas perspectivas da introdução da matemática europeia nas Américas pelos conquistadores e colonizadores espanhóis e portugueses, buscando justificar como e por que isto foi feito e, depois, sua absorção pelos países independentes, mais exclusivamente na América Latina. O autor mostra que as disputas territoriais se tornaram uma preocupação tanto para a Espanha como para Portugal, para defender as terras, ambos os países passaram a solidificar a formação militar e no Brasil, um dos principais engenheiros foi Alpoim que escreveu suas duas obras que o autor chama de Matemática Militar, e escritos por perguntas e respostas.

O trabalho de Ribeiro (2003) aborda uma possível ligação entre os trabalhos *Racional, Geométrica e Analítica* (1744), de Azevedo Fortes, e *Exame de Artilheiros* (1774), de Alpoim. Para isso, o autor realizou uma análise das obras e uma parte historiográfica entre os dois autores. Diante dessa análise, Ribeiro (2003) conclui que há duas hipóteses possíveis: a primeira que Alpoim foi aluno de Fortes, por isso que existe algumas partes em comum nas obras; ou que os dois possivelmente foram companheiros em alguns trabalhos e, em um gesto de amizade, Fortes cedeu algumas de suas notas a seu colega, apesar de as duas obras serem datadas do mesmo ano. Porém, em relação à pesquisa, não foi encontrado no trabalho de Ribeiro nenhuma relação com *Os Elementos de Euclides*.

Ribeiro (2009) apresenta os manuscritos do engenheiro militar Diogo da Silveira Veloso (-1750?). O engenheiro ocupou postos no Brasil e desempenhou trabalhos de arquitetura e engenharia na Capitania de Pernambuco. Referente à busca, Alpoim e suas obras estão nas notas de rodapé no trabalho de Ribeiro, contendo relações entre os trabalhos de Diogo da Silveira Veloso e de José Fernandes Pinto Alpoim. Em *Opúsculos Geométricos* (1732), sobre a obra, há referências a Medrano e seu livro *Infine*, também citado por Alpoim no *Exame de Bombeiros*, a Marino Geraldo, também encontrado no *Exame de Bombeiros* sem informações mais precisas, e Jeronimo Cataneo que Alpoim também o citou e relacionou ao livro *Exame de Bombas*. Por fim, Ribeiro (2009) destaca a diferença entre as obras de Veloso e Alpoim. Nas obras de Veloso, o autor afirma que o ensino

da Álgebra, além de necessário, também era praticado, e, em Alpoim, a Álgebra aparece nos ensinamentos sobre artilharia.

Juliani (2009) apresenta uma análise matemática do livro *Exame de Bombeiros* (1748), o autor afirma que Alpoim apresenta ser um grande conhecedor de matemática no seu tempo, citando tanto matemáticos da sua época, como anteriores a ele. O trabalho de Juliani realiza uma análise de como é a escrita e os métodos encontrados na obra de Alpoim e nos apresenta constantemente *Os Elementos de Euclides* no *Exame de Bombeiros*. Os problemas relacionados com *Os Elementos de Euclides* veremos no decorrer deste trabalho, mas citaremos quais problemas são encontrados no trabalho de Juliani (2009), pois, segundo o autor, Alpoim utiliza como base *Os Elementos* de Euclides. Temos a definição de ponto que é igual a de Euclides com um acréscimo de explicação, a definição de linha também contém um acréscimo, como se dividir uma reta ao meio e dividindo um segmento de reta em três ou quatro partes se apoiando na obra grega. Juliani (2009) diz que apesar de Alpoim não apresentar as demonstrações, deixa escrito onde encontrá-las, o autor destaca que seus problemas são apresentados para fins militares. Além de Euclides, há outras referências que podem ser encontradas na obra que serão vistas posteriormente.

O trabalho de Barros e Mendes (2015) é um recorte de uma pesquisa de doutorado, que estuda dissertações e teses em história e epistemologia da matemática no período entre 1990 e 2010. Para o trabalho, foram selecionadas nove dissertações que abordam conteúdo do Ensino Médio. O objetivo do trabalho é descrever as dissertações com o intuito de servir como base para analisar quais possuem potenciais para explorações didáticas das informações contidas nas mesmas, em atividades para o Ensino Médio. Referente à busca, eles relatam uma dissertação escrita por Bem Hur Mormello, defendida em 2010 na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), orientada pelo professor Rogério Monteiro da Siqueira, com título *O Ensino de Matemática na Academia Militar do Rio de Janeiro, de 1811 a 1874*. O trabalho apresenta conteúdos de Geometria plana em obras utilizadas no Ensino Militar no século XVIII, nessas obras, encontramos o *Exame de Artilheiros* e *Exame de bombeiros* que podem ser abordados no Ensino Médio.

Nobre (2021) relata sobre a História da Escrita da História da Matemática, os primórdios, o Renascimento Europeu e os primeiros ensaios de textos sobre História da Matemática, História da Matemática no Brasil, os primórdios e crescimento das atividades histórico/científicas e construindo a História da História da Matemática no Brasil, a contribuição acadêmica do Grupo de Pesquisa em História da Matemática da Universidade Estadual Paulista (Unesp) de Rio Claro para a historiografia da Matemática brasileira. Em relação à busca, o autor cita apenas Alpoim como um dos mais conhecidos pela comunidade de historiadores da matemática brasileira, junto com outros matemáticos.

Dentre os trabalhos encontrados nos anais das edições do SNHM entre os anos de 1995 e 2021, apenas um relata uma ligação entre uma das obras de Alpoim com *Os Elementos de Euclides*. Vários trabalhos destacam o quanto foi marcante suas obras no século XVIII e a importância da contribuição de Alpoim para a História da Matemática no Brasil. Essa RSL pode ser utilizada para analisar a influência dos portugueses nos primeiros passos da Geometria no Brasil. O objetivo dessa revisão no trabalho foi compreender as possíveis influências encontradas nos livros de Alpoim, principalmente as possíveis relações com *Os Elementos de Euclides*.

A seguir, faremos uma breve análise e resolução de alguns problemas que estão nas obras de Alpoim relacionados com *Os Elementos de Euclides*.

