UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

CAMPUS A.C SIMÕES

CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

Estimando o Primeiro Autovalor do Laplaciano de Superfícies

LUCAS CAVALCANTE BARRETO

Maceió - AL

2022

LUCAS CAVALCANTE BARRETO

Estimando o Primeiro Autovalor do Laplaciano de Superfícies

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas-UFAL, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Maceió - AL

2022

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

B273e Barreto, Lucas Cavalcante.
Estimando o primeiro autovalor do Laplaciano de superfícies / Lucas Cavalcante Barreto. - 2022.
52 f. : il.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 47.
Apêndices: f. 48-52.

1. Autovalores. 2. Laplaciano. 3. Superfícies regulares. 4. Reilly, Teorema de. 5. Deshmukh, Teorema de. I. Título.

CDU: 519.614

LUCAS CAVALCANTE BARRETO

Estimando o Primeiro Autovalor do Laplaciano de Superfícies

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas-UFAL, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, aprovado em 19 de Janeiro de 2022 pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva
Instituto de Matemática - UFAL
Orientador

Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva
Instituto de Matemática - UFAL
Examinador

Prof. Dr. Diego Alves Adauto
Dep. de Matemática e Estatística - UERN
Examinador

Aos meus país e meu irmão.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado coragem, persistência, oportunidades e por nunca ter me abandonado:

"O própio Senhor irá à sua frente e estará com você e ele nunca o deixará, nunca o abandonará. Não tenha medo! Não desanime!" (Bíblia Sagrada, Deuteronômio 31, 8)

Segundo aos meus pais, Juarez Barreto e Maria Luiza, por todo apoio, paciência e por sempre confiarem em mim. Ao meu irmão José Leandro por todos os diálogos e momentos juntos, e ao meu primo Alisson Xavier pelo incentivo inicial que me motivou a estudar Matemática.

Agradeço ao professor Márcio Batista pela orientação tanto neste trabalho como também nos projetos de iniciação cientifica que participei nos últimos anos. Agradeço pela amizade, disponibilidade e conversas que foram fundamentais para o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal.

À todo corpo docente do Instituto de Matemática, em especial ao professor Abrão Mendes por suas contribuições na minha vida acadêmica.

Aos professores José Anderson e Diego Adauto que se dispuseram a avaliar este trabalho e aceitaram participar da banca.

Sou grato aos amigos Anderson Cristian, Adriana Roberta, Camilla Lima, Carlos Eduardo, Gabriel Mendes, Gisele Amorim, Maykson Jorge, Millenna Karllyanne, Ruan Teles e Weverson Franco por todos os momentos de descontração e conversas proveitosas. Gostaria de agradecer também ao amigo Rodrigo Costa pela colaboração na organização do texto.

Aos funcionários da secretaria, em especial a Karenn Lima por sua cordialidade e disponibilidade nos atendimentos. Aos demais servidores da UFAL.

De tudo ficaram três coisas: a certeza de que ele estava sempre começando, a certeza de que era preciso continuar e a certeza de que seria interrompido antes de terminar. Fazer da interrupção um caminho novo. Fazer da queda um passo de dança, do medo uma escada, do sono uma ponte, da procura um encontro.

(Trecho do livro "O Encontro Marcado" de Fernando Sabino)

Resumo

No artigo *On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space* [11] Reilly apresenta três estimativas geométricas para o primeiro autovalor do Laplaciano em hipersuperfícies compactas mergulhadas no espaço euclidiano. Neste trabalho, usando os conceitos básicos de Geometria Diferencial e Análise Geométrica provaremos o mesmo resultado para superfícies compactas de $\mathbb{R}^3$. Adotaremos a mesma metodologia para caracterizar as esferas como as únicas Superfícies conexas e compactas cuja curvatura de Gauss está limitada superiormente pelo primeiro autovalor do Laplaciano, tal resultado é apresentado por Deshmukh no artigo *Compact Hypersurfaces in a Euclidean Space* [5].

Palvras-chave: Primeiro Autovalor; Laplaciano; Superfícies Regulares; Teorema de Reilly; Teorema de Deshmukh.

Abstract

In the article *On the first Laplacian eigenvalue for compact submanifolds of Euclidean space* [11], Reilly presents three geometric estimates for the first Laplacian eigenvalue of a compact embedded hypersurface of the Euclidean space. In this work, using basic concepts of Differential Geometry and Geometric Analysis we will prove the same results in the setting of surfaces of $\mathbb{R}^3$. We follow the same strategy to characterize spheres as the only connected compact surfaces whose its Gaussian curvature is bounded from above by the first Laplacian eigenvalue, such result is due to Deshmukh in the article *Compact Hypersurfaces in a Euclidean Space* [5].

Keywords: First Eigenvalue; Laplacian; Regular Surfaces; Reilly's Theorem; Deshmukh's Theorem.

Sumário

Introdução

Seja M uma hipersuperfície compacta, orientável e mergulhada no espaço euclidiano mediante $\psi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Em [11], Reilly obteve três estimativas, que dependem da curvatura média H e curvatura escalar $\mathcal{K}$ da hipersuperfície M, para o primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano $\lambda_1(M)$ de M:

Teorema 1. *(Teorema de Reilly). Seja M uma hipersuperfície compacta e mergulhada mediante $\psi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Então, o primeiro autovalor não-nulo λ_1 do operador Laplaciano, cumpre*

$$\lambda_1 \leq \frac{n}{área(M)} \int_M H^2 \, dM,$$

$$\lambda_1 \leq \frac{n \cdot área(M)}{n^2(n-1)^2(\int_M H^2 \, dM)^2} \int_M \mathcal{K}^2 \, dM,$$

$$\lambda_1 \leq \frac{n \cdot \big(área(M)\big)^2}{(\int_M \langle \psi - c, N \rangle \, dM)^2},$$

onde c é o centro de gravidade de M. Além disso, em qualquer das desigualdades, a igualdade se dar se, e somente se, M é uma esfera $\mathbb{S}^n(c,r)$ com $r > 0$.

Por outro lado, em [5] Deshmukh demonstra ainda que se M for também conexa e com curvatura escalar $\mathcal{K}$ positiva e limitada por $\lambda_1(M)$, então M é isométrica a uma esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$:

Teorema 2. *(Teorema de Deshmukh). Seja M uma hipersuperfície compacta, conexa com curvatura de Ricci definida positiva e mergulhada mediante $\psi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Se a curvatura escalar $\mathcal{K}$ e o primeiro autovalor não-nulo λ_1 do operador Laplaciano satisfizer a desigualdade*

$$\mathcal{K} \leq \lambda_1(n-1),$$

então M é isométrica a uma esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Neste trabalho apresentaremos demonstrações por argumentos elementares da Geometria Diferencial e técnicas de Análise Geométrica em Superfícies regulares, compactas e orientáveis no espaço $\mathbb{R}^3$ para os resultados citados acima. Denotaremos por S uma superfície regular e por K a curvatura gaussiana de S - no espaço $\mathbb{R}^3$ a curvatura escalar de S é exatamente igual ao dobro da sua curvatura gaussiana, ou seja $\mathcal{K} = 2K$.

O seguinte resultado: Dada $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta e orientável, vale que

$$\lambda_1(S) \leq \frac{2\, \acute{a}rea(S)}{\int_S |p - c|\, dp},$$

onde c denota o centro de gravidade de S. É o argumento chave para cumprirmos os objetivos propostos deste trabalho, por isso o chamaremos Teorema Principal.

É importante destacar que as demonstrações aqui apresentadas são versões dos argumentos expostos por Luis Alías em [1].

Este trabalho está organizado como segue. No Capítulo 1 apresentamos definições e conceitos básicos de Geometria Diferencial. No Capítulo 2 falaremos um pouco sobre os Campos de tensores com intuito de definirmos uma derivada para a aplicação de Gauss e também apresentarmos as Equações de Gauss-Codazzi-Mainard em temos de tal derivada. No Capítulo 3 faremos uma abordagem sobre os operadores diferenciais usando estrategias básicas de Análise Geométrica, apresentaremos ainda uma demonstração das Fórmulas de Minkowski por tais estrategias. Finalmente, no Capítulo 4 apresentaremos as adaptações do Teorema de Reilly e do Teorema de Deshmukh como aplicações do Teorema Principal.

1 Noções de Geometria Diferencial

Neste Capítulo nos preocupamos em revisar alguns conceitos básicos da Geometria Diferencial que serão necessários para um melhor entendimento dos capítulos posteriores. Para maiores detalhes veja [10] e [6].

1.1 Superfícies e Diferenciabilidade sobre Superfícies

Denotaremos por $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular no espaço euclidiano tridimensional. Vamos assumir ainda que a superfície é orientável e $N : S \to \mathbb{S}^2$ denotará sua aplicação de Gauss, onde $\mathbb{S}^2 = \{a \in \mathbb{R}^3;\ |a|^2 = 1\}$ é a esfera unitária. Ou seja, N é um campo normal unitário definido sobre a superfície, de modo que, para cada ponto $p \in S$, o plano tangente à S em p é dado por:

$$T_pS = \{v \in \mathbb{R}^3;\ \langle v, N(p) \rangle = 0\}.$$

Alguns tipos específicos de superfícies serão de interesse particular para este trabalho:

Definição 1.1. *(Superfície Conexa). Dizemos que uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é conexa quando cada par de pontos pertencentes a ela podem ser ligados por uma curva contínua que se encontre completamente contida em S.*

Definição 1.2. *(Superfície Compacta). Dado uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, dizemos que $p \in \mathbb{R}^3$ é um ponto de acumulação de S se toda vizinhança de p em $\mathbb{R}^3$ contém algum ponto de S, distinto de p. Dizemos ainda que a superfície S é fechada se ela contém todos os seus pontos de acumulação. Além disso, S é dita limitada se está contida em alguma bola de $\mathbb{R}^3$. Se S é fechada e limitada, dizemos que S é uma superfície compacta.*

Exemplo 1.1. *Veja alguns exemplos envolvendo o conceito de superfícies conexas e superfícies compactas.*

a) O plano $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ ax + by + cz = d\}$ com $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, é uma superfície conexa, porém, por ser ilimitado, não é compacta.

b) As esferas $\mathbb{S}^2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ de raio r e centradas na origem de $\mathbb{R}^3$, são superfícies conexas e também compactas.

c) O hiperbolóide de duas folhas, definido pela imagem inversa do valor 0 da função $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1$, é uma superfície que não é conexa e também não é compacta.

Em Geometria Diferencial costumamos dizer que uma aplicação é diferenciável em um conjunto aberto quando suas derivadas parciais de todas as ordens existem e são contínuas em tal conjunto. Dizemos ainda que uma função $f : S \to \mathbb{R}$ é diferenciável quando a composição $f \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e $\mathbf{x} : U \to S$ é uma parametrização para a superfície S.

O conceito que acabamos de expor, sobre função diferenciável em uma superfície, independe da escolha da parametrização $\mathbf{x}$. Esse fato é uma consequência imediata do teorema da mudança de parâmetros (veja Proposição 1 no Capítulo 2 de [6]).

Além disso, sendo $F : W \to \mathbb{R}$ uma função definida no aberto $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que $S \subset W$ e $f = F|_S$ a restrição de F à superfície S, quando F for diferenciável em W temos que f é diferenciável em S. De fato, para qualquer $p \in S$ e qualquer parametrizção $\mathbf{x} : U \to S$ em p, a função $f \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável, pois se trata da composição de aplicações diferenciáveis.

