UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA COLETÂNEA DE FEITOS MATEMÁTICOS SEM AUXÍLIO DA TECNOLOGIA

JOSÉ GILVANIR SANTOS DE ARAÚJO

Instituto de Matemática

Maceió, 18 de Novembro de 2020

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ GILVANIR SANTOS DE ARAÚJO

UMA COLETÂNEA DE FEITOS MATEMÁTICOS SEM AUXÍLIO DA TECNOLOGIA

MACEIÓ – AL

2020

JOSÉ GILVANIR SANTOS DE ARAÚJO

UMA COLETÂNEA DE FEITOS MATEMÁTICOS SEM AUXÍLIO DA TECNOLOGIA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Orientador: Prof. Dr. Vanio Fragoso de Melo

MACEIÓ – AL

2020

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

A663c Araújo, José Gilvanir Santos de.
Uma coletânia de feitos matemáticos sem auxílio da tecnologia / José Gilvanir Santos de Araújo. – 2020.
108 f. : il., figs. color.

Orientador: Vanio Fragoso de Melo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 104-108.

1. História da matemática. 2. Educação básica. 3. Atividades práticas. I. Título.

CDU: 51(091): 371.38

Folha de Aprovação

JOSÉ GILVANIR SANTOS DE ARAÚJO

Uma Coletânea de Feitos Matemáticos sem Auxílio da Tecnologia

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 18 de novembro de 2020.

Vanio Fragoso de Melo

Prof. Dr. Vanio Fragoso de Melo – UFAL (Orientador)

Banca Examinadora:

Profª. Drª Juliana R. Theodoro de Lima
Instituto de Matemática - UFAL
SIAPE: 2347015

Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima – UFAL (Examinadora Interna)

Severino Horácio da Silva

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva – UFCG (Examinador Externo)

Dedico esse trabalho ao meu pai Geraldo, a minha mãe Maria, e ao meu filho, Otávio.

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai Geraldo, e a minha mãe Maria.

Ao meu filho Otávio, por todo apoio.

A Alien, e Cinthionete, por todo companheirismo.

A Amilton, por ter me convencido a fazer a seleção do PROFMAT.

A André e a Uildo, com quem compartilhei muitas idas e vindas, sendo fundamentais para minha formação, compartilhamos também muitas historias engraçadas.

A Brena, por toda a ajuda e companheirismo ao logo curso.

A Débora, por toda a ajuda, desde a minha colação de grau.

A Diego, pela a imensa ajuda, desde a ida para a realização do exame de acesso até o presente momento.

A Edson Valdemar, com quem compartilhei também muitas viagens.

A Hélder e Marlon, dois conterrâneos com que dividi muitas histórias engraçadas, muitas viagens e muitos momentos de incertezas durante todo o PROFMAT.

A minha prima Inayara por todo o apoio.

A Laika e a Rafael, por todo companheirismo.

A Quércia, por toda ajuda e conversas que tivemos, sempre me aconselhando da melhor forma possível, e a Sara, sua irmã gêmea.

A Iêda, por todas as conversas engraçadas e as nem tanto.

A Verônica e a Mara, pela ajuda no momento em que fiz escolhas não muito certas.

A tia Nana e a tia Socorro, por terem abrido às portas de suas casas pra mim.

A meu orientador, Prof. Doutor Vanio Fragoso de Melo, por ter aceitado me orientar nesse trabalho e a todo corpo docente do PROFMAT da UFAL.

A todas as pessoas que me ajudaram de alguma forma, e que não poderei citar seus nomes aqui pra não me alongar demais.

Aos meus familiares, onde evitei colocar mais nomes para evitar magoar alguns.

A Profa. Dra. Juliana e ao Prof. Dr. Horácio, por terem feito parte de minha banca.

A Deus, por tudo.

[...] *Ele morrerá e eu morrerei.*
Ele deixará a tabuleta, e eu deixarei versos.
A certa altura morrerá a tabuleta também, e os versos também.
Depois de certa altura morrerá a rua onde esteve a tabuleta,
E a língua em que foram escritos os versos.
Morrerá depois o planeta girante em que tudo isto se deu.
Em outros satélites de outros sistemas qualquer coisa como gente
Continuará fazendo coisas como versos e vivendo por baixo de coisas como tabuletas [...]
Fernando Pessoa, em "Tabacaria"

RESUMO

O presente trabalho traz uma coletânea de feitos matemáticos que não tiveram auxílio da tecnologia, bem como uma discussão sobre a importância da História da Matemática para o ensino desta ciência. Ele pode ser usado por professores da educação básica para auxiliar em aulas de determinados assuntos, seja como introdução ou como motivação pelo peso histórico. O mesmo é fruto de uma revisão bibliográfica de alguns artigos, livros, dissertações e teses que, diretamente ou indiretamente, tratam de assuntos relacionados à história da Ciência, em particular da Matemática, e que são considerados grandiosos, principalmente pela falta de recursos tecnológicos dos quais dispomos hoje em dia — recursos estes que, na época, eram escassos, rudimentares e, na maioria das vezes, nem existiam. Complementam ainda este trabalho algumas atividades que podem ser motivadoras para os alunos, por mostrarem, de forma prática, a aplicação de teoremas e cálculos utilizando-se de pouca tecnologia.

Palavras-chave: História da Matemática; auxílio da tecnologia; ensino básico; atividades práticas.

ABSTRACT

The present study brings a collection of mathematical deeds that had not technology assistance, as well as a discussion about the importance of the History of the Mathematic for the teaching of this science. It can be used by teachers of the basic education to help on lessons of settled subjects, as an introduction or like motivation by the historical prominence. The latter results of a bibliography revision of some articles, books, dissertations and thesis which, direct or indirectly, deals of subjects linked to the Science history, particularly of Mathematic, and are reputed as magnificent, mainly by the less of technology resources that we have nowadays — resources which, in that age, was scarce, rudimental and, so many times, not even exist. Complete this study also some activities that can incite the students, showing, by an experience form, the theorems and calculus application, using few technology.

Key words: History of the Mathematic; technology assistance; basic education; practice activities.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muitas vezes, quando ouvimos falar de História, as únicas coisas que vem à nossa cabeça são datas importantes e personagens famosos. Por vezes são deixados de lado os motivos que levaram as datas a se tornarem importantes e os personagens famosos. Com a História da Matemática não é diferente. Muitas vezes ouvimos falar de um personagem e um problema resolvido por ele, mas não sabemos o que levou ele a ter conseguido resolver ou o motivo de tal problema existir. Isso pode ser um equívoco, pois, como veremos nesse trabalho, a construção histórica de determinado conhecimento pode ser de grande incentivo para estudarmos muitas coisas que hoje possuem uma visão pronta e acabada, mas que nem sempre foram assim.

Esse trabalho é fruto de uma revisão bibliográfica de alguns artigos, livros, dissertações e teses que, direta ou indiretamente, tratam de assuntos relacionados à história da Ciência, em particular da Matemática, e que são considerados grandiosos, principalmente pela falta de recursos tecnológicos que dispomos hoje em dia, mas que na época eram escassos, rudimentares e, na maioria das vezes, nem existiam.

No primeiro capítulo, veremos que já há bastante tempo existiam autores que defendiam argumentos favoráveis ao uso da História da Matemática, por acreditarem que a construção Histórica do conhecimento matemático poderia facilitar o entendimento. Veremos que atualmente existem muitos autores que a defendem no ensino básico, em particular o professor Ubiratan D’Ambrosio, um grande defensor da História da Matemática como recurso pedagógico. Veremos também a visão de outros autores.

Do segundo ao oitavo capítulo, veremos sete personagens importantes para a história das ciências, em particular da Matemática. Começaremos por Tales de Mileto, passaremos por Aristarco de Samos, Arquimedes de Siracusa, Eratóstenes, Hiparco de Nicélia, Ptolomeu e, no oitavo capítulo, Hipátia de Alexandria — a primeira mulher a receber o título de matemática. Com esta última podemos incentivar mulheres a seguirem carreira nas ciências exatas.

Em cada capítulo veremos os principais feitos de cada personagem, assim como sua importância para o desenvolvimento da Matemática. No nono capítulo, veremos algumas sugestões de atividades. No entanto, devido às medidas impostas pela COVID-19, não foi possível testarmos em campo com os alunos do ensino básico, mas ficarão como sugestões.

1 HISTÓRIA NAS AULAS DE MATEMÁTICA: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A atual situação do ensino básico no Brasil, principalmente de Matemática, não é muito animadora, como foi constatado no último PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), realizado em 2018, que trouxe à tona o triste fato de que 68,1% dos estudantes brasileiros com 15 anos de idade não sabem o mínimo necessário de Matemática para o exercício da cidadania. Comparado com os países sul-americanos, o Brasil divide a última posição com a Argentina, abaixo de Uruguai, Chile, Peru e Colômbia.

Tal situação nos faz refletir um pouco sobre as possíveis causas de tal problema. Não é difícil notar que alguns fatores acabam contribuindo negativamente para o ensino básico de Matemática. A Matemática ensinada em nossas escolas muitas vezes é exposta com uma visão pronta e acabada, cheia de abstração, excesso de linguagem e simbolismos, muitas vezes desnecessários.

Para Ávila (1993), o excesso de simbolismo e terminologia apenas atrapalham, e o aluno não se sente motivado por algo que não aguce a curiosidade. Sem motivação para aprender, o ensino fica comprometido, como afirma Tatto e Scapin (2004): "a motivação para aprender é um fator de grande importância. Quanto mais motivado o aluno, mais disposição terá para aprender e melhores serão seus resultados. Uma parte importante dessa motivação reside no interesse do aluno naquilo que está aprendendo" (TATTO e SCAPIN, 2004, p.6). Para GOULART et al (2018):

> Uma das principais maneiras de contribuir para que os alunos se desenvolvam é trabalhar a motivação e a autoestima, mas, acima disso, planejar aulas que realmente representem sentido na vida do educando, possibilitando a ele perceber o quanto será possível se desenvolver, ao investir em si próprio e em sua aprendizagem. (GOULART et al, 2018, p.10)

Para Pacheco e Andreis (2017):

> A motivação tem um papel importante no gostar ou não de algo, e essa motivação pode vir dos professores, da escola, da família, entre outros. Muitos podem ser os fatores que estimulam o aluno a estudar Matemática como, por exemplo, aulas com aplicações práticas ou com atividades que mobilizem para o conhecimento. (PACHECO e ANDREIS, 2017, p.108)

Com todos os problemas referentes ao ensino de Matemática, muitas pesquisas estão sendo feitas a todo momento, na busca de possíveis soluções ou agentes facilitadores que, de alguma forma, contribuam para uma melhor qualidade e melhores resultados quanto ao ensino dessa ciência.

Dentre as pesquisas, pode-se dizer que a História da Matemática tem se tornado um bom recurso para o ensino, podendo ajudar a melhorar significativamente a qualidade das aulas de Matemática; tanto que, segundo Lara (2013) e Chaquiam (2017), nas últimas décadas tem-se observado um aumento no número de pesquisas relacionadas à História da Matemática, contribuindo assim para a melhoria do ensino desta ciência. Para Lopes e Alves (2014):

> Como metodologia de ensino, acredita-se que a História da Matemática pode tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes. Afinal, ao perceber a fundamentação histórica da matemática, o professor tem em suas mãos ferramentas para mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos, fugindo das repetições mecânicas de algoritmos. O resgate da história dos saberes matemáticos ensinados no espaço escolar traz a construção de um olhar crítico sobre o assunto em questão, proporcionando reflexões acerca das relações entre a história cultural e as tecnologias.(LOPES & ALVES, 2014, p.321)

Não é de hoje que se fala em História da Matemática como auxílio para as aulas de Matemática. Podemos mencionar a tese de doutorado de Antonio Miguel, intitulada de *Três estudos sobre história e educação matemática*, que tem a relação entre a História da Matemática e a educação matemática como objeto de investigação. Seu propósito é explicitar três pontos de vista pessoais a respeito de três possíveis formas dessa relação se manifestar (Miguel, 1993). Podemos destacar o seguinte trecho sobre o primeiro estudo, na introdução de sua tese:

> O nosso esforço nesse primeiro Estudo dirige-se no sentido de resgatar a própria história dessa forma de relação, através do levantamento, detalhamento e análise dos diferentes papéis pedagógicos atribuídos à história por matemáticos, historiadores da matemática e educadores matemáticos que, de modo direto ou indireto, acabaram expressando suas posições em relação a essa questão. (MIGUEL, 1993, p.16)

Em seu artigo intitulado *As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores*, Miguel (1997) analisa alguns argumentos que tentam reforçar as potencialidades pedagógicas da História da Matemática e contrapõe com outros menos frequentes. O 2° argumento diz o seguinte: “A história constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino da matemática” (MIGUEL, 1997, p.77), no qual o autor afirma:

> Segundo os partidários desse ponto de vista, é possível buscar na história da matemática apoio para se atingir com os alunos objetivos pedagógicos que os levem a perceber, por exemplo: a) a matemática como uma criação humana; b) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; c) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; d) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc. (MIGUEL, 1997, p.77)

O 3° argumento, intitulado de “A história constitui-se numa fonte de métodos adequados de ensino da matemática” (MIGUEL, 1997, p.78), também é bastante interessante. Segundo Miguel (1997), os defensores desse argumento acham que é possível buscar amparo na história da matemática para escolhermos métodos adequados e interessantes para a abordagem de alguns temas. Dentre tais temas, o autor cita a determinação da área do círculo e construção de alguns polígonos, entre outros.

Segundo parece, esse argumento já era defendido pelo menos desde o século XVIII. Como afirma Miguel (1997):

> Uma preocupação dessa natureza já se fazia presente na obra ‘Eléments de Geometrie’ do matemático francês Alexis Claude Clairaut, publicada em 1741, com o objetivo explícito de facilitar a tarefa daqueles que deveriam iniciar-se no estudo da geometria. O próprio Clairaut tinha consciência de que essa obra constituía-se em um curso preparatório aos Elementos de Euclides. Ao constatar, na introdução dessa obra, que a causa da dificuldade enfrentada pelos principiantes no início de um curso de geometria era a forma como esta ciência era ensinada em fiel conformidade com a metodologia euclidiana, para a qual os alunos não tinham suficiente maturidade para poderem acompanhar, Clairaut propunha um outro caminho para o ensino de geometria: aquele baseado na história (CLAIRAUT, 1892). Nesse sentido, o autor acreditava que sua obra seguia, em grandes traços, um caminho semelhante àquele percorrido pela humanidade na aquisição das leis e conceitos matemáticos, isto é, semelhante à forma como o próprio Clairaut reconstituía esse caminho. (MIGUEL, 1997, p.78)

Miguel (1997) cita mais dois autores de livros de Matemática que seguem próximo a essa linha. Um deles é o matemático alemão Felix Klein, que no início do século XX assumiu tal posição, como podemos perceber no prefácio de sua obra *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, de 1908, que diz o seguinte:

> O novo volume que ofereço ao público matemático, e especialmente aos professores de matemática de nossas escolas secundárias, deve ser encarado como uma primeira continuação das leituras ‘Sobre o Ensino de Matemática nas Escolas Secundárias’, em particular de ‘A Organização da Instrução Matemática’ de Schimmack e minha... Nesta época, nossa preocupação centrava-se nos diferentes modos pelos quais o problema da instrução podia ser apresentado aos matemáticos. Nesta obra, minha preocupação é com o desenvolvimento dos conteúdos da matéria de instrução... Finalmente, em relação ao método de apresentação que s segue, será suficiente dizer que eu procurei aqui, como sempre, combinar intuição geométrica com a precisão das fórmulas aritméticas, e que deu-me um prazer especial seguir o desenvolvimento histórico de várias teorias a fim de compreender as marcantes diferenças nos métodos de apresentação quando confrontados com os demais métodos presentes na instrução atual. (MIGUEL, 1997 *apud* KLEIN, 1945, p.79)

Por fim, Miguel (1997) cita a professora italiana Emma Castelnuovo que, em sua obra *Geometria Intuitiva*, declarou ter se inspirado nos Eléments de Clairaut para propor um novo caminho no desenvolvimento do ensino de geometria na escola básica, baseada no desenvolvimento histórico de tal ciência.

Como podemos observar, a mais de um século já existiam autores que defendiam argumentos favoráveis à História da Matemática como auxílio pedagógico para o estudo de Matemática. Atualmente também existem vários autores que a defendem como auxílio para o ensino de Matemática. Dentre eles, podemos destacar o professor *Ubiratan D'Ambrosio, considerado por muitos o pai da Etnomatemática, embora o mesmo não se considere*. Para D'Ambrosio (2000):

> Ninguém contestará que o professor de matemática deve ter conhecimento de sua disciplina. Mas a transmissão desse conhecimento através do ensino depende de sua compreensão de como esse conhecimento se originou, de quais as principais motivações para o seu desenvolvimento e quais as razões de sua presença nos currículos escolares. Destacar esses fatos é um dos principais objetivos da História da Matemática. (D'AMBROSIO, 2000, p. 241)

Vimos que não basta conhecer determinado assunto, é fundamental que o professor compreenda as motivações que antecederam suas origens. Com a crescente quantidade de estudos desta área, D'Ambrosio (2000) menciona algumas finalidades da História da Matemática. Para ele:

> 1. para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução; 2. para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade; 3. para destacar que essa Matemática teve sua origem nas culturas da antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio; 4. para saber que desde então a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em conseqüência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as conseqüências sócio-culturais dessa incorporação. (D'AMBROSIO, 2000, p. 247)

D'Ambrosio (2009) diz que "[...] a história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto especifico de sua época" (D'AMBROSIO, 2009, pp. 29-30). Sobre as diversas formas de integrar a História da Matemática ao ensino básico, Gasperi e Pacheco (s.d.) afirmam:

> A história da matemática pode estar presente na sala de aula em vários contextos diferentes, pode ser apresentada de forma lúdica com problemas curiosos, "os enigmas", como fonte de pesquisa e conhecimento geral, como introdução de um conteúdo ou atividades complementares de leitura, trabalho em equipe e apresentação para o coletivo. Também pode apresentar a matemática com uma gama de possibilidades de atividades diferenciadas que vão muito além das infindáveis

> seqüências de exercícios e memorização de métodos e fórmulas. (GASPERI & PACHECO, s.d)

Criar ou sugerir atividades que possam ir além das entediantes e cansativas listas de exercícios e, se possível, algo mais interdisciplinar, fazendo com que a matemática faça mais sentido no cotidiano do aluno já é tido como obrigação. A esse respeito, D'Ambrosio (1999) diz: "Acredito que um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular na educação matemática, é desvincular a matemática de outras atividades humanas" (D'AMBROSIO, 1999, p. 97). Segundo D'Ambrosio (1999):

> As idéias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as idéias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D'AMBROSIO, 1999, p. 97)

Segundo Gasperi e Pacheco (s.d.), "Com a história da matemática, tem-se a possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada com as outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada" (GASPERI & PACHECO, s.d.).

A fim de recriar a construção histórica de determinado tema como exemplo, podemos citar Santos et al. (2012)[1] e Silva e Soltau (2014)[2], ambos reproduzem métodos próximos ao método de Eratóstenes[3] para o cálculo da circunferência da Terra. Um fato de grande importância nessa reconstrução é a interdisciplinaridade, pois podemos observar várias áreas em função de um único objetivo.

Nessa tarefa podemos destacar a História, por mostrar o contexto em que isso foi feito pela primeira vez, onde podemos entender um pouco sobre as formas de civilizações da época; a Física, por tratar de questões de ótica; a Geografia tem importância inquestionável, por tratar de questões de localização, paralelos e meridianos, que são primordiais para o experimento; e a Matemática, por precisarmos entender questões importantíssimas para esse tipo de experimento, como noções de geometria e trigonometria.

---

[1] O projeto Eratóstenes: A reprodução de um experimento histórico como recurso para a inserção de conceitos da astronomia no ensino médio.
[2] Medindo o planeta Terra: Um experimento com abordagem interdisciplinar.
[3] Ver capítulo 5 desse trabalho.

Podemos destacar nesses trabalhos[4], segundo os autores dos mesmos, a participação e empenho por partes dos alunos, além da colaboração de professores de várias disciplinas diferentes, mostrando que atividades desse tipo reconstruindo uma situação histórica podem ser muito atrativas, além de fornecerem resultados satisfatórios não apenas para a Matemática[5]. Para Fossa (2008):

> Há várias vantagens de construir as atividades de descoberta à luz da História da Matemática. Já mencionamos o fato de que, ao se engajar com problemas reais da história, o aluno se julgará como participante no desenvolvimento da matemática e, visto que os problemas abordados eram interessantes aos matemáticos do passado, muitos alunos perceberão que a matemática é um estudo vibrante. Isto certamente aumentará seu interesse nesse estudo, o que, por sua vez, melhorará seu desempenho. (FOSSA, 2008, p. 12-13)

Observamos, assim, a importância de criarmos ou buscarmos contextos significativos para a abordagem de diferentes temas, pois como diz a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), "é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da matemática" (BNCC, p. 299)[6]. É fundamental que os alunos tenham a percepção de que a Matemática vai além de encontrar o *x* de uma equação; uma vez que a Matemática está entrelaçada com diversos ramos, podemos observar que muitos matemáticos foram filósofos, geógrafos, astrônomos, físicos, entre outros, mostrando que a Matemática evoluiu da necessidade das diversas áreas do conhecimento, não apenas dela própria. Como Gaspari e Pacheco (s.d.) afirmam:

> Por meio da história da matemática, pode-se verificar que a matemática é uma construção humana, foi sendo desenvolvida ao longo do tempo e, por assim ser, permite compreender a origem das idéias que deram forma à cultura, como também observar aspectos humanos de seu desenvolvimento, enxergar os homens que criaram essas idéias e as circunstâncias em que se desenvolveram. (GASPERI & PACHECO, s.d).

Numa perspectiva semelhante, Chaquiam (2017) diz que pesquisas mostram que a inclusão de fatos do passado pode ser interessante para começar um determinado conteúdo na aula de Matemática, pois o aluno pode ver a Matemática como uma criação humana que surgiu a partir da necessidade de resolver problemas do cotidiano. Também pode enxergar as

---

[4] Sugiro fortemente que leiam esses trabalhos, pois ambos são riquíssimos e mostram também como escolas distantes umas das outras e até de países diferentes podem trabalhar em conjunto em prol de uma melhor educação.

[5] Observamos que, apesar de serem trabalhos voltados para outros ramos, sem a Matemática seriam impossíveis de terem acontecido concretamente.

[6] Cumpre lembrar aqui que a História da Matemática se confunde em vários momentos com a História de diversas outras áreas, como por exemplo, a História da Geografia e da Ciência em geral.

preocupações que cada povo tinha e comparar conceitos matemáticos antigos com novos. Pode-se mostrar, através da história, que essa visão acabada que a matemática possui nem sempre foi assim. Ela passou por muitas etapas ao longo dos séculos e foi evoluindo gradativamente, de acordo com a necessidade de cada época. D'Ambrosio (2000) também menciona que:

> A História da Matemática no ensino deve ser encarada sobretudo pelo seu valor de motivação para a Matemática. Deve-se dar curiosidades, coisas interessantes e que poderão motivar alguns alunos. Outros alunos não se interessarão. Mas isso é natural. Alguns gostam de esporte, outros não gostam. Alguns gostam de música, outros não gostam. Alguns gostam de camarão, outros não gostam. Com Matemática não é diferente. (D'AMBROSIO 2000, p. 253)

Fossa (2008) também enfatiza que a história da matemática motivará alguns alunos, mas não todos, e complementa dizendo que ela não resolve todas as nossas enfermidades pedagógicas; por outro lado, deve-se esperar que ela resolva ao menos uma parcela delas. O fato de alguns alunos não se sentirem motivados pela História da Matemática pode ser encarado de forma natural, pois, se o aluno não gosta de História, dificilmente ele irá gostar de história da matemática que também é História.

Concordo com D'Ambrosio (2000) quando o mesmo diz que não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir a História da Matemática em suas aulas.

> Se em algum tema o professor tem uma informação ou sabe de uma curiosidade histórica, deve compartilhar com os alunos. Se sobre outro tema ele não tem o que falar, não importa. Não é necessário desenvolver um currículo, linear e organizado, de História da Matemática. Basta colocar aqui e ali algumas reflexões. Isto pode gerar muito interesse nas aulas de Matemática. E isso pode ser feito sem que o professor tenha se especializado em História da Matemática. (D'AMBROSIO 2000, p. 255)

Lara (2013) diz que o professor, ao optar pela História da Matemática, pode seguir por alguns caminhos, entre eles:

> Propor ao estudante que pesquise sobre a constituição histórica de determinado conceito ou modelo; abordar determinado conceito ou modelo a partir da perspectiva de uma determinada civilização; ter em vista que o estudante investigue sobre os conhecimentos matemáticos gerados por uma determinada civilização. (LARA 2013, p. 6)

Segundo Lara (2013), nos três casos, o estudante irá se deparar com questões sociais, culturais, políticas e econômicas relacionadas às civilizações estudadas, "[...] sugerindo um caráter holístico e uma postura transdisciplinar à pesquisa, possibilitando o trabalho integrado entre professores de diferentes disciplinas" (LARA, 2013, p. 6).

