UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO EM MATEMÁTICA BACHARELADO
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

MAXMILIAN BARROS DE SIQUEIRA

TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E APLICAÇÕES NO ESTUDO DE EDP'S

MACEIÓ
2022

MAXMILIAN BARROS DE SIQUEIRA

TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES E APLICAÇÕES NO ESTUDO DE EDP’S

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Colegiado do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renan Dantas Medrado

MACEIÓ

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA BACHARELADO
Fone: 3214-1405 / E-mail: coordenacao.mat@im.ufal.br

DECLARAÇÃO DE NOTA DE TCC

Informamos à Coordenação do Curso de Graduação em Matemática Bacharelado que o Trabalho de Conclusão de Curso do(a) aluno(a) **MAXMILIAN BARROS DE SIQUEIRA**, matrícula nº **17110499**, intitulado **"Teoria das Distribuições e suas Aplicações em EDP'S"**, foi avaliado e recebeu da Banca Examinadora a seguinte nota: **__10__** (**dez**), média obtida a partir das seguintes notas atribuídas pelos componentes da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Renan Dantas Medrado (Orientador): ____10___
Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena: __10__
Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo: __10___

Maceió, _11__ de março de 2022.

Documento assinado digitalmente
gov.br
Renan Dantas Medrado
Data: 11/03/2022 14:45:59-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Renan Dantas Medrado

Documento assinado digitalmente
gov.br
Rafael Nobrega de Oliveira Lucena
Data: 11/03/2022 12:35:14-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena

Documento assinado digitalmente
gov.br
Marcio Cavalcante de Melo
Data: 11/03/2022 12:03:38-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo

Ao meu pai, José Teixeira de Siqueira; aos meus avôs, José Barros e Hermínio Siqueira; e à minha bisavó Sofia Maria.

EM MEMÓRIA

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a chance de seguir meu sonho e por ter me apoiado até aqui.

Em particular, agradeço às mulheres que sempre lutaram pelo meu bem e me ensinaram quase tudo de bom que sei da vida. Estes agradecimentos são para a minha mãe, Gilvaneide de Oliveira Barros e à minha avó, Judite de Oliveira Barros. Mulheres que sempre foram motivos de orgulho para mim e que espero ser também orgulho para elas.

Agradeço à minha namorada, Monique Paulo de Melo, por nunca desacreditar de mim, por toda a paciência que teve nos vários dias que fiquei muito ocupado e por todo o carinho que recuperou meu coração de tudo que tive que enfrentar até aqui.

Agradeço a José Leite de Melo pela sua inabalável parceria, por cada conversa que tivemos e por tudo que o senhor fez por mim.

Agradeço aos meus irmãos, Thiago, Thamires, Guilherme e Miguel. Os quais nunca me deixaram sentir o que é não ter um amigo e sempre puxaram minha orelha quando necessário.

Agradeço ao meu irmão da matemática, Gleydson Santos. Pela sua amizade incomparável e pelas horas dividas demonstrando teoremas e compartilhando dúvidas.

Agradeço aos meus professores do ensino básico que me inspiraram e me apoiaram e hoje fazem parte do meu coração: ao Professor José Marco e à Professora Jaciane Cavalcante, obrigado por dedicarem suas vidas à educação e por plantar em mim o desejo de continuar estudando.

Agradeço aqueles que me acolheram em sua casa quando eu me mudei para Maceió e não tinha onde dormir: a Juliana Santos e Ubirajara José, obrigado por me apoiar e pelo carinho com o qual cuidaram de mim.

Aos meus amigos que a matemática me trouxe: Bárbara Amorim, Davi Barros, Gleide Melo, Haniel Lemos, Hegel Marinho, Victor Ferreira e Vinícius Guardiano, obrigado por cada conversa, por cada momento (bons ou difíceis) e pela alegria de estar com vocês.

Agradeço aos servidores, Marileide Fonseca, Tia Maria, Lucivaldo Victor e Flávio Santos por todas as incontáveis vezes em que ofereceram seus apoios sem pensar duas vezes.

Aos professores que tive o prazer de conhecer durante a graduação: Rafael Lucena e Márcio Cavalcante. Obrigado por tudo que já fizeram por mim, por cada palavra de orientação e pela amizade que sempre mantivemos.

Agradeço ao meu orientador, Professor Renan Medrado, pela enorme paciência enquanto eu tive que me dedicar a mais tarefas simultâneas do que deveria, por cada conversa descontraída antes ou depois dos seminários e, principalmente, por todas as horas de dedicação a este trabalho, aos PIBICs e à minha formação.

O importante não é aquilo que fazem de nós, mas o que nós mesmos fazemos do que os outros fizeram de nós.

(Jean-Paul Sartre)

RESUMO

No presente trabalho, fazemos um estudo dos funcionais lineares contínuos definidos nas funções suaves de suporte compacto a valores complexos, conhecidos como distribuições. Estudamos os aspectos elementares do espaço das distribuições e desenvolvemos a ferramentas necessárias para o estudo de equações diferenciais parciais, como por exemplo transformada de Fourier em um sentido distribucional. No final é apresentado um estudo de resolubilidade e regularidade de algumas equações diferenciais parciais no ponto de vista distribucional.
Palavras-chave: EDP, Distribuições, Transformada de Fourier.

ABSTRACT

The aim of this work is to study continuous linear functionals defined in the space of compactly supported smooth functions to complex values, called distributions. We studied the elementary aspects of the space of distributions and present important tools for the study of partial differential equations, such as the Fourier transform in a distributional sense. At the end, a study of solvability and regularity of some partial differential equations in the distributional point of view is presented.
Keywords: PDE, DISTRIBUTION, FOURIER TRANSFORM.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Considere as equações

$$i)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \quad ii)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$$

Se quisermos encontrar funções $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que satisfaçam as equações acima, então o cálculo clássico pode não ser suficiente para alcançarmos todas as soluções possíveis. Com efeito, a função $u(x,y) = |x|$ satisfaz $i)$, mas não satisfaz $ii)$, pois $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ não está definida no eixo Ox.

Para suprimir esta deficiência, podemos pensar em restringir o espaço de soluções àquelas obtidas com as ferramentas de cursos regulares em cálculo diferencial e integral e que satisfazem ambas as equações simultaneamente. Por outro lado, podemos seguir outro caminho que é obtido ao introduzir novas ferramentas para o nosso estudo (a saber, uma generalização de derivação e de funções deriváveis). O seguinte exemplo nos mostra que a segunda opção pode ser mais adequada.

Dada uma função $v \in L^1(\mathbb{R})$ podemos definir

$$F[v](\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} v(x)dx.$$

Além disso, mostramos que (veja a seção 4.1) que

$$F[v'](\xi) = i\xi F[v](\xi).$$

Note que o lado direito sempre está bem definido (apenas com a hipótese de v ser integrável) enquanto, no lado esquerdo, precisamos pedir mais hipóteses (mais precisamente, pediremos que $v \in S$, conforme o Teorema 4.1.8). Deste modo, seria conveniente ter uma teoria em que fosse possível "derivar"funções que não são deriváveis e preservar a identidade acima.

Um outro caminho que a ilustração acima nos indicaria é a criação de um conceito de derivada "fraca" o qual existe e é útil em diversos casos. Todavia, há casos em que esse caminho não é suficiente, como ilustraremos a seguir.

Podemos mostrar (veja **[4]**) que se u é solução de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \tag{1.1}$$

então

$$\int\int u\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) dxdy = \int\int F\phi dxdy \tag{1.2}$$

para cada função ϕ que se anula no complementar de algum conjunto compacto e cujas derivadas de ordem dois são contínuas. Reciprocamente, se u satisfaz (1.2) para cada ϕ, possuindo as derivadas de ordem dois contínuas e possuindo a propriedade de se anular no complementar de algum conjunto compacto, então u é solução de (1.1).

Deste modo, a solução da equação pode ser reinterpretada por: "testar se a equação acima é satisfeita para cada ϕ." A priori parece um caminho mais complicado, entretanto note que o novo "conceito de solução"está bem definido mesmo quando a função u não é derivável. Em outras palavas estamos estudando o operador linear

$$L(\phi) = \int\int F\phi dxdy.$$

Assim, surge uma pergunta natural: *podemos definir uma "generalização"de derivada para funcionais lineares U de modo que* $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = L$*?* Caso conseguíssemos, poderíamos chamar U de solução da equação. É importante destacar que nessa generalização consideraríamos operadores mais gerais do que os operadores integrais (isto é, os operadores não precisam se escrever da forma $U(\phi) = \displaystyle\int\int G\phi dxdy$, para alguma função G).

Tendo isto em mente, iniciaremos a construção das funções testes, as quais serão um pouco diferentes daquelas usadas acima. Em seguida, apresentaremos os funcionais lineares desejados para o estudo de nossas equações, os quais serão chamados de distribuições.

A seguir, uma apresentação rápida dos resultados estudados neste trabalho.

Na seção 2.1, estudamos o espaço das funções suaves e de suporte compacto definidas em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (as quais são conhecidas por funções-teste e denotamos o conjunto das funções-teste em Ω por $C_c^\infty(\Omega)$) e vimos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não é vazio ao mostrar que a seguinte função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{(|x|^2-1)^{-1}}, & \text{quando } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{quando } |x| > 1. \end{cases}$$

é uma função-teste.

Veremos que o espaço das funções-teste é denso no espaço das funções integráveis e também veremos a construção das chamadas funções de corte (também conhecidas como bump) em um conjunto compacto.

No capítulo 3, definimos os funcionais lineares conhecidos como distribuições e o conjunto das distribuições em um aberto Ω será denotado por $\mathscr{D}'(\Omega)$. Veremos que cada função localmente integrável define uma distribuição e por esse motivo é comum considerar uma “inclusão” do espaço das funções localmente integráveis no espaço das distribuições. Além disso, definimos a distribuição delta de Dirac (que possui diversas aplicações e que não pode ser representada como uma função localmente integrável).

Destacamos que foram estabelecidas diversas operações para o espaço das distribuições. As definições de soma de distribuições e da multiplicação de escalar por distribuição foram definidas de modo usual, aproveitando a definição de tais operações no caso de transformações lineares cujo contradomínio e o corpo do espaço vetorial do domínio são $\mathbb{C}$. A estratégia para definição das demais operações foi encontrar uma definição “equivalente” para elas no espaço das funções localmente integráveis (ou em um espaço mais regular, se necessário) tal que a definição “equivalente” possa ser estabelecida para distribuições. Usando essa estratégia nós definimos multiplicação de uma função por uma distribuição, mudança de variável e derivada parcial de distribuições (neste ponto gostaríamos de destacar que no caso em que a distribuição é uma função localmente integrável é comum dizer que a derivada parcial da distribuição é a derivada fraca da função).

Na seção 3.5, obtemos resultados interessantes ao estudar partições da unidade, os quais nos permitiram definir o suporte de uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ como sendo a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é nulo.

Na seção 3.6, caracterizamos a continuidade de funcionais em $C_c^\infty(\Omega)$. E vimos ainda uma equivalência importante para a compacidade do suporte de uma distribuição.

Na seção 3.8, estudamos a convergência no espaço das distribuições. Estabelecemos uma série de resultados, a saber: a coincidência da derivada de uma distribuição com o limite dos quocientes de Newton da mesma; a continuidade da derivada de distribuições; a função delta de Dirac como limite de uma sequência de distribuições; a inclusão $L^1_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega)$; e que toda distribuição é limite de uma sequência de distribuições com suporte compacto.

No capítulo 4, estudamos a transformada de Fourier (denotada por $F[\phi]$ ou $\widehat{\phi}$) nos espaços de Schwartz (S). Ademais, definimos a convergência de uma sequência $\{\phi_j\}_{j\in N}$ contida em S.

Definimos uma distribuição temperada como um funcional linear e contínuo em S e denotamos o espaço das distribuições temperadas por S'. Também definimos a transformada de Fourier para $u \in S'$.

No capítulo 5, estudamos o exemplo de Chi Min-You que estabeleceu uma equação que possui soluções que (dependendo do valor de n na equação 1.3) estabelece diversos exemplos de soluções de uma *EDP* que não são funções regulares, mas são distribuições.

$$\begin{cases} Y_n(u) = u_{tt} - t^2 u_{xx} - (4n+1)u_x = 0, \ \ (x,t) \in \mathbb{R}^2; \\ u(x,0) = \mu(x); \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Também estudamos o exemplo de Grushin-Garabedian que estabeleceu o seguinte operador: $P = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) + i(x+iy)\partial_z$ que não é localmente resolúvel. Provando que mesmo escolhendo espaços muito regulares, podemos ter operadores que não possuem soluções tão regulares quanto.

2 PRÉ-REQUISITOS

Neste capítulo, faremos os principais pré-requisitos para a leitura deste trabalho.

2.1 Funções-teste

Definição 2.1.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dada uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dizemos que o suporte, $S(f)$, de f é o fecho do conjunto fora do qual a função se anula, i.e.,

$$S(f) = \overline{\{x \in \Omega \; ; \; f(x) \neq 0\}}.$$

Definição 2.1.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Definimos o conjunto das funções-teste em Ω por

$$C_c^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C}) \; ; \; S(\phi) \text{ é compacto}\}.$$

Logo mais, apresentaremos um exemplo (2.1.5) que mostra que o espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ não é vazio. Para isso, vamos assumir os seguintes resultados.

Teorema 2.1.3. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $f : I \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em toda parte de I, então, para $x, y \in I$,

$$||f(y) - f(x)|| \leq s \cdot |y - x|,$$

onde $s = \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} \{||f'\big(x + t(y-x)\big)||\}$.

Corolário 2.1.4. Seja $f : I \to \mathbb{R}^n$ contínua em I e diferenciável em $I - F$, onde $F \subset I$ é fechado e $f(F) = \{0\}$. Se $x \in F$ e $f'(y) \to 0$ quando $y \in I - F$ e $y \to x$, então $f'(x)$ existe e $f'(x) = 0$.

Deste modo, podemos construir com detalhes o seguinte exemplo clássico de função-teste.

Exemplo 2.1.5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Da continuidade das funções exponencial e constante, concluímos que f é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$.

Ademais,

$$\text{i) } \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 = f(0);$$
$$\text{ii) } \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0).$$

Portanto, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, ou seja, f é contínua em $\mathbb{R}$.

Além disso, $f'(x)$ existe em $x \neq 0$.

Para $x = 0$, temos

$$\text{i)} \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = f(0);$$

$$\text{ii)} \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{t\to\infty} t^2 e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{e^t} = 0.$$

Na última igualdade, utilizamos a regra de L'Hôspital duas vezes.

Logo, pelo corolário 2.1.4, $f'(0) = 0$.

Este resultado se aplica as n-ésimas derivadas de $f(x)$, pois suas derivadas são somas de produtos de funções racionais pela própria função $f(x)$. Logo, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Agora defina $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ por

$$\phi(x) = f(1-|x|^2) = \begin{cases} exp[(|x|^2-1)^{-1}] & \text{se } |x|^2 - 1 < 0 \\ 0 & \text{se } |x|^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

i.e.,

$$\phi(x) = \begin{cases} exp[(|x|^2-1)^{-1}] & \text{se } |x|^2 < 1 \\ 0 & \text{se } |x|^2 \geq 1 \end{cases}$$

Sendo assim, $S(\phi) \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, pois $S(\phi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |x| \leq 1\}$ e é fechado por definição, consequentemente, $S(\phi)$ é compacto e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Como ϕ é contínua, ϕ é integrável em conjuntos compactos e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi = \int_{S(\phi)} \phi = k \in \mathbb{R}.$$

Deste modo, considere $\phi_0 = \dfrac{\phi}{k}$. Logo, $\displaystyle\int \phi_0 = \frac{1}{k}\int \phi = \frac{k}{k} = 1.$

Assim, não só existem funções-teste, como também existe função-teste, ϕ, com as seguintes propriedades $\displaystyle\int \phi dx = 1$, $0 \leq \phi(x) \leq 1$ e $S(\phi) \subset \{x \,;\, |x| \leq 1\}$.

A seguir, vamos definir uma importante classe de funções: as funções localmente integráveis.

Definição 2.1.6. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é Lebesgue-mensurável e, para todo compacto $K \subset \Omega$,

$$\int_K |f| dx < \infty,$$

então dizemos que f é localmente integrável. Denotamos o espaço das funções localmente integráveis em Ω por $L^1_{loc}(\Omega)$.

Observação 2.1.7. Estabeleceremos a seguinte notação que será utilizada daqui em diante:

- Se $k \in \mathbb{N}$, então dizemos que um multi-índice de ordem k é uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tal que $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ e

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = k.$$

- Se $|\alpha| = k \geq 1$ e $u \in C^\infty(\Omega)$, denotamos

$$\partial^\alpha u := \frac{\partial^k u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$$

desde que a derivada mista exista;

- Por simplicidade, estabelecemos $\partial^\alpha u = u$ quando $|\alpha| = 0$;
- $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n!$;
- Se $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, então

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n};$$

- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$;
- Por fim, reescreveremos os conhecidos conjuntos:
  i) $C^k(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ; } D^\alpha u \text{ existe e é contínua para todo } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k\}$;
  ii) $C^\infty(\Omega) := \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N} - \{0\}} C^k(\Omega)$.

O teorema a seguir mostra que sempre é possível aproximar funções em L^1_{loc} por funções regulares.

Teorema 2.1.8. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \phi dx = 1$, $\phi \geq 0$ e $S(\phi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \text{ ; } |x| \leq 1\}$. Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e, para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$f_\varepsilon(x) = \int f(x - \varepsilon y)\phi(y)dy = \varepsilon^{-n} \int f(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy,$$

então

a) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

b) Se $f(x) = 0$ em quase todo ponto fora de um conjunto fechado A, então

$$S(f_\varepsilon) \subset A + \{x \in \mathbb{R}^n \text{ ; } |x| \leq \varepsilon\};$$

c) Se f é contínua e $S(f)$ é compacto, então $f_\varepsilon \to f$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$.

Prova: a) Sejam $x,x' \in \mathbb{R}^n$. Como ϕ possui suporte compacto,

$$S\Big(\phi\Big(\frac{x-\cdot}{\varepsilon}\Big)\Big) = x - \varepsilon S\Big(\phi\Big(\cdot\Big)\Big)$$

e

$$S\Big(\phi\Big(\frac{x'-\cdot}{\varepsilon}\Big)\Big) = x' - \varepsilon S\Big(\phi\Big(\cdot\Big)\Big),$$

existem $r_1, r_2 > 0$ (dependendo de ε) tais que $S\Big(\phi\Big(\frac{x-\cdot}{\varepsilon}\Big)\Big) \subset B(0,r_1)$ e $S\Big(\phi\Big(\frac{x'-\cdot}{\varepsilon}\Big)\Big) \subset B(0,r_2)$.

Defina $r = \max\{r_1, r_2\}$ e $B = B(0,r)$. Deste modo, temos,

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x')| &= \varepsilon^{-n}\Big|\int_B f(y)\Big[\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) - \phi\Big(\frac{x'-y}{\varepsilon}\Big)\Big]dy\Big| \\
&\leq \varepsilon^{-n}\int_B \Big|f(y)\Big|\Big|\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) - \phi\Big(\frac{x'-y}{\varepsilon}\Big)\Big|dy \\
&\leq \varepsilon^{-n}\sup_y \Big|\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) - \phi\Big(\frac{x'-y}{\varepsilon}\Big)\Big| \int_B \Big|f(y)\Big|dy \\
&= L\sup_y \Big|\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) - \phi\Big(\frac{x'-y}{\varepsilon}\Big)\Big| \\
&\leq \frac{L}{\varepsilon}\sup_y \Big\{|x-x'| \cdot \sup_{0\leq t\leq 1}\Big|\phi'\Big(t\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) + (1-t)\Big(\frac{x'-y}{\varepsilon}\Big)\Big)\Big|\Big\} \\
&\leq M|x-x'|,
\end{aligned}$$

em que $L = \varepsilon^{-n}\int_B |f(y)|dy$ e $M = \dfrac{L}{\varepsilon}\|\phi'\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Portanto, f_ε é lipschitziana e, consequentemente, contínua.

