Universidade Federal de Alagoas
Campus A.C. Simões
Curso de Matemática - Licenciatura

Conjunto de Cantor

Dandara Oliveira Medeiros

UFAL - Maceió
Novembro de 2020

Dandara Oliveira Medeiros

Conjunto de Cantor

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz

UFAL - Maceió
Novembro de 2020

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

M488c Medeiros, Dandara Oliveira.
Conjunto de cantor / Dandara Oliveira Medeiros. - 2021.
35 f. : il.

Orientador: Cícero Tiarlos Nogueira Cruz.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 35.

1. Topologia. 2. Cantor, Conjuntos de. 3. Análise real. I. Título.
CDU: 515.1

Dandara Oliveira Medeiros

Conjunto de Cantor

Trabalho de conclusão de curso aprovado pelo corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, *Campus* A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Banca Examinadora:

Cicero Tiarlos Nogueira Cruz

Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz
Instituto de Matemática - UFAL, Maceió
Orientador

Davi dos Santos Lima

Prof. Dr. Davi dos Santos Lima
Instituto de Matemática - UFAL, Maceió
Examinador

Marcos Ranieri da Silva

Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva
Instituto de Matemática - UFAL, Maceió
Examinador

Maceió, 21 de janeiro de 2021

À força feminina.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu Deus, por ter cuidado de mim em todo este tempo, desde as minhas primeiras escolhas. Agradeço à minha mãe, Ana Lúcia, por todo o conforto trazido ao longo desta trajetória. Agradeço ao meu pai, Jaildo, por todo o zelo em todos os momentos. Agradeço também a minha irmã, Débora, pela motivação desde sempre.

Sou grata também aos meus amigos da graduação por todas as conversas, descontrações e leveza, tanto nos momentos de conquistas quanto nos momentos de lutas. Agradeço também a estes pelo apoio e cumplicidade, inclusive pelas discussões de conteúdo, cujas, favoreceram de forma considerável para o meu aprendizado.

Faço também um agradecimento especial a alguns professores do Instituto de Matemática da UFAL, que tiveram um papel importante na minha trajetória nesta graduação, como Viviane Oliveira, Cláudia Lozada, André Flores, Dione Lara, Rafael Lucena, Marcos Ranieri, Wagner Ranter e Davi Lima. Ainda nesta lista, o mais importante de todos, Tiarlos Nogueira Cruz.

O êxito tem vários pais
Órfão é o seu revés
Aos que sofrem, por fim o céu
Abranda a raiva

O que trago sobre os ombros é meu e é só meu
Sustento sem implorar a benção e o pesar
Mais vil é desdenhar do que não se pode ter

Vive tão disperso, olha pros lados demais
Não vê que o futuro é você quem faz
Porque o fracasso lhe subiu a cabeça

Atribui ao outro a culpa por não ter mais
Declara as uvas verdes, mas não fica em paz
Porque o fracasso lhe subiu a cabeça

O maestro bem falou
A ofensa é pessoal
Quem aponta o traidor
É quem foi traído

Já sabe o que é cair, ao menos tentou ficar de pé
E, vítima de si, despreza o que nunca vai ter
O mais verde é sempre além do que se pode ter

- Pitty

Resumo

O trabalho visa obter a concepção do conjunto de Cantor ternário e suas propriedades, de forma que vem a apresentar conceitos de análise real, como também a construção desse conjunto e a investigação de suas propriedades. O trabalho foi realizado através de leitura de conteúdo, resolução de exercícios e seminários. Assim, tem-se como resultados a apresentação do conjunto de Cantor ternário como um conjunto contido no intervalo [0,1] da reta, obtido através de um processo interativo, como a omissão de intervalos abertos contidos nesse intervalo. Desta forma, vê-se as propriedades deste conjunto, dentre elas, ser compacto, ter interior vazio, ser não-enumerável e todos os seus pontos serem pontos de acumulação deste conjunto. Além disto, estuda-se a representação numérica dos pontos deste conjunto na base 3, como sendo aqueles que só contêm os algarismos 0 e 2 nesta representação. Por fim, a função ternária de Cantor como sendo monótona, crescente e contínua.

Palavras-chave: Análise Real. Topologia. Conjunto de Cantor.

Abstract

The work aims to obtain the conception of the set of ternary Cantor and its properties, in a way that comes to present the concepts of real analysis, as well as the construction of this set and the investigation of its properties. The work was carried out through content reading, solving exercises and seminars. Thus, the results are the presentation of the ternary Cantor set as a set contained in the interval [0,1] of the resumption, through an interactive process, such as the omission of open intervals contained in that interval. In this way, it is seen as properties of this set, they being compact, having an empty interior, being unnumerable and all its points being points of accumulation of this set. In addition, the numerical representation of the points of this set in base 3 is studied, as those that only determine the digits 0 and 2 in this representation. Finally, Cantor's ternary function as being monotonous, growing and continuous.

Keywords: Real Analysis. Topology. Cantor Set.

Lista de Figuras

2.1 Construção do Conjunto de Cantor 25
2.2 Gráfico da Função de Cantor 31

Sumário

Introdução **12**

1 Definições e Exemplos **13**

1.1 Conjuntos Finitos, Infinitos, Enumeráveis e Não-Enumeráveis 13

1.2 O conjunto $\mathbb{R}$ dos Números Reais 15

1.2.1 $\mathbb{R}$ é um corpo 15

1.2.2 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado 15

1.2.3 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo 16

1.3 Sequências de Números Reais 17

1.4 Concepções Topológicas de $\mathbb{R}$ 19

1.5 Funções Contínuas 22

2 Conjunto de Cantor **25**

2.1 Construção e Propriedades do conjunto de Cantor 25

2.2 A Função Ternária de Cantor 29

Conclusão **34**

Referências Bibliográficas **35**

Introdução

Um conjunto de Cantor é definido como um subconjunto totalmente desconexo e perfeito de $\mathbb{R}$, isto é, respectivamente, um conjunto sem intervalos e um conjunto tal que todos os seus pontos são pontos de acumulação deste conjunto, definição que veremos no capítulo 1. Neste trabalho, veremos em específico o conjunto de Cantor ternário. Assim, para alcançarmos a concepção deste conjunto, que chamaremos apenas de conjunto de Cantor, e suas propriedades, apresentaremos, a princípio, conceitos da análise real, e seguindo, veremos que o conjunto de Cantor é obtido através de um processo construtivo. Após este processo, tem-se um conjunto com propriedades singulares. Além disto, teremos também a função de Cantor. Esta nos trará também uma peculiaridade quanto à sua imagem e consequentemente ao seu gráfico.

Podemos trazer a importância dos conjuntos de Cantor pelas suas aplicações em diversas áreas da matemática, como em espaços métricos, onde o conjunto de Cantor é dado como um conjunto magro na reta, em teoria dos números, topologia geral e em sistemas dinâmicos. Neste último podemos citar que as propriedades geométricas deste conjunto relacionadas com as dimensões fractais, são aplicadas no estudo de bifurcações homoclínicas, e no estudo das aproximações de números reais por números racionais, particularmente no estudo das propriedades geométricas dos espectros de Markov e Lagrange.

Este trabalho tem como objetivo geral obter a concepção do conjunto de Cantor e suas propriedades, e tem como objetivos específicos estudar os conceitos de análise real, conhecer a construção do conjunto de Cantor e investigar as propriedades deste conjunto. O estudo foi feito através da trajetória da autora em projeto de iniciação científica, de forma que foram realizados leitura de conteúdo, resolução de exercícios, seminários, além de cursos em formato de iniciação científica.

1

Definições e Exemplos

1.1 Conjuntos Finitos, Infinitos, Enumeráveis e Não-Enumeráveis

Nesta seção, traremos um estudo sobre conjuntos finitos e infinitos, enumeráveis e não enumeráveis, isto é, veremos adiante o que significa, matematicamente, um conjunto finito, não sendo pela linguagem coloquial de talvez afirmar que um conjunto finito é um conjunto que teria um fim, ou que um conjunto é enumerável quando posso enumerá-lo. Neste último ponto, definiremos então o que significa em linguagem matemática enumerar um conjunto, no caso contrário, como seria um conjunto, tal que não consigo enumerar seus elementos.

Vejamos então a definição matemática de conjunto finito: um conjunto X se diz *finito* quando é vazio ou então existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : I_n \to X$. Pondo $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$,..., $x_n = f(n)$, temos então $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. A bijeção f significa uma contagem dos elementos de X, ou seja, para todo elemento em X, associa-se a um único número em I_n. O número n chama-se *o número de elementos*, ou *número cardinal* do conjunto finito X, ou seja, temos que um conjunto é finito quando é possível afirmar quantos elementos aquele conjunto contém.

Exemplo 1.1. Seja X o conjunto dos números naturais pares menores que 10. Podemos escrever como $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, $x_4 = 8$, ou seja, $X = \{2, 4, 6, 8\}$. Assim, este conjunto tem 4 elementos, ou cardinalidade 4.

Exemplo 1.2. O conjunto das cores primárias. Podemos escrever então $x_1 = azul$, $x_2 = vermelho$, $x_3 = amarelo$, isto é, $X = \{azul, vermelho, amarelo\}$. Tal conjunto tem 3 elementos, ou cardinalidade 3.