Segundo Oliveira et al. (2014):

> O professor poderá revelar, em sala de aula, a Matemática como uma criação do homem, levando, assim, seus alunos a encará-la como fruto da necessidade da humanidade. Dessa forma, o conteúdo estudado quando vinculado à sua história pode despertar seus alunos que podem deixar de encarar a matemática como difícil e inútil nas suas vidas. (OLIVEIRA et al., 2014, p.461)

Por fim, é importante ressaltar que a História da Matemática pode e deve ser usada como mais um recurso para as aulas de Matemática, bem como pode ser usada em conjunto com outros recursos. Como foi citado anteriormente, é natural que ela não motive todos os alunos, porém é natural que o mesmo se aplique a todos os outros recursos. Portanto, o professor deve estar sempre antenado a outras questões, aumentando assim todas as suas possibilidades.

Algumas coleções de livros de Matemática do ensino médio possuem alguns trechos com informações e curiosidades históricas, como, por exemplo, a 9ª edição da coleção de Fundamentos de Matemática Elementar, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami. A mesma possui algumas leituras bem interessantes, como podemos observar na próxima figura. Mesmo não sendo muitas, já ajudam ao professor que queira trazer alguma informação importante sobre temas trabalhados por ele.

Figura 1 – Leitura

Hiparco, Ptolomeu e a Trigonometria

Hygino H. Domingues

A trigonometria, como a conhecemos hoje, na sua forma analítica, remonta ao século XVII. Seu florescimento dependia de um simbolismo algébrico satisfatório, o que não existia antes dessa época. Mas, considerando o termo **trigonometria** no seu sentido literal (medida do triângulo), a origem do assunto pode ser situada já no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo.

O papiro Rhind, importante documento sobre a matemática egípcia (aproximadamente 1700 a.C.), menciona por quatro vezes o *seqt* de um ângulo, em conexão com problemas métricos sobre pirâmides. O *seqt* do ângulo $O\hat{M}V$ na figura abaixo é a razão entre OM e OV e, portanto, corresponde à ideia atual de cotangente. As pirâmides egípcias eram construídas de maneira a que a inclinação de uma face sobre a base (medida de $O\hat{M}V$) fosse constante — aproximadamente 52°.

Fonte: Iezzi e Murakami, 9ª edição, vol.3

Todos os livros dessa coleção possuem leituras sobre fatos históricos como a anterior, algumas mais antigas, outras menos, relacionadas à temática principal de cada volume. A 2ª edição, de 2013, da coleção *Matemática Paiva* de livros didáticos, de Manoel Paiva, também trás alguns fatos históricos que podem ser usados por professores para a introdução de determinados temas. O professor pode também sugerir que, através da leitura desses trechos, os alunos façam pesquisas em outras bibliografias, na internet ou em revistas, para que constatem acontecimentos que levaram à criação e evolução da Matemática.

2 TALES DE MILETO

Nascido em Mileto, deve ter vivido no período de 624 a 548 a.C (aproximadamente). Tales era homem de negócios, matemático, filósofo e astrônomo. Dentre muitos dos seus feitos, ele uniu os estudos da astronomia ao da geometria e da teoria dos números, fundando, assim, a escola Jônica.

Considerado o primeiro filósofo conhecido, sendo um dos sete sábios da antiguidade. Segundo Pessanha (1996), alguns historiadores consideram que esta última se deve, principalmente, à sua atuação política, por ele ter tentado unir as cidades-estados localizadas na Ásia menor em uma confederação, com o objetivo de fortalecer o mundo helênico, protegendo-o, assim, das ameaças provindas de povos orientais.

Por ter sido comerciante, Tales viajou muito, conhecendo vários lugares. Dentre eles, o Egito e a Mesopotâmia merecem um destaque especial, pois é provável que tenha sido nestes grandes centros onde ele tomou posse do conhecimento matemático que já existia e era de conhecimento de muitos que ali viviam.

Segundo Pessanha (1996), a importância de Tales para a filosofia advém, principalmente, do fato dele afirmar que a água era a origem de todas as coisas. Ele ousou inovar, indo contra muitas crenças existentes, em uma época onde era comum se referir a forças mitológicas, bem como a deuses para tentar explicar uma série de eventos que ocorriam de forma natural em seu tempo. Tales tentou explicar de forma racional, dando início ao uso da ciência.

Segundo Eves (2011), é possível que, ao prever uma abundante safra de olivas, Tales tenha obtido o monopólio de todas as prensas de azeite da região e acabou alugando todas em um momento muito oportuno, fazendo assim uma boa fortuna. Boyer (2012) diz que ele é saudado como o primeiro matemático verdadeiro. Este último se deve por ele ter estudado a geometria de forma dedutiva, apesar de não se conhecer nenhuma obra escrita por ele. A reconstituição de boa parte de seu pensamento, bem como de alguns fatos biográficos sobre sua vida, provém de referências de outros autores, especialmente da Grécia antiga.

Tales ficou bastante conhecido após ter previsto um eclipse solar, em 28 de maio de 585 a.C — fato contestado por muitos historiadores, visto que, durante o período em questão, não se tinha conhecimento necessário para a previsão de certos eventos. Todavia, estudos mostram que de fato ocorreu um eclipse no ano em questão, mas acredita-se que, se ele o previu, não passou de um ato de pura sorte. Mas, segundo Boyer (2012), ele provavelmente teria estudado tabelas e instrumentos astronômicos.

Sabemos da existência de uma série de resultados elementares de geometria que, apesar de não serem devidos a Tales e alguns já serem conhecidos a pelo menos dois séculos antes dele, é provável que tais resultados sejam atribuídos a ele, justamente pelo fato dele ter os obtido mediante raciocínios lógicos e não intuitiva ou experimentalmente, pela simples necessidade em alguma atividade real, dado que muitos resultados conhecidos em sua época foram obtidos mediante problemas práticos. Abaixo estão listados alguns resultados que, segundo Eves (2011) e Boyer (2012), em geral são atribuídos a Tales.

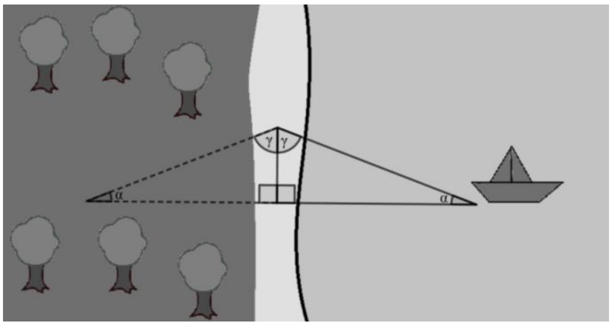
1. Os ângulos da base de quaisquer triângulos isósceles são iguais.
2. Todos os ângulos opostos pelos vértices são iguais.
3. Um ângulo inscrito em um semicírculo é reto.
4. Se dois triângulos possuem dois ângulos e um lado em cada um deles, respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.
5. Um círculo é bissectado por um diâmetro.

2.1 Distância de um navio até a margem

Diz-se que Tales calculou a distância de um navio até a margem, mas não se sabe ao certo como ele procedeu. Alguns sugerem que ele subiu em cima de um penhasco e apontou uma vareta para o navio; ao alinhar ela com o navio, o mesmo a girou horizontalmente em direção à margem, obtendo assim um ponto qualquer sobre a margem, de forma que a distância do ponto ao penhasco era a mesma do penhasco ao navio.

Uma versão parecida com a anterior diz que Tales colocou uma vara na posição horizontal, sobre a ponta de um pequeno penhasco, de forma que sua extremidade coincidisse com a imagem do navio; conhecendo a altura do observador, o comprimento da vara e a altura do penhasco, ele calculou a distância ao navio. Outras versões afirmam que ele usou a quarta proposição, citada anteriormente, para resolver tal problema (Figura 2), pois, segundo Proclus, Tales conhecia um teorema sobre congruência de triângulos que poderia ser usado para calcular a distância de barcos no mar (ROQUE, 2012).

Figura 2 – Distância de um navio à margem por congruência de triângulos



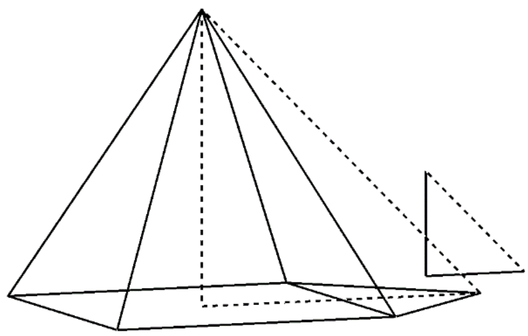
Fonte: Autoria Própria

2.2 Altura da pirâmide de Quéops

Um marco muito importante para a história de Tales foi o fato dele possivelmente ter calculado a altura de uma pirâmide de *Quéops.* Segundo Eves (2011), para isso admite-se que ele tenha usado ao menos duas estratégias próximas ou parecidas com as que mencionaremos a seguir.

A primeira sugere que ele tenha enfincado uma estaca no chão e tenha esperado o sol estar em uma posição onde as alturas dos objetos possuem o mesmo comprimento de suas sombras (Figura 3). Nesse momento, ele pediu que calculassem rapidamente o tamanho da sombra da pirâmide, obtendo assim o tamanho de sua altura.

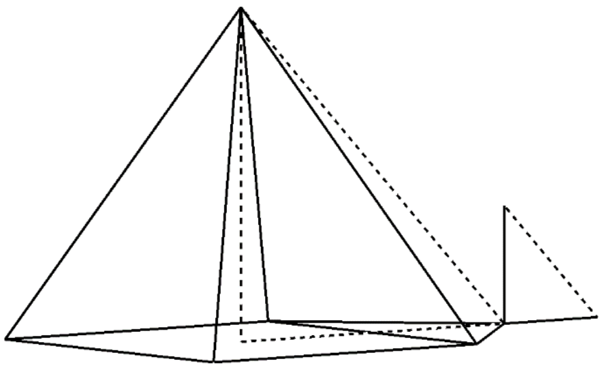
Figura 3 – Medição quando o comprimento da sombra é igual à altura do objeto



Fonte: Autoria própria

A segunda diz que Tales fincou uma estaca perpendicularmente no extremo da sombra projetada pela pirâmide. Desta forma, as projeções das sombras pela pirâmide e estaca lhe dariam dois triângulos semelhantes. Como ele poderia obter de forma fácil o tamanho da base do triângulo provido da pirâmide e sabia o tamanho dos lados do triângulo provido pela estaca, ele — usando uma simples proporção, teria obtido o tamanho da altura da pirâmide.

Figura 4 – Esquema para medição por semelhança de triângulos em perspectiva 3D



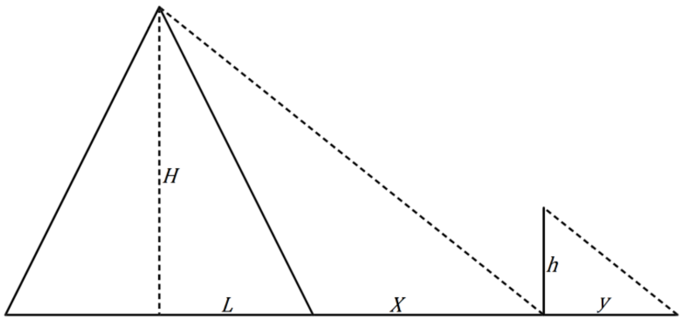
Fonte: Autoria própria

Para obter a altura H da pirâmide, consideremos a figura 5, seja X a distância do lado da pirâmide até o pé da estaca, $2L$ o lado do quadrado base da pirâmide, considere ainda h e y como sendo altura e sombra da estaca respectivamente. Por semelhança de triângulos, é fácil concluir que:

$$\frac{H}{L+X} = \frac{h}{y} \Longrightarrow H = \frac{h}{y}(L+X) \tag{2.1}$$

Portanto para determinar a altura da pirâmide, basta conhecer a altura e a sombra da estaca assim como os valores de L e X, ambos faceis de encontrar fazendo simples medições.

Figura 5 – Esquema para medição da pirâmide em perspectiva 2D

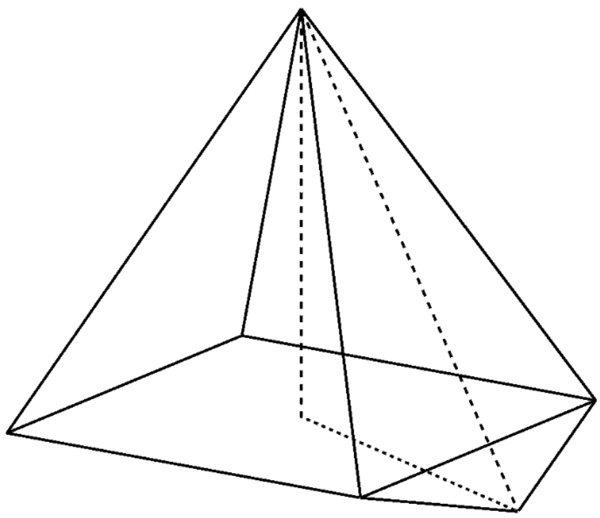


Fonte: Autoria própria

Sabe-se que existem muitas lacunas a respeito da vida e obra deste importante personagem, não podendo garantir a verassidade de muitos dos fatos que o tem como pernonagem central. Para o cálculo da altura da pirâmide não é diferente; mostramos duas maneiras que ele pode ter usado em sua execução. Porém, assim como sua previsão do eclipse solar, este também é bem contestado.

Uma explicação para o então fracasso de Tales, no cálculo da altura da pirâmide, alega que a posição dela em relação ao sol tenha causado tal impossibilidade. Segundo Fontana (2011), as condições para o uso dos métodos anteriores são consideradas ideais para a solução desse problema e ocorrem pouquissimas vezes ao ano, Tales teria que passar quase um ano em tese para conseguir resolver, o que é pouco provável que tenha ocorrido. A figura 6 ilustra um caso geral do problema.

Figura 6 – Possível problema encontrado para o cálculo da altura da pirâmide de *Quéops*



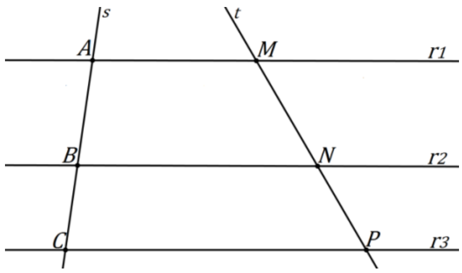
Fonte: Autoria própria

2.3 O Teorema de Tales

Este é um dos teoremas centrais da geometria plana e o resultado mais famoso devido a Tales. Acredito que foi devido a este que a maioria de nós ouviu falar o nome "Tales de Mileto" pela primeira vez. Este teorema deve ter surgido de problemas práticos como, por exemplo, o cálculo da altura da pirâmide falado anteriormente. O mesmo pode ser empregado em diversas situações práticas do cotidiano. "Ele tem um papel fundamental na teoria da semelhança e conseqüentemente na trigonometria onde justifica as definições de seno, co-seno e tangente de um ângulo" (BONGIOVANNI, 2007, p. 94). Em geral o Teorema de Tales é enunciado da seguinte forma:

Teorema de Tales: Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre as medidas de dois segmentos de reta quaisquer de uma delas é igual à razão entre as medidas dos segmentos de reta correspondentes da outra.

Figura 7 – Teorema de Tales



Fonte: Autoria própria

Observando a figura 7, onde r_1, r_2 e r_3 são paralelas, s e t transversais, então o Teorema de Tales nos diz que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} \qquad (2.2)$$

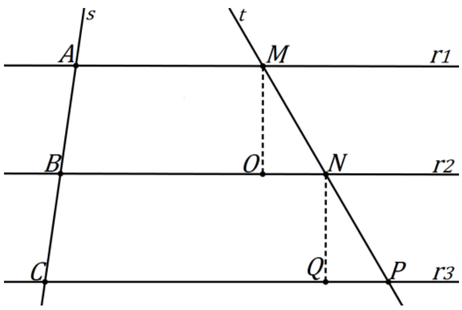
Demonstraremos o Teorema de Tales em duas partes. A primeira quando os segmentos são comensuráveis[7], e a segunda quando são incomensuráveis, para tanto, necessitamos do seguinte teorema:

[7] Considere dois segmentos de medidas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, dizemos que estes são comensuráveis quando existe um terceiro segmento de medida $\overline{CD}$ que cabe uma quantidade m de vezes em $\overline{AB}$ e uma quantidade de vezes n em $\overline{BC}$, onde m e n são inteiros quaisquer. Quando isso não ocorre, dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis.

Teorema 2: Se um feixe de retas paralelas determina sobre uma transversal segmentos iguais, determinará sobre qualquer outra transversal segmentos iguais. Isto é, se $\overline{AB} = \overline{BC},$ então $\overline{MN} = \overline{NP}$.

Demonstração: Para provar esse teorema considere a figura 8, onde $r1, r2$ e $r3$ são paralelas e as retas s e t são duas transversais quaisquer. Trace por M um segmento paralelo a AB, esse vai tocar BN no ponto O. Observe que $AMOB$ é um paralelogramo, pois AM é paralelo a BQ e AB é paralelo a MO, portanto $\overline{AB} = \overline{MO}$. Da mesma forma prova-se que $\overline{BC} = \overline{NQ}$, e consequentemente, $\overline{MO} = \overline{NQ}$. Podemos afirmar então que os ângulos $\angle OMN = \angle QNP$ e $\angle MON = \angle NQP$. Como $\overline{MO} = \overline{NQ}$ concluímos que os triângulos MNO e NPQ são congruentes pelo caso ALA, portanto $\overline{MN} = \overline{NP}$.

Figura 8 – Teorema 2



Fonte: Autoria própria

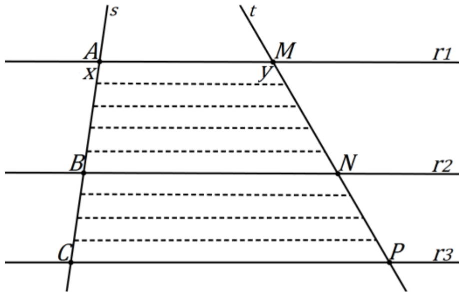
Para provar o teorema de Tales[8], suponhamos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ comensuráveis, logo existe uma grandeza x que cabe m vezes em $\overline{AB}$ e n vezes em $\overline{BC}$, portanto temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n} \tag{2.3}$$

Tracemos agora retas paralelas por todas as extremidades dos segmentos de tamanho x, observe a figura 9.

[8] Essa é uma demonstração possível para o ensino básico, para tal nos inspiramos em Douce e Pompeo (2013).

Figura 9 – Prova do Teorema de Tales para segmentos comensuráveis



Fonte: Autoria própria

Como as retas paralelas dividem os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ em m e n segmentos de tamanho x respectivamente, então pelo *teorema 2*, essas paralelas dividem $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ em m e n segmentos de tamanho y, respectivamente, portanto:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} = \frac{my}{ny} = \frac{m}{n} \tag{2.4}$$

Considere agora que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ sejam incomensuráveis e seja um segmento x que caiba um número natural n de vezes em $\overline{BC}$, portando $\overline{BC} = xn$. Suponhamos agora que x esteja contido entre m e $m + 1$ vezes em $\overline{AB}$ (Figura 10), logo:

$$mx < \overline{AB} < (m + 1)x \tag{2.5}$$

Dividindo (2.5) por $\overline{BC} = xn$, temos que:

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{m + 1}{n} \tag{2.6}$$

Trace agora segmentos de reta paralelos a AM passando por todos os pontos extremos dos segmentos de medidas x (Figura 10), raciocinando como no caso para os comensuráveis, temos que:

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} < \frac{m + 1}{n} \tag{2.7}$$

Perceba agora que podemos escrever (2.7) da seguinte forma:

$$-\frac{m+1}{n} < -\frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} < -\frac{m}{n} \quad (2.8)$$

Somando (2.6) com (2.8), obtemos:

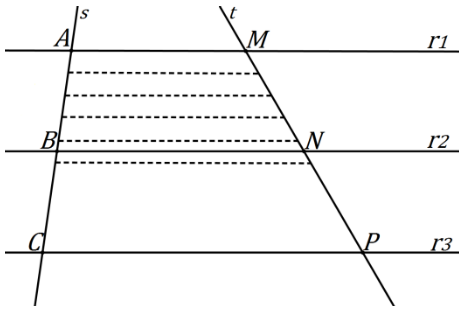
$$-\frac{1}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} - \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} < \frac{1}{n} \quad (2.9)$$

Observe que fazendo x ficar tão pequeno quanto queiramos, n crescerá indefinidamente. Concluímos então que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} \quad (2.10)$$

Dessa forma, fica provado o teorema para segmentos comensuráveis e incomensuráveis.

Figura 10 – Prova do Teorema de Tales para segmentos incomensuráveis

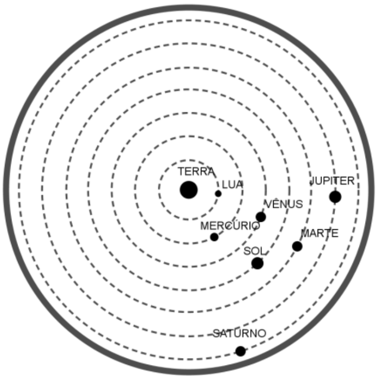


Fonte: Autoria própria

3 ARISTARCO DE SAMOS

Aristarco de Samos (310 a.C a 230 a.C), segundo Boyer (2012), foi um dos primeiros estudiosos que, dois mil anos antes de Copérnico — segundo Arquimedes e Plutarco — defendeu que o Sol era o centro do universo (Heliocentrismo). Esta tese ia de encontro à toda a crença aristótelica, que era unânime na sociedade da época e defendia que a Terra era o centro do universo (Geocentrismo). Este último, apesar de estranho, era o mais racional, visto que o que viam, na época, era o sol nascer e se pôr. Acreditavam firmemente que a Lua e as estrelas possuiam trajetórias fixas em torno da Terra.

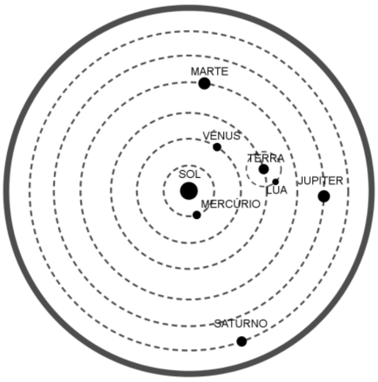
Figura 11 – Sistema Geocêntrico Aristotélico



Fonte: Autoria própria

Aristarco defendeu o movimento de rotação (movimento realizado pelo planeta Terra, em torno do próprio eixo, no sentido de oeste para leste e que determina a sucessão dos dias e noites) e o movimento de translação (movimento descrito pelos planetas em torno do Sol). Sobre este último, ele acreditava que os planetas tinham rotas circulares em torno do Sol. No entanto, hoje sabemos que as trajetórias dos planetas em torno do Sol descrevem elipses, onde o Sol está aproximadamente sobre um dos focos.

Figura 12 – Sistema Heliocêntrico de Aristarco



Fonte: Autoria própria

3.1 Distância da Terra ao Sol

Tudo o que Aristarco escreveu sobre o sistema heliocêntrico se perdeu, o que existe dele é um tratado que data de aproximadamente 260 a.C e que trata dos tamanhos e das distâncias do Sol e da Lua. Todavia, é algo que pode nos parecer um pouco estranho, pois, segundo Boyer (2012), em tal trabalho é feito o uso do sistema geocêntrico (Figura 11) para estimar o tamanho de tais distâncias.

