

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

LUCAS DA MATA ROCHA MENEZES

**OTIMIZAÇÃO DE AMORTECEDORES DE MASSA SINTONIZADOS NO
CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM VIGAS E PLACAS**

Maceió
2020

Lucas da Mata Rocha Menezes

**OTIMIZAÇÃO DE AMORTECEDORES DE MASSA SINTONIZADOS NO
CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM VIGAS E PLACAS**

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil da
Universidade Federal de Alagoas, como
parte dos requisitos para a obtenção do
título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: *Estruturas*

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages
Coorientador: Dr. Fábio Martins Gonçalves
Ferreira

Maceió

2020

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

M543o Menezes, Lucas da Mata Rocha.

Otimização de amortecedores de massa sintonizados no controle de vibrações em vigas e placas / Lucas da Mata Rocha Menezes. - 2020.
149 f. : il.

Orientador: Eduardo Nobre Lages.

Co-orientador: Fábio Martins Gonçalves Ferreira.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 147-149.

1. Vigas. 2. Placas (Engenharia). 3. Otimização estrutural. 4. Dinâmica estrutural. I. Título.

CDU:624.07



Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC



**OTIMIZAÇÃO DE AMORTECEDORES DE MASSA SINTONIZADOS NO CONTROLE
DE VIBRAÇÕES EM VIGAS E PLACAS**

LUCAS DA MATA ROCHA MENEZES

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 30 do mês de abril do ano de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages
(Orientador – PPGEC/UFAL)

Prof. Dr. Fábio Martins Gonçalves Ferreira
(Coorientador - LCCV/UFAL)

Prof. Dr. José Guilherme Santos da Silva
(Avaliador Externo – UERJ)

Prof. Dr. Emerson Figueiredo dos Santos
(Avaliador Externo – UFS)

Dedico este trabalho à minha família, em especial ao meu pai
Tarcísio Rocha Menezes (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à minha família, em especial à minha mãe Suely e meu irmão Caio pelo apoio incondicional. À minha avó Joselice, minhas tias Rozana e Sandra e meu tio Jarbas que, mesmo morando longe, sempre estiveram presentes demonstrando atenção e carinho, e à memória de meu pai, Tarcísio, que é minha referência até hoje, que contribuiu de forma valorosa com a minha formação pessoal enquanto esteve presente.

À minha namorada, amiga e parceira Indiane Gomes, pela paciência e apoio nesta etapa final e crucial de finalização de uma fase tão importante na minha vida.

Ao meu professor e orientador Eduardo Nobre e ao coorientador Fábio Ferreira pela ajuda ao longo do curso e a elaboração desta dissertação; desde a escolha do tema até esta etapa final mostraram-se solícitos, dividindo conhecimento sem restrição alguma, com sabedoria, paciência e empenho, contribuindo para a elaboração deste trabalho.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas por repassarem seus conhecimentos, em especial aos professores Adeildo Ramos Júnior e Severino Marques, que além de ótimos professores, participaram da minha banca de qualificação, contribuindo de forma exemplar para a melhoria do trabalho.

Aos meus professores de graduação do Instituto Federal de Ciência, Tecnologia e Educação de Sergipe, em especial a Rodolfo Conceição, Euler Wagner, Carlos Henrique e Marcílio Goivinho, por terem me ajudado ao longo do curso me apresentando a vida acadêmica e de pesquisa, que influenciou minha tomada de decisão ao iniciar o mestrado.

Aos colegas da Geotec Consultoria e Serviço Ltda, escritório de projeto referência no Estado de Sergipe, onde, sob a tutela de Demóstenes Cavalcanti e Carlos Rezende, ensinaram-me a atuar no mercado com excelência e responsabilidade.

Aos meus colegas e amigos que fiz durante o curso de mestrado Luís Philipe, Francisco Binas, Lucas Muniz, Jéssica Vasconcelos e Wallison, que me ajudaram de forma imprescindível direta ou indireta ao longo do curso.

Ao Laboratório de Computação Científica e Visualização (LCCV) por toda a infraestrutura disponibilizada durante o exercício do curso.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, o qual possibilitou a minha dedicação exclusiva à pesquisa.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

RESUMO

MENEZES, Lucas da Mata Rocha. *OTIMIZAÇÃO DE AMORTECEDORES DE MASSA SINTONIZADOS NO CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM VIGAS E PLACAS*. 2019. 166f. Dissertação – Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2020.

A possibilidade de se trabalhar com materiais mais resistentes permite conceber estruturas mais esbeltas e leves que, por sua vez, podem ser mais sensíveis à ação das cargas dinâmicas oriundas do movimento de pessoas, máquinas ou ações da natureza, como o vento. O surgimento e propagação de fissuras, acréscimos de tensão devido a deslocamentos excessivos bem como desconforto aos usuários do empreendimento devido às acelerações que surgem na estrutura são alguns dos problemas estruturais que envolvem a dinâmica. Outra adversidade está relacionada com equipamentos sensíveis instalados em pisos, em que, ao estarem submetidos à determinada (indevida) aceleração, podem sofrer danos. As abordagens mais comumente empregadas para controle dessas vibrações excessivas é o enrijecimento da estrutura, porém em muitos casos este tipo de abordagem é inviabilizada por restrições arquitetônicas, estéticas ou relativa à própria capacidade da estrutura ao sofrer o acréscimo de elementos estruturais pesados para o enrijecimento. Problemas de vibrações em lajes não são incomuns; lajes industriais, por exemplo, estão sujeitas a vários tipos de ações dinâmicas simultâneas provenientes das diversas máquinas em operação instaladas no piso da fábrica. Outro caso são as lajes de academias, salões de festas e outros ambientes com grande movimento de pessoas que geram acelerações no piso. O presente trabalho explora a adoção de sistemas mecânicos de controle de vibrações (amortecedores) acoplados às estruturas, especificamente em vigas e placas, como uma solução alternativa à resolução do problema de engenharia. Utilizam-se ainda técnicas de otimização com o objetivo de obter projetos com a melhor relação custo-benefício de amortecedores. Dessa forma, realiza-se uma modelagem numérica via implementações computacionais do problema de vibração e seu controle em vigas e placas, com os resultados são validados e comparados com exemplos da literatura. Notou-se que, com o processo de otimização, pode-se chegar com a mesma eficiência na resposta estrutural, que utiliza massa e taxa de amortecimento menores.

Palavras-chave: *Vigas e Placas. Otimização Estrutural. Dinâmica das Estruturas. Controle de Vibrações.*

ABSTRACT

MENEZES, Lucas da Mata Rocha. *OPTIMIZATION OF TUNED MASS DAMPERS IN VIBRATION CONTROL OF BEAMS AND PLATES*. 2020. 166f. Thesis – Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2020.

The possibility to deal with more resistant materials allows the design of leaner and lighter structures which may be more sensitive to the action of dynamic loads that arising from the movement of people, machines or actions of nature, such as wind. The propagation of cracks, additional stress due to excessive displacements as well as discomfort to users due to the accelerations that arise in the structure are some of the structural problems involving the dynamics. Other adversity is related to sensitive equipment installed in floors, in which, when subjected to certain (undue) acceleration can suffer damages. The most commonly used approaches to control these excessive vibrations are the stiffening of the structure, but in many cases this type of approach is made unfeasible by architectural, aesthetic restrictions or relative to the structure's own ability to undergo the addition of heavy structural elements to the stiffening. Vibration problems on slabs are not uncommon; industrial slabs, for example, are subject to various types of simultaneous dynamic actions from the various machines in operation installed on the factory floor. Another case is the slabs of academies, party halls and other environments with large movement of people that generate accelerations in the floor. The present work explores the adoption of mechanical vibration control systems (attenuators) coupled to the structures, specifically in beams and plates, as an alternative solution of the engineering problem. Optimization techniques are used to obtain projects with the best cost-benefit ratio of attenuators. In this way, a numerical modeling is performed via computational implementations of the vibration problem and its control in beams and plates, the results are validated and compared with literature samples. It is noted that with the optimization process it is possible to arrive at the same structural response using lower values for mass and damper ratio parameters for TMD.

Keywords: *Beams and Plates. Structural Optimization. Structural Dynamics. Vibration Controls.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Protótipo em escala real da laje utilizada no estudo teórico-experimental.	2
Figura 1.2 – (a) Esquema de instalação do atenuador; (b) materiais utilizados para montagem do amortecedor; (c) e (d) amortecedor instalado na laje de testes.....	2
Figura 1.3 – Desenho esquemático de uma solução proposta para redução de vibrações em piso de um shopping center.	3
Figura 1.4 – Modelo em elementos finitos do pavimento em laje mista sob ação rítmica de pessoas.	4
Figura 1.5 – (a) indicação esquemática da instalação do amortecedor; (b) indicação da localização do amortecedor no edifício Taipei 101.....	5
Figura 1.6 – Layout da concepção dos amortecedores e como são instalados <i>in loco</i> no edifício Saint Francis Shangri-la Towers.	6
Figura 1.7 – Representação esquemática do sistema de amortecimento na prumada do edifício Saint Francis Shangri-la Towers.	6
Figura 2.1 – Características e fontes das forças dinâmicas usuais: (a) harmônica; (b) periódica não harmônica; (c) impulsiva; (d) aleatória.....	9
Figura 2.2 – Sistema dinâmico com um grau de liberdade e diagrama de corpo livre.	9
Figura 2.3 – Resposta de um sistema com um grau de liberdade em função do amortecimento viscoso.	12
Figura 2.4 – Fator de amplificação dinâmica em função da razão de frequências.....	16
Figura 2.5 – Média da aceleração no espaço de tempo Δt	26
Figura 3.1 – Representação de uma placa com espessura h	30
Figura 3.2 – Componentes de tensões em um elemento tridimensional infinitesimal.	30
Figura 3.3 – Deformações do elemento representativo no plano $x - y$	32
Figura 3.4 – Geometria e carregamento em uma placa.	33
Figura 3.5 – Deformada de uma seção transversal relativa ao plano $x - z$	34
Figura 3.6 – (a)Tensões em uma fibra genérica dz e (b) esforços internos de momento e cisalhamento.	36
Figura 3.7 – Esforços internos solicitantes e carga distribuída em um elemento infinitesimal de placa.	37
Figura 3.8 – Representação de uma placa com espessura h e dimensões a e b	41