4.3 Alguns problemas

Os problemas escolhidos para este trabalho, como dito anteriormente, foram aqueles que possuem uma relação com *Os Elementos de Euclides*. Dentre eles, primeiramente no *Exame de Artilheiros*, temos: definição de ponto, definição de reta, retas paralelas e extremos de uma reta. Por último, no *Exame de Bombeiros*, temos: como dividir uma reta ao meio, definição de retas perpendiculares, definição de um triângulo retilíneo, definição de triângulo retângulo, definição de uma circunferência de um círculo, a divisão de uma reta em vários segmentos iguais para realizar a construção de um petipé e lançamento de bombas pela semelhança de triângulos.

Vale lembrar que os problemas encontrados e analisados nesse trabalho foram traduzidos do português de Portugal para o português do Brasil com o intuito de ser mais acessível para os leitores.

Sobre a estrutura do livro, Amati (2010) argumenta que a linguagem encontrada tem como objetivo oferecer uma base matemática aos estudantes do *Terço*, já que sua formação era precária, com isso, Alpoim utilizou um método prático baseado em perguntas e respostas.

Em Alpoim (1744, p. 36), temos a seguinte pergunta: “Qual a origem da Geometria?” O autor nos explica que a Geometria é tão antiga quanto o mundo e que se desenvolveu com os chineses e os egípcios, porém a civilização que mais se destacou foram os gregos, onde Euclides possivelmente “colheu” ideia de todos que compõe sua obra *Os Elementos*. Com isso, notamos uma certa admiração de Alpoim pela obra grega que culminará como auxílio para resolver os problemas em suas obras.

De acordo com Juliani (2009), sobre os conceitos de Geometria, Alpoim utiliza *Os Elementos de Euclides* como sua base. Inicialmente, Alpoim traz as definições, assim como Euclides, como as definições de ponto e reta com alguns acréscimos.

P. 99. Que é ponto? (MENESES, 2007, p. 25 *apud* ALPOIM, 1744, p. 36)

R. 100. Ponto é o que não tem partes. O ponto se supõe, e considera, como indivisível: Logo não têm partes, em que se possa dividir. Praticamente, é o final, que não se opõe com o bico de uma pena, ou ponta de um compasso como A. (MENESES, 2007, p. 25 *apud* ALPOIM, 1744, p. 36)

Como foi dito sobre a semelhança com o clássico grego, em Euclides (2009, p. 97), a tradução da obra, temos a definição de ponto como: “Ponto é aquilo de que nada é parte”. Nota-se a semelhança e o complemento feito por Alpoim a respeito da definição de ponto.

O mesmo procedimento acontece com a definição de reta:

P. 101. Que é linha? (MENESES, 2007, p. 25 *apud* ALPOIM, 1744, p. 36)

R. Linha geralmente tomada, é um comprimento sem largura, nem altura, como a linha AB, que sendo extensa de A para B, não tem largura. (MENESES, 2007, p. 25 *apud* ALPOIM, 1744, p. 36)

Em Euclides (2009, p. 97) encontramos a definição de reta como: “E linha é comprimento sem largura”, definições semelhantes com a de Alpoim contendo acréscimos, como por exemplo a “linha AB”. Juliani (2009) menciona que a definição de linha reta é a mesma que aparece em traduções latinas e português da obra grega, onde a reta não é infinita.

Para definir extremos de uma reta, Alpoim (1744) traz:

P.103. Que são extremos de uma linha? (MENESES, 2007, p. 25 *apud* ALPOIM, 1744, p. 37)

R. São pontos, como o ponto A, e o ponto B. (MENESES, 2007, p. 25 *apud* ALPOIM, 1744, p. 37)

Figura 5 – Construção dos extremos de uma reta feita por Alpoim



Fonte: Alpoim, 1744, p. 36.

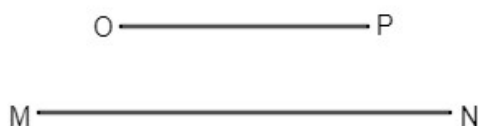
Euclides (2009, p. 97) define como: “Extremidades de uma linha são pontos”. As definições são as mesmas com uma escrita diferente, isso só representa uma mudança na escrita matemática na escrita entre Alpoim e o encontrado em *Os Elementos*.

Meneses (2007) afirma que outros problemas realizados por Alpoim exploram as noções de retas paralelas, círculo, semicírculo, ângulos, divisão de ângulos, triângulos retilíneos, triângulos isósceles etc.

P. 117. Que são linhas paralelas? (MENESES, 2007, p. 27 *apud* ALPOIM, 1744, p. 40)

R. Paralelas, são linhas, que em todas as suas partes estão distantes igualmente entre si, como as linhas, MN, OP, que ainda que se prolongue, jamais poderão encontrar. (MENESES, 2007, p. 27 *apud* ALPOIM, 1744, p. 40)

Figura 6 – Construção de retas paralelas realizada por Alpoim



Fonte: Alpoim, 1744, p. 46.

Euclides (2009, p. 98) define como: “Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas, ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram”.

Meneses (2007) destaca a importância das construções geométricas apresentadas no livro, cujo principal objetivo era oferecer assistência para que os estudantes desenvolvessem conhecimentos adequados às práticas de guerra. O autor ainda complementa que tais construções geométricas supracitadas, como a construção de um triângulo isósceles que é associado a construção de um nível, são importantes ainda nos dias de hoje, condizente com as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) da matemática:

O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. (BRASIL, 1998, p. 51)

Em Piva e Santos (2011, p.111), Alpoim explica em seu livro que *Artilharia* “é uma arte com muitas regras e que possui muitos instrumentos de fogo como peças, morteiros e petardos que seriam úteis na guerra”. A terceira parte do livro salienta os materiais necessários para a artilharia: “um estojo que contenha cinco agulhas de ferro, um nível, uma esquadra, um calibre, uma régua, um tira-linhas, uma pedra de riscar, um lápis, um furador, tesoura etc.” (VALENTE, 1999, p. 55)

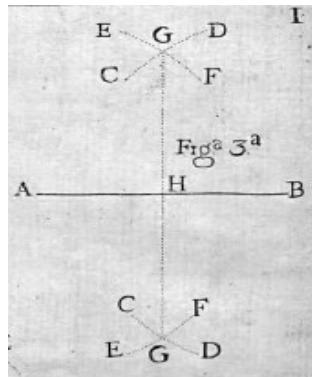
Para uma análise dos problemas encontrados no *Exame de Bombeiros*, Juliani (2009) considera o livro uma continuação do *Exame de Artilheiros*, contendo uma matemática mais elaborada, como o livro mencionado anteriormente. O *Exame de Bombeiros* possui influência da obra *Os Elementos de Euclides*, como por exemplo no procedimento que ele ensina a dividir uma reta no meio. A pergunta e a resposta foram traduzidas pelo autor deste trabalho.