Exemplo 1.2. *São exemplos de funções diferenciáveis sobre uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$.*

a) (Função altura). Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ um plano que passa pelo ponto p_0 e é normal ao vetor unitário $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Dado uma superfície S, então a função $h : S \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(p) = \langle p - p_0, v\rangle, \qquad \forall\, p \in S,$$

é diferenciável, pois é a restrição à S de uma função diferenciável em todo $\mathbb{R}^3$.

b) (Função distância). Seja S uma superfície. Dado $p_0 \in \mathbb{R}^3 - S$, então a função $f : S \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(p) = |p - p_0|, \qquad \forall\, p \in S,$$

mede a distância euclidiana dos pontos da superfície S ao ponto p_0. Perceba que $|p - p_0| = \sqrt{\langle p - p_0, p - p_0\rangle}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^3 - \{p_0\}$. Como $p_0 \notin S$, então f é diferenciável em S.

c) (Função quadrado da distância). Seja $p_0 \in \mathbb{R}^3$, defina a função $f : S \to \mathbb{R}$ por

$$f(p) = |p - p_0|^2, \qquad \forall\, p \in S.$$

Dessa forma temos que $f \in C^\infty(S)$, pois esta é a restrição à S de uma função diferenciável em todo $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.3. *Dada uma função $f \in C^\infty(S)$ e um vetor $v \in T_pS$. A* derivada de f em p na direção v *é definida por:*

$$v(f) = df_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\alpha(t)) \in \mathbb{R},$$

onde α é uma curva parametrizada, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Exemplo 1.3. *Seja S uma superfície. Dados $p \in S$, $v \in T_pS$ e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, então*

a) A derivada da função altura $h(p) = \langle p - p_0, w\rangle$ na direção v é

$$v(h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \alpha(t) - p_0, w\rangle = \langle \alpha'(0), w\rangle = \langle v, w\rangle.$$

b) A derivada da função distância ao quadrado $f(p) = |p - p_0|^2$ na direção v é dada por

$$v(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} |\alpha(t) - p_0|^2 = 2\langle \alpha'(0), \alpha(0) - p_0\rangle = 2\langle v, p - p_0\rangle.$$

Observe que a derivada $v(f)$ é definida pela derivada usual (euclidiana). Dessa forma, dados $v, w \in T_pS$ e $f, g \in C^\infty(S)$, vale que

i) $v(f + g) = v(f) + v(g)$;

ii) $v(fg) = v(f)g + fv(g)$;

iii) $(v + w)(f) = v(f) + w(f)$;

iv) Seja S conexa. Se $v(f) = 0$ para todo $p \in S$, então f é constante em S.

Vamos estender essa noção de diferenciabilidade de funções sobre superfícies para campo de vetores.

Definição 1.4. *(Campo de Vetores). Dado um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$. Definimos um campo de vetores em W como sendo uma aplicação $Z : W \to \mathbb{R}^3$ que associa cada ponto $(x, y, z) \in W$ a um vetor*

$$Z(x, y, z) = \big(Z_1(x, y, z), Z_2(x, y, z), Z_3(x, y, z)\big),$$

cujas coordenadas são funções definidas em W. Quando as funções coordenadas $Z_i : W \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis dizemos que Z é um campo de vetores diferenciável em W.

De maneira análoga ao que fizemos para funções diferenciáveis, dados uma superfície S, um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que $S \subset W$ e um campo de vetores diferenciável $Z : W \to \mathbb{R}^3$, definimos a restrição $X = Z\big|_S : S \to \mathbb{R}^3$ como sendo um campo de vetores diferenciável sobre S.

Convém destacar que nem todo campo de vetores diferenciáveis sobre uma superfície S possui uma extensão numa vizinhança de S. Podemos citar como exemplo a aplicação de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$ que está definida apenas em S.

Definição 1.5. *Dado X um campo de vetores diferenciável sobre uma superfície S e seja $v \in T_pS$ um vetor tangente à S em um ponto $p \in S$. A* ***derivada de*** $X = (X_1, X_2, X_3)$ ***em*** p ***na direção*** v *é dada por*

$$dX_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X(\alpha(t)) = \big(v(X_1), v(X_2), v(X_3)\big),$$

onde α é uma curva parametrizada, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Proposição 1.6. *Dado uma função $f \in C^\infty(S)$. Sejam X e Y campos diferenciáveis em S. Então para todo $p \in S$ e $v \in T_pS$ temos:*

i) $d(X+Y)_p(v) = dX_p(v) + dY_p(v)$;

ii) $d(fX)_p = v(f)X(p) + f(p)dX_p(v)$;

iii) $d(X)_p(v+w) = dX_p(v) + dX_p(w)$;

iv) *Seja S conexa. Se $d(X)_p = 0$ para todo $p \in S$, então X é constante em S.*

Demonstração. Os resultados decorrem diretamente das propriedades da derivada $v(f)$. Com efeito

$$\begin{aligned} i) \quad d(X+Y)_p(v) &= \big(v(X_1+Y_1), v(X_2+Y_2), v(X_3+Y_3)\big) \\ &= \big(v(X_1)+v(Y_1), v(X_2)+v(Y_2), v(X_3)+v(Y_3)\big) \\ &= \big(v(X_1), v(X_2), v(X_3)\big) + \big(v(Y_1), v(Y_2), v(Y_3)\big) \\ &= dX_p(v) + dY_p(v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \qquad d(fX)_p(v) &= \big(v(fX_1), v(fX_2), v(fX_3)\big) \\ &= \big(v(f)X_1 + fv(X_1), v(f)X_2 + fv(X_2), v(f)X_3 + fv(X_3)\big) \\ &= \big(v(f)X_1, v(f)X_2, v(f)X_3\big) + \big(fv(X_1), fv(X_2), fv(X_3)\big) \\ &= v(f)\big(X_1, X_2, X_3\big) + f\big(v(X_1), v(X_2), v(X_3)\big) \\ &= v(f)X + f\ dX_p(v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii) \quad d(X)_p(v+w) &= \big((v+w)(X_1), (v+w)(X_2), (v+w)(X_3)\big) \\ &= \big(v(X_1)+w(X_1), v(X_2)+w(X_2), v(X_3)+w(X_3)\big) \\ &= \big(v(X_1), v(X_2), v(X_3)\big) + \big(w(X_1), w(X_2), w(X_3)\big) \\ &= d(X)_p(v) + d(X)_p(w). \end{aligned}$$

O resultado *iv*) segue do fato de que as funções coordenadas do campo X são funções definidas sobre uma superfície conexa. Logo, se $d(X)_p(v) \equiv 0$ em S, então as funções coordenadas de X são todas constantes. □

1.2 Curvaturas

É uma noção intuitiva advinda do Cálculo Diferencial que medir a curvatura de uma superfície S significa medir o quão rápido ela se afasta do plano tangente T_pS em uma vizinhança de $p \in S$. Isto é equivalente a medir a taxa de variação da *Aplicação de Gauss* de S em p. Ou seja, calcular, em cada ponto $p \in S$, a derivada dN_p na direção $v \in T_pS$:

$$dN_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N(\alpha(t)).$$

Evidentemente, a diferencial $dN_p : T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ é uma aplicação linear. Mas como T_pS e $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ são o mesmo espaço vetorial, pois

$$\langle N(p), N(p)\rangle = 1 \Rightarrow \langle dN_p(v), N(p)\rangle = 0, \; \forall\, v \in T_pS,$$

então dN_p pode ser visto como um endomorfismo $dN_p : T_pS \to T_pS$.

Definição 1.7. *(Endomorfismo de Weingarten). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e N sua aplicação de Gauss. A aplicação $A_p : T_pS \to T_pS$ definida por*

$$A_p(v) = -dN_p(v),$$

é denominada endomorfismo de Weingarten.

Proposição 1.8. *O endomorfismo de Weingarten $A_p : T_pS \to T_pS$ é uma aplicação auto-adjunta. Isto é, para todo $v, w \in T_pS$*

$$\langle A_p(v), w\rangle = \langle v, A_p(w)\rangle.$$

Demonstração. Veja a Proposição 1 no Capítulo 3 de [6]. □

É um resultado clássico da Álgebra Linear (Teorema Espectral) que todo endomorfismo auto-adjunta é diagonalizável. Assim, o endomorfismo de Weingarten possui dois autovalores reais $k_1(p)$ e $k_2(p)$ que chamaremos *curvaturas principais* da superfície S no ponto p, e as direções (autovetores) e_1 e e_2 associadas ao endomorfismo de Weingarten chamaremos *direções principais*, tais direções formam uma base ortonormal para o plano tangente T_pS.

Definição 1.9. *(Curvatura Normal). Dado uma direção $v \in T_pS$ tangente à superfície S em um ponto p, tal que $|v| = 1$, o valor*

$$k(v) = \langle A_p(v), v\rangle$$

representa a curvatura normal de S em p na direção v.

As curvaturas principais $k_1(p)$ e $k_2(p)$ são, respectivamente, os valores máximos e mínimos das curvaturas normais e as suas direções principais correspondem as direções de máximo e mínimo da curvatura normal em cada ponto $p \in S$.

Associados ao endomorfismo de Weingarter, temos dois invariantes algébricos (seu traço e seu determinante):

$$tr(A_p) = k_1(p) + k_2(p) \quad e \quad det(A_p) = k_1(p)k_2(p),$$

que motivam a seguinte definição:

Definição 1.10. *(Curvaturas Média e Gaussiana). Dado uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ e $A_p : T_pS \to T_pS$ o seu endomorfismo de Weingarten no ponto $p \in S$. Definimos, respectivamente, como Curvatura Média e Curvatura Gaussiana os valores:*

$$H(p) = \frac{1}{2}tr(A_p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2} \qquad e \qquad K(p) = det(A_p) = k_1(p)k_2(p).$$

Exemplo 1.4. *Seja $\mathbb{S}^2(r)$ uma esfera de raio r centrada na origem. Para cada $p \in \mathbb{S}^2(r)$ tome uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{S}^2$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$ e $|\alpha'(0)| = 1$. Definindo $N(p) = -p/r$, para todo $p \in \mathbb{S}^2$ temos*

$$A_p(v) = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N\big(\alpha(t)\big) = \frac{\alpha'(0)}{r} = \frac{v}{r}.$$

Assim, segue-se que a curvatura normal $k(v) = \langle A_p(v), v\rangle$ é constante igual a $1/r$. Consequentemente, $k_1(p) = k_2(p) = 1/r$. Logo, as curvaturas Média e Gaussiana da esfera $\mathbb{S}^2(r)$ assumem os seguintes valores:

$$H(p) = \frac{1}{r} \quad e \quad K(p) = \frac{1}{r^2}, \qquad \forall p \in \mathbb{S}^2(r).$$

1.3 Derivada Covariante

Iniciaremos esta seção com uma discussão sobre os campos de vetores tangentes a uma superfície.

Definição 1.11. *(Campo de vetor tangente à superfície). O campo de vetores tangentes sobre S é uma aplicação diferenciável X que associa cada ponto $p \in S$ a um vetor tangente $X(p) \in T_pS \subset \mathbb{R}^3$.*

Os campos de vetores tangentes à S formam uma classe especial de campos diferenciáveis que denotaremos por $\mathfrak{X}(S)$. A soma $X + Y$ dos campos tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ é ainda um campo tangente $X + Y \in \mathfrak{X}(S)$ definido por $\big(X + Y\big)(p) = X(p) + Y(p)$. Assim como também, a multiplicação fX de um campo tangente $X \in \mathfrak{X}(S)$ por uma função $f \in C^\infty(S)$ resulta em um campo $fX \in \mathfrak{X}(S)$ definido por $\big(fX\big)(p) = f(p)X(p)$.

Mesmo que $X \in \mathfrak{X}(S)$ não temos a garantia de que $dX_p(v) \in \mathfrak{X}(S)$. Diante disso, de modo a desenvolver uma geometria intrínseca sobre S, é interessante considerarmos a parte tangente de $dX_p(v)$, a qual recebe o nome de Derivada Covariante.

Definição 1.12. *(Derivada Covariante). Dado um campo tangente $X \in \mathfrak{X}(S)$, definimos a Derivada Covariante de X na direção $v \in T_pS$ como sendo a aplicação:*

$$\nabla_v X = dX_p(v) - \langle dX_p(v), N(p)\rangle N(p). \tag{1.1}$$

Proposição 1.13. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ e $f \in C^\infty(S)$. Então para todo $v, w \in T_pS$ temos*

i) $\nabla_v(X+Y) = \nabla_v X + \nabla_v Y$;

ii) $\nabla_v(fX) = v(f)X + f\nabla_v X$;

iii) $\nabla_{v+w} X = \nabla_v X + \nabla_w X$.