Quando um conjunto não é finito, dizemos que ele é um conjunto *infinito*. Portanto, não é possível dizermos quantos elementos estão contidos naquele conjunto. Podemos citar como exemplo o conjunto dos números reais maiores que 0 e menores que 1, ou mesmo o conjunto dos números naturais, ou ainda, o conjunto das potências de 10.

Sendo um conjunto finito uma bijeção com I_n, estenderemos agora para o que seria uma bijeção com todo o conjunto dos naturais: Um conjunto X diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Quando isto acontece, dizemos que f é uma *enumeração* dos elementos de X. Coloquemos $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$, ... , $x_n = f(n)$, ... , daí $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Sendo f uma enumeração dos elementos de X, isto nos diz que para todo elemento em X, temos um único número natural correspondente ao mesmo.

Exemplo 1.3. O conjunto dos múltiplos de 7. Podemos escrever $x_1 = 7$, $x_2 = 14$, $x_3 = 21$, ... , $x_n = 7.n$, ... Trata-se então da bijeção $f : \mathbb{N} \to X$, donde $X = \{7.n; n \in \mathbb{N}\}$, sendo $f(n) = 7.n$.

Escreveremos também sobre a existência de conjuntos não-enumeráveis. Assim, definiremos um conjunto não-enumerável como um conjunto infinito, cuja cardinalidade é maior do que $\mathbb{N}$, embora não vamos definir o que seja a cardinalidade de um conjunto infinito. Entretanto, diremos que dois conjuntos infinitos X, Y têm a mesma cardinalidade quando existir uma bijeção $f : X \to Y$. Isto é, um conjunto infinito enumerável tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$. Logo, um conjunto é não-enumerável quando existir uma função $f : \mathbb{N} \to X$, tal que é injetiva, porém não é sobrejetiva. Vejamos o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Seja $F(X;Y)$ o conjunto das funções $f : X \to Y$, sendo X um conjunto arbitrário e Y um conjunto contendo pelo menos dois elementos. Nenhuma função $g : X \to F(X;Y)$ é sobrejetiva.*

Demonstração. Dada $g : X \to F(X;Y)$, indicaremos como g_x o valor de g no ponto $x \in X$. Assim, g_x é uma função de $X \to Y$. Traremos uma função $f \in F(X;Y)$, tal que $f \neq g_x$ para todo $x \in X$. A função f é definida sendo $f(x_1) \neq g_{x_1}(x_1)$, desta forma, $f \neq g_{x_1}$, como também, $f(x_2) \neq g_{x_2}(x_2)$, o que significa que $f \neq g_{x_2}$, $x_1, x_2 \in X$. É confortável fazermos isto, porque Y tem dois ou mais elementos. Portanto, $f \neq g_x$, para todo $x \in X$. Logo, temos uma função $f \in F(X;Y)$, tal que $f \notin g(X)$. Consequentemente, g não é sobrejetiva. □

Corolário 1.1. *Sejam $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ conjunto infinitos enumeráveis. O produto cartesiano $\prod_{n=1} X_n$ não é enumerável.*

Demonstração. Como cada X_n é infinito enumerável, podemos pôr $X_n = \mathbb{N}$. Daí, $\prod X_n = F(\mathbb{N};\mathbb{N})$. Temos então que $g : \mathbb{N} \to F(\mathbb{N};\mathbb{N})$ não é sobrejetiva, logo, $F(\mathbb{N};\mathbb{N})$ não é enumerável. □

Tal argumento usado nas demonstrações anteriores chama-se "método da diagonal de Cantor". Sendo que neste caso particular, tem-se $X = \mathbb{N}$. Os elementos de $F(\mathbb{N};Y)$ são então sequências de elementos de Y. Para provar que nenhuma função $g : \mathbb{N} \to F(\mathbb{N};Y)$ é sobrejetiva, escrevemos $g(1) = s_1, g(2) = s_2, ...$ onde $s_1, s_2, ...$ são sequências de elementos de Y, isto é, $s_n \in F(\mathbb{N};Y)$. Vamos então escrever:

$$s_1 = (y_{11}, y_{12}, y_{13}, ...)$$
$$s_2 = (y_{21}, y_{22}, y_{23}, ...)$$
$$s_3 = (y_{31}, y_{32}, y_{33}, ...)$$
$$(...)$$

Construiremos então uma sequência $s \in F(\mathbb{N};Y)$, isto é, $s = (y_1, y_2, y_3, ...)$, de tal forma que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \neq Y_n n$, ou seja, o n-ésimo termo de s é diferente do n-ésimo termo de qualquer s_n. Assim, $s \neq s_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, sempre teremos alguma função em $F(\mathbb{N};Y)$ que não será correspondida por qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

1.2 O conjunto $\mathbb{R}$ dos Números Reais

1.2.1 $\mathbb{R}$ é um corpo

Um *corpo* é um conjunto C munido de duas operações, sendo elas, adição e multiplicação, que satisfazem a algumas propriedades, cujas, são chamadas de *axiomas de corpo*. Na adição, faz-se corresponder a cada par de elementos $x, y \in C$ sua *soma* $x + y \in C$. Enquanto a *multiplicação* corresponde a esses elementos seu *produto* $x.y \in C$. Vejamos então:

Axiomas da adição

1 *Associatividade*: dados $x, y, z \in C$, temos $(x + y) + z = x + (y + z)$.

2 *Comutatividade*: sejam $x, y \in C$, temos $x + y = y + x$

3 *Elemento neutro*: existe $0 \in C$, tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in C$. O elemento neutro 0 chama-se *zero*.

4 *Simétrico*: para todo $x \in C$, existe $-x \in C$, chamado o simétrico de x, tal que $x + (-x) = 0$.

Axiomas da multiplicação

5 *Associatividade*: dados $x, y, z \in C$, tem-se $(x.y).z = x.(y.z)$.

6 *Comutatividade*: sejam $x, y \in C$, temos que $x.y = y.x$.

7 *Elemento neutro*: existe $1 \in C$, tal que $1 \neq 0$ e $x.1 = x$, para todo $x \in C$. O elemento neutro 1 chama-se *um*.

8 *Inverso multiplicativo*: todo $x \neq 0 \in C$ possui um inverso multiplicativo x^-1, tal que $x.x^-1 = 1$.

Axioma da distributividade

9 Dados $x, y, z \in C$, tem-se $x.(y + z) = x.y + x.z$. Por comutatividade, também temos $(x + y).z = x.z + y.z$.

Assim, $\mathbb{R}$ é um corpo.

1.2.2 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado

Um *corpo ordenado* é um corpo C, que contém um subconjunto $P \subset C$, chamado o conjunto dos elementos *positivos* de C, que satisfaz as seguintes condições:

1) A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Isto é, se $x, y \in P$, então $x + y \in P$ e $x.y \in P$.

2) Seja $x \in C$, então somente uma das três alternativas seguintes acontece: ou $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

Assim, quando $x \in P$, escreveremos como $-P$ o conjunto dos elementos $-x$. Desta forma, temos que $C = P \cup (-P) \cup \{0\}$, sendo os conjuntos P, $-P$ e $\{0\}$ dois a dois disjuntos. Chamaremos os elementos de $-P$ de *negativos*.

Num corpo ordenado C, $x < y$ indica que x é *menor do que* y, e significa que $y - x \in P$, isto é, $y = x + z$, onde $z \in P$. Na mesma situação, $y > x$, indica que y é *maior do que* x. Indicar que $x > 0$ significa que $x \in P$, ou seja, x é positivo, e, indicar que $x < 0$ significa que, x é negativo, ou seja, $-x \in P$. Se $x \in P$ e $y \in -P$, então $x > y$.

No estudo sobre um corpo ordenado C, é fundamental o conceito de *intervalo*. Assim, sendo $a, b \in C$, com $a < b$, vejamos as notações:

$[a, b] = \{x \in C; a \leq x \leq b\}$: *intervalo fechado*, com extremos a e b.

$[a, b) = \{x \in C; a \leq x < b\}$: *fechado à esquerda*, com extremos a e b.

$(a, b] = \{x \in C; a < x \leq b\}$: *fechado à direita*, com extremos a e b.

$(a, b) = \{x \in C; a < x < b\}$: *intervalo aberto*, com extremos a e b.

$(-\infty, b] = \{x \in C; x \leq b\}$: *semirreta esquerda fechada*, com origem em b.

$(-\infty, b) = \{x \in C; x < b\}$: *semirreta esquerda aberta* com origem em b.

$[a, \infty) = \{x \in C; a \leq x\}$: *semirreta direita fechada* com origem em a.

$(a, \infty) = \{x \in C; a < x\}$: *semirreta direita aberta* com origem em a.

$(-\infty, \infty) = C$: que é o intervalo total, que pode ser dito aberto ou fechado.

Em um corpo ordenado, temos também o *valor absoluto* de um elemento x, cuja denotação é $|x|$, e definiremos como:

$$|x| = \begin{cases} |x| = x, & \text{se } x > 0 \\ |0| = 0 & \\ |x| = -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Assim, num corpo ordenado C, ou x e $-x$ são ambos $= 0$, ou um é positivo e o outro negativo. O que for positivo dentre x e $-x$ será chamado $|x|$. Logo, o maior é $|x|$, então podemos escrever $|x| = \max\{x, -x\}$.