Figura 3.9 – Representação de uma viga de vão L , com carga distribuída q , módulo de elasticidade E , momento de inércia I e massa distribuída linearmente m .	47
Figura 4.1 – Sistema de controle de ciclo fechado.	51
Figura 4.2 – Sistema de controle ativo de ciclo aberto.	51
Figura 4.3 – Sistema de controle ativo de ciclo fechado.	52
Figura 4.4 – Algumas configurações de amortecedores viscoelásticos: (a) simples camada de MVE, (b) com camada de restrição, (c) duplo sanduiche.	53
Figura 4.5 – (a) representação de uma placa com material viscoelástico acoplado, (b) representação da seção da placa com e sem carregamento atuante.	54
Figura 4.6 – Isoladores de Vibrações.	55
Figura 4.7 – Representação do acoplamento do ACL em uma estrutura com um grau de liberdade.	56
Figura 4.8 – Interior de uma torre com pêndulo acoplado para reduzir vibrações excessivas.	57
Figura 4.9 – Representação esquemática de um amortecedor de massa sintonizado em um trecho de uma laje nervurada.	58
Figura 4.10 – (a) Viga engastada com um AMS amortecido acoplado na extremidade, (b) representação da viga e AMS como um sistema massa-mola-amortecedor.	59
Figura 4.11 – Resposta da estrutura para diferentes taxas de amortecimento (ξa) do AMS.	63
Figura 4.12 – Resposta da estrutura para diferentes frequências (ωa) do AMS.	64
Figura 4.13 – Resposta da estrutura para diferentes massas do amortecedor (μ) do AMS.	65
Figura 4.14 – Relação ótima entre frequência do AMS e frequência da estrutura em função de μ .	66
Figura 4.15 – Taxa de amortecimento ótima em função de μ .	67
Figura 4.16 – Máxima resposta da estrutura em função de μ para $r = 0,95$.	68
Figura 4.17 – Máxima resposta da estrutura em função de μ para $r = 1,0$.	68
Figura 4.18 – Máxima resposta da estrutura em função de μ para $r = 1,05$.	69
Figura 4.19 – Máxima resposta relativa entre o AMS e a estrutura em função de μ para $r = 0,95$.	70
Figura 4.20 – Máxima resposta relativa entre o AMS e a estrutura em função de μ para $r = 1,0$.	70
Figura 4.21 – Máxima resposta relativa entre o AMS e a estrutura em função de μ para $r = 1,05$.	71

Figura 4.22 – Redução da estrutura principal para sistema de um grau de liberdade na forma modal.	72
Figura 4.23 – Representação do modelo estrutural discretizado com AMSs acoplados em cada grau de liberdade.	75
Figura 4.24 – Representação de uma placa com AMSs acoplados.	77
Figura 5.1 – Treliça plana sob otimização dimensional alterando a seção transversal das barras.	83
Figura 5.2 – Problema de otimização de forma. Encontrar a função $\eta(x)$ que melhor define a forma da viga em balanço.....	83
Figura 5.3 – Otimização topológica em uma treliça plana.	84
Figura 5.4 – Interpretação geométrica da condição KKT.	86
Figura 5.5 – Representação de um conjunto (a) convexo e (b) não convexo.....	87
Figura 5.6 – Representação de funções (a) convexas e (b) não convexas.....	87
Figura 5.7 – Representação de uma função (não convexa) com mínimo local e mínimo global.	88
Figura 5.8 – Representação de uma função (convexa) com mínimo global.....	89
Figura 5.9 – Significado geométrico do vetor gradiente em uma função com duas variáveis.	91
Figura 6.1 – Atributos geométricos da viga metálica em estudo.....	98
Figura 6.2 – Viga simplesmente apoiada com um amortecedor acoplado.	100
Figura 6.3 – Histórico do deslocamento para a viga metálica, com e sem um AMS acoplado, sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1	101
Figura 6.4 – Deslocamento estacionário da viga em função da frequência normalizada, com e sem um AMS acoplado, sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1	102
Figura 6.5 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a viga metálica com um AMS acoplado sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1	103
Figura 6.6 – Histórico do deslocamento para a viga metálica, com e sem um AMS acoplado, sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1	105
Figura 6.7 – Deslocamento estacionário da viga em função da frequência normalizada, com e sem um AMS acoplado, sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1	106

Figura 6.8 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a viga metálica com um AMS acoplado sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1	107
Figura 6.9 – Viga simplesmente apoiada com três amortecedores acoplados.....	109
Figura 6.10 – Histórico do deslocamento para a viga metálica, com e sem três AMSs acoplados, sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1	111
Figura 6.11 – Deslocamento estacionário da viga em função da frequência normalizada, com e sem três AMSs acoplados, sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1	112
Figura 6.12 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a viga metálica com três AMSs acoplados sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1	113
Figura 6.13 – Histórico do deslocamento para a viga metálica, com e sem três AMSs acoplados, sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1	115
Figura 6.14 – Deslocamento estacionário da viga em função da frequência normalizada, com e sem três AMSs acoplados, sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1	116
Figura 6.15 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a viga metálica com três AMSs acoplados sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1	117
Figura 6.16 – Viga simplesmente apoiada com três amortecedores não amortecidos acoplados.	120
Figura 6.17 – Histórico do deslocamento para a viga metálica (com e sem três AMSs não amortecidos acoplados) sob (a) restrição g_1 e (b) restrições g_1 , g_2	121
Figura 6.18 – Deslocamento estacionário da viga com em função da frequência normalizada (com e sem três AMSs não amortecidos acoplados) sob (a) restrição g_1 e (b) restrições g_1 , g_2	122
Figura 6.19 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a viga metálica com três AMSs não amortecidos acoplados sob (a) restrição g_1 e (b) restrições g_1 , g_2	123

Figura 6.20 – Histórico do deslocamento para a viga metálica (com e sem três AMSs não amortecidos acoplados) sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1	125
Figura 6.21 – Deslocamento estacionário da viga com em função da frequência normalizada (com e sem três AMSs não amortecidos acoplados) sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1	126
Figura 6.22 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a viga metálica com três AMSs não amortecidos acoplados sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1	127
Figura 6.23 – Geometria e condição de contorno da placa.	130
Figura 6.24 – Modos e frequências naturais da placa.....	131
Figura 6.25 – Placa com carga concentrada e AMS acoplado.	132
Figura 6.26 – Histórico do deslocamento para a placa em concreto (com e sem um AMS acoplado) sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1	133
Figura 6.27 – Deslocamento estacionário da placa em função da frequência normalizada (com e sem um AMS acoplado) sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1	134
Figura 6.28 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a placa em concreto com um AMS acoplado sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1	135
Figura 6.29 – Placa com carga concentrada e dois AMSs acoplados.	137
Figura 6.30 – Histórico do deslocamento para a placa em concreto (com e sem dois AMSs acoplados) sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1	139
Figura 6.31 – Deslocamento estacionário da placa em função da frequência normalizada (com e sem dois AMSs acoplados) sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1	140
Figura 6.32 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a placa em concreto com dois AMSs acoplados sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1	141

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Simulações realizadas para cada caso de acoplamento dos AMSs na viga.	96
Tabela 6.2 – Simulações realizadas para cada caso de acoplamento dos AMSs na placa.	96
Tabela 6.3 – Características da viga metálica.....	98
Tabela 6.4 – Características modais da viga metálica.	99
Tabela 6.5 – Frequências para a viga metálica utilizando formulação analítica e obtida por Valencia (2007).	99
Tabela 6.6 – Descrição das variáveis de projeto.	100
Tabela 6.7 – Variáveis de projeto otimizadas para um AMS acoplado na viga sob as restrições g_1 , g_2 e h_1	104
Tabela 6.8 – Deslocamentos máximos da viga com um AMS acoplado na viga sob as restrições g_1 , g_2 e h_1	104
Tabela 6.9 – Variáveis de projeto otimizadas para um AMS acoplado na viga sob as restrições g_2 , g_3 e h_1	108
Tabela 6.10 – Deslocamentos máximos da viga com um AMS acoplado na viga sob as restrições g_2 , g_3 e h_1	108
Tabela 6.11 – Resumo dos parâmetros de um AMS acoplado na viga metálica.....	108
Tabela 6.12 – Descrição das variáveis de projeto.	110
Tabela 6.13 – Variáveis de projeto otimizadas para três AMSs acoplados sob as restrições g_1	114
Tabela 6.14 – Deslocamentos máximos da viga com três AMSs acoplados sob as restrições g_1	114
Tabela 6.15 – Variáveis de projeto otimizadas para três AMSs acoplados sob as restrições g_2 , g_3 e h_1	118
Tabela 6.16 – Deslocamentos máximos da viga com três AMSs acoplados sob as restrições g_2 , g_3 e h_1	118
Tabela 6.17 – Resumo dos parâmetros dos três AMSs acoplados na viga metálica.	118
Tabela 6.18 – Descrição das variáveis de projeto.	120
Tabela 6.19 – Variáveis de projeto otimizadas para três AMSs não amortecidos acoplados sob as restrições g_1 e g_2	123
Tabela 6.20 – Deslocamentos máximos da viga com três AMSs não amortecidos acoplados as restrições g_1 e g_2	124