Afirmação: $\partial^\alpha f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n-|\alpha|}\int f(y)\partial^\alpha\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)dy.$

Faremos a demonstração da afirmação por indução sobre $|\alpha|$. Seja $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Para $|\alpha| = 1$, existe $i \in \{1, ...n\}$ tal que

$$\alpha_j = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ 1 & \text{se } j = i \end{cases}$$

Neste caso, $\partial^\alpha f_\varepsilon(x)$ se reduz a uma derivada parcial.

Para qualquer elemento básico e_i, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial e_i}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f_\varepsilon(x+he_i) - f_\varepsilon(x)}{h} \\
&= \varepsilon^{-n}\lim_{h\to 0}\Big(\frac{1}{h}\int_{S_x \cup S_{x+he_i}} f(y)\Big[\phi\Big(\frac{x-y+he_i}{\varepsilon}\Big) - \Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\Big]dy\Big)
\end{aligned}$$

Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = \phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon} + te_i\Big)$.

Como $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, pelo teorema do valor médio, temos $r \in [0,1]$ tal que,

$$\begin{aligned}
\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon} + \frac{h}{\varepsilon}e_i\Big) - \phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) &= \varphi\Big(\frac{h}{\varepsilon}\Big) - \varphi(0) \\
&= \frac{h}{\varepsilon}\varphi'\Big(\frac{rh}{\varepsilon}\Big) \\
&= \frac{h}{\varepsilon}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Big(\frac{x-y+rhe_i}{\varepsilon}\Big).
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial e_i}(x) &= \varepsilon^{-n}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{S_x \cup S_{x+he_i}} f(y)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Big(\frac{x-y+he_i}{\varepsilon}\Big)\frac{h}{\varepsilon}dy \\
&= \varepsilon^{-n-1}\int_{S_x} f(y)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)dy.
\end{aligned}$$

Assim, podemos mostrar a continuidade de $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial e_i}$ do mesmo modo que mostramos a continuidade de f_ε. Agora, suponha que para todo multi-índice β tal que $|\beta| = k$ temos a continuidade de $\partial^\beta f$ e que

$$\partial^\beta f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n-|\beta|}\int f(y)\partial^\beta \phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)dy.$$

Sejam $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ com $|\alpha| = k+1$ e j o primeiro índice tal que $\alpha_i \neq 0$, tome $\beta = (\beta_1,...,\beta_n) = \alpha - e_j$. Assim,

$$\partial^\alpha f_\varepsilon(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f_\varepsilon}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\partial^\beta f_\varepsilon)(x).$$

Pela hipótese de indução temos,

$$\partial^\alpha f_\varepsilon(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\partial^\beta f_\varepsilon)(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\varepsilon^{-n-|\beta|}\int f(y)\Big[\partial^\beta \phi\Big(\frac{x-y+he_j}{\varepsilon}\Big) - \partial^\beta\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\Big].$$

Pelo teorema do valor médio, existe $c \in (0,1)$ tal que

$$\partial^\alpha f_\varepsilon(x) = \lim_{h\to 0}\varepsilon^{-n-|\alpha|}\int f(y)\partial^\alpha\phi\Big(\frac{x-y+che_j}{\varepsilon}\Big)dy = \varepsilon^{-n-|\alpha|}\int f(y)\partial^\alpha\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)dy.$$

Assim como queríamos.

b) Primeiro note que, como A é fechado e $B[0,\varepsilon]$ é compacto temos que $A+B[0,\varepsilon]$ é fechado. Consequentemente $\mathbb{R}^n \setminus (A+B[0,\varepsilon])$ é aberto. Deste modo, se $x_0 \notin A+B[0,\varepsilon]$ então existe $r>0$ tal que

$$x \notin A+B[0,\varepsilon], \tag{2.1}$$

sempre que $|x-x_0|<r$. Assim, dado $x \in B(x_0,r)$ temos que se $|x-y|<\varepsilon$ então $y \notin A$ (pois, caso contrário, teríamos $x = y+x-y \in A+B[0,\varepsilon]$ e por (2.1) isso não pode ocorrer). Isto é, se $x \in B(x_0,r)$ e $|x-y|<\varepsilon$ então $y \notin A$.

Consequentemente, como $S(\phi) \subset B[0,1]$ e $f \equiv 0$ em quase toda parte fora de A temos que

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\int f(y)\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)dy = \varepsilon^{-n}\int_{|x-y|\leq\varepsilon} f(y)\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)dy = 0,$$

quando $|x-x_0|<r$. Em que na última igualdade foi usado que $f \equiv 0$ em quase toda parte de $B[x,\varepsilon] \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, quando $|x-x_0|<r$. Concluindo que se $x_0 \notin A+B[0,\varepsilon]$ então existe uma vizinhança aberta de x_0 em que f_ε se anula. Portanto, $S(f_\varepsilon) \subset A+B[0,\varepsilon]$.

c) Seja f contínua com suporte compacto.

Pelo que vimos em **b)**, $S(f_\varepsilon)$ é compacto, pois $S(f_\varepsilon) \subset S(f)+B[0,\varepsilon]$.

Do item **a)**, concluímos que $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, como $\phi \geq 0$ e $\int \phi(y)dy = 1$ temos,

$$\begin{aligned}
|f(x)-f_\varepsilon(x)| &= \Big|\int f(x)\phi(y)dy - \int f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy\Big| \\
&= \Big|\int \Big(f(x)-f(x-\varepsilon y)\Big)\phi(y)dy\Big| \\
&\leq \sup_y\{|f(x)-f(x-\varepsilon y)|\}\int \phi(y)dy \\
&= \sup_y\{|f(x)-f(x-\varepsilon y)|\}
\end{aligned}$$

Como f é contínua e possui suporte compacto temos que f é uniformemente contínua. Assim,

$\forall \varepsilon_0 > 0, \exists \delta > 0$ tal que, $|\varepsilon| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x-\varepsilon y)| < \varepsilon_0$, para cada $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Portanto, para cada $\varepsilon_0 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $\varepsilon < \delta$ então

$$|f(x)-f_\varepsilon(x)| \leq \sup_y |f(x)-f(x-\varepsilon y)| < \varepsilon_0,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, $f_\varepsilon \to f$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$. $\square$

Corolário 2.1.9. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ e f_ε é definido como no teorema acima, então

$$\|f_\varepsilon\|_1 = \int |f_\varepsilon| dx \leq \int |f| dx = \|f\|_1$$

e

$$\|f_\varepsilon - f\|_1 \to 0 \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Prova: Note que, pelo Teorema de Tonelli temos que,

$$\begin{aligned} ||f_\varepsilon||_1 &= \int \Big| \int f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy \Big| dx \\ &\leq \int \int \Big| f(x-\varepsilon y)\phi(y) \Big| dydx \\ &= \int \int \Big| f(x-\varepsilon y)\phi(y) \Big| dxdy. \end{aligned}$$

Como $\phi \geq 0$, $\displaystyle\int |f(x+z)|dx = \|f\|_1$ (para cada $z \in \mathbb{R}^n$) e $\displaystyle\int \phi(y)dy = 1$ temos que

$$\begin{aligned} ||f_\varepsilon||_1 &\leq \int \int \Big| f(x-\varepsilon y)\phi(y) \Big| dxdy \\ &= \int \phi(y) \int \Big| f(x-\varepsilon y) \Big| dxdy \\ &= \int \phi(y) ||f||_1 dy \\ &= ||f||_1 \int \phi(y)dy = ||f||_1. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$||f_\varepsilon||_1 \leq ||f||_1.$$

Além disso, dado $\delta > 0$, o Teorema 2.1.8 garante que existe g contínua e com suporte compacto tal que $||f-g||_1 < \delta$.

Então, pela desigualdade de Minkowski:

$$||f - f_\varepsilon||_1 = ||f - g + g - g_\varepsilon + g_\varepsilon - f_\varepsilon||_1 \leq ||f-g||_1 + ||g - g_\varepsilon||_1 + ||g_\varepsilon - f_\varepsilon||_1.$$

Note que

$$
\begin{aligned}
g_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x) &= \varepsilon^{-n}\int g(y)\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)dy - \varepsilon^{-n}\int f(y)\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)dy \\
&= \varepsilon^{-n}\int [g(y)-f(y)]\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)dy \\
&= \varepsilon^{-n}\int (g-f)(y)\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)dy \\
&= (g-f)_\varepsilon(x).
\end{aligned}
$$

Desta forma,

$$
\begin{aligned}
||f_\varepsilon - f||_1 &\leq ||f-g||_1 + ||g-g_\varepsilon||_1 + ||(g-f)_\varepsilon||_1 \\
&< ||f-g||_1 + ||g-g_\varepsilon||_1 + ||g-f||_1 \\
&= 2||f_\varepsilon - g||_1 + ||g-g_\varepsilon||_1.
\end{aligned}
$$

Pelo item **c)** do Teorema 2.1.8, $g_\varepsilon \to g$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$. Deste modo, para ε suficientemente pequeno, $||g-g_\varepsilon||_1 < \delta$.

Portanto, dado $\varepsilon_0 > 0$ qualquer, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $\varepsilon \in (0, min\{\delta_1, \delta_2\})$, então $||f_\varepsilon - g||_1 < \dfrac{\varepsilon_0}{3}$ e $||g-g_\varepsilon||_1 < \dfrac{\varepsilon_0}{3}$.

Sendo assim, se $\varepsilon \in (0, min\{\delta_1, \delta_2\})$, então

$$
||f_\varepsilon - f||_1 < \frac{2\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} = \varepsilon_0.
$$

□

O corolário 2.1.10 estabelece a existência das importantes funções bump (ou funções corte).

Corolário 2.1.10. Seja K um subconjunto compacto de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi \in [0,1]$ e $\psi = 1$ numa vizinhança de K.

Prova: Seja $\delta = d(K, \mathbb{R}^n - \Omega) = inf\{||x-y|| \,;\, x \in K, y \notin \Omega\}$.

Temos $\delta > 0$. De fato, uma vez que $K \subset \Omega$ e Ω é aberto, para qualquer $k \in K$, existe $r_k > 0$ tal que $B(k, r_k) \subset \Omega$. Deste modo, podemos construir uma cobertura aberta de K,

$$
\mathscr{C} = \Big\{B\Big(k, \frac{r_k}{2}\Big)\Big\}_{k \in K}.
$$

Como K é compacto, $\mathscr{C}$ admite subcobertura finita, ou seja, existem $k_1, k_2, ..., k_m \in K$ tais que

$$
K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B\Big(k_j, \frac{r_{k_j}}{2}\Big) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(k_j, r_{k_j}) \subset \Omega.
$$

Defina

$$r = \inf\left\{\frac{r_{k_j}}{2}\ ;\ j \in \{1,...,m\}\right\} > 0.$$

Dados $y \in \mathbb{R}^n - \Omega$ e $k \in K$, existe $j_0 \in \{1,...,m\}$ tal que $k \in B\left(k_j, \frac{r_j}{2}\right)$. Por outro lado, $y \notin \bigcup_{j=1}^{m} B(k_j, r_{k_j})$, assim

$$d(y,K) \geq d(y,k_j) - d(k,k_j) \geq r_{k_j} - \frac{r_{k_j}}{2} = \frac{r_{k_j}}{2} \geq r.$$

Pela definição de ínfimo, $\delta \geq r > 0$. Logo, $\delta > 0$.

Tome ε e ε_1 tais que $0 < \varepsilon < \varepsilon_1 < \varepsilon + \varepsilon_1 < \delta$.

Sejam $K_1 = K + B(0,\varepsilon_1)$ e $f = \chi_{K_1}$. Deste modo, $S(f) = K_1$.

Defina $\psi = f_\varepsilon$. Pelo Teorema 2.1.8

$$S(\psi) \subset K_1 + B(0,\varepsilon) \subset K + B(0,\varepsilon+\varepsilon+1) \subset K_1 + B[0,\varepsilon+\varepsilon_1] \subset K + B[0,\delta] \subset \Omega.$$

A última continência decorre do fato de que se $y \in K + B[0,\delta]$, então

$$d(y,\mathbb{R}^n - \Omega) > d(K,\mathbb{R}^n) - \delta = 0 \Rightarrow y \notin \mathbb{R}^n - \Omega.$$

Portanto, $S(\psi)$ é compacto e está contido em Ω.

Mais ainda, pelo Teorema 2.1.8, $\psi = f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$.

Deste modo, concluímos que $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Seja $A = \bigcup_{k \in K} B(k, \varepsilon_1 - \varepsilon)$. A é aberto, $K \subset A$ e se $x \in K$,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \int f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy \\
&= \int_{|y|<1} f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy && \Big(S(\phi) \subset B(0,1)\Big)
\end{aligned}$$

Existe $k \in K$ tal que $||x-k|| < \varepsilon_1 - \varepsilon$, ou seja, $x - \varepsilon_y = k + x - k - \varepsilon_y \in K_1$, pois

$$||x-k-\varepsilon_y|| \leq ||x-k|| + \varepsilon||y|| < \varepsilon_1 - \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon_1.$$

Como $f = \chi_{K_1}$,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \int_{|y|<1} f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy \\
&= \int_{|y|<1} \phi(y)dy \\
&= \int \phi(y)dy && \Big(S(\phi) \subset B(0,1)\Big) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\square$

Observação 2.1.11. O Teorema 2.1.8 nos mostra que, dada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos $\phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$, para cada $\varepsilon > 0$. Isto é, a partir de uma função-teste somos capazes de obter uma infinidade de funções-teste.

Um último requisito antes de definirmos distribuições é a noção de convergência em C_c^∞ a qual será estabelecida pela seguinte definição.

Definição 2.1.12. Uma sequência $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de funções-teste em Ω converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ quando

i) Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subset K$, $\forall j \in \mathbb{N}$;

ii) $\forall m \in \mathbb{N}$, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero quando $j \to \infty$.

Definição 2.1.13. Dizemos que $\phi_j \to \phi$ em $C_c^\infty(\Omega)$ quando $\phi_j - \phi \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$.

Observação 2.1.14. É possível dotar $C_c^\infty(\Omega)$ com uma topologia de forma que a convergência nesta topologia coincida com a dada pela definição acima (veja **[14]**). No entanto, esta topologia não provém de uma métrica.

Suponha, por absurdo, que ρ é uma métrica tal que $\rho(\phi,\phi_n) \to 0$ se, e somente se, $\phi_n - \phi \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$.

Seja $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de compactos tal que $\cup K_n = \Omega$.

Pelo Corolário 2.1.10, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n(x) = 1$ em uma vizinhança de K_n. Note que se $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ é uma sequencia de números positivos que converge para zero então, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo segue que $\varepsilon_j\phi_n \to 0$, em C_c^∞ quando $j \to +\infty$. Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe j_n tal que $\rho(\varepsilon_{j_n}\phi_n; 0) < \dfrac{1}{n}$. Deste modo, teríamos $\varepsilon_{j_n}\phi_n \to 0$ quando $n \to +\infty$ (i.e., $\varepsilon_{j_n}\phi_n \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$). Mas isso é um absurdo pois $\Omega = \cup K_n \subset \cup S(\phi_n) = \cup S(\varepsilon_{j_n}\phi_n) \subset \Omega$, implicando $\cup S(\varepsilon_{j_n}\phi_n) = \Omega$ (consequente não existe um compacto em Ω contendo $\cup S(\varepsilon_{j_n}\phi_n)$ e isso impossibilita que $\varepsilon_{j_n}\phi_n \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$).

Portanto, nossa suposição inicial é falsa e concluímos que a topologia não provém de uma métrica.

3 DISTRIBUIÇÕES

3.1 Distribuições

Definição 3.1.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Uma distribuição em Ω é um funcional linear sequencialmente contínuo, $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$.

O espaço das distribuições em Ω é denotado por $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Em outras palavras, uma função $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é uma distribuição se dadas ψ_1 e ψ_2, funções-teste em Ω, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções-teste em Ω, tem-se

1. $u(\psi_1 + \lambda\psi_2) = u(\psi_1) + \lambda u(\psi_2)$ (linearidade);
2. Se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então $u(\phi_j) \to 0 = u(0)$ (continuidade).

Por vezes, é conveniente denotar $\langle u, \phi\rangle$ em vez de $u(\phi)$.

Exemplo 3.1.2. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Defina $\langle \delta, \phi\rangle = \phi(0)$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Dadas ψ_1, $\psi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned}\langle \delta, \psi_1 + \lambda\psi_2\rangle &= (\psi_1 + \lambda\psi_2)(0)\\ &= \psi_1(0) + \lambda\psi_2(0)\\ &= \langle \delta, \psi_1\rangle + \lambda\langle \delta, \psi_2\rangle\end{aligned}$$

Além disso, se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então $\phi_j \to 0$ pontualmente. Em particular, $\phi_j(0) \to 0$, ou seja, $\langle \delta, \phi_j\rangle \to 0$.

Portanto, δ é uma distribuição. Chamamos δ de distribuição delta de Dirac.

Exemplo 3.1.3. Definamos $\langle T, \phi\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |t|\phi'(t)dt$, $\phi \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

Sejam $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então,

$$\begin{aligned}\langle T, \psi_1 + \lambda\psi_2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} |t|[(\psi_1' + \lambda\psi_2')(t)]dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |t|[\psi_1'(t) + \lambda\psi_2'(t)]dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |t|\psi_1'(t) + |t|\lambda\psi_2'(t)dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |t|\psi_1'(t)dt + \lambda\int_{-\infty}^{\infty} |t|\psi_2'(t)dt\\ &\langle T, \psi_1\rangle + \lambda\langle T, \psi_2\rangle\end{aligned}$$

Seja $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções-teste em $\mathbb{R}$ convergente a zero em $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Por definição de convergência em C_c^∞, existe um compacto $K \subset \mathbb{R}$ tal que $S(\phi_j) \subset \mathbb{K}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e $\phi_j' \to 0$ uniformemente quando $j \to \infty$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\langle T,\phi_j\rangle &= \lim_{j\to\infty}\int_K |t|\phi_j'(t)dt\\ &= \int_K |t|\lim_{j\to\infty}\phi_j'(t)dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|t|0dt = 0.\end{aligned}$$

Deste modo, concluímos que T é uma distribuição.

Exemplo 3.1.4. Seja $f\in L^1_{loc}(\Omega)$, onde $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é aberto.

Defina $\langle T_f,\phi\rangle = \int f\phi dx$, $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$.

Mais uma vez, considere $\psi_1,\psi_2\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e $\lambda\in\mathbb{C}$. Assim,

$$\begin{aligned}\langle T_f,\psi_1+\lambda\psi_2\rangle &= \int f\cdot(\psi_1+\lambda\psi_2)dx\\ &= \int f\psi_1 dx+\lambda\int\psi_2)dx\\ &= \langle T_f,\psi_1\rangle+\lambda\langle T_f,\psi_2\rangle\end{aligned}$$

Se $\phi_j\to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então existe $K\subset\Omega$ compacto tal que $S(\phi_j)\subset K$, $\forall j\in\mathbb{N}$ e, sabendo que $\phi_j\to 0$ uniformemente dado $\varepsilon>0$, existe $j_0\in\mathbb{N}$ tal que $j>j_0$ implica em $|\phi_j(x)-0| = |\phi_j(x)|<\varepsilon$, para cada $x\in\mathbb{R}^n$.

Assim, dado $\varepsilon>0$, tome $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{\int_K|f|dx+1}$. Existe $j_1\in\mathbb{N}$ tal que $j>j_1$ implica que $|\phi_j(x)|<\varepsilon_1$.