1.2.3 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo

Um conjunto X num corpo ordenado C diz-se *limitado superiormente* quando existe algum $b \in C$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Quando isto acontece, dizemos que $X \subset (-\infty, b]$, e, cada $b \in C$ com esta propriedade chama-se *cota superior* de X.

Seja X um subconjunto de um corpo ordenado C. Digamos que X é limitado superiormente. Um elemento $b \in C$ chama-se *supremo* de X, se b é a menor das cotas superiores de X em C. Desta forma, para que b seja supremo de $X \in C$, é necessário de suficiente que sejam satisfeitas as duas condições seguintes:

1 Para todo $x \in X$, temos que $x \leq b$;

2 Se $c \in C$ e $x \leq c$, para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

Exemplo 1.4. Seja o conjunto dos números reais menores que 10, isto é, o intervalo infinito $(-\infty, 10)$. Temos então que é um conjunto limitado superiormente e 10 é o supremo deste conjunto.

Exemplo 1.5. O conjunto dos números reais negativos é um conjunto limitado superiormente e 0 é o supremo deste conjunto.

Analogamente, dizemos que o conjunto X num corpo ordenado C é *limitado inferiormente* quando existe $a \in C$ tal que $x \geq a$ para todo $x \in X$. Quando isto ocorre, dizemos que $X \subset [a, \infty)$, e, cada $a \in C$ com esta propriedade chama-se *cota inferior* de X.

Seja X um subconjunto de um corpo ordenado C, limitado inferiormente. Um elemento $a \in C$ é dito *ínfimo* de X, se a é a maior das cotas inferiores de $X \in C$. Assim, para que a seja ínfimo do conjunto X em C, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas seguintes condições:

1 Para todo $x \in X$, temos que $a \leq x$;

2 Se $c \in C$ e $c \leq x$, para todo $x \in X$, então $c \leq a$.

Exemplo 1.6. Seja o conjunto dos números reais maiores que 100, isto é, o intervalo infinito $(100, +\infty)$. O conjunto é limitado inferiormente e 100 é o ínfimo deste conjunto.

Exemplo 1.7. O conjunto dos números naturais é limitado inferiormente, pois, para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n$, e 1 é o ínfimo deste conjunto.

Quando um subconjunto X de um corpo ordenado C é limitado superior e inferiormente, dizemos que X é um conjunto *limitado*, ou seja, existe $a, b \in C$, tal que $X \subset [a, b]$. Um conjunto é *ilimitado* quando não é limitado.

Exemplo 1.8. Seja o conjunto das frações $X = \{n/m;\, m, n \in \mathbb{N}\, e\, n < m\}$. Este conjunto é limitado. Pois, para todo $n/m \in X$, $n/m \in [0, 1]$.

Um corpo ordenado C é *completo* quando todo subconjunto $X \in C$ não-vazio, limitado superiormente, possui supremo em C. Da mesma forma, se um subconjunto X em C, não-vazio, é limitado inferiormente, possui ínfimo em C.

Teorema 1.2 (Intervalos encaixados)**.** *Dada uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ... \supset I_n \supset ...$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [a, b]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Temos que $I_n \supset I_{n+1}$, o que nos diz que

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1.$$

O conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ é então limitado superiormente. Ponhamos $c = supA$. Daí, $a_n \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas, temos que qualquer b_n é cota superior de A. Portanto, $c \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $c \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

1.3 Sequências de Números Reais

Uma *sequência de números reais* é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida do conjunto dos números naturais para valores no conjunto dos números reais. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será escrito como x_n, e denominado como *termo de ordem n* ou *n-ésimo termo* da sequência. Assim, para nos referirmos à sequência x, usaremos a notação $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou de maneira mais simples (x_n). O conjunto dos termos da sequência será escrito como $x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Exemplo 1.9. Seja a sequência $x_n = 1/n$, isto é, $x_1 = 1, x_2 = 1/2, ..., x_n = 1/n, ...$. Assim, $x(\mathbb{N}) = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$.

Exemplo 1.10. Seja $x_n = a^n$, $a \in \mathbb{R}$. Desta forma, $x(\mathbb{N}) = \{a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots\}$.

O conjunto $x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ pode ser finito. Por exemplo: sendo a sequência $x_n = 0$, para n par, e $x_n = 1$ para n ímpar, temos então $x(\mathbb{N}) = \{0, 1\}$. Podemos ter também $x(\mathbb{N})$ com um único elemento, que é o caso da sequência constante $x_n = a \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que a sequência (x_n) é *limitada superiormente* quando existe $b \in \mathbb{R}$, tal que $x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Da mesma forma, uma sequência (x_n) é *limitada inferiormente* quando existe $a \in \mathbb{R}$, tal que $a \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência (x_n) é *limitada* quando existe $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma sequência (x_n) é *crescente* quando $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < ...$, ou seja, $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando $x_n \leq x_{n+1}$, dizemos que a sequência x_n é *não-decrescente*. De maneira análoga, (x_n) é *decrescente* quando $x_1 > x_2 > x_3 > ... > x_n > ...$, ou seja, $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando $x_n \geq x_{n+1}$, dizemos que a sequência x_n é *não-crescente*. Uma sequência x_n é *monótona* quando ou é crescente, ou não-decrescente, ou decrescente, ou não-crescente.

Exemplo 1.11. Seja a sequência $(x_n) = 1/n$. Temos então $x(\mathbb{N}) = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$, o que nos diz que a sequência é limitada, afinal $0 < 1/n \leq 1$, e monótona decrescente.

Exemplo 1.12. Seja a sequência $(x_n) = 8n$. Daí, $x(\mathbb{N}) = \{8, 16, 24, \ldots, 8n, \ldots\}$, o que nos diz que a sequência é ilimitada e monótona crescente.

Dada uma sequência $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma *subsequência* de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\} \subset \mathbb{N}$. Nos referiremos a uma subsequência $x' = x|\mathbb{N}'$ com a notação $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, ou $(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{ni}, \ldots)$, ou $(x_{ni})_{i \in \mathbb{N}}$.

Exemplo 1.13. Dada a sequência do exemplo 1.9. Uma subsequência poderia ser a restrição aos números pares, isto é, $\mathbb{N}' = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$. Daí, $x' = (x_2, x_4, x_6, ..., x_{2n}, ...)$. Então teremos $x' = (1/2, 1/4, 1/6, ..., 1/2n, ...)$.

Dizer que a é o limite de uma sequência significa dizer que para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, ou seja, quanto mais n cresce, os valores dos termos x_n se tornam mais próximos de a. Formalmente, diremos que para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existirá um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > n_0$, tem-se $|x_n - a| < \varepsilon$, isto é, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Desta forma, escreveremos que $\lim x_n = a$ e que x_n converge para a. Assim, quando a sequência possui limite, dizemos que ela é *convergente*.

Teorema 1.3. *O limite de uma sequência é único. Isto é, se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim x_n = b$, *então* $a = b$.

Demonstração. Supondo $\lim x_n = a$. Para $a \neq b$, vamos mostrar que não se pode ter $\lim x_n = b$. Tomemos $\varepsilon = |a - b|/2$. Assim, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ são disjuntos, isto é, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon) = \emptyset$. Mas dissemos que $\lim x_n = a$, então para $\varepsilon = |a - b|/2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > n_0$, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, portanto, para todo $n > n_0$, $x_n \notin (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Logo, b não é o $\lim x_n$. $\square$

Teorema 1.4. *Se* $\lim x_n = a$, *então toda subsequência de* x_n *converge para* a.

Demonstração. Como $\lim x_n = a$, temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow |a - x_n| < \varepsilon$. Seja a subsequência de x_n, restrita a um subconjunto $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, $(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{ni}, \ldots)$. Como os índices da subsequência formam um subconjunto infinito, existe algum $n_{i0} \in \mathbb{N}'$ tal que $n_{i0} > n_0$. Daí, para todo $n_i > n_{i0}$, temos $n_i > n_0$, o que implica que $|x_{ni} - a| < \varepsilon$. Portanto, $\lim x_{ni} = a$. □

Teorema 1.5. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $a = \lim x_n$. O que nos diz que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n > n_0$, então $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. O conjunto dos termos de x_n, para $n > n_0$, isto é, $X = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, é limitado, pois os elementos deste conjunto pertencem ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Tomemos o conjunto $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n0}\}$. Y é finito, logo, limitado. O conjunto dos termos da sequência é a união $X \cup Y$. Seja b o ínfimo e c o supremo de $X \cup Y$. Assim, os termos x_n da sequência são tais que $b \leq x_n \leq c$. Portanto, a sequência é limitada. □

Teorema 1.6. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Tomemos uma sequência monótona que seja não-decrescente. Vamos supor que seja limitada. Seja $a = sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Mostraremos que $a = \lim x_n$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que $a - \varepsilon < a$, então existe $x_{n0} \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n0}$. Como a sequência é não-decrescente, para todo $n > n_0$, $x_{n0} \leq x_n$, o que implica que $a - \varepsilon < x_n$. Temos ainda que $x_n \leq a$, logo, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Portanto, $\lim x_n = a$

Sendo a sequência não-crescente, teríamos $inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = \lim x_n$, e a demonstração seria análoga. □

1.4 Concepções Topológicas de $\mathbb{R}$

Adentraremos agora na topologia dos números reais para entendermos algumas propriedades do conjunto de Cantor. Traremos as definições de ponto interior, ponto de aderência, ponto de acumulação, bem como alguns conjuntos que contêm estes pontos.