Para tanto, Aristarco observou as fases lunares. Duas em particular eram mais peculiares: o quarto crescente e o quarto minguante. Quando a Lua se encontra em tais posições, não é muito difícil para um observador da Terra perceber que o triângulo formado pelo Sol, pela Terra e a metade visível da Lua é reto, no vértice em que a Lua se encontra. Ele calculou que o ângulo α media aproximadamente 87° e, com isto, o ângulo β media 3° aproximadamente. Veja que $\frac{DTL[9]}{DTS[10]} = sen\,\beta$. Porém, segundo Boyer (2012), como tabelas trigonométricas não existiam no tempo de Aristarco, ele usou um teorema conhecido na época e que agora equivale as seguintes desigualdades:

$$\frac{sen\,a}{sen\,b} < \frac{a}{b} < \frac{tan\,a}{tan\,b} \text{ onde}, 0° < a < b < 90° \tag{3.1}$$

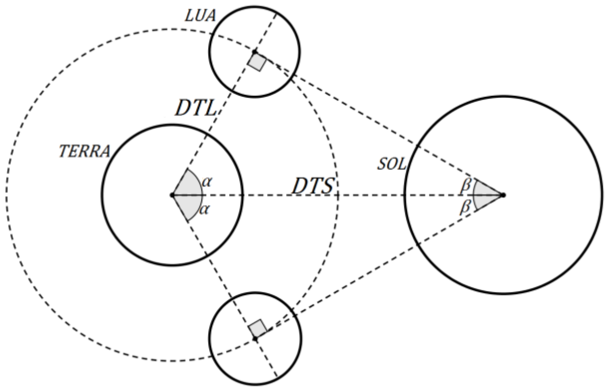
Ele então concluiu que:

$$\frac{1}{20} < sen\,3° < \frac{1}{18} \tag{3.2}$$

Aristarco concluiu então que a distância da Terra ao Sol (DTS) era aproximadamente dezenove vezes a distância entre a Terra e a Lua (DTL), isto é:

$$DTS \cong 19DTL \tag{3.3}$$

Figura 13 – Representação do Sol, Terra e Lua durante o quarto crescente/minguante



Fonte: Autoria própria

Analisaremos agora o problema de encontrar o ângulo α onde nos inspiraremos em Ávila (1982). Para tal, volte à Figura 13. Para obter o ângulo 2α é provável que Aristarco tenha estudado o tempo de um ciclo lunar, isto é, o tempo necessário para a Lua dar uma volta completa sobre a órbita terrestre, que é de 29,5 dias. Além disso, ele determinou o tempo

[9] Distância da Terra a Lua.
[10] Distância da Terra ao Sol.

gasto pela Lua para sair do estágio de quarto minguante para quarto crescente e encontrou 14,25 dias como tempo que a Lua leva para percorrer toda essa trajetória. Com esses dados, monta-se a seguinte proporção:

$$\frac{360}{29,5} = \frac{2\alpha}{14,25} \tag{3.4}$$

E facilmente obtemos $\alpha \cong 87°$. A conclusão é que:

$$\frac{DTS}{DTL} \cong sec\,87° \Rightarrow DTS \cong 19DTL \tag{3.5}$$

Ou seja, a distância entre a Terra e o Sol é aproximadamente 19 vezes a distância entre a Terra e a Lua.

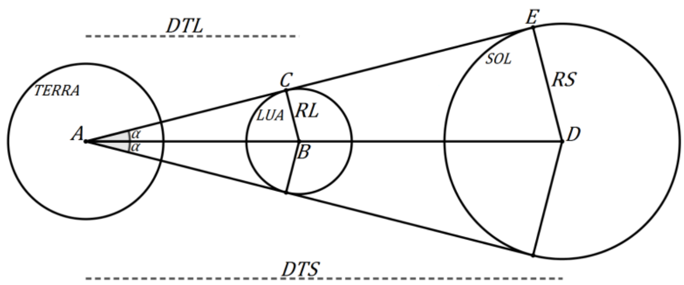
Sabemos, no entanto, que o valor de α é aproximadamente 89,86°. Com isto, temos que a razão $\frac{DTS}{DTL} = sec\,89{,}86° \cong 409$, isto é, $DTS \cong 409DTL$ que é bem próximo do que conhecemos. O erro cometido por Aristarco não está relacionado à matemática, pois esta estava correta; o grande problema foi na tentativa de estimar o valor do ângulo α, este que era quase um ângulo reto e, consequentemente, o ângulo β do vértice onde se encontra o Sol era quase 0, visto que α e β são complementares.

É provável que a órbita peculiar da Lua, bem como a diferença de tempo, observado por Aristarco, para a Lua dar uma volta completa na Terra e o tempo gasto por ela para sair de quarto minguante para quarto crescente tenham causado tal erro (ÁVILA, 1982). Vale salientar também que, apesar de ser relativamente fácil de perceber o momento em que a Lua se encontra em quarto crescente/minguante, não é fácil medir o tempo exato que isto ocorre, para assim conseguir uma melhor aproximação.

3.2 Raio do Sol em função do raio da Lua

Segundo Ávila (1982) e Boyer (2012), durante um eclipse total do Sol, Aristarco percebeu que, vistos da Terra, o Sol e a Lua possuem aproximadamente a mesma distância angular, isto é, os raios de visão do Sol e da Lua são praticamente os mesmos vistos do planeta Terra. Tendo isto em mente, durante o mesmo eclipse, observe que temos dois triângulos semelhantes (Figura 14). Aristarco calculou que o ângulo $2\alpha \cong 2$.

Figura 14 – Eclipse total do Sol



Fonte: Autoria própria

Observemos que, pela semelhança dos triângulos ABC e ADE, concluímos que:

$$\frac{RS}{DTS} = \frac{RL}{DTL} \tag{3.6}$$

Mas usando (3.3) ou (3.5) podemos escrever:

$$\frac{RS}{19DTL} = \frac{RL}{DTL} \Rightarrow RS = 19RL \tag{3.7}$$

Para referências futuras, notemos que:

$$\frac{RS}{DTS} = \frac{RL}{DTL} = tan\,\alpha = a \tag{3.8}$$

Notemos também que:

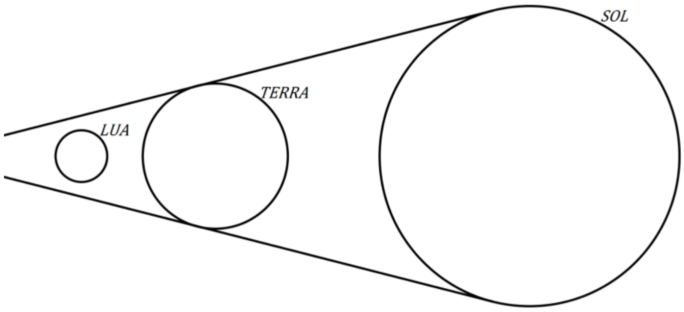
$$\frac{DTS}{DTL} = b \tag{3.9}$$

Para Aristarco, $\alpha \cong 1°$ e $b \cong 19$. Todavia, sabemos hoje que os valores aproximados para α é $0{,}25°$ e para b temos 400. Vale ressaltar também que estamos admitindo que RS e RL são os raios do Sol e da Lua, bem como DTS e DTL são as distâncias entre a Terra e o Sol e a Terra e a Lua, respectivamente.

3.3 Tamanhos e distâncias em função do raio da Terra.

Durante um eclipse lunar, Aristarco observou o tempo que é gasto pela Lua para atravessar o cone de sombra causado pela Terra em sua altura. Segundo Ávila (1982), ao fazer isto, ele deduziu que o diâmetro do cone na altura da Lua era equivalente a $8/3$ do diâmetro da mesma.

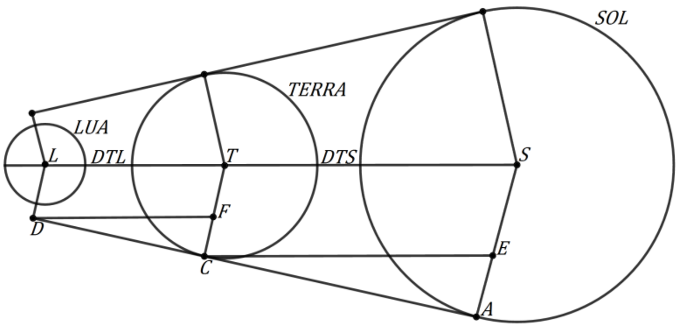
Figura 15 – Cone de sombra na altura a Lua



Fonte: autoria própria

Para relacionar as distâncias e os tamanhos do Sol a Lua e o raio da Terra, Aristarco fez o que podemos observar na figura 16:

Figura 16 – Esquema com o Sol, a Terra e a Lua alinhados



Fonte: Autoria própria

Pela figura, vemos que $STCE$ e $TLDF$ são paralelogramos. Além disso, como anteriormente, vamos admitir que RS, RT e RL são os raios do Sol, da Terra e da Lua, respectivamente. Ainda como antes, DTS e DTL representam as distâncias entre a Terra e o Sol e a Terra e a Lua. Como o diâmetro do cone de sombra na altura da Lua mede $8/3$ do diâmetro dela própria, sendo LD o raio do cone de sombra, temos que LD mede $8/3$ de RL.

Observe que os triângulos ACE e CDF são semelhantes. Portanto, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{CF}{DF} = \frac{AE}{CE} \tag{3.10}$$

Mas:

$$CF = TC - TF = RT - LD = RT - \frac{8RL}{3} \; e \; DF = DTL \tag{3.11}$$

Além disso:

$$AE = AS - ES = RS - TC = RS - RT \; e \; CE = DTS \tag{3.12}$$

Por (3.10), obtemos:

$$\frac{RT - \frac{8RL}{3}}{DTL} = \frac{RS - RT}{DTS} \tag{3.13}$$

Usando (3.8) e (3.9), temos o seguinte:

$$DTS = bDTL, e \; RS = aDTS = abDTL \; e \; RL = aDTL \tag{3.14}$$

Substituindo (3.14) em (3.13), temos que:

$$\frac{RT - \frac{8aDTL}{3}}{DTL} = \frac{abDTL - RT}{bDTL} \tag{3.15}$$

A partir daí, usando (3.15), fica fácil de concluir as seguintes igualdades:

$$\begin{gathered} DTL = \frac{3(b+1)}{11ab} RT \\ DTS = \frac{3(b+1)}{11a} RT \\ RS = \frac{3(b+1)}{11} RT \\ RL = \frac{3(b+1)}{11b} RT \end{gathered} \tag{3.16}$$

A partir de tais igualdades, podemos então encontrar as distâncias[11] entre a Terra e a Lua, a Terra e o Sol e os raios do Sol e da Lua, em função do raio da Terra, precisando apenas dos valores já encontrados para a e para b. Admitindo $\alpha \cong 1°$, então $a \cong tan\, 1°$ e assumiremos $b \cong 19$. Observe a Figura 17, onde fazemos uma comparação entre esses valores e $\alpha \cong 0{,}25°$ e $b \cong 400$ que são valores próximos aos valores reais:

[11] Segundo Ávila (1982), os cálculos que acabamos de reproduzir se encontram num tratado de Aristarco intitulado de *Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua*. Esta é a única obra de Aristarco que chegou até nós. “Dela existe uma primorosa edição comentada, com uma história da Astronomia Grega até os tempos de Aristarco, devida ao eminente historiador da ciência, Thomas Heath” (ÁVILA, 1982, p.44).

Figura 17 – Distâncias em função do raio da Terra, segundo Aristarco e dados atuais

DADOS DE ARISTARCO	DADOS REAIS
$DTS \cong 312,49RT$	$DTS \cong 25064,14RT$
$DTL \cong 16,44RT$	$DTL \cong 62,66RT$
$RS \cong 5,45RT$	$RS \cong 109,363RT$
$RL \cong 0,28RT$	$RL \cong 0,27RT$

Fonte: Autoria própria

Ressaltamos que, para os dados próximos aos reais, utilizamos $\alpha \cong 0,25°$ o que implica $tan\, 0,25° \cong 0,0043$ aproximadamente.

4 ARQUIMEDES DE SIRACUSA

Visto por muitos como um dos maiores matemáticos de todos os tempos, sendo, sem dúvidas, o maior da antiguidade — mais especificamente durante o período pós-euclidiano. Arquimedes nasceu na cidade grega de Siracusa, localizada em uma ilha na Sicília, por volta de 287a.C. Filho de um astrônomo, ele era dono de muito prestígio do rei Hierão. Muitos acreditam, inclusive, que ambos eram parentes.

Ao mudar-se para o Egito, é provável que Arquimedes tenha estudado em Alexandria, onde fez amizade com Cônon, Dositheus e Eratóstenes, tendo se comunicado muito com os mesmos a respeito de seus trabalhos. Segundo Roque (2012), seus trabalhos possuíam uma característica muito distinta das que caracterizavam os elementos de Euclides, tanto que, em seus resultados, não eram usados instrumentos euclidianos, mesmo que uma construção com régua e compasso fosse viável. Segundo Roque (2012), em uma carta escrita a Dositheus, Arquimedes fala que pretende comunicar um teorema geométrico que ele tinha investigado e descoberto por meio da mecânica, e que apenas depois fez o uso da geometria. Isso era comum para Arquimedes. Aliás, muitos dos resultados obtidos por ele foram investigados antes por meios mecânicos; apenas depois ele dava provas geométricas de seus resultados, como descrito acima.

Umas das histórias de maior fama sobre a vida de Arquimedes diz respeito sobre como ele acabou descobrindo a segunda lei da hidrostática. Diz-se que, ao desconfiar da quantidade de ouro utilizada para fazer uma coroa, o rei Hierão, com a sensação de que sua coroa não fosse totalmente de ouro, recorreu a Arquimedes, uma vez que o rei não queria desfazer a coroa para tirar a prova de sua suspeita. Arquimedes então, durante um banho público, descobriu como o fazer sem precisar derreter a coroa. Fala-se que, ao se dar conta de como resolver tal problema e em um momento de euforia, Arquimedes saiu da água sem ao menos vestir-se e saiu gritando, dizendo que tinha conseguido resolver tal problema.

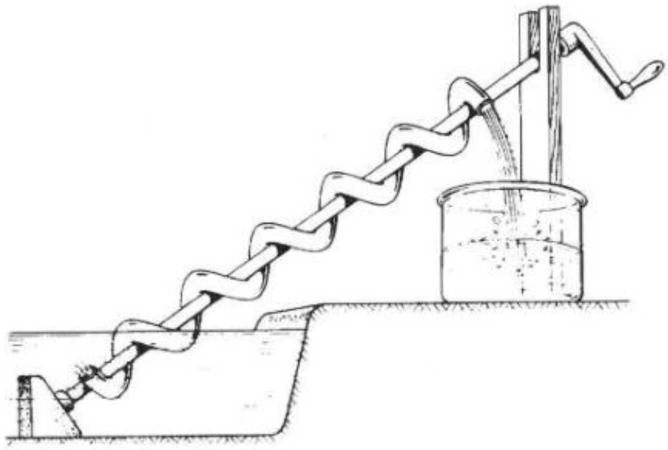
Resumindo, ele descobriu o que hoje conhecemos por *Princípio de Arquimedes*. Essa proposição afirma que todo corpo, completamente ou apenas parcialmente imerso em um fluído em equilíbrio, sofre a ação de uma força vertical para cima, aplicada pelo fluido — onde a denominamos de empuxo — e a mesma tem intensidade equivalente ao peso do fluido deslocado pelo corpo.

Sem dúvidas, ele era diferenciado. Estava muito além do seu tempo, tendo escrito muitas obras sobre física, matemática, astronomia e engenharia. Descobriu uma relação entre um cilindro circular reto e uma esfera; além disso, usou o método da exaustão de Eudoxo para calcular a área sobre um arco de parábola. Tal método é considerado um gérmen do cálculo integral. Apesar de muito do seu trabalho ter se perdido no grande incêndio da Biblioteca de Alexandria, algumas obras dele chegaram até nós. Comentaremos um pouco sobre elas mais adiante.

Arquimedes também era um grande inventor, tendo inventado uma bomba d’água em parafuso, para captação de água (Figura 18), e que é usada até hoje, no Egito. Além disso, muitas de suas invenções impediram a tomada de Siracusa pelos romanos durante quase três anos, o que acabou acontecendo durante uma festa, onde todos estavam distraídos.

Segundo Eves (2011), Arquimedes criou catapultas móveis, que poderiam ser ajustadas para arremessar pesos e atingir alvos inimigos em diferentes distâncias. Ainda segundo o mesmo, existe a história de como ele fez para justificar a afirmação “*Dê-me uma alavanca que moverei a Terra”,* tendo movido sozinho, sem grande esforço, apenas com um sistema de polias compostas, um navio carregado e muito pesado e que seria impossível de ser retirado do cais sem a ajuda de muitos homens.

Figura 18 – Bomba parafuso de Arquimedes



Fonte: Eves (2011, p. 197)

Por suas invenções de guerra, Arquimedes ganhou muito respeito do general Marcelo. Este zelava por Arquimedes, dando ordens para que não fizessem nada de mal contra ele. Porém, quando concentrado em seus raciocínios, observando um diagrama na areia, ordenou que um soldado romano se afastasse; irritado, o soldado atravessou o corpo dele com uma lança, causando-lhe sua morte. O general Marcelo ficou bastante aborrecido. Por seu apreço, tratou de realizar um desejo que Arquimedes tinha, de ter um cilindro circular reto com uma esfera inscrita nele, cravados em sua sepultura.

Em 75a.C, Cícero — que era questor de Roma em Siracusa, indagou a respeito do túmulo de Arquimedes. Os siracusanos nada sabiam sobre, então ele mesmo tratou de verificar todas as sepulturas do cemitério, até que encontrou um túmulo que tinha um cilindro reto, com uma esfera inscrita: era o túmulo procurado. Ele então ordenou que alguns homens tomassem de conta do local, para evitar mais descaso com tal personalidade. Não se sabe até quando o túmulo ficou sobe vigilância, porém o mesmo desapareceu outra vez e, somente em 1965, durante uma escavação, encontrou-se o que se alega ser o túmulo há tanto tempo perdido.

4.1 Obras preservadas

Segundo Eves (2011, p.194), "os trabalhos de Arquimedes são obras primas de reprodução matemática e lembram artigos e revistas modernas, além de possuírem grande originalidade, habilidade computacional e rigor em suas demonstrações". Seus escritos possuem uma linguagem muito acabada e objetiva, onde cerca de 10 tratados foram preservados e chegaram até os dias atuais. Listaremos alguns dos tratados que foram preservados e trataremos um pouco sobre cada um deles.

- Sobre o equilíbrio dos planos
- Sobre corpos flutuantes
- Medida do círculo
- Sobre a esfera e o cilindro
- Sobre conóides e esferóides
- Sobre espirais
- A quadratura da parábola
- O contador de areia
- O método

4.1.1 Sobre o equilíbrio dos planos

A partir de Assis (1997) e Assis e Campos (2004), vemos que este trabalho é composto por dois livros, sendo 25 proposições ao todo. No primeiro livro são enunciadas e provadas 15 proposições, voltadas para figuras planas, como trapézios, paralelogramos e triângulos, entre outras. Em particular, apresenta-se a proposição 10, na qual o centro de gravidade de um paralelogramo se encontra sobre a interseção das suas duas diagonais, dando também uma prova alternativa sobre tal resultado. Para uma prova alternativa da proposição 10 segundo raciocínio de Arquimedes, necessitamos do postulado a seguir:

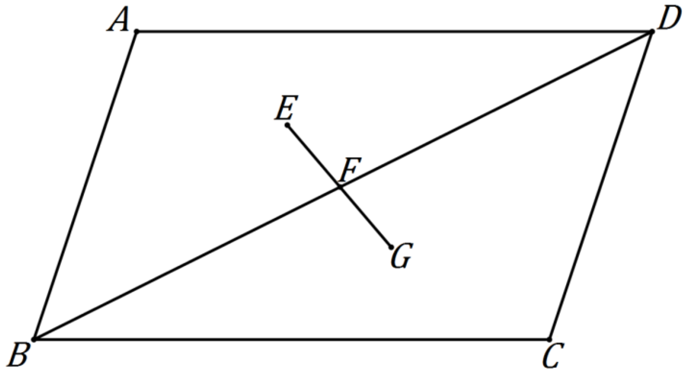
Postulado[12]*1*: Quando figuras planas iguais e similares coincidem quando aplicadas uma sobre a outra, seus centros de gravidade vão coincidir similarmente.

De posse do *postulado 1*, considere o paralelogramo $ABCD$ (Figura 19) como a junção dos triângulos ABD e BCD; suponhamos que o centro de gravidade do triângulo ABD seja o ponto E, sendo F o ponto médio de BD trace EG de modo que F também seja ponto médio de EG, aplique o triângulo ABD sobre o triângulo BCD de forma que AD incida em BC e AB incida em CD, portanto E vai incidir em G; pelo *postulado 1* G será o centro de gravidade do

[12] Na verdade, esse é o postulado 4 do primeiro livro.

triângulo BCD. Como E e G são centros de gravidade de triângulos iguais, temos que o centro de gravidade do paralelogramo $ABCD$ vai estar no ponto médio de EG, isto é, em F.

Figura 19 – Centro de gravidade do paralelogramo *ABCD*



Fonte: Autoria própria

Arquimedes também enuncia e demostra a famosa lei da alavanca nas proposições 6 e 7 deste livro; para grandezas comensuráveis e incomensuráveis respectivamente (Enunciaremos a Lei da Alavanca mais adiante para nos auxiliar na obtenção de alguns resultados devidos a Arquimedes). Vale ressaltar que a Lei da Alavanca já era conhecida pelos Aristotélicos antes da formulação de Arquimedes, mas não se sabe quem a formulou inicialmente.

O segundo livro abrange as 10 proposições restantes, sendo exclusivamente sobre segmentos parabólicos e regiões que são limitadas por segmentos de parábolas e uma corda, dando vários resultados importantes sobre centros de gravidade de segmentos parabólicos, onde para tal ele usou resultados obtidos no trabalho sobre *a quadratura da parábola* que foi escrito antes.

Em particular, na quarta proposição deste trabalho, ele prova que o centro de gravidade de um segmento parabólico encontra-se sobre seu diâmetro; na oitava proposição do mesmo, ele prova que se AB é o diâmetro de um segmento parabólico e G é seu centro de gravidade, então $AG = 3/2$ de GB.

4.1.2 Sobre corpos flutuantes

Em Assis (1996) e Assis e Campos (2012), vemos que tal tratado também é composto por dois livros, onde, segundo Eves (2011) é feita a primeira aplicação da matemática à hidrostática. Nele, Arquimedes estabelece princípios básicos sobre hidrostática, tendo como um dos principais resultados *o Princípio de Arquimedes*. Nesse trabalho também foi calculada a posição de equilíbrio de segmentos parabólicos. São respondidas questões a respeitos do que faz um barco flutuar, explicando, assim, o fato de cascos de navios possuírem formatos de segmentos de parábolas; tenta responder também à questão sobre a porcentagem dos cascos que ficavam acima da água, enquanto flutuavam.

4.1.3 Medida do círculo

Desde os tempos de Eudoxo e Euclides, já eram conhecidos alguns resultados sobre o círculo. Já se sabia, por exemplo, o seguinte resultado: “Os círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros” (EUCLIDES, 2009, p. 528). Matematicamente significa o seguinte: dados dois círculos quaisquer de áreas $A1$ e $A2$, com diâmetros $D1$ e $D2$, temos:

$$\frac{A1}{A2} = \left(\frac{D1}{D2}\right)^2 \tag{4.1}$$

Este resultado aparece como sendo o segundo teorema do livro XII dos Elementos de Euclides. Em seu trabalho, Arquimedes, ao inscrever e circunscrever hexágonos a uma circunferência e dobrando sucessivamente o número de lados até obter polígonos com 96 lados, conseguiu uma excelente aproximação para o valor de π. Mais precisamente, obteve o seguinte resultado:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70} \tag{4.2}$$

Que é uma excelente aproximação para o valor de π. Para obter essa aproximação, Arquimedes começou analisando o que acontece com um polígono circunscrito a uma circunferência unitária, observe a figura 20.

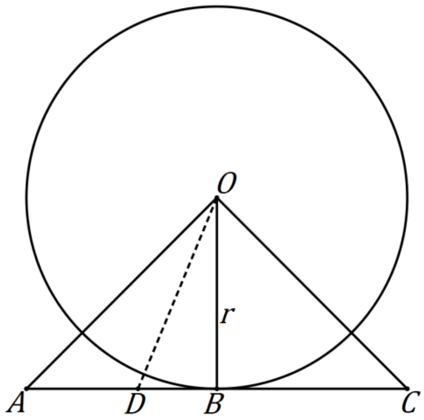
Seja $AC = l_n$ o lado de um polígono regular de n lados, circunscrito a uma circunferência de raio r, e consideremos B como sendo o ponto médio de AC; seja OD a bissetriz relativa ao ângulo $\angle AOB$, temos que OD toca AC em D de forma que $DB = \frac{l_{2n}}{2}$ é o lado de um polígono regular de $2n$ lados. Como OD é bissetriz, pelo teorema da bissetriz interna, temos que:

$$\frac{AD}{AO} = \frac{DB}{BO} \Longrightarrow \frac{AD + BD}{AO + BO} = \frac{BD}{BO} \qquad (4.3)$$

Como $BO = r$, $DB = \frac{l_{2n}}{2}$ e $AB = \frac{l_n}{2}$; também é fácil ver que $AO = \sqrt{r^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$ e $AD + BD = \frac{l_n}{2}$, segue então que:

$$\frac{\frac{l_n}{2}}{r + \sqrt{r^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{l_{2n}}{2}}{r} \Rightarrow l_{2n} = \frac{l_n}{r + \sqrt{r^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}} \cdot r \qquad (4.4)$$

Figura 20 – Modelo para encontrar o lado de um polígono circunscrito de $2n$ lados



Fonte: Autoria própria

Para ver o que acontece com um polígono inscrito a uma circunferência, considere a figura 21. Nela temos um hexágono regular inscrito a uma circunferência, mas considere AC como sendo o lado de um polígono regular inscrito a uma circunferência; observe pela figura que $BA = R$ é o raio do círculo, $BE = X$ e $ED = R - X$; Observemos também que $AE = \frac{l_n}{2}$ e $AD = l_{2n}$ onde l_n e l_{2n} são os lados de polígonos regulares de n e $2n$ lados respectivamente.