Tabela 6.21 – Variáveis de projeto otimizadas para três AMSs não amortecidos acoplados sob as restrições g_2 , g_3 e h_1	128
Tabela 6.22 – Deslocamentos máximos da viga com três AMSs não amortecidos acoplados sob as restrições g_2 , g_3 e h_1	128
Tabela 6.23 – Resumo dos parâmetros dos três AMSs não amortecidos acoplados na viga metálica.....	128
Tabela 6.24 – Características da placa.....	130
Tabela 6.25 – Descrição das variáveis de projeto.	132
Tabela 6.26 – Variáveis de projeto otimizadas para um AMS acoplado sob as restrições g_1 , g_2 e h_1	136
Tabela 6.27 – Deslocamentos máximos da placa com um AMS acoplado sob as restrições g_1 , g_2 e h_1	136
Tabela 6.28 – Resumo dos parâmetros de um AMS acoplado na placa em concreto.	136
Tabela 6.29 – Descrição das variáveis de projeto.	138
Tabela 6.30 – Variáveis de projeto otimizadas para dois AMSs acoplados sob as restrições g_1 , g_2 e h_1	142
Tabela 6.31 – Deslocamentos máximos da placa com dois AMSs acoplados sob as restrições g_1 , g_2 e h_1	142
Tabela 6.32 – Resumo dos parâmetros de dois AMSs acoplados na placa em concreto.	142

SUMÁRIO

RESUMO.....	I
ABSTRACT.....	II
LISTA DE FIGURAS.....	III
LISTA DE TABELAS.....	VIII
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. OBJETIVO DO TRABALHO	7
1.2. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	7
2. DINÂMICA DAS ESTRUTURAS	8
2.1. BREVE FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	8
2.2. VIBRAÇÕES EM SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE.....	9
2.3. VIBRAÇÕES EM SISTEMAS DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE	17
2.3.1. <i>Método de Superposição Modal</i>	20
2.4. ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NO TEMPO (NEWMARK).....	25
3. TEORIA DE VIGAS E PLACAS	29
3.1. BREVE FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DE PLACAS	29
3.2. ANÁLISE ESTÁTICA DE PLACAS	33
3.3. ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS	38
3.3.1. <i>Análise Modal em Placas</i>	39
3.3.2. <i>Vibrações Forçadas em Placas</i>	45
3.4. BREVE FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DE VIGAS	46
3.5. ANÁLISE DINÂMICA EM VIGAS	47
3.5.1. <i>Análise Modal em Vigas</i>	48
4. CONTROLE DE VIBRAÇÕES	50
4.1. BREVE FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	50
4.2. ALGUNS TIPOS USUAIS DE ATENUADORES PASSIVOS	52
4.2.1. <i>Mecanismos de Amortecimento Adicional (MAA)</i>	53
4.2.2. <i>Isoladores de Vibrações (IV)</i>	54
4.2.3. <i>Atenuador de Coluna Líquida (ACL)</i>	55

4.2.4. Atenuador Pendular Não-Linear (APNL).....	56
4.2.5. Amortecedor de Massa Sintonizado (AMS).....	57
4.3. MODELAGEM ESTRUTURAL COM AMORTECEDOR ACOPLADO	58
4.3.1. Estrutura Amortecida Simples e AMS Amortecido.....	58
4.3.2. Estrutura de Múltiplos Graus de Liberdade e AMS Amortecido – Abordagem Discreta	72
4.3.3. Estrutura de Múltiplos Graus de Liberdade e AMS Amortecido – Abordagem Analítica	75
5. OTIMIZAÇÃO	81
5.1. CONCEITOS GERAIS	81
5.2. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	82
5.2.1. Tipos de Problemas em Otimização Estrutural.....	82
5.3. CONDIÇÃO KARASH-KUHN-TUCKER DE OTIMALIDADE (KKT CONDITION)	84
5.4. CONVEXIDADE DE FUNÇÕES.....	86
5.5. DIREÇÃO DE BUSCA	89
5.6. MÉTODO DO PONTO INTERIOR (INTERIOR POINT METHOD)	91
6. ESTUDO NUMÉRICO	93
6.1. HIPÓTESES INICIAIS GERAIS.....	93
6.2. VIGA COM CARGA CONCENTRADA	96
6.2.1. Descrição da Estrutura e Modelo de Análise.....	97
6.2.2. Utilização de Um AMS Acoplado	99
6.2.3. Utilização de Três AMSs Acoplados.....	109
6.2.4. Utilização de Três AMSs não Amortecidos Acoplados	119
6.3. PLACA COM CARGA CONCENTRADA	129
6.3.1. Descrição da Estrutura e Modelo de Análise.....	130
6.3.2. Utilização de Um AMS Acoplado	131
6.3.3. Utilização de Dois AMSs Acoplados	137
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	144
7.1. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	146
8. REFERÊNCIAS	147

1. INTRODUÇÃO

Na etapa de elaboração dos projetos, os modelos experimentais e matemáticos utilizados na engenharia estrutural visam representar, de forma mais realista possível, o comportamento das estruturas submetidas a um conjunto de forças estáticas e/ou dinâmicas. Ao longo dos anos, com a inovação tecnológica dos materiais e métodos de cálculo estrutural, as estruturas estão cada vez mais leves, esbeltas e flexíveis, fazendo-as mais susceptíveis aos efeitos dinâmicos.

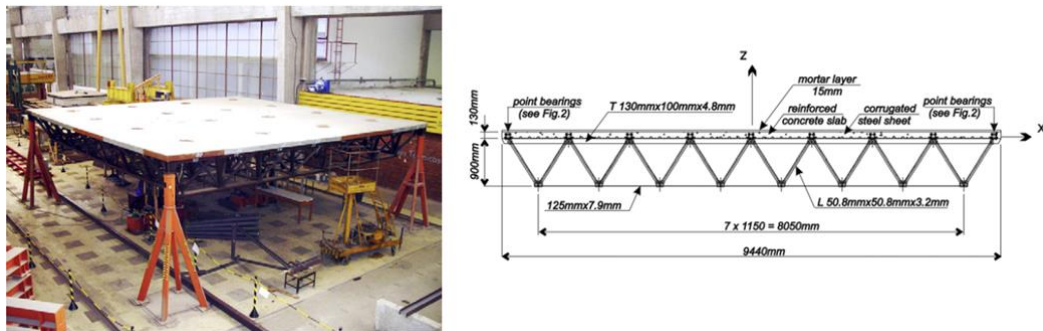
Grandes estruturas civis, industriais e *offshore* estão sujeitas a ações ambientais, tais como: sismos, ventos, correntes e ondas marinhas, e devem ser analisadas sob critérios de segurança, estabilidade dinâmica, funcionalidade e durabilidade. Algumas estruturas civis e industriais podem ainda estar sujeitas a ações dinâmicas originadas por explosões, impactos, tráfego de veículos, máquinas e motores, ou mesmo ações dinâmicas produzidas por atividades humanas, e devem ser analisadas sob critérios adicionais de segurança e conforto dos usuários (BATTISTA, 1993).

Estruturas existentes podem vir a apresentar problemas dinâmicos devido a vários fatores, a exemplo do erro de projeto em que o projetista pode negligenciar as verificações quanto ao estado limite de vibrações ao desconsiderar o efeito da frequência de excitação de uma carga com características dinâmicas. A mudança na utilização da estrutura é outro fator não incomum, em que estruturas passam a ser utilizadas para uma finalidade diferente para a qual foi projetada inicialmente, ou seja, empreendimento concebido para cargas essencialmente estáticas podem vir a ser submetidos a ações dinâmicas, a exemplo de empreendimentos com a finalidade residencial que são transformados em academias ou casa de shows; ou estádios de futebol que são utilizados para grandes espetáculos musicais. Alterações no ambiente em que se encontra o empreendimento também podem influenciar no surgimento de problemas dinâmicos; a exemplo dos projetos de pontes que são levados em conta os efeitos dinâmicos do tráfego e do vento, porém a intensidade do tráfego muda com o passar dos anos, assim como as condições climáticas do ambiente também são multáveis, exigindo um cuidado quanto a monitoração e possíveis adequações para reduzir os novos efeitos dinâmicos na estrutura.

Uma das soluções para reduzir os impactos gerados por ações dinâmicas em estruturas existentes, citadas no parágrafo anterior, é a utilização de sistemas de controle de vibrações acoplados à estrutura original. Existem trabalhos acadêmicos, como o de Varela e Battista (2011), que abordam a utilização de atenuadores dinâmicos sintonizados para controle de

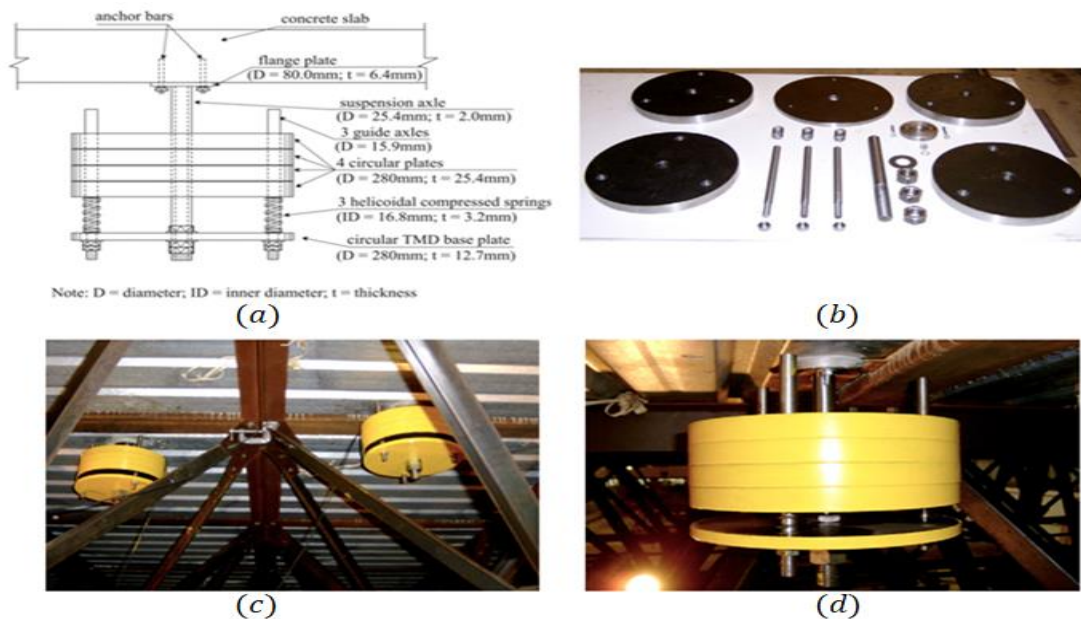
vibrações em pisos de grandes vãos submetido a ação do movimento de pessoas. Nesse trabalho os autores realizaram um estudo numérico e experimental da eficiência da utilização de atenuadores dinâmicos sintonizados (AMS) em uma placa de concreto sob um deck metálico submetido a cargas devido ao movimento aleatório de pessoas. A Figura 1.1 e Figura 1.2 mostram a laje utilizada na investigação técnica e o tipo de AMS especificado, respectivamente.