Seja $X \subset \mathbb{R}$, um ponto $x \in X$ é um *ponto interior* de X se existe um intervalo (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset X$. Formalmente, para que x seja um ponto interior do conjunto X é necessário e suficiente que exista $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$. Dado $X \subset \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $x \in X$ que são pontos interiores de X será representado por $int(X)$ e chamado o *interior do conjunto* X. Tem-se $int(X) \subset X$ e, portanto, se $X \subset Y$, então $int(X) \subset int(Y)$. Daí, um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ define-se como *conjunto aberto* quando todos os seus pontos são interiores, ou seja, quando $int(X) = X$.

Exemplo 1.14. Seja o intervalo $X = (a, b)$, ou $X = (a, \infty)$, ou $(-\infty, b)$. Qualquer ponto de X é ponto interior de X, isto é, $int(X) = X$. Pois, no primeiro caso, para todo $x \in X$, $x \in (a, b) \subset X$, no segundo caso, temos que, dado $x \in X$, traremos $a < x$, daí $x \in (a, b) \subset X$, e o terceiro caso é análogo.

Desta forma, se um conjunto X possui algum ponto interior, ele deve conter pelo menos um intervalo aberto, logo, é infinito e não-enumerável. Portanto, se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ou seja, se X é finito, nenhum de seus pontos é ponto de interior, isto é, $int(X) = \emptyset$. Temos ainda que, como todo intervalo aberto é não-enumerável, se $int(X) \neq \emptyset$, então X é não-enumerável.

Teorema 1.7. *a) Se $A_1, A_2, ..., A_n \subset \mathbb{R}$ são conjuntos abertos, então $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ é aberto.*

b) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de conjuntos abertos, com $A_\lambda \subset \mathbb{R}$. A reunião $A = \cup_{\lambda \in \mathbb{R}} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração. a) Dado qualquer $x \in A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$, então $x \in A_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Assim, existem intervalos tais que $x \in (a_1, b_1) \subset A_1$, $x \in (a_2, b_2) \subset A_2$, ... , $x \in (a_n, b_n) \subset A_n$. Sejam $a = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ e $b = \min\{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Então $x \in (a, b) \subset (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \cap ... \cap (a_n, b_n) \subset A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$. Portanto, todo ponto $x \in A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ é interior, então $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ é aberto.

b) Dado qualquer $x \in A = \cup A_\lambda$. Então existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Sendo A_λ aberto, podemos então obter um intervalo (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset A_\lambda$. Como $A_\lambda \subset A$, tem-se $x \in (a, b) \subset A$. Portanto, todo ponto $x \in A$ é interior, logo A é aberto. □

Diz-se que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é *aderente* a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a for limite de uma sequência de pontos $x_n \in X$. Desta forma, todo ponto $a \in X$ é aderente a X. Ora, tomemos a sequência constante $x_n = a$. Mas a pode ser aderente a X sem que a pertença a X. Por exemplo, seja o conjunto $X = (0, \infty)$, então $0 \notin X$, mas 0 é aderente a X, porque $0 = \lim \frac{1}{n}$, onde $\frac{1}{n} \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.8. *Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $X \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Se a é aderente a X, então $a = \lim x_n$ com $x_n \in X$ para todo n. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, temos $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para todo $n > n_0$. Logo, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. De maneira recíproca, para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\varepsilon > 1/n$, para todo $n > n_0$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, temos $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > n_0$, $x_n \in (a - 1/n, a + 1/n)$, com $x_n \in X$. Isto define uma sequência de pontos $x_n \in X$ tais que $|x_n - a| < 1/n$. Logo, $\lim x_n = a$, então a é aderente a X. □

Corolário 1.2. *Sejam os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, com X limitado inferiormente e Y limitado superiormente. Então $a = infX$ é aderente a X e $b = supY$ é aderente a Y.*

Demonstração. Para todo $\varepsilon > 0$, existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $a \leq x < a + \varepsilon$ e $b - \varepsilon < x \leq b$. O que resulta em $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap Y \neq \emptyset$. □

Chamamos de *fecho* do conjunto X ao conjunto $\overline{X}$ formado pelos pontos de aderência de X. Assim, no caso de ser $X = \overline{X}$, diremos que o conjunto X é *fechado*.

Teorema 1.9. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R} - F$ é aberto.*

Demonstração. Observemos que as seguintes informações são equivalentes: 1) F é fechado; 2) todo ponto aderente a F pertence a F; 3) se $a \in \mathbb{R} - F$ então a não é aderente a F; 4) se $a \in \mathbb{R} - F$ então existe um intervalo aberto I tal que $a \in I$ e $I \cap F = \emptyset$; 5) se $a \in \mathbb{R} - F$, então existe um intervalo aberto I tal que $a \in I \subset \mathbb{R} - F$; 6) todo ponto $a \in \mathbb{R} - F$ é interior a $\mathbb{R} - F$; 7) $\mathbb{R}$ - F é aberto. □

Corolário 1.3. *a) $\mathbb{R}$ e o conjunto vazio são fechados.*

b) Se $F_1, F_2, ..., F_n$ são fechados então $F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$ é fechado.

c) Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados então a interseção $F = \cap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.

Demonstração. a) Sendo $\mathbb{R}$ aberto, seu complementar $\emptyset$ é fechado. Sendo $\emptyset$ aberto, seu complementar $\mathbb{R}$ é fechado.

b) Tomemos $F_1, F_2, ..., F_n$ fechados. Assim, seus respectivos complementares $\mathbb{R} - F_1, \mathbb{R} - F_2, ..., \mathbb{R} - F_n$ são abertos, logo, as interseções $(\mathbb{R} - F_1) \cap (\mathbb{R} - F_2) \cap ... \cap (\mathbb{R} - F_n) = \mathbb{R} - (F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n)$ é um conjunto aberto, portanto, $F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$ é fechado.

c) Se cada F_λ é fechado, então cada $\mathbb{R} - F_\lambda$ é aberto, o que implica que $\cup_\lambda(\mathbb{R} - F_\lambda) = \mathbb{R} - (\cap_\lambda F_\lambda)$ é aberto, portanto $\cap F_\lambda$ é fechado. □

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$, com $X \subset Y$. Dizemos que X é *denso* em Y quando todo ponto de Y for aderente a X. As afirmações são equivalentes a dizer que X é denso em Y: (Supondo que $X \subset Y$)

a) Todo ponto de Y é limite de uma sequência de pontos de X.

b) $Y \subset \overline{X}$.

c) Para todo $y \in Y$ e todo $\varepsilon > 0$ tem-se $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

d) Todo intervalo aberto que contenha um ponto de Y deve conter também algum ponto de X.

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um número $a \in \mathbb{R}$ diz-se *ponto de acumulação* do conjunto X quando todo intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, de centro a, contém algum ponto $x \in X$ *diferente de* a. Formalmente, dizer que a é ponto de acumulação de X, significa que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X;\ 0 < |x - a| < \varepsilon.$$

O conjunto dos pontos de acumulação de X será denotado por X', ou o *derivado* de X. Dizer que $a \in X'$ é equivalente a dizer que $a = \lim x_n$, onde x_n é uma sequência de elementos de X, dois a dois distintos.

Dizemos que a é ponto de acumulação à direita do conjunto X se todo intervalo $[a, a+\varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, contém algum ponto de X diferente de a. Uma afirmação equivalente é dizer que a é limite de uma sequência decrescente de pontos de X. Analogamente, dizemos que a é ponto de acumulação à esquerda do conjunto X se todo intervalo $(a-\varepsilon, a]$, com $\varepsilon > 0$, contém pontos de X diferente de a. Uma equivalência é afirmarmos que a é limite de uma sequência crescente de pontos de X.

Um ponto a que não é ponto de acumulação de X é chamado de *ponto isolado* de X. Quando todos os pontos de X são pontos isolados, X chama-se conjunto *discreto*.

Teorema 1.10. *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1) $a \in X'$, ou seja, a é ponto de acumulação de X;

2) $a = \lim x_n$, onde (x_n) é uma sequência de elementos de X, dois a dois distintos;

3) todo intervalo aberto contendo a possui uma infinidade de elementos X.