Observe que:

$$(R - X)^2 = (l_{2n})^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \qquad (4.5)$$

Note também que:

$$\left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = R^2 - X^2 \tag{4.6}$$

Combinando (4.5) e (4.6), obtemos o seguinte:

$$(R - X)^2 = (l_{2n})^2 + X^2 - R^2 \Rightarrow (l_{2n})^2 = 2R^2 - 2RX \tag{4.7}$$

Veja agora que:

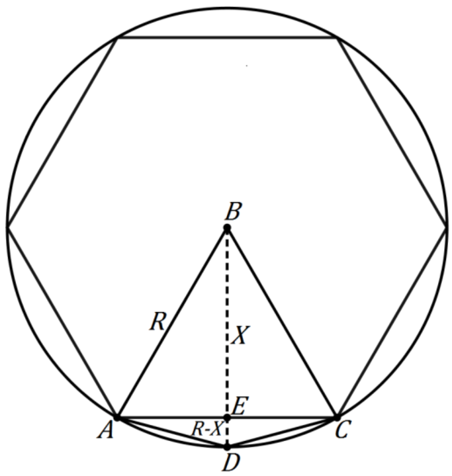
$$X^2 = R^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \Rightarrow X = \frac{\sqrt{4R^2 - (l_n)^2}}{2} \tag{4.8}$$

Agora de (4.7) com (4.8) temos:

$$(l_{2n})^2 = 2R^2 - 2R \cdot \frac{\sqrt{4R^2 - l_n}}{2} \Longrightarrow l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R \cdot \sqrt{4R^2 - (l_n)^2}} \tag{4.9}$$

De posse dessas fórmulas, podemos aproximar π por valores tão próximos quanto queiramos; bastando apenas uma simples calculadora científica. Como no tempo de Arquimedes não existiam calculadoras, ele aproximava essas raízes por frações racionais.

Figura 21 – Modelo para calcular o lado de um polígono regular inscrito de *2n* lados

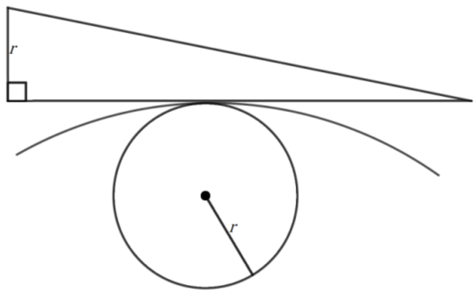


Fonte: Autoria própria

Nesse trabalho, Arquimedes também prova que, a área de qualquer círculo é igual à área de um triangulo retângulo, no qual um dos lados ao redor do ângulo reto é igual ao raio e o outro lado tem medida igual à medida da circunferência. Sendo $c = 2\pi r$ um dos catetos e r o outro cateto do triângulo, obtemos a fórmula moderna para a área do círculo:

$$A = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2 \tag{4.10}$$

Figura 22 – Triângulo retângulo e círculo de mesma área



Fonte: Autoria própria

4.1.4 Sobre a esfera e o cilindro

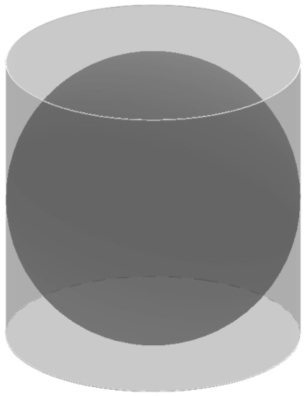
Dentre todos seus trabalhos, *sobre a esfera e o cilindro* era causador de muito orgulho em Arquimedes, em comparação aos seus outros trabalhos. Tanto que segundo Boyer (2012) era desejo dele que, ao morrer, tivesse cravado em seu túmulo uma esfera inscrita em um cilindro circular reto — desejo atendido por Marcelo, já mencionado anteriormente. No tempo de Arquimedes, já eram conhecidos alguns resultados a respeito de esferas. Tanto é que a proposição 18 do livro XII de Euclides (2009, p.561) afirma que, "as esferas estão entre si em uma razão tripla da dos próprios diâmetros", ou seja, dadas duas esferas A e B de volumes X e Y, respectivamente, então a seguinte igualdade verifica, onde $D1$ e $D2$ são os diâmetros e $R1$ e $R2$ são os raios de A e B, respectivamente.

$$\frac{X}{Y} = \left(\frac{D1}{D2}\right)^3 = \left(\frac{R1}{R2}\right)^3 \tag{4.11}$$

Arquimedes deu novas contribuições. Em um tratado composto por dois livros, contendo mais de cinquenta proposições, ele prova vários resultados (EVES, 2011). No primeiro livro, como principais resultados, ele prova que a superfície de qualquer esfera é quatro vezes a de seu círculo máximo; prova que o volume de qualquer esfera é igual a quatro vezes o volume do cone que tem sua base igual ao círculo máximo da esfera e altura igual ao raio da esfera; prova ainda que todo cilindro, cuja base é o círculo máximo de uma esfera e cuja altura é igual ao diâmetro da esfera, tem volume igual à $3/2$ do volume da esfera e sua superfície, juntamente com suas bases, têm $3/2$ da superfície da esfera (Figura 23).

No segundo livro, o principal resultado mostra que, ao cortar uma esfera com um plano, os volumes dos segmentos que são resultados desse corte possuem, em particular, uma razão pré-determinada (EVES, 2011).

Figura 23 – Cilindro equilátero com uma esfera inscrita



Fonte: Autoria própria

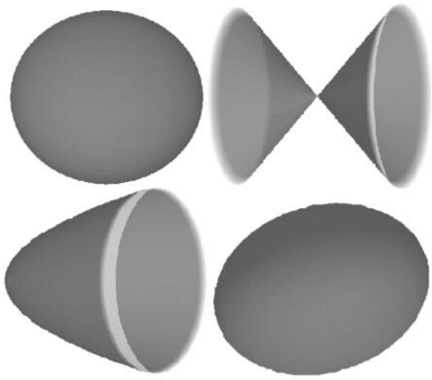
4.1.5 Sobre conóides e esferoides

Este trabalho trata sobre elipsóides, parabolóides e hiperbolóides de revolução, tendo como objetivo investigar acerca das áreas e volumes das mesmas. Tais objetos são formados pela rotação de cônicas em torno dos próprios eixos, formando assim conóides ou esferóides.

Os conóides podem ser resultantes de dois objetos: um pela revolução de uma parábola e o outro pela revolução de uma hipérbole, ambos em torno de seus eixos. Já os esferóides são obtidos pela rotação de uma elipse em torno de seus eixos, tanto o maior quanto o menor deles.

Tal tratado é composto por mais de 30 proposições (EVES, 2011), sendo que as mais importantes aparecem a partir da vigésima. Nas proposições 21 e 22, por exemplo, Arquimedes prova que o volume de um parabolóide de revolução vale $3/2$ do volume de um cone que tem a mesma base e mesma altura do paraboloide. Ele também obteve resultados análogos para hiperbolóides e elipsóides de revolução, possuindo estes uma complexidade bem maior.

Figura 24 – Conóides e esferóides de revolução

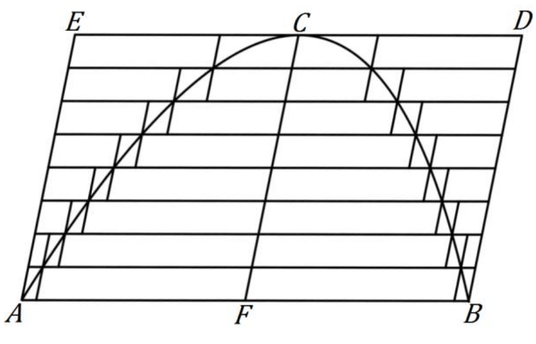


Fonte: Autoria própria

O processo utilizado por Arquimedes para a determinação de tais áreas e volumes nos remete muito ao cálculo integral, ao dividir continuamente um sólido em partes iguais por planos paralelos. Por motivos assim, ele é considerado por muitos como o precursor do cálculo infinitesimal.

Vejamos como que era o raciocínio de Arquimedes, para tal nos inspiraremos em Boyer (2012). Considere o paraboloide ABC, (Figura 25), de eixo FC; considere também o cilindro $ABDE$ circunscrito a ABC, também com eixo FC; divida FC em uma quantidade n de partes iguais, e pelos extremos dessas divisões trace $(n-1)$ planos paralelos a base. Nas divisões dos planos paralelos com o paraboloide, trace os troncos de cilindros, circunscritos e inscritos. Observe que para n grande, a soma dos volumes dos troncos cilíndricos inscritos e circunscritos, converge para o volume do parabolóide. Se n vai para infinito, teríamos a igualdade dos volumes, ou seja, a diferença desse método para o de integração moderno difere essencialmente na falta de conceito de limite.

Figura 25 – Cilindros inscritos e circunscritos a um paraboloide em perspectiva 2D

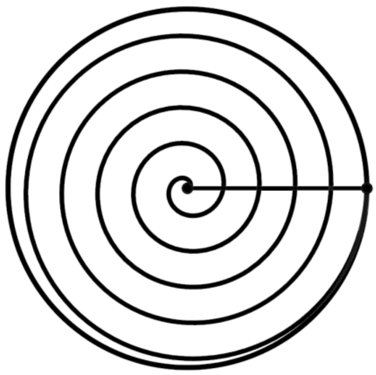


Fonte: Autoria própria

4.1.6 Sobre espirais

O tratado *sobre espirais* é considerado um dos trabalhos mais difíceis de Arquimedes, por este motivo é um dos menos estudados (BOYER, 2012). Encontramos nele 28 proposições que estabelecem as principais propriedades das espirais. Neste trabalho, Arquimedes define espiral como sendo o lugar geométrico dos pontos que se movem com velocidade constante em uma semirreta que gira em torno de uma de suas extremidades com velocidade angular também constante. Em termos de coordenadas polares (r, θ), podemos definir a curva a qual chamaremos de *Espiral de Arquimedes* como $r(\theta) = \alpha\theta$, onde α é uma constante positiva.

Figura 26 – Espiral de Arquimedes

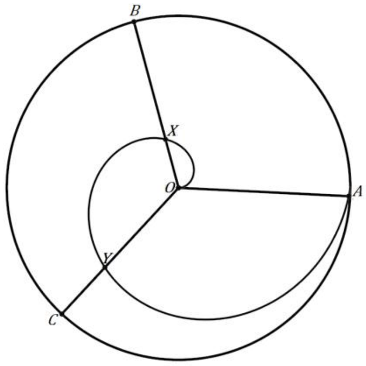


Fonte: Autoria própria

Em algumas proposições deste trabalho, Arquimedes usou a construção *neusis* ou *intercalação* que, segundo Roque (2012, p.126), "é uma técnica de construção que não pode ser classificada como construção com régua e compasso, uma vez que emprega uma régua graduada", portanto uma construção fora dos padrões euclidianos.

Novamente segundo Roque (2012), a principal propriedade da espiral de Arquimedes reside no fato de estabelecer uma razão entre arcos de circunferências e segmentos de reta. Isto é importante, pelo fato de que em algumas construções como, por exemplo, o problema da trissecção do ângulo, se reduz a dividir um segmento de reta em três partes iguais. No entanto, podemos ir além, sendo possível dividir um ângulo em qualquer quantidade. Para visualizarmos melhor esta propriedade, consideremos a Figura 27, nela temos uma espiral de Arquimedes com extremos O e A e seu circulo correspondente de raio AO, e sejam B e C prolongamentos de OX e OY respectivamente.

Figura 27 – Razão entre arco e segmento de reta pela espiral de Arquimedes



Fonte: Autoria própria

Pela propriedade mencionada anteriormente, temos que o segmento OX está para o segmento OY assim como o arco AB está para o arco AC, em sentido anti-horário, isto é:

$$OX : OY :: AB : AC \tag{4.12}$$

4.1.6.1 Trissecção do ângulo usando a espiral de Arquimedes

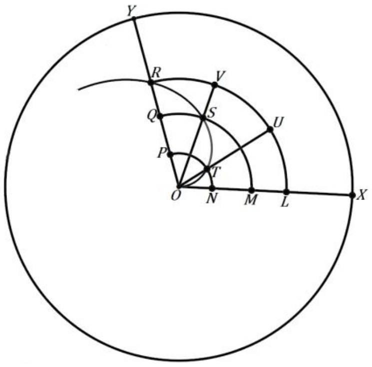
O problema da trissecção do ângulo é um dos três problemas clássicos da antiguidade e consiste em dividir um ângulo qualquer em três ângulos congruentes, utilizando apenas régua não graduada e compasso. Ele difere dos outros dois problemas clássicos (quadratura do círculo e duplicação do cubo) pelo fato de podermos trissectar alguns ângulos com instrumentos euclidianos. E, de fato, se quisermos, como exemplo, trissectar um ângulo de 90° basta construirmos um triângulo equilátero, sendo que os outros dois problemas não possuem soluções particulares.

Para trissectar um ângulo usando a espiral de Arquimedes, considere a circunferência e o ângulo formado pelos raios OX e OY (Figura 28) e trace a espiral; ela vai cortar o raio OY em R; trace o arco de circunferência de raio OR até tocar o raio OX no ponto L; agora divida o segmento OR em três partes iguais e, nas divisões, marque os pontos P e Q; trace então arcos de circunferências de raios OP e OQ até N e M, respectivamente; eles irão intersectar os pontos T e S com a espiral; trace então dois segmentos de reta partindo de O e passando por T e S, até tocar U e V no arco RL. Temos então que cada um dos ângulos LOU, UOV e VOR medem $1/3$ do ângulo LOR. Assim a trissecção está concluída.

Aqui fizemos o caso para divisão de um ângulo em três partes iguais. Mas vale ressaltar que, com a espiral de Arquimedes, podemos dividir um ângulo em n partes iguais, bastando o simples trabalho de dividirmos um segmento de reta em n partes iguais.

Para provar o resultado da trissecção, note que, pela propriedade mencionada anteriormente, temos que $OT : OR :: LU : LR$[13]; porém é fácil ver que $OP = OT$ e, portanto, $OP : OR :: LU : LR$. Como $OP = 1/3$ de OR, concluímos que $1 : 3 :: LU : LR$. Analogamente pela mesma propriedade, temos que $OS : OR :: LV : LR$, mas é fácil ver que $OS = OQ$ e, portanto, $OS : OR :: LV : LR$. Como $OS = 2/3$ de OR, concluímos que $2 : 3 :: LV : LR$. O último segue como implicação destes dois[14]. Observe a Figura 28.

Figura 28 – Trissecção do ângulo usando a espiral de Arquimedes



Fonte: Autoria própria

4.1.6.2 Construção de um quadrado com mesma área de um círculo dado

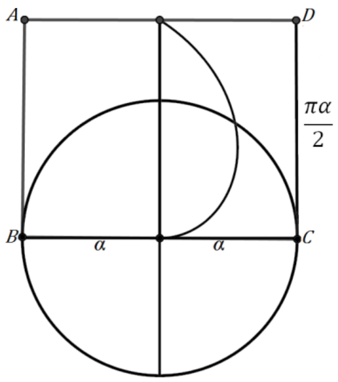
Outro problema clássico da antiguidade consiste em construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado, usando régua não graduada e compasso em um número finito de etapas. Mas em 1882, Ferdinand von Lindemann provou que π é um número transcendente (HEFEZ & VILLELA, 2012). Isto é, π não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais ou inteiros. Como consequência disso, temos a impossibilidade de exprimir π com um número finito de inteiros; portanto, é impossível construir um quadrado com mesma área de um círculo dado usando apenas régua não graduada e compasso.

[13] Dados os números a, b, c e d. se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, escrevemos também $a : b :: c : d$, e lê-se: a está para b assim como c está para d.

[14] cf. Roque (2012, p.165), para uma demonstração mais detalhada.

Apesar da impossibilidade da construção de um quadrado com mesma área de um círculo dado com instrumentos euclidianos, podemos usar a espiral de Arquimedes para este fim[15]. E mesmo que não seja uma construção euclidiana, é uma construção muito elegante. Para tal, considere um círculo de raio α centrado na origem e a espiral de equação $r = \alpha\theta$. Dessa forma, a espiral corta o eixo das ordenadas em $\alpha\pi/2$. Veja que assim conseguiremos um retângulo $ABCD$, de lados medindo $\alpha\pi/2$ e 2α e com $\pi\alpha^2$ de área.

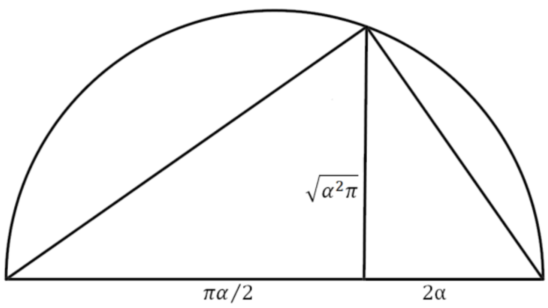
Figura 29 – Retângulo *ABCD* de área $\pi\alpha^2$



Fonte: Autoria própria

Observe que agora é fácil de construirmos o quadrado com a área desejada. Para isto, basta sabermos construir um de seus lados. Para fazermos esta construção, estabeleça um segmento de tal forma que seu tamanho seja a soma de dois lados diferentes do retângulo que obtivemos; marque o ponto médio e construa um semicírculo; sobre o ponto que divide o segmento construído, em segmentos de tamanhos $\alpha\pi/2$ e 2α, trace uma perpendicular até tocar no semicírculo; pelas relações do triângulo retângulo, esta perpendicular mede $\sqrt{\alpha^2\pi}$, ou seja, o lado do quadrado procurado (Figura 30).

Figura 30 – Construção do segmento de medida $\sqrt{\alpha^2\pi}$



Fonte: Autoria Própria

[15] Para ver com mais detalhes sugerimos Pedroso e Precioso (2015).

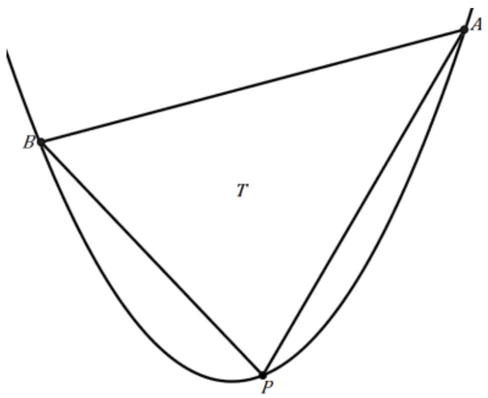
4.1.7 A quadratura da parábola

O trabalho sobre *a quadratura da parábola* é composto por 24 proposições, onde, em uma das principais proposições desse trabalho, Arquimedes prova que a área delimitada por um segmento parabólico e um segmento de reta é $4/3$ da área de um triângulo que tem esse segmento de reta como base e o vértice sobre um ponto P da parábola, de tal forma que a tangente à parábola em P é paralela à base do triângulo.

Arquimedes dá duas provas deste resultado; uma que aparece na proposição 17 (BOYER, 2012), na qual ele dá uma demonstração mecânica fazendo o uso de uma alavanca e uma demonstração geométrica, que aparece na proposição 24 deste trabalho. No momento, vamos focar em uma visão mais geométrica do problema. Para dar uma prova da proposição 24 da quadratura da parábola, Arquimedes recorre a algumas proposições que, segundo Roque e Carvalho (2012), Arquimedes já as supunha conhecidas.

O raciocínio de Arquimedes para solucionar este problema é próximo ao usado no da quadratura do círculo, com a diferença que, na quadradura da parábola, ele inscreve apenas triângulos. Para uma primeira aproximação seguindo o raciocínio de Arquimedes, considere um segmento de parábola e o triângulo APB (Figura 31), onde P é o ponto da parábola em que a tangente a ela é paralela ao segmento AB.

Figura 31 – Primeira aproximação da área da parábola, segundo Arquimedes

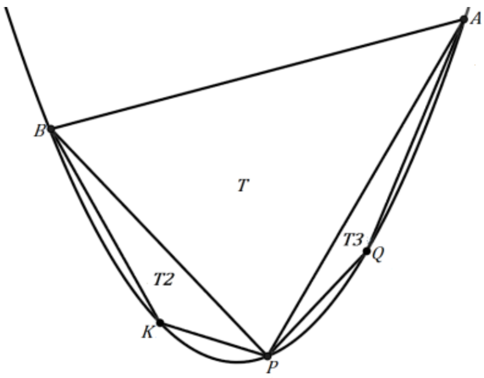


Fonte: Autoria própria

Dessa forma, a área T do triângulo APB é uma primeira aproximação para a área delimitada pelo segmento parabólico e o segmento de reta por AB. Seguindo o pensamento de Arquimedes, marcamos os pontos K e Q sobre os segmentos de parábolas que são limitados por BP e AP, respectivamente, de forma que a tangente à parábola em K seja paralela a BP e a tangente em Q seja paralela a AP (Figura 32).

Na proposição 21, é provado que a área do triângulo BKP é igual à área do triângulo AQP, que é igual a $1/8$ da área do triângulo APB; portanto, a soma de suas áreas valem $1/4$ da área do triângulo ABP.

Figura 32 – Segunda aproximação da parábola limitada pelo segmento AB



Fonte: Autoria própria

Continuando com o raciocínio empregado na proposição 21, e sejam $T4$, $T5$, $T6$ e $T7$ as áreas dos novos triângulos, temos que a soma dessas áreas serão $1/4$ de $T2$ e de $T3$, respectivamente. Como:

$$T2 + T3 = \frac{1}{4}T \tag{4.13}$$

E:

$$\begin{aligned} T4 + T5 &= \frac{1}{4}T2 \\ T6 + T7 &= \frac{1}{4}T3 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Obtemos que:

$$T4 + T5 + T6 + T7 = \frac{1}{4}(T2 + T2) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}T\right) = \frac{1}{4^2}T \tag{4.15}$$

Seguindo essa ideia, obtemos na *n-ésima* iteração que a área do segmento parabólico para n suficientemente grande é dada por:

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \cdots + \frac{T}{4^{n-1}} = A \tag{4.16}$$

onde A é a área da parábola limitada pelo segmento AB. Arquimedes deduziu que para n grande a área seria totalmente exaurida. Isto causa certo desconforto em alguns historiadores da matemática, pois a noção de infinito não era vista com bons olhos. Para vencer esta barreira, Arquimedes usou a proposição 23 e uma dupla redução ao absurdo, provando que a área da parábola não poderia ser maior nem menor que $4/3$ do triângulo APB.

Para uma melhor compreensão, analisaremos a proposição 23, que diz que se tivermos uma sucessão finita de áreas $A, B, C, \cdots, Z$, onde A é a maior de todas e cada uma das outras é quatro vezes a sua sucessora, então:

$$A + B + C + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A \tag{4.17}$$

Para demonstrar essa proposição, nos apoiaremos em Roque e Carvalho (2012, p. 113). Primeiramente, considere:

$$b = \frac{1}{3}B, c = \frac{1}{3}C, \cdots, z = \frac{1}{3}Z \tag{4.18}$$

Observe que:

$$B + b = \frac{1}{3}A, C + c = \frac{1}{3}B, \cdots \tag{4.19}$$

Concluímos então que:

$$B + C + \cdots + Z + b + c + \cdots z = \frac{1}{3}(A + B + \cdots + Y) \tag{4.20}$$

Por outro lado temos que:

$$b + c + \cdots + y = \frac{1}{3}(B + C + \cdots + Y) \tag{4.21}$$

Fazendo a diferença $\big((4.20) - (4.21)\big)$ teremos:

$$B + C + \cdots + Z + z = \frac{1}{3}A \tag{4.22}$$

Somando A e ambos os lados, então:

$$A + B + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A \tag{4.23}$$

Ou ainda:

$$T+\frac{T}{4}+\frac{T}{4^2}+\cdots\frac{T}{4^{n-1}}+\frac{1}{3}\frac{T}{4^{n-1}}=\frac{4}{3}T \tag{4.24}$$

De posse desses resultados, podemos provar, seguindo o raciocínio de Arquimedes, que a área do segmento de parábola é $4/3$ da área do triângulo ABP; sendo T a área do triângulo ABP e S a área da parábola, provaremos que $S=\frac{4}{3}T$, usando uma dupla redução ao absurdo.