Demonstração. Os resultados decorrem da Proposição 1.6. Com efeito,

$$\begin{aligned} i)\ \nabla_v(X+Y) &= d(X+Y)_p(v) - \langle d(X+Y)_p(v), N\rangle N \\ &= d(X)_p(v) + d(Y)_p(v) - \langle d(X)_p(v) + d(Y)_p(v), N\rangle N \\ &= \Big(d(X)_p(v) - \langle d(X)_p(v), N\rangle N\Big) + \Big(d(Y)_p(v) - \langle d(Y)_p(v), N\rangle N\Big) \\ &= \nabla_v X + \nabla_v Y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\qquad \nabla_v(fX) &= d(fX)_p(v) - \langle d(fX)_p(v), N\rangle N \\ &= v(f)X + f dX_p(v) - \langle v(f)X + f dX_p(v), N\rangle N \\ &= v(f)X + f dX_p(v) - \langle f dX_p(v), N\rangle N \\ &= v(f)X + f\Big(dX_p(v) - \langle dX_p(v), N\rangle N\Big) \\ &= v(f)X + f\nabla_v X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii)\qquad \nabla_{v+w} X &= d(X)_p(v+w) - \langle d(X)_p(v+w), N\rangle N \\ &= d(X)_p(v) + d(X)_p(w) - \langle d(X)_p(v) + d(X)_p(w), N\rangle N \\ &= \big(d(X)_p(v) - \langle d(X)_p(v), N\rangle N\big) + \big(d(X)_p(w) - \langle d(X)_p(w), N\rangle N\big) \\ &= \nabla_v X + \nabla_w X. \end{aligned}$$

□

Usando o fato de $X \in \mathfrak{X}(S)$ implicar em $\langle X, N\rangle \equiv 0$, temos que

$$v\big(\langle X, N\rangle\big) = \langle dX_p(v), N\rangle + \langle X, dN_p(v)\rangle = 0$$

e, portanto,

$$\langle dX_p(v), N\rangle = -\langle X, dN_p(v)\rangle$$

para todo $v \in T_pS$. Assim, partindo da expressão (1.1), podemos escrever a derivada de X na direção v como:

$$dX_p(v) = \nabla_v X + \langle A_p(v), X\rangle N. \tag{1.2}$$

Esse resultado é conhecido por *Fórmula de Gauss a Superfície*.

2 Um Pouco sobre Campos de Tensores

Neste Capítulo vamos nos referir a campo de tensores, como sendo um "campo de endomorfismo". Isto é, uma aplicação

$$p \longmapsto \big(R_p : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)\big),$$

onde $p \in S$ e R_p é um endomorfismo. Preocupar-nos-emos em definir a derivada covariante para tais campos e em seguida usaremos esses conceitos para obter as equações de Gauss–Codazzi–Mainardi.

Este Capítulo foi escrito baseado em [1] e [8].

2.1 Extensão da Derivada Covariante

No Capítulo anterior, vimos algumas categorias de derivadas de funções e campos diferenciáveis na direção de um vetor. Agora, vamos estender esses conceitos para derivadas na direção de um campo de vetores.

Definição 2.1. *Dado um campo $X \in \mathfrak{X}(S)$ e uma função $f \in C^\infty(S)$, definimos a **derivada de f na direção X** como a função diferenciável $X(f) \in C^\infty(S)$ dada por*

$$X(f)(p) = X(p)(f).$$

Proposição 2.2. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ e $f, g \in C^\infty(S)$, então*

i) $X(f + g) = X(f) + X(g)$;

ii) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$;

iii) $(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$.

Demonstração. Já que $X(p)$ é um vetor em T_pS então os resultados decorrem diretamente das propriedades da derivada $v(f)$. □

Como $X(f) \in C^\infty(S)$ então podemos fazer $Y(X(f))$, onde $Y \in \mathfrak{X}(S)$.

Definição 2.3. *(Colchete de Lie). Dados os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ e a função $f \in C^\infty(S)$, definimos o colchete de Lie como sendo o campo $[X, Y]$ tal que*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Definição 2.4. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, definimos a* **derivada de** Y **na direção** X *como sendo a aplicação diferenciável $\overline{\nabla}_X Y$ dada por*

$$(\overline{\nabla}_X Y)(p) = dY_p(X(p)) = \big(X(Y_1)(p), X(Y_2)(p), X(Y_3)(p)\big),$$

onde $Y_1, Y_2, Y_3 \in C^\infty(S)$ são as funções coordenadas de Y.

Proposição 2.5. *Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$ e $f \in C^\infty(S)$, então*

i) $\overline{\nabla}_X(Y + Z) = \overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_X Z$;

ii) $\overline{\nabla}_X(fY) = X(f)Y + f\overline{\nabla}_X Y$;

iii) $\overline{\nabla}_{X+Z}(Y) = \overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_Z Y$.

Demonstração. De fato, para cada $p \in S$ segue-se da Proposição 1.6 que

$$\begin{aligned} i) \quad \overline{\nabla}_X(Y+Z)(p) = d(Y+Z)_p(X(p)) &= d(Y)_p(X(p)) + d(Z)_p(X(p)) \\ &= (\overline{\nabla}_X Y)(p) + (\overline{\nabla}_X Z)(p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \qquad (\overline{\nabla}_X(fY))(p) = d(fY)_p(X(p)) &= X(p)(f)Y(p) + f(p)dY_p(X(p)) \\ &= X(f)(p)Y(p) + f(p)(\overline{\nabla}_X Y)(p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii) \; (\overline{\nabla}_{X+Z}(Y))(p) = d(Y)_p((X+Z)(p)) &= d(Y)_p(X(p) + Z(p)) \\ &= d(Y)_p(X(p)) + d(Y)_p(Z(p)) \\ &= (\overline{\nabla}_X(Y))(p) + (\overline{\nabla}_Z(Y))(p). \end{aligned}$$

□

Definição 2.6. *(Extensão da Derivada Covariante) Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, definimos a derivada covariante de Y na direção X como sendo o campo $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(S)$ dada por*

$$(\nabla_X Y)(p) = \nabla_{X(p)} Y.$$

Ou seja,

$$(\nabla_X Y)(p) = (\overline{\nabla}_X Y)(p) - \langle (\overline{\nabla}_X Y)(p), N(p)\rangle N(p).$$

Proposição 2.7. *Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$ e $f \in C^\infty(S)$,*

i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

ii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$;

iii) $\nabla_{X+Z}(Y) = \nabla_X Y + \nabla_Z Y$.

Demonstração. Decorrem diretamente da proposição anterior. □

Note que $(\overline{\nabla}_X N)(p) = dN_p(X(p)) = -A_p(X(p))$, para todo $p \in S$. Dessa forma, definimos

$$A(X) = -\overline{\nabla}_X N$$

como sendo a extensão do endomorfismo de Weingarten. Consequentemente, podemos estender a fórmula de Gauss de Superfície:

$$(\overline{\nabla}_X Y)(p) = (\nabla_X Y)(p) + \langle A_p(X(p)), Y(p)\rangle N(p). \tag{2.1}$$

A extensão da fórmula de Gauss garante a seguinte igualdade:

$$\langle(\overline{\nabla}_X Y)(p), N(p)\rangle = \langle A_p(X(p)), Y(p)\rangle.$$

De maneira análoga,

$$\langle(\overline{\nabla}_Y X)(p), N(p)\rangle = \langle A_p(Y(p)), X(p)\rangle.$$

Usando a simetria de A_p, temos que

$$\langle(\overline{\nabla}_X Y)(p), N(p)\rangle = \langle(\overline{\nabla}_Y X)(p), N(p)\rangle.$$

Isto é, os vetores $(\overline{\nabla}_X Y)(p)$ e $(\overline{\nabla}_Y X)(p)$ possuem a mesma parte normal e, portanto,

$$(\overline{\nabla}_X Y)(p) - (\overline{\nabla}_Y X)(p) = (\nabla_Y X)(p) - (\nabla_X Y)(p).$$

Dessa forma, definimos

$$[X, Y](p) = (\nabla_X Y)(p) - (\nabla_Y X)(p). \tag{2.2}$$

2.2 Campo de Tensores

Definição 2.8. *(Campo de Tensores). Definiremos como campo de tensores sobre uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ toda aplicação R que associa cada ponto $p \in S$ a um endomorfismo $R_p : T_pS \to T_pS$. Diremos que um campo de tensores R é diferenciável sobre S se, para cada $X \in \mathfrak{X}(S)$, o campo RX definido por*

$$(RX)(p) = R_p(X(p))$$

for diferenciável.

Observe que, se R é um campo de tensores diferenciável sobre S, então R determina uma aplicação $R : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)$. O exemplo mais natural de campo de tensores é o campo $A : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)$ definido pelo endomorfismo de Weingarten.

Proposição 2.9. *Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ e $f \in C^\infty(S)$, um campo $R : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)$ de tensores diferenciável sobre S satisfaz*

i) $R(X + Y) = R(X) + R(Y)$;

ii) $R(fX) = f\, R(X)$.

Demonstração. Para demonstrar i), observe que para todo $p \in S$,

$$R(X + Y)(p) = R_p\big((X + Y)(p)\big) = R_p(X(p) + Y(p)).$$

Como, por definição, R_p é um endomorfismo então

$$R_p(X(p) + Y(p)) = R_p(X(p)) + R_p(Y(p)).$$

Logo,

$$R(X + Y)(p) = R_p(X(p)) + R_p(Y(p)) = R(X)(p) + R(Y)(p).$$

Finalmente, dado uma função $f \in C^\infty(S)$, segue-se

$$R(fX)(p) = R_p\big((fX)(p)\big) = R_p(f(p)X(p)).$$

Novamente usando o fato de R_p ser um endomorfismo, temos

$$R_p\big(f(p)X(p)\big) = f(p)R_p\big(X(p)\big).$$

Portanto,

$$R(fX)(p) = f(p)R_p\big(X(p)\big) = f(p)(RX)(p).$$

□

Para cada $p \in S$, definimos

$$R_p(v) = (RX)(p) \in T_pS,$$

onde $X \in \mathfrak{X}(S)$ é tal que $X(p) = v$. As propriedades i) e ii) da proposição anterior nos garantem que R_p está bem definida.

Definição 2.10. *(Derivada Covariante de um Campo de Tensores). Seja $R : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)$ um campo de tensores diferenciável sobre a superfície S. Definimos a derivada covariante de R na direção $X \in \mathfrak{X}(S)$ como a aplicação diferenciável $\nabla_X R : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)$ definida por*

$$(\nabla_X R)(Y) = \nabla_X(RY) - R(\nabla_X Y), \quad \forall\, Y \in \mathfrak{X}(S).$$

Proposição 2.11. *Para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$ e $f \in C^\infty(S)$, a derivada covariante de um campo de tensores $R : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)$ satisfaz*

i) $(\nabla_X R)(Y + Z) = (\nabla_X R)(Y) + (\nabla_X R)(Z)$;

ii) $(\nabla_X R)(fY) = f(\nabla_X R)(Y)$.

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(Y + Z) &= \nabla_X(R(Y + Z)) - R(\nabla_X(Y + Z)) \\ &= \nabla_X(RY + RZ) - R(\nabla_X Y + \nabla_X Z).\end{aligned}$$

Como $RY, RZ \in \mathfrak{X}(S)$, segue-se da Proposição 2.7 e da Proposição 2.9 que

$$\nabla_X(RY + RZ) = \nabla_X(RY) + \nabla_X(RZ)$$

e

$$R(\nabla_X Y + \nabla_X Z) = R(\nabla_X Y) + R(\nabla_X Z).$$

Logo,

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(Y + Z) &= \nabla_X(RY) + \nabla_X(RZ) - R(\nabla_X Y) - R(\nabla_X Z) \\ &= \big(\nabla_X(RY) - R(\nabla_X Y)\big) + \big(\nabla_X(RZ) - R(\nabla_X Z)\big) \\ &= (\nabla_X R)(Y) + (\nabla_X R)(Z).\end{aligned}$$

De maneira similar, dado uma função $f \in C^\infty(S)$, temos

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(fY) &= \nabla_X(R(fY)) - R(\nabla_X(fY)) \\ &= \nabla_X(fRY) - R(X(f)Y + f\nabla_X Y) \\ &= X(f)RY + f\nabla_X RY - R(X(f)Y) - R(f\nabla_X Y) \\ &= X(f)RY + f\nabla_X RY - X(f)RY - fR(\nabla_X Y) \\ &= f\big(\nabla_X RY - R(\nabla_X Y)\big) \\ &= f(\nabla_X R)(Y).\end{aligned}$$

□

Dessa forma, para cada $p \in S$ e $v \in T_pS$, a aplicação $\nabla_v R : T_pS \to T_pS$ definida por

$$(\nabla_v R)(w) = (\nabla_X R)(Y)(p), \qquad w \in T_pS,$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ são campos tangentes tais que $X(p) = v$ e $Y(p) = w$, está bem definida.

2.3 Equação de Gauss–Codazzi–Mainardi

Nesta seção trataremos das equações de Gauss–Codazzi–Mainardi. Na geometria diferencial clássica de superfícies, essas equações são geralmente expressas pelos Símbolos de Christoffel. No entanto, para nós, será mais útil representarmos essas equações em termos da derivada covariante.