Demonstração. Provaremos inicialmente a implicação 1) $\Rightarrow$ 2): Tomemos um $x_1 \in X$, tal que $0 < |x_1 - a| < 1$. Depois $x_2 \in X$ tal que $0 < |x_2 - a| < 1/2$, e assim repetidamente. Daí teremos então uma sequência de pontos $x_n \in X$, onde $|x_n - a| < 1/n$, sendo dois a dois distintos, com $\lim x_n = a$. As implicações 2) $\Rightarrow$ 3) e 3) $\Rightarrow$ 1) são evidentes. □

Teorema 1.11. *Para todo $X \subset \mathbb{R}$, $\overline{X} = X \cup X'$.*

Demonstração. Ora, $X \subset \overline{X}$ e $X' \subset \overline{X}$, assim, $X \cup X' \subset \overline{X}$. A recíproca: se $a \in \overline{X}$, todo intervalo aberto contendo a contém algum ponto $x \in X$. Daí, se $x \neq a$, ou seja, se $a \notin X$ então a é ponto de acumulação de X, isto é, $a \in X'$. Portanto, se $a \in \overline{X}$, então ou $a \in X$ ou $a \in X'$, ou seja, $\overline{X} \subset X \cup X'$. □

1.5 Funções Contínuas

Para entendermos o conceito de funções contínuas, primeiramente trataremos da definição precisa de limite de funções. Seja a função $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Vejamos: Um número L é o *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

para ser equivalente a: para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - L| < \varepsilon$, sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Grosso modo, isto significa que os valores de $f(x)$ tendem a L quando x tende a a. Mais explicitamente, os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vem mais próximos do número L quando x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas $x \neq a$. Vejamos os exemplos:

Exemplo 1.15. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - x + 2$. O limite de $f(x)$ quando x tende a 2 é 4, isto é, se tomarmos x cada vez mais próximos de 2, iremos ter $f(x)$ próximos de 4. Vejamos a seguinte tabela com valores de $f(x)$, para x próximo de 2 pela direita e pela esquerda:

x	f(x)	x	f(x)
1	2	3	8
1,5	2,75	2,5	5,75
1,8	3,44	2,2	4,64
1,9	3,71	2,1	4,31
1,95	3,8525	2,05	4,1525
1,99	3,9701	2,01	4,0301
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

Pelos valores mostrados na tabela, podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4 quanto quisermos, ao tornar x suficientemente próximos de 2. Portanto, temos que o limite de $f(x)$ quando x tende a 2 é igual a 4 e escrevemos

$$\lim_{x \to 2} x^2 - x + 2 = 4.$$

Exemplo 1.16. Na função $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, temos que $f(1)$ não existe, mas o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 está definido, pois segundo a definição de limite dada, precisamos de valores de x que estão próximos de a, mas não são iguais a a. A tabela seguinte mostra valores de $f(x)$, para x próximos de 1 com precisão de 6 casas decimais:

x	f(x)	x	f(x)
0,5	0,666667	1,5	0,4
0,9	0,526316	1,1	0,47619
0,99	0,502513	1,01	0,497512
0,999	0,50025	1,001	0,49975
0,9999	0,500025	1,0001	0,499975

Podemos perceber que os valores de $f(x)$, para x suficientemente próximos a 1, tendem a 0,5. Assim, podemos tornar valores para $f(x)$ tão próximos de 0,5 quanto quisermos, ao tornar x suficientemente próximos a 1. Portanto, dizemos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0,5.$$

Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *contínua* no ponto $a \in X$ quando, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, podemos ter um $\delta > 0$, tal que $|x-a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Simbolicamente,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Se tratando de intervalos, podemos dizer que dado qualquer intervalo aberto J contendo $f(a)$, existe um intervalo aberto I, contendo a, tal que $f(I \cap X) \subset J$. Ou seja, dado $J = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $I = (a - \delta, a + \delta)$, com $\delta > 0$. Definimos também que $f : X \to \mathbb{R}$ é *contínua* quando f é contínua em todos os pontos de X.

Desta forma, no Exemplo 1.15, dizemos que a função $f(x) = x^2 - x + 2$ é contínua em 2, porque $f(2) = 4 = \lim_{x\to 2} f(x)$. Diferentemente, no Exemplo 1.16, a função $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ não é contínua em 1.

Vejamos os seguintes teoremas que nos trazem algumas propriedades que nos serão úteis:

Teorema 1.12. *Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$, então $f + g$ e $f - g$ são contínuas nesse mesmo ponto.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$, tais que $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Logo, $|x-a| < \delta$ implica

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| &= |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto prova que $f + g$ é contínua. Para o caso da diferença, a demonstração é análoga. □

Vejamos o seguinte teorema que nos traz uma propriedade relacionada ao limite de uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ e uma sequência de pontos de X.

Teorema 1.13. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. A fim de que seja $\lim_{x\to a} f(x) = L$ é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tenha-se $\lim f(x_n) = L$.*

Demonstração. Vamos supor, primeiramente, que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e que se tem uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta$ (pois $x_n \neq a$, para todo n). Por conseguinte, $n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$, portanto, $\lim f(x_n) = L$. Reciprocamente, suponhamos que $x_n \in X - \{a\}$ e $\lim x_n = a$ impliquem $\lim f(x_n) = L$, então provemos que se tem

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Negando esta igualdade, teríamos um $\varepsilon > 0$ tal que: dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos achar $x_n \in X$ tal que $0 < |x_n - a| < 1/n$ mas $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Assim, teríamos $x_n \in X - \{a\}$, mas não teríamos $\lim f(x_n) = L$. Com esta contradição, completamos a demonstração. □

Agora vamos provar o seguinte resultado, que nos traz uma relação interessante, que usaremos mais tarde, de uma função contínua com a sua inversa, quando restrita a um conjunto compacto.

Teorema 1.14. *Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, então toda bijeção contínua $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$ tem inversa $g : Y \to X$ contínua.*

Demonstração. Seja $b = f(a)$ um ponto arbitrário em Y. Assim, iremos mostrar que g é contínua no ponto b. Supondo que não seja. Daí, existiriam um número $\varepsilon > 0$ e uma sequência de pontos $y_n = f(x_n) \in Y$ com $\lim y_n = b$ e $|g(y_n) - g(b)| \geq \varepsilon$, isto é, $|x_n - a| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\lim x_n = a' \in X$, pois X é compacto. Tem-se $|a' - a| \geq \varepsilon$. Em particular, $a' \neq a$. Mas, como f é contínua, $\lim y_n = \lim f(x_n) = f(a')$. Como já temos $\lim y_n = b = f(a)$, isto implicaria $f(a) = f(a')$, contradizendo o fato de f ser injetiva. $\square$

2

Conjunto de Cantor

2.1 Construção e Propriedades do conjunto de Cantor

O *conjunto de Cantor* K é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1]$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos, do seguinte modo: retira-se do intervalo $[0, 1]$ seu terço médio aberto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Daí temos, na primeira etapa da construção do conjunto de Cantor, os intervalos fechados

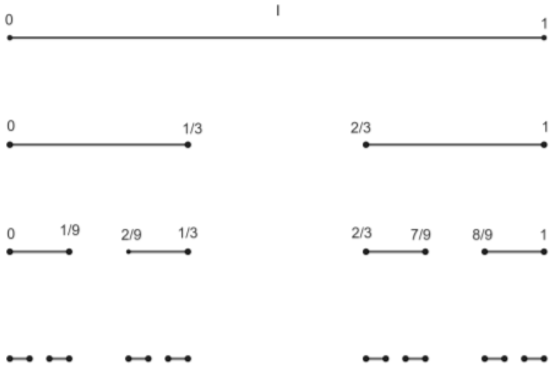
$$[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

Depois retira-se o terço médio aberto de cada um destes intervalos. Sobra então

$$[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Em seguida, retira-se o terço médio aberto de cada um desses quatro intervalos. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor. Seja a ilustração da construção do conjunto de Cantor:

Figura 2.1: Construção do Conjunto de Cantor



Fonte: *O Conjunto de Cantor: Caracterização via Base Ternária.* WHOBEL e ALVES, 2018.

Se indicarmos com $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ os intervalos abertos omitidos, temos $K = [0, 1] - \cup_{n=1}^{\infty} I_n$, isto é, $K = [0, 1] \cap (\mathbb{R} - \cup I_n)$. Logo, K é um conjunto fechado, interseção dos fechados $[0, 1]$ e $(\mathbb{R} - \cup I_n)$.

Proposição 2.1. *O conjunto de Cantor K tem interior vazio.*

Demonstração. Na n-ésima etapa da construção de K, teremos intervalos de comprimento $\frac{1}{3^n}$. Desta forma, dado qualquer intervalo $J \subset [0,1]$, de comprimento $c > 0$, tomemos n tal que $\frac{1}{3^n} < c$. Assim, o intervalo $J \subset [0,1]$ não restará incólume. O que nos diz que K não contém intervalos. $\square$

Proposição 2.2. *O conjunto de Cantor ternário K é o conjunto dos $x \in [0,1]$ tais que sua expansão infinita na base 3 tem somente os algarismos 0 e 2.*

Antes de mostrarmos a prova dessa proposição, comentaremos sobre a representação dos números reais na base 3. Representar $x \in [0,1]$ na base 3 significa escrever $x = 0, x_1x_2x_3x_4...$ de modo que x_n só pode ser 0,1 ou 2, de forma que

$$x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \frac{x_4}{3^4} + \ldots + \frac{x_n}{3^n} + \ldots.$$

Assim como, na base 10, quando temos $x = \frac{p}{10^n}$, $p \leq 10^n$, o número de casas decimais é finito, na base 3, se tivermos $x = \frac{m}{3^n}$, $m \leq 3^n$ teremos um número finito de casas decimais. Exemplo: $17/27 = 0{,}122$, na base 3. Da mesma forma, na base 10, quando o denominador da fração irredutível p/q não é uma potência de 10, temos uma representação periódica, na base 3, se não tivermos uma potência de 3 no denominador da fração irredutível, teremos uma representação periódica. Exemplo: $1/4 = 0{,}020202...$, na base 3. Os números irracionais têm representação não-periódica. Vamos à demonstração:

Demonstração. Na primeira etapa da construção do conjunto de Cantor, ao omitirmos o intervalo aberto $(1/3, 2/3)$, são excluídos os números $x \in (0,1)$ cuja representação na base 3 tem $x_1 = 1$, com exceção de $1/3 = 0{,}1$, que permanece. Na segunda etapa, são omitidos os intervalos $(1/9, 2/9)$ e $(7/9, 8/9)$, isto é, aqueles cuja representação na base 3 têm $x_2 = 1$, com $x_1 = 0$ ou $x_1 = 2$, ou seja, da forma $0, 01x_3x_4...$ ou $0, 21x_3x_4...$, com exceção de $1/9$=0,01 e $7/9$=0,21, que permanecem. De forma geral, podemos afirmar que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo $[0,1]$ cuja representação $x = 0, x_1x_2x_3...x_n...$, na base 3, só contém os algarismos 0 e 2, com exceção daqueles que contêm um único algarismo 1, como algarismo final, como por exemplo $x = 0, 0221$. Mas podemos substituir o algarismo final 1 pela sequência 0222.... Por exemplo, $0, 0221 = 0, 0220222...$. Deste modo, afirmamos, sem exceção, que os elementos do conjunto de Cantor, são os $x \in [0,1]$ cuja representação decimal na base 3, só contém os algarismos 0 e 2. $\square$

Desta forma, definimos o conjunto ternário de Cantor K como

$$K = \{x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + ... + \frac{x_n}{3^n} + ...; x_i \in \{0,2\}, \forall i \geq 1\}.$$

Quanto aos pontos que são extremos dos intervalos omitidos, podemos dizer que são aqueles cuja expansão infinita na base 3 é da forma $x = 0, x_1x_2...x_k222...$, ou $x = 0, x_1x_2...x_k000...$, onde $x_i \in \{0,2\}$, $i = 1, ..., k$. Vejamos: na primeira etapa da construção do conjunto de Cantor, temos como extremos os pontos $1/3 = 0{,}1 = 0{,}0222...$ e $2/3 = 0{,}2 = 0{,}2000...$. Na segunda etapa, temos $1/9 = 0{,}01 = 0{,}00222...$, $2/9 = 0{,}02 = 0{,}02000...$, $7/9 = 0{,}21 = 0{,}20222...$, $8/9 = 0{,}22 = 0{,}22000...$. Na terceira etapa, temos $1/27 = 0{,}001 = 0{,}000222...$, $2/27 = 0{,}002 = 0{,}002000...$, $7/27 = 0{,}021 = 0{,}020222...$, $8/27 = 0{,}022 = 0{,}022000...$, $19/27 = 0{,}201 = 0{,}200222...$, $20/27 = 0{,}202 = 0{,}202000...$, $25/27 = 0{,}221 = 0{,}220222...$, $26/27 = 0{,}222 = 0{,}222000...$, e assim por diante. Chamaremos o conjunto desses pontos de E.

Seja o conjunto $\{0,2\}^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...); x_i \in \{0,2\}, \forall i \geq 1\}$. Assim, o conjunto ternário de Cantor K e $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ são equivalentes. Basta definirmos uma bijeção $f : K \to \{0,2\}^{\mathbb{N}}$. Vejamos: sendo $x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + ... + \frac{x_n}{3^n} + ...$, $f(x) = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$. Como dissemos que os pontos do conjunto E são escritos como $x = 0, x_1x_2...x_k222...$, ou $x = 0, x_1x_2...x_k000...$, temos que todos os pontos do conjunto de Cantor tem uma representação única na base 3. Assim, podemos escrever qualquer ponto x do conjunto de Cantor da forma $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)_3$, donde $x_i = \{0,2\}$, $i \geq 1$. Em específico, os pontos de E escreveremos como $x = (x_1, x_2, ..., x_n, \overline{2})_3$ ou $x = (x_1, x_2, ..., x_n, \overline{0})_3$.

Proposição 2.3. *K é não-enumerável.*

Demonstração. Mostramos anteriormente uma bijeção $f : K \to \{0,2\}^{\mathbb{N}}$. Pelo corolário 1.1, podemos afirmar que o conjunto $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ é não-enumerável. Portanto, o conjunto de Cantor é não-enumerável. □

Vejamos mais propriedades do conjunto de Cantor.

Proposição 2.4. *Sejam $x, y \in K$, com $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)_3$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...)_3$, tais que, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_{n-1} = y_{n-1}$, $x_n \neq y_n$. Então $|x - y| \geq 1/3^n$.*

Demonstração. Seja:

$$|x-y| = |\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{3^i}| \geq |\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - y_i}{3^i}| - |\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x_i - y_i}{3^i}| \geq \frac{2}{3^n} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i}$$

Mas

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{2}{3^{n+1}}.(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ...) = \frac{2}{3^{n+1}}.\frac{3}{2} = \frac{1}{3^n}.$$

Logo,

$$|x - y| \geq 2/3^n - 1/3^n = 1/3^n.$$

□

Proposição 2.5. *Se $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)_3$ e $y = (x_1, x_2, ..., x_n, \overline{2})_3$ ou $y = (x_1, x_2, ..., x_n, \overline{0})_3$ $\in K$, isto é, $y \in E$, então $|x - y| \leq 1/3^n$.*

Demonstração. Faremos a demonstração de maneira construtiva:

Na primeira etapa da construção do conjunto de Cantor, temos que os pontos $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)_3$ do intervalo $[0, 1/3)$ têm $x_1 = 0$, e estão a uma distância $\leq 1/3$ do ponto $1/3$, que tem representação $(0, \overline{2})_3$. Da mesma forma, os pontos $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)_3$ do intervalo $(2/3, 1]$ têm $x_1 = 2$, e estão a uma distância $\leq 1/3$ do ponto $2/3$ que tem representação $(2, \overline{0})_3$.

Na segunda etapa da construção do conjunto de Cantor, os pontos $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)_3$ do intervalo $[0, 1/9)$ têm $x_1 = 0, x_2 = 0$, e estão a uma distância $\leq 1/3^2$ do ponto $1/9$ que tem representação $(0, 0, \overline{2})_3$. Da mesma forma, os pontos do intervalo $(2/9, 1, 3)$, têm $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e estão a uma distância $\leq 1/3^2$ do ponto $2/9$ que tem representação $(0, 2, \overline{0})_3$, ou do ponto $1/3$ cuja representação é $(0, \overline{2})_3$; os pontos do intervalo $(2/3, 7/9)$, têm $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ e estão a uma distância $\leq 1/3^2$ do ponto $7/9$ que tem representação $(2, 0, \overline{2})_3$ e do ponto $2/3$ cuja representação é $(2, \overline{0})_3$; os pontos do intervalo $(8/9, 1]$ têm $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ e estão a uma distância $\leq 1/3^2$ do ponto $8/9$ que tem representação $(2, 2, \overline{0})_3$.

Na terceira etapa da construção do conjunto de Cantor, os pontos do intervalo $[0, 1/27)$ têm $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e estão a uma distância $\leq 1/3^3$ do ponto $1/27$ cuja representação é $(0, 0, 0, \overline{2})_3$; os pontos de $(2/27, 1/9)$ têm $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ e estão a uma distância $\leq 1/3^3$ do ponto $2/27$ que tem representação $(0, 0, 2, \overline{0})_3$, ou do ponto $1/9$ cuja representação é $(0, 0, \overline{2})_3$; os pontos de $(2/9, 7/27)$ têm $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ e estão a uma distância $\leq 1/3^3$ do ponto $2/9$ cuja representação é $(0, 2, \overline{0})_3$ ou do ponto $7/27$ cuja representação é $(0, 2, 0, \overline{2})_3$; os pontos de $(8/27, 1/3)$ têm $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$ e estão a uma distância $\leq 1/3^3$ do ponto $8/27$ que tem representação $(0, 2, 2, \overline{0})_3$ ou do ponto $1/3$ que tem representação $(0, \overline{2})_3$; os pontos de $(2/3, 19/27)$ têm $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e estão a uma distância $\leq 1/3^3$ do ponto $2/3$ que tem representação $(2, \overline{0})_3$ ou do ponto $19/27$ que tem representação $(2, 0, 0, \overline{2})_3$; os pontos de $(20/27, 7/9)$ têm $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ e estão a uma distância $\leq 1/3^3$ do ponto $20/27$ cuja representação é $(2, 0, 2, \overline{0})_3$ ou do ponto $7/9$ cuja representação é $(2, 0, \overline{2})_3$; em $(8/9, 25/27)$ os pontos têm $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ e estão a uma distância $\leq 1/3^3$ do ponto $8/9$ que tem representação $(2, 2, \overline{0})_3$ ou do ponto $25/27$ que tem representação $(2, 2, 0, \overline{2})_3$; em $(26/27, 1]$ os pontos têm $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$ e estão a uma distância $\leq 1/3^3$ do ponto $26/27$ que tem representação $(2, 2, 2, \overline{0})_3$.