P. Como se divide uma reta pelo meio? (ALPOIM, 1748, p. 2, tradução nossa)

R. Desta forma: Deixe a reta AB, que queremos dividir, ser dividida em duas partes iguais: Colocaremos uma ponta do compasso em A, e com uma abertura maior que a metade da reta, descreveremos os arcos EF, para um, e para o outro; e com esta mesma abertura, passaremos o compasso, para B, e também descreveremos os arcos CD, que se cruzarão com o primeiro, nos pontos G, G; e tomando a linha GG desses pontos, ela cortará AB em H, e AB será

dividido em duas partes iguais AH, AH. Eucl. Prop. 10. 1. (ALPOIM, 1748, p. 2, tradução nossa)

Figura 7 – Construção para se dividir uma reta no meio realizada por Alpoim



Fonte: Alpoim, 1748, p. 2.

Nota-se que para o problema de dividir a reta no meio, ele utiliza a proposição 10 do livro I da obra *Os Elementos de Euclides*, que é “Cortar em duas a reta limitada dada” (EUCLIDES, 2009, p. 106) o passo a passos veremos abaixo:

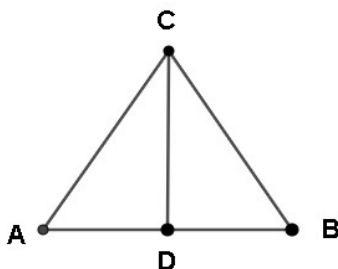
Seja a reta limitada dada AB; é preciso, então, cortar a reta limitada AB em duas.

Fique construído sobre ela o triângulo equilátero ABC, e fique cortado o ângulo sob ACB em dois pela reta CD; digo que a reta AB foi cortada em duas no ponto D.

Pois, como AC é igual à CB, e a CD é comum, então, as duas AC, CD são iguais às duas BC, CD, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ACD é igual ao ângulo sob BCD; portanto, a base AD é igual à base BD.

Portanto, a reta limitada dada AB foi cortada em duas no D; o que era preciso provar.

Figura 9 – Construção geométrica da proposição X do livro I dos *Elementos de Euclides*



Fonte: Euclides, 2009, p.106.

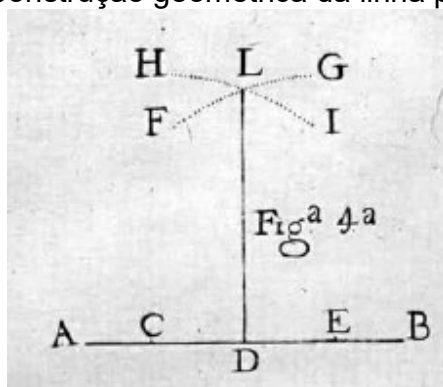
Outro procedimento de Alpoim que se assemelha a uma proposição da obra de Euclides é a da reta perpendicular, porém, segundo Juliani (2009), há uma certa

diferença. Euclides se baseia na igualdade dos ângulos adjacentes e chama esses ângulos iguais de ângulos retos, e Alpoim define através da inclinação, outro termo não definido, assumindo que perpendicular é uma reta que não se inclina para nenhum lado sobre uma outra reta. Veremos a seguir a explicação de Alpoim sobre linha perpendicular traduzido pelo autor deste trabalho:

P. O que é a linha perpendicular? (ALPOIM, 1748, p. 2, tradução nossa)

R. Linha perpendicular; a uma linha reta, que se encaixa sobre outra, sem inclinar, a nenhuma parte, como a linha reta LD, que caindo sobre AB, não se inclina nem para A nem para B, mas é plano sobre AB. Eucl. Def. 10. (ALPOIM, 1748, p. 2, tradução nossa)

Figura 8 – Construção geométrica da linha perpendicular



Fonte: Alpoim, 1744, p. 61.

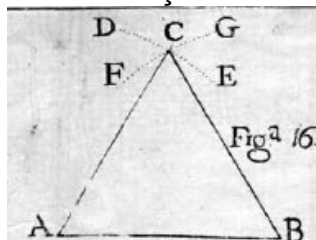
A resposta de Alpoim se assemelha com a definição 10 do livro I da obra *Os Elementos de Euclides*, que é “E quando uma linha reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou”. (EUCLIDES 2009, p. 97). Note que Euclides já menciona sobre ângulos retos, diferente de Alpoim que utiliza como uma reta que não se inclina.

Em Alpoim, encontramos também a definição dos triângulos que também se assemelha com a obra grega:

P. O que é um triângulo retilíneo? (ALPOIM, 1748, p. 28, tradução nossa)

R. Triângulo retilíneo, de figura plana; feito de três linhas retas, que eles chamam de Lados, como ABC, feito de três linhas retas AC, CB, BA (ALPOIM, 1748, p. 28, tradução nossa).

Figura 10 – Definição dos triângulos



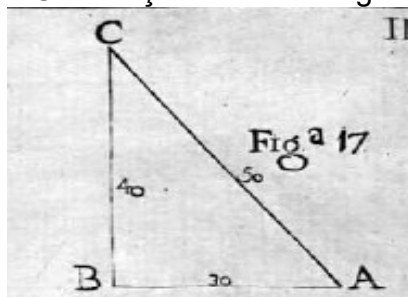
Fonte: Alpoim, 1748, p. 114.