Figura 1.1 – Protótipo em escala real da laje utilizada no estudo teórico-experimental.



Fonte: VARELA e BATTISTA (2011)

Figura 1.2 – (a) Esquema de instalação do atenuador; (b) materiais utilizados para montagem do amortecedor; (c) e (d) amortecedor instalado na laje de testes.

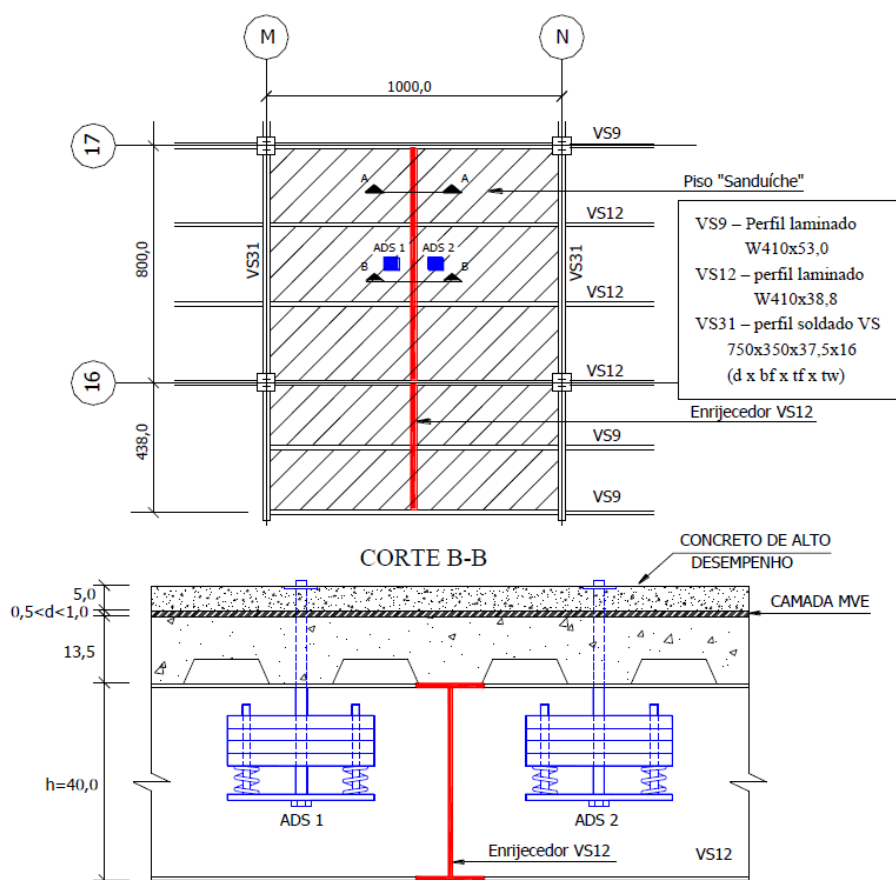


Fonte: VARELA e BATTISTA (2011)

No âmbito profissional, um trabalho técnico prestado para um shopping center é apresentado no artigo de Battista et al. (2014), no qual os autores mostram um estudo de

viabilidade de soluções com o emprego de amortecedores de massa sintonizados, vigas de enrijecimento e isoladores de vibrações para as reduzir vibrações induzidas pelo movimento dos brinquedos da área de lazer do *play center* do shopping (ver Figura 1.3). Os autores comprovaram a redução dos deslocamentos dinâmicos para uma faixa satisfatória por meio de monitoramento da estrutura pós-intervenção.

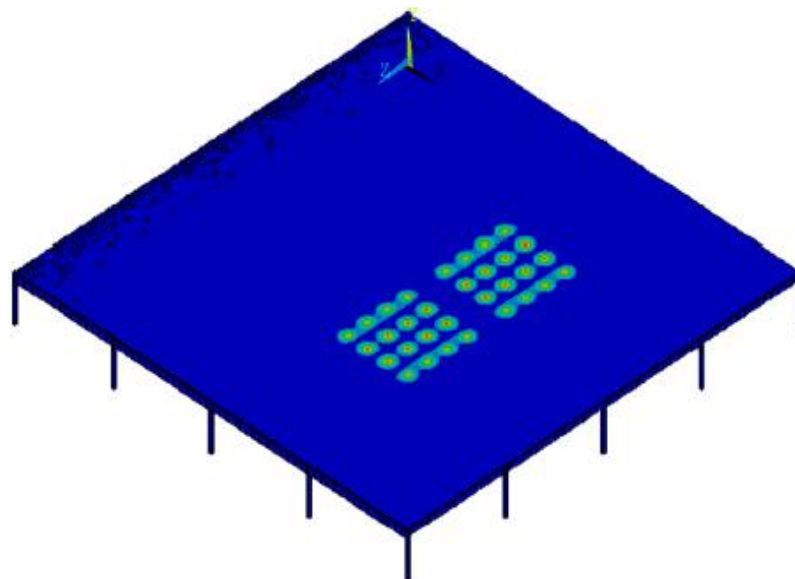
Figura 1.3 – Desenho esquemático de uma solução proposta para redução de vibrações em piso de um shopping center.



Fonte: BATTISTA et al. (2014)

Outra aplicação prática pode ser vista no trabalho desenvolvido por Gaspar, Silva e Costa-Neves (2015), em que os autores realizaram um estudo em uma estrutura real composta por uma laje mista de aço-concreto com vãos de 40 m (Ver Figura 1.4), submetida a carregamento dinâmico imposto pelo movimento de pessoas; neste trabalho foi proposto adoção de amortecedores de massa sintonizados como sistema de controle das acelerações excessivas no pavimento. Os autores conseguiram alcançar reduções significativas, chegando a 92% de atenuação das acelerações para o caso de carregamento mais desfavorável, com a utilização de dezesseis amortecedores de massa sintonizados acoplados na laje mista.

Figura 1.4 – Modelo em elementos finitos do pavimento em laje mista sob ação rítmica de pessoas.



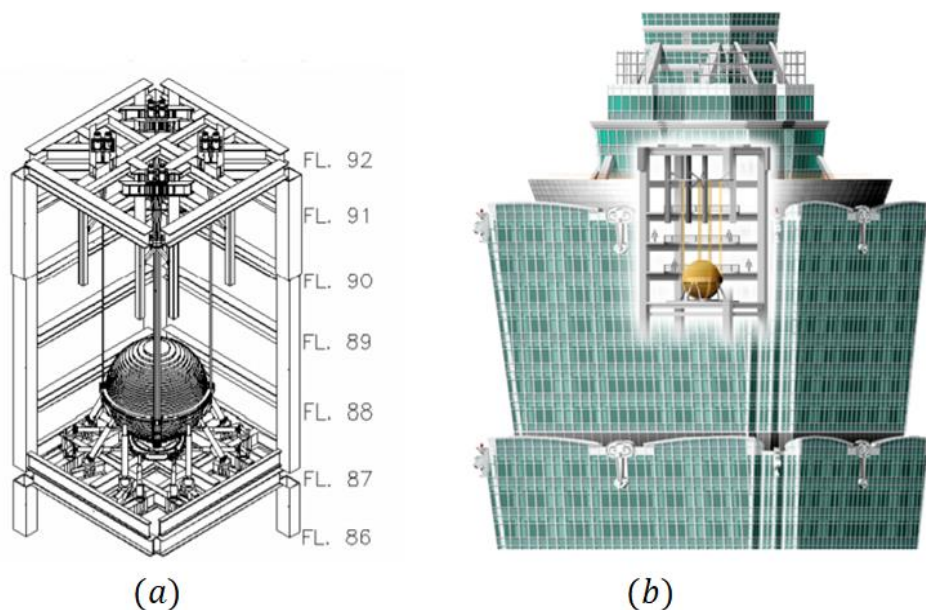
Fonte: GASPAR, SILVA e COSTA-NEVES (2016)

O projeto desses sistemas de atenuação das vibrações nem sempre é simples, dependendo da complexidade da estrutura e/ou das cargas dinâmicas, sendo necessária a utilização de técnicas de otimização e métodos numéricos para especificar os atenuadores de forma eficiente e econômica, a fim de obter uma resposta aceitável para a estrutura. Tsai e Lin (1993) apresentaram um trabalho em que, pelo emprego de técnicas numéricas de busca iterativa e ajustes de curva, chegaram a parâmetros otimizados dos atenuadores dinâmicos sintonizados com o uso de modelos com dois graus de liberdade amortecidos sob excitação dinâmica nos suportes.

A adoção desses sistemas de controle de vibrações não é voltada apenas para estruturas existentes. Existem casos em que os atenuadores são projetados ainda na fase de projeto com a finalidade de garantir o desempenho dinâmico sem alterar a concepção arquitetônica original. O edifício *Taipei 101*, por exemplo, construído na cidade de Taipé em Taiwan, possui um sistema de controle de vibrações concebido na etapa do seu projeto, após estudos em túnel de vento. Para preservar a arquitetura original do prédio e, simultaneamente, garantir o conforto dos usuários, um sistema de massa-mola-amortecedor esférico de aproximadamente 726 toneladas é instalado em um trecho interno do edifício, entre o 86º e 92º andar, para reduzir as acelerações excessivas induzidas pela ação do vento. As descrições técnicas mais detalhadas desse sistema de controle de vibrações podem ser encontradas nos

trabalhos de Poon et al. (2004) e Infanti, Robinson e Smith (2008). A Figura 1.5a ilustra um corte esquemático da instalação do atenuador, enquanto a Figura 1.5b indica a localização do atenuador no topo do edifício.