Assim por diante. $\square$

Teorema 2.1. *O conjunto E dos extremos dos intervalos omitidos nas etapas da construção de K, formam um conjunto denso em K.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)_3 \in K$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/3^n < \varepsilon$ e $y = (x_1, x_2, ..., x_n, \overline{2})$. Pela proposição 2.5, $|x - y| \leq 1/3^n < \varepsilon$. $\square$

Vejamos outra propriedade do conjunto de Cantor:

Corolário 2.1. *Todo ponto x do conjunto de Cantor é um ponto de acumulação de K.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...)_3 \in K$, que não seja extremo de intervalo omitido. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/3^n < \varepsilon$ e $y = (x_1, x_2, ..., x_n, y_{n+1}, y_{n+2} ...)_3 \in K$, com $y_{n+1} \neq x_{n+1}, y_{n+2} \neq x_{n+2}, ...$. Assim, $|x - y| < 1/3^n < \varepsilon$. Agora, sejam $\varepsilon > 0$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n, \overline{2})_3 \in E$ (ou $x = (x_1, x_2, ..., x_n, \overline{0})_3$). Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/3^n < \varepsilon$ e $y = (x_1, x_2, ..., x_n, y_{n+1}, y_{n+2} ...)_3 \in K$, com $y_{n+1} \neq x_{n+1}, y_{n+2} \neq x_{n+2}, ...$. Desta forma, $|x - y| \leq 1/3^n < \varepsilon$. $\square$

Se $a \in K$ é extremidade superior de algum dos intervalos abertos omitidos nas etapas de construção de K, então a é apenas pontos de acumulação de à esquerda de K. Se $a \in K$ é extremidade inferior de algum dos intervalos abertos omitidos nas etapas de construção de K, então a é apenas pontos de acumulação à direita de K. Os demais pontos de K são pontos de acumulação em ambos os lados. Vejamos outra propriedade do conjunto de Cantor na seguinte proposição.

Seja X um conjunto em $\mathbb{R}$. Dizemos que X tem *conteúdo nulo*, e escrevemos $c(X) = 0$, quando para todo $\varepsilon > 0$, temos uma coleção finita de intervalos abertos $I_1, I_2, ..., I_n$, tal que $X \subset I_1, I_2, ..., I_n$ e a soma dos comprimentos dos intervalos I_j são $< \varepsilon$. Sendo o comprimento de um intervalo I dado por $|I| = b - a$, onde b e a são os extremos de I.

Dizemos que $X \in \mathbb{R}$ tem *medida nula*, e damos a notação $m(X) = 0$, se para todo $\varepsilon > 0$, for possível termos uma coleção enumerável de intervalos abertos $I_1, I_2, ..., I_n, ...$, tal que $X \subset I_1, I_2, ..., I_n, ...$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon$. Daí, obtemos que se um conjunto X tem conteúdo nulo, então X tem medida nula.

Desta forma, conjunto de Cantor tem conteúdo nulo, logo, medida nula. Vejamos: Após a n-ésima etapa da construção do conjunto de Cantor, temos intervalos cuja soma tem comprimento $(\frac{2}{3})^n$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos ter n suficientemente grande tal que $(\frac{2}{3})^n < \varepsilon$. Assim, $m(K) = 0$.

2.2 A Função Ternária de Cantor

Definimos a *Função Ternária de Cantor* da seguinte maneira:

$$f : [0,1] \to [0,1]$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, , , ,)_3 \longmapsto f(x) = (y_1, y_2, ..., y_n, ...)_2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{2^i}.$$

Vejamos: a função ternária de Cantor é definida transformando o número $x \in K$ da expansão ternária para a expansão binária, e os pontos em $K^c = [0,1] - K$ numa constante. Esta transformação é feita da seguinte maneira:

Seja $x = (x_1, x_2, ..., x_n, , , ,)_3 \in [0,1]$. Daí:

1 $N = \infty$, se $x_i \neq 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$;

2 $N = min\{i \in \mathbb{N}; x_i = 1\}$, se $x_i = 1$, para algum i $\in \mathbb{N}$.

Ainda temos que para x_j, tal que $j \neq N$, $x_j \to y_j = \frac{x_j}{2}$ e $x_N = 1$. Assim, $\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{2^i}$ independe da expansão ternária de x (no caso dos pontos com mais de uma representação, como $1/3 = (1, \overline{0})_3 = (0, \overline{2})_3)$.

Vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 2.1. $f(0) = 0$. Pela definição anterior, temos que: $0 = (\overline{0})_3$. Daí, $N = \infty$, pois $x_i = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, $x_i = 0 \to y_i = 0/2 = 0$. Logo, $f(0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i} = \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + ... + \frac{0}{2^n} + ... = 0$.

Exemplo 2.2. $f(1) = 1$. Pela definição anterior, temos que: $1 = (\overline{2})_3$. Daí, $N = \infty$, pois $x_i = 2$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, $x_i = 2 \to y_i = \frac{x_i}{2} = 2/2 = 1$. Logo, $f(1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = 1$.

Exemplo 2.3. $f|_{(1/3,2/3)}(x) = 1/2$. Percebemos que todos os pontos deste intervalo tem $x_1 = 1$ na expansão ternária, então $N = 1$. Logo, para todo $x \in (1/3, 2/3)$, $f(x) = \sum_{i=1}^{1} \frac{y_i}{2^i} = \frac{1}{2}$.

Exemplo 2.4. $f|_{(1/9,2/9)}(x) = 1/4$ e $f|_{(7/9,8/9)}(x) = 3/4$. Temos que, todos os pontos nestes intervalos tem $x_2 = 1$. Sendo que no intervalo $(1/9, 2/9)$, $x_1 = 0$, e em $(7/9, 8/9)$, $x_1 = 2$. Com isto, $N = 2$ para ambos. Assim, para os pontos em $(1/9, 2/9)$, temos $x_1 = 0 \to y_1 = 0/2 = 0$. Daí, para $x \in (1/9, 2/9)$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2} \frac{y_i}{2^i} = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Para $x \in (7/9, 8/9)$, temos $x_1 = 2 \to y_1 = 2/2 = 1$. Assim, para $x \in (7/9, 8/9)$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2} \frac{y_i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

Exemplo 2.5. $f|_{(1/27,2/27)}(x) = 1/8$; $f|_{(7/27,8/27)}(x) = 3/8$; $f|_{(19/27,20/27)}(x) = 5/8$; $f|_{(25/27,26/27)}(x) = 7/8$. Sabemos que para todos os pontos nestes intervalos, $x_3 = 1$. Sendo que,

- Em $(1/27, 2/27)$, $x_1 = 0 \to y_1 = 0/2 = 0$, $x_2 = 0 \to y_2 = 0/2 = 0$. Daí, para $x \in (1/27, 2/27)$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{y_i}{2^i} = \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

- No intervalo $(7/27, 8/27)$, $x_1 = 0 \to y_1 = 0/2 = 0$, $x_2 = 2 \to y_2 = 2/2 = 1$. Então, para $x \in (7/27, 8/27)$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{y_i}{2^i} = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}.$$

- Em $(19/27, 20/27)$, $x_1 = 2 \to y_1 = 2/2 = 1$, $x_2 = 0 \to y_2 = 0/2 = 0$. Então, para $x \in (19/27, 20/27)$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{y_i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{5}{8}.$$

- No intervalo $(25/27, 26/27)$, $x_1 = 2 \to y_1 = 2/2 = 1$, $x_2 = 2 \to y_2 = 2/2 = 1$. Então, para $x = (25/27, 26/27)$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{y_i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}.$$

Exemplo 2.6. Sabemos que $1/4 \in K$, afinal $1/4 = (0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, ...)_3$. Desta forma, $N = \infty$, afinal $x_i \neq 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Daí, temos $x_{2n} = 2 \to y_{2n} = 2/2 = 1$, $x_{2n-1} = 0 \to y_{2n-1} = 0/2 = 0$. Portanto,

$$f(1/4) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i} = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{0}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{2n}} + ...$$

$$\begin{aligned} f(1/4) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i} &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^{2n}} + ... \\ &= \frac{1/4}{1 - 1/4} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

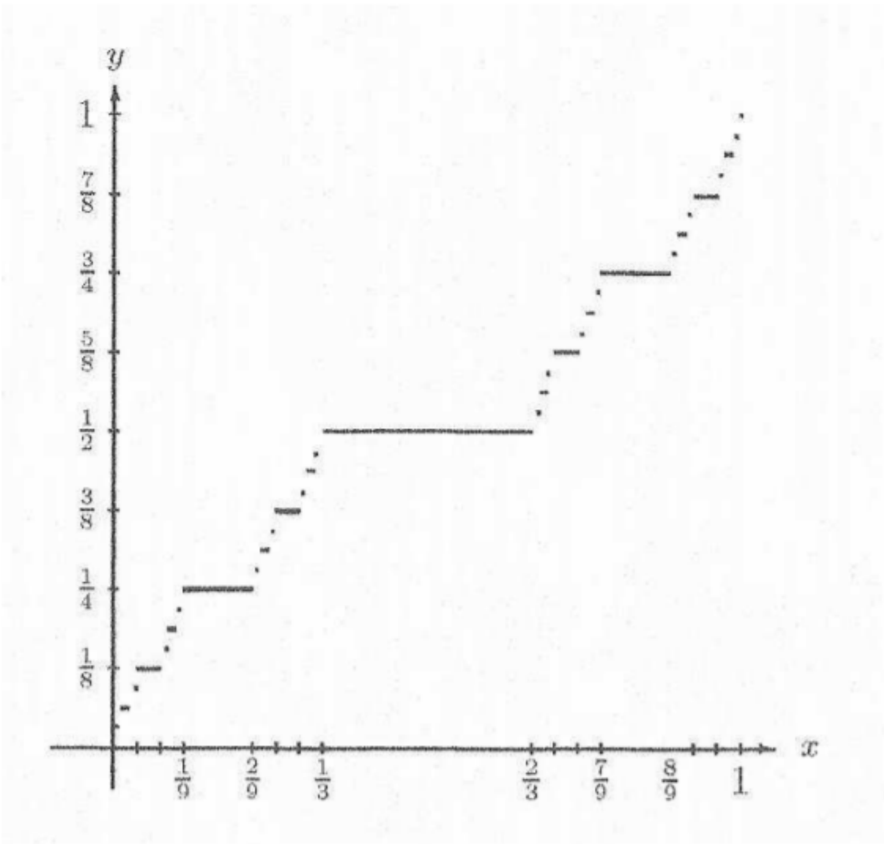
Exemplo 2.7. Vejamos o que acontece para algum $x \in E$: Tomemos $1/9$. Ora, $1/9 = (0, 0, \overline{2})_3$. Como $x_i \neq 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$, $N = \infty$. Temos também que $x_1 = 0 \to y_1 = 0/2 = 0$ e $x_2 = 0 \to y_2 = 0/2 = 0$, e ainda, para $i > 2$, $x_i = 2 \to y_i = 2/2 = 1$. Daí,