Daí, $j>j_1$ implica em

$$|\int_K f\phi_j dx|\le\int_K|f||\phi_j|dx<\varepsilon_1\int_K|f|dx<\varepsilon.$$

Portanto, $\langle T_f,\phi_j\rangle\to 0$.

Logo, T_f é uma distribuição.

É interessante notar que se $\langle T_f,\phi\rangle = \langle T_g,\phi\rangle$, para $f,g\in L^1_{loc}(\Omega)$ e para toda $\phi\in\mathbb{C}_c^\infty(\Omega)$, então $f=g$ $q.t.p.$

Com efeito, considere $K\subset\Omega$ compacto. Se $h=f-g$ e $\alpha\in C_c^\infty(\Omega)$ é tal que $\alpha(x)=1$ em K, então $\alpha h\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, estendendo por zero fora de Ω.

Considere

$$(\alpha h)_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\int(\alpha h)(y)\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)dy = \langle T_f,\beta\rangle-\langle T_g,\beta\rangle = 0,$$

onde $\beta(y) = \varepsilon^{-n}\phi\Big(\dfrac{x-y}{\varepsilon}\Big)\in C_c^\infty(\Omega)$.

Portanto, quando $\varepsilon \to 0$, pelo Corolário 1 do Teorema 2.1.8, $\alpha h = 0$ $q.t.p.$ e, em particular, $h(x) = 0$ $q.t.p.$ em K. Considerando uma sequência de compactos K_n tais que $\cup K_n = \Omega$, concluímos que $f = g$ $q.t.p.$

Doravante, quando não houver confusão, denotaremos $T_f = f$. Deste modo, identificamos $L^1_{loc}(\Omega)$ como um subespaço de $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Esta identificação nos permite interpretar muitos espaços de funções, como por exemplo $L^p(\Omega)$ (para $p \geq 1$), como subespaços de $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Esse é um dos principais motivos para distribuições também serem conhecidas por funções generalizadas.

Exemplo 3.1.5. Defina $T(\phi) = \int |\phi'(t)|dt$, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Assim,

$$T(\phi - 2\phi) = T(-\phi) = \int |\phi'(t)|dt.$$

Por outro lado,

$$T(\phi) + T(-2\phi) = \int |\phi'(t)|dt + 2\int |\phi'(t)|dt = 3\int |\phi'(t)|dt.$$

Portanto, em geral, $T(\phi) + T(-2\phi) \neq T(\phi - 2\phi)$. Deste modo, T não é distribuição.

Exemplo 3.1.6. Seja μ uma medida definida na σ-álgebra dos subconjuntos borelianos do aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e suponhamos que, para todo compacto $K \subset \Omega$, $\mu(K) < \infty$.

Defina $\langle \mu, \phi \rangle = \int_\Omega \phi d\mu$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Se $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$\langle \mu, \psi_1 + \lambda\psi_2 \rangle = \int_\Omega \psi_1 + \lambda\psi_2 d\mu = \int_\Omega \psi_1 d\mu + \lambda \int_\Omega \psi_2 d\mu = \langle \mu, \psi_1 \rangle + \lambda \langle \psi_2 \rangle.$$

E, se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então existe um compacto $K_0 \subset \Omega$ tal que

$$0 \leq |\langle \mu, \phi_j \rangle| = |\int_{K_0} \phi_j d\mu| \leq \int_{K_0} |\phi_j| d\mu \leq \int_{K_0} |sup\phi_j(x)| d\mu = |sup\phi_j(x)|\mu(K_0) \to 0$$

$$\Rightarrow \langle \mu, \phi_j \rangle \to 0.$$

Logo, $\langle \mu, \cdot \rangle$ é uma distribuição.

Em outras palavras, as distribuições são suficientemente gerais para incluir todas as medidas localmente finitas.

3.2 Operações com distribuições

As operações de adição entre distribuições e multiplicação de um escalar complexo por uma distribuição são definidas como se segue.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dadas $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos

1. $\langle u_1 + u_2, \phi \rangle = \langle u_1, \phi \rangle + \langle u_2, \phi \rangle$;
2. $\langle \lambda u_1, \phi \rangle = \lambda \langle u_1, \phi \rangle$.

Para definir operações mais gerais, precisamos definir algumas ferramentas.

Definição 3.2.1. Dizemos que um operador linear $T : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ é contínuo em $C_c^\infty(\Omega)$ se $T\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ sempre que $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$.

Definição 3.2.2. Sejam L e L' operadores lineares contínuos de $C_c^\infty(\Omega)$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Dizemos que L é o transposto formal de L', e vice versa, se

$$\int_\Omega (L\phi)\psi dx = \int_\Omega \phi(L'\psi)dx, \quad \phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{3.1}$$

Uma vez que, para $\alpha \in C_c^\infty(\Omega)$ e para todo compacto $K \subset \Omega$,

$$\int_K |\phi(x)|dx = \int_{K \cap S(\phi)} |\phi(x)|dx \leq \sup_{x \in K \cap S(\phi)} |\phi(x)| \cdot \int_{K \cap S(\phi)} dx < \infty.$$

temos $C_c^\infty(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$.

Deste modo, na definição 3.2.2, $\phi, L\phi, \psi, L'\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$. Assim, podemos interpretar a equação 3.1 no sentido das distribuições da seguinte maneira

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L'\psi \rangle.$$

Neste caso, é possível estender o operador L a um operador $\tilde{L} : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$.

De fato, defina

$$\langle \tilde{L}u, \psi \rangle = \langle u, L'\psi \rangle, \quad u \in \mathscr{D}'(\Omega), \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Sejam, $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\psi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{L}(u_1 + \lambda u_2), \psi \rangle &= \langle u_1 + \lambda u_2, L'\psi \rangle \\ &= \langle u_1, L'\psi \rangle + \lambda \langle u_2, L'\psi \rangle \\ &= \langle \tilde{L}u_1, \psi \rangle + \lambda \langle \tilde{L}u_2, \psi \rangle \end{aligned}$$

Observe que $\tilde{L}u$ é uma distribuição, pois se ϕ_j é uma sequência de funções-teste que converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}\langle \tilde{L}u,\phi_j\rangle &= \lim_{j\to\infty}\langle u, L'\phi_j\rangle \\
&= \langle u, L'(\lim_{j\to\infty}\phi_j)\rangle \\
&= \langle u, 0\rangle = 0
\end{aligned}$$

Deste modo, $\int (Lu)\psi dx = \langle \tilde{L}u,\psi\rangle$, isto é, $\tilde{L}\in L^1_{loc}$ e $L\phi = \tilde{L}\phi$, concluindo que $\tilde{L}$ é uma extensão do operador L.

Frequentemente, a definição de operações com distribuições será feita via transposto formal.

Exemplo 3.2.3. Produto por uma função C^∞.

Seja $f\in C^\infty(\Omega)$. Definimos $L: C^\infty_c(\Omega)\to C^\infty_c(\Omega)$ por $(L\phi)(x) = f(x)\phi(x)$.

O transposto formal de L é ele próprio.

Com efeito, dadas $\phi_1,\phi_2\in C^\infty_c(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\langle L\phi_1,\phi_2\rangle &= \int (L\phi_1)(x)\phi_2(x)dx \\
&= \int [f(x)\phi_1(x)]\phi_2(x)dx \\
&= \int \phi_1(x)[f(x)\phi_2(x)]dx \\
&= \int \phi_1(x)(L\phi_2)(x)dx \\
&= \langle \phi_1, L\phi_2\rangle.
\end{aligned}$$

Além disso, para $\lambda\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
(L(\phi_1+\lambda\phi_2))(x) &= f(x)\cdot[\phi_1(x)+\lambda\phi_2(x)] \\
&= f(x)\phi_1(x)+\lambda f(x)\phi_2(x) \\
&(L\phi_1)(x)+\lambda(L\phi_2)(x)
\end{aligned}$$

e, para $(\phi_j)_j$ tal que $\phi_j\to 0$ em $C^\infty_c(\Omega)$, $(L\phi_j)(x) = f(x)\phi_j(x)\to 0$ quando $j\to\infty$.

Ainda mais, existe $K\subset\Omega$ compacto tal que $S(\phi_j)\subset K$, $\forall j\in\mathbb{N}$, ou seja, temos $S(f\cdot\phi_j)\subset S(\phi_j)\subset K$, $\forall j\in\mathbb{N}$.

Por último, $\partial^\alpha\phi_j\to 0$ uniformemente quando $j\to\infty$. Logo, $\partial^\alpha(f\phi_j)\to 0$ uniformemente quando $j\to\infty$, $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$, pois $\partial^\alpha(f)|_K$ é limitada já que é contínua em um compacto.

Assim, a multiplicação por uma função C^∞ fica definida por

$$\langle fu,\phi\rangle = \langle u, f\phi\rangle.$$

Exemplo 3.2.4. Derivação.

Sejam $(x_1, x_2, ..., x_n)$ coordenadas cartesianas em Ω. Defina $L = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

L é linear, pois dadas $f, g \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$L(f+\lambda g) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f+\lambda g) = \frac{\partial}{\partial x_j} f + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} g = (Lf) + \lambda(Lg).$$

Se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subset K, \forall j \in \mathbb{N}$.

Como o complementar de $S(\phi_j)$ é um aberto onde $\phi_j \equiv 0$, temos que $L\phi_j$, neste aberto, é nula. Deste modo, $S(L\phi_j) \subset S(\phi_j), \forall j \in \mathbb{N}$.

Seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Uma vez que $\partial^\alpha L\phi_k = \partial^\alpha \dfrac{\partial \phi_k}{\partial x_j} = \partial^{\alpha+e_j}\phi_k$, temos $\partial^\alpha(L\phi_k) \to 0$ uniformemente em $C_c^\infty(\Omega)$ sempre que $\phi_k \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$.

Portanto, L é um operador linear contínuo em $C_c^\infty(\Omega)$.

Agora, considere $\psi, \phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Pelo Teorema de Fubini e integração por partes,

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)\psi(x)dx = \int \cdots \int \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)\psi(x)dx_1 dx_2 ... dx_{j-1} dx_j dx_{j+1} ... dx_n$$
$$= \int \cdots \int \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)\psi(x)dx_j dx_1 dx_2 ... dx_{j-1} dx_{j+1} ... dx_n$$
$$= \int \cdots \int \Big[\int_{\partial\Omega} \phi(x)\psi(x)dx_j - \int \phi(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)dx_j\Big] dx_1 ... dx_{j-1} dx_{j+1} ... dx_n$$
$$= -\int \cdots \int \phi(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)dx_j dx_1 dx_2 ... dx_{j-1} dx_{j+1} ... dx_n$$
$$= -\int \cdots \int \phi(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)dx_1 dx_2 ... dx_n$$
$$= -\int_\Omega \phi(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x)dx.$$

Portanto, o transposto formal de $L = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ é $L' = -\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ e, dada $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, definimos

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_j} u, \phi \rangle = -\langle u, \frac{\partial}{\partial x_j}\phi \rangle.$$

Exemplo 3.2.5. Operadores diferenciais lineares.

Uma caso particular de operador diferencial linear é obtido como se segue.

Seja $L = \Delta = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$. Com duas aplicações de $\langle \dfrac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \rangle = -\langle u, \dfrac{\partial \phi}{\partial x_j} \rangle$, temos

$$\langle \Delta u, \phi \rangle = \langle u, \Delta \phi \rangle, \quad u \in \mathscr{D}'(\Omega), \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Mais geralmente, um operador diferencial linear com coeficientes constantes em C^∞ é uma combinação linear de derivações e multiplicações por funções C^∞.

Logo, podemos aplicar os exemplos anteriores reiteradamente para determinar o transposto formal de todo operador diferencial linear.

Exemplo 3.2.6. Mudança de variáveis.

Seja $T : \Omega \to \Omega$ um difeomorfismo, i.e., uma bijeção de Ω sobre Ω tal que T e T^{-1} são de classe C^∞.

Defina $L_T\phi = \phi \circ T$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Para $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} L_T(\phi_1 + \lambda\phi_2) &= (\phi_1 + \lambda\phi_2)(T) \\ &= \phi_1(T) + \lambda\phi_2(T) \\ &= L_T(\phi_1) + \lambda L_T(\phi_2). \end{aligned}$$

Note que $S(\phi \circ T) = T^{-1}\big(S(\phi)\big)$. De fato,

$$\begin{aligned} x \notin S(\phi \circ T) &\Leftrightarrow (\phi \circ T)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \phi(T) \equiv 0 \text{ em uma vizinhança de } x \\ &\Leftrightarrow T(x) \notin S(\phi) \\ &\Leftrightarrow x \notin T^{-1}\big(S(\phi)\big). \end{aligned}$$

Como T^{-1} é contínua e $S(\phi)$ é compacto, temos $S(\phi \circ T)$ compacto. Logo, $L_T \in C_c^\infty(\Omega)$.

Para encontrar L'_T, consideramos a integral a seguir e aplicamos o Teorema de mudança de variáveis

$$\int \phi\big(T(y)\big)\psi(y)dy = \int \phi(x)\psi\big(T^{-1}(x)\big)|J(T^{-1}(x))|dx.$$

Assim, somos impulsionado a definir $L'_T\psi = |J(T^{-1}(x))|(\psi \circ T^{-1})$.

Como a matriz jacobiana de Y^{-1} é não singular e seu determinante é nunca nulo, $|J(T^{-1}(x))|$ resulta diferenciável.

Quando $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, definimos então

$$\langle u \circ T, \psi \rangle = \langle u, |J(T^{-1}(x))|(\psi \circ T^{-1}) \rangle.$$

Exemplo 3.2.7. Translação.

Seja $a \in \mathbb{R}^n$. A função $\tau_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\tau_a(x) = x - a$, define a translação de $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ como a função $\phi_a(x) = \phi \circ \tau_a(x) = \phi(x - a)$.

Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, a translação de u se define como no exemplo anterior, i.e.,

$$\begin{aligned} \langle u_a, \phi \rangle &:= \langle u \circ \tau_a, \phi \rangle \\ &= \langle u, |J(\tau^{-1}(x))|(\phi \circ \tau^{-1}) \rangle \\ &= \langle u, \phi \circ \tau_a^{-1} \rangle \\ &= \langle u, \phi \circ \tau_{-a} \rangle. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\langle u_a, \phi \rangle = \langle u, \phi(\cdot - a) \rangle.$$

Exemplo 3.2.8. Reflexão.

Seja Ω um aberto simétrico em relação à origem e consideremos $\alpha(x) = -x$. Assim, definimos a reflexão de ϕ por $\phi(x) = (\phi \circ \alpha)(x) = \phi(-x)$.

Logo, dada $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, definimos sua reflexão por

$$\begin{aligned}
\langle \check{u}, \phi \rangle &:= \langle u \circ \alpha, \phi \rangle \\
&= \langle u, |J(\alpha^{-1}(x))|(\phi \circ \alpha^{-1}) \rangle \\
&= \langle u, \phi \circ \alpha \rangle \\
&= \langle u, \check{\phi} \rangle, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).
\end{aligned}$$

3.3 Derivadas distribucionais e derivadas clássicas

Já estabelecemos uma noção de derivação para uma distribuição $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ através da equação

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

É natural que surjam algumas perguntas. Uma delas é: *"como se relacionam as derivadas distribucionais com as derivadas no sentido clássico?"*

A título motivacional, considere $f(x)$ uma função real de variável real continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$. Uma vez que $\dfrac{df}{dx} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{df}{dx}, \phi \right\rangle &= -\left\langle f, \frac{d\phi}{dx} \right\rangle \\
&= -\int_{-a}^{a} \left(f \frac{d\phi}{dx} \right) dx \\
&= -\left(f\phi \Big|_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} \frac{df}{dx} \phi dx \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{df}{dx} \phi dx,
\end{aligned}$$

em que $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e $S(\phi) \subset [-a, a]$. Sendo assim, a distribuição derivada da distribuição definida por uma função continuamente diferenciável coincide com a distribuição definida pela função derivada da função continuamente diferenciável. Deste modo, podemos interpretar a distribuição derivada de uma distribuição como uma generalização da derivada de uma função. Por esse motivo é comum usar os termos derivada distribucional (ou derivada no sentido das distribuições) para a distribuição derivada de uma distribuição e usar o termo derivada clássica para a função derivada de uma função.

Agora, considere $f \in C^1(\mathbb{R}-\{0\})$ tal que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0^+)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0^-)$ existem e são finitos. Denote por $\{f'\} := \dfrac{df}{dx}$ definida para $x_0 \neq 0$ e suponha que $\{f'\} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Para calcular f', a derivada de f no sentido das distribuições, basta observar que se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (com $S(\phi) \subset [-N,N]$), então

$$
\begin{aligned}
\langle f', \phi \rangle &= -\langle f, \phi' \rangle = -\int_{-N}^{N} f\phi' dx \\
&= -\int_{-N}^{0} f\phi' dx - \int_{0}^{N} f\phi' dx = -\lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{-N}^{\varepsilon} f\phi' dx - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{N} f\phi' dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\int_{\varepsilon}^{-N} f\phi' dx - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{N} f\phi' dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\left[\big(f\phi\big)\big|_{\varepsilon}^{-N} - \int_{\varepsilon}^{-N}\big(\{f'\}\phi\big)dx\right] + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\big(f\phi\big)\big|_{\varepsilon}^{N} + \int_{\varepsilon}^{N}\big(\{f'\}\phi\big)dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^-}\left[f(-N)\phi(-N) - f(\varepsilon)\phi(\varepsilon) + \int_{-N}^{\varepsilon}\big(\{f'\}\phi\big)dx\right] \\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-f(N)\phi(N) + f(\varepsilon)\phi(\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{N}\big(\{f'\}\phi\big)dx\right] \\
&= -f(0^-)\phi(0) + \int_{-N}^{0}(\{f'\}\phi)dx + f(0^+)\phi(0) + \int_{0}^{N}(\{f'\}\phi)dx \\
&= \Big[f(0^+) - f(0^-)\Big]\phi(0) + \int_{-N}^{N}(\{f'\}\phi)dx.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos $\langle f', \phi \rangle = [f(0^+) - f(0^-)]\phi(0) + \int_{\mathbb{R}}\{f'\}\phi dx$. Em particular, podemos considerar a famosa função de Heaviside

$$
f(x) = H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}
$$

Como $H(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} H(x) = 1$, $H(0^-) = \lim\limits_{x\to 0-} H(x) = 0$ e $H'(x) = 0$ (quando $x \neq 0$), temos

$$
\langle H', \phi \rangle = [H(0^+) - H(0^-)]\phi(0) + \int_{\mathbb{R}}\{H'\}\phi dx = (1-0)\phi(0) + \int_{\mathbb{R}} 0\cdot\phi dx = \phi(0),
$$

para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. deste modo podemos concluir que derivada distribucional da função de Heaviside é a distribuição delta.

Voltando ao caso geral, podemos escrever $\{f'\}$ nas seguintes formas

$$
f' = \{f'\} + [f(0^+) - f(0^-)]\delta
$$

ou

$$\langle f', \phi \rangle = \langle \{f'\}, \phi \rangle + [f(0^+) - f(0^-)]\langle \delta, \phi \rangle.$$

Observação 3.3.1. Uma importante observação é que apesar de termos identificado o espaço das funções localmente integráveis como subespaço do espaço das distribuições, existem funções que não são localmente integráveis e podem ser interpretadas como distribuições. O exemplo a seguir, ilustra este fato.

Exemplo 3.3.2. Seja $f(x) = \frac{1}{x}$. Uma vez que $\int_V \left|\frac{1}{x}\right| dx = \infty$, para toda vizinhança, V, da origem, temos $f \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Por outro lado, dado $x \neq 0$ temos que $\frac{d\{log|x|\}}{dx} = \frac{1}{x}$ e $g(x) = log|x|$ é localmente integrável, pois

$$\int_{-a}^{a} |log|x||\, dx = -\int_{-a}^{a} log|x| dx = \big[x(log|x|-1)\big]_{-a}^{\;a} = 2a$$

para cada $a > 0$ (já que, $\lim\limits_{t\to 0} t(log|t|-1) = 0$) e $log|x|$ é contínua para $x \neq 0$.