Suponhamos $S>\frac{4}{3}T$. Seguindo o raciocínio de Arquimedes, vão existir n triângulos tais que sua soma é menor que S e maior que $\frac{4}{3}T$, isto é:

$$\frac{4}{3}T<T+\frac{T}{4}+\frac{T}{4^2}+\frac{T}{4^3}+\cdots+\frac{T}{4^{n-1}}=A<S \tag{4.25}$$

Pela proposição 23, temos que:

$$T+\frac{T}{4}+\frac{T}{4^2}+\cdots+\frac{T}{4^{n-1}}+\frac{1}{3}\frac{T}{4^{n-1}}=\frac{4}{3}T \tag{4.26}$$

O que implica que:

$$A+\frac{1}{3}\frac{T}{4^{n-1}}=\frac{4}{3}T\ e\ A<\frac{4}{3}T \tag{4.27}$$

Mas por (4.25) isso é uma contradição. Portanto, S não pode ser maior que $4/3$ de T.

Para provar que S não pode ser menor que 4/3 de T, vamos enunciar a proposição que segue.

Proposição de Exaustão: Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.

Suponhamos agora $S<\frac{4}{3}T$. Novamente seguindo o raciocínio de Arquimedes, pela proposição de exaustão, podemos escrever:

$$\frac{4}{3}T-S>T_m=\frac{T}{4^{m-1}} \tag{4.28}$$

Onde T_m é o triângulo obtido na *m-ésima* etapa. Observemos que:

$$\frac{4}{3}T - S > T_m = \frac{T}{4^{m-1}} > \frac{1}{3}\frac{T}{4^{m-1}} \tag{4.29}$$

Novamente pela proposição 23, temos:

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^{m-1}} + \frac{1}{3}\frac{T}{4^{m-1}} = \frac{4}{3}T \tag{4.30}$$

Então:

$$\frac{1}{3}\frac{T}{4^{m-1}} = \frac{4}{3}T - \left(T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^{m-1}}\right) \tag{4.31}$$

Por (4.29) temos que:

$$\frac{4}{3}T - S > T_m = \frac{T}{4^{m-1}} > \frac{1}{3}\frac{T}{4^{m-1}} = \frac{4}{3}T - \left(T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^{m-1}}\right) \tag{4.32}$$

Portanto:

$$\frac{4}{3}T - S > \frac{4}{3}T - \left(T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^{m-1}}\right) \tag{4.33}$$

O que implica que:

$$S < \left(T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^{m-1}}\right) \tag{4.34}$$

Mas isso é uma contradição, pois a soma das áreas de triângulos inscritos em uma parábola não pode exceder a área da própria parábola. Como a área S não pode ser maior nem menor que $4/3$ de T, concluímos a igualdade entre as duas.

4.1.8 O contador de areia

No trabalho *sobre o contador de areia*, Arquimedes propôs um novo sistema numérico que dava para exibir números que, em termos modernos, estão na ordem de 8×10^{63}. Segundo Boyer (2012), ele se gabava de poder exibir um número maior que o número de grãos de areia necessários para encher o universo, inclusive. É neste trabalho que Arquimedes menciona o sistema heliocêntrico de Aristarco. Além disso, é o único tratado que ele menciona seu pai. Ele também menciona sobre a adição das ordens dos números, tendo sido o princípio que levou à invenção dos logaritmos, séculos depois.

4.1.9 O método

Uma das mais importantes obras de Arquimedes só foi de fato encontrada no inicio do século passado. Antes disso, só se tinha ouvido falar em seu título; sua existência era considerada mitológica. Mas, em 1899, o professor, filólogo e historiador dinamarquês, Johan Ludvig Heiberg (1854-1928) ficou sabendo sobre a existência de um *palimpsesto* (palimpsesto é um papiro ou pergaminho feito de couro de animais), localizado em Constantinopla, que continha conteúdo de origem religiosa. Porém, por baixo desse conteúdo, existiam textos de origem matemática, cujo texto primitivo fora raspado para dar lugar a outro. Em geral, isso ocorria devido ao alto custo e a sua escassez.

Ao analisar o palimpsesto, descobriu-se que os textos matemáticos se tratavam de trabalhos de Arquimedes; possuía cerca de 185 folhas com obras de Arquimedes escritas em grego, que tinham sido mal apagadas para dar lugar ao texto religioso. De sorte, foi possível conseguir ler quase todo trabalho, através de fotografias de obras já conhecidas.

Esta obra tem enorme relevância, pelo fato de mostrar como Arquimedes chegava a muitos de seus resultados (EVES, 2011). Até então, não se tinha certeza de como ele descobria seus teoremas. Existiam muitas críticas a respeito disso, pois, na maioria das vezes, ele dava o teorema pronto e uma prova geométrica. Normalmente, usava uma dupla redução ao absurdo, com o método da exaustão. Esse trabalho mostra como Arquimedes fazia o uso da lei da alavanca para descobrir áreas e volumes de figuras geométricas.

Neste trabalho, temos *a esfera e o cilindro* e *a quadratura da parábola* como principais resultados, ambos já mencionados anteriormente. Daremos agora provas mecânicas sobre esses resultados.

4.1.9.1 A quadratura da parábola: uma demonstração mecânica

Para uma demonstração mecânica da principal proposição que aparece em *a quadratura da parábola*, inicialmente, exibiremos alguns resultados que não foram enunciados neste trabalho, até o exato momento, e que serão de grande importância para a respectiva demonstração[16].

Proposição 1. O centro de gravidade de todo triângulo é o ponto de interseção das retas traçadas dos ângulos do triângulo aos pontos médios dos lados.

Proposição 2 (Adaptado de Roque e Carvalho 2012, p.109). Se por um ponto P de uma parábola traçarmos uma reta PM, que é o próprio eixo da parábola ou é paralela a esse eixo, e se AB é uma corda paralela à tangente à parábola por P e que corta PM em M, então: $AM = MB$.

Proposição 3. Seja APB uma parábola qualquer, cuja corda AB é paralela à tangente em P, vértice do segmento parabólico. Se uma paralela ao eixo de simetria da parábola, ou por uma reta paralela ao eixo, intersecta AB em um ponto M, a tangente à parábola intersecta a paralela em um ponto E, e $EP = PM$.

Proposição 4 (Adaptado de Magnaghi e Assis (2019, p.77)). A partir da geometria da figura 35 temos que $\frac{IH}{IC} = \frac{DT}{DS}$.

Proposição 5. Seja o triângulo ABF, com os prontos médios M, N e O relativos aos lados AB, AF e BF e centro de massa G, temos que:

$$MG = \frac{1}{3}MF, NG = \frac{1}{3}NB \ e \ OG = \frac{1}{3}AO \qquad (2.35)$$

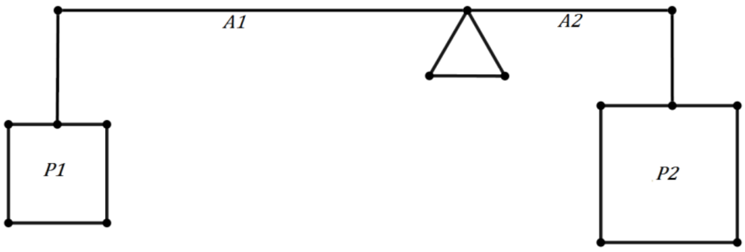
Proposição 6 (Lei da Alavanca). Duas grandezas, sejam elas comensuráveis ou incomensuráveis, se equilibram a distâncias inversamente proporcionais às suas grandezas.

Sejam dois corpos de massa $P1$ e $P2$ equilibrados por uma alavanca (Figura 33), de forma que $P1$ esteja a uma distância $A1$ do fulcro e $P2$ a uma distância $A2$ do fulcro, então, em linguagem moderna, temos que:

$$\frac{P1}{P2} = \frac{A2}{A1} \ ou \ P1 \cdot A1 = P2 \cdot A2 \qquad (4.36)$$

[16] Cf. Magnaghi e Assis (2019), para uma demonstração mais detalhada.

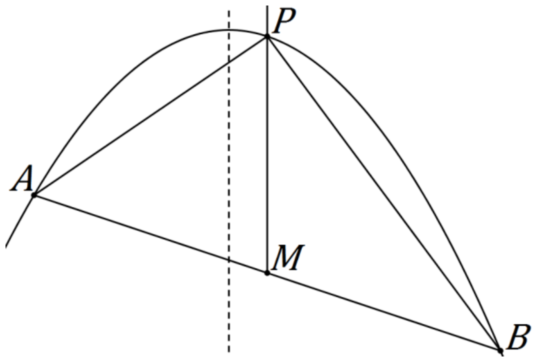
Figura 33 – Lei da Alavanca



Fonte: Autoria própria

Tendo as proposições em mãos, daremos inicio a demonstração. Primeiramente, considere o segmento de parábola APB e a reta paralela ao eixo de simetria desse segmento que corta o segmento AB em M e a parábola em P, de forma que a tangente à parábola em P seja paralela ao segmento AB, então $AM = MB$ pela *proposição 2*. Veja a Figura 34.

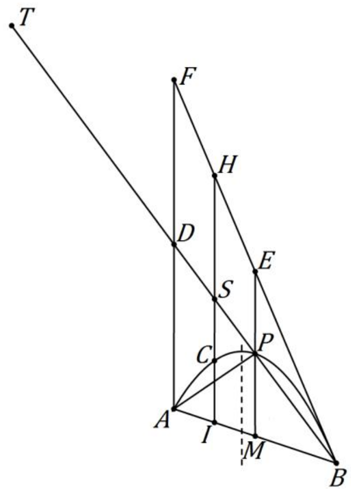
Figura 34 – Segmento de parábola APB



Fonte: Autoria própria

Considere agora a reta tangente à parábola em B e a paralela ao eixo da parábola que passa por A, e seja F o ponto de interseção dessas duas retas e E o ponto de interseção de BF e MP. Tracemos agora outra reta paralela ao eixo da parábola, de forma que corte a parábola em um ponto C qualquer e o segmento AB em I assim como BF em H. Como todas as retas traçadas são paralelas ao eixo da parábola, tem-se que $AF//IH//ME$, e seja o segmento BT de forma que P pertence à BT e sejam S e D os pontos de interseção de BT, com IH e AF, respectivamente, de forma que BT funcionará como uma alavanca com fulcro em D, com $DT = BD$ (Figura 35).

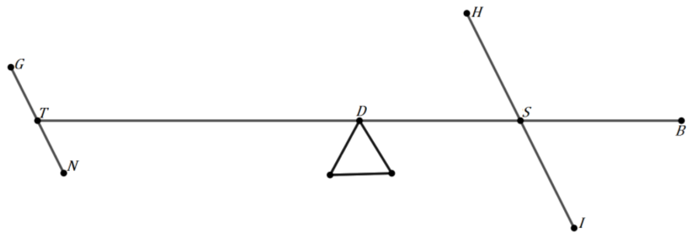
Figura 35 – Construção de uma alavanca com fulcro em D



Fonte: Autoria própria

Pela *Proposição 3*, P é o ponto médio de ME. Portanto $MP = PE$ e, consequentemente, $IS = SH$ e $AD = DF$. Pela *Proposição 4*, tem-se que $\frac{IH}{IC} = \frac{DT}{DS}$. Observe que assim, segundo a lei da alavanca[17], temos a seguinte situação de equilíbrio (Figura 36), onde D é o fulcro e T é o ponto médio de GN com $GN = CI$.

Figura 36 – Situação de equilíbrio em uma alavanca

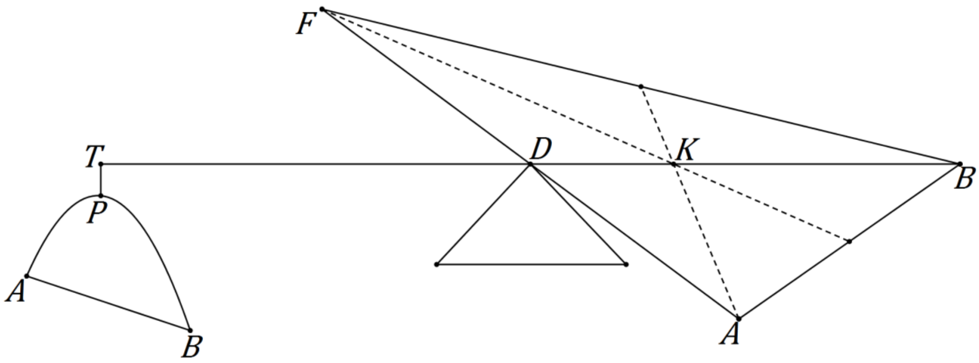


Fonte: Autoria própria

Arquimedes construiu, então, todas as retas IH entre A e B. Obtemos o triângulo ABF, assim como também o segmento parabólico APB, que estará apoiado com seu centro de gravidade em T (Figura 37).

[17] *Proposição 6*

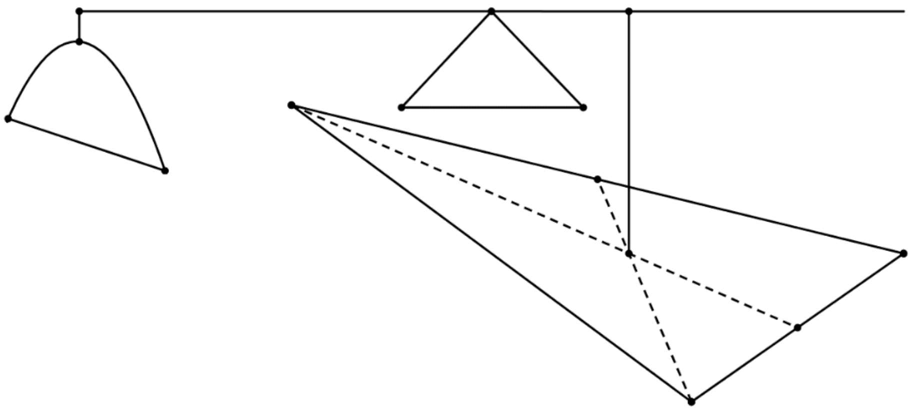
Figura 37 – Equilíbrio entre o segmento de parábola *APB* e o triângulo *ABF*



Fonte: Autoria própria

Em seu trabalho sobre o equilíbrio dos planos, Arquimedes postula que, se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias. Podemos então supor que o triângulo seja preso apenas em seu centro de gravidade[18], assim como o segmento parabólico, mantendo a situação de equilíbrio (Figura 38).

Figura 38 – Triângulo e segmento parabólico presos por seus centros de gravidade



Fonte: Autoria própria

Seja A_P a área do segmento parabólico APB e A_{ABF} a área do triângulo ABF, segundo a Lei da Alavanca[19], tem-se que:

$$A_P \cdot TD = A_{ABF} \cdot DK \tag{4.37}$$

Pela *proposição 5* temos que:

[18] Veja a *proposição 1*

[19] *Proposição 6*

$$DK = \frac{1}{3}DB = \frac{1}{3}TD \tag{4.38}$$

Portanto:

$$A_P \cdot TD = A_{ABF} \cdot \frac{1}{3}TD \tag{4.39}$$

Logo concluímos que:

$$A_P = \frac{1}{3}A_{ABF} \tag{4.40}$$

Observe o triângulo ABF (Figura 35). Como $AD = DF$, concluímos que $A_{ABD} = A_{DBF}$. Portanto, $A_{ABF} = 2A_{ABD}$. Observe agora o triângulo MBP: é fácil ver que ele é semelhante ao triângulo ABD. Podemos então fazer a seguinte proporção:

$$\frac{MB}{MP} = \frac{AB}{AD} \tag{4.41}$$

Mas:

$$AB = 2MB \tag{4.42}$$

Substituindo (4.42) em (4.41), segue facilmente que:

$$AD = 2MP \tag{4.43}$$

Por outra simples proporção, prova-se que a altura de ABD é o dobro da altura de MBP. Concluímos então que $A_{ABD} = 4A_{MBP}$. Além disso, é fácil ver que $A_{MBP} = A_{AMP}$. Concluímos assim que $A_{ABD} = 2A_{ABP}$.

Segue então que:

$$A_{ABF} = 4A_{ABP} \tag{4.44}$$

Portanto, combinando (4.40) com (4.44), obtemos que:

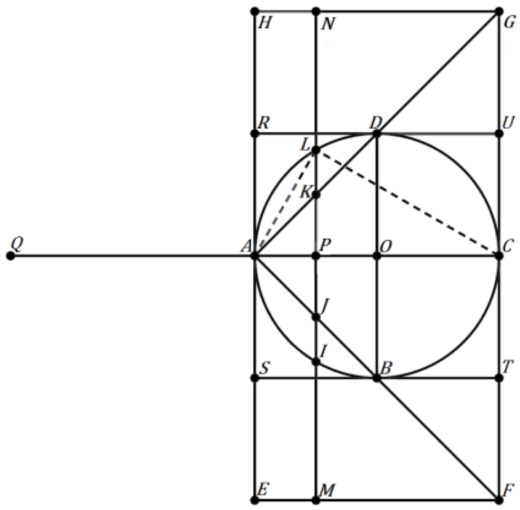
$$A_P = \frac{4}{3}A_{ABP} \tag{4.45}$$

Resultado ao qual queríamos chegar.

4.1.9.2 Sobre a esfera e o cilindro: uma demonstração mecânica

Inspirados em Ávila (1986), mostraremos que o volume de uma esfera inscrita em um cilindro circular reto é $2/3$ do volume do próprio cilindro. Para tal, considere a Figura 39. Temos o círculo $ABCD$ onde AC e BD são diâmetros perpendiculares entre si. O retângulo $EFGH$ é construído de forma que EH e FG são tangentes ao círculo nos pontos A e C, respectivamente. É fácil ver que $RSTU$ é um quadrado. Observe também que o triângulo FAG é reto em A; além disso, é isósceles. O triângulo ACL é reto em L; por fim, note que o segmento MN é perpendicular a AC e passa pelo ponto L.

Figura 39 – Cilindros *EFGH* e *STUR*, cones *AFG* e *ABD*, e esfera *ABCD* planificados



Fonte: Autoria própria

Pelo teorema de Pitágoras sabemos que:

$$AL^2 = AP^2 + PL^2 \tag{4.46}$$

Pelas relações métricas do triângulo retângulo ACL, usando o fato de PL ser a altura relativa à hipotenusa AC, temos que:

$$AL^2 = AP \cdot AC \tag{4.47}$$

Observe que, no triângulo APK, o ângulo relativo ao vértice A mede 45° e o ângulo relativo ao ponto P é reto. Portanto, o ângulo relativo ao vértice K também mede 45°. Assim sendo, APK é isósceles e $AP = PK$. Então:

$$PK^2 + PL^2 = AP \cdot AC \tag{4.48}$$

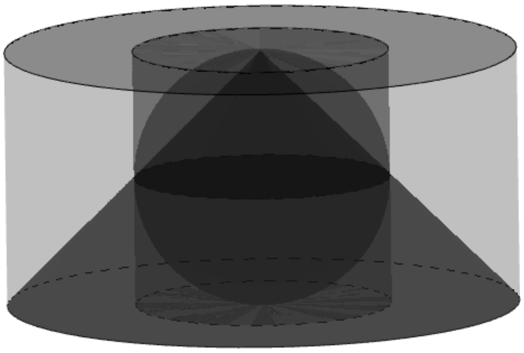
Usando o fato de $PN = AC$, pois o triângulo ACG é reto em C e o ângulo relativo ao vértice A mede 45° e, consequentemente, o ângulo relativo à G também mede 45° e ACG é isósceles.

Como $PN = CG$, o resultado segue. Dividindo ambos os lados da equação por PN^2 e, multiplicando numerador e denominador por π, temos:

$$\frac{\pi PK^2 + \pi PL^2}{\pi PN^2} = \frac{AP \cdot AC}{PN^2} = \frac{AP \cdot AC}{AC^2} = \frac{AP}{AC} \tag{4.49}$$

Obtivemos, então, que a soma das áreas dos círculos de raio PK e PL está para a área do circulo de raio PN assim como AP está para AC. Veja que, ao girarmos a figura anterior sobre o eixo QC, obtemos a próxima figura.

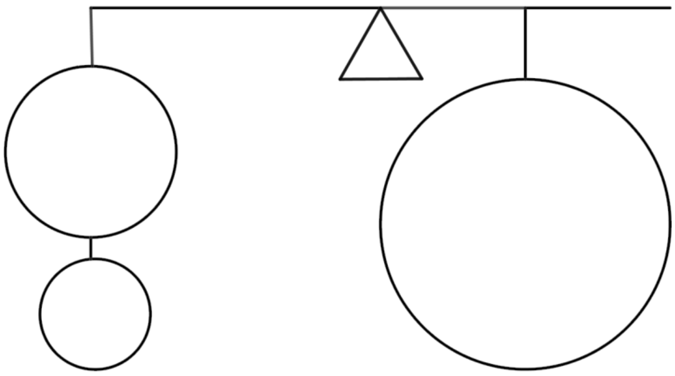
Figura 40 – Figura anterior girada em torno do eixo QC



Fonte: Autoria própria

Observe que a equação (4.49) equivale à Lei da Alavanca[20], com os círculos de raios PK e PL equilibrados à distância $AO = AC$ do fulcro A e o círculo de raio PN equilibrado do lado oposto a uma distância AP do fulcro A. Temos então a seguinte situação de equilíbrio.

Figura 41 – Alavanca em equilíbrio — visualização 2D



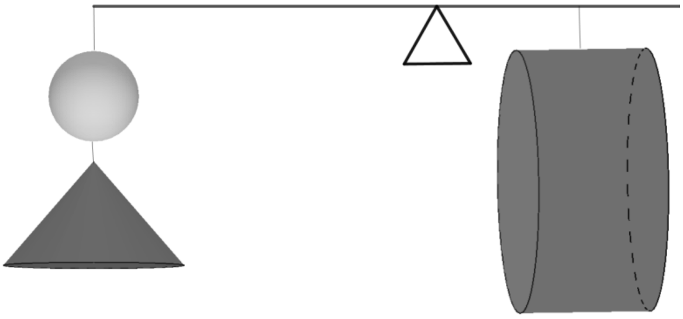
Fonte: Autoria própria

Assim como em *a quadratura da parábola*, Arquimedes varre todos os círculos de raio PK entre A e C, bem como todos os círculos de raio PL e PN, também entre A e C.

[20] Proposição 6 da seção anterior e proposições 6 e 7 do tratado *Sobre o Equilíbrio dos Planos*

Observe que, ao fazer essa varredura, obtém-se a seguinte situação de equilíbrio (Figura 42), onde o cilindro está com seu centro de gravidade no extremo O e a esfera juntamente com o cone estão equilibrados com seus centros no extremo Q.

Figura 42 – Alavanca em equilíbrio — visualização 3D



Fonte: Autoria própria

Note que:

$$AO = \frac{1}{2}AC \tag{4.50}$$

Portanto:

$$\frac{V_{AFG} + V_{ABCD}}{V_{EFGH}}\frac{1}{2} \Longrightarrow V_{EFGH} = 2(V_{AFG} + V_{ABCD}) \tag{4.51}$$

Já era do conhecimento de Arquimedes que[21]:

$$V_{EFGH} = 3V_{AFG} \tag{4.52}$$

Portanto:

$$3V_{AFG} = 2(V_{AFG} + V_{ABCD}) \Longrightarrow V_{AFG} = 2V_{ABCD} \tag{4.53}$$

Observe que a base e a altura do cone AFG possuem o dobro da base e da altura do cone ABD respectivamente, então é fácil ver que:

$$V_{AFG} = 8V_{ABD} \tag{4.54}$$

Segue então que:

$$V_{ABCD} = 4V_{ABD} \tag{4.55}$$

Observe agora que:

[21] Esta é a proposição 10 do livro XII de Os elementos de Euclides, 2009, p.543.

$$V_{STUR} = 2V_{SBDR} \tag{4.56}$$

Mas:

$$V_{SBDR} = 3V_{ABD} \tag{4.57}$$

Logo:

$$V_{STUR} = 6V_{ABD} \tag{4.58}$$

Por (4.55) concluímos que:

$$V_{STUR} = \frac{3}{2}V_{ABCD} \tag{4.59}$$

Ou:

$$V_{ABCD} = \frac{2}{3}V_{STUR} \tag{4.60}$$

Resultado ao qual queríamos chegar.