$$\begin{aligned} f(1/9) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i} &= \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ... \\ &= \frac{1}{2^3}.(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ...) \\ &= \frac{1}{2^3}.2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Com estes dois últimos exemplos, podemos dizer também que, se $a \in K$, então $f(a) = \lim_{x \to a} f|_{K^c}(x)$. Podemos aplicar limite de f quando x tende a a, com $a \in K$, porque todo ponto de K é ponto de acumulação de K.

Vejamos o gráfico da função:

Figura 2.2: Gráfico da Função de Cantor



Fonte: *O Conjunto de Cantor*. ALVES, 2008.

Vejamos o seguinte teorema, que traz um resultado interessante sobre a função ternária de Cantor:

Teorema 2.2. *A função ternária de Cantor é monótona crescente.*

Demonstração. Mostraremos que se $a, b \in [0, 1]$ e $a < b$, então $f(a) \leq f(b)$. Consideremos os casos diferentes:

Caso 1 Quando $a, b \in K^c$ e $a < b$. Assim, temos:

$$f(a) = f|_{K^c}(a) \leq f|_{K^c}(b) = f(b),$$

por construção.

Caso 2 Seja $a \in K, b \in K^c$. Vamos supor $a < b$. Daí,

$$\begin{aligned} f(a) &= \lim_{x \to a} f(x), x \in K^c \\ &= inf_{x>a} f|_{K^c}(x). \end{aligned}$$

Como $f|_{K^c}(b) \in \{f|_{K^c}(x)\}$, conclui-se que $f(a) \leq f|_{K^c}(b) = f(b)$. No caso em que $b < a$, temos

$$\begin{aligned} f(a) &= \lim_{x \to a} f|_{K^c}(x) \\ &= inf_{x<a} f|_{K^c}(x) \\ &\geq f|_{K^c}(b) \\ &= f(b). \end{aligned}$$

Portanto, $f(b) \leq f(a)$.

Caso 3 Sejam $a, b \in K$, e $a < b$. Temos que K^c é denso em [0,1], daí coloquemos $x \in K^c$, tal que $a < x < b$. Pelo caso 2, temos que $f(a) < f(x) < f(b)$.

Isto prova que f é monótona crescente. □

Vejamos outra propriedade da função ternária de Cantor, com o seguinte teorema:

Teorema 2.3. *A função ternária de Cantor é contínua em $I = [0, 1]$.*

Demonstração. É imediato pela forma como f foi construída, isto é, f em K^c é constante, e em K, temos o processo de limites. Portanto, f é contínua em [0,1]. □

Para o teorema que segue, traremos a definição de *homeomorfismo*: uma função $f : X \to Y$ é um homeomorfismo entre X e Y se for uma bijeção contínua e sua inversa $f^{-1} : Y \to X$ também for contínua.

Teorema 2.4. *A função $F(x) = f(x) + x$, sendo f a função ternária de Cantor, é um homeomorfismo de [0,1] em [0,2].*

Demonstração. Demonstraremos que F é contínua e F^{-1} também é contínua. Vejamos:

Afirmação 1 F é contínua: Como F é a soma de duas funções contínuas, F é contínua.

Afirmação 2 F é injetiva: Sejam $x, y \in [0, 1]$, com $x \neq y$. Sem perda de generalidade, vamos supor $x < y$. Segue-se do teorema 2.1 que

$$F(x) = f(x) + x < f(y) + x < f(y) + y = F(y).$$

Assim, $F(x) \neq F(y)$. Portanto, F é injetiva.

Afirmação 3 F é sobrejetiva: Temos que $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é sobrejetiva em [0,1], pois $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e f é monótona crescente e contínua. Por conseguinte, para todo $y \in [0, 1]$, existe $x \in [0, 1]$, tal que $f(x) = y$. Desta forma,

$$\begin{aligned} Im(F) &= \{F(x); x \in [0, 1]\} \\ &= \{f(x) + x; x \in [0, 1]\} \\ &= \{y + x; x, y \in [0, 1]\} \\ &= [0, 2]. \end{aligned}$$

Portanto, $Im(F) = [0, 2]$, o que nos faz concluir que F é sobrejetiva. Como provamos que F é bijetiva, garantimos a existência de F^{-1}.

Afirmação 4 F^{-1} é contínua em [0,2]: Pelas afirmações anteriores, F é uma bijeção contínua. Como [0,1] é um conjunto compacto, temos, pelo teorema 1.14, que F^{-1} é uma função contínua.

Pelas afirmações 1, 2, 3 e 4, provamos que F é um homeomorfismo de [0,1] em [0,2]. $\square$

A função ternária de Cantor traz uma peculiaridade especial por ter o gráfico tal que leva a função a ser conhecida como "a escada do diabo", por ser parecido com uma escada, mesmo assim a função ser contínua. Outra curiosidade que ela traz é fazer uma relação entre as expansões ternária e binária dos pontos em [0,1], como vimos acima.

Conclusão

No estudo aqui apresentado, foram vistos conceitos de análise real para a concepção do conjunto de Cantor, dentre tantos, vimos definições como conjunto finito, conjunto enumerável e conjunto limitado. Especificamente na topologia da reta, vimos definições como conjunto fechado, conjunto aberto, ponto interior, ponto de aderência, ponto de acumulação, interior de um conjunto e fecho de um conjunto, dentre outros. Além disto, foi afirmado o conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo, sendo apresentados também sequências de números reais, limite de funções e funções contínuas.

Seguindo, tem-se a construção do conjunto de Cantor, sendo este um conjunto contido no intervalo fechado da reta [0,1], e tal construção feita através da omissão de intervalos abertos, sendo estes os terços médios abertos deste intervalo. Assim, aplicando os conteúdos estudados, conclui-se que o conjunto K é um conjunto compacto, isto é, limitado e fechado, e possui outras propriedades como ter interior vazio, todos os seus pontos serem pontos de acumulação e ser não-enumerável. O conjunto de Cantor também contém um subconjunto E, enumerável, cujo, são os pontos das extremidades dos intervalos omitidos, e ainda, este é denso em K. Além disto, tivemos também que K tem conteúdo nulo, logo, medida nula.

Apresentamos também o conjunto de Cantor como $K = \{x = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + ... + \frac{x_n}{3^n} + ...; x_i \in \{0, 2\}, \forall i \geq 1\}$, isto é, o conjunto contido em $[0, 1]$ tal que, na sua expansão infinita na base 3, só contém os dígitos 0 e 2. Por fim, tivemos a função ternária de Cantor $f : [0, 1] \to [0, 1]$, e provou-se que ela é monótona, crescente e contínua, além de fazer uma relação com as expansões ternária e binária dos pontos em [0,1].

Referências Bibliográficas

[1] ALVES, Marcos Teixeira. *O Conjunto de Cantor.* UFSC, Florianópolis, 2008.

[2] ALVES, Marcos Teixeira; WHOBEL, Leonardo. *O Conjunto de Cantor: Caracterização via Base Ternária.* UEPG - SIGMAT - Simpósio Integrado de Matemática, Ponta Grossa, 2018.

[3] ARAÚJO, Rodrigo Carlos. *Sistemas Dinâmicos e Conjuntos de Cantor - Uma breve introdução à dinâmica unidimensional.* UNIRIO, Rio de Janeiro, 2016.

[4] LIMA, Elon Lages. *Análise Real - Funções de 1 Variável - vol. 1.* IMPA, Rio de Janeiro, 2018.

[5] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise - vol. 1.* IMPA, Rio de Janeiro, 2017.

[6] LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos.* IMPA, Rio de Janeiro, 2017.

[7] MOREIRA, Carlos Gustavo. *Conjuntos de Cantor, Dinâmica e Aritmética.* IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[8] STEWART, James. *Cálculo - Volume 1.* Tradução EZ2 Translate. 7 edição: Cengage Learning, São Paulo, 2016.