É por meio da definição dos triângulos que Alpoim utiliza algumas definições encontradas em *Os Elementos de Euclides* para classificar os triângulos pelos lados como pelos ângulos como veremos a seguir. Alpoim utiliza das definições 20 e 21 do livro I, uma observação é que no *Exame de Bombeiros* as definições utilizadas possuem numerações diferentes do livro traduzido por Euclides (2009), pois Alpoim deve ter utilizado uma tradução mais antiga.

Na definição 20 do livro I temos: “E das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados diferentes.” (EUCLIDES, 2009, p. 98). Na definição 21 do livro I temos: “E, ainda das figuras triláteras, por um lado. Triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos.” (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Alpoim (1748), também define um triângulo retângulo, após isso, o autor nos explica a hipotenusa do triângulo retângulo dado os valores de dois lados, como podemos observar na figura a seguir:

Figura 11 – Construção de um triângulo retângulo



Fonte: Alpoim, 1748, p. 114.

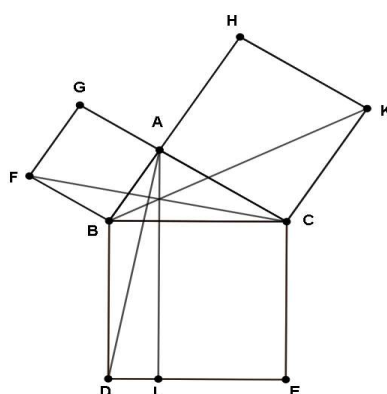
P. Como pesquisar, por números, a hipotenusa de um triângulo retângulo, dados os dois lados? (ALPOIM, 1748, p. 50, tradução nossa)

R. A maneira pela qual se busca é fácil, pois o quadrado da hipotenusa é igual aos quadrados dos outros dois lados, em forma, Eucl. suporte. 47, I, e só é necessário elevar ao quadrado os dois lados, cada um de perfil, cujos quadrados são formados, e assim se tira a raiz quadrada, que será o valor da hipotenusa. (ALPOIM, 1748, p. 50, tradução nossa)

Note que, para definir a hipotenusa do triângulo retângulo, Alpoim utiliza como suporte a Proposição 47 do livro I dos *Elementos de Euclides*. Alpoim utiliza como exemplo para esse problemas os valor 30 e 40 palmos, que são os lados para encontrar a hipotenusa com 50 palmos. A proposição 47 do livro I nos diz o seguinte: “Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto” (EUCLIDES, 2009, pp. 132-133), a demonstração veremos a seguir:

Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo BAC reto; digo que o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre as BA, AC. Fiquem, pois, descritos, por um lado, o quadrado BDEC sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC sobre as BA, AC, e, fiquem ligadas as AD, FC. E, como cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto, então, as duas retas AC, AG, não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a BA, e no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a CA está sobre uma reta com a AG. Pelas mesmas coisas, então, também a BA está sobre uma reta com a AH. E, como o ângulo sob DBC é igual ao sob FBA; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob ABC comum; portanto, o sob DBA todo é igual ao sob FBC todo. E como, por um lado, a DB é igual à BC, e, por outro lado, FB, à BA, então, as duas DB, BA são iguais às duas FB, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob DBA é igual ao ângulo sob FBC; portanto, a base AD [é] igual à base FC, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, o paralelogramo BL [é] o dobro do triângulo ABD; pois tanto têm a mesma base BD quanto estão nas mesmas paralelas FB, GC. [Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si;] portanto, também o paralelogramo BL é igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, então, sendo ligadas as AE, BK, será provado também o paralelogramo CL igual ao quadrado HC; portanto, o quadrado BDEC todo é igual aos quadrados GB, HC. E, por um lado, o quadrado BDEC foi descrito sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC, sobre as BA, AC. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC. Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar.

Figura 12 – Construção geométrica da proposição 47 livro I dos *Elementos de Euclides*.



Fonte: Euclides, 2009, p. 133.

Para saber o que é uma circunferência de um círculo, Alpoim (1748) utiliza da Definição 15 do Livro I, *dos Elementos*, depois, o autor define o que é um círculo.

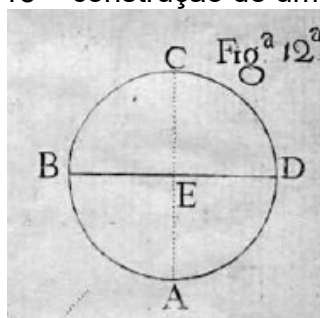
P. Qual é a circunferência de um círculo? (ALPOIM, 1748, p. 08, tradução nossa)

R. Circunferência de um círculo, existe uma linha curva, que circunda em um círculo, como ABCD, ... Eucl. Def. 15. 1 (ALPOIM, 1748, p. 08, tradução nossa)

P. O que é círculo? (ALPOIM, 1748, p. 08, tradução nossa)

R. Um círculo é uma figura plana, terminada por sua circunferência, dentro da qual há um ponto, a partir do qual todas as linhas retas tiradas da circunferência são iguais, ... (ALPOIM, 1748, p. 08, tradução nossa)

Figura 13 – construção de um círculo.



Fonte: Alpoim, 1748, p. 61.

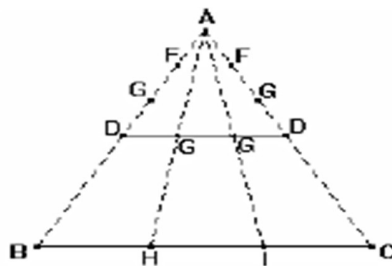
Na definição 15 do livro I, temos: “Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.” (EUCLIDES, 2009, p. 97)

Juliani (2009) diz que a diferença entre Alpoim e Euclides, é que o primeiro diversas vezes realiza definições usando termos que só serão explicados depois.