Lema 2.12. *Dados campos diferenciais $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$, temos*

$$\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z) - \overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z) - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = 0.$$

Demonstração. De fato, por um lado

$$\begin{aligned}&\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z) - \overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z) = \overline{\nabla}_X\big(Y(Z_1), Y(Z_2), Y(Z_3)\big) - \overline{\nabla}_Y\big(X(Z_1), X(Z_2), X(Z_3)\big)\\ &= \big(X(Y(Z_1)), X(Y(Z_2)), X(Y(Z_3))\big) - \big(Y(X(Z_1)), Y(X(Z_2)), Y(X(Z_3))\big).\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}&\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \big([X,Y](Z_1), [X,Y](Z_2), [X,Y](Z_3)\big)\\ &= \big(X(Y(Z_1)) - Y(X(Z_1)), X(Y(Z_2)) - Y(X(Z_2)), X(Y(Z_3)) - Y(X(Z_3))\big)\\ &= \big(X(Y(Z_1)), X(Y(Z_2)), X(Y(Z_3))\big) - \big(Y((X(Z_1)), Y(X(Z_2)), Y(X(Z_3))\big).\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos que

$$\overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z) - \overline{\nabla}_Y(\overline{\nabla}_X Z) = \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z.$$

O que conclui a demonstração. □

Teorema 2.13. *(Equação de Gauss–Codazzi–Mainardi). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $A : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)$ o tensor definido pelo Endomorfismo de Weingarten. Então, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, temos:*

$$\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) = \nabla_{[X,Y]}Z - \langle AY, Z\rangle AX + \langle AX, Z\rangle AY \tag{2.3}$$

e

$$\nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) - A[X,Y] = 0. \tag{2.4}$$

Demonstração. Aplicando o lema anterior com a Fórmula de Gauss (2.1), obtemos

$$0 = \overline{\nabla}_X\big(\nabla_Y Z + \langle AY, Z\rangle N\big) - \overline{\nabla}_Y\big(\nabla_X Z + \langle AX, Z\rangle N\big) - \big(\nabla_{[X,Y]}Z + \langle A[X,Y], Z\rangle N\big).$$

Novamente, usando a fórmula de Gauss (2.1)

$$\begin{aligned}0 \;&= \nabla_X(\nabla_Y Z) + \langle AY, \nabla_X Z\rangle N + \langle \nabla_X(AY), Z\rangle N + \langle AX, \nabla_X Y\rangle N - \langle AY, Z\rangle AX\\ &-\nabla_Y(\nabla_X Z) - \langle AX, \nabla_Y Z\rangle N - \langle \nabla_Y(AX), Z\rangle N - \langle AY, \nabla_X Z\rangle N + \langle AX, Z\rangle AY\\ &-\nabla_{[X,Y]}Z - \langle A[X,Y], Z\rangle N.\end{aligned}$$

Eliminando os termos que se anulam e reorganizando os termos restantes, temos

$$\begin{aligned}0 &= \big(\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z - \langle AY, Z\rangle AX + \langle AX, Z\rangle AY\big)\\ &+\langle \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) - A[X,Y], Z\rangle N.\end{aligned}$$

Ou seja, tanto a parte tangente, quanto a parte normal desse campo se anulam. Portanto,

$$\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) = \nabla_{[X,Y]}Z - \langle AY, Z\rangle AX + \langle AX, Z\rangle AY.$$

Assim obtemos a Equação de Gauss de curvatura. Por outro lado, temos também que

$$\langle \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) - A[X,Y], Z\rangle = 0,$$

para todo Z. Logo,

$$\nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) - A[X,Y] = 0.$$

Que resulta na Equação de Codazzi–Mainardi. □

As equações (2.3) e (2.4) são, respectivamente, conhecidas por *Equação de Gauss de curvatura* e *Equação de Codazzi–Mainardi*.

Corolário 2.14. *(Codazzi-Mainardi). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $A : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)$ o tensor definido pelo Endomorfismo de Weingarten. Então, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, temos*

$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X).$$

Demonstração. De fato, pela Equação de Codazzi–Mainardi segue-se que

$$\begin{aligned}(\nabla_X A)(Y) - (\nabla_Y A)(X) &= \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y) - \nabla_Y(AX) + A(\nabla_Y X)\\ &= \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) + A(\nabla_Y X - \nabla_X Y)\\ &= \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) - A([X,Y])\\ &= 0.\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Logo, para todo $p \in S$, vale que $(\nabla_X A)(Y)(p) = (\nabla_Y A)(X)(p)$. Ou seja,

$$(\nabla_v A)(w) = (\nabla_w A)(v)$$

para todo par de vetores $v, w \in T_pS$.

3 Operadores Diferenciais sobre Superfícies

No presente Capítulo, apresentaremos algumas definições de operadores diferenciais definidos sobre uma superfície regular. Faremos também uma revisão dos operadores definidos sobre abertos do $\mathbb{R}^3$. Em seguida, apresentaremos algumas propriedades que relacionam tais operadores. Por fim, usando os resultados desenvolvidos ao longo do Capítulo, apresentaremos uma demonstração para as Fórmulas de Minkowski.

3.1 Gradiente e Hessiano

Seja $F : W \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$. O Gradiente Euclidiano de F no ponto $a \in W$ é definido como sendo o vetor $Grad\ F(a)$ tal que

$$\langle Grad\ F(a), v\rangle = v(F), \qquad \forall\ v \in \mathbb{R}^3.$$

Em particular, tomando a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ temos que $\langle Grad\ F(a), e_1\rangle = \partial F(a)/\partial x, \langle Grad\ F(a), e_2\rangle = \partial F(a)/\partial y$ e $\langle Grad\ F(a), e_3\rangle = \partial F(a)/\partial z$. Logo,

$$Grad\ F(a) = \Big(\frac{\partial F}{\partial x}(a), \frac{\partial F}{\partial y}(a), \frac{\partial F}{\partial z}(a)\Big). \tag{3.1}$$

Usando a expressão (3.1) com as propriedades das derivadas parciais obtemos as seguintes propriedades:

i) $Grad\ (F + G) = Grad\ F + Grad\ G$;

ii) $Grad\ (FG) = G\ Grad\ F + F\ Grad\ G$;

iii) $Grad\ (\phi \circ F) = \phi'(F)\ Grad F.$

Onde $F, G : W \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis definidas sobre um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Em particular, para superfícies, definimos:

Definição 3.1. *(Gradiente). Dado uma função $f \in C^\infty(S)$, usaremos o termo gradiente de f para nos referirmos ao campo de vetores tangentes à S determinado pela aplicação $\nabla f : S \to \mathbb{R}^3$ definida por:*

$$\begin{cases} \langle \nabla f(p), v\rangle = v(f),\ v \in T_pS, \\ \\ \langle \nabla f(p), N(p)\rangle = 0,\ \forall p \in S. \end{cases}$$

Dado $F : W \to \mathbb{R}$ uma extensão para $f \in C^\infty(S)$, isto é $f = F|_S$, então o gradiente de f é a parte tangente do gradiente euclidiano de F, isto é,

$$\nabla f(p) = Grad\ F(p) - \langle Grad\ F(p), N(p)\rangle N(p). \tag{3.2}$$

Proposição 3.2. *Dadas as funções diferenciáveis $f, g \in C^\infty(S)$ e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos*

i) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;

ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$;

iii) $\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f)\ \nabla f$;

iv) Se S é conexa, então $\nabla f(p) = 0$ para todo $p \in S$ se, e somente se, f é constante em S.

Demonstração. Para demonstrar as propriedades i), ii) e iii) tome F e G extensões, respectivamente, para as funções f e g. Assim decorre da expressão (3.2) e das propriedades do Gradiente Euclidiano que

$$\begin{aligned} i)\ \nabla(f+g) &= Grad\ (F+G) - \langle Grad\ (F+G), N\rangle N \\ &= Grad\ F + Grad\ G - \langle Grad\ F + Grad\ G, N\rangle N \\ &= \big(Grad\ F - \langle Grad\ F, N\rangle N\big) + \big(Grad\ G - \langle Grad\ G, N\rangle N\big) \\ &= \nabla f + \nabla g. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\quad \nabla(fg) &= Grad\ (FG) - \langle Grad\ (FG), N\rangle N \\ &= G\ Grad\ F + F\ Grad\ G - \langle G\ Grad\ F + F\ Grad\ G, N\rangle N \\ &= G\big(Grad\ F - \langle Grad\ F, N\rangle N\big) - F\big(Grad\ G - \langle\ Grad\ G, N\rangle N\big) \\ &= g\nabla f + f\nabla g. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii)\nabla(\phi\circ f) &= Grad\ (\phi\circ F) - \langle Grad\ (\phi\circ F), N\rangle N \\ &= \phi'(f)\ Grad\ F - \langle \phi'(f)\ Grad\ F, N\rangle N \\ &= \phi'(f)\ \big(Grad\ F - \langle Grad\ F, N\rangle N\big) \\ &= \phi'(f)\ \nabla f. \end{aligned}$$

Para demostrar a propriedade iv), observe que se $\nabla f(p) = 0$ para todo $p \in S$, então

$$0 = \langle \nabla f(p), v\rangle = v(f).$$

Logo, sendo S uma superfície conexa, segue-se que f é constante. Reciprocamente, se f for constante então $v(f) = 0$ para todo $p \in S$ e $v \in T_pS$, assim

$$\langle \nabla f(p), v\rangle = 0.$$

O que implica que $\nabla f(p) = 0$ para todo $p \in S$.

$\square$

Proposição 3.3. *Seja* $A : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)$ *o campo de tensores definido pelo Endomorfismo de Weingarten. Então, para cada* $p \in S$ *e* $v \in T_pS$ *tem-se*

$$tr(\nabla_v A) = \langle v, \nabla(trA)(p)\rangle,$$

onde $trA \in C^\infty(S)$ *é uma função definida por* $(trA)(p) = tr(A_p)$.

Demonstração. Fixemos uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ do espaço T_pS. Assim, temos

$$\begin{aligned} tr(\nabla_v A) &= \sum_{i=1}^{2}\langle(\nabla_v A)(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{2}\langle\nabla_v A_p(e_i) - A(\nabla_v e_i), e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{2}\langle\nabla_v A_p(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{2}\langle d(A_p(e_i))_p(v), e_i\rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\langle v, \nabla(trA)(p)\rangle = \langle v, \nabla tr(A_p)\rangle = \langle v, \nabla(\sum_{i=1}^{2}\langle A_p(e_i), e_i\rangle)\rangle = \sum_{i=1}^{2}\langle v, \nabla(\langle A_p(e_i), e_i\rangle)\rangle.$$

Olhando respectivamente para e_1 e e_2 como campos de vetores constantes $E_1, E_2 \in \mathfrak{X}(S)$, isto é, $E_1 \equiv e_1$ e $E_2 \equiv e_2$, e tomando a função $f(p) = \langle A_p(E_i), E_i\rangle$ temos que

$$\langle v, \nabla(\langle A_p(E_i), E_i\rangle)\rangle = \langle v, \nabla f\rangle = df_p(v).$$

Observe ainda que

$$df_p(v) = \langle d(A_p(E_i))_p(v), E_i\rangle + \langle A_p(E_i), d(E_i)_p(v)\rangle.$$

Mas como E_i é um campo constante, segue-se que $d(E_i)_p(v) = 0$. Portanto

$$\langle v, \nabla(\langle A_p(E_i), E_i\rangle)\rangle = \langle d(A_p(E_i))_p(v), E_i\rangle.$$

Equivalentemente,

$$\langle v, \nabla(\langle A_p(e_i), e_i\rangle)\rangle = \langle d(A_p(e_i))_p(v), e_i\rangle.$$

Logo,

$$\langle v, \nabla(trA)(p)\rangle = \sum_{i=1}^{2}\langle d(A_p(e_i))_p(v), e_i\rangle = tr(\nabla_v A).$$

$\square$

Definição 3.4. *(Hessiano). Seja $f \in C^\infty(S)$. Para cada ponto $p \in S$, definimos o operador hessiano de f como sendo a função*

$$\nabla^2 f_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\nabla^2 f_p(v, w) = \langle \nabla_v \nabla f, w \rangle.$$

Usando a *Fórmula de Gauss de superfície* (1.2) com $X = \nabla f$, obtemos:

$$\nabla_v \nabla f = d(\nabla f)_p(v) - \langle A_p(v), \nabla f(p) \rangle N(p).$$

De modo que podemos calcular o hessiano $\nabla^2 f_p(v, w)$ por meio da derivada usual, isto é,

$$\nabla^2 f_p(v, w) = \langle d(\nabla f)_p(v), w \rangle. \tag{3.3}$$

De maneira geral, dado uma função $F : W \to \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $W \subset \mathbb{R}^3$. O hessiano euclidiano de F no ponto $a \in W$ é definido como sendo a função dada por

$$Hess\ F_a(v, w) = \langle d(Grad\ F)_a(v), w \rangle,$$

para todo par de vetores $v, w \in \mathbb{R}^3$.