A seguir estudaremos a distribuição g'.

Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, com $S(\phi) \subset [-N,N]$, então

$$\begin{aligned}
\langle g', \phi \rangle &= -\langle g, \phi' \rangle = -\int_{-N}^{N} log|x|\phi'(x)dx \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{-N}^{-\varepsilon} log|x|\phi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{N} log|x|\phi'(x)dx\right] \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left([\phi(x)\log|x|]_{-N}^{-\varepsilon} - \int_{-N}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx + [\phi(x)\log|x|]_{\varepsilon}^{N} - \int_{\varepsilon}^{N} \frac{\phi(x)}{x}dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \big[\phi(-\varepsilon) - \phi(\varepsilon)\big] log(\varepsilon) + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx \right\}
\end{aligned}$$

Pela desigualdade do valor médio,

$$|\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)| \leq \|\phi'\|_\infty |2\varepsilon|.$$

Assim, como $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log|\varepsilon| = 0$ concluímos que

$$\langle g', \phi \rangle = -\langle \log x, \phi' \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi'(x)}{x} dx.$$

A distribuição definida acima é dita Valor Principal de $\frac{1}{x}$ e se denota por $V.P.\frac{1}{x}$.

Exemplo 3.3.3. Já definimos anteriormente o produto de uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ por uma distribuição T através da igualdade $\langle fT, \phi \rangle = \langle T, f\phi \rangle$. Com isso em mente, se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, então

$$\langle f\delta, \phi \rangle = \langle \delta, f\phi \rangle = f(0)\delta(0) = f(0)\langle \delta, \phi \rangle,$$

ou seja, $f\delta = f(0)\delta$ e só o valor de f em $x = 0$ é relevante no produto $f\delta$.

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\langle f\delta', \phi\rangle &= \langle \delta', f\phi\rangle \\
&= -\langle \delta, f'\phi + f\phi'\rangle \\
&= -\big(\langle \delta, f'\phi\rangle + \langle \delta, f\phi'\rangle\big) \\
&= -[f'(0)\phi(0) + f(0)\phi'(0)] \\
&= -\big(\langle f'(0)\delta, \phi\rangle + \langle f(0)\delta, \phi'\rangle\big) \\
&= \langle f(0)\delta', \phi\rangle - \langle f'(0)\delta, \phi\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f\delta' = f(0)\delta' - f'(0)\delta.$$

Outro caso é $x \cdot V.P.\frac{1}{x}$, pois

$$\langle x \cdot V.P.\frac{1}{x}, \phi\rangle = \langle V.P.\frac{1}{x}, x\phi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon} x \cdot \frac{\phi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon} \phi(x)dx = \langle 1, \phi\rangle.$$

$$\therefore x \cdot V.P.\frac{1}{x} = 1.$$

Observação 3.3.4. Sejam $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Temos,

$$\begin{aligned}
\Big\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(uf), \phi\Big\rangle &= -\Big\langle uf, \frac{\partial}{\partial x_j}\phi\Big\rangle \\
&= -\Big\langle u, f\frac{\partial}{\partial x_j}\phi\Big\rangle \\
&= -\Big\langle u, \frac{\partial(f\phi)}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\phi\Big\rangle \\
&= -\Big\langle u, \frac{\partial(f\phi)}{\partial x_j}\Big\rangle + \Big\langle u, \frac{\partial f}{\partial x_j}\phi\Big\rangle \\
&= \Big\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, f\phi\Big\rangle + \Big\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}u, \phi\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{\partial}{\partial x_j}(uf) = \frac{\partial u}{\partial x_j}f + u\frac{\partial f}{\partial x_j}$ no sentido distribucional, i.e., a Regra de Leibniz para a derivada do produto de duas funções é válida quando um dos fatores é uma distribuição.

Teorema 3.3.5. Se u e f são contínuas em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\left\{\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\} = f$ (a derivada distribucional de u coincide com a distribuição definida por f), então u é diferenciável em relação a x_j e $\frac{\partial u}{\partial x_j} = f$ (no sentido clássico).

Prova: Suponha inicialmente que $K = S(u)$ é compacto. Então, escreva

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} u_\varepsilon(x) &= \varepsilon^{-n} \int_K u(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big[\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\Big] dy \\
&= -\varepsilon^{-n} \int_K u(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big[\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\Big] dy \\
&= \varepsilon^{-n} \Big\langle \frac{\partial}{\partial y_j} u, \phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\Big\rangle \\
&= \varepsilon^{-n} \int_K \Big\{\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big\} \phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) dy \\
&= \varepsilon^{-n} \int_K f(y) \phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) dy \\
&= f_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Decorre do Teorema 2.1.8 que $u_\varepsilon \to u$ e $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \to f$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$. Então $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = f$ no sentido usual.

No caso geral, seja $x_0 \in \Omega$. Considere uma função corte $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi(x) = 1$ numa vizinhança de x_0. Deste modo, $S(\psi u) \subset S(\psi)$ é compacto e

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi u)\Big\} = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} u + \psi \Big\{\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big\} = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} u + \psi f$$

é contínua por hipótese.

Assim, se $g = \Big\{\dfrac{\partial \psi}{\partial x_j} u + \psi \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\Big\}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} (\psi u)_\varepsilon(x) &= \varepsilon^{-n} \int_{K_1} (\psi u) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big[\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\Big] dy \\
&= -\varepsilon^{-n} \int_{K_1} (\psi u) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big[\phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\Big] dy \\
&= \varepsilon^{-n} \Big\langle \frac{\partial}{\partial y_j} (\psi u), \phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\Big\rangle \\
&= \varepsilon^{-n} \int_{K_2} \Big\{\frac{\partial \psi}{\partial y_j} \phi + \psi \frac{\partial \phi}{\partial y_j}\Big\} \phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) dy \\
&= \varepsilon^{-n} \int_{K_2} g(y) \phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) dy \\
&= g_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $(\psi u)_\varepsilon \to \psi u$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\psi u) \to g$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$. Então, $\dfrac{\partial(\psi u)}{\partial x_j} = g$ no sentido clássico.

Na vizinhança onde $\psi(x) = 1$, $\dfrac{\partial(\psi u)}{\partial x_j} = \Big\{\dfrac{\partial \phi}{\partial x_j} u + \psi \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\Big\}$ se reduz a $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = \Big\{\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\Big\} = f$.

Como x_0 foi tomado de forma arbitrária, provamos o que queríamos. $\square$

No cálculo de variações é útil considerear uma função de três variáveis $F(\alpha,\beta,\gamma)$ suficientemente diferenciável e se procura minimizar a integral

$$I(u) = \int_a^b F(u(x),u'(x),x)dx$$

na classe das funções $u(t) \in C^1([a,b])$.

Se u é uma solução do problema e $\phi \in C_c^\infty(a,b)$, então a função

$$g(t) = I(u+t\phi), \quad t \in \mathbb{R}$$

tem um mínimo em $t=0$. Logo, $g'(0)=0$.

Considerando $F = F(\zeta_0,\zeta,x)$ e derivando sob o sinal de integração, obtemos

$$g'(0) = \int_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial \zeta_0}\phi + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\phi'\Big)dx = 0, \quad \phi \in C_c^\infty(a,b). \tag{3.2}$$

As funções de x: $\dfrac{\partial F}{\partial \zeta_0}(u(x),u'(x),x)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}(u(x),u'(x),x)$ são contínuas e a equação 3.2 significa que esta derivada também o é no sentido clássico.

Então a função minimal $u(t)$, se existir, deve verificar a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial \zeta}(u,u',x)\Big) = \frac{\partial F}{\partial \zeta_0}(u,u',x).$$

Este resultado foi obtido por Du Bois-Raymond no século passado.

3.4 Derivadas e Primitivas

Sabemos, pelo teorema fundamental do cálculo que, se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é diferenciável em (a,b) e $f'(x)=0$, para qualquer $x \in (a,b)$, então f é constante em (a,b). No caso distribucional, temos o resultado a seguir

Teorema 3.4.1. Se $u \in \mathscr{D}'(a,b)$ e $u'=0$, então u é constante.

Com o objetivo de demonstrar o Teorema acima, demonstraremos o seguinte lema.

Lema: Uma função-teste, $\phi \in C_c^\infty(a,b)$, é a derivada de outra função-teste, $\psi \in C_c^\infty(a,b)$ se, e somente se, $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = 0$.

Prova do lema: Com efeito, se $\phi \equiv \psi'$ e $S(\psi) \subset [-N,N]$, então

$$0 = \psi(N) - \psi(-N) = \int_{-N}^N \psi'(x)dx = \int_{-N}^N \phi(x)dx.$$

Por outro lado, se $\int \phi(x)dx = 0$, então definindo $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt$, para $x \in (a,b)$ temos que $\psi'(x) = \phi(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Consequentemente, $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Mais ainda, $\psi(x) = 0$, quando $x \in \mathbb{R} \setminus S(\phi) \subset (a,b)$. Concluindo que $\psi \in C_c^{\infty}(a,b)$.

Prova do teorema: Seja $\phi_0 \in C_c^{\infty}(a,b)$ tal que $\int_{S(\phi_0)} \phi_0 = 1$. Dada $\phi \in C_c^{\infty}(a,b)$, escrevemos

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(x) + \Big[\Big(\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt\Big)\phi_0(x) - \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt\Big)\phi_0(x)\Big] \\ &= \Big[\phi(x) - \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt\Big)\phi_0(x)\Big] + \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt\Big)\phi_0(x) \\ &= \psi'(x) + \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt\Big)\phi_0(x), \end{aligned}$$

onde $\psi'(x) = \phi(x) - \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt\Big)\phi_0(x)$ (para alguma função teste ψ obtida pelo Lema acima).

Por hipótese,

$$\langle u, \psi' \rangle = -\langle u', \psi \rangle = -\langle 0, \psi \rangle = 0.$$

Portanto,

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \psi' \rangle + \Big\langle u, \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt\Big)\phi_0 \Big\rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt \langle u, \phi_0 \rangle = \langle 1, \phi \rangle \cdot \langle u, \phi_0 \rangle.$$

Se $c = \langle u, \phi_0 \rangle$, então $\langle u, \phi \rangle = c\langle 1, \phi \rangle = \langle c, \phi \rangle$, $\forall \phi \in C_c^{\infty}(a,b)$.

Logo, $u = c = \langle u, \phi_0 \rangle$. Assim como queríamos. □

Corolário 3.4.2. Se $u \in \mathscr{D}'(a,b)$ e $u^{(k)} = 0$, então u é um polinômio de grau menor ou igual a $k-1$.

Prova: Pelo Teorema 3.4.1 o resultado é válido para $k = 1$.

Suponha válido para $k-1 \in \mathbb{N}$.

Se $v = u^{(k-1)}$ e $v' = 0$, então pelo Teorema 3.4.1, existe uma constante c tal que $v = c$. Daí,

$$\Big(u - c\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\Big)^{(k-1)} = u^{(k-1)} - c = v - c = 0.$$

Pela hipótese de indução,

$$u - c\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{k-2} a_j x^j, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in \{1, ..., k-2\}.$$

Portanto,

$$u = \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j, \quad a_{k-1} = \frac{c}{(k-1)!}. \quad \square$$

Corolário 3.4.3. Toda distribuição $u \in \mathscr{D}'(a,b)$ tem uma primitiva.

Prova: Seja $\phi_0 \in C_c^\infty(a,b)$ tal que $\displaystyle\int \phi_0 = 1$. Escreva

$$F(\phi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \Big[\phi(t) - \Big(\int \phi ds\Big)\phi_0(t)\Big] dt, \quad \phi \in C_c^\infty(a,b).$$

Como $S(F(\phi)) \subset S(\phi) \cup S(\phi_0)$, defina

$$\langle v, \phi \rangle = -\langle u, F(\phi) \rangle.$$

Sendo assim,

$$\Big\langle \frac{dv}{dx}, \phi \Big\rangle = -\Big\langle v, \frac{d\phi}{dx} \Big\rangle = \Big\langle u, F\Big(\frac{d\phi}{dx}\Big) \Big\rangle = \langle u, \phi \rangle.$$

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(a,b)$, temos

$$\langle v, \alpha\phi_1 + \phi_2 \rangle = -\Big\langle u, \int_{-\infty}^{x} \Big[(\alpha\phi_1 + \phi_2)(t) - \Big(\int_{\mathbb{R}} (\alpha\phi_1 + \phi_2)(s) ds\Big)\phi_0(t)\Big] dt \Big\rangle$$
$$= -\Big\langle u, \int_{-\infty}^{x} \Big[(\alpha\phi_1)(t) - \Big(\int_{\mathbb{R}} (\alpha\phi_1)(s) ds\Big)\phi_0(t)\Big] dt + \int_{-\infty}^{x} \Big[\phi_2(t) - \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi_2(s) ds\Big)\phi_0(t)\Big] dt \Big\rangle$$
$$= -\alpha\Big\langle u, \int_{-\infty}^{x} \Big[\phi_1(t) - \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi_1(s) ds\Big)\phi_0(t)\Big] dt \Big\rangle - \Big\langle u, \int_{-\infty}^{x} \Big[\phi_2(t) - \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi_2(s) ds\Big)\phi_0(t)\Big] dt \Big\rangle$$
$$= \alpha\langle v, \phi_1 \rangle + \langle v, \phi_2 \rangle.$$

E se $(\phi_n)_n$ é uma sequência de funções-teste em $C_c^\infty(a,b)$ convergindo a zero em $C_c^\infty(a,b)$, então

$$\langle v, \phi_n \rangle = -\Big\langle u, \int_{-\infty}^{x} \Big[\phi_n(t) - \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi_n(s) ds\Big)\phi_0(t)\Big] dt \Big\rangle$$

$$\longrightarrow -\Big\langle u, \int_{-\infty}^{x} [0 - (0)\phi_0(t)] dt \Big\rangle = -\langle u, 0 \rangle = 0,$$

quando $n \to \infty$.

Portanto, $v \in \mathscr{D}'(a,b)$ e $v' = u$. Ou seja, u possui primitiva. □

Consideremos uma função crescente $\alpha(x)$ num intervalo finito $[a,b]$ e $\phi \in C_c^\infty(a,b)$. Uma vez que α é crescente e ϕ é continuamente diferenciável, podemos considerar a integral de Stietjes e aplicar sua fórmula de integração por partes (para um leitor interessado, conferir **[11]**:

$$\int_a^b \phi d\alpha = \phi(b)\alpha(b) - \phi(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha d\phi = -\int_a^b \alpha d\phi = -\int_a^b \alpha\phi' dx.$$

A última igualdade é justificada pelo Teorema 6.17 de **[11]**.

Em notação de distribuições, temos

$$\langle \alpha', \phi \rangle = -\langle \alpha, \phi' \rangle = \int \phi d\alpha$$

que expressa o fato de que a derivada de uma função crescente é uma medida positiva.

Por outro lado, se $u \in \mathscr{D}'(a,b)$ é tal que $\langle u', \phi \rangle \geq 0$, $\forall \phi \in C_c^\infty(a,b)$, $\phi \geq 0$, o Teorema de Riesz (veja **[12]**) afirma que existe uma medida μ, finita sobre compactos, tal que

$$\langle u', \phi \rangle = \int \phi d\mu, \quad \phi \in C_c^\infty(a,b).$$

Esta integral coincide com a integral de Sieltjes gerada pela função monótona crescente definida por:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \mu([x,c]) & \text{se } x < c \\ \mu([c,x]) & \text{se } c \leq x \end{cases}$$

com $c \in (a,b)$, $\mu(\{c\}) = 0$.

Assim,

$$\langle u', \phi \rangle = \int \phi d\mu = \int \phi d\alpha = \langle \alpha', \phi \rangle.$$

Portanto, $(u - \alpha)' = 0$ em $\mathscr{D}'(a,b) \Rightarrow u - \alpha = k \in \mathbb{C}$ em $\mathscr{D}'(a,b) \Rightarrow u = \alpha + k$ em $\mathscr{D}'(a,b)$.

Sendo assim, provamos o

Teorema 3.4.4. Seja $u \in \mathscr{D}'(a,b)$. Então, $u' \geq 0$ se, e somente se, u é uma função monótona crescente. $\square$

3.5 Partições da unidade

Definição 3.5.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Uma sequência $(\phi_j)_j$ de funções-teste em Ω se diz uma partição da unidade quando

1. Para todo ponto $x \in \Omega$, existe uma vizinhança V_x de x tal que o conjunto

$$\{j \in \mathbb{N};\ V_x \cap S(\phi_j) \neq \emptyset\}$$

é finito;

2. $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \equiv 1$, $\forall x \in \Omega$;
3. $0 \leq \phi_j(x) \leq 1$, $\forall x \in \Omega$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Note que, para $x \in \Omega$ fixo, se V_x é a vizinhança de x descrita pela definição 3.5.1 e $y \in V_x$, então a soma $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(y)$ tem um número finito e fixo de termos que só dependem de y. Ou seja, localmente, a série é uma soma finita e, em particular, convergente. Deste modo, localmente, a série pode ser diferenciada termo a termo.

Definição 3.5.2. Dada uma cobertura aberta $V = (V_\alpha)_{\alpha \in A}$ de Ω, dizemos que uma partição da unidade $(\phi_j)_j$ está subordinada à cobertura V se, para todo $\alpha \in A$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $S(\phi_j) \subset V$.

Teorema 3.5.3. Toda cobertura aberta $\mathscr{V}$ de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ admite uma partição da unidade subordinada a $\mathscr{V}$.

A demonstração do Teorema 3.5.3 requer técnicas que fugiriam do nosso foco no presente texto. Sugerimos a leitura da demonstração feita em **[9]**.

Para nossos propósitos, será suficiente uma versão mais fraca do Teorema 3.5.3.

Teorema 3.5.4. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Considere $V_1, ..., V_l$ abertos tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^{l} V_j$. Então existem funções $\phi_j \in C_c^\infty(V_j)$ tais que

1. $\sum_{j=1}^{l} \phi_j(x) \leq 1$;
2. $\sum_{j=1}^{l} \phi_j(x) = 1$ numa vizinhança de K;
3. $0 \leq \phi_j(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, ..., l\}$.

Prova: Para cada $j \in \{1, ..., l\}$, escolhemos $K_j \subset V_j$ de forma que $K \subset \bigcup_{j=1}^{l} K_j$.

Agora, considere funções $\psi_j \in C_c^\infty(V_j)$ tais que $0 \leq \psi_j \leq 1$ e $\psi_j = 1$ em uma vizinhança de K_j.

Defina $\phi_1 = \psi_1$ e $\phi_k = \psi_k \prod_{j=1}^{k-1}(1-\psi_j)$, para $k \in \{2, ..., l\}$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{l} \phi_j = \psi_1 + \psi_2(1-\psi_1) + \cdots + \psi_l \prod_{j=1}^{l-1}(1-\psi_j).$$

Ademais, se $l = 1$, então $\sum_{j=1}^{l} \phi_j = \psi_1 = 1 - 1 + \psi_1 = 1 - (1-\psi_1)$.

Suponha que, para algum $k \in \{1, ..., l-1\}$, vale a igualdade

$$\sum_{j=1}^{k} \phi_j = 1 - \prod_{j=1}^{k}(1-\psi_j).$$

Para $k+1$, temos

$$\sum_{j=1}^{k+1}\phi_j = 1-\prod_{j=1}^{k}(1-\psi_j)+\psi_{k+1}\prod_{j=1}^{k}(1-\psi_j)$$

$$= 1-(1-\psi_{k+1})\prod_{j=1}^{k}(1-\psi_j) = 1-\prod_{j=1}^{k+1}(1-\psi_j).$$

Portanto, $\sum_{j=1}^{k}\phi_j = 1-\prod_{j=1}^{k+1}(1-\psi_j)$.