Dando continuidade aos estudos geométricos, Meneses (2007) mostra que o autor ensina a dividir uma reta em vários segmentos em partes iguais, associando futuramente esse procedimento com a construção do petipé:

Se o comprimento de uma linha reta, como BC, que queremos dividir em três partes iguais, sobre ela faremos um triângulo equilátero ABC; e do ponto A, tomaremos, a vontade, com um compasso, a três partes iguais AF, FG, GD, sobre os lados AB, AC, e do ponto D, ao ponto D, tiraremos a reta DD, e nela poremos as mesmas três partes DG, GG, GD: logo do ponto A, pelos ponto G, e G, da reta DD, tiraremos as retas AGH, AGU, que dividirão a reta dada BC, em três partes iguais BH, HI, IC: se for em 4, 5 ou mais partes, tomaremos sobre a reta AB, as mesmas partes iguais, fazendo as mesmas operações acima. (Eucl. Prop. 2. 6. Citado por ALPOIM, 1748, p. 16, tradução nossa)

Figura 14 – Divisão de uma reta em partes iguais realizadas por Alpoim.



Fonte: Alpoim, 1748, p. 57.

E o que faz o petipé de bombeiros? Segundo Alpoim (1748, p. 17):

P. O que faz o Petipé dos Bombeiros? (MENESES, 2007, p. 30, *apud* ALPOIM, 1748, p. 17)

R. Petipé simplesmente não é outra coisa mais, que uma linha reta, dividida certo número de partes iguais, que significa braças, varas, palmos etc. (MENESES, 2007, p. 30, *apud* ALPOIM, 1748, p. 17)

Para auxiliar na divisão de uma reta em partes iguais, Alpoim utilizou a proposição 2 e proposição 4 do livro VI dos *Elementos de Euclides* como nos explica Juliani (2009) e, além disso, apresenta como utilizar tal divisão para a construção do petipé dos bombeiros.

Na proposição 2 do livro VI temos o seguinte enunciado:

Caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e, caso os lados

do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo. (EUCLIDES, 2009, p. 233)

A demonstração, encontraremos em Euclides (2009, pp. 233-234) e veremos a seguir:

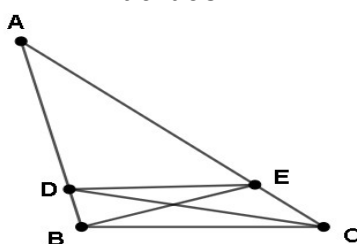
Fique, pois, traçada a DE, paralela a um dos lados, o BC, do triângulo ABD. Digo que, como a DB está para a DA, assim a CE para a EA. Fiquem, pois, ligadas às EB, CD.

Portanto, o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE; pois estão sobre a mesma base DE e nas mesmas paralelas DE, BC; mas o triângulo ADE é algum outro. E as iguais têm para a mesma a mesma razão; portanto, como o triângulo BDE está para o [triângulo] ADE, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE. Mas, por um lado, como o triângulo BDE para o ADE, assim o BD para o DA; pois, estando sob a mesma altura, a perpendicular traçada do E até a AB, estão entre si como as bases. Pelas mesmas coisas, então, como o triângulo CDE para o ADE, assim o CE para o EA; portanto, também como a BD para a DA, assim a CE para a EA.

Mas, então, fiquem cortados os dois lados AB, AC do triângulo ABC, em proporção, como a BD para a DA, assim a CE para a EA, e fique ligada a DE; digo que a DE é paralela à BC.

Tendo, pois, sido construídas as mesmas coisas, como a BD está para a DA, assim a CE para a EA, mas, por um lado, como a BD para a DA, assim o triângulo BDE para o triângulo ADE, e, por outro lado, como a CE para a EA, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE, portanto, também como o triângulo BDE para o triângulo ADE, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE. Portanto, cada um dos triângulos BDE, CDE tem para o ADE a mesma razão. Portanto, o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE; e estão sobre a mesma base DE. Mas os triângulos iguais e que estão sobre a mesma base, também estão nas mesmas paralelas. Portanto, DE é paralela à BC. Portanto, caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e, caso os lados do triângulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo; o que era preciso provar.

Figura 15 – Construção geométrica da proposição 2 do livro VI dos *Elementos de Euclides*.



Fonte: Euclides, 2009, p. 233.

Na proposição 4 do livro VI temos o seguinte enunciado: “Os lados à volta dos ângulos iguais dos triângulos equiângulos estão em proporção, e os que se estendem sob os ângulos iguais são homólogos”. (EUCLIDES, 2009, p. 235)

A demonstração encontraremos em Euclides (2009, pp. 235-236) e veremos a seguir:

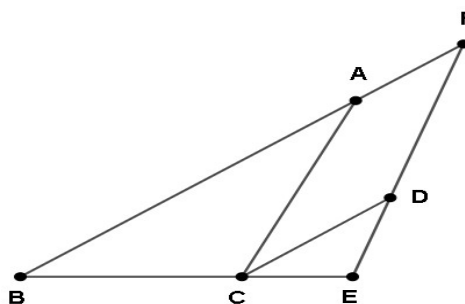
Sejam os triângulos equiângulos ABC, DCE, tendo, por um lado, o ângulo sob ABC igual ao sob DCE, e, por outro lado, o sob BAC, ao sob CDE, e ainda sob o ACB, ao sob CED; digo que os lados à volta dos ângulos iguais dos triângulos ABC, DCE estão em proporção e os que se estendem sob os ângulos iguais são homólogos.

Fique, pois, posta à BC sobre uma reta com a CE. E, como os ângulos sob ABC, ACB são menores do que dois retos e os sob ACB é igual ao sob DEC, portanto, os sob ABC, DEC são menores do que dois retos; portanto, as BA, ED, sendo prolongadas, encontrar-se-ão. Fiquem prolongadas e encontrem-se no F.

E, como o ângulo sob DCE é igual ao sob ABC, BF é paralela à CD. De novo, como o sob ACB é igual ao sob DEC, a AC é paralela à FE. Portanto, o FACD é um paralelogramo; portanto, a FA é igual à DC, enquanto a AC, à FD. E, como AC foi traçada paralela a um, o FE, do triângulo FBE, portanto, como a BA está para a AF, assim a BC para a CE. Mas a AF é igual à CD; portanto, como a BA para a CD, assim BC para a CE, e, alternadamente, como a AB para a BC, assim a DC para a CE. De novo, como a CD paralela à BF, portanto, como a BC para a CE, assim a FD para a DE. Mas a FD é igual à AC; portanto, como a BC para a CE, assim a AC para a DE, e, alternadamente, como a BC para a CA, assim a CE para a ED, portanto, por igual posto, como a BA para a AC, assim a CD para a DE.