O resultado a seguir relaciona o hessiano euclidiano de F com o hessiano de sua restrição $f = F\big|_S$.

Proposição 3.5. *Seja $F : W \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável sobre um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$ que contém uma superfície S, e seja f a restrição de F à S. Então*

$$\nabla^2 f_p(v, w) = Hess\ F_p(v, w) + \langle A_p(v), w \rangle \langle Grad\ F(p), N(p) \rangle,$$

para todo $p \in S$ e $v, w \in T_pS$.

Demonstração. Segue-se da expressão (3.2) que

$$\begin{aligned} d(\nabla f)_p(v) &= d(Grad\ F)_p(v) - du_p(v)N(p) - u(p)dN_p(v) \\ &= d(Grad\ F)_p(v) - du_p(v)N(p) + u(p)A_p(v) \end{aligned}$$

onde $u(p)$ denota o produto interno $\langle Grad\ F(p), N(p) \rangle$. Portanto, usando (3.3), temos

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_p(v, w) &= \langle d(Grad\ F)_p(v), w \rangle + \langle Grad\ F(p), N(p) \rangle \langle A_p(v), w \rangle \\ &= Hess\ F_p(v, w) + \langle A_p(v), w \rangle \langle Grad\ F(p), N(p) \rangle. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 3.1. *Considere $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função diferenciável definida por*

$$F(a) = \frac{1}{2}|a - c|^2, \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}^3,$$

onde $c \in \mathbb{R}^3$ é um ponto fixo. Trivialmente, temos que

$$Grad\ F(a) = a - c \quad e \quad Hess\ F_a(v, w) = \langle v, w\rangle$$

para todos os vetores $v, w \in \mathbb{R}^3$. Dado $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, tomemos a restrição $f = F|_S$. Então,

$$\nabla f(p) = (p - c) - \langle (p - c), N(p)\rangle N(p), \tag{3.4}$$

para todo $p \in S$, e

$$\nabla^2 f_p(v, w) = \langle v, w\rangle + \langle A_p(v), w\rangle\langle (p - c), N(p)\rangle, \tag{3.5}$$

para todo par de vetores $v, w \in T_pS$.

Exemplo 3.2. *Considere a função altura $h \in C^\infty(S)$ definida no Exemplo 1.2. Observe que esta é a restrição à S da função diferenciável em $\mathbb{R}^3$ dada por*

$$H(x) = \langle x - c, v_0\rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

cujo gradiente euclidiano é simplesmente o vetor constante v_0 e $Hess\ H(x) = 0$. Por tanto, seu gradiente é dado por

$$\nabla h(p) = v_0 - \langle v_0, N(p)\rangle N(p)$$

e seu hessiano é dado por

$$\nabla^2 h_p(v, w) = \langle A_p(v), w\rangle\langle v_0, N(p)\rangle,$$

para todo $p \in S$ e $v, w \in T_pS$.

3.2 Divergente e Laplaciano

Sendo Z um campo de vetores diferenciável definido sobre um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$. Define-se o Divergente Euclidiano do campo Z em um ponto $a \in W$ como sendo o traço da aplicação linear $dZ_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Escrevemos

$$Div\ Z(a) = tr(v \mapsto dZ_a(v)) = \sum_{i=1}^{3} \langle dZ_a(e_i), e_i\rangle,$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$. Em particular, se $\{e_1, e_2, e_3\}$ for a base canônica, temos

$$Div\ Z(a) = \frac{\partial Z_1}{\partial x}(a) + \frac{\partial Z_2}{\partial y}(a) + \frac{\partial Z_3}{\partial z}(a). \tag{3.6}$$

Pela expressão (3.6), decorre diretamente das propriedades da derivada parcial que

i) $Div\ (Z + Z') = Div\ Z + Div\ Z'$;

ii) $Div\ (FZ) = \langle Grad\ F, Z\rangle + F\ Div\ Z$.

Onde Z, Z' são campos de vetores diferenciáveis sobre o aberto $W \subset \mathbb{R}^3$ e $F \in C^\infty(W)$.

Teorema 3.6. *(Teorema da Divergência). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, orientada e compacta e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio determinado por S ($S = \partial\Omega$). Se $Z : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ é um campo de vetores diferenciável, então*

$$\int_\Omega Div\ Z(a)\ da = -\int_S \langle Z(p), N(p)\rangle\ dp,$$

onde da é o elemento de volume da região Ω e dp é o elemento de área da superfície S.

Demonstração. Veja Teorema 5.31 no Capítulo 5 de [10]. □

Corolário 3.7. *Sobre as hipóteses do Teorema da Divergência temos, para cada ponto fixo $c \in \mathbb{R}^3$, que*

$$vol(\Omega) = -\frac{1}{3}\int_S \langle (p - c), N(p)\rangle\ dp.$$

Demonstração. Tome $Z : \Omega \to \mathbb{R}^3$ um campo de vetores diferenciável dado por

$$Z(a) = a - c,$$

com c constante. O divergente de Z é trivialmente $Div\ Z(a) = 3$ para todo $a \in \Omega$. Dessa forma, segue-se do Teorema da Dirvegência que

$$\int_\Omega Div\ Z(a)\ da = 3vol(\Omega) = -\int_S \langle (p - c, N(p)\rangle\ dp.$$

□

Quando $Z = Grad\ F$, então o $Div(Grad\ F)$ é definido como o Laplaciano Euclidiano de F, e denotamos

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}F(a) &= Div(Grad\ F)(a) = tr\big(d(Grad\ F)_a\big) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \langle \big(d(Grad\ F)_a\big)(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{3} Hess\ F_a(e_i, e_i), \end{aligned}$$

onde $a \in W$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$. Ademais, tomando a base canônica do $\mathbb{R}^3$, temos

$$\overline{\Delta}F(a) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x). \tag{3.7}$$

Em particular, para funções diferenciáveis em uma superfície S definimos:

Definição 3.8. *(Divergente). Para cada ponto $p \in S$. Definimos o divergente de um campo $X \in \mathfrak{X}(S)$ como a aplicação*

$$div : \mathfrak{X}(S) \to C^{\infty}(S),$$

dada por

$$div\ X(p) = tr(v \mapsto \nabla_v X).$$

Seja $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal para T_pS. Para cada ponto $p \in S$, tem-se

$$div\ X(p) = \sum_{i=1}^{2} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle. \tag{3.8}$$

Proposição 3.9. *Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ e $f \in C^{\infty}(S)$. O operador divergente possui as seguintes propriedades:*

i) $div\ (X + Y) = div\ X + div\ Y$;

ii) $div\ (fX) = \langle X, \nabla f \rangle + f div\ X$.

Demonstração. Por praticidade, denote $tr(v \mapsto \nabla_v X)$ por $tr(\nabla X)$. Assim, o primeiro resultado é evidente, visto que

$$\begin{aligned} div\ (X+Y) &= tr(\nabla(X+Y)) = tr(\nabla X + \nabla Y) \\ &= tr(\nabla X) + tr(\nabla Y) = div\ X + div\ Y. \end{aligned}$$

Para provar o segundo resultado basta escrever o divergente em coordenas e usar as propriedades da derivada covariante. Ou seja,

$$\begin{aligned} div\ (fX) &= \sum_{i=1}^{2} \langle \nabla_{e_i}(fX), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{2} \langle e_i(f)X + f\nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{2} \langle e_i(f)X, e_i \rangle + f \sum_{i=1}^{2} \langle \nabla_{e_1} X, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{2} \langle X, e_i(f)e_i \rangle + f div\ X \\ &= \langle X, \sum_{i=1}^{2} e_i(f)e_i \rangle + f div\ X \\ &= \langle X, \sum_{i=1}^{2} \langle \nabla f, e_i \rangle e_i \rangle + f div\ X = \langle X, \nabla f \rangle + f div\ X. \end{aligned}$$

□

Definição 3.10. *(Laplaciano). Seja $f \in C^{\infty}(S)$. O operador Laplaciano de f em S é a função $\Delta : C^{\infty}(S) \to C^{\infty}(S)$ definida por*

$$\Delta f = div\ \nabla f.$$

Proposição 3.11. *Sejam* $f, g : S \to \mathbb{R}$ *e* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Então,*

i) $\Delta(f \cdot g) = (\Delta f)g + f(\Delta g) + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$;

ii) $\Delta(\phi \circ f) = \phi'(f)\Delta f + \phi''(f)|\nabla f|^2$.

Demonstração. O primeiro resultado segue-se do item $ii)$ da Proposição 3.9 e do item $ii)$ da Proposição 3.2:

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g) &= div\ \nabla(fg) = div(g\nabla f + f\nabla g) \\
&= div(g\nabla f) + div(f\nabla g) \\
&= \langle \nabla f, \nabla g \rangle + g\ div\ \nabla f + \langle \nabla g, \nabla f \rangle + f\ div\ \nabla g \\
&= g\ div\ \nabla f + f\ div\ \nabla g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle \\
&= (\Delta f)g + f(\Delta g) + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle
\end{aligned}$$

O segundo resultado, também decorre do item $ii)$ da Proposição 3.9 porém dessa vez, auxiliado do item $iii)$ da Proposição 3.2:

$$\begin{aligned}
\Delta(\phi \circ f) &= div\ \nabla(\phi \circ f) = div\big(\phi'(f)\nabla f\big) \\
&= \langle \nabla f, \phi''(f)\nabla f \rangle + \phi'(f)\ div(\nabla f) \\
&= \phi''(f)\langle \nabla f, \nabla f \rangle + \phi'(f)\Delta f \\
&= \phi''(f)|\nabla f|^2 + \phi'(f)\Delta f.
\end{aligned}$$

□

O operador Laplaciano pode ainda ser expresso como sendo o traço do Hessiano. De fato, tome $X = \nabla f$ em (3.8) então

$$\begin{aligned}
\Delta f(p) = div\ \nabla f(p) &= \langle \nabla_{e_1} \nabla f, e_1 \rangle + \langle \nabla_{e_2} \nabla f, e_2 \rangle \\
&= \nabla^2 f_p(e_1, e_1) + \nabla^2 f_p(e_2, e_2) = tr(\nabla^2 f_p).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.3. *Considere* $f : S \to \mathbb{R}$ *a função diferenciável definida por*

$$f(p) = \frac{1}{2}|p - c|^2, \qquad \forall\, p \in S,$$

onde $c \in \mathbb{R}^3$ *é um ponto fixo. Como vimos no Exemplo 3.1,*

$$\nabla^2 f_p(v, w) = \langle v, w \rangle + \langle A_p(v), w \rangle \langle (p - c), N(p) \rangle$$

para todo par de vetores unitários $v, w \in T_pS$*. Em particular, temos*

$$\nabla^2 f_p(v, v) = 1 + k(v)\langle (p - c), N(p) \rangle.$$

Assim, tomando $\{e_1, e_2\}$ *direções principais de* S *em* p*, teremos*

$$\Delta f(p) = tr(\nabla^2 f_p) = \sum_{i=1}^{2} 1 + k(e_i)\langle (p - c), N(p) \rangle = 2(1 + H(p))\langle (p - c), N(p) \rangle.$$

Teorema 3.12. *(Teorema da Divergência para Superfícies). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, orientada e compacta e seja $X \in \mathfrak{X}(S)$ um campo de vetores tangentes sobre S. Então,*

$$\int_S div\ X(p)\ dp = 0.$$

Em particular,

$$\int_S \Delta f(p)\ dp = 0,$$

para toda função $f \in C^\infty(S)$.

Demonstração. Veja Teorema 6.10 no Capítulo 6 de [10]. □

3.3 Algumas Relações Entre Operadores Difrenciais

Nas seções anteriores foi possível perceber que os operadores diferenciais definidos sobre superfícies se relacionam com os operadores euclidianos. Agora veremos mais algumas dessas relações.