Como $\psi_j = 1$ numa vizinhança de K_j e $K \subset \bigcup_{j=1}^{l} K_j$, então $\sum_{j=1}^{l}\phi_j = 1$ em uma vizinhança de K.

Além disso, decorre de $0 \leq \psi_j \leq 1$, que $0 \leq 1-\psi_j \leq 1$, $\forall j \in \{1,...,l\}$. Logo,

$$0 \leq \prod_{j=1}^{l}(1-\psi_j) \leq 1$$

e, assim,

$$0 \leq \sum_{j=1}^{l}\phi_j \leq 1.$$

Ainda mais, $\phi_1 = \psi_1$ e $\phi_j = \psi_j\prod_{p=1}^{l-1}(1-\psi_p)$, $\forall j \in \{2,...,l\}$, garantem que

$$0 \leq \phi_j(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ e } j \in \{1,...,l\}.$$

Isto conclui a demonstração do nosso teorema. □

Dizemos que duas funções contínuas f_1 e f_2 em Ω são iguais num ponto $x \in \Omega$ se $f_1(x) = f_2(x)$. Não temos esta noção de igualdade para distribuições, pois uma distribuição não está definida em um ponto.

Entretanto, podemos dizer que

Definição 3.5.5. Duas distribuições $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ são iguais em um aberto $U \subset \Omega$ se, e somente se, $\langle u_1, \phi\rangle = \langle u_2, \phi\rangle$, para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Teorema 3.5.6. Sejam $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Se todo ponto de Ω tem uma vizinhança onde $u_1 = u_2$, então $u_1 = u_2$ em Ω.

Prova: Sejam $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $K = S(\phi)$.Como K é compacto, existe uma cobertura finita $V_1,...,V_l$ de K formada por abertos de Ω nos quais u_1 e u_2 coincidem.

Defina $\phi_j \in C_c^\infty(V_j)$ como no Teorema 3.5.4. Podemos escrever

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{l} [\phi_j(x)\phi(x)]$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Deste modo,

$$\langle u_1, \phi \rangle = \left\langle u_1, \sum_{j=1}^{l} [\phi_j(x)\phi(x)] \right\rangle = \sum_{j=1}^{l} \langle u_1, \phi_j(x)\phi(x) \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{l} \langle u_2, \phi_j(x)\phi(x) \rangle = \left\langle u_2, \sum_{j=1}^{l} [\phi_j(x)\phi(x)] \right\rangle = \langle u_2, \phi \rangle.$$

Pela arbitrariedade de $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, concluímos que $u_1 = u_2$ em Ω. $\square$

3.6 Distribuições com suporte compacto

Definição 3.6.1. Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, então definimos o suporte de u, $S(u)$, como a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é nula.

Observação 3.6.2. As definições de suporte de uma distribuição e de suporte de uma função L^1_{loc} coincidem.

De fato, dada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, denotamos $S_1 = S(u)$ no sentido de funções e $S_2 = S(u)$ no sentido de distribuições. Mais precisamente,

$$S_1 = \overline{\{x \in \Omega \,;\, u(x) = 0\}};$$

e

$$S_2 = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda,$$

onde Λ é a coleção de conjuntos fechados fora dos quais u é igual à distribuição 0.

Para mostrar que $S_2 \subset S_1$, tome $x \notin S_1$. Então, existe uma vizinhança aberta, V_x de x inteiramente contida em S_1^C consequentemente $\phi(y) = 0$ para cada $y \in V_x$.

Deste modo, para toda função-teste $\phi \in C_c^\infty(V_x)$, temos $\displaystyle\int_{V_x} u(x)\phi(x)dx = 0$.

Sendo assim, concluímos que $\langle u, \phi \rangle = 0$, $\forall \phi \in C_c^\infty(V_x)$, ou seja, $V_x \subset \mathbb{R}^n - S_2$ assim, $x \notin S_2$. Portanto, $S_2 \subset S_1$.

Por outro lado, S_2 é fechado por definição. Seja $x \notin S_2$, existe V_x, vizinhança de x (pois $(S_2)^C$ é aberto), tal que

$$V_x \subset (S_2)^C = \Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\Big)^C = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda^C. \tag{3.3}$$

Logo, u é nula em V_x e, por (3.3), existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $F_{\lambda_0}^c = V_x$.

Ou seja, $\forall\phi \in C_c^\infty\big(F_{\lambda_0}^C\big)$,

$$\int u(x)\phi(x)dx = 0$$

e, consequentemente, $u(x) = 0$ $q.t.p.$ em $F_{\lambda_0}^C$.

A última afirmação é uma consequência do Teorema da Convergência Dominada (Teorema **2.24** de **[2]**).

Uma vez que u é contínua, concluímos que $u \equiv 0$ em $F_{\lambda_0}^C$ e $u(V_x) = \{0\}$. Ou seja, $x \notin S_1(u)$. Isto é, $S_1 \subset S_2$.

Assim, provamos que $S_1 = S_2$.

Observação 3.6.3. Se F é um fechado relativo de Ω, então $\Omega - F$ é aberto. Ou seja, dizer que u se anula em $\Omega - F$ é equivalente a dizer que as distribuições u e 0 coincidem em $\Omega - F$. Como consequência, a união de abertos onde u se anula é um aberto onde u se anula. Este aberto é, precisamente, $\Omega - S(u)$.

Definição 3.6.4. Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, definimos o suporte singular de u, $SS(u)$, como a interseção de todos os fechados fora dos quais u é C^∞.

Naturalmente, dizer que u é C^∞ num aberto U significa dizer que existe uma função $f \in C^\infty(U)$ tal que

$$\langle u,\phi\rangle = \int f\phi dx = \langle f,\phi\rangle, \quad \forall\phi \in C_c^\infty(U).$$

Definição 3.6.5. Denotamos por $\mathscr{E}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, o subespaço de $\mathscr{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.

O resultado a seguir mostra que podemos estender linearmente uma distribuição com suporte compacto ao espaço das funções C^∞.

Teorema 3.6.6. Seja $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Existe um único funcional linear $\tilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que

1. $\tilde{u}(\phi) = u(\phi)$, $\forall\phi \in C_c^\infty(\Omega)$;

2. $\tilde{u}(\phi) = 0$ se $\phi \in C^\infty(\Omega)$ e $S(\phi) \cap S(u) = \emptyset$.

Prova: Seja $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Defina $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi = 1$ numa vizinhança de $S(u)$.

Se $\phi \in C^\infty(\Omega)$, escreva $\phi = \phi\psi + (1-\psi)\phi$ e faça $\phi_1 = \phi\psi$ e $\phi_2 = (1-\psi)\phi$, ou seja, $\phi = \phi_1 + \phi_2$, onde $\phi_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_2) \cap S(u) = \emptyset$, pois $\phi_2 = 0$ numa vizinhança de $S(u)$.

Defina agora $\tilde{u}(\phi) = \langle u, \Phi_1 \rangle$, onde $\phi = \Phi_1 + \Phi_2$ é uma decomposição de ϕ com $\Phi_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\Phi_2) \cap S(u) = \emptyset$.

Suponha que $\phi = \Phi_3 + \Phi_4$ é uma outra decomposição de ϕ com $\Phi_3 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\Phi_4) \cap S(u) = \emptyset$, então $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_3 + \Phi_4$, ou seja, $\Phi_1 - \Phi_3 = \Phi_4 - \Phi_2$ com $S(\Phi_1 - \Phi_3) = S(\Phi_4 - \Phi_2)$ e $S(\Phi_4 - \Phi_2) \cap S(u) = \emptyset$.

Como $\Phi_1 - \Phi_3$ está suportada num aberto onde u se anula, $u(\Phi_1 - \Phi_3) = 0$, ou seja, $\langle u, \Phi_1 \rangle = \langle u, \Phi_3 \rangle$, i.e., a definição de $\tilde{u}$ não depende da decomposição que fazemos.

Portanto, $\forall \phi \in C^\infty(\Omega)$,

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \phi_1 + \phi_2 \rangle = \langle u, \phi_1 \rangle + \langle u, \phi_2 \rangle = \langle u, \phi \rangle = \tilde{u}(\phi).$$

Além disso, se $\phi \in C^\infty(\Omega)$ e $S(\phi) \cap S(u) = \emptyset$, então

$$\langle \tilde{u}, \phi \rangle = \langle u, \phi_1 \rangle = \langle u, \psi\phi \rangle = 0.$$

Agora, suponha que existe outro funcional $\tilde{u}_0$ tal que 1) e 2) valem para $\tilde{u}_0$ em relação a $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$.

Então, $\forall \phi \in C^\infty$,

$$\tilde{u}(\phi) = \tilde{u}(\phi_1 + \phi_2) = \langle u, \phi_1 \rangle = \tilde{u}_0(\phi_1 + \phi_2) = \tilde{u}_0(\phi).$$

Deste modo, $\tilde{u} = \tilde{u}_0$ e a unicidade está provada. $\square$

Uma pergunta natural que surge após este resultado é a seguinte: *também podemos estender uma distribuição ao espaço das funções C^∞ de maneira a preservar a continuidade?* Veremos a resposta para esta pergunta no Teorema 3.6.12, mas antes precisamos estabelecer a noção de convergência em C^∞.

Definição 3.6.7. Uma sequência $(\phi_j)_j$ de funções $C^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C^\infty(\Omega)$ se, para todo compacto K e todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero em K quando $j \to \infty$.

Observação 3.6.8. Se uma sequência de funções-teste em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $(\phi_j)_j$, converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$, então existe $K_0 \subset \Omega$ compacto tal que $S(\phi_j) \subset K_0$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e, para todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero quando $j \to \infty$.

Em particular, para qualquer $K \subset \Omega$ compacto, as derivadas de ordem m das funções-teste ϕ_j convergem uniformemente a zero em K, quando $j \to \infty$.

Sendo assim, concluímos que se $(\phi_j)_j$ é uma sequência de funções-teste em Ω convergente a zero em $C_c^\infty(\Omega)$, então $(\phi_j)_j$ converge a zero em $C^\infty(\Omega)$.

No entanto, se $\phi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $S(\phi_0) \subset [-1,1]$ e $\phi_0(x) = 1$ em $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, então defina a seguinte sequência de funções $\phi_n(x) = 2^{-n}\phi_0(n^{-1}x)$.

Pela regra da cadeia, $\phi_n'(x) = 2^{-n}n^{-1}\phi_0'(n^{-1}x)$. Ao derivar ϕ_n k vezes, obtemos $\phi_n^{(k)}(x) = 2^{-n}n^{-k}\phi_0^{(k)}(n^{-1}x)$.

Desta forma,

$$|\phi_n^{(k)}| = 2^{-n}n^{-k}|\phi_0^{(k)}(n^{-1}x)|.$$

Uma vez que $\phi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, vale que para todo k inteiro positivo, existe uma constante, $C_k \in \mathbb{R}$, tal que $|\phi_0^{(k)}(n^{-1}x)| \leq C_k$.

Deste modo, $|\phi_n^{(k)}| \leq 2^{-n}n^{-k}C_k \to 0$ quando $n \to \infty$.

Uma vez que a desigualdade acima vale para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a sua convergência é uniforme em $\mathbb{R}$ e, em particular, em qualquer $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Isto significa que a sequência $(\phi_n)_n$ converge a zero em $C^\infty(\mathbb{R})$.

Entretanto, por hipótese, $\phi_0(x) = 1$ para $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, ou seja, $\phi_0(n^{-1}x) = 1$ se $x \in \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right]$.

Portanto, não pode haver um único compacto contendo todos os suportes $S(\phi_n)$, pois $\left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right] \subset S(\phi_n)$.

Logo, $(\phi_n)_n$ não converge a zero em $C_c^\infty(\mathbb{R})$, apesar de convergir em $C^\infty(\mathbb{R})$.

Apesar do nosso espaço não ser normado, vale a seguinte equivalência para um funcional linear em C^∞.

Teorema 3.6.9. Seja u um funcional linear em $C^\infty(\Omega)$. Então u é contínuo se, e somente se, existem $K \subset \Omega$ compacto, c constante positiva e m inteiro positivo tais que

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \phi| \tag{3.4}$$

Prova: Suponha que a equação (3.4) é válida. Se $\phi_j \to 0$ em $C^\infty(\Omega)$, então as derivadas de ordem menor ou igual a m de ϕ_j tendem a zero uniformemente em qualquer compacto. Em particular, $\sup_K |D^\alpha \phi_j| \to 0$, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, quando $j \to \infty$.

Sendo assim, $\langle u, \phi_j \rangle \to 0$, pois $|\langle u, \phi_j \rangle| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \phi_j|$ e $\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \phi_j|$ converge a zero.

Por outro lado, suponha que a equação (3.4) não é válida.

Considere

$$K_n = \left\{ x \,;\, |x| \leq n \text{ e } d(x, \Omega^C) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Desta forma, cada K_n é compacto e, além disso, para todo $K \subset \Omega$ compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_{n_0}$ (veja a observação 3.6.10). Assim, se $c = m = n \geq n_0$ e $K = K_n$, existe $\phi_n \in C^\infty(\Omega)$ tal que a equação (3.4) não é válida, i.e.,

$$r_n := |\langle u, \phi_n \rangle > n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{K_n} |D^\alpha \phi_n| > 0. \tag{3.5}$$

Agora defina $\psi_n = \dfrac{\phi_n}{r_n}$. Dados $K \subset \Omega$ compacto, β multi-índice e $n \in \mathbb{N}$ com $n > \beta$ e $K \subset K_n$, vale

$$\sup_K |D^\beta \psi_n| \leq \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{K_n} |D^\alpha \psi_n| < \frac{1}{n}.$$

Entretanto,

$$|\langle u, \psi_n \rangle| = |r_n^{-1} \langle u, \phi_n \rangle| = 1,$$

deste modo u não é contínua.

Portanto, se u é contínua, então a equação (3.4) é válida. $\square$

Observação 3.6.10. Se $K_n = \left\{ x \,;\, |x| \leq n \text{ e } d(x, \Omega^C) \geq \frac{1}{n} \right\}$, então K_n é compacto para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $K_n = B[0,n] \cap C_n$, onde $C_n = \left\{ x \,;\, d(x, \Omega^C) \geq \frac{1}{n} \right\}$ é um conjunto fechado por definição.

Deste modo, K_n é fechado por ser a interseção de fechados e é limitado, pois está contido em $B[0,n]$. Logo, K_n é compacto.

Além disso, se $K \subset \Omega$ é compacto, então existe $r > 0$ tal que $d(K, \Omega) > r$. Assim, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ de forma que $n_1^{-1} \leq r$, ou seja, se $x \in K$, então $d(x, \Omega^C) > r \geq \dfrac{1}{n_1}$. Ademais, pela compacidade de K, existe n_2 natural tal que $K \subset B[0, n_2]$.

Sendo assim, se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos $K \subset K_{n_0}$.

Também vale uma equivalência para os funcionais de C_c^∞.

Teorema 3.6.11. Seja u um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$. Então u é contínuo se, e somente se, para cada compacto $K \subset \Omega$, existem m inteiro positivo e c constante positiva tais que, para $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $S(\phi) \subset K$,

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha \phi|. \tag{3.6}$$

Prova: Suponha que a equação (3.6) é válida.

Tome $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Por definição, existe $K \subset \Omega$ compacto tal que $\forall j \in \mathbb{N}$, temos $S(\phi_j) \subset K$ e, para todo multi-índice α, $D^\alpha \phi_j \to 0$ uniformemente.

Por hipótese, existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que a equação (3.6) é válida, i.e.,

$$|\langle u, \phi_j \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha \phi_j|.$$

Sendo assim, uma vez que $\sup\limits_{x \in K} |D^\alpha \phi_j(x)| \to 0$, temos $\langle u, \phi_j \rangle \to 0$, quando $j \to \infty$. Portanto, u é contínuo.

Por outro lado, suponha que existe $K \subset \Omega$ compacto tal que $\forall m \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}$ constantes, existe uma função-teste com suporte contido em K que não satisfaz a equação (3.6).

Em particular, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $S(\phi_j) \subset K$ e

$$|\langle u, \phi_j \rangle| > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_K |D^\alpha \phi_j|. \tag{3.7}$$

Seja $r_j := |\langle u, \phi_j \rangle|$. Daí, defina $\psi_j = \dfrac{\phi_j}{r_j}$. Dado um multi-índice β com $|\beta| = m$, temos

$$\sup |D^\beta \psi_j| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha \psi_j| \leq \frac{1}{r_j} \sum_{|\alpha| \leq j} \sup |D^\alpha \phi_j| \leq \frac{1}{r_j} \frac{r_j}{j} = \frac{1}{m}.\frac{1}{j},$$

para cada $j \geq m$. Sendo assim, $D^\beta \psi_j \to 0$ uniformemente para cada $\beta \in \mathbb{N}^n$ e, uma vez que $S(\phi_j) \subset K, \forall j \in \mathbb{N}$, concluímos que $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Entretanto,

$$|\langle u, \psi_j \rangle| = \left| \frac{1}{r_m} \right| |\langle u, \phi_j \rangle| = 1.$$

Logo, u não seria contínuo. $\square$

Agora, estamos aptos a responder a pergunta feita após a demonstração do Teorema 3.6.6.

Teorema 3.6.12. Seja $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Então, $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ se, e somente se, existe um funcional linear contínuo $v : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que $v|_{C_c^\infty(\Omega)} = u$.

Prova: Suponha que $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Podemos aplicar o Teorema 3.6.6 para estender u a um funcional $\tilde{u} \in C^\infty(\Omega)$ que satisfaz as propriedades do teorema linear $\tilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que $\tilde{u}|_{C_c^\infty(\Omega)} = u.$.

Seja $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que ψ vale 1 em uma vizinhança de $S(u)$.

Desta forma, $\tilde{u}(\phi) = u(\phi\psi), \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Ao aplicar o Teorema 3.6.11 ao funcional u com $K_0 = S(\phi)$, obtemos que, para certos $c > 0$, m inteiro positivo e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ arbitrária:

$$|\langle \tilde{u}, \phi \rangle| = |\langle u, \phi \rangle| = |\langle u, \phi\psi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq n} \sup |D^\alpha(\psi\phi)| \leq c' \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{K_0} |D'\phi|.$$

Decorre do Teorema 3.6.11 que $\tilde{u}$ é contínuo em $C^\infty(\Omega)$, restando, somente, definir $v = \tilde{u}$.

Por outro lado, supondo que exista um funcional linear contínuo $v : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que $v|_{C_c^\infty(\Omega)} = u$, segue pelo Teorema 3.6.11, que existem c, m constantes e K compacto tais que

$$|\langle v, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \phi|, \quad \phi \in C^\infty(\Omega). \tag{3.8}$$

Se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi) \cap K = \emptyset$, então segue da desigualdade 3.8 que

$$|\langle u, \phi \rangle| = |\langle v, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |D^\alpha \phi| = 0.$$

Portanto, $S(u) \subset K$ e $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$. $\square$

Observação 3.6.13. Seja K_n uma sequência de compactos definida por

$$K_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \; ; \; |x| \leq n \text{ e } d(x, \Omega^C) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Se $\psi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ vale 1 em uma vizinhança de K_n, então dada $\phi \in C^\infty(\Omega)$, a sequência $\phi_n = \phi\psi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\phi - \phi_n \to 0$ em $C^\infty(\Omega)$.

Ou seja, podemos nos aproximar de uma função em $C^\infty(\Omega)$ por uma sequência de funções-teste em $C_c^\infty(\Omega)$. Isto resulta em dizer que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C^\infty(\Omega)$.

Uma vez que funcionais contínuos que coincidem em um conjunto denso são idênticos, o funcional v do Teorema 3.6.12 que estende $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ é único.