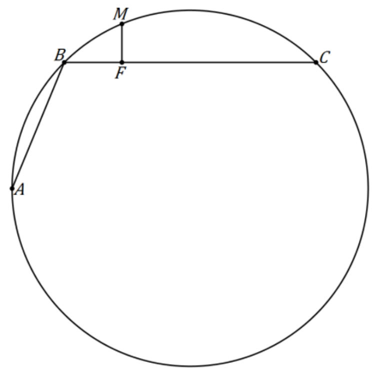
4.1.10 Obras perdidas

Muitas obras escritas por Arquimedes se perderam. Boyer (2012) e Eves (2011) dizem que a famosa fórmula de Heron era conhecida por Arquimedes séculos antes de Heron ter nascido, segundo os Árabes.

$$K = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \tag{4.61}$$

Que dá a área de um triângulo em função dos lados, onde S é o semiperímetro. Boyer (2012) ainda afirma que os árabes atribuem a Arquimedes o *teorema sobre a corda quebrada*; se AB e BC formam uma corda quebrada em um círculo, onde $AB \neq BC$ e se M é o ponto médio do arco ABC e F o pé da perpendicular de M a corda maior, F será o ponto médio da corda quebrada ABC.

Figura 43 – Teorema da corda quebrada



Fonte: Autoria Própria

Boyer (2012) faz menções por Pappus que Arquimedes também descobriu todos os treze sólidos semirregulares (arquimedianos). Já segundo Eves (2011), “Papus atribui a Arquimedes 30 poliedros semirregulares”. Eves (2011) cita mais dois trabalhos perdidos de Arquimedes, um mencionado por Papus, sobre alavancas e um teorema citado por Têon, em outro trabalho, sobre teoria dos espelhos.

5 ERATÓSTENES

Conhecido como o fundador da geografia, segundo Colaço e Bauab (2016) é provável que tenha sido o primeiro a usar tal termo, Eratóstenes viveu de 273 a.C a 194 a.C. Nativo de Cirene, local onde hoje é a Líbia, passou a maior parte de sua juventude em Atenas e, aos quarenta anos de idade foi convidado por Ptolomeu III para ser tutor de seu filho, mudando-se assim para Alexandria, onde veio a se tornar diretor chefe da biblioteca local, principal centro de estudos da antiguidade (EVES, 2011; BOYER, 2012).

Eratóstenes conseguiu sucesso em vários campos do conhecimento, como matemática, música, história, geografia, poesia entre outros. Também era um excelente atleta, tendo se destacado em várias modalidades (BOYER, 2012). Segundo Eves (2011), os alunos da universidade de Alexandria chamavam Eratóstenes de “Pentathlus”, por ter sido campeão em cinco esportes atléticos. Obviamente é bem difícil de garantir alguma coisa sobre esses fatos. Porém, como veremos mais adiante, ele conseguiu façanhas que ninguém tinha conseguido antes ou no tempo dele.

5.1 Crivo de Eratóstenes

Eratóstenes é bem conhecido pelos teóricos dos números, por ter criado um dispositivo prático (Crivo de Eratóstenes) que serve para encontrar todos os números primos até qualquer natural *n* dado. Para encontrar tais números pelo *Crivo de Eratóstenes*, Eves (2011) e Boyer (2012) descrevem processos bem parecidos para que possam encontrar tais números, onde a única diferença notada nos processos é que em um deles os números pares são desprezados, fazendo uma lista apenas com os números ímpares. Dessa forma, pode-se ganhar bastante tempo. Na outra forma são escritos todos os números naturais até certo natural *n* dado. O padrão é o mesmo, sendo essa última forma mais trabalhosa, visto que teríamos que escrever quase o dobro da quantidade do método anterior. Observe a Figura 44; nela, o processo usado para encontrar todos os números primos até 200 foi o de listar apenas os números ímpares, sendo um bom exemplo para perceber o quanto teria sido trabalhoso se fossem escritos todos os naturais até 200.

Figura 44 – Crivo de Eratóstenes

2	3	5	7	~~9~~	11	13	~~15~~	17	19
~~21~~	23	~~25~~	~~27~~	29	31	~~33~~	~~35~~	37	~~39~~
41	43	~~45~~	47	~~49~~	~~51~~	53	~~55~~	~~57~~	59
61	~~63~~	~~65~~	67	~~69~~	71	73	~~75~~	~~77~~	79
~~81~~	83	~~85~~	~~87~~	89	~~91~~	~~93~~	~~95~~	97	~~99~~
101	103	~~105~~	107	109	~~111~~	113	~~115~~	~~117~~	~~119~~
~~121~~	~~123~~	~~125~~	127	~~129~~	131	~~133~~	~~135~~	137	139
~~141~~	~~143~~	~~145~~	~~147~~	149	151	~~153~~	~~155~~	157	~~159~~
~~161~~	163	~~165~~	167	~~169~~	~~171~~	173	~~175~~	~~177~~	179
181	~~183~~	~~185~~	~~187~~	~~189~~	191	193	~~195~~	197	199

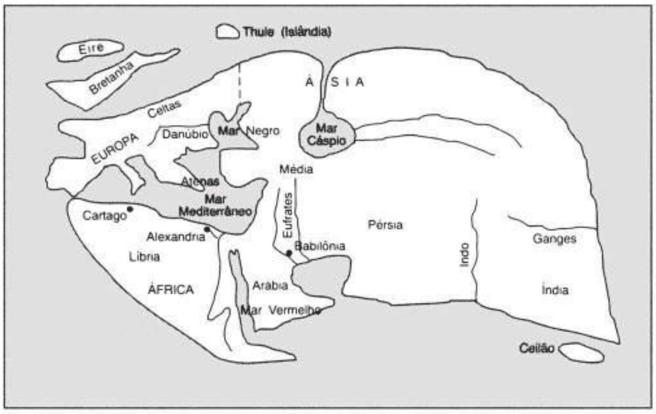
Fonte: Autoria própria

5.2 Mapa mundo de Eratóstenes

Durante seus estudos em Alexandria, Eratóstenes percebeu que o mapa mundo que existia na época (e que tinha sido desenhado por Heródoto, ao menos dois séculos antes dele) estava muito ultrapassado, pois muitos novos lugares já eram conhecidos até então. Ele cartografou o mapa mundo conhecido em seu tempo (COLAÇO & BAUAB, 2016), colocando Alexandria no centro (Figura 45). Infelizmente, esse mapa se perdeu por volta de

250 a.C. Apesar do mapa desenhado por Eratóstenes possuir muitas falhas, é algo que não dá para questionar, visto o conhecimento espacial do mundo na época.

Figura 45 – Mapa do mundo de Eratóstenes



Fonte: Eves (2011, p.198)

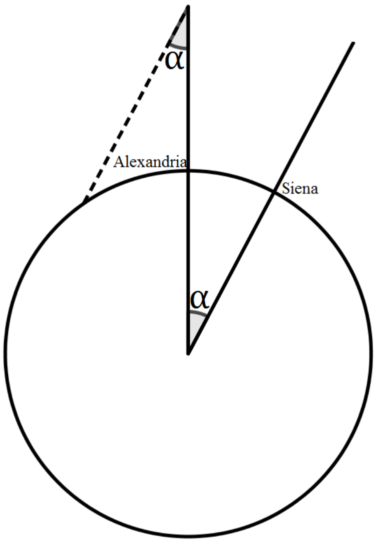
5.3 Cálculo da circunferência da Terra

Eratóstenes é conhecido até os dias atuais como sendo o primeiro homem que mediu a Terra. Apesar de outras pessoas terem o feito, os resultados destas foram muito distantes (PEREIRA, 2006). Ele sabia que ao meio-dia, durante o solstício de verão, o Sol brilhava no fundo de um profundo poço, em Siena, o que implicava que o Sol estava diretamente por cima do poço. Se enfincasse uma estaca perpendicularmente ao chão, não haveria sombra alguma. Mas, neste mesmo momento, em Alexandria, os raios solares faziam um ângulo com uma estaca perpendicularmente fincada ao chão, que ele calculou ter aproximadamente 7,2° (Figura 46).

Em um tempo embasado por ideais aristotélicos, a ideia que a Terra era plana era aceita sem maiores dificuldades. Mas, segundo as medições de Eratóstenes, a Terra não poderia ser plana; caso fosse, os ângulos formados pelos raios solares seriam os mesmos para objetos com a mesma inclinação em diferentes lugares, uma vez que os raios solares são paralelos entre si. Portanto, admitindo a esfericidade da Terra, seria fácil de compreender o motivo de termos ângulos diferentes em lugares diferentes.

Como a distância entre as duas cidades era de aproximadamente 5000 estádios (unidade de medida usada na época) e, se encontravam aproximadamente sobre o mesmo meridiano, e os raios solares eram paralelos, a conclusão é que o ângulo central também media 7,2°, (Figura 46).

Figura 46 – Modelo da ideia de Eratóstenes



Fonte: Autoria própria

Para calcular o tamanho da circunferência da terra, ele pode ter prosseguido da seguinte forma; como a distância entre Siena e Alexandria era conhecida e o ângulo α também o era, ele pode ter feito a seguinte proporção:

$$\frac{5000}{7,2°} = \frac{C}{360°} \tag{5.1}$$

De onde facilmente se conclui que:

$$C = 250.000 \tag{5.2}$$

Ele chegou ao valor de 250.000 estádios para a medida da circunferência da Terra (o que foi um grande feito para a sua época), não é possível afirmar com exatidão o valor encontrado por ele ao medir a circunferência terrestre, uma vez que não se sabe de certeza o valor exato da unidade de medida utilizada por ele. Todavia, supõe-se que o valor encontrado seja muito próximo do valor que hoje conhecemos, algo entre 39 e 46 mil quilômetros. Com idade avançada e com um sério problema de visão que estava lhe deixando cego, Eratóstenes cometeu suicídio por inanição.

6 HIPARCO DE NICÉLIA

Entre cartógrafro e matemático grego (180-125 a.E.C), Hiparco é considerado o mais eminente astrônomo da era pré-cristã (EVES, 2011). Na ilha de Rodes, fez observações durante vários anos, segundo Eves (2011), ele organizou um catálogo que tinha por volta de 850 estrelas. É considerado o pai da trigonometria (ROQUE & CARVALHO, 2012; BOYER, 2012), por ter sido talvez o primeiro a compilar uma tábua trigonométrica; além disso, segundo Roque e Carvalho (2012), ele introduziu a divisão de uma circunferência em 360 partes, onde cada uma dessas partes correspondem a 1 (um) grau. Daí, dividiu cada grau em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos.

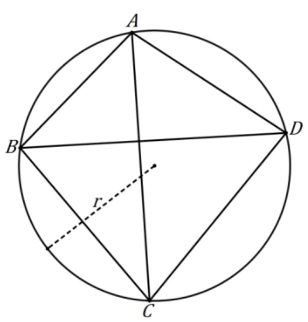
Hiparco determinou, com grande precisão, a duração de um dia e de um ano terrestre. Conforme Roque e Carvalho (2012), Eves (2011) e Boyer (2012), ele é responsável pela descoberta de uma estimativa da precessão dos equinócios (variação da direção do eixo de rotação da Terra, devido à influência gravitacional da Lua e do Sol, que leva aproximadamente 26000 anos para completar um ciclo). Criou também o astrolábio. Ele também defendia o geocentrismo aristotélico e deduziu corretamente que a razão entre o tamanho da sombra da Terra e o tamanho da Lua é de 8/3.

6.1 Relação de Hiparco

A relação de Hiparco diz que se tivermos um quadrilatero inscritível $ABCD$ de diagonais AC e BD (Figura 47), então:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + AD \cdot CD} \tag{6.1}$$

Figura 47 – Relação de Hiparco



Fonte: Autoria própria

Para provar essa relação considere a figura anterior, por ela é fácil ver que a área do quadrilatero $ABCD$ é igual a soma das áreas dos triângulos ABC e ACD, isto é:

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} \tag{6.2}$$

Como a área de um triângulo inscrito ABC em uma circunferência de raio r pode ser expressa por:

$$A_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4r} \tag{6.3}$$

Podemos escrever:

$$A_{ABCD} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4r} + \frac{AC \cdot CD \cdot AD}{4r} \tag{6.4}$$

De modo análogo prova-se que:

$$A_{ABCD} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4r} + \frac{BC \cdot CD \cdot BD}{4r} \tag{6.5}$$

Como (6.4) é igual a (6.5), igualando-os, eliminando os denominadores e colocando AC e BD em evidencia, obtemos que:

$$AC \cdot (AB \cdot BC + CD \cdot AD) = BD \cdot (AB \cdot AD + BD \cdot CD) \tag{6.6}$$

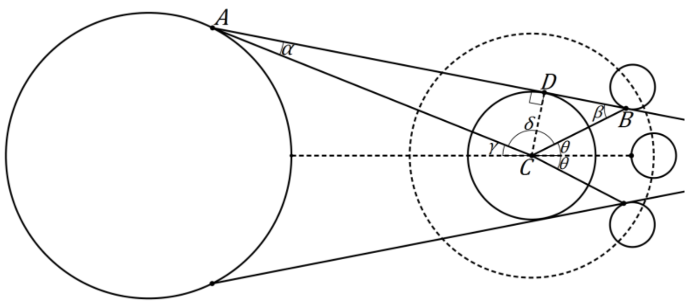
De onde resulta que:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BD \cdot CD}{AB \cdot BC + CD \cdot AD}$$

6.2 Distância da Terra à Lua por Hiparco

Muito do que Hiparco escreveu se perdeu. Tudo o que sabemos a respeito dele vem de terceiros, sendo muito citado por Ptolomeu. Em seu tratado sobre distâncias e tamanhos, Hiparco teria calculado a distância da Terra à Lua em relação ao raio da Terra, baseado em eclipses lunares.

Figura 48 – Modelo para o cálculo da distância da Terra à Lua, por Hiparco



Fonte: Autoria Própria

O método para encontrar a distância da Terra à Lua, segundo raciocínios de Hiparco, consiste em encontrar o ângulo β (paralaxe da Lua) do esquema pensado por ele (Figura 48). Para tanto, Hiparco observou o tempo que a Lua levava para atravessar a sombra projetada pela a Terra em sua altura; observando que θ é o ângulo no momento em que a Lua está alinhada com a Terra e o Sol (metade do eclipse), esse ângulo foi determinado por uma simples proporção. Sendo t o tempo gasto pela Lua para atravessar o eclipse e T o tempo para a Lua dar uma volta completa na Terra, tem-se então a seguinte proporção:

$$\frac{2\theta}{t} = \frac{360}{T} \tag{6.7}$$

onde concluímos facilmente que:

$$\theta = \frac{180}{T} t \tag{6.8}$$

Considerando $t = 100\, minutos\ e\ T = 29{,}5\, dias$ e fazendo as conversões necessárias, obtém-se aproximadamente $0{,}42°$ para o valor de θ.

Observemos agora o ângulo δ, onde temos que:

$$\alpha + \delta + \beta = \gamma + \delta + \theta \Longrightarrow \alpha + \beta = \gamma + \theta \tag{6.9}$$

Como o Sol está muito longe da Terra, α está muito próximo de 0. Hiparco obteve então que:

$$\beta \cong \gamma + \theta \tag{6.10}$$

Sendo γ o diâmetro angular do Sol. O mesmo foi calculado por Aristarco como sendo 1°. Hiparco, no entanto, corrigiu seu valor, concluindo que $\gamma \cong 0{,}25°$. Dessa forma, a conclusão é que $\beta \cong 0{,}67°$. Para calcular o tamanho da hipotenusa CB do triângulo BDC, onde DC é o tamanho do raio da Terra e CB a distância da Terra à Lua, pela Figura 48 temos que:

$$sen\,0{,}67° = \frac{DC}{CB} \Longrightarrow CB = \frac{DC}{sen\,0{,}67°} \tag{6.11}$$

Como as medições eram muito imprecisas, Hiparco chegou à conclusão que:

$$62DC < CB < 74DC \tag{6.12}$$

Hoje em dia sabemos que:

$$54DC < CB < 64DC \tag{6.13}$$

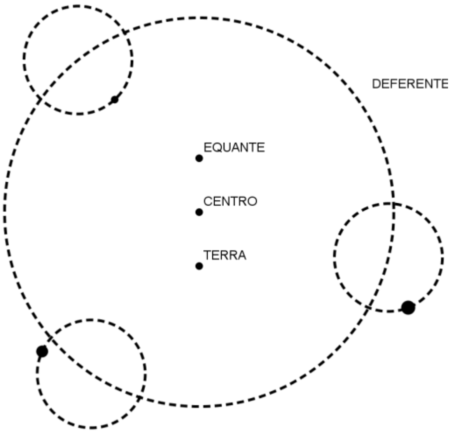
7 PTOLOMEU

Claudio Ptolomeu — ou somente Ptolomeu — foi o último dos grandes astrônomos da antiguidade. Foi também geógrafo, cartógrafo, matemático e ainda estudou ótica e música. Segundo Boyer (2012), Ptolomeu fez observações em Alexandria de 127 a 151 da era cristã, por isso supõe que ele nasceu ao fim do primeiro século.

Ptolomeu escreveu uma importante obra sobre trigonometria, o chamado *Almagesto*, que inclui 13 volumes. Segundo Boyer (2012), esta é a mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade e tinha por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar. Nesta obra ele compilou o trabalho de vários astrônomos.

Grande parte do seu trabalho se atribui a Hiparco, inclusive a rejeição do sistema heliocêntrico de Aristarco, supondo, em seu trabalho a Terra estando no centro e os corpos celestiais descrevendo trajetórias circulares ao seu redor. Segundo Nogueira (2009), na versão Ptolomaica do mundo, os planetas giravam não somente em torno da Terra, seguindo trajetórias circulares, mas também em circuitos circulares que circulavam ao longo de sua órbita, os chamados epiciclos (Figura 49). Sua astronomia foi sustentada pela igreja e durou por vários séculos, até Kepler fornecer argumentos a favor da teoria heliocêntrica de Cópernico.

Figura 49 – Modelo geocêntrico de Ptolomeu



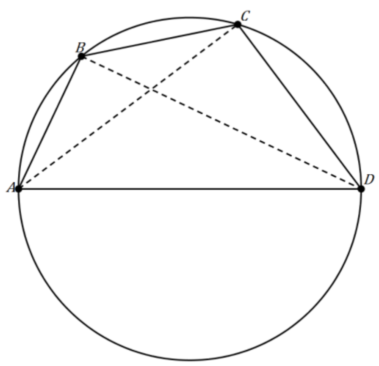
Fonte: Autoria própria

7.1 Teorema e algumas relações devidas a Ptolomeu

Segundo Mol (2011), Ptolomeu estendeu o trabalho de Hiparco e Menelau, criando um procedimento para o cálculo de cordas submetidas por arcos de um círculo. Ele usou uma proposição que hoje conhecemos como Teorema de Ptolomeu para encontrar fórmulas que foram úteis para o cálculo de suas cordas. Mais especificamente, as fórmulas que ele encontrou foram o *seno da diferença* e *seno do arco metade* ou *corda da diferença* e *corda do arco metade*. Ambas foram muito úteis. Seu teorema diz que, dado um quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência (Figura 50), então:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BC \quad (7.1)$$

Figura 50 – Quadrilátero inscrito em uma circunferência



Fonte: Autoria própria

Sendo AD o diâmetro do círculo, o teorema de Ptolomeu nos diz que:

$$AB \cdot CD + 2r \cdot BC = AC \cdot BD \tag{7.2}$$

Como AD é diâmetro, temos que os ângulos $\angle ABD$ e $\angle ACD$ medem 90° e, sejam os arcos $BD = 2\alpha$ e $CD = 2\beta$, os ângulos $\angle BAD = \alpha$ e $\angle CAD = \beta$ e as relações do triângulo retângulo nos dão que:

$$\begin{aligned} BD &= 2r \cdot sen\,\alpha \\ CD &= 2r \cdot sen\,\beta \\ AB &= 2r \cdot cos\,\alpha \\ AC &= 2r \cdot cos\,\beta \end{aligned} \tag{7.3}$$

Substituindo ambas as relações no Teorema de Ptolomeu, obtemos:

$$2r \cdot cos\,\alpha \cdot 2r \cdot sen\,\beta + 2r \cdot BC = 2r \cdot cos\,\beta \cdot 2r \cdot sen\,\alpha \tag{7.4}$$

Segue facilmente que:

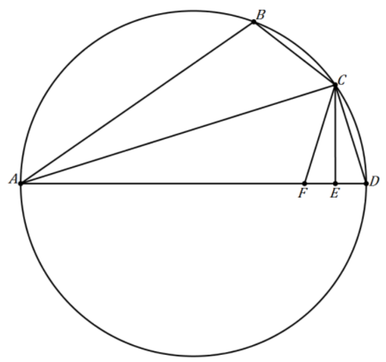
$$BC = 2r \cdot sen(\alpha - \beta) \tag{7.5}$$

Substituindo (7.5) em (7.4), obtemos que:

$$sen(\alpha - \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\beta \cdot cos\,\alpha \tag{7.6}$$

Raciocinando de modo análogo, obtemos fórmulas para o seno da soma, assim como para o cosseno da soma e da diferença. Boyer (2012) diz que essas fórmulas são frequentemente chamadas de Fórmulas de Ptolomeu. Outra fórmula de grande utilidade para Ptolomeu foi a equivalente à nossa conhecida fórmula do arco metade. Para obtê-la mediante raciocínios de Ptolomeu, considere a Figura 51, onde $AD = 2r$ é o diâmetro.

Figura 51 – Modelo para deduzir a fórmula de seno do arco metade



Fonte: Autoria própria

Seja C o ponto médio do arco BD e F em AD, de forma que $AB = AF$ e seja CE bissectando perpendicularmente DF, notemos que:

$$FD = 2ED = 2r - AF = 2r - AB \Longrightarrow ED = \frac{2r - AB}{2} \tag{7.7}$$

Observemos que se o arco $BD = 2\alpha$, então $CD = \alpha$ e o ângulo $\angle CAD = \frac{\alpha}{2}$ logo:

$$CD = 2r \cdot sen\frac{\alpha}{2} \tag{7.8}$$

De modo análogo concluímos que:

$$AB = 2r \cdot cos\,\alpha \tag{7.9}$$

Pelas relações do triângulo retângulo obtemos que:

$$CD^2 = AD \cdot ED \Longrightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DE} \tag{7.10}$$

Combinando (7.10) com (7.9) e (7.8), e usando o fato de AD ser o diâmetro, temos:

$$2r \cdot sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2r\frac{2r - 2r \cdot cos\,\alpha}{2}} = 2r \cdot \sqrt{\frac{(1 - cos\,\alpha)}{2}} \tag{7.11}$$

Portanto:

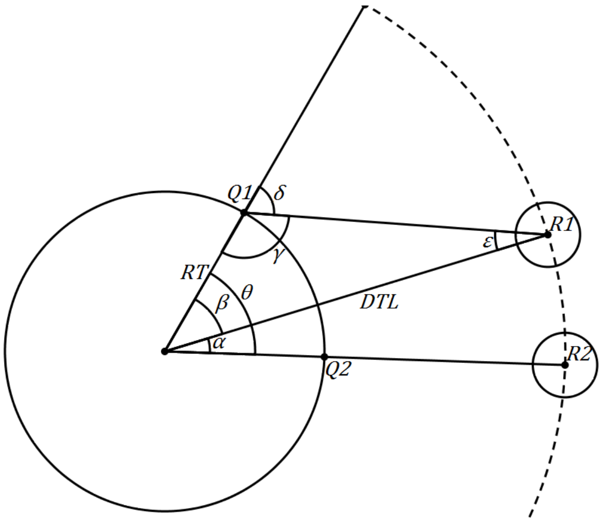
$$sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(1 - cos\,\alpha)}{2}} \tag{7.12}$$

De posse de suas fórmulas, Ptolomeu substituiu a tabela de cordas de Hiparco por uma que variava de 0,5° a 180°; a mesma variava de meio em meio grau e perdurou entre os astrônomos por mais de 1000 anos. A construção dessa tabela era equivalente a construir uma tabela de cordas que variam de 0,25° a 90°. Além de tais fórmulas, Roque e Carvalho (2012) diz que Ptolomeu provou que $(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1$, onde α é um ângulo agudo.

7.2 Ptolomeu e a distância entre a Terra e a Lua

Ptolomeu foi outro a calcular a distância da Terra à Lua em função do raio da Terra. Para isso, ele propôs um modelo simples, mas engenhoso (ÁVILA, 1982). Observe a Figura 52.