Portanto, os lados à volta dos ângulos iguais dos triângulos equiângulos estão em proporção e os que se estendem sob os ângulos iguais são homólogos; o que era preciso provar.

Figura 16 – Construção geométrica da proposição 4 do livro 6 dos *Elementos de Euclides*.

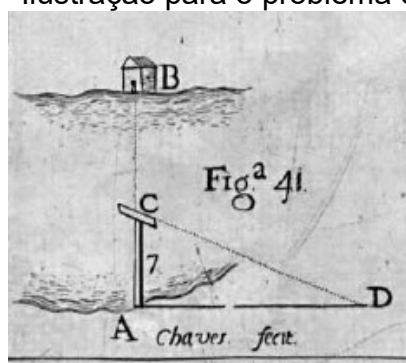


Fonte: Euclides, 2009, p. 235.

O próximo problema encontrado no *Exame de Bombeiros* é em um lançamento de bombas através de morteiros, como veremos a seguir:

Seja o alvo B, além de um rio, e o queremos bombear de A, e nos é necessário medir a distância. (ALPOIM, 1748, p. 64, tradução nossa). No ponto A, meteremos o meio pique AC, a pluma, de 7 palmos (mais, ou menos conforme a distância for maior, ou menor) de alto, e na sua extremidade C, faremos uma reta para lhe entrar uma régua de madeira, ou metal, que se levantará, ou abaixará, até que por ela vejamos o ponto B; logo voltaremos o pique em roda, sempre aplumo, e conservando a situação da régua móvel, observaremos, pela mesma régua, a parte AD, em terreno de nível, e medindo a distância AD, ela será igual à distância que há de A, a B. Eucl.. 26.I. (ALPOIM, 1748, pp. 64-65, tradução nossa).

Figura 17 – Ilustração para o problema do morteiro.



Fonte: Alpoim, 1748, p. 66.

Em Amati (2010), encontramos que Alpoim posiciona as peças de morteiros de acordo com cada situação encontrado em seus exemplos ou de acordo com a sua vivência militar, sendo os lançamentos horizontais como mais práticos e simples com a necessidade de saber a distância do morteiro até o alvo, o autor descreve que Alpoim possui um cuidado em seus exemplos em medir a distância no plano horizontal e sua perpendicular.

Para auxiliar no problema, Alpoim utiliza a proposição 26 do livro I dos *Elementos*, a proposição utiliza o uso da semelhança de triângulos e nos diz o seguinte:

Caso dois triângulos tenham os dois ângulos iguais aos dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, ou o junto dos ângulos iguais ou o que se estende sob um dos ângulos iguais, também terão os lados restantes iguais aos lados restantes, [cada um a cada um,] e o ângulo restante ao ângulo restante. (EUCLIDES, 2009, pp. 117-118).

A demonstração veremos a seguir:

Sejam os dois triângulos ABC , DEF , tendo os dois ângulos sob ABC , BCA iguais aos dois sob DEF , EFD , cada um a cada um, por um lado, o sob ABC , ao sob DEF , e, por outro lado, o sob BCA , ao sob EFD ; e tenham também um lado igual a um lado, primeiramente o junto aos ângulos iguais, a BC , à EF , digo que também terão os lados restantes iguais aos lados restantes, cada um a cada um, por um lado, AB , à DE , e, por outro lado, a AC , à DF , e o ângulo restante, ao ângulo restante, o sob BAC , ao sob EDF .

Pois, se a AB é desigual à DE , uma delas é maior. Seja maior a AB , e fique posta a BG igual à DE , e fique ligada a GC .

Como, de fato, por um lado, a BG é igual à DE , e, por outro lado, a BC , à EF , então, as duas BG , BC são iguais às duas DE , EF , cada uma a cada uma; e o ângulo sob GBC é igual ao ângulo sob DEF ; portanto, a base GC é igual à base DF ; e o triângulo DEF , e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, o ângulo sob GCB é igual ao sob DFE . Mas o sob DFE foi suposto igual ao sob BCA ; portanto, também o sob BCG é igual ao sob BCA , o menor, ao maior; o que é impossível.

Portanto, a AB não é desigual à DE . Portanto, é igual. Mas também a BC é igual à EF ; então, as duas AB , BC são iguais às duas DE , EF , cada uma a cada uma; e o ângulo sob ABC é igual ao ângulo sob DEF ; portanto, a base AC é igual à base DE , e o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante.

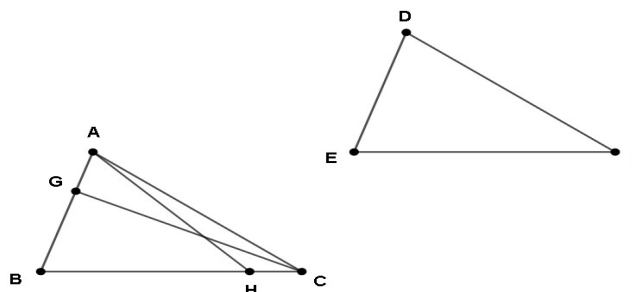
Mas, então, de novo, sejam iguais os lados que se estendem sob os ângulos iguais, como a AB , à DE ; digo, de novo, que também os lados restantes serão iguais aos lados restantes, a AC , à DF , enquanto a BC , à EF , e ainda o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante.

Pois, se a BC é desigual à EF , uma delas é maior. Seja maior, se possível, a BC , e fique posta a BH , igual à EF , e fique ligada AH . E, como, por um lado, a BH é igual à EF , e, por outro lado, a AB à DE , então, as duas AB , BH são iguais às duas DE , EF , cada uma a cada uma; e contém os ângulos iguais; portanto, a base AH é igual à base DF , e o triângulo ABH é igual ao triângulo DEF , e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, o ângulo sob BHA é igual ao sob EFD . Mas o sob EFD é igual ao sob BCA ; então, o ângulo exterior, o sob BHA , do triângulo AHC é igual ao sob BCA , interior e oposto; o que é impossível. Portanto, a BC não é desigual à EF ; portanto, é igual. Mas também a AB é igual à DE . Então, as duas AB , BC são iguais às duas DE , EF , cada uma a cada uma; e contém os ângulos iguais; portanto, a base AC é igual à base DF , e o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF , e o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante.