Isto permite identificar $\mathscr{E}'(\Omega)$ com o espaço das funções lineares contínuas em $C^\infty(\Omega)$.

Exemplo 3.6.14. Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $f(x) = 0$ $q.t.p.$ fora de um compacto K, então $S(f) \subset K$ e $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$.

Por outro lado, se $S(f) = K$, então f é zero em $\Omega - K$ e decorre do exemplo 3.1.4 que $f = 0$ $q.t.p.$ em $\Omega - K$.

Exemplo 3.6.15. Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ compacto. Se μ é uma medida de Borel localmente finita tal que $\mu(E) = \mu(E \cap K)$, para todo boreliano E, segue que $S(\mu) \subset K$.

Se $d\theta$ denota a medida de Lebesgue na circunferência unitária $S^1 = \{(cos\theta, sen\theta) ; \theta \in [0, 2\pi]\}$ e, para todo boreliano $E \subset \mathbb{R}^2$, então definimos $\mu(E) = \int_{S^1 \cap E} d\theta$, μ é uma medida finita e $S(u) = S^1$.

Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, então $\langle \mu, \phi \rangle = \int_0^{2\pi} \phi(cos\theta, sen\theta) d\theta$.

Exemplo 3.6.16. A distribuição δ (lembre-se que$\delta(\phi) = \phi(0)$, quando $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$) tem suporte $S(\delta) = \{0\}$. Analogamente, qualquer combinação linear de derivadas de δ,

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta$$

satisfaz $S(u) = \{0\}$.

Por outro lado, considere $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| \leq \varepsilon\}$ e escolha $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ de forma que $\int \phi dx = 1$, $\phi \geq 0$ e $S(\phi) \subset \{x ; |x| \leq 1\}$.

Defina

$$f_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \int_{B_{2\varepsilon}} \phi\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big) dy.$$

Então, $f_\varepsilon = 1$ em B_ε e $S(f_\varepsilon) \subset B_{3\varepsilon}$.

Se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $S(u) = \{0\}$, então, para $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, f_\varepsilon \psi \rangle, \tag{3.9}$$

pois $S(\psi(1 - f_\varepsilon)) \cap \{0\} = \emptyset$.

Assim, podemos aplicar o Teorema 3.6.11 com $K = B_1$. E tomando $\varepsilon < \frac{1}{3}$, para $\varepsilon \in \Big(0, \frac{1}{3}\Big)$ e $\phi \in C_c^\infty$, temos

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |D^\alpha (f_\varepsilon \phi)|. \tag{3.10}$$

Por outro lado, o desenvolvimento de Taylor de ϕ se escreve como

$$\phi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha \phi(0)}{\alpha!} x^\alpha + R_{m+1}(x) \tag{3.11}$$

e a estimativa de Lagrange para o resto nos dá

$$|D^\beta R_{m+1}(x)| \leq M |x|^{m+1-|\beta|}, \quad |x| < 1, |\beta| \leq m+1,$$

onde M é uma constante que depende de ϕ e de m, mas independe de x desde que $|x| < 1$.

Sendo assim, as equações 3.9 e 3.11 nos dizem que

$$\langle u, \phi \rangle = \sum_{|\alpha| \le m} \left[\frac{D^\alpha \phi(0)}{\alpha!} \langle u, x^\alpha \rangle \right] + \langle u, R_{m+1} \rangle = \langle \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha D^\alpha \delta, \phi \rangle + \langle u, R_{m+1} \rangle.$$

Uma vez que $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\langle u, x^\alpha \rangle$ está bem definido.

Ao aplicar a equação 3.10 com $\phi = R_{m+1}$, temos

$$|\langle u, R_{m+1} \rangle| \le k \sum_{|\alpha| \le m} \sup |D^\alpha (f_\varepsilon R_{m+1})|. \tag{3.12}$$

A estimativa de Lagrange nos dá

$$\sup_{|x| \le 3\varepsilon} |D^\beta R_{m+1}(x)| = 0(\varepsilon^{m+1-|\beta|}), \quad |\beta| \le m+1, \ \varepsilon \to 0. \tag{3.13}$$

No entanto, segue da definição de f_ε que

$$\sup |D^\alpha f_\varepsilon(x)| = 0(\varepsilon^{-|\alpha|}). \tag{3.14}$$

Assim, ao aplicar a Regra de Leibniz ao membro direito da equação 3.12 e usando as igualdades 3.13 e 3.14, obtemos que $\langle u, R_{m+1} \rangle = 0\varepsilon$. Visto que R_{m+1} não depende de ε, temos

$$\langle u, \phi \rangle = \langle \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha D^\alpha \delta, \phi \rangle.$$

Portanto, a recíproca da afirmação inicial é falsa.

3.7 Divisão de distribuições

Dadas $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$ o problema da divisão consiste em encontrar $v \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tal que $f \cdot v = u$.

Se $f \neq 0$, em todo ponto, então basta tomar $v = \frac{1}{f} u$. No entanto, mesmo que f se anule em algum ponto, pode ser possível encontrar v.

Por exemplo, se $u = 1$ e $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, então $v_0 = V.P.\frac{1}{x}$ é solução do problema. Mais geralmente, $v = v_0 + c\delta$ também é solução.

Se w satisfaz $xw = 1$, então $xw = xv_0 \Rightarrow x(w - v_0) = 0$.

Daí, $w - v_0$ se anula para $x \neq 0$ e $S(w - v_0) = \{0\}$.

Segue do exemplo 3.6.16 que $w - v_0$ é combinação linear de δ e suas derivadas. Deste modo, a solução geral de $xv = 1$ é

$$v = V.P.\frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta^{(n)}.$$

Considere o problema $xv = u$, $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Se $\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e $\alpha(0) = 0$, segue do teorema fundamental do cálculo que,

$$\alpha(x) = \int_0^x \alpha'(t)dt = x\int_0^1 \alpha'(\tau x)d\tau = x\beta_\alpha(x),$$

com $\beta_\alpha(x) = \displaystyle\int \alpha'(\tau x)d\tau$. Note ainda que, $\beta_\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. Fixe uma função $\gamma \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, tal que $\gamma(0) = 1$ e aplique o processo anterior a $\phi(x) - \phi(0)\gamma(x)$ para obter

$$\begin{aligned}
\phi(x) - \phi(0)\gamma(x) &= \int_0^x [\phi'(t) - \phi(0)\gamma'(t)]dt \\
&= x\int_0^1 [\phi'(x\tau) - \phi(0)\gamma'(x\tau)]d\tau \\
&= x[\phi(x) - \phi(0) - \phi(0)\gamma(x) + \phi(0)\gamma(0)] \\
&= x\phi(x) - x\phi(0)\gamma(x)
\end{aligned}$$

Deste modo, $\phi(x) = \phi(0)\gamma(x) + x\beta(x)$, com $\beta(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

Assim,

$$\langle v, \phi \rangle = \langle u, \beta \rangle = \left\langle u, \frac{\phi - \phi(0)\gamma}{\cdot} \right\rangle, \quad \phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Desta forma, se $f(x) \in C^{\infty}$ tem um único zero em $x = 0$, então $f(x) = xg(x)$ com $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ e a divisão por x se dá por divisões sucessivas por x e por $g(x) \neq 0$.

A divisão por funções C^{∞} não analíticas é, em geral, impossível. Por exemplo, considere a equação

$$exp(x^{-2})v = 1 \tag{3.15}$$

Se houvesse solução, v_0, para a equação 3.15 em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, então

$$|\langle v_0, \phi \rangle| \leq c\sum_{\alpha=0}^{m} \sup|D^{\alpha}\phi|, \quad \phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})\ , S(\phi) \subset [0,4].$$

Se $\phi_0 \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ verifica $\phi_0(x) \geq 0$, $S(\phi_0) \subset [1.4]$ e $\phi_0(x) \in [2,3]$, então $\phi_n(x) = \phi_0(nx) \in C_c^{\infty}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $S(\phi_n) \subset \left[\frac{1}{n}, \frac{4}{n}\right]$.

Ao aplicar o Teorema 3.6.11, temos

$$|\langle v, \phi_n \rangle| \leq c\sum_{\alpha=0}^{m} \sup|D^{\alpha}\phi_n|, \quad n \in \mathbb{N},$$

mas

$$\begin{aligned}
\langle v, \phi_n \rangle &= \langle exp(-x^{-2}), exp(x^{-2})\phi_n \rangle \\
&= \int exp(x^{-2})\phi_0(nx)dx \\
&\geq \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} exp(x^{-2})dx \\
&\geq n^{-1} exp\Big(\frac{n^2}{9}\Big).
\end{aligned}$$

Entretanto,

$$c\sum_{\alpha=0}^{m} \sup_x |D^\alpha \phi_0(nx)| \leq c\sum_{\alpha=0}^{m} C_\alpha n^\alpha, \quad C_\alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Portanto, teríamos $exp\Big(\frac{n^2}{9}\Big) \leq c\sum_{\alpha=0}^{m} C_\alpha n^{\alpha+1}$ que é falso quando consideramos o limite em n. Ou seja, a equação 3.15 não tem solução em $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

3.8 Convergência em $\mathscr{D}'(\Omega)$

Definição 3.8.1. Dizemos que uma sequência $u_j \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $j \in \{1,2,...\}$ converge a $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se $\langle u_j, \phi \rangle$ converge a $\langle u, \phi \rangle$ para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Neste caso, escrevemos $u_j \to u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Exemplo 3.8.2. Seja $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Para $r \in \mathbb{R} - \{0\}$, considere a translação u_r de u, i.e.,

$$\langle u_r, \phi \rangle = \langle u, \phi_r \rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})\ ,\ \phi_r(x) = \phi(x+r).$$

Agora podemos definir a sequência de coeficientes de Newton

$$v_n = \frac{u_{\frac{1}{n}} - u}{\frac{1}{n}}.$$

Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, então

$$\langle v_n, \phi \rangle = \frac{\langle u, \phi_{\frac{1}{n}} \rangle - \langle u, \phi \rangle}{\frac{1}{n}} = \Big\langle u, \frac{\phi_{\frac{1}{n}} - \phi}{\frac{1}{n}} \Big\rangle.$$

Seja $\psi_n = \dfrac{\phi_{\frac{1}{n}} - \phi}{\frac{1}{n}} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Então, $\langle v_n, \phi \rangle = \langle u, \phi_n \rangle$.
Agora, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\psi_n(x) = 0 \Leftrightarrow (\phi_{\frac{1}{n}} - \phi)(x) = 0 \Leftrightarrow \phi_{\frac{1}{n}}(x) - \phi(x) = 0 \Leftrightarrow \phi\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - \phi(x) = 0.$$

Portanto, $S(\psi_n) \subset S(\phi_{\frac{1}{n}}) \cap S(\phi) \subset K$, para algum K compacto.
Além disso, $(\psi_n + \phi')^{(m)} \to 0$, qualquer que seja m inteiro positivo.

Com efeito,

$$\lim_{n\to\infty}(\psi_n+\phi')^{(m)}(x) = \Big(\lim_{n\to\infty}\psi_n^{(m)}\Big)(x) + \Big(\lim_{n\to\infty}\phi_n^{(m+1)}\Big)(x)$$
$$= [-\phi^{(m+1)}(x)+\phi^{(m+1)}(x)] = 0.$$

Logo, $\psi_n' \to -\phi'$ em $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

E, por fim,

$$\langle v_n,\phi\rangle \to \langle u,-\phi'\rangle = \left\langle u, \frac{\phi_{\frac{1}{n}}-\phi}{\frac{1}{n}}\right\rangle = \langle u',\phi\rangle.$$

Exemplo 3.8.3. Seja $(u_j)_j$ uma sequência de distribuições em um aberto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Se $u_j\to u$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$, então

$$\lim_{j\to\infty}\left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_i},\phi\right\rangle = \lim_{j\to\infty}\left\langle u_j,-\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\rangle = \left\langle u,-\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i},\phi\right\rangle, \quad \phi\in C_c^\infty(\Omega).$$

Sendo assim, temos $\displaystyle\lim_{j\to\infty}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\lim_{j\to\infty}u_j)$.

Portanto, sempre é possível trocar a ordem das operações de derivação e limite numa sequência de distribuições.

Exemplo 3.8.4. Seja $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi\geq 0$ e $\displaystyle\int \phi\,dx = 1$. Então pelo item c) do Teorema 2.1.8, ϕ_ε definida por $\phi_\varepsilon(x) = \phi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ satisfaz,

$$\langle\phi_\varepsilon,\psi\rangle = \varepsilon^{-n}\int\psi(x)\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\to\psi(0),\ \text{quando}\ \varepsilon\to 0,\quad \psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Deste modo, $\phi_\varepsilon\to\delta$ em $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 3.8.5. Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções em $L^1_{loc}(\Omega)$. Suponha que $f_n(x)\to f(x)$ $q.t.p.$ e que existe função positiva $g\in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $|f_n(x)|\leq g(x)$. Então, segue do Teorema da Convergência Dominada que $\langle f_n,\phi\rangle\to\langle f,\phi\rangle$, para toda $f\in C_c^\infty(\Omega)$, i.e., $f_n\to f$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$. Em particular, muitas das convergências naturais dos espaços de funções implica a convergência em $\mathscr{D}'(\Omega)$ através da inclusão $L^1_{loc}(\Omega)\subset\mathscr{D}'(\Omega)$.

Exemplo 3.8.6. Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ aberto,

$$K_n = \left\{x\in\Omega\ ;\ |x|\leq n,\ d(x,\Omega^C)\leq\frac{1}{n}\right\}$$

e $\phi_n\in C_c^\infty(\Omega)$ uma sequência de funções-teste tais que $\phi_n(x)=1$ numa vizinhança de K_n.

Dada $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, defina a sequência $u_n = \phi_n u$ de distribuições em Ω que possuem suporte compacto. Para $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\langle u_n, \phi \rangle = \langle \phi_n u, \phi \rangle = \langle u, \phi_n \phi \rangle \to \langle u, \phi \rangle$$

quando $n \to \infty$.

Portanto, toda distribuição é limite de uma sequência de distribuições com suporte compacto.

4 TRANSFORMADA DE FOURIER

4.1 A transformada de Fourier em S

Definição 4.1.1. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a transformada de Fourier de f se define por

$$F[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

onde $x \cdot \xi = \langle x, \xi \rangle$.

Observação 4.1.2. Por definição,

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \int e^{-ix\xi} f(x)dx \right| \leq \int |e^{-ix\xi} f(x)|dx = \int |e^{-ix\xi}| \cdot |f(x)|dx = \int |f(x)|dx = ||f||_1.$$

Dado, $\varepsilon > 0$, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\int_{|x|>M} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4},$$

pois $||f||_1 < \infty$.

Como a aplicação $y \mapsto e^{iy}$ é contínua, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|y| < \delta_1 \Rightarrow |e^{iy} - 1| < \frac{\varepsilon}{2N},$$

em que $N > ||f||_1$.

Daí, se $\delta = \dfrac{\delta_1}{M}$, então

$$|\eta| < \delta \Rightarrow |x\eta| < \delta_1, \quad \forall x \in B[0, M].$$

Portanto, $|\eta| < \delta \Rightarrow$,

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot |e^{-i(\xi+\eta)x} - e^{-i\xi x}|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||e^{i\eta x} - 1|dx \\
&= \int_{|x|\leq M} |f(x)||e^{i\eta x} - 1|dx + \int_{|x|>M} |f(x)||e^{i\eta x} - 1|dx \\
&< \frac{\varepsilon}{2N} \int_{|x|\leq M} |f(x)|dx + \int_{|x|>M} |f(x)||e^{i\eta x} - 1|dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2N} \int_{|x|\leq M} |f(x)|dx + 2\int_{|x|>M} |f(x)|dx \\
&< \frac{\varepsilon}{2N}||f||_1 + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$. Logo, $\widehat{f}$ é uniformemente contínua.

Já vimos que sempre é possível estender um operador contínuo definido em C_c^∞ que possua transposto formal a $\mathscr{D}'$.

Porém, se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{\phi}(\xi)$ não possui suporte compacto a menos que $\phi \equiv 0$.

Deste modo, definiremos um espaço que contenha $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que seja invariante pela transformação de Fourier para estender a transformada de Fourier, por dualidade, aos funcionais desse espaço.

Definição 4.1.3. Denotamos por $S(\mathbb{R}^n)$ o subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções ϕ tais que

$$\sup_x |x^\alpha \partial^\beta \phi| < \infty, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Observação 4.1.4. As funções de S possuem decrescimento rápido. Mais precisamente, tanto as funções de S, quanto suas derivadas, decrescem no infinito mais rápido que qualquer potência negativa de $|x|$.

Observação 4.1.5. Vale a inclusão $S \subset L^1_{loc}$. Com efeito, seja $f \in S$. Então

$$\begin{aligned} &\sup_x |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \infty \\ \Rightarrow &\sup_x |(1+|x|)^n \partial^\gamma f(x)| < \infty, \end{aligned}$$

para algum $n \geq |\gamma|$ (veja **[2]**). Além disso,

$$\begin{aligned} ||f||_1 = \int |f(x)|dx &= \int_{|x|\leq 1} |f(x)|dx + \int_{x>1} |f(x)|dx \\ &\leq 2\sup_x |f(x)| + \sup_x (|x|^N |f(x)|) \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^N} dx \\ &= C_1 + C_2, \end{aligned}$$

para N suficientemente grande para que a segunda integral seja finita.

Definição 4.1.6. Dizemos que uma sequência $\phi_j \in S$, $j \in \mathbb{N}$, converge para zero em S ($\phi_j \to 0$ em S) se $x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x) \to 0$ uniformemente, para quaisquer multi-índices α, β.

Exemplo 4.1.7. Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então denotando $K = S(\phi)$ temos

$$\sup_x |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| = \sup_{x\in K} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|.$$

Como $\partial^\beta \phi$ é contínua no compacto K, temos $\sup_{x\in K} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty$.

Deste modo, segue que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, se $\phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\phi_n \to 0$ em $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então existe um compacto $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\cup S(\phi_j) \subset K$ e consequentemente $\partial^\beta \phi_n(x) \to 0$ uniformemente em K, para qualquer multi-índice β. Sendo assim,

$$\sup_x |x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x)| = \sup_{x\in K_0} |x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x)| \to 0.$$

Concluindo que $\phi_n \to 0$ em $S(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, $f(x) = e^{-|x|^2}$ é tal que $\partial^\alpha f(x) = P_\alpha(x) f(x)$, onde $P_\alpha(x)$ é um polinômio e $\lim\limits_{x\to\infty} P_\alpha(x) e^{-|x|^2} = 0$. Desta forma, $f \in S(\mathbb{R}^n)$, mas $f \notin C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ainda mais, se $f \in S$, então $f' \in S$.

Teorema 4.1.8. Se $f \in S(\mathbb{R})$, então $f' \in S(\mathbb{R})$ e

$$F[f'](\xi) = i\xi F[f](\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Prova: O exemplo 4.1.7 estabeleceu que se $f \in S(\mathbb{R})$, então $f' \in S(\mathbb{R})$.