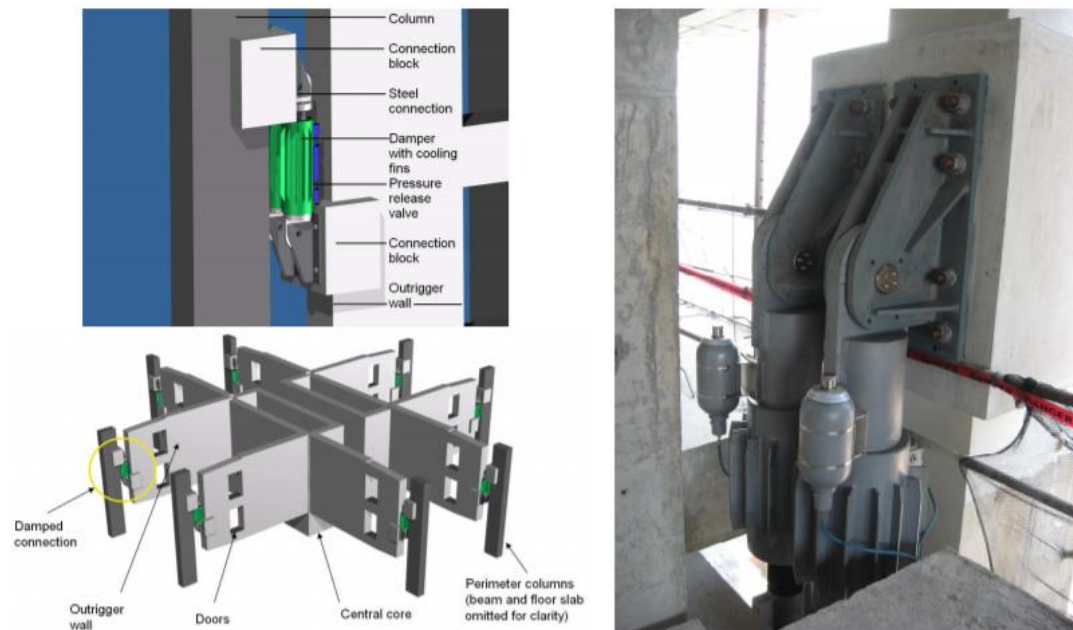
Figura 1.5 – (a) indicação esquemática da instalação do amortecedor; (b) indicação da localização do amortecedor no edifício Taipei 101.



Fonte: (a) INFANTI, ROBINSON e SMITH (2008), (b) Desconhecido

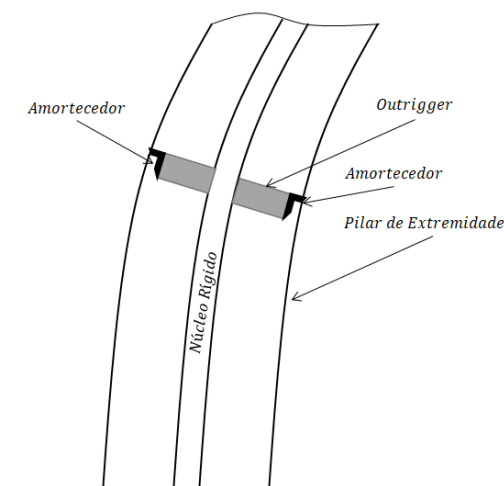
Outro exemplo interessante é o edifício *Saint Francis Shangri-la Towers*, construído nas Filipinas. Esse empreendimento possui um sistema de amortecedores que conectam os *Outriggers* aos pilares de extremidade do edifício (ver Figura 1.6), conferindo-o uma redução na resposta dinâmica devido as ação de vento e sismos (INFANTI; ROBINSON; SMITH, 2008). A Figura 1.6 ilustra o amortecedor e seu modo de instalação no empreendimento.

Figura 1.6 – Layout da concepção dos amortecedores e como são instalados *in loco* no edifício Saint Francis Shangri-la Towers.



Fonte: INFANTI, ROBINSON e SMITH (2008)

Figura 1.7 – Representação esquemática do sistema de amortecimento na prumada do edifício Saint Francis Shangri-la Towers.



Fonte: Autor (2020)

A Figura 1.7 mostra uma representação esquemática de como os amortecedores são conectados às estruturas principais da prumada do edifício.

1.1.Objetivo do Trabalho

Com a finalidade de compreender melhor e contribuir com os estudos voltados para problemas estruturais que envolvem vibrações e suas soluções, este trabalho tem como objetivo principal estudar uma metodologia de dimensionamento de sistemas mecânicos de controle de vibrações em estruturas civis com suporte da otimização.

1.2.Organização do Trabalho

De forma resumida, esta seção apresentará os principais temas abordados em cada um dos capítulos deste trabalho.

O segundo capítulo aborda os conceitos da dinâmica das estruturas, com a formulação da equação de movimento para um grau de liberdade e para múltiplos graus de liberdade, bem como algumas soluções para essas equações.

No terceiro capítulo é apresentada a teoria básica de elementos de viga e placas, com foco no desenvolvimento teórico da resposta dinâmica desses elementos.

No quarto capítulo é feita uma abordagem sobre as técnicas de controle e redução de vibrações em estruturas. Neste capítulo são ilustradas algumas formulações usuais para o acoplamento do sistema de controle passivo em estruturas, seja de maneira discreta quanto analítica.

No quinto capítulo, os conceitos de otimização são apresentados de forma mais geral, com temas como: convexidade de funções, condições de otimalidade e direções de busca dos problemas de otimização.

No sexto capítulo é desenvolvido o estudo numérico, no qual são realizadas simulações com vigas e placas sem e com AMSs acoplados. Os resultados obtidos com o processo de otimização são comparados com exemplos da literatura.

O sétimo capítulo descreve as considerações finais sobre os resultados obtidos no estudo numérico do capítulo 6. Neste capítulo é feita uma avaliação particular do autor quanto à eficiência dos AMSs para cada caso analisado, bem como são apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

Finalmente, no oitavo capítulo, são indicadas as referências utilizadas para desenvolvimento deste trabalho.

2. DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Todo carregamento possui certa variabilidade temporal, porém, para a maioria dos casos, em estruturas civis, essas cargas possuem uma variabilidade muito baixa, o que possibilita a simplificação como cargas estáticas. Porém, em alguns casos, essas ações possuem forte influência dinâmica, que mobiliza forças inerciais ao sistema, que faz necessário realizar uma análise mais acurada, que utiliza os conceitos da dinâmica das estruturas.

Este capítulo aborda os conceitos da dinâmica das estruturas, com a formulação da equação de movimento para sistemas com um grau de liberdade e com múltiplos graus de liberdade, bem como algumas soluções para essas equações.

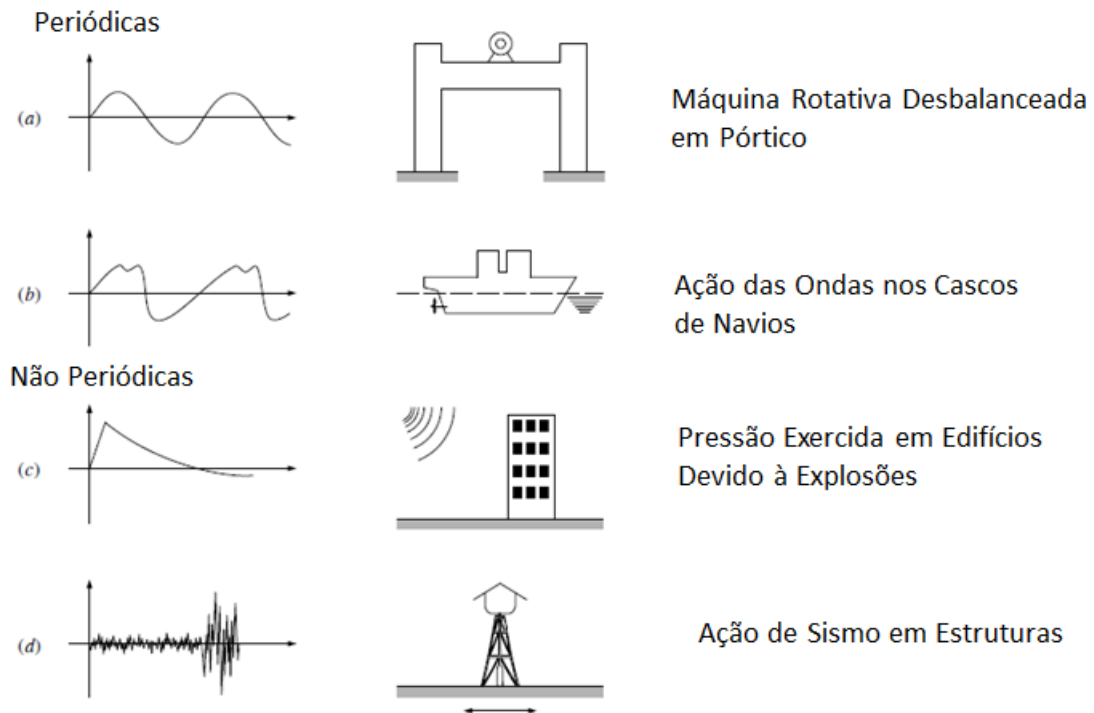
2.1. Breve Fundamentação Teórica

O estudo da dinâmica das estruturas é importante pois se ocupa a abordar o efeito do tempo de aplicação das cargas nas estruturas. Em geral, para projetos convencionais de engenharia civil, não há consideração de efeitos dinâmicos em estruturas. Porém, existem diversos casos em que o efeito do tempo e da frequência de atuação da força passa a ser um fator importante para garantir um bom desempenho estrutural.

A Figura 2.1 ilustra alguns tipos usuais de forças dinâmicas que atuam em estruturas e suas fontes de origem.