Proposição 3.13. *Dado uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ e um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que $S \subset W$. Seja $F \in C^\infty(W)$ uma função diferenciável e $f = F|_S$ sua restrição, então para todo $p \in S$ tem-se*

$$\overline{\Delta} F(p) = \Delta f(p) - 2H(p)\langle Grad\ F(p), N(p)\rangle + Hess\ F_p(N(p), N(p)).$$

Demonstração. Tome $\{e_1, e_2\}$ direções principais do plano tangente T_pS e considere o vetor normal $N(p)$ de modo que $\{e_1, e_2, N(p)\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Então, já que

$$\overline{\Delta} F(p) = \sum_{i=1}^{3} Hess\ F_p(e_i, e_i),$$

temos

$$\overline{\Delta} F(p) = \sum_{i=1}^{2} Hess\ F_p(e_i, e_i) + Hess\ F_p(N(p), N(p)).$$

Usando a Proposição 3.5, para cada $i = 1, 2, 3$, segue-se que

$$\begin{aligned} Hess\ F_p(e_i, e_i) &= \nabla^2 f_p(e_i, e_i) - \langle A_p(e_i), e_i\rangle\langle Grad\ F(p), N(p)\rangle \\ &= \nabla^2 f_p(e_i, e_i) - k_i(p)\langle Grad\ F(p), N(p)\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta} F(p) &= \sum_{i=1}^{2} \nabla^2 f_p(e_i, e_i) - 2H(p)\langle Grad\ F(p), N(p)\rangle + Hess\ F_p(N(p), N(p)) \\ &= \Delta f(p) - 2H(p)\langle Grad\ F(p), N(p)\rangle + Hess\ F_p(N(p), N(p)). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.14. *Dado uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ e um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que $S \subset W$. Seja $F \in C^\infty(W)$ uma função diferenciável e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ uma curva tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então,*

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} F(\alpha(t)) = Hess\ F_p(v, v) + \langle Grad\ F(p), \alpha''(0)\rangle.$$

Demonstração. De fato,

$$\frac{d}{dt}\big(F(\alpha(t)\big) = \langle Grad\ F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle. \tag{3.9}$$

Derivando (3.9) com respeito a t obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\big(F(\alpha(t)\big) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle Grad\ F(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle. \\
&= \langle d(Grad\ F)_p(v), v\rangle + \langle Grad\ F(p), \alpha''(0)\rangle \\
&= Hess\ F_p(v, v) + \langle Grad\ F(p), \alpha''(0)\rangle.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.15. *Dado uma função $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, seja $f = F|_{\mathbb{S}^2(c,r)}$ sua restrição, onde $\mathbb{S}^2(c, r)$ é uma esfera de centro c e raio r. Então, para todo ponto $p \in \mathbb{S}^2(c, r)$, temos*

$$\Delta f(p) = \overline{\Delta} F(p) - \frac{2}{r^2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(p + tp) - \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} F(p + tp).$$

Demonstração. Sabemos do Exemplo 1.4 que $N(p) = p/r$ e $H(p) = -1/r$ para todo p em $\mathbb{S}^2(c, r)$. Assim, da Proposição 3.13, segue-se que

$$\begin{aligned}
\Delta f(p) &= \overline{\Delta} F(p) - \frac{2}{r}\langle Grad\ F(p), N(p)\rangle - Hess\ F_p(N(p), N(p)) \\
&= \overline{\Delta} F(p) - \frac{2}{r^2}\langle Grad\ F(p), p\rangle - \frac{1}{r^2} Hess\ F_p(p, p).
\end{aligned}$$

Em seguida, para calcular $\langle Grad\ F(p), p\rangle$, tomemos uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = p + pt$. Assim,

$$\langle Grad\ F(p), p\rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(p + pt).$$

Considerando a mesma curva α e aplicando a Proposição 3.14 teremos

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} F(p + tp) = Hess\ F_p(p, p) + \langle Grad\ F(p), \alpha''(0)\rangle = Hess\ F_p(p, p).$$

Dessa forma, para cada $p \in \mathbb{S}^2(c, r)$ vale que

$$\Delta f(p) = \overline{\Delta} F(p) - \frac{2}{r^2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(p + tp) - \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} F(p + tp).$$

□

3.4 Fórmulas de Minkowski

As fórmulas de Minkowski são duas fórmulas integrais clássicas para superfícies regulares, compactas e orientadas. Essas fórmulas são obtidas como uma aplicação do Teorema da Divergência.

Teorema 3.16. *(Fórmulas de Minkowski) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta e orientada pela aplicação de Gauss N. Para cada ponto fixado $c \in \mathbb{R}^3$ temos*

$$\int_S \big(1 + H(p)\langle(p - c, N(p)\rangle\big)dp = 0 \tag{3.10}$$

e

$$\int_S \big(H(p) + K(p)\langle(p - c, N(p)\rangle\big)dp = 0, \tag{3.11}$$

onde H é a curvatura média e K é a curvatura Gaussiana de S. Nos referimos a (3.10) *e* (3.11)*, respectivamente, como a primeira e a segunda fórmula de Minkowski.*

Demonstração. Fixado um ponto $c \in \mathbb{R}^3$, tome a função diferenciável $f(p) = |p - c|^2/2$ definido sobre S. Sabemos, do Exemplo 3.1 e do Exemplo 3.3, que para cada $p \in S$

$$\nabla f(p) = (p - c) - \langle(p - c), N(p)\rangle N(p), \tag{3.12}$$

$$\nabla^2 f_p(v, w) = \langle v, w\rangle + \langle A_p(v), w\rangle\langle(p - c), N(p)\rangle$$

e

$$\Delta f(p) = 2\big(1 + H(p)\langle(p - c), N(p)\rangle. \tag{3.13}$$

Logo, integrando (3.13) sobre S e usando o Teorema da Divergência para superfícies obtemos a primeira fórmula de Minkowski (3.10).

Para demostrar a segunda fórmula de Minkowski, tome a função $g(p) = \langle(p - c), N(p)\rangle$. Para cada $v \in T_pS$ temos

$$\langle\nabla g, v\rangle = v(g) = \langle(p - c), dN_p(v)\rangle = \langle(p - c), -A_p(v)\rangle.$$

Por outro lado, de (3.12) temos

$$(p - c) = \nabla f(p) + \langle(p - c), N(p)\rangle N(p).$$

Logo,

$$\langle\nabla g, v\rangle = \langle\nabla f, dN_p(v)\rangle = \langle\nabla f, -A_p(v)\rangle = \langle -A_p(\nabla f), v\rangle.$$

Dessa forma, o gradiente de g é dado por:

$$\nabla g(p) = -A_p(\nabla f(p)).$$

Portanto, para cada $v \in T_pS$

$$\nabla_v \nabla g = -\nabla_v(A(\nabla f)).$$

Pela definição de derivada covariante de um campo de tensores,

$$\nabla_v(A(\nabla f)) = (\nabla_v A)(\nabla f(p)) + A_p(\nabla_v \nabla f).$$

Assim, vale que

$$\nabla_v \nabla g = -(\nabla_v A)(\nabla f(p)) - A_p(\nabla_v \nabla f).$$

Segundo a Equação de Codazzi-Mainardi podemos comutar o vetor v e $\nabla f(p)$ na derivada covariante de A na direção v. Isto é,

$$(\nabla_v A)(\nabla f(p)) = (\nabla_{\nabla f(p)} A)(v).$$

Dessa forma, o hessiano de g é dado por

$$\begin{aligned}
\nabla^2 g_p(v,v) = \langle \nabla_v \nabla g, v\rangle &= -\langle \big(\nabla_{\nabla f(p)} A\big)(v), v\rangle - \langle A_p(\nabla_v \nabla f), v\rangle \\
&= -\langle \big(\nabla_{\nabla f(p)} A\big)(v), v\rangle - \langle \nabla_v \nabla f, A_p(v)\rangle \\
&= -\langle \big(\nabla_{\nabla f(p)} A\big)(v), v\rangle - \nabla^2 f_p\big(v, A_p(v)\big) \\
&= -\langle \big(\nabla_{\nabla f(p)} A\big)(v), v\rangle - \langle A_p(v), v\rangle - \langle A_p(v), A_p(v)\rangle g(p) \\
&= -\langle \big(\nabla_{\nabla f(p)} A\big)(v), v\rangle - k(v) - |A_p(v)|^2 g(p).
\end{aligned}$$

Assim, tomando as direções principais $\{e_1, e_2\}$ de S em p, temos para cada $i = 1, 2$

$$\nabla^2 g_p(e_i, e_i) = -\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(e_i), e_i\rangle - k_i(p) - k_i^2(p) g(p).$$

Então, temos

$$\begin{aligned}
\Delta g(p) &= \nabla^2 g_p(e_1, e_1) + \nabla^2 g_p(e_2, e_2) \\
&= -tr(\nabla_{\nabla f(p)} A) - (k_1(p) + k_2(p)) - (k_1^2(p) + k_2^2(p)) g(p).
\end{aligned}$$

Já que,

$$k_1^2 + k_2^2 = (k_1(p) + k_2(p))^2 - 2k_1(p)k_2(p) = 4H^2(p) - 2K(p)$$

e pela Proposição 3.3,

$$tr(\nabla_{\nabla f(p)} A) = \langle \nabla f(p), \nabla(trA)(p)\rangle = 2\langle \nabla f(p), \nabla H(p)\rangle.$$

Vale que

$$\Delta g(p) = -2\langle \nabla f(p), \nabla H(p)\rangle - 2H(p) - 2(2H^2(p) - K(p)) g(p). \tag{3.14}$$

Por outro lado, por (3.13) temos

$$\begin{aligned}
2div(H \cdot \nabla f)(p) &= 2\langle \nabla f(p), \nabla H(p)\rangle + 2H(p)\Delta f(p) \\
&= 2\langle \nabla f(p), \nabla H(p)\rangle + 4H(p)(1 + H(p) g(p)),
\end{aligned}$$

de maneira que

$$div(2H\nabla f)(p) + \Delta g(p) = 2\big(H(p) + K(p)g(p)\big). \tag{3.15}$$

Logo, integrando o resultado obtido sobre a superfície S e usando o Teorema da Divergência para Superfície obtemos a segunda fórmula de Minkowski (3.11).

$\square$

4 Teorema Principal e Aplicações

Neste capítulo, será feita uma abordagem analítica e geométrica do primeiro autovalor do Laplaciano em superfícies regulares compactas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Assim como também serão apresentados resultados que fornecem estimativas para esses autovalores.

4.1 O Problema de Autovalor

Iniciaremos com uma breve discussão sobre o problema de autovalores do Laplaciano em superfícies regulares compactas.

Definição 4.1. *(Autovalor do Laplaciano). Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta e $\Delta : C^\infty(S) \to C^\infty(S)$ o operador Laplaciano sobre S. Um número real λ é dito autovalor de Δ quando existe alguma função $f \in C^\infty(S)$, não identicamente nula, tal que*

$$\Delta f + \lambda f = 0. \tag{4.1}$$

A função f é chamada autofunção associada ao autovalor λ.

O problema de autovalor consiste em encontrar valores reais λ que satisfaçam a equação (4.1). Esse problema aparece em vários formatos no estudo de Equações Diferenciais. Para fins ilustrativos, podemos citar como exemplo o problema do autovalor com a condição de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta f = \lambda f & em \quad \Omega, \\ f = 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um aberto limitado.

Proposição 4.2. *Se $f \in C^\infty(S)$ é uma solução não trivial do problema de autovalor, isto é, se f é não identicamente nula, então o autovalor correspondente λ é um número real não negativo.*

Demonstração. De fato, tomando f^2 segue-se que

$$\frac{1}{2}\Delta f^2 = \frac{1}{2}\Delta(f \cdot f) = f\Delta f + |\nabla f|^2 = -\lambda f^2 + |\nabla f|^2.$$

Integrando essa expressão sobre S e aplicando o Teorema da Divergência para superfícies obtemos

$$\lambda = \frac{\int_S |\nabla f|^2 \, dS}{\int_S f^2 \, dS} \geq 0.$$

Em particular, se f for constante então $\lambda = 0$. $\square$

A existência de autovalores para o operador Laplaciano em superfícies é dada pelo teorema a seguir, cuja prova pode ser encontrada em [3].

Teorema 4.3. *(Teorema Espectral). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta, então o conjunto dos autovalores do operador Laplaciano $\Delta : C^\infty(S) \to C^\infty(S)$ constituem uma sequência de números reais não-negativos*

$$(\lambda_0 = 0) < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n \to +\infty.$$

O Teorema Espectral garante a existência de infinitos autovalores para o operador Laplaciano. Em particular, voltaremos nossa atenção para o primeiro autovalor não-nulo λ_1. A seguir enunciaremos o Princípio do Mínimo para λ_1, cujos detalhes da prova podem ser vistos no Capítulo 3 de [4].