Por definição da transformada de Fourier, temos

$$\begin{aligned} F[f'](\xi) &= \int f'(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \left[f(x) e^{-ix\xi} \right|_{-\infty}^{\infty} - (-i\xi) \int f(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= i\xi F[f](\xi). \end{aligned}$$

Assim como queríamos. □

Teorema 4.1.9. A transformada de Fourier é um operador contínuo de S em S. Mais ainda, dado $\phi \in S$ temos:

$$i) F[D^\alpha \phi](\xi) = \xi^\alpha \widehat{\phi}(\xi); \tag{4.2}$$

$$ii) F[\cdot^\alpha \phi(\cdot)](\xi) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{\phi}(\xi). \tag{4.3}$$

Prova: Vamos começar provando as equações 4.2 e 4.3.

i) Por definição,

$$F[D^\alpha \phi](\xi) = \int e^{-i\xi x} \frac{1}{i^\alpha} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} [\phi(x)] dx.$$

Se $\alpha = e_j$, então

$$F[D^\alpha \phi](\xi) = \int e^{-i\xi x} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} [\phi(x)] dx.$$

Uma vez que $S \subset L^1$ (4.1.5), podemos aplicar o Teorema de Fubini,

$$F[D^\alpha \phi](\xi) = \frac{1}{i}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\sigma_j}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_j x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}[\phi(x)]dx_j d\tilde{x},$$

onde $\sigma_j = \sum\limits_{k\neq j} x_k\xi_k$ e $\tilde{x} = (x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n)$.
Ao integrar $\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_j x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}[\phi(x)]dx_j$ por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
F[D^\alpha \phi](\xi) &= \frac{1}{i}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix\sigma_j}\Big[\lim_{n\to\infty}(e^{-ix_j\xi_j}|_{-n}^{n}) + i\xi_j\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_j\xi_j}\phi(x)dx_j\Big]d\tilde{x}\\
&= \xi_j\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\sigma_j}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_j x_j}\phi(x)dx_j d\tilde{x}\\
&= \xi_j\int e^{-ix\xi_j}\phi(x)dx\\
&= \xi_j\widehat{\phi}(\xi).
\end{aligned}$$

Para α genérico, aplicamos o processo acima reiteradamente para obter

$$F[D^\alpha\phi](\xi) = F[D^{\alpha_1 e_1}\cdots D^{\alpha_n e_n}\phi](\xi) = \xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}\widehat{\phi}(\xi) = \xi^\alpha\widehat{\phi}(\xi).$$

ii) Se $\alpha = e_j$, então

$$\begin{aligned}
F[\cdot^{e_j}\phi(\cdot)](\xi) &= \int e^{-ix\xi}x_j\phi(x)dx\\
&= \int \frac{1}{(-i)}(-ix_j)e^{-ix\xi}\phi(x)dx\\
&= -\frac{1}{i}\int\frac{\partial}{\partial\xi_j}[e^{-ix\xi}]\phi(x)dx\\
&= -\frac{1}{i}\int\frac{\partial}{\partial\xi_j}[e^{-ix\xi}\phi(x)]dx\\
&= -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\Big[\int e^{-ix\xi}\phi(x)dx\Big]\\
&= \Big(-\frac{1}{i}\Big)^2 D^{e_j}\widehat{\phi}(\xi).
\end{aligned}$$

$$\therefore F[\cdot^{e_j}\phi](\xi) = (-1)D^{e_j}\big[\widehat{\phi}\big](\xi.)$$

Para α arbitrário, o processo acima pode ser aplicado reiteradamente para obter

$$F\big[\cdot^\alpha\,\phi(\cdot)\big](\xi) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\widehat{\phi}(\xi).$$

- Por fim, suponha que $(\phi_j)_j$ é uma sequência de funções de S que converge a zero em S. Note que

$$
\begin{aligned}
|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{\phi}_j(\xi)| &= |\xi^\alpha F(\cdot^\beta \phi_j)(\xi)| = |F(\partial^\alpha\{\cdot^\beta \phi_j\})(\xi)| \\
&\leq \int \left|\partial_x^\alpha \{x^\beta \phi_j(x)\}\right| dx \\
&\leq \int \frac{1}{(1+|x|^{n+1})}(1+|x|^{n+1}) \left|\sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} C_\gamma x^{\beta-\gamma}\partial^{\alpha-\gamma}\phi_j(x)\right| dx \\
&\leq \int \frac{1}{(1+|x|^{n+1})}(1+|x|^{n+1}) \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \left|C_\gamma x^{\beta-\gamma}\partial^{\alpha-\gamma}\phi_j(x)\right| dx \\
&\int \frac{1}{(1+|x|^{n+1})}(1+|x|^{n+1}) \left|\sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} C_\gamma x^{\beta-\gamma}\partial^{\alpha-\gamma}\phi_j(x)\right| dx \\
&\leq \int \frac{1}{(1+|x|^{n+1})} dx \ \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^{n+1}) \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \left|C_\gamma x^{\beta-\gamma}\partial^{\alpha-\gamma}\phi_j(x)\right| \\
&\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{|\gamma_1+\gamma_2|\leq|\alpha+\beta|+n+1} \left| x^{\gamma_1}\partial^{\gamma_2}\phi_j(x)\right| \\
&\leq C \sum_{|\gamma_1+\gamma_2|\leq|\alpha+\beta|+n+1} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^{\gamma_1}\partial^{\gamma_2}\phi_j(x)\right| \to 0
\end{aligned}
$$

para certas constantes C, C_γ. Concluindo que $\widehat{\phi} \to 0$ em S. □

Corolário (Lema de Riemann-Lebesgue): Se $f \in S(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f}(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to \infty$. □

Exemplo 4.1.10. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Note que ϕ satisfaz a *EDO* linear com *P.V.I*.

$$
\begin{cases}
\phi'(x) + x\phi(x) &= 0 \\
\phi(0) &= 1
\end{cases}
$$

Já vimos que $\phi \in S$, então ao aplicar a transformada de Fourier na *EDO*, obtemos (pelo Teorema 4.1.9),

$$
0 = i\xi\hat{\phi}(\xi) - \frac{1}{i}\frac{d\widehat{\phi}}{d\xi}(\xi) = i\Big(\frac{d\hat{\phi}}{d\xi} + \xi\widehat{\phi}(\xi)\Big),
$$

ou seja, $\widehat{\phi}(\xi)$ satisfaz a mesma equação que $\phi(x)$ e, pelo teorema existência e unicidade de soluções para EDO's,

$$
\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{\phi}(0)\widehat{\phi}(\xi) = \int \phi(x)dx\widehat{\phi}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}.
$$

Lema 1. Se $f \in S$, então $\widehat{f} \in S$.

Prova: Seja $f \in S$. Para qualquer multi-índice β,

$$\widehat{f}^{\beta}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int (-ix)^{\beta} e^{-i\xi x} f(x)dx = (-i)^{\beta} F[x^{\beta} f]. \tag{4.4}$$

Ou seja, $\widehat{f}$ é de classe C^{∞}.

Pelo Teorema 4.1.11 e pela equação (4.4)

$$\begin{aligned}\xi^{\alpha}\widehat{f}^{\beta}(\xi) &= (-i)^{\alpha+\beta}(i\xi)^{\alpha}F[x^{\beta}f](\xi)\\ &= (-i)^{\alpha+\beta}F\Big[\partial^{\alpha}(x^{\beta}f)\Big](\xi)\\ &= \widehat{g}(\xi),\end{aligned}$$

onde $g = (-i)^{\alpha+\beta}\partial^{\alpha}(x^{\beta}f)$.

Como $g \in S \subset L^1$, $\widehat{g}$ é limitada. Sendo assim, $\xi^{\alpha}\widehat{f}(x)$ é limitada, isto prova que $\widehat{f} \in S$. $\square$

Teorema 4.1.11. A transformada de Fourier é continuamente inversível de S em S e

$$F^{-1}[\phi](x) = \check{\phi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}\phi(\xi)d\xi, \quad \phi \in S. \tag{4.5}$$

Prova: Temos

$$\widehat{\overline{f}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ix\xi}\overline{f}(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\int f(x)e^{ix\xi}dx} = \overline{\widehat{f}(-\xi)}.$$

Ademais, se $f \in S$, então

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \widehat{f}(\xi)d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

De fato, pelo que acabamos de ver, se $\xi, x \in \mathbb{R}^n$,

$$\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi} = F[f(\cdot - x)](\xi).$$

Como $f_{-x} = f(t-x)$ é somente uma translação de $f(t)$, a função transladada ainda está em S. Pelo exemplo 4.1.10,

$$f(x) = f(0-x) = f_{-x}(0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \widehat{f_{-x}}(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi.$$

Portanto, a fórmula de inversão está demonstrada.

Seja $\phi_{\varepsilon}(x) = \phi_1(\varepsilon x)$, onde $\phi_1(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$.

Aplique a mudança de coordenadas $x' = \varepsilon x$ na definição de $\hat{\phi}_{\varepsilon}$ após escrever a definição de transformada de Fourier como produto de integrais unidimensionais para obter $\hat{\phi}_{\varepsilon}(\xi) = \varepsilon^{-n}\phi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(2\pi)^{\frac{n}{2}}$.

Daí,

$$\begin{aligned}
\int \phi_\varepsilon(\xi)e^{ix\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi &= \int \phi_\varepsilon(\xi)e^{ix\xi}\int \phi(y)e^{-iy\xi}dyd\xi \\
&= \int\int \phi_\varepsilon(\xi)e^{ix\xi}\phi(y)e^{-iy\xi}d\xi dy \\
&= \int \psi(y)\hat{\phi}_\varepsilon(y-x)dy \\
&= \int \psi(y+x)\hat{\phi}_\varepsilon(y)dy \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int \psi(y+x)e^{-n}\phi_1\Big(\frac{y}{\varepsilon}\Big)dy \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\int \psi\Big(x+\frac{z}{\varepsilon}\Big)\phi_1(z)dz.
\end{aligned}$$

Como $\phi_\varepsilon(z) \to 1$ e $\psi\big(x+\frac{z}{\varepsilon}\big) \to \psi(x)$ quando $\varepsilon \to \infty$, temos

$$\int e^{ix\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi = \psi(x)(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int \phi_1(z)dz = (2\pi)^n\psi(x).$$

□

Teorema 4.1.12. Se $\phi, \psi \in S$, então

1. $\displaystyle\int \widehat{\phi}\psi d\xi = \int \phi\widehat{\psi}dx$;
2. $\displaystyle\int \phi\overline{\psi}dx = (2\pi)^{-n}\int \widehat{\phi}\overline{\widehat{\psi}}dx$;
3. $F[\phi * \psi] = \widehat{\phi} * \widehat{\psi}$;
4. $F[\phi\psi] = (2\pi)^{-n}\widehat{\phi} * \widehat{\psi}$.

Prova:

1. Temos

$$\begin{aligned}
\int \widehat{\phi}\psi d\xi &= \int\int e^{-ix\xi}\phi(x)\psi(\xi)dxd\xi \\
&= \int\int \phi(x)e^{-ix\xi}\psi(\xi)d\xi dx \\
&= \int \phi(x)\widehat{\psi}(x)dx.
\end{aligned}$$

2. Pelo Teorema 4.1.11, se $\widehat{\phi} = \overline{\beta}$,

$$\begin{aligned}
F^{-1}\overline{\beta} &= (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\beta(\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}\overline{\beta}(\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{-n}\overline{\widehat{\beta}}.
\end{aligned}$$

Ao fazer $\psi = \alpha$, pelo item **1**:

$$\int \phi\overline{\psi}dx = (2\pi)^{-n}\int \overline{\widehat{\beta}}\overline{\alpha}dx = (2\pi)^{-n}\int \overline{\beta}\overline{\widehat{\alpha}}dx = (2\pi)^{-n}\int \widehat{\phi}\overline{\widehat{\psi}}dx.$$

3. Neste caso

$$
\begin{aligned}
F[\phi * \psi](\xi) &= \int e^{-ix\xi} \int \phi(x-y)\psi(y)dydx \\
&= \int \int e^{-x\xi}\phi(x-y)\psi(y)dydx \\
&= \int \int e^{-x\xi}\phi(x-y)\psi(y)dxdy \\
&= \int \psi(y) \int e^{-x\xi}\phi(x-y)dxdy \\
&= \int \psi(y) \int e^{-(x+y)\xi}\phi(x)dxdy \\
&= \int \psi(y-x) \int e^{-(y-x)\xi} \int e^{-x\xi}\phi(x)dxdy \\
&= \widehat{\psi} * \widehat{\phi}(\xi).
\end{aligned}
$$

4. Por definição,

$$
\begin{aligned}
F[\phi\psi] &= \int \phi(x)\psi(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= \int \phi(x)\left[(2\pi)^{-n} \int \widehat{\psi}(\xi)e^{ix\xi}d\xi\right]e^{-ix\xi'}dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int \widehat{\psi}(\xi) \int \phi(x)e^{-ix(\xi-\xi')}dxd\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int \widehat{\psi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi-\xi')d\xi \\
&= (2\pi)^{-n}\widehat{\phi} * \widehat{\psi}.
\end{aligned}
$$

□

4.2 A transformada de Fourier em S'

Definição 4.2.1. Um funcional linear e contínuo em S é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas se denota com S'.

Observação 4.2.2. Se $u \in S'$, então $u\big|_{C_c^\infty}$ é um funcional linear contínuo em C_c^∞, i.e., a restrição de uma distribuição temperada ao espaço das funções-teste é uma distribuição.

Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $S(\mathbb{R}^n)$, se $\alpha(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e é igual a 1 numa vizinhança da origem, então para $\phi \in S$,

$$\phi(x)\alpha\left(\frac{x}{n}\right) \to \phi(x)$$

em S, pois $\forall \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$,

$$x^\beta D^\gamma\Big(\phi(x)\alpha\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big) = x^\beta \Big(D^\gamma\phi(x)\alpha\Big(\frac{x}{n}\Big) + \frac{1}{n}\phi(x)D^\gamma\alpha\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big)$$

que vai a zero uniformemente quando $n \to \infty$.

Assim, S' pode ser identificado como subespaço de $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Deste modo, temos as seguintes inclusões: $\mathscr{E}' \subset S' \subset \mathscr{D}'$. A primeira delas será demonstrada posteriormente usando o resultado abaixo.

Teorema 4.2.3. Seja u um funcional linear em S. As seguintes condições são equivalentes:

a) u é contínuo;

b) Existem inteiros M, m tais que

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq M \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_x |(1+|x|^2)^m D^\alpha \phi(x)|. \tag{4.6}$$

Prova: Suponha que a equação (4.6) é válida. Deste modo, se $\phi_j \to 0$ em S, então $|p(x)D^\alpha\phi_j(x)| \to 0$ uniformemente, qualquer que seja o polinômio $p \in \mathbb{C}[x]$.

Em particular, $|(1+|x|^2)^m D^\alpha \phi_j(x)| \to 0$ uniformemente, ou seja, $|\langle u, \phi_j\rangle| \to 0$.

Portanto, u é contínua em S.

Por outro lado, suponha que a equação (4.6) não é válida.

Seja $(\phi_j)_j$ uma sequência de funções de S tal que, para qualquer $J \in \mathbb{N}$, $\langle u, \phi_j\rangle = 1$.

Como a equação 4.6 não é válida, existem $m = M$ tais que

$$m \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_x |(1+|x|^2)^m D^\alpha \phi(x)| < |\langle u, \phi_j\rangle| = 1$$
$$\Rightarrow \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_x |(1+|x|^2)^m D^\alpha \phi(x)| < \frac{1}{m} \to 0.$$

Assim, teremos $\phi_j \to 0$ em S, mas $\langle u, \phi_j\rangle \nrightarrow 0$.

Por contra positiva, se u é contínua, então a equação (4.6) é válida. $\square$

Exemplo 4.2.4. Se $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, então

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq c \sum_{|\alpha|\leq m} \sup |D^\alpha \phi|,$$

ou seja,

$$\sup_x |(1+|x|^2)^\beta D^\alpha \phi(x)| < \infty,$$

pois $S(u)$ é compacto. Assim, $u \in S'$.

Além disso, se $f \in L^1_{loc}$ e $|f(x)| \leq A(1+|x|)^\beta$, quando $|x| \geq C$, com A, B, C constantes fixas, então $f \in S'$. Quando f é dominada por $A(1+|x|)^\beta$, para $|x|$ suficientemente grande, dizemos que f cresce lentamente no infinito.

Porém, $f(x) = e^x cos(e^x)$ não cresce lentamente no infinito, pois $|f(2k\pi)| = e^{2k\pi}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, que cresce mais rápido que qualquer polinômio no infinito. Mas se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned} |\langle f, \phi \rangle| &= \left| \int e^x cos(e^x)\phi(x)dx \right| \\ &= \left| \lim_{N\to\infty} (sen(e^x)\phi(x))\Big|_{-N}^{N} - \int sen(e^x)\phi'(x)dx \right| \\ &= \left| \int sen(e^x)\phi'(x)dx \right| \\ &\leq \int |sen(e^x)\phi'(x)|dx \\ &\leq \int |\phi'(x)|dx = ||\phi'||_1. \end{aligned}$$

Logo, $\phi_n \to 0$ em S implica que $\langle f, \phi_n \rangle \to 0$, ou seja, $f \in S'$.

Definição 4.2.5. Se $u \in S'$, a transformada de Fourier de u, $\widehat{u}$, é definida por

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle, \quad \phi \in S.$$

Exemplo 4.2.6. Se $u = \delta$, então

$$\langle \widehat{\delta}, \phi \rangle = \langle \delta, \widehat{\phi} \rangle = \widehat{\phi}(0) = \int \phi(x)dx = \langle 1, \phi \rangle,$$

ou seja, $\widehat{\delta} = 1$.

Teorema 4.2.7. São válidas as seguintes afirmações:

i) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a transformada de Fourier de f, como uma distribuição temperada, coincide com a transformada de Fourier clássica de f;

ii) Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $||f||_2^2 = (2\pi)^{-n}||\widehat{f}||_2^2$;

iii) Se $f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f} \in C^\infty$ e $\widehat{f}(\xi) = \langle u_x, e^{-ix\xi} \rangle$;

iv) Se $u \in S$, então $F[D^\alpha u] = \xi^\alpha \widehat{u}$, $F[\cdot^\alpha u] = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{u}$ e $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$.

Prova:

i) Se $\psi \in S$, temos

$$\langle \widehat{f}, \psi \rangle = \langle f, \widehat{\psi} \rangle = \int f\widehat{\psi}dx = \int f\widehat{\psi}dx.$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\psi_j \in S$, $\psi_j \to f$ em L^1,

$$\int \widehat{f}\phi dx = \lim_{j\to\infty} \int \widehat{\psi}_j \phi dx = \lim_{j\to\infty} \int \psi_j \widehat{\phi} dx = \int f\widehat{\phi}, \quad \phi \in S.$$

Concluindo que a definição de transformada de Fourier no sentido clássico e no sentido de distribuição coincidem.

ii) Seja $\psi_j \in S$, $\psi_j \to f$ em L^2. Pelo que vimos no Teorema 4.1.11 e no item **i)** deste teorema,

$$||\widehat{\psi}_j - \widehat{\psi}_k||_2^2 = (2\pi)^n ||\psi_j - \psi_k||_2^2.$$

Portanto, $(\widehat{\psi}_j)$ é de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$ com $\widehat{\psi}_j \to g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Assim,

$$\langle \widehat{f}, \phi\rangle = \langle f, \widehat{\phi}\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle \psi_j, \widehat{\phi}\rangle \lim_{j\to\infty} \langle \widehat{\psi}_j, \phi\rangle = \langle g, \phi\rangle.$$

Isto prova que $\widehat{f} = g \in L^2$.

Além disso,

$$||\widehat{f}||_2^2 = \lim_{j\to\infty} ||\widehat{\psi}_j||_2^2 = (2\pi)^n \lim_{j\to\infty} ||\psi_j||_2^2 = (2\pi)^n ||f||_2^2.$$

iii) Sejam $\phi, \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $0 \le \phi$, $\displaystyle\int \phi dx = 1$ e $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Defina $u_\varepsilon = u * \phi_\varepsilon$.

Como $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $u_\varepsilon \to u$ em $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e, em particular, $u_\varepsilon \to u$ em S'.