As forças harmônicas (ver Figura 2.1a) podem ser expressas em funções senoidais ou cossenoides, e são forças geralmente produzidas por máquinas rotativas. As forças periódicas arbitrárias (ver Figura 2.1b) são expressas por padrões que se repetem com espaçamento de tempo (período), a exemplo da força gerada por ondas marítimas que atuam nos casos de navios. Forças impulsivas (ver Figura 2.1c) têm a característica de possuírem uma grande intensidade de atuação em um curto período de tempo e logo após é cessada a atuação. Uma fonte desse tipo de ação são as máquinas de impacto e explosões próximas às estruturas. Forças aleatórias (ver Figura 2.1d) são caracterizadas por uma variação arbitrária ao longo do tempo, a exemplo das ações do vento e sismo em estruturas.

Figura 2.1 – Características e fontes das forças dinâmicas usuais: (a) harmônica; (b) periódica não harmônica; (c) impulsiva; (d) aleatória.

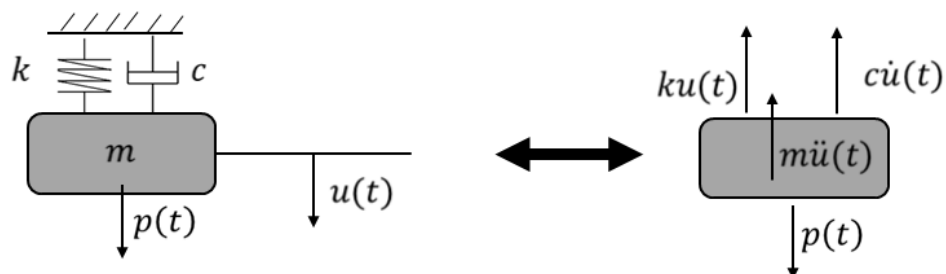


Fonte: Adaptado de CLOUGH e PENZIEN (2003)

2.2. Vibrações em Sistemas de Um Grau de Liberdade

Ao observar o sistema estrutural da Figura 2.2, com massa m , rigidez k e amortecimento viscoso c , pode-se deduzir a equação de movimento, por exemplo, pelo método direto utilizando o princípio de D'Alembert.

Figura 2.2 – Sistema dinâmico com um grau de liberdade e diagrama de corpo livre.



Fonte: Autor (2020)

Ao se impor a condição de equilíbrio para as forças que agem no corpo de massa m , tem-se

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (2.1)$$

em que $m\ddot{u}(t)$ é a força inercial, $c\dot{u}(t)$ a força não conservativa de amortecimento, $ku(t)$ é a força elástica e $p(t)$ é a força externa.

A Equação (2.1) é classificada como uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem não homogênea e com coeficientes constantes. Dessa forma, a solução geral é composta pela parcela da solução homogênea u_h com a parcela da solução particular u_p , ou seja,

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (2.2)$$

A solução homogênea é obtida via equação diferencial de movimento para o caso em que não há força externa que atua no sistema, ou seja,

$$m \ddot{u}_h(t) + c \dot{u}_h(t) + k u_h(t) = 0 \quad (2.3)$$

que admite solução no seguinte formato:

$$u_h(t) = b e^{\lambda t} \quad (2.4)$$

Substituindo a Equação (2.4) e suas derivadas na Equação (2.3), ao cancelar os fatores comuns, obtém-se a equação característica

$$m \lambda^2 + c \lambda + k = 0 \quad (2.5)$$

em que as soluções são

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.6)$$

Ao substituir essas duas soluções da Equação (2.6) na Equação (2.4), e ao se fazer uso do princípio da superposição, tem-se a seguinte forma de solução homogênea:

$$u_h(t) = b_1 e^{\lambda_1 t} + b_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.7)$$

na qual b_1 e b_2 são constantes de integração. A depender das propriedades do sistema estrutural, as soluções da equação característica podem levar a quatro casos distintos:

- 1) Amortecimento crítico: ocorre quando o radicando da Equação (2.6) é igual a zero, ou seja,

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \rightarrow c = c_{cr} = 2\sqrt{k m} \quad (2.8)$$

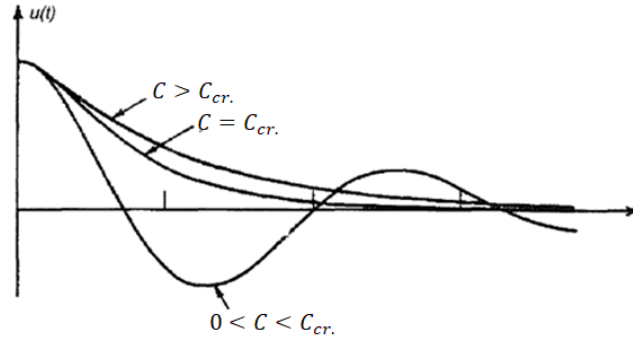
em que c_{cr} é o valor do amortecimento crítico que define se haverá ou não vibração. Caso o amortecimento da estrutura (c) seja igual ao amortecimento crítico, o sistema é chamado de criticamente amortecido e não haverá vibração. Como as raízes da equação característica são iguais, a solução assume o formato

$$u_h(t) = b_1 e^{-\sqrt{k/m} t} + b_2 t e^{-\sqrt{k/m} t} \quad (2.9)$$

- 2) Amortecimento supercrítico: ocorre quando $c > c_{cr}$ e também não haverá vibração no sistema estrutural. O sistema é chamado de superamortecido.
- 3) Amortecimento subcrítico: ocorre quando $0 < c < c_{cr}$, ou seja, o radicando da Equação (2.6) é menor que zero, o que gera raízes complexas. Neste caso o sistema apresenta vibrações e é denominado de subamortecido.
- 4) Não amortecido: ocorre quando $c = 0$, ou seja, o radicando da Equação (2.6) é menor que zero, o que gera raízes complexas sem a parte real. Porém, neste caso, diferente do amortecimento subcrítico, o deslocamento dinâmico não decai com o tempo.

A Figura 2.3 mostra o comportamento da resposta de um sistema estrutural de um grau de liberdade para os três primeiros casos de amortecimento apresentados anteriormente.

Figura 2.3 – Resposta de um sistema com um grau de liberdade em função do amortecimento viscoso.



Fonte: adaptado de CRAIG e KURDILA (1981)

No caso de amortecimento subcrítico, situação comum nos sistemas estruturais usuais, as soluções da Equação (2.6) ficam

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i \sqrt{-\left(\frac{c}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m}} \quad (2.10)$$

Substituindo a equação anterior na Equação (2.7), chega-se à solução homogênea do deslocamento na forma

$$u_h(t) = b_1 e^{\left(-\frac{c}{2m} + i\omega_d\right)t} + b_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - i\omega_d\right)t} \quad (2.11)$$

em que ω_d é denominada frequência natural amortecida, definida como

$$\omega_d = \sqrt{-\left(\frac{c}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m}} = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.12)$$

Na Equação (2.12), os parâmetros ξ e ω são, respectivamente, a taxa de amortecimento e a frequência natural da estrutura, ou seja, é a frequência em que um corpo não amortecido oscila quando este se encontra em vibração livre, e estão relacionados com os parâmetros originais do modelo por meio das expressões

$$2 \xi \omega = \frac{c}{m} \quad (2.13)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.14)$$

A equação de Euler, que escreve as funções exponenciais em notação trigonométrica é definida de maneira geral como:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (2.15)$$

Ao utilizar a equação de Euler, a solução do deslocamento fica na forma:

$$u_h(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} (a_1 \cos(\omega_d t) + a_2 \sin(\omega_d t)) \quad (2.16)$$

Da Equação (2.13), tira-se a relação:

$$\frac{c}{2m} = \xi \omega \quad (2.17)$$

Dessa forma, permite-se que o deslocamento expresso pela Equação (2.16) fique na seguinte forma:

$$u_h(t) = e^{-\xi \omega t} [a_1 \cos(\omega_d t) + a_2 \sin(\omega_d t)] \quad (2.18)$$

A velocidade é obtida ao se derivar a Equação (2.18), o que leva a

$$\dot{u}_h(t) = -\xi \omega u_h(t) + e^{-\xi \omega t} [-a_1 \omega_d \sin(\omega_d t) + a_2 \omega_d \cos(\omega_d t)] \quad (2.19)$$

Os coeficientes a_1 e a_2 são determinados com as condições iniciais de contorno. Ao tomar $u_{h,0}$ e $\dot{u}_{h,0}$ como o deslocamento e velocidade iniciais ($t = 0$), a solução do deslocamento (Equação (2.18)) fica:

$$u_h(t) = e^{-\xi \omega t} \left[u_{h,0} \cos(\omega_d t) + \frac{u_{h,0} \xi \omega + \dot{u}_{h,0}}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \quad (2.20)$$

A solução particular é obtida via equação diferencial de movimento para o caso em que a força atua no sistema, ou seja,

$$m\ddot{u}_p(t) + c\dot{u}_p(t) + ku_p(t) = p(t) = p_0 e^{i\Omega t} \quad (2.21)$$

na qual foi assumida a força harmônica em notação complexa em que p_0 é a amplitude e Ω a frequência de excitação da força. A Equação (2.21) admite a seguinte solução em notação complexa:

$$u_p(t) = a_p e^{i\Omega t} \quad (2.22)$$

em que A_p é a amplitude do histórico do deslocamento. Ao substituir a Equação (2.22) e suas derivadas na Equação (2.21), e ao eliminar os termos comuns, chega-se a

$$a_p = p_0 \frac{1}{-\Omega^2 m + i\Omega c + k} \quad (2.23)$$

Dividindo o numerador e denominador da Equação (2.23) por k , tem-se a seguinte equação para a amplitude do deslocamento:

$$a_p = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - r^2 + i2\xi r} \quad (2.24)$$

em que r é a razão entre a frequência de excitação e a frequência natural da estrutura:

$$r = \frac{\Omega}{\omega} \quad (2.25)$$

O denominador da Equação (2.24) é um número complexo e pode ser escrito da seguinte forma:

$$a_p = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} e^{i\phi}} \quad (2.26)$$

em que ϕ é o ângulo de fase, dado por

$$\phi = \text{atan}\left(\frac{2\xi r}{1 - r^2}\right) \quad (2.27)$$

Substituindo a Equação (2.26) na Equação (2.22), tem-se

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \frac{e^{i\Omega t}}{e^{i\phi}}$$