Portanto, caso dois triângulos tenham os dois ângulos iguais aos dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, ou o junto aos ângulos iguais ou o que se estendem sob um dos ângulos

iguais, terão também lados restantes iguais aos lados restantes e o ângulo restante ao ângulo restante; o que era preciso provar.

Figura 18 – Construção geométrica da proposição 26 do livro I dos *Elementos de Euclides*.



Fonte: Euclides, 2009, p. 117.

Alpoim esclarece sua utilização nos procedimentos de guerra: “Serve para calcularmos os alcances das bombas praticamente; como veremos adiante, quando não fizemos trigonometricamente, cujas operações são, quase igualmente certas” (ALPOIM, 1748, p. 17, tradução nossa).

Fica evidente que os livros de Alpoim podem ser consideradas mais de engenharia militar do que de matemática, e os conteúdos matemáticos apresentados em seus livros trata-se de um público em específico, como a artilheiros e a bombeiros. Como podemos observar, muitas demonstrações realizadas por Alpoim nos dois livros continua sendo influência de *Os Elementos de Euclides*.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado a relação de alguns livros didáticos com a História da Matemática, analisando o contexto histórico e alguns dos seus problemas. Para isso, identificamos os primeiros passos do ensino da Geometria no Brasil e analisamos os livros *Exame de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros* relacionando os procedimentos encontrados em ambos os livros com a História da Matemática. Vale ressaltar que para a resolução dos problemas tivemos o auxílio de régua e compasso e o *software GeoGebra*.

Na primeira seção, apresentamos como surgiu o ensino de Geometria no Brasil, aproximadamente no final do século XVII devido à indústria bélica e às estratégias de guerra. Isso representa que os cursos para ensino de Geometria foram direcionados a um público-alvo, que eram os militares.

Tendo em vista que primeiros livros escritos em português voltados ao ensino da Geometria foram escritos por José Fernandes Pinto Alpoim, na segunda seção apresentamos sobre a vida e as obras Alpoim.

Sobre os livros utilizados para a pesquisa, Alpoim aplicou uma técnica bastante utilizada em cursos militares, que era o método usando perguntas e respostas, cujas perguntas possuíam noções comuns de matemática e relações militares. As práticas geométricas aplicadas por Alpoim, em sua maioria eram realizadas na prática. Em relação aos problemas, nota-se que o autor deixa omitidas as demonstrações geométricas, com a preocupação mais na área militar.

Em seguida, apresentam-se alguns problemas da obra de Alpoim, verificando que tais problemas estão relacionados com a obra *Os Elementos de Euclides*.

Por fim, constata-se nesse trabalho a importância da obra *Os Elementos de Euclides* para a História da Educação Matemática, pois, com o passar dos séculos, a obra serviu como base para o ensino da Geometria. O trabalho colabora tanto para a História da Matemática como para a História da Educação Matemática, contribuindo para o professor de Matemática e/ou pesquisador em História da Educação Matemática compreender o ensino da Geometria no quesito didático-pedagógico.

REFERÊNCIAS

ALPOIM, J. F. P. **Exame de Artilheiros**, 1744. Reprodução fac-similar, Rio de Janeiro: Xerox, 1987.

ALPOIM, J. F. P. **Exame de Bombeiros**. Madri: Officina de Francisco Martinez Abad, 1748.

AMATI, W. M. **A contribuição de José Fernandes Pinto Alpoim no ensino das técnicas aplicadas a Geometria e a ciência no Exame de Bombeiros**. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). São Paulo, 2010. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/13232/1/Wladimir%20Mendes%20Amati.pdf>. Acesso em: 31 jan. 2022.

BARBOSA, J. P. C.; GALVÃO, M. de S.; SANTOS, L. A. dos. O método de redução ao absurdo no livro I do Elementos de Euclides. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, p. 31–40, 2018. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/61>. Acesso em: 2 jun. 2022

BARROS, R. J. A. R.; MENDES I. A. **Descrição das dissertações em história e epistemologia da matemática que abordam conteúdo do Ensino Médio, produzidas no Brasil entre 1990 e 2010**. XI Seminário Nacional de História da Matemática. Natal, Rio Grande de Noite, 2015. Disponível em: https://www.sbhmat.org/conteudo/view?ID_CONTEUDO=372

BERLINSKI, D. **Os Elementos de Euclides: Uma história da geometria e do poder das ideias**. Tradução Cláudio Carina. Editora Zahar, 2018.

BICUDO, I. HISTÓRIAS PARALELAS: O V POSTULADO DE EUCLIDES E O AXIOMA DA ESCOLHA. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [S. l.], v. 5, n. 9, p. 05-17, 2020. DOI: 10.47976/RBHM2005v5n905-17. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/226>. Acesso em: 6 jul. 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação de Fundamental**. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRITO, A. J.; MENDES, I. A. **História da Matemática em Atividades Didáticas**. In Miguel Antonio. [et.al.]. – 2. ed. rev. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009

CAMPOS, M. E. S. **A Aritmética presente na obra “Exame de Artilheiros” (1744) de José Fernandes Pinto Alpoim**. III Seminário Nacional de História da

Matemática. Vitória, Espírito Santo, 1999. Disponível em:
https://www.sbhmat.org/conteudo/view?ID_CONTEUDO=372

D'AMBROSIO, U. **O Iluminismo e seus reflexos na Matemática luso-brasileira**. II Encontro Luso-brasileiro de História da Matemática e II Seminário Nacional de História da Matemática. Águas de São Pedro, São Paulo, 1995. Disponível em:
https://www.sbhmat.org/conteudo/view?ID_CONTEUDO=372

D'AMBROSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.(org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97-115.