Daí, $\widehat{u} = \lim_{n\to 0} \widehat{u}_{\frac{1}{n}}$, $\widehat{u}_{\frac{1}{n}}$ e, pelo item **i)**,

$$\widehat{u_\varepsilon}(\xi) = \langle u * \phi_{\frac{1}{n}}, e^{-ix\xi}\rangle = \langle u, \check{\phi}_{\frac{1}{n}} * e^{-ix\xi}\rangle = \widehat{\phi}(\frac{\xi}{n})\langle u, e^{-ix\xi}\rangle.$$

Como $\widehat{\phi}\left(\dfrac{\xi}{n}\right) \to 1$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ quando $n \to \infty$, temos $\widehat{u}(\xi) \to \langle u, e^{-ix\xi}\rangle$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Em particular, $\widehat{u}_{\frac{1}{n}} \to \langle u, e^{-ix\xi}\rangle$ em S'. Pela unicidade do limite, temos o nosso resultado.

iv) $F[D^\alpha u] = \xi^\alpha \widehat{u}$ e $F[\cdot^\alpha u] = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{u}$ são consequências do Teorema 4.1.9.

Já $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$ é consequência do Teorema 4.1.11. □

Exemplo 4.2.8. Quando $u \notin L^1$ e queremos calcular $\widehat{u}$, tentamos aproximar u por funções $u_\varepsilon \in L^1$ cujas transformadas são conhecidas.

Se $u_\varepsilon(x) = H(x)e^{-\varepsilon x}$, então $u_\varepsilon \in L^1$ e $u_\varepsilon(x) \to H(x)$ em S' quando $\varepsilon \to 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\widehat{u_\varepsilon}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} H(x)e^{-\varepsilon x}e^{-i\xi x}dx \\ &= \int_0^\infty e^{-(\varepsilon+i\xi)x}dx.\end{aligned}$$

Sejam $g_\varepsilon(\xi) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2}$. Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} g_{\frac{1}{n}}(\xi)d\xi &= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2}d\xi\\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)^2}d\xi\\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon\cdot tg^{-1}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}\\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\pi = 1.
\end{aligned}$$

Ademais, $\displaystyle\int_{|x|>a} g_\varepsilon(\xi)d\xi \to 0$, para todo $a>0$. Daí,

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2}\to\pi\delta.$$

Porém,

$$\frac{\xi}{\varepsilon^2+\xi^2}\to V.P.\frac{1}{\xi}.$$

Assim,

$$\hat{H}(\xi)=\pi\delta(\xi)-iV.P.\frac{1}{\xi}.$$

Usando o fato que $\widehat{F^{-1}[u]}=F^{-1}[\widehat{u}]$, obtemos

$$\widehat{F^{-1}[H]}=\pi\delta+iV.P.\frac{1}{\cdot}\Rightarrow\widehat{1}=F[H+F^{-1}[\widehat{H}]]=2\pi\delta$$

que coincide com o resultado $\widehat{\delta}=1$ e com a fórmula de inversão.

De maneira análoga, se $sn=H(x)-H(-x)$, então

$$\widehat{sn}(\xi)=-2iV.P.\frac{1}{\xi}\Rightarrow F[V.P.\frac{1}{\cdot}](\xi)=-i\pi(H-\check{H})=-i\pi sn(\xi).$$

Exemplo 4.2.9. Às vezes, é possível aplicar as fórmulas do Teorema 4.2.7 para obter uma transformada de integração difícil.

Por exemplo, Se $f(x)=ln|x|$, $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, então f cresce lentamente no infinito, pois $ln|x|\le 1+|x|$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deste modo, $f\in S'$.

Como $f'(x)=V.P.\dfrac{1}{x}$, temos $F[f'](\xi)=\xi\widehat{f}(\xi)\to -i\pi sn(\xi)=\xi\widehat{f}(\xi)$. Daí, temos $i\xi\widehat{f}(\xi)=\pi sn(\xi)$.

Portanto, podemos calcular $\widehat{f}$ como solução de um problema de divisão, conforme visto na seção 3.7, onde vimos que se v_0 é solução de $uv=w$, então $v_0=c\delta$ também é solução.

Seja $a > 0$, como a integral é linear, para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, podemos definir a seguinte distribuição:

$$\langle h_a, \phi \rangle = -\int_{|\xi|<a} \frac{\pi[\phi(\xi) - \phi(0)]}{|\xi|} d\xi - \int_{|\xi|\geq a} \frac{\pi\phi(\xi)}{|\xi|} d\xi, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

a qual satisfaz $\xi h_a(\xi) = -\pi sn(\xi)$.

Se $a, b > 0$, então

$$\begin{aligned}
\langle h_a - h_b, \phi \rangle &= -\int_{|\xi|<a} \frac{\pi[\phi(\xi) - \delta(\phi)]}{|\xi|} d\xi - \int_{|\xi|>a} \frac{\pi\phi(\xi)}{|\xi|} d\xi \\
&\quad + \int_{|\xi|<b} \frac{\pi[\phi(\xi) - \delta(\phi)]}{|\xi|} d\xi - \int_{|\xi|>b} \frac{\pi\phi(\xi)}{|\xi|} d\xi \\
(\text{suponha } a < b) &= \int_{-b}^{-a} \frac{\pi[\phi(\xi) - \delta(\phi)]}{|\xi|} d\xi + \int_a^b \frac{\pi[\phi(\xi) - \delta(\phi)]}{|\xi|} d\xi - \int_a^b \frac{\pi\phi(\xi)}{|\xi|} d\xi \\
&= \int_{-b}^{-a} \frac{\pi[\phi(\xi) - \delta(\phi)]}{|\xi|} d\xi - \int_a^b \frac{\pi\delta(\phi)}{|\xi|} d\xi
\end{aligned}$$

Para a, b suficientemente grandes

$$\begin{aligned}
\langle h_a - h_b, \phi \rangle &= -\pi\delta(\phi)\Big[\int_{-b}^{-a} \frac{1}{|\xi|} d\xi + \int_a^b \frac{1}{|\xi|} d\xi\Big] \\
&= \pi\delta(\phi)(ln|b| - ln|a| + ln|b| - ln|a|) \\
&= 2\pi\delta(\phi) ln\Big(\frac{a}{b}\Big).
\end{aligned}$$

Portanto, h_a é solução do problema de divisão e $\hat{f}(\xi) = h_a(\xi)$, para $a > 0$.

O valor de a é determinado pela equação

$$\langle ln|x|, \hat{\phi} \rangle = \langle h_a, \phi \rangle,$$

$\phi \in S$ e tomando $\phi = e^{-\frac{x^2}{2}}$ cuja transformada é conhecida.

5 A TEORIA DE DISTRIBUIÇÕES APLICADA NO ESTUDO DE EDP'S

5.1 O exemplo de Chi Min-You

Considere a equação

$$Y_n(u) = u_{tt} - t^2 u_{xx} - (4n+1)u_x = 0 \tag{5.1}$$

$(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$ com condições iniciais

$$u(x,0) = \mu(x) \quad u_t(x,0) = 0. \tag{5.2}$$

Defina os seguintes operadores

$$X^+ = \partial_t + t\partial_x \tag{5.3}$$

$$X^- = \partial_t - t\partial_x. \tag{5.4}$$

Temos

$$\begin{cases} X^+X^- & = \partial_t^2 - t^2\partial_x^2 - \partial_x \\ X^-X^+ & = \partial_t^2 - t^2\partial_x^2 + \partial_x \\ \left[X^-, X^+\right] & = X^-X^+ - X^+X^- = 2\partial_x. \end{cases}$$

Se $n = 0$,

$$Y_0(u) = u_{tt} - t^2 u_{xx} - u_x = X^+X^-(u).$$

A menos das condições iniciais, toda solução de $X^-(u) = 0$ também é solução de $Y_0(u) = 0$.

Considere a mudança de variáveis $s = x + \dfrac{1}{2}t^2$, $t' = t$ que leva X^- em $\dfrac{\partial}{\partial t'}$ e as soluções de $\dfrac{\partial u}{\partial t'} = 0$ são as distribuições que só dependem de s.

Portanto, dada μ diferenciável, $u(x,t) = \mu\left(x + \dfrac{1}{2}t^2\right)$ satisfaz $Y_0 u = 0$ e $u(x,0) = \mu(x)$, $u_t(x,0) = \left[t\mu'\left(x + \dfrac{1}{2}t^2\right)\right]\Big|_{t=0} = 0$.

Logo, encontramos uma solução de u tão regular quanto μ.

Agora seja $v \in S(\mathbb{R})$. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} Y_0(u) & = 0 \\ u(x,0) & = 0 \\ u_t(x,0) & = v(x). \end{cases}$$

Suponha que a solução u é temperada em x.

Assim, ao tomar a transformada de Fourier na variável x, o problema se torna

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} + t^2\xi^2\tilde{u} - i\xi\tilde{u} &= 0 \\ \tilde{u}(\xi,0) &= 0 \\ \tilde{u}_t(\xi,0) &= \tilde{v}(\xi) \end{cases}$$

que é um problema de EDO em t.

Uma solução desta EDO é $e^{-i\xi\frac{t^2}{2}}$ que é, precisamente, a transformada de Fourier de $\mu\left(x+\frac{t^2}{2}\right)$, em relação a x, quando $\mu(x) = s$.

Podemos obter outra solução, linearmente independente da primeira, pelo método da variação dos parâmetros. Se $\tilde{u}(\xi,t) = e^{-i\xi\frac{t^2}{2}}\tilde{v}(\xi,t)$, então

$$\begin{aligned} &\tilde{v}_{tt} + 2i\xi t\tilde{v}_t = 0 \\ &\Rightarrow \tilde{v}(\xi,t) = \widehat{v}(\xi)\int_0^t e^{-i\xi s^2}ds \\ &\therefore \tilde{u}(\xi,t) = \widehat{v}(\xi)\int_0^t e^{i\xi(\frac{t^2}{2}-s^2)}ds \\ &\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ix\xi}\int_0^t \widehat{v}(\xi)e^{i\xi(\frac{t^2}{2}-s^2)}dsd\xi \\ &\qquad = \int_0^t \frac{1}{2\pi}\int \widehat{v}(\xi)e^{i\xi(x+\frac{t^2}{2}-s^2)}d\xi ds \\ &\qquad = \int_0^t v\left(x+\frac{t^2}{2}-s^2\right)ds. \end{aligned}$$

Pelo princípio da superposição:

$$u(x,t) = \mu\left(x+\frac{t^2}{2}\right) + \int_0^t v\left(x+\frac{t^2}{2}-s^2\right)ds.$$

Neste ponto, não precisamos mais supor que v seja temperada.

Um resultado mais geral pode ser obtido.

Teorema 5.1.1. Seja $\mu(x)$ uma função contínua. A distribuição

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{\pi}t^{2k}}{k!(n-k)!\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\partial^k \mu\left(x+\frac{t^2}{2}\right)}{\partial x^k}$$

é solução do problema

$$\begin{cases} Y_n(u) &= u_{tt} - t^2u_{xx} - (4n+1)u_x = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N} \\ u(x,0) &= \mu(x) \\ u_t(x,0) &= 0 \end{cases}$$

Observe que u perde regularidade conforme n cresce.

Por exemplo, se $\mu(x) = |x|$ e $n = 0$, então u é contínua. Se $n = 1$, então u será L^1_{loc}, se $n = 2$, então u é uma medida concentrada na parábola $x + \frac{t^2}{2} = 0$ e se $n = 3$, u será a derivada de uma medida.

Esse exemplo é importante, pois ilustra diversos casos em que a solução da EDP não será uma função regular, mas será uma distribuição.

5.2 O exemplo de Grushin-Garabedian

Definição 5.2.1. Dizemos que o operador diferencial

$$P(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$ é localmente resolúvel em Ω se todo ponto $x \in \Omega$ tem uma vizinhança aberta, V_x, tal que, para toda $f \in C_c^\infty(V_x)$ existe $u_f \in \mathscr{D}'(V_x)$ tal que $Pu_f = f$.

Em 1957, Hans Lewy demonstrou (veja **[8]**) que mesmo no caso em que f é muito regular, se tomarmos

$$P = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) + i(x + iy)\partial_z,$$

então não encontraremos soluções locais para a equação $Pu_f = f$, isto é, P é um operador em $\mathbb{R}^3$ que não é localmente resolúvel.

O exemplo de Grushin-Garabedian trata-se do operador

$$P = \partial_x + ix\partial_y.$$

Considere uma sequência, $\{D_j\}_{j=1}^\infty$, de discos fechados e disjuntos, contidos no semi-plano $x > 0$ do plano xy, com centros em $(x_n, 0)$ e com $x_n \to 0$.

Teorema 5.2.2. Seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função par na coordenada x e cujo suporte está contido em algum D_k, $k \in \mathbb{N}$, $x > 0$ e tal que

$$\int\int_{D_k} f dxdy \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se P é o operador de Grushin-Garabedian, então não existe solução continuamente diferenciável de

$$Pu = (\partial_x + ix\partial_y)u = f \tag{5.5}$$

Prova: Suponha que w satisfaz a equação 5.5 em alguma vizinhança V da origem. Não perdemos generalidade, pois fora da origem a demonstração é a mesma, a menos de translações.

Escreva $w = u + v$, onde u e v são as partes par e ímpar, em relação a x, de w, respectivamente.

Logo, a parte par da equação satisfaz

$$\partial_x u + ix\partial_y u = f.$$

Daí, $u_x + iu_y = f$ é válida quando $x \geq 0$ e $u(0,y) = 0$, pois $S(f) \subset D_k$, $x > 0$.

Para $x > 0$, escreva $s = \dfrac{x^2}{2}$ e $y = y$. Assim, $\partial_s = \dfrac{1}{x}\partial_x$ e

$$u_x + iu_y = f(x,y) \Rightarrow \partial_s u + i\partial_y u = \frac{1}{\sqrt{2s}} f(\sqrt{2s}, y), \quad s > 0.$$

Portanto, fora dos discos D_j, u satisfaz $\dfrac{1}{2}(u_s + iu_y) = 0$ e, desta forma, é uma função holomorfa da variável $s + iy$.

Uma vez que $x_n \to 0$, o complementar de $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j$ e u é contínua em $s \geq 0$ e se anula em $s = 0$.

Pelo princípio de identidade das funções analíticas, $u \equiv 0$ fora de $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j$. Em particular, u se anula em ∂D_j, $j \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema de Green,

$$\begin{aligned}\int\int_{D_k} f\,dxdy &= \int\int_{D_k} u_x + iu_y dxdy \\ &= \int_{\partial D_k} udy - ixudx = 0.\end{aligned}$$

O que contraria a hipótese de integral não nula de f.

Sendo assim, a equação não possui solução local. □

5.3 Regularidade das soluções

Definição 5.3.1. Um operador diferencial $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se diz elíptico no ponto $x_0 \in \Omega$ se

$$P_m(x_0,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0)\xi^\alpha \neq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}. \tag{5.6}$$

Se $P(x,\partial)$ é elíptico em todos os pontos de u, dizemos que $P(x,\partial)$ é elíptico em Ω.

Exemplo 5.3.2. O laplaciano $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ é elíptico. Com efeito, temos

$$\Delta_m(\xi) = \xi^2 + \xi^2 \neq 0.$$

A regularidade das soluções fracas para o laplaciano foi provada originalmente por Weyl (veja **[15]**). Uma extensão do lema de Weyl afirma que se $P(x,\partial)$ é elíptico em Ω, então

$$SS(u) = SS(P(x,\partial)u), \quad \forall u \in \mathscr{D}'(\Omega).$$

Ou seja, se $P(x,\partial)u = f$, então u é C^∞ nos pontos em que f é C^∞.

Os operadores diferenciais que satisfazem esta propriedade são chamados hipoelípticos.

Definição 5.3.3. Um operador $P(x,\partial)$ definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito hipoelíptico se

$$SS(Pu) = SS(u), \quad \forall u \in \mathscr{D}'(\Omega).$$

Observação 5.3.4. Se $u \in C^\infty(\Omega)$, então $P(u) \in C^\infty(\Omega)$, pois P é um operador diferencial. Ou seja, $SS(Pu) \subset SS(u)$ para qualquer operador diferencial P. Sendo assim, a inclusão na qual estaremos interessados é a inclusão $SS(u) \subset SS(Pu)$ ou, em outras palavras, se $P(u) \in C^\infty(\Omega)$, então $u \in C^\infty(\Omega)$.

Exemplo 5.3.5. O operador $\dfrac{d}{dx}$ é hipoelíptico em $\mathbb{R}$.

De fato, sejam $f \in C^\infty(a,b)$ e $u \in \mathscr{D}'(a,b)$ tal que $u' = f$. Se $g(x) = \int_c^x f(t)dt$, $a < c < b$, então $(u-g)' = 0$ e, consequentemente, o Teorema 3.4.1 nos diz que $u = g + k$, k constante, e $u \in C^\infty(a,b)$.

Já o operador $z\dfrac{d}{dx}$ não é hipoelíptico em $\mathbb{R}$, pois $u(x) = H(x)$ não pertence a $C^\infty(\mathbb{R})$, mas $x\dfrac{d}{dx}H(x) = x\delta \equiv 0$.

Exemplo 5.3.6. O operador das ondas

$$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2$$

não é hipoelíptico, pois se $u(x,t) = f(x+t)$ com $f \in C^2$, então

$$Pu = \frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 u = 0,$$

mas se $f(x) = |x|^3$, então $f \notin C^\infty$ e, desta forma, $u \notin C^\infty$.

Exemplo 5.3.7. O operador de Grushin-Garabedian, $P = \partial_x + ix\partial_y$, não é hipoelíptico. Seja F_y a transformada de Fourier em relação a y. Defina $u = F_y^{-1}v$, onde $v(x,\eta) = H(-\eta)e^{x^2\frac{\eta}{2}}$.

Então $Pu = 0$ e $SS(u) = \{(0,0)\}$, pois $e^{x^2\frac{\eta}{2}} \leq 1$ quando $\eta \leq 0$ e $H(-\eta) = 0$ e se $\eta > 0$, obtemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ix\frac{\partial}{\partial y}\right)u = F_y^{-1}(v_x - x\eta v) = F_y^{-1}(0) = 0.$$

Quando $x \neq 0$, $v(x,\eta)$ decresce rapidamente em η. Assim, $u \in C^\infty(C(\{0\} \times \mathbb{R}))$.
Quando $x = 0$, $v(0,\eta) = H(-\eta)$ e $F_y^{-1}(v(0,x)) = \dfrac{\delta(x)}{2} - \dfrac{i}{2\pi}V.P.\dfrac{1}{x}$.
Ou seja, u não é C^∞ em nenhuma vizinhança da origem.

REFERÊNCIAS

[1] BARTLE, R.; The Elements of Integration and Lebesgue Measure. Wiley, 1995.

[2] FOLLAND, G.B., RealAnalysis, modern techniques and their applications, Pure and Applied Mathmatics -Willey Interscience Series of Texts, 1999.

[3] FRIEDLANDER, J.G. e Joshi, M, Introduction to the theory of distributions.

[4] HÕRMANDER, L. - Linear Partial Differential Operators, Third Edition Revised, Springer Verlag, 1969.

[5] HALPERIN, I; Introduction to the Theory of distributions. Cambridge University Press, 1998.

[6] HOUNIE, J. G., Teoria Elementar das Distribuições, IMPA, 1979.

[7] IÓRIO, V., EDP um curso de graduação, IMPA, 2010.

[8] LEWY, H., An exemple of a smooth linear partial differential equation without solution, Ann of Math. 64, 1956.

[9] MUNKRES, J., Analysis on Manifolds, Westview Press, 1997

[10] ROYDEN, M., Real Analysis. New York: Collier Macmillan, 1988.

[11] RUDIN, W., Princípios de Analisis matemático, Mc. Graw-Hill, 1996

[12] RUDIN, W., Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, 1987.

[13] SCHWARTZ, L. Théorie des distributions. Institut de mathématique (Strasbourg) Vol. 2. Paris: Hermann, 1957.

[14] TREVES, F., Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, 1967

[15] WEYL, H., The method of orthogonal projection in potential theory, Duke Mathematical Journal, 7 (1940), pp. 411–444.