Teorema 4.4. *(Princípio do Mínimo para λ_1). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta, então para toda função $f : S \to \mathbb{R}$, não identicamente nula, que verifica a condição*

$$\int_S f(p)\, dp = 0,$$

o primeiro autovalor do Laplaciano satisfaz

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_S |\nabla f(p)|^2\, dp}{\int_S f^2(p)\, dp}. \tag{4.2}$$

Em particular, a igualdade ocorre se, e somente se, f é uma função própria de λ_1.

O Princípio do Mínimo nos fornece a desigualdade (4.2) conhecida como *Desigualdade de Poincaré*, que estabelece uma caracterização variacional para λ_1 e é essencial para o desenvolvimento do nosso trabalho.

4.2 Teorema Principal

Para provar o resultado principal dessa seção, precisaremos estimar o primeiro autovalor do operador Laplaciano sobre uma esfera $\mathbb{S}^2(c, r)$ de centro c e raio $r > 0$. Para tal, utilizaremos funções harmônicas homogêneas cuja existência é demonstrada no Capítulo 1 de [2].

Lema 4.5. *Os números $\lambda_k = \frac{k(k+1)}{r^2}$, com k sendo um inteiro não negativo, são autovalores do operador Laplaciano na esfera $\mathbb{S}^2(c, r)$. Além disso, o primeiro autovalor é*

$$\lambda_1 = \frac{2}{r^2}.$$

Demonstração. Tome $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ uma função harmônica homogênea de grau k $\big($isto é, $F(ta) = t^k F(a)$, para todo $a \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}\big)$ e f sua restrição à esfera $\mathbb{S}^2(c,r)$. Assim, vale que

$$F(a + ta) = F\big((1+t)a\big) = (1+t)^k F(a).$$

Consequentemente, para todo $p \in \mathbb{S}^2(c,r)$, teremos

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(p+tp) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (1+t)^k F(p) = kF(p) = kf(p)$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} F(p+tp) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} (1+t)^k F(p) = k(k-1)F(p) = k(k-1)f(p).$$

Logo, segue-se do Teorema 3.15 que

$$\Delta f(p) = \overline{\Delta} F(p) - \frac{2}{r^2} k f(p) - \frac{1}{r^2} k(k-1) f(p) = \overline{\Delta} F(p) - \frac{k(k+1)}{r^2} f(p),$$

isto é,

$$\Delta f(p) + \frac{k(k+1)}{r^2} f(p) = \overline{\Delta} F(p).$$

Sendo F for harmônica, então f satisfaz

$$\Delta f + \lambda_k f = 0 \qquad \textit{com} \quad \lambda_k = \frac{k(k+1)}{r^2}.$$

□

Teorema 4.6. *(Teorema Principal). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta orientável e seja $c \in \mathbb{R}^3$ seu centro de gravidade definido por*

$$c = \frac{1}{\acute{a}rea(S)} \int_S p \; dp.$$

Então, o primeiro autovalor positivo λ_1 do laplaciano de S satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\lambda_1 \leq \frac{2 \; \acute{a}rea(S)}{\int_S |p-c|^2 \; dp}. \tag{4.3}$$

Se S for conexa, então a igualdade ocorre se, e somente se, S é uma esfera centrada em c.

Demonstração. Para cada direção fixada $v_0 \in \mathbb{R}^3$, $|v_0| = 1$, tome a função

$$h(p) = \langle (p-c), v_0 \rangle \qquad p \in S.$$

Como já sabemos (veja Exemplo 3.2), o gradiente de h é dado por

$$\nabla h(p) = v_0 - \langle v_0, N(p) \rangle N(p)$$

e seu hessiano, por

$$\nabla^2 h_p(v,w) = \langle A_p(v), w\rangle\langle v_0, N(p)\rangle,$$

onde $v, w \in T_pS$. Tomando $\{e_1, e_2\}$ direções principais de S em p, segue-se que

$$\nabla^2 h_p(e_i,e_i) = \langle A_p(e_i), e_i\rangle\langle v_0, N(p)\rangle,$$

para cada $i = 1, 2$. Logo,

$$\Delta h(p) = \nabla^2 h_p(e_1,e_1) + \nabla^2 h_p(e_2,e_2) = 2H(p)\langle v_0, N(p)\rangle. \tag{4.4}$$

Além disso, observe que para cada direção fixada v_0, h verifica

$$\int_S h(p)\ dp = \int_S \langle (p-c), v_0\rangle dp = \langle \int_S p\ dp - \acute{a}rea(S)c, v_0\rangle = \langle \int_S p\ dp - \int_S p\ dp, v_0\rangle = 0.$$

Dessa forma, podemos usar a desigualdade de Poincaré (4.2) para obter:

$$\lambda_1 \int_S h^2(p)dp \leq \int_S |\nabla h(p)|^2 dp = \int_S (1 - \langle v_0, N(p)\rangle^2)dp = \acute{a}rea(S) - \int_S \langle v_0, N(p)\rangle^2 dp,$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, h é uma autofunção de λ_1.

Agora, tome $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ e denote por h_i a função h correspondente a cada direção e_i. Assim,

$$\lambda_1 \int_S h_i^2(p)\ dp \leq \acute{a}rea(S) - \int_S \langle e_i, N(p)\rangle^2\ dp, \tag{4.5}$$

para cada $i = 1, 2, 3$. Observe que

$$\sum_{i=1}^{3} h_i^2(p) = \sum_{i=1}^{3} \langle (p-c), e_i\rangle^2 = |p-c|^2$$

e

$$\sum_{i=1}^{3} \langle N(p), e_i\rangle^2 = |N(p)|^2 = 1.$$

Portanto, somando às três desigualdades (4.5), obtemos

$$\lambda_1 \int_S |p-c|^2\ dp \leq 3\ \acute{a}rea(S) - \int_S dp = 2\ \acute{a}rea(S),$$

o que prova a desigualdade (4.3).

Por outro lado, se esta desigualdade for uma igualdade, então as três desigualdades em (4.5) serão também igualdades e as funções h_1, h_2, h_3 serão autofunções de λ_1. Por (4.4), teremos

$$0 = 2H(p)\langle e_i, N(p)\rangle + \lambda_1\langle (p-c), e_i\rangle = \langle 2H(p)N(P) + \lambda_1(p-c), e_i\rangle,$$

para todo $i = 1, 2, 3$. Isto é,

$$2H(p)N(p) + \lambda_1(p - c) = 0.$$

Como $\lambda_1 > 0$, podemos escrever

$$p - c = \frac{-2H(p)}{\lambda_1} N(p).$$

Então a função $f(p) = |p - c|^2$ é tal que $\nabla f(p) \equiv 0$. Se S é conexa, f é constante sobre S. Logo, S é uma esfera centrada em c. Reciprocamente, se S é uma esfera de raio r centrada em c, então

$$\int_S |p - c|^2 \, dp = r^2 \, \acute{a}rea(S),$$

isto é,

$$\frac{2}{r^2} = \frac{2 \, \acute{a}rea(S)}{\int_S |p - c|^2 \, dp}.$$

Do Lema 4.5 segue-se que $\lambda_1 = 2/r^2$ e, portanto, λ_1 verifica a igualdade em (4.3).

$\square$

4.3 Aplicações

A primeira aplicação do Teorema Principal é um resultado demonstrado por Reilly, em 1977, no artigo *On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space* (veja [11]). Neste artigo, Reilly estabelece três estimativas geométricas para o primeiro autovalor do Laplaciano em hipersuperfícies compactas no espaço euclidiano, em particular o resultado é valido para superfícies.

Teorema 4.7. *(Teorema Reilly). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta e orientável. Então, o primeiro autovalor positivo λ_1 do Laplaciano de S satisfaz as seguintes desigualdades:*

$$\lambda_1 \leq \frac{2}{\acute{a}rea(S)} \int_S H^2(p) \, dp; \tag{4.6}$$

$$\lambda_1 \leq 2 \, \acute{a}rea(S) \frac{\int_S K^2(p) \, dp}{(\int_S H(p) \, dp)^2}; \tag{4.7}$$

$$\lambda_1 \leq 2 \Big(\frac{\acute{a}rea(S)}{3 \, vol(\Omega)} \Big)^2. \tag{4.8}$$

Onde Ω denota a região limitado por S. Se S é conexa, em cada estimativa a igualdade ocorre se e somente se S é uma esfera.

Demonstração. Para demonstrar a primeira desigualdade (4.6), multiplicaremos a desigualdade (4.3) do Teorema Principal por $\int_S H^2(p)\,dp$ e obtendo:

$$2\,\acute{a}rea(S)\int_S H^2(p)\,dp \geq \lambda_1\Big(\int_S |p-c|^2\,dp\Big)\Big(\int_S H^2(p)\,dp\Big).$$

Decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais (Veja Apêndice B) que

$$\lambda_1\Big(\int_S |p-c|^2\,dp\Big)\Big(\int_S H^2(p)\,dp\Big) \geq \lambda_1\Big(\int_S |H(p)||(p-c)|\,dp\Big)^2.$$

Como $|H(p)||p-c| \geq |H(p)\langle(p-c),N(p)\rangle|$, segue-se

$$\lambda_1\Big(\int_S |H(p)|(p-c)|\,dp\Big)^2 \geq \lambda_1\Big(\int_S H(p)\langle(p-c),N(p)\rangle\,dp\Big)^2.$$

Assim,

$$2\,\acute{a}rea(S)\int_S H^2(p)\,dp \geq \lambda_1\Big(\int_S H(p)\langle(p-c),N(p)\rangle\,dp\Big)^2.$$

Agora, aplicando a primeira fórmula de Minkowski obtemos:

$$\int_S H(p)\langle(p-c),N(p)\rangle\,dp = -\int_S dp = -\acute{a}rea(S).$$

Logo,

$$2\,\acute{a}rea(S)\int_S H^2(p)\,dp \geq \lambda_1(\acute{a}rea(S))^2$$

e portanto

$$\lambda_1 \leq \frac{2}{\acute{a}rea(S)}\int_S H^2(p)\,dp.$$

A segunda desigualdade (4.7), procede de maneira análoga, agora multiplicando a desigualdade (4.3) do Teorema Principal por $\int_S K^2(p)\,dp$ e obtendo:

$$2\,\acute{a}rea(S)\int_S K^2(p)\,dp \geq \lambda_1\Big(\int_S K(p)\langle(p-c),N(p)\rangle\,dp\Big)^2.$$

Logo, pela segunda fórmula de Minkowski, segue-se que

$$2\,\acute{a}rea(S)\int_S K^2(p)\,dp \geq \lambda_1\Big(\int_S H(p)\,dp\Big)^2$$

e portanto

$$\lambda_1 \leq 2\,\acute{a}rea(S)\frac{\int_S K^2(p)\,dp}{(\int_S H(p)\,dp)^2}.$$

Para demostrar a terceira desigualdade (4.8), multiplicamos a desigualdade do Teorema Principal por $\acute{a}rea(S) = \int_S dp$. Assim, novamente usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais, obtemos

$$\begin{aligned} 2\,(\acute{a}rea(S))^2 &\geq \lambda_1\Big(\int_S |p-c|^2\,dp\Big)\Big(\int_S dp\Big) \\ &\geq \lambda_1\Big(\int_S |p-c|\,dp\Big)^2 \\ &\geq \lambda_1\Big(\int_S \langle(p-c),N(p)\rangle\,dp\Big)^2. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.7,

$$\int_S \langle (p-c), N(p)\rangle \, dp = -3vol(\Omega).$$

Logo

$$2\ (área(S))^2 \geq 9\lambda_1 (vol(\Omega))^2$$

e portanto

$$\lambda_1 \leq 2\Big(\frac{área(S))}{3\ vol(\Omega)}\Big)^2.$$

Observe que para obter às três estimativas partimos da desigualdade (4.6) do Teorema Principal. Logo, se S é conexa, todas as desigualdades serão igualdade se, e somente se, S for uma esfera. $\square$

A segunda aplicação que vamos ver nesta seção procede do artigo *Compact Hypersurfaces in a Euclidean Space*, publicado em 1998 por Deshmukh (veja [5]). Neste artigo, ao invés de dar uma estimativa para o primeiro autovalor não nulo do Laplaciano, é demostrado que se o autovalor estiver limitado de certa forma, então a superfície tem que ser uma esfera.

Teorema 4.8. *(Teorema de Deshmukh). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta, orientável, conexa e com curvatura de Gauss K positiva. Se*

$$K(p) \leq \frac{1}{2}\lambda_1, \tag{4.9}$$

para todo $p \in S$, então S é uma esfera.