D'AMBROSIO, U. **A transferência de conhecimento matemático para a América Latina**. V Seminário Nacional de História da Matemática. Rio Claro, São Paulo, 2003. Disponível em:
https://www.sbhmat.org/conteudo/view?ID_CONTEUDO=372

D'AMBROSIO, U. **Uma história concisa da Matemática no Brasil**. Petrópolis: Vozes, 2008.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. Editora UNESP. São Paulo, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 5ª edição revisada e ampliada. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GOULART, Thais Maria Barbosa. **Os “Elementos” de Euclides visitam o ensino fundamental: análise de tarefas matemáticas pautadas na história da matemática e desenvolvidas no software GeoGebra**. 198 f. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2020.

GULIN, A. C.; ROSÁRIO, R. R. L. **História da Matemática e sua contribuição na compreensão do uso cotidiano dessa ciência**. Universidade Federal Tecnológica do Paraná. Curitiba, 2014. Disponível em:
http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_utfpr_mat_pdp_amarilda_de_cacia_gulin.pdf. Acesso em: 31 jan. 2022.

JULIANI, F. **Análise Matemática do Exame de Bombeiros (José Fernandes Pinto Alpoim)**. VIII Seminário Nacional de História da Matemática, 2009. Belém, Pará. Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/309458993_Analise_Matematica_do_Exame_de_Bombeiros_Jose_Fernades_Pinto_Alpoim. Acesso em: 31 jan. 2022.

LEÃO, A. F. **Euclides e a incomensurabilidade: O profundo tear das abrangências – os sumos e segredos do livro X**. Tese de doutorado, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2017. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/151830>. Acesso em: 31 jan. 2022.

LINTZ, R. G. O CONCEITO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS NA GEOMETRIA GREGA. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [S. l.], p. 35, 2020. DOI: 10.47976/RBHM2007vn35. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/314>. Acesso em: 27 jun. 2022.

MENESES, R. S. **Uma história da geometria escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MONTEIRO, I. A. **O desenvolvimento histórico do ensino de Geometria no Brasil**. Universidade Estadual paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Instituto de Biociências exatas. Unesp – SP, 2015.

MORI, R. de A.; FILETE, H. P. **Livros e bibliotecas no Brasil colônia. III Seminário Nacional de História da Matemática**. Vitória, Espírito Santo, 1999. Disponível em: https://www.sbhmat.org/conteudo/view?ID_CONTEUDO=372

NOBRE, S. R. **“Biografia de Matemáticos Brasileiros – Um projeto historiográfico”**. In: Anais do VII Seminário Nacional de História da Matemática. Guarapuava: Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO), 2008.

NOBRE, S. R. **Introdução histórica às geometrias não euclidianas: uma proposta pedagógica**. Belém: SBHMT, 2009.

NOBRE, S. R. **A escrita da História da Matemática. Origem e institucionalização na Comunidade Internacional. Primórdios no Brasil**. XIV Seminário Nacional de História da Matemática. Uberaba, Minas Gerais, 2021. Disponível em: https://www.sbhmat.org/download/download?ID_DOWNLOAD=18

PIVA, T. C. C.; FILGUEIRAS, C. A. L. O fabrico e uso da pólvora no Brasil colonial: o papel de Alpoim na primeira metade do século XVIII. **Química Nova**. Vol. 31, nº 4, 930-936, 2008. Disponível em: http://static.sites.s bq.org.br/quimicanova.s bq.org.br/pdf/Vol31No4_930_35-AG07431.pdf. Acesso em: 31 jan. 2022.

PIVA, T. C. C.; FILGUEIRAS, C. A. L. **O engenheiro setecentista luso-brasileiro José Fernandes Pinto Alpoim**. Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra,

2011. Disponível em: <https://digitalis.uc.pt/handle/10316.2/31305> . Acesso em: 31 jan. 2022.

PIVA, T. C. C.; SANTOS, N. P. O brigadeiro José Fernandes Pinto Alpoim: o cálculo do número de balas de canhão empilhadas na obra Exame de Artilheiros. **Revista Brasileira de História da Matemática**. Vol. 11, n° 21, p. 107-120. Março, 2011. Disponível em: <https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/138/122>. Acesso em: 31 jan. 2022.

RIBEIRO, D. M. **Matemática para engenheiros no século XVIII em Portugal: Análise da obra de Manoel de Azevedo Fortes**. IV Seminário Nacional de História da Matemática. Natal, Rio Grande do Norte, 2001. Disponível em: https://www.sbhmat.org/conteudo/view?ID_CONTEUDO=372

RIBEIRO, D. M. **Lógica racional, geométrica e analítica (1774) de Azevedo Fortes e Exame de Artilheiros (1744) de Alpoim – alguns encontros**. V Seminário Nacional de História da Matemática. Rio Claro, São Paulo, 2003. Disponível em: https://www.sbhmat.org/conteudo/view?ID_CONTEUDO=372

RIBEIRO, D. M. **A Matemática nos escritos de Diogo Silveira Veloso: um dos engenheiros militares que ensinou no Brasil no século XVIII**. VIII Seminário Nacional de História da Matemática. Belém, Pará, 2009. Disponível em: https://www.sbhmat.org/conteudo/view?ID_CONTEUDO=372

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. Livraria da Física, 2015.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de geometria: rumos da pesquisa (1991-2011). **Revista Revemat**, Florianópolis, v. 08, n. 1, p. 138-155, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p138/25095>. Acesso em: 31 jan. 2022.

SILVA, C. M. **Matemática brasileira: Histórias e relações políticas**. IV Seminário Nacional de História da Matemática. Natal, Rio Grande do Norte, 2001. Disponível em: https://www.sbhmat.org/conteudo/view?ID_CONTEUDO=372

SNHM. Seminário Nacional de História da Matemática. (XIV Seminário Nacional de História da Matemática – 28 a 31 de março de 2021). Disponível em: <https://sites.google.com/view/xivsnhmat/apresenta%C3%A7%C3%A3o>

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930**. São Paulo: Annablume; Fapesp, 1999.

VIEIRA, B. **Contribuição dos militares portugueses para a introdução da cultura Matemática no Brasil**. II Encontro Luso-brasileiro de História da Matemática e II Seminário Nacional de História da Matemática. Águas de São Pedro, São Paulo, 1997. Disponível em:
https://www.sbhmat.org/conteudo/view?ID_CONTEUDO=372