Figura 52 – Modelo proposto por Ptolomeu para calcular a distância da Terra à Lua



Fonte: Autoria própria

Vejamos como Ptolomeu procedeu. Segundo Ávila (1982) e Monteiro et al. (2018), ele considerou um observador sobre o ponto $Q1$ e, após um tempo de observação T_{OB}, o observador se encontraria no ponto $Q2$ — devido ao movimento de rotação da Terra — e supôs a Lua no ponto $R1$ no início da observação e, após o tempo de observação T_{OB}, a Lua se encontraria no ponto $R2$, devido sua revolução. Seja então T_R o tempo de rotação da Terra e T_L o tempo de revolução da Lua, temos então as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{T_R}{360°} &= \frac{T_{OB}}{\theta} \Longrightarrow \theta = \frac{T_{OB} \cdot 360°}{T_R} \\ \frac{T_L}{360°} &= \frac{T_{OB}}{\alpha} \Longrightarrow \alpha = \frac{T_{OB} \cdot 360°}{T_L} \end{aligned} \tag{7.13}$$

Notemos que:

$$\beta = \theta - \alpha = 360° \cdot T_{OB} \cdot \left(\frac{1}{T_R} - \frac{1}{T_L}\right) \tag{7.14}$$

Além disso, como $\varepsilon = 180° - \beta - \gamma$ e $\gamma = 180° - \delta$, temos:

$$\varepsilon = 180° - 360° \cdot T_{OB} \cdot \left(\frac{1}{T_R} - \frac{1}{T_L}\right) - (180° - \delta) = 360° \cdot T_{OB} \cdot \left(\frac{1}{T_R} - \frac{1}{T_L}\right) \tag{7.15}$$

Pela figura 52 é fácil ver que:

$$\frac{RT}{sen\,\varepsilon} = \frac{DTL}{sen\,\gamma} \Longrightarrow DTL = \frac{RT \cdot sen\,\gamma}{sen\,\varepsilon} \tag{7.15}$$

Portanto:

$$DTL = \frac{RT \cdot sen(180° - \delta)}{sen\left[\delta - 360° \cdot T_{OB} \cdot \left(\frac{1}{T_R} - \frac{1}{T_L}\right)\right]} \qquad (7.17)$$ [22]

8 HIPÁTIA DE ALEXANDRIA

Hipátia de Alexandria (370 d.C a 415 d.C) era filha do matemático, filósofo e astrônomo Têon de Alexandria, sendo este o último diretor da famosa Biblioteca de Alexandria. Eves (2011) diz que se deve a Têon um comentário, em 11 livros, sobre o Almagesto de Ptolomeu. Cumpre lembrar, também, que as edições modernas dos Elementos de Euclides se baseiam na revisão do trabalho original feita por ele, conforme (EVES, 2011).

Influenciada intelectualmente por seu pai (FERNANDEZ et al., 2018), e pelo pensamento de Plotino (um dos mais influentes filósofos da Antiguidade, depois de Platão e Aristóteles.), segundo Eves (2011) e Fernandez et al. (2018), Hipátia tinha consigo ideais neoplatônicos (corrente filosófica inspirada pelos ensinamentos de Platão que acreditava que não era necessário morrer para alcançar uma vida plena e feliz, como pregavam os cristãos).

Ela foi uma das últimas pessoas, entre os intelectuais da antiguidade, a trabalhar na biblioteca de Alexandria e é a primeira mulher matemática que a Historia registra. Uma curiosidade a respeito de Hipátia é o fato dela nunca ter se casado. Quando questionada sobre isso, ela respondia que já era casada com a verdade (FERNANDEZ et al, 2018; EVES, 2011). O fato é que seu pai sempre a deixou livre, não a obrigando a atar laços com ninguém ou a seguir o estilo de vida que as outras mulheres eram obrigadas a seguir, o que era comum na época.

Hipátia estudou geometria e filosofia em Alexandria e foi para Atenas, onde continuou seus estudos. “Depois de viajar por muitos anos, passou a lecionar matemática e filosofia em Alexandria, ou na universidade local ou talvez em público” (EVES, 2011, p.212). Segundo Eves (2011), suas aulas atraiam muitos telespectadores; entre eles, estava Sinésio de Cirene, que veio a se tornar seu amigo, posteriormente Bispo de Ptolemais. Sua inteligência fez com que se tornasse conselheira de Orestes, governador da cidade. Quase todas suas obras se

[22] Resultado tirado de Monteiro et al. (2018). Sugerimos o mesmo para uma leitura mais aprofundada bem como para ver alguns outros resultados bem interessantes.

perderam com o incêndio da biblioteca de Alexandria. Conforme Fernandez et al. (2018), a maior parte das informações a respeito de sua vida se deve a correspondências trocadas entre ela e Sinésio. Ela também aparece em textos de Sócrates Escolástico, importante historiador de sua época.

Figura 53 – Hipátia de Alexandria

Fonte: https://impa.br/noticias/mulher-semilendaria-hipatia-foi-a-primeira-matematica/

8.1 Alguns feitos de Hipátia

Dentre os feitos de Hipátia, se destacam os comentários sobre a aritmética de Diofanto (201 d.C a 285 d.C). Sobre esse, “no século XV, na biblioteca do Vaticano, descobriu-se uma cópia de seu comentário já citado sobre a obra de Diofanto”, conforme (Eves, 2011, p.212). Segundo Morais Filho (1996), Eves (2011) e Fernandez et al. (2018), Hipátia comentou ainda sobre as cônicas de Apolônio (262 a.C a 190 a.C). É possível que tenha editado a versão existente do Almagesto de Ptolomeu (90 d.C a 168 d.C). Teria também editado com seu pai comentários sobre Os Elementos de Euclides, conforme Morais Filho (1996) e Fernandez et al. (2018). Segundo parece, ela escreveu sobre O Cânone Astronômico e também construiu um hidrômetro (instrumento de medição volumétrica de água que passa numa parte da rede de abastecimento de água.). Trabalhou com mapeamento de corpos celestes e ajudou na construção de um astrolábio.

No período, uma das mais ousadas teorias que estava em discursão afirmava que a Terra girava em torno do Sol. A sua maior contribuição se deve em tentar responder o seguinte questionamento: Se a Terra gira em torno do Sol, qual o motivo de termos épocas em que o Sol está mais próximo e épocas em que o Sol está mais longe da Terra, tendo assim várias estações ao longo do ano? Tentando responder a essa pergunta, Hipátia foi uma das primeiras pessoas a levantar hipóteses de que a trajetória da Terra em torno do Sol descrevem trajetórias elípticas e não circulares, as cônicas de Apolônio podem ter tido papel importante na formulação dessa teoria, que só veio a ser comprovada por Cópernico e corrigida por Kepler tempos depois.

8.2 A morte de Hipátia

Dentre todos os personagens mencionados até o momento, Hipátia sem dúvidas foi que teve o fim mais trágico, é provável que ela tenha sido vítima de uma disputa política em Alexandria entre Orestes, o governador da cidade e Cirilo, um patriarca ou bispo de Alexandria, este queria o fim de práticas pagãs, pelo fato de Orestes aconselhar-se com Hipátia e ela nunca ter se casado, pessoas ligadas a Cirilo espalharam boatos acusando Hipátia de bruxaria. Então, em uma manhã quando Hipátia retornava para sua casa em uma carruagem, foi atacada por um bando de pessoas enfurecidas que a tiraram de sua carruagem, arrastaram-na pelo chão arrancaram-lhe os cabelos e a esquartejaram usando talvez pedaços de cerâmica, depois jogaram o que restou dela ao fogo, conforme afirmam Morais Filho (1996), Eves (2011) e Fernandez et al. (2018).

Fernandez et al. (2018) diz que, apesar de Hipátia nunca ter se convertido ao cristianismo, ela tinha uma visão liberal em suas aulas ou palestras, aceitando assim pessoas cristãs ou não cristãs conforme. É possível também que a ideia de Cirilo fosse uma tentativa fracassada de atingir Orestes, mas acabou causando o fim trágico de Hipátia. Vale ressaltar também que apenas uma parcela pequena dos cristãos tinha dificuldades em tolerar cientistas, como bem afirma Eves (2011, p.164); “Uma minoria de extremistas da comunidade cristã tinha dificuldades em tolerar os cientistas”, e complementa; “A última cientista de Alexandria, Hipátia, foi assassinada selvagemente por fanáticos cristãos em 415 d.C”. Depois de Hipátia, passou mais de um milênio para que a história pudesse conhecer outra mulher que também veio a receber o título de matemática, conforme Morais Filho (1996) e Fernandez et al. (2018). Este último diz que:

> Existe um vazio histórico entre Hipátia de Alexandria e a matemática que vamos apresentar agora. Não se tem registros históricos de matemáticas por mais de 10 séculos. Alguns autores consideram o nome de Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil (França, 1706-1749), conhecida como a marquesa de Châtelet Laumont, como o primeiro nome feminino, após o de Hipátia, a dar contribuições em Matemática. (FERNANDEZ et al., 2018, p.13)

9 ALGUMAS ATIVIDADES

Nesse capítulo, exibiremos algumas atividades práticas que podem ser sugeridas por professores da educação básica. Atividades desse tipo são importantes, pois além de fugirmos das cansativas listas de exercícios, os alunos poderão sentir o prazer da descoberta. Mostramos também uma possível solução para algumas atividades.

9.1 O que é e para que serve π? – 8º ANO

Unidade Temática: Grandezas e medidas.

Duração: Três aulas de 50 minutos.

Objetos de Conhecimento: Área do círculo e comprimento de sua circunferência.

Habilidades: (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Recursos Didáticos: Régua, Compasso, Tesoura, Papelão, lápis, Corpos Redondos, Barbante.

METODOLOGIA

Para a primeira parte, serão necessários uma régua e um barbante. Sugerir também que os alunos tragam objetos cilíndricos, como garrafas ou copos plásticos de vários tamanhos. Essa primeira etapa consiste em pedir para que os alunos meçam e determinem os quocientes entre as circunferências dos objetos trazidos por eles e seus respectivos diâmetros, preenchendo a seguinte tabela:

Figura 54 – Modelo de tabela para auxílio no cálculo de π

Objeto	Circunferência	Diâmetro	Circunferência/Diâmetro
⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Autoria própria

Ao preencher essa tabela, os estudantes deverão observar certo padrão na quarta coluna. O professor pode sugerir questões do seguinte tipo pra eles:

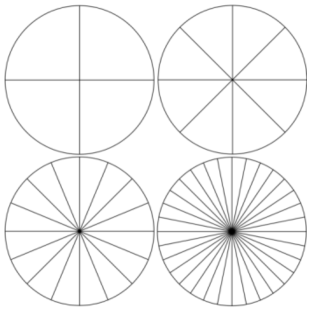
- Ao preencher a tabela, encontrou algo anormal?
- Em sua opinião, qual o motivo disso acontecer?
- Será que com outros objetos o resultado seria parecido?

Por fim, o professor pode dizer que existe um número muito especial, e que uma das formas de obtê-lo é justamente da maneira que acabou de ser feita, falando um pouco de sua história e importância, além de levá-los a compreender a fórmula para o comprimento de uma circunferência qualquer, $C=2\pi r$, onde r é um raio qualquer.

Com os alunos familiarizados com a fórmula para o comprimento de uma circunferência, é possível tentar levá-los a deduzirem a fórmula para a sua área, da seguinte forma:

Peça que desenhem em um pedaço de papel (de preferência papelão) um círculo qualquer de raio r. Em seguida, peça que tracem dois diâmetros do círculo, perpendiculares entre si, dividindo o círculo em quatro setores circulares iguais, e os recortem. Peça para que eles dividam cada setor em dois novos setores congruentes. Ao fim, teremos oito setores iguais. Peça para que sigam esse procedimento até que tenham dividido o círculo em trinta e duas partes iguais, pois mais do que isso ficaria inviável de fazer. Observe a próxima figura, onde dividimos o círculo em 4, 8 16 e 32 setores iguais.

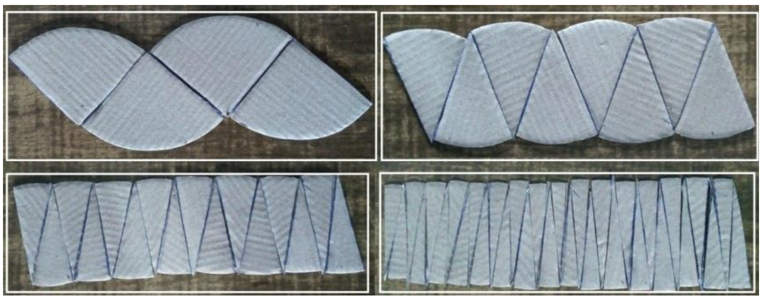
Figura 55 – Círculos divididos em 4, 8, 16 e 32 setores



Fonte: Autoria própria

Cada vez que os alunos dividirem a figura em novos setores, é importante que eles os montem conforme a próxima figura.

Figura 56 – Modelo para montar os setores circulares



Fonte: Autoria própria

O professor deve tentar induzir os alunos a perceberem que, quanto maior for à quantidade de setores, mais próxima a figura gerada estará de um retângulo, sem que a área se altere. Fazendo o número de setores aumentar indefinidamente, seu lado maior ficará tão próximo quanto queiramos da metade da circunferência, e o lado menor, do raio. Isto é, seu lado maior será tão próximo quanto queiramos de πr e seu lado menor de r. Portanto sua área será dada por:

$$\pi r \cdot r = \pi \cdot r^2$$

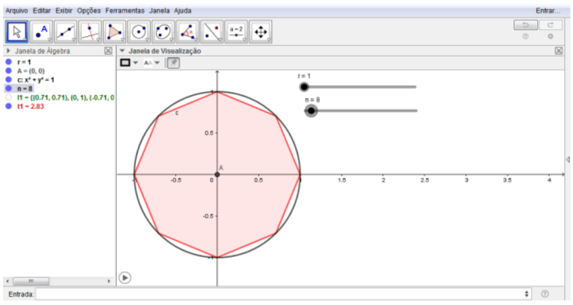
Que é a área de um círculo qualquer de raio r.

Outra forma de trabalhar a área e o perímetro do círculo em sala de aula é por meio do Software Geogebra. Com ele podemos aproximar o perímetro e a área do círculo usando polígonos regulares, inscritos. Para realizar essa tarefa, primeiramente construa um controle deslizante “r”, com valor mínimo igual a 1, valor máximo igual a 5, e 0.01 como incremento.

Crie um círculo “c” centrado na origem e com raio “r”, para poder variar o raio dele com o controle deslizante.

Depois, crie um controle deslizante “n” para a quantidade de lados do polígono inscrito. Para esse novo controle, atribua 3 como o valor mínimo, 96 como máximo, e incremento 1, assim pode ter um polígono de 3 a 96 lados. Em seguida, digite o comando: Sequência((r*cos(t (360°) / n), r*sen(t (360°) / n)), t, 1, n). O Geogebra lhe retornará uma lista de pontos “l1”; então, digite o próximo comando: Polígono(l1); o resultado será o polígono “t1”. Observemos a próxima figura, onde podemos alterar a quantidade de lados de “t1” variando o controle deslizante “n”, e o raio do círculo ao qual ele está inscrito variando o controle “r”.

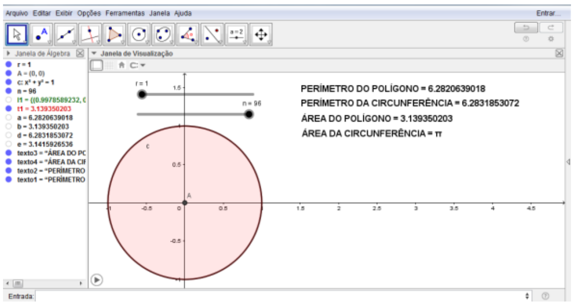
Figura 57 – Polígono regular de 8 lados inscrito em uma circunferência



Fonte: Autoria própria

Dentre as funções do Geogebra, podemos determinar o perímetro e a área tanto do polígono quanto da circunferência, bastando digitar os comandos: Perímetro(t1), Área(t1), Perímetro(c) e Área(c). Por fim, podemos usar caixas de texto na tela inicial com Geogebra, para podermos ter uma visualização das informações dos objetos criados. Observe a próxima figura, onde temos um polígono de 96 lados inscrito em uma circunferência unitária.

Figura 58 – Polígono regular de 96 lados inscrito em uma circunferência unitária



Fonte: Autoria própria

Poderíamos ter uma aproximação tão boa quanto quiséssemos, bastando ter atribuído um valor máximo maior para o controle deslizante “n”.

9.2 Calculando Distâncias Inacessíveis – 9º ANO

Unidade Temática: Geometria.

Duração: Duas aulas de 50 minutos.

Objetos de Conhecimento: Semelhança de triângulos.

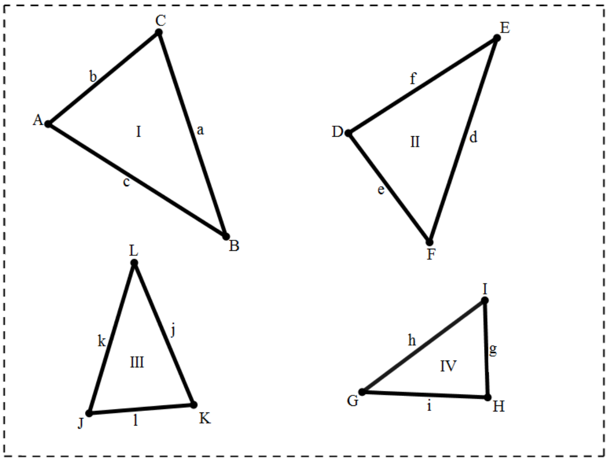
Habilidades: (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Recursos Didáticos: Régua, Transferidor, lápis.

METODOLOGIA

Inicialmente, entregue uma folha, como a que segue, aos alunos, onde o triângulo I é semelhante ao triângulo III, e o triângulo II é semelhante ao triângulo IV.

Figura 59 – Modelo de atividade sobre semelhança de triângulos



Fonte: Autoria Própria

Em seguida, peça que os alunos meçam os lados dos triângulos com a régua, e com o transferidor os ângulos dos mesmos, e preencham a seguinte tabela.

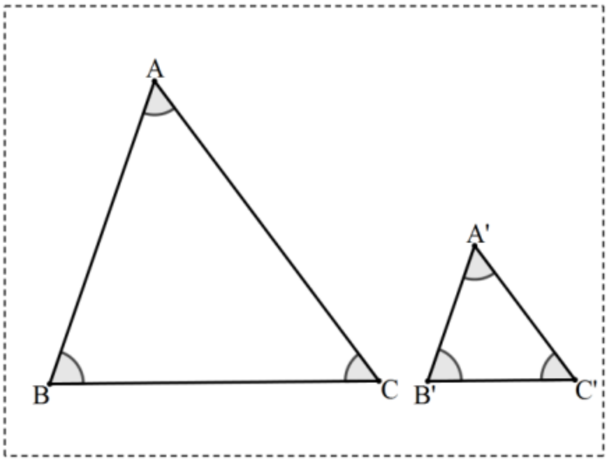
Figura 60 – Modelo de tabela para os alunos preencherem

Lados	Medida dos lados	Ângulos	Medida dos ângulos	Razões	Resultados das razões
a		A		a/k	
b		B		a/i	
c		C		a/f	
d		D		b/l	
e		E		b/g	
f		F		b/e	
g		G		c/j	
h		H		c/h	
i		I		c/d	
j		J		e/b	
k		K		e/l	
l		L		e/g	
				f/a	
				f/k	
				f/i	
				d/c	
				d/j	
				d/h	

Fonte: Autoria Própria

A ideia é que com a tabela preenchida, os alunos percebam que os triângulos I e III possuem os mesmos ângulos, e que as razões entre seus lados correspondentes são iguais. O mesmo deve ocorrer para os triângulos II e IV. Por fim, para fixar as ideias, o professor deve entregar aos alunos uma folha com triângulos semelhantes, como a que segue:

Figura 61 – Triângulos semelhantes



Fonte: Autoria Própria

Com as folhas entregues, e com auxílio dos resultados obtidos pelos alunos ao preencherem a tabela anterior, o professor deverá concluir com eles que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k\ (razão\ de\ semelhança)$$

Por fim, o professor deverá falar aos alunos todos os casos de semelhança, inclusive os que eles perceberam ao preencherem a tabela, mostrando e resolvendo exemplos dos mesmos com a turma.

ATIVIDADE 1

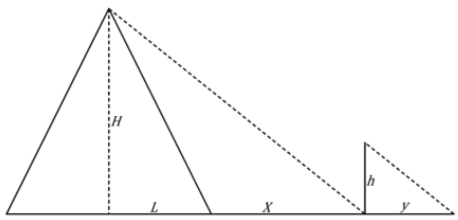
Leia o texto e responda:

No segundo capítulo desse trabalho, foi dito que Tales de Mileto possivelmente calculou a altura de uma pirâmide. Para isso, supõe-se que ele tenha usado um dos seguintes métodos.

O primeiro sugere que ele tenha enfincado uma estaca no chão e tenha esperado o sol estar em uma posição onde as alturas dos objetos possuem o mesmo comprimento de suas sombras. Nesse momento, ele pediu que calculassem rapidamente o tamanho da sombra da pirâmide, obtendo assim o tamanho de sua altura.

O segundo sugere que Tales fincou uma estaca perpendicularmente no extremo da sombra projetada pela pirâmide. Desta forma, as projeções das sombras pela pirâmide e estaca lhe dariam dois triângulos semelhantes. Como ele poderia obter de forma fácil o tamanho da base do triângulo provido da pirâmide e sabia o tamanho dos lados do triângulo provido pela estaca, ele — usando uma simples proporção — teria obtido o tamanho da altura da pirâmide.

Figura 62 – Modelo para calcular a altura de uma pirâmide



Fonte: Autoria Própria

1º Observe objetos que são comuns em seu cotidiano como árvores, muros ou qualquer objeto que projete sombra, e consiga uma vara de qualquer comprimento conhecido por você. Calcule a altura de tais objetos seguindo os passos de Tales.

2º Finque a estaca ao chão de forma que conheça a altura da parte que ficou fora do chão e, algumas vezes por dia, vá onde ela está, medindo o tamanho de sua sombra para encontrar o horário em que a sombra dela será igual à altura (*isso deve acontecer duas vezes ao dia, uma na parte da manhã e outra na parte da tarde*.). Então, meça o tamanho das sombras dos mesmos objetos que mediu na questão anterior para encontrar as alturas dos mesmos.

3º Faça uma tabela e compare os resultados obtidos nas duas questões anteriores. Caso tenha alturas diferentes para o mesmo objeto, tente descobrir o que causou tal diferença.

Exemplo: Suponha que você calculou a altura de uma laranjeira, de um poste e de uma goiabeira, e encontrou 2 metros para a laranjeira, 6 metros para o poste e 2,5 metros para a goiabeira, pelo primeiro método; 2 metros para a laranjeira, 5,9 metros para o poste e 2,6 metros para a goiabeira, pelo segundo método. A tabela fica com a seguinte aparência:

Figura 63 – Modelo de tabela para a 3º questão

	Altura pelo método1	*Altura pelo método 2*
Laranjeira	*2 metros*	*2 metros*
Poste	*6 metros*	*5,9 metros*
Goiabeira	*2,5 metros*	*2,6 metros*

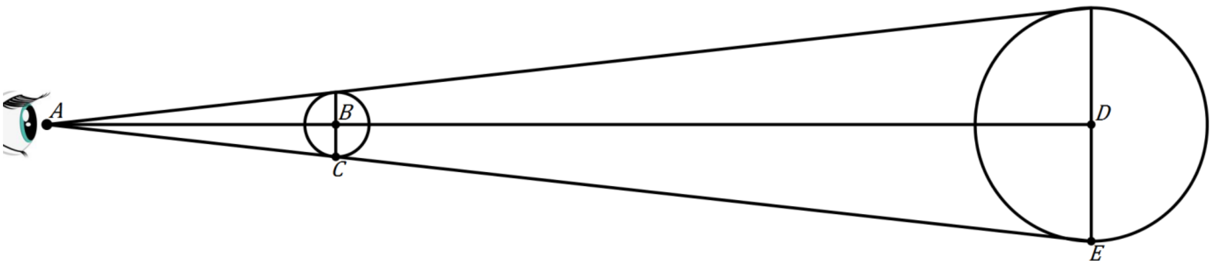
Fonte: Autoria própria

Durante um eclipse total do Sol, Aristarco percebeu que, vistos da Terra, o Sol e a Lua possuem aproximadamente a mesma distância angular, isto é, os raios de visão do Sol e da Lua são praticamente os mesmos vistos do planeta Terra.

4º Baseado no modelo proposto por Aristarco (Figura 64). Em uma noite de Lua cheia, de preferência no início, quando a Lua está ao horizonte, faça a seguinte experiência:

Meça o diâmetro de uma moeda, e com a ajuda de uma pessoa, alinhe a moeda de maneira que ela e a Lua estejam no mesmo ângulo de visão; peça para a pessoa afastar a moeda até que ela cubra totalmente a Lua. Meça, então, a distância da moeda até você. Sabendo da distância entre você e a moeda, o diâmetro da moeda e que o diâmetro da Lua mede 3476 km, calcule a distância entre a Terra e a Lua. Dica: observe a próxima figura; veja que os triângulos *ABC* e *ADE* são semelhantes.