$$u_p(t) = u_{est} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} e^{i(\Omega t - \phi)} \quad (2.28)$$

em que $u_{est} = p_0/k$ é o deslocamento pseudoestático. A Equação (2.28) é o deslocamento referente à parcela particular da solução geral da equação de movimento. Ao utilizar a identidade de Euler (ver Equação (2.15)) e ao considerar uma ação cossenoide que atua na estrutura, o deslocamento em notação trigonométrica fica

$$u_p(t) = \frac{u_{est}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cos(\Omega t - \phi) \quad (2.29)$$

em que a amplitude máxima de deslocamento dinâmica é definida por

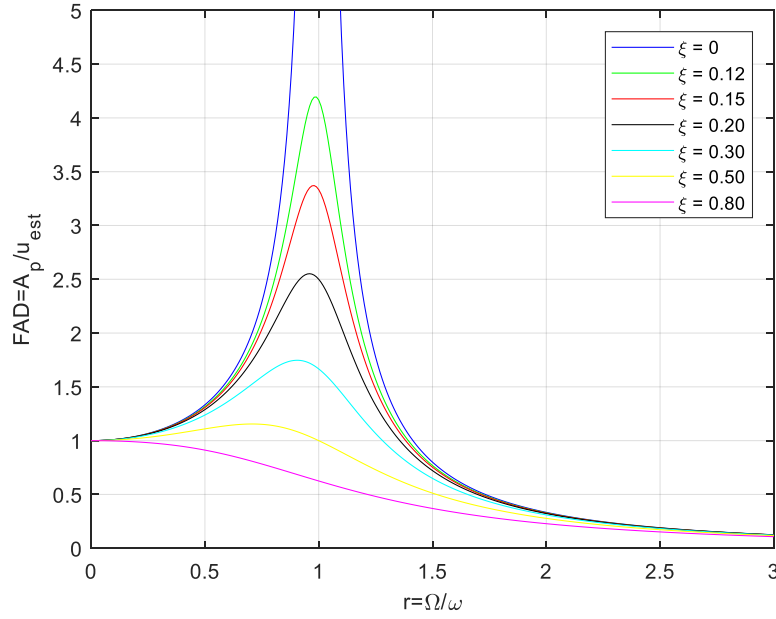
$$A_p = \frac{u_{est}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.30)$$

Um conceito muito importante é o fator de amplificação dinâmica (*FAD*). O Fator de amplificação dinâmica é definido como a relação entre o deslocamento dinâmico e o deslocamento pseudoestático, ou seja,

$$FAD = \frac{A_p}{u_{est}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.31)$$

Este fator permite avaliar o quanto a resposta dinâmica é maior em relação à resposta estática da carga em função das frequências (da estrutura e da força) e da taxa de amortecimento estrutural. O gráfico da Figura 2.4 mostra o fator de amplificação dinâmica em função da razão de frequências.

Figura 2.4 – Fator de amplificação dinâmica em função da razão de frequências.



Fonte: Autor (2020)

Ao analisar o gráfico da Figura 2.4, fica evidente o efeito de ressonância que ocorre quando a frequência da força é igual a frequência da estrutura ($r = 1$); em que para um sistema estrutural sem amortecimento as amplitudes dos deslocamentos crescem indefinidamente. Como em geral as estruturas possuem amortecimento, a resposta dinâmica não tende ao infinito, porém possuem uma amplificação considerável em relação à resposta estática.

A expressão do deslocamento dinâmico (Equação (2.29)) pode ser reescrita na forma

$$u_p(t) = A_p \cos(\Omega t - \phi) \quad (2.32)$$

Dessa forma, a solução completa da equação de movimento é dada pela soma da parcela homogênea (ver Equação (2.18)) e a parcela particular (ver Equação (2.29)). O deslocamento fica:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} [a_1 \cos(\omega_d t) + a_2 \sin(\omega_d t)] + \frac{u_{est}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cos(\Omega t - \phi) \quad (2.33)$$

Com a derivada da Equação (2.33), obtém-se a velocidade

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) = & -\xi\omega e^{-\xi\omega t} [a_1 \cos(\omega_d t) + a_2 \sin(\omega_d t)] \\ & + e^{-\xi\omega t} [-a_1\omega_d \sin(\omega_d t) + a_2\omega_d \cos(\omega_d t)] \\ & - \frac{u_{est}\omega}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\Omega t - \phi)\end{aligned}\quad (2.34)$$

Os coeficientes a_1 e a_2 são determinados com as condições iniciais. Ao tomar u_0 e $\dot{u}_0$ como o deslocamento e velocidade iniciais ($t = 0$):

$$\begin{cases} a_1 = u_0 - \frac{u_{est} \cos \phi}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \\ a_2 = \frac{1}{\omega_d} \left[\dot{u}_0 + a_1 \xi \omega - \frac{u_{est} \omega}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin \phi \right] \end{cases}\quad (2.35)$$

Observa-se na Equação (2.33) que a parcela homogênea do deslocamento decai rapidamente com o tempo por conta do termo $e^{-\xi\omega t}$, e a resposta é dominada pela parcela particular. A parcela homogênea do deslocamento é chamada de transiente, por apresentar um estado transitório, enquanto a parcela particular é chamada de permanente, por permanecer durante toda a resposta da estrutura. Esta última é a parcela mais importante da resposta da estrutura, sendo, em muitos casos, apenas esta é analisada.

2.3. Vibrações em Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

A abordagem realizada na seção anterior pode ser expandida para sistemas com mais de um grau de liberdade. É conveniente, para tal, realizar uma abordagem matricial do problema. A equação de movimento em notação matricial é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)\quad (2.36)$$

em que $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ são, respectivamente, a matriz de massa, amortecimento e rigidez do sistema estrutural com múltiplos graus de liberdade. O vetor $\mathbf{F}(t)$ é composto pelas forças de excitação em cada grau de liberdade em função do tempo. Os termos $\ddot{\mathbf{u}}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$ são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento, também em função do tempo.

Inicialmente, para determinar as características dinâmicas da estrutura – frequência natural ω_j e os respectivos modos naturais de vibrações $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_j$ – é resolvida a Equação (2.36) para a situação em que as forças de amortecimento $\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t)$ e forças externas $\mathbf{F}(t)$ são nulas, que caracteriza um movimento em vibração livre não amortecida e não forçada, ou seja,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

A solução da equação de movimento livre não amortecida e não forçada, dada pela Equação (2.37), pode ser escrita na forma

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\boldsymbol{\varphi}}_j \cos(\omega_j t - \phi_j) \quad (2.38)$$

na qual $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_j$ é o j -ésimo modo natural de vibração, ou seja, é o vetor que define a configuração deformada da estrutura correspondente à frequência natural de vibração ω_j ; e ϕ_j o correspondente ângulo de fase.

Substituindo a Equação (2.38) e suas derivadas na Equação (2.37), isso conduz ao sistema de equações

$$(-\omega_j^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \bar{\boldsymbol{\varphi}}_j \cos(\omega_j t - \phi_j) = \mathbf{0} \quad (2.39)$$

que, para a existência de soluções não triviais ($\bar{\boldsymbol{\varphi}}_j \neq \mathbf{0}$), leva ao problema de autovalor generalizado

$$\mathbf{K} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_j = \omega_j^2 \mathbf{M} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_j \quad (2.40)$$

O número de modos é igual ao número de graus de liberdade do sistema estrutural, dessa forma se o sistema possui n graus de liberdade, a Equação (2.40) fornecerá n pares de $(\omega_j, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_j)$. As frequências naturais são ordenadas de forma crescente, sendo a menor frequência natural chamada de frequência fundamental. Em geral, pode-se agrupar os autovalores, relacionado com as frequências naturais, na denominada matriz espectral, dada por

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

e os modos de vibrações (autovetores) são agrupados na denominada matriz modal, dada por

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}} = [\bar{\boldsymbol{\varphi}}_1 \quad \bar{\boldsymbol{\varphi}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\boldsymbol{\varphi}}_n] \quad (2.42)$$

Dessa forma, a Equação (2.40) pode ser expandida na seguinte forma:

$$\mathbf{K} \bar{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{M} \bar{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Lambda} \quad (2.43)$$

Ao multiplicar a equação anterior pela transposta da matriz modal, tem-se

$$\bar{\Phi}^T K \bar{\Phi} = \bar{\Phi}^T M \bar{\Phi} \Lambda \quad (2.44)$$

Os modos naturais de vibrações (autovetores) têm a propriedade de ortogonalidade em relação à matriz de massa e rigidez. Dessa forma,

$$\bar{\varphi}_i^T M \bar{\varphi}_j = \begin{cases} \tilde{m}_j & \text{com } i = j \\ 0 & \text{com } i \neq j \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\bar{\varphi}_i^T K \bar{\varphi}_j = \begin{cases} \tilde{k}_j & \text{com } i = j \\ 0 & \text{com } i \neq j \end{cases} \quad (2.46)$$

em que $\tilde{m}_j$ e $\tilde{k}_j$ são, respectivamente, a massa e a rigidez modal referente ao modo j .

Como se sabe dos problemas de valor principal, os autovetores apenas definem uma direção da solução do sistema em pauta. Assim, os modos de vibrações representam uma proporção de deslocamento entre os graus de liberdade de um modo específico. Por isso, em geral, os modos de vibrações são normalizados. Em análise dinâmica, a normalização dos autovetores em relação à matriz de massa da estrutura é mais comum e traz vantagens na manipulação da equação de movimento.