Demonstração. Considere as funções diferenciáveis $f, g : S \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(p) = \frac{1}{2}|p-c|^2 \qquad e \qquad g(p) = \langle p-c, N(p)\rangle,$$

onde $p \in S$ e c é o centro de gravidade de S. Como vimos na demonstração das fórmulas de Minkowski, os gradientes de f e g são dados por

$$\nabla f(p) = (p-c) - \langle (p-c), N(p)\rangle N(p) \qquad e \qquad \nabla g(p) = -A_p(\nabla f(p))$$

e seus Laplacianos, por

$$\Delta f(p) = 2\big(1 + H(p)\langle (p-c), N(p)\rangle\big) = 2\big(1 + H(p)g(p)\big)$$

e

$$\Delta g(p) = -2\langle \nabla H(p), \nabla f(p)\rangle - 2H(p) - 2\big(2H^2(p) - K(p)\big)g(p).$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta(g^2) &= g\Delta g + |\nabla g|^2 \\ &= -2g\langle \nabla H, \nabla f\rangle - 2Hg - 2(2H^2 - K)g^2 + |A(\nabla f)|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2\,div(H\cdot g\nabla f) &= 2\langle \nabla H, g\nabla f\rangle + 2H\,div(g\nabla f) \\ &= 2g\langle \nabla H, \nabla f\rangle + 2H\langle \nabla g, \nabla f\rangle + 2Hg\Delta f \\ &= 2g\langle \nabla H, \nabla f\rangle - 2H\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle + 4Hg(1+Hg). \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{1}{2}\Delta(g^2) + 2div(H\cdot g\nabla f) = |A(\nabla f)|^2 - 2H\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle + 2Hg + 2Kg^2.$$

Mas como, pelo Teorema de Cayle-Hamilton (Veja Apêndice A)

$$\begin{aligned} |A(\nabla f)|^2 - 2H\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle &= \langle A^2(\nabla f), \nabla f\rangle - \langle 2HA(\nabla f), \nabla f\rangle \\ &= \langle A^2(\nabla f) - 2HA(\nabla f), \nabla f\rangle \\ &= \langle \big(A^2 - 2HA)(\nabla f), \nabla f\rangle \\ &= -K|\nabla f|^2, \end{aligned}$$

temos

$$\frac{1}{2}\Delta(g^2) + 2div(Hg\nabla f) = -K|\nabla f|^2 + 2Hg + 2Kg^2. \tag{4.10}$$

Agora, observe que

$$p - c = \nabla f(p) + \langle (p-c), N(p)\rangle N(p) = \nabla f(p) + g(p)N(p).$$

Dessa forma, podemos escrever

$$2f(p) = |p-c|^2 = |\nabla f(p)|^2 + g^2(p).$$

Ou seja, $g^2 = 2f - |\nabla f|^2$ de modo que (4.10) pode ser reescrito por:

$$\frac{1}{2}\Delta(g^2) + 2\,div(Hg\nabla f) = -3K|\nabla f|^2 + 2Hg + 4Kf. \tag{4.11}$$

Integrando (4.11) e aplicando o Teorema da Divergência para superfícies teremos

$$\frac{3}{2}\int_S K(p)|\nabla f(p)|^2\,dp = \int_S H(p)g(p)dp + 2\int_S K(p)f(p)dp.$$

Por outro lado, pela primeira fórmula de Minkowski

$$\int_S H(p)g(p)\,dp = -\acute{a}rea(S).$$

Logo,

$$\frac{3}{2}\int_S K(p)|\nabla f(p)|^2 dp = -\acute{a}rea(S) + 2\int_S K(p)f(p)dp.$$

Do Teorema Principal, segue-se que

$$-\acute{a}rea(S) \leq -\frac{1}{2}\lambda_1 \int_S |p-c|^2 dp = -\lambda_1 \int_S f(p)dp.$$

De modo que,

$$\frac{3}{2}\int_S K(p)|\nabla f(p)|^2 dp \leq \int_S \big(2K(p) - \lambda_1\big) f(p)dp. \tag{4.12}$$

A desigualdade (4.12) vale para toda superfície compacta $S \subset \mathbb{R}^3$. Além disso, se S for conexa e satisfizer (4.9), então

$$0 \leq \frac{3}{2}\int_S K(p)|\nabla f(p)|^2 dp \leq \int_S \big(2K(p) - \lambda_1\big) f(p)dp \leq 0,$$

e todas as desigualdades serão igualdades. Já que $K(p) > 0$ em todo ponto p de S, então $\nabla f(p) = 0$ para todo $p \in S$ e a função f é constante. Logo, S é uma esfera.

$\square$

Referências

[1] ALÍAS, L. J. *Análisis Geométrico y Geometrıa Global de Superficies: Una Introducción Elemental*. Brasil, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[2] AXLER, S.; BOURDON, P.; WADE, R. *Harmonic function theory*. USA, New York: Springer Science & Business Media, 2013. v. 137.

[3] BÉRARD, P. *Lectures on spectral geometry*. Brasil, Rio de Janeiro: IMPA, 1986.

[4] BERGER, M.; GAUDUCHON, P.; MAZET, E. *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*. USA, New York: Springer, 1971.

[5] DESHMUKH, S. Compact Hypersurfaces in a Euclidean Space. *The Quarterly Journal of Mathematics,* v. 49, n. 1, p. 35–41, 1998.

[6] DO CARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Brasil, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

[7] HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. d. S. *Introdução algebra linear - coleção profmat*. SBM: Brasil, Rio de Janeiro, 2013.

[8] HICKS, N. J. *Notes on differential geometry*. USA, New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1965.

[9] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. USA, New York: John Wiley & Sons, 1991. v. 17.

[10] MONTIEL, S.; ROS, A. *Curves and surfaces*. Spain, Madrid: American Mathematical Soc. and Real Sociedad Matemática Espãnola, 2009. v. 69.

[11] REILLY, R. C. On the first eigenvalue of the laplacian for compact submanifolds of euclidean space. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Springer, v. 52, n. 1, p. 525–533, 1977.

Apêndice A

Neste Apêndice faremos uma breve menção ao Teorema de Cayley-Hamilton, resultado ultilizado na demonstração do Teorema de Deshmukh. Para mais detalhes sobre tal resultado veja [7].

Seja $M \in \mathcal{M}(2)$ uma matriz quadrada de ordem 2. A matriz $M - tI$, onde t é uma indeterminada e $I \in \mathcal{M}(2)$ é a matriz identidade, é chamada *Matriz Característica de* M. Isto é,

$$M - tI = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - t \end{bmatrix}.$$

Observe ainda que,

$$det(M - tI) = t^2 - (a_{11} + a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = t^2 - tr(M)t + det(M).$$

Definição A.1. *(Polinômio Característico). O determinante da matriz característica $M - tI$ resulta em um polinômio, chamado polinômio característico da matriz $M \in \mathcal{M}(2)$. Denotamos,*

$$P(t) = det(M - tI) = t^2 - tr(M)t + det(M).$$

Dado o polinômio

$$P(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0,$$

o símbolo $P(M)$ representará a matriz:

$$P(M) = a_2M^2 + a_1M + a_0I,$$

obtida de $P(t)$ substituindo-se t^2 pela matriz M^2; t por M e $t^0 = 1$ por $M^0 = I$.

Teorema A.2. *(Teorema de Cayley-Hamilton). Dado uma matriz $M \in \mathcal{M}(2)$ e $P(t)$ seu polinômio característico. Então $P(M) = 0$, onde 0 é a matriz nula de $\mathcal{M}(2)$.*

Demonstração. Como $P(t)$ é um polinômio mônico de grau 2 em t, podemos escrever

$$P(t) = t^2 - (a_{11} + a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = t^2 + b_1t + b_0, \tag{A.1}$$

onde b_1 e b_2 são números reais. Tome $C(t)$ a matriz adjunta da matriz característica $M - tI$, isto é, $C(t)$ é a transposta da matriz cujas entradas são os cofatores de $M - tI$, logo são polinômios em t. Assim, podemos escrever

$$C(t) = C_1 t + C_0, \tag{A.2}$$

com $C_0, C_1 \in \mathcal{M}(2)$. É um resultado básico das matrizes adjuntas que $det(M)I = adj(M)M$, onde $adj(M)$ denota a matriz adjunta de M. Então,

$$(M - tI)C(t) = det(M - tI)I = P(t)I.$$

Equivalentemente, por (A.1) e (A.2), segue-se que

$$(M - tI)(C_1 t + C_0) = (t^2 + b_1 t + b_0)I.$$

Dessa igualdade, temos

$$\begin{cases} -C_1 = I \\ C_1 M - C_0 = b_1 I \\ C_0 M = b_0 I. \end{cases}$$

Multiplicando cada uma das equações acima, respectivamente, por M^2, M e I, obtemos

$$\begin{cases} -C_1 M^2 = M^2 \\ C_1 M^2 - C_0 M = b_1 M \\ C_0 M = b_0 I. \end{cases}$$

Agora somando as equações acima membro a membro, vale que

$$P(M) = M^2 + b_1 M + b_0 I = 0.$$

□

Seja V um espaço vetorial. Dado $[T]$ a matriz de uma aplicação linear $T : V \to V$, o polinômio caracteristico de T é definido como sendo o polinômio característico de $[T]$.

Corolário A.3. *Dado $A_p : T_pS \to T_pS$ o Endomorfismo de Weingarten de S em p, temos que*

$$\big(A_p^2 - 2H(p)A_p\big)(v) = -K(p)v,$$

para todo $v \in T_pS$.

Demonstração. De fato, o polinômio característico de A_p é dado por

$$P(t) = det([A_p] - tI) = t^2 - tr(A)t + det(A) = t^2 - 2H(p)t + K(p).$$

Dessa forma, pelo Teorema de Cayley-Hamilton

$$P(A_p) = A_p^2 - 2H(p)A_p + K(p)I = 0.$$

Logo,

$$A_p^2(v) - 2H(p)A_p(v) + K(p)v = \big(A_p^2 - 2H(p)A_p\big)(v) + K(p)v = 0.$$

Como queríamos demonstrar. $\square$

Apêndice B

Neste Apêndice vamos tratar da Desigualdade de Cauchy-Scwharz para Integrais, resultado ultilizado na demonstração do Teorema de Reilly. Para mais detalhe veja [9].

No espaço de funções $C^\infty(S)$ definamos o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_S f(p)g(p)\ dp. \tag{B.1}$$

O produto (B.1) está definido, em geral, no espaço $L^2(S)$ das funções contínuas em S que verificam

$$\int_S f(p)^2\ dp < +\infty$$

e define uma métrica para $L^2(S)$:

$$||f|| = (\langle f, f\rangle)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_S f(p)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{B.2}$$

Teorema B.1. *(Desigualdade de Cauchy-Scwharz para Integrais). Dados $f, g \in C^\infty(S)$. A métrica $||.|| : C^\infty(S) \to C^\infty(S)$ definida por* (B.2) *verifica a desigualdade de Cauchy-Scwharz:*

$$\int_S f(p)g(p)\ dp \leq \left(\int_S f(p)^2\ dp\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_S g(p)^2\ dp\right)^{\frac{1}{2}}.$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, $\{f, g\}$ são linearmente dependentes.

Demonstração. Se $g \equiv 0$ então $\langle f, 0\rangle = 0$ e a desigualdade é trivialmente satisfeita. Consideremos então g não identicamente nula. Para cada constante c temos

$$\begin{aligned}
0 \leq ||f - cg||^2 &= \langle f - cg, f - cg\rangle = \int_S (f - cg)^2\ dp \\
&= \int_S f^2\ dp - 2c\int_S fg\ dp + c^2\int_S g^2\ dp \\
&= \langle f, f\rangle - 2c\langle f, g\rangle + c^2\langle g, g\rangle \\
&= \langle f, f\rangle - c\langle f, g\rangle + c\,[c\langle g, g\rangle - \langle f, g\rangle].
\end{aligned}$$

Tome $c = \langle f, g\rangle / \langle g, g\rangle$. Então o termo que está entre colchetes na desigualdade acima é nulo. Logo,

$$0 \leq \langle f, f\rangle - \frac{\langle f, g\rangle}{\langle g, g\rangle}\langle f, g\rangle = ||f||^2 - \frac{|\langle f, g\rangle|^2}{||g||^2}.$$

Multiplicando por $||g||^2$, transferindo o ultimo termo à esquerda e tomando as raízes quadradas, obtemos

$$|\langle f, g\rangle| \leq ||f||\;||g||.$$

Ou seja,

$$\int_S f(p)g(p)\;dp \leq \Big(\int_S f(p)^2\;dp\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_S g(p)^2\;dp\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

$\square$