Figura 64 – Modelo para o cálculo da distância entre a Terra e a Lua



Fonte: Autoria própria

Uma possível solução:

Consideremos uma moeda de 10 centavos, que mede aproximadamente 2 centímetros de diâmetro. Consideremos também que a distância entre a moeda e o observador seja de 3 metros. O raio da Lua mede aproximadamente 1738 quilômetros. Convertendo todas as unidades para o *metro* e observando a figura anterior, temos:

$$DE = 1738\, quilômetros \; = 1738000\, metros$$

$$BC = 2\, centímetros = 0{,}02\, metros$$

$$AB = 3\, metros$$

$$AD?$$

Para encontrar o valor de AD, basta notarmos que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADE, portanto temos:

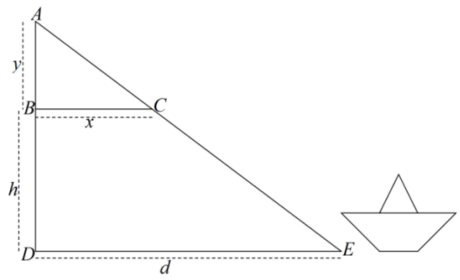
$$\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1738000}{AD} = \frac{0{,}02}{3} \Longrightarrow AD = 3 \cdot \frac{1738000}{0{,}02} = 260.700.000$$

Portanto, a distância entre a Terra e a Lua mede aproximadamente 260.700.000 metros. Obviamente, é um valor longe do esperado, mas isso se deve ao valor fictício escolhido para ser a distância entre a moeda e o observador.

ATIVIDADE 2

No segundo capítulo deste trabalho, foi dito que Tales de Mileto calculou a distância de um navio até a margem, utilizando um possível método utilizado por ele para a realização dessa tarefa, Tales colocou uma vara horizontalmente em um pequeno penhasco de forma que a extremidade da vara coincidisse com o navio. Vejamos essa situação na próxima figura, onde $BD = h$ é a altura do penhasco, $AB = y$ a altura de Tales, $BC = x$ o comprimento da vara e $DE = d$ a distância até o navio.

Figura 65 – Modelo para o cálculo da distância do navio até a margem por Tales

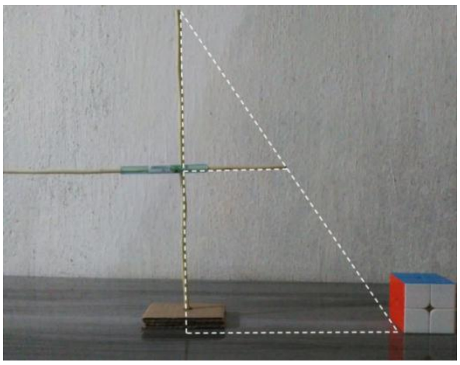


Fonte: Autoria própria

É fácil ver pela figura anterior que os triângulos *ABC* e *ADE* são semelhantes. Portanto, basta que saibamos os valores de *h*, *y* e *x* para descobrirmos o valor da distância *d*. Mostraremos agora uma maneira simples de construir o equipamento de medição baseado no problema de calcular a distância de um navio a margem, para essa tarefa serão necessários quatro pedaços retangulares de papelão, um tubo de caneta, duas varetas e cola quente.

Para construir, inicialmente cole os pedados os pedaços de papelão uns aos outros, fazendo assim uma base. Agora, faça um furo no centro da base e coloque uma das varetas, com um pouco de cola, para que fique firme. Na vareta presa à base, cole perpendicularmente o tubo de caneta, a uma altura conhecida. Esse tubo será usado para passar a outra vareta. Dessa forma está pronto o equipamento. Vejamos ele em uso na próxima figura.

Figura 66 – Equipamento de medição em uso



Fonte: Autoria Própria

Com o equipamento feito, o professor pode sugerir várias atividades práticas envolvendo cálculos de distâncias entre objetos quaisquer.

9.3 Construção de um Teodolito – Ensino Médio

Unidade Temática: Geometria e Medidas.

Duração: Três aulas de 50 minutos.

Competência Específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

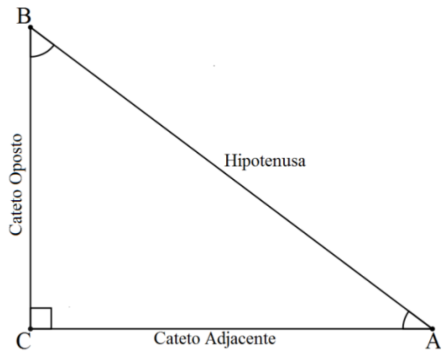
Habilidades: (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Recursos Didáticos: Esquadro, Transferidor, Compasso, Régua, Lápis.

METODOLOGIA

Inicialmente, peça para que os alunos desenhem um triângulo retângulo, como o dá próxima figura, e trabalhe com eles os elementos do triangulo retângulo.

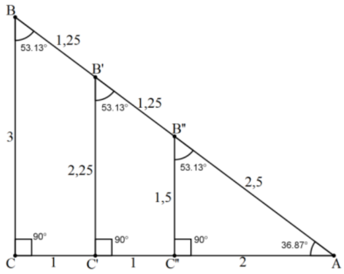
Figura 67 – Triângulo retângulo e seus elementos



Fonte: Autoria Própria

Agora com o esquadro, a régua e o transferidor, peça que desenhem um triângulo retângulo como o que podemos visualizar na próxima figura. Além disso, peça que meçam seus ângulos e anotem tudo.

Figura 68 – Triângulos retângulos semelhantes



Fonte: Autoria Própria

Os triângulos ABC, AB’C’ e AB’’C’’ são semelhantes, pois possuem os mesmos ângulos. Proponha que os alunos façam uma experiência, medindo com a régua o tamanho dos catetos opostos, dos catetos adjacentes e das hipotenusas, e que preencham a seguinte tabela:

Figura 69 – Tabela para as relações trigonométricas dos triângulos anteriores

	ABC	AB'C'	AB''C''
Cateto Oposto/Hipotenusa			
Cateto Adjacente/Hipotenusa			
Cateto Oposto/Cateto Adjacente			

Fonte: Autoria Própria

Os alunos deverão perceber que cada linha da tabela possui suas razões iguais, e que isso aconteceria com qualquer outro triângulo semelhante a este, onde cada uma dessas razões possui um nome especial.

$$\frac{Cateto\ Oposto}{Hipotenusa} = sen(36{,}87°)$$

$$\frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa} = cos(36{,}87°)$$

$$\frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} = tan(36{,}87°)$$

Vamos agora prosseguir na construção do Teodolito.

Teodolito: É um instrumento óptico que serve para medir ângulos tanto na horizontal quanto na vertical; é usado para demarcações de terras, em construções e em vários ramos da indústria.

Figura 70 – Teodolito antigo

Fonte: http://site.mast.br/multimidia_instrumentos/teodolito_funcao.html

Desde que foi inventado, o Teodolito foi sendo aperfeiçoado. No entanto, faremos um Teodolito bastante rudimentar, mas muito útil para alunos colocarem em prática conhecimentos de trigonometria, tornando-a mais prática e divertida. O mesmo pode ser confeccionado por alunos e tem custo muito baixo e fácil construção. Para construção do Teodolito, precisaremos dos seguintes materiais:

- Um pedaço de papelão.
- Dois pedaços de cano de antena (um fino para medirmos os ângulos formados, e o outro um pouco mais grosso para os tiros).
- Um copo de requeijão vazio e com tampa, mas pode ser qualquer copo com tampa, desde que a tampa não seja de rosca.
- Um transferidor impresso.
- Um tubo de cola quente.

Na próxima figura, podemos observar como ficaram os materiais e o Teodolito pronto (*Alunos podem se inspirar nestes para que possam fazer suas próprias medições*.).

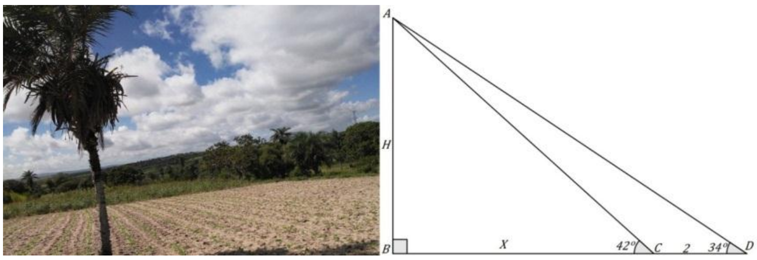
Figura 71 – construção de um Teodolito

Fonte: Autoria própria

Com o Teodolito pronto, foi calculada a altura de um Coqueiro. Ressalto que, na medição, o Teodolito se encontrava aproximadamente a um metro de altura. A seguir, exibiremos os passos e resultados encontrados.

Dei o primeiro tiro a uma distância X do Coqueiro, apontando para sua extremidade superior; verifiquei que o ângulo formado media 42°, aproximadamente. Afastei-me dois metros e dei um segundo tiro; medi o ângulo formado, o mesmo deu 34°, aproximadamente. Observe a figura, onde $AB = H$, $BC = X$ e $CD = 2$ e H é a altura do Coqueiro. Observe a próxima figura:

Figura 72 – Cálculo da altura de um Coqueiro



Fonte: Autoria própria

Observando o triângulo ABC, temos:

$$\frac{H}{X} = tan\,42° \Longrightarrow H = 0{,}9004X \qquad (i)$$

Observando agora o triângulo ABD, temos:

$$\frac{H}{X+2} = tan\,34° \Longrightarrow H = 0{,}6745X + 1{,}3490 \qquad (ii)$$

Por (i) e (ii), temos:

$$(0{,}9004 - 0{,}6745)X = 1{,}349 \Rightarrow 0{,}2259X = 1{,}349 \Rightarrow X = 5{,}971\ Metros \qquad (iii)$$

Substituindo (*iii*) em (*i*) e usando o fato do Teodolito está a um metro de altura, obtemos:

$$H = 0{,}9004 \cdot 5{,}971 + 1 \Rightarrow H = 6{,}37\ Metros$$

Portanto, o Coqueiro mede 6,37 metros, aproximadamente.

9.4 Volumes do Cilindro, da Esfera e do Cone – Ensino Médio

Unidade Temática: Geometria e Medidas.

Duração: Três aulas de 50 minutos.

Competência Específica 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades: (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

Recursos Didáticos: Régua, Compasso, Lápis, Papelão, Massa de Modelar, Recipiente com Água.

METODOLOGIA

Observe os passos:

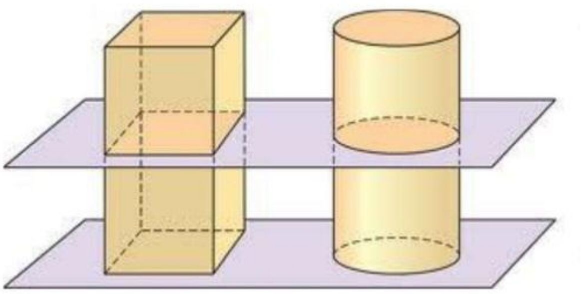
- Primeiramente o professor deve dividir a sala em grupos de três ou quatro alunos.
- Depois, o professor deve pedir para que eles confeccionem os seguintes sólidos: um cilindro com raio igual à altura, um cone com mesmo raio e altura que o cilindro anterior e uma semiesfera com mesmo raio dos anteriores. O professor deve orientá-los e se possível buscar materiais para facilitar a construção dos sólidos, deixando-os mais uniformes.

- Com um recipiente com água, sugerir que os alunos mergulhem os sólidos confeccionados por eles.
- Primeiro mergulhe o cone, então marque a altura que a água atingiu.
- Depois, mergulhe a semiesfera, e marque a altura que a água atingiu, igual ao feito com o cone.
- Por último, o cilindro, com o mesmo procedimento dos sólidos anteriores.

Com as marcações, os alunos poderão perceber que a quantidade de água deslocada pela semiesfera é o dobro da deslocada pelo cone, e que a deslocada pelo cilindro é o triplo da deslocada pelo cone. O professor pode sugerir também que os alunos mergulhem o cone junto da semiesfera e observem que a quantidade de água deslocada é a mesma que a quantidade deslocada pelo cilindro.

Feito isso, através da fórmula para o volume do cilindro, o professor pode guiar os alunos a descobrirem as fórmulas para o volume do cone e o volume da esfera. Para obtermos a fórmula para o volume do cilindro, utilizaremos o Princípio de Cavalieri[23].

Figura 73 – Volume do cilindro pelo Princípio de Cavalieri



Fonte: https://www.slideserve.com/jered/ndice

Para obter o volume do cilindro pelo Princípio de Cavalieri, consideremos a figura anterior, onde temos um cilindro e um prisma de mesma altura apoiados sobre o mesmo plano. Se as áreas das bases do cilindro e do prisma são iguais, tracemos um plano paralelo ao plano que contém as bases deles. Esse plano determinará duas novas secções de áreas iguais. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, o cilindro e o prisma possuem volumes iguais.

[23] Dados dois sólidos incluídos entre um par de planos paralelos, se todo plano paralelo ao par de planos e que intersecta os sólidos o faz em seções cujas áreas estão sempre na mesma razão, então os volumes dos sólidos também estão nessa mesma razão. Em particular, se as áreas seccionadas forem iguais, os volumes dos sólidos também serão.

Como o volume do prisma é dado pelo produto da área da base pela altura, o volume do cilindro também o é. Para o volume do cilindro, temos:

$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot r = \pi r^3$$

Para o volume do cone, temos:

$$V_{cilindro} = 3 \cdot V_{cone} \Longrightarrow 3 \cdot V_{cone} = \pi r^3 \Longrightarrow V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^3$$

Aqui o professor pode questionar seus alunos sobre o que aconteceria caso a altura do cilindro e do cone fossem um *h* qualquer. Para o volume da semiesfera, temos:

$$V_{semiesfera} = 2 \cdot V_{cone} \Longrightarrow V_{semiesfera} = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Como o volume da esfera é o dobro do volume da semiesfera, segue que:

$$V_{esfera} = 2 \cdot V_{semiesfera} \Longrightarrow V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Mostraremos agora uma forma de construir o cilindro, o cone e a esfera. Para essas construções, pode-se utilizar uma caixa de sapato para fazer os moldes e massa de modelar. Procede-se da seguinte forma:

Para construir o cone, desenhe um quadrado e o corte em diagonal, formando dois triângulos isósceles. Depois, faça um corte em cada um dos triângulos, para que possa encaixar um ao outro, fazendo assim um molde para guiar na construção com a massa de modelar.

Para construir o cilindro, desenhe um retângulo com lado maior igual à maior base dos triângulos recortados anteriormente, e o lado menor igual à metade do lado maior. Faça dois retângulos iguais, depois faça um corte perpendicularmente na metade de cada um nos seus lados maiores para encaixar um ao outro, fazendo assim um molde para guiar na construção com a massa de modelar.

Para a construção da semiesfera, meça com o compasso o raio do cilindro confeccionado anteriormente, e desenhe um círculo com o raio igual a essa altura. Por fim, recorte o círculo no seu diâmetro formando dois semicírculos. Faça um corte perpendicular na metade do diâmetro de um, e outro na metade do semicírculo do outro, para encaixá-los, formando um molde para guiar na construção com a massa de modelar. Os três moldes deverão ficar como podemos observar na próxima figura.

Figura 74 – Moldes para construção do cilindro, cone e semiesfera

Fonte: Autoria Própria

Com esses moldes, foram construídos um cilindro e um cone de raio e altura *r*, e uma semiesfera também de raio *r*.

Figura 75 – Cilindro, cone e semiesfera feitos com massa de modelar

Fonte: Autoria Própria

10 COMENTÁRIOS FINAIS

Mostramos neste trabalho uma coletânea de feitos matemáticos que não tiveram o auxílio da tecnologia; não da moderna tecnologia que dispomos hoje em dia. E de fato, apesar de no tempo em questão existir outras formas de tecnologias, as mesmas eram muito rudimentares e quase que não existiam. Mostramos também um pouco da vida dos possíveis responsáveis por tais feitos.

Como pudemos observar no primeiro capítulo, existem muitos autores favoráveis ao uso da História da Matemática como recurso pedagógico, pois a partir dela os estudantes poderão ver que a Matemática nem sempre teve essa visão pronta e acabada que possui hoje. Na maioria das vezes, ela surgiu para resolver um problema prático e foi evoluindo de acordo com a necessidade de cada época.

Do segundo ao oitavo capítulo, vimos sete personagens importantes para a História da Ciência, em particular da Matemática, onde muitas de suas ideias podem ser replicadas no ensino básico. Nestes, ficou clara a importância da Geometria e Trigonometria para o desenvolvimento de ciências como Astronomia e Geografia; a recíproca também é verdadeira.

Destacamos ainda, no oitavo capítulo, Hipátia de Alexandria, a primeira mulher a receber o título de *matemática*. Esta última pode ser de grande importância para incentivarmos mulheres a seguirem carreira nas ciências exatas, visto a baixa quantidade de mulheres que seguem ou que desejam seguir carreira nessa área.

Quanto às atividades, a ideia inicial era aplicar algumas delas em turmas do ensino básico de uma escola de minha cidade. Porém, devido às medidas de distanciamento social impostas pela COVID-19, isso não foi possível. No entanto, acredito que as atividades sugeridas nesse trabalho, em particular as práticas, podem ser de grande proveito, por ajudarem a complementar determinados conteúdos, trazendo possíveis aplicações, além de possíveis oficinas, podendo deixar as aulas mais agradáveis.

Espero que esse trabalho seja útil para professores e alunos do ensino básico, ou qualquer outra pessoa que queira ter uma pequena noção da importância da Matemática e como ela evoluiu historicamente até chegar à forma que está hoje em dia.

REFERÊNCIAS

ASSIS, André Koch Torres. Sobre os Corpos Flutuantes, Tradução Comentada de um Texto de Arquimedes. **Revista da SBHC**, n. 16, p. 69-80,1996.

ASSIS, André Koch Torres. Sobre o Equilíbrio dos Planos, Tradução Comentada de um Texto de Arquimedes. **Revista da SBHC**, n. 18, p. 81-94, 1997.

ASSIS, André Koch Torres; CAMPOS, Nivaldo Benedito Ferreira. Sobre o Equilíbrio dos Planos (segunda parte). **Revista Brasileira de História da Ciência**, v. 2, n. 2, p. 146-157, 2004.

ASSIS, André Koch Torres; CAMPOS, Nivaldo Benedito Ferreira. Sobre os Corpos Flutuantes (segunda parte). **Revista Brasileira de História da Ciência**, v. 5, n. 2, p. 369-397, 2012.

ÁVILA, Geraldo. Arquimedes, a esfera e o cilindro. **RPM 10**, 1986. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/10/3.htm>. Acesso em: 17 mai. 2020.

ÁVILA, Geraldo. O ensino de Matemática. **RPM 23**. 1993. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/23/1.htm>. Acesso em: 05 mai. 2020.

ÁVILA, Geraldo. A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga**. RPM 01**.1982. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/1/3.htm>. Acesso em: 25 mai. 2020.

BOYER, Carl B. **História da Matemática** / Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach, tradução Helena Castro. 3. ed, São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA, 2012.

BONGIOVANNI, Vincenzo. O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, UNIBAN-SP, V2.5, p. 94-106, 2007.

Brasil. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 09 mai. 2020.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos história e matemática em sala de aula**. 1. ed. Belém-Pará, 2017.

COLAÇO, Douglas; BAUAB, Fabrício Pedroso. A Geografia e a Cartografia Produzidas na Antiguidade: a contribuição dos clássicos. **Geografia**. Londrina. v. 25. n. 2. p. 60 – 75, jul/dez, 2016.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **A história da matemática: Questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática**. Viggiani Bicudo, Editora UNESP, São Paulo, 1999; p. 97-115.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **A interfase entre História e Matemática: uma visão histórico-pedagógica**. In: FOSSA, J. A. Ensaios sobre Educação e História da Matemática. Rio Claro: Sbhmat, 2000, p. 241-271.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: Da teoria a prática**. 17.ed. Campinas: PAPIRUS EDITORA, 2009.

DOUCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol.9. 9ª.ed. São Paulo: ATUAL EDITORA, 2013.

EUCLIDES. **Os elementos/Euclides**; tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: editora da Unicamp, 2011.

FILHO, Daniel C. de Morais. As Mulheres na Matemática. **RPM 30**, 1996. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/30/2.htm>. Acesso em: 27 ago. 2020

FOSSA, John Andrew. Matemática, história e Compreensão. **Revista Cocar**: Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Estado do Pará, v.2, n.4, p.7-15, 2008.

FERNANDEZ, Cecília de Souza et al. **A História de Hipátia e de muitas outras matemáticas**. II Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Sudeste - USP - São Paulo - SP – 2018

GASPERI, Wlasta N. H. De; PACHECO, Edilson Roberto. **A história da matemática como instrumento para a interdisciplinaridade na educação básica**. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/701-4.pdf>. Acesso em 08 mai. 2020.

GOULART, Ana Teresa. et al. **Dificuldades no aprendizado de Matemática: percepção de estudantes de duas escolas públicas de Anita Garibaldi**. Cientefico. v. 18, n. 37, Fortaleza, jan./jun. 2018.

HEFEZ, A; VILLELA, M. L. T. **Polinômios e equações algébricas**. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol.3. 9ª.ed. São Paulo: ATUAL EDITORA, 2013.

LARA, Isabel Cristina Machado de. O ensino da Matemática por meio da História da Matemática: Possíveis articulações com a Etnomatemática. **VIDYA**, v. 33, n. 2, p. 51-62, jul./dez., 2013 - Santa Maria, 2013.

LIMA, Samya de Oliveira et al. **História da Matemática: Um recurso pedagógico para o processo de ensino – aprendizagem de Matemática. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades.** São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

LOPES, Lidiane Schimitz; ALVES, Antônio Maurício Medeiros. **A História da Matemática em sala de aula: propostas de atividades para a Educação Básica**. XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014.

MAGNAGHI, Ceno Pietro; ASSIS, André Koch Torres de. **O método de Arquimedes: Análise e Tradução Comentada**. 1. ed. Campinas: Unicamp, 2019.

MIGUEL, Antônio. **As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores**. 73-05 p. In: ZETETIKÉ, v. 5, n. 8, 1997.

MIGUEL, Antônio. ***Três estudos sobre história e educação matemática***. 1993. 361 f. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.

MOL, Rogério S. **Introdução à História da Matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: DITORA CAED-UFMG. 2011.

MONTEIRO, Mário Antonio Alves et al. UM Novo Olhar Para o Método de Ptolomeu Dedeterminação da Distância Terra-Lua. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia - RELEA**, n. 25, p. 25-37, 2018.

NOGUEIRA, Salvador; CANALLE, João Batista Garcia. **Astronomia: Ensinos fundamental e médio**. 1. ed. Brasília: Ministério da Educação, 2009.

OLIVEIRA, Vanessa Castro de. et al. **A História da Matemática e o processo de ensino aprendizagem**. XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. p.459-462, 13-16 nov. 2014.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. Vol.1 ed.2. EDITORA MODERNA. São Paulo, 2013

PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da Silva Lorenzzetti. Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio. **Revista Principia** - Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB, [S.l.], n. 38, p. 105-119, fev. 2017.

PEREIRA, Paulo Cesar R. Revivendo Eratóstenes. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia - RELEA**, n. 3, p. 19 -38, 2006.

PEDROSO, H. A.; PRECIOSO, J. C. Soluções dos três problemas clássicos de construção por métodos não-euclidianos. C.Q.D. – **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 5, p. 16-31, dez. 2015.

PESSANHA, José Américo Motta. **Os Pré Socráticos vida e obra**. Editora Nova Cultural Ltda. São Paulo, 1996,Alameda Ministro Rocha Azevedo, 346 - 2° andar -CEP 01410-901 – São Paulo, SP.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática.**1. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática; Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, Antônio José de Jesus et al. **O Projeto Eratóstenes: A reprodução de um experimento histórico como recurso para a inserção de conceitos da astronomia no ensino médio**. Cad. Bras. Ens. Fís., v. 29, n. 3: p. 1137-1174, dez. 2012.

SILVA, Juliana de Fátima; SOLTAU, Samuel Bueno. Medindo o planeta Terra: um experimento com abordagem interdisciplinar. **e-xacta**, Belo Horizonte, v. 7, n. 1, p. 35-44. (2014).

TATTO, Franciele; SCAPIN, Ivone José. Matemática: por que o nível elevado de rejeição? **Revista de Ciências Humanas**, v. 5, n. 5, p. 1-14, 2004.