O autovetor normalizado pela raiz da respectiva massa modal da Equação (2.45) fica então

$$\varphi_j = \frac{\bar{\varphi}_j}{\sqrt{\tilde{m}_j}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{\varphi}_j^T M \bar{\varphi}_j}} \bar{\varphi}_j \quad (2.47)$$

Com isso, a matriz modal normalizada fica então

$$\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_n] \quad (2.48)$$

Ao utilizar o autovetor normalizado da Equação (2.47), tem-se

$$\varphi_i^T M \varphi_j = \begin{cases} 1 & \text{com } i = j \\ 0 & \text{com } i \neq j \end{cases} \quad (2.49)$$

ou, de forma geral,

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (2.50)$$

Assim, diz-se que a matriz modal Φ está ortonormalizada em relação à matriz de massa da estrutura. A Equação (2.43) é reescrita como

$$K \Phi = M \Phi \Lambda \quad (2.51)$$

Ao multiplicar a equação anterior por Φ^T e ao utilizar a relação da Equação (2.50), tem-se

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (2.52)$$

ou

$$\varphi_i^T K \varphi_j = \begin{cases} \omega_j^2 & \text{com } i = j \\ 0 & \text{com } i \neq j \end{cases} \quad (2.53)$$

2.3.1. Método de Superposição Modal

Para facilitar a resolução dos sistemas de equações diferenciais de modelos com múltiplos graus de liberdade é comum a utilização do método de superposição modal. Este método se baseia na transformação do modelo de coordenadas geométricas para coordenadas modais, e utiliza os autovetores para essa conversão. Como foi visto na seção anterior, os autovetores (modos de vibração) têm a propriedade de ortogonalidade com as matrizes de rigidez e massa, permitindo a diagonalização das mesmas. Dessa forma, é possível desacoplar o sistema de equações de movimento em vários sistemas de um grau de liberdade. Cada sistema então é resolvido pela metodologia apresentada na Seção 2.2 e finalmente são somadas para se chegar à solução final.

Para que a transformação modal seja realizada, inicialmente reescreve-se o deslocamento nodal $\mathbf{u}(t)$ (coordenada geométrica) como uma combinação entre os modos de vibrações φ_j e um deslocamento modal $d_j(t)$ (coordenada modal), ou seja,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j d_j(t) = \Phi \mathbf{d}(t) \quad (2.54)$$

Com a substituição da Equação (2.54) e suas derivadas na Equação (2.36), e, posteriormente, ao multiplicar todos os termos por Φ^T , tem-se

$$\Phi^T M \Phi \ddot{d}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{d}(t) + \Phi^T K \Phi d(t) = \Phi^T F(t) \quad (2.55)$$

Ao utilizar as Equações (2.50) e (2.52) na Equação (2.55), obtém-se

$$\ddot{d}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{d}(t) + \Lambda d(t) = f(t) \quad (2.56)$$

em que $f(t)$ é o vetor de forças modais, dado por

$$f(t) = \Phi^T F(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_j(t) \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

A matriz de amortecimento que aparece na Equação (2.56) deverá ser proporcional à matriz de massa e/ou rigidez para que se possa realizar o desacoplamento do sistema de equações.

Uma vez que o amortecimento é um parâmetro de difícil quantificação física, em geral, por praticidade, toma-se o amortecimento como uma combinação linear das matrizes de rigidez e massa da seguinte forma:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (2.58)$$

Segundo Soriano (2014), a concepção básica da construção da matriz de amortecimento dado pela equação acima foi proposta por Lord Rayleigh. Ao utilizar as propriedades de ortonormalização da matriz modal, tem-se

$$\begin{aligned} \Phi^T C \Phi &= \Phi^T (\alpha M + \beta K) \Phi \\ \Phi^T C \Phi &= \alpha \Phi^T M \Phi + \beta \Phi^T K \Phi \\ \Phi^T C \Phi &= \alpha I + \beta \Lambda \end{aligned} \quad (2.59)$$

Ao considerar os autovetores que geram termos não nulos, e c_j o coeficiente de amortecimento modal (admitindo a matriz C proporcional à matriz de rigidez e massa, então é válida a mesma ortonormalidade dos autovetores), a Equação (2.59) pode ser reescrita como

$$c_j = \varphi^T (\alpha M + \beta K) \varphi = \alpha + \beta \omega_j^2 \quad (2.60)$$

Ao utilizar a relação da Equação (2.17), tem-se

$$\xi_j = \frac{\alpha + \beta \omega_j^2}{2\omega_j} \quad (2.61)$$

em que ξ_j é a taxa de amortecimento referente ao modo j . Para determinar os coeficientes α e β , tomam-se duas taxas de amortecimento referente ao p -ésimo e k -ésimo modo, e a partir da equação anterior tem-se

$$\begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\omega_p} & \frac{\omega_p}{2} \\ \frac{1}{2\omega_k} & \frac{\omega_k}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \frac{\omega_p^2 \omega_k \xi_k - \omega_p \omega_k^2 \xi_p}{\omega_p^2 - \omega_k^2} \\ \beta = 2 \frac{\omega_p \xi_p - \omega_k \xi_k}{\omega_p^2 - \omega_k^2} \end{cases} \quad (2.62)$$

Definidos os parâmetros α e β , determina-se o amortecimento do j -ésimo modo de vibração com a Equação (2.61).

Segundo Soriano (2014), é usual adotar a mesma taxa de amortecimento ξ para os dois primeiros modos p e k , sendo assim os coeficientes da equação anterior ficam

$$\begin{cases} \alpha = 2\xi \frac{\omega_p \omega_k}{\omega_p + \omega_k} \\ \beta = 2\xi \frac{1}{\omega_p + \omega_k} \end{cases} \quad (2.63)$$

e a taxa de amortecimento para os demais modos fica

$$\xi_j = \frac{\xi(\omega_p \omega_k + \omega_j)}{\omega_j(\omega_p + \omega_k)} \quad (2.64)$$

Ao assumir, por conveniência, que a matriz de amortecimento é proporcional somente à matriz de rigidez, situação em que o amortecimento interno da estrutura é mais significativo, tem-se

$$\mathbf{C} = \beta \mathbf{K} \quad (2.65)$$

Isso implica que a taxa de amortecimento, ao tomar a Equação (2.61), é igual a

$$\beta = \frac{2\xi_j}{\omega_j} \quad (2.66)$$

Substituindo as Equações (2.65) e (2.66) na Equação (2.56), obtém-se

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{\Phi}^T \left(\frac{2\xi_j}{\omega_j} \mathbf{K} \right) \mathbf{\Phi} \dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{d}(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \ddot{\mathbf{d}}(t) + \frac{2\xi_j}{\omega_j} \overbrace{\mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi}}^{\omega_j^2} \dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{d}(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \ddot{\mathbf{d}}(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{\Lambda} \mathbf{d}(t) &= \mathbf{f}(t) \end{aligned} \quad (2.67)$$

com

$$\mathbf{d}(t) = \begin{Bmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_j(t) \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

Ao utilizar os termos referentes aos modos, tem-se

$$\ddot{d}_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{d}_j(t) + \omega_j^2 d_j(t) = f_j(t) \quad (2.69)$$

A Equação (2.69) representa j equações modais. Cada equação resolvida pela metodologia da Seção 2.2, ou via um algoritmo de integração numérica do tempo para qualquer complexidade da carga dinâmica, resulta em um deslocamento modal d_j , que compõe o vetor de deslocamentos modais da Equação (2.68), que substituindo na Equação (2.54) obtém-se a solução da Equação (2.36), a equação de movimento amortecida forçada.

Para o caso particular em que a estruturas está sob a ação de uma carga harmônica $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 \sin(\Omega t)$, a força modal é dada por

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}_0 \sin(\Omega t) = \begin{Bmatrix} f_{01} \\ \vdots \\ f_{0j} \end{Bmatrix} \sin(\Omega t) \quad (2.70)$$

De forma análoga à Seção 2.2, a solução da equação diferencial apresentada pela Equação (2.69) é similar a Equação (2.33), porém com respeito ao deslocamento modal d_j . Assim,

$$d_j(t) = e^{-\xi_j \omega_j t} [a_{1j} \cos(\omega_{dj} t) + a_{2j} \sin(\omega_{dj} t)] + \frac{d_{estj}}{\sqrt{(1 - r_j^2)^2 + (2\xi_j r_j)^2}} \sin(\Omega t - \phi_j) \quad (2.71)$$

no qual os termos modais que aparecem na Equação (2.71) são

$$r_j = \frac{\Omega}{\omega_j} \quad (2.72)$$

$$d_{estj} = \frac{f_{0j}}{\omega_j^2} \quad (2.73)$$

$$\omega_{dj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad (2.74)$$

$$\phi_j = \text{atan}\left(\frac{2\xi_j r_j}{1 - r_j^2}\right) \quad (2.75)$$

$$a_{1j} = d_{0j} + \frac{d_{estj} \sin \phi_j}{\sqrt{(1 - r_j^2)^2 + (2\xi_j r_j)^2}} \quad (2.76)$$

$$a_{2j} = \frac{1}{\omega_{dj}} (\dot{d}_{0j} + a_{1j} \xi_j \omega_j) - \frac{d_{estj} \Omega}{\sqrt{(1 - r_j^2)^2 + (2\xi_j r_j)^2}} \sin \phi_j \quad (2.77)$$

em que d_{0j} é o deslocamento modal oriundo das condições iniciais do movimento. Ao multiplicar a Equação (2.54) por $\Phi^T \mathbf{M}$ e ao usar a relação da Equação (2.50), tem-se o deslocamento modal em função do deslocamento nodal

$$\mathbf{d}(t) = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{u}(t) \quad (2.78)$$

Assim, o deslocamento modal inicial é obtido com o deslocamento nodal para o tempo inicial $\mathbf{u}(t_0)$ substituído na Equação (2.78), ou seja,

$$\mathbf{d}_0 = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{u}(t_0)$$

$$\mathbf{d}_0 = \begin{Bmatrix} d_{01} \\ \vdots \\ d_{0j} \end{Bmatrix} \quad (2.79)$$

De forma similar, têm-se as velocidades e acelerações modais iniciais

$$\dot{\mathbf{d}}_0 = \Phi^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(t_0) \quad (2.80)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_0 = \Phi^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t_0) \quad (2.81)$$

Portanto, com o deslocamento modal obtido pela Equação (2.71), o deslocamento nodal da estrutura amortecida submetida a uma carga harmônica é obtido via Equação (2.54).

2.4. Algoritmo de Integração Numérica no Tempo (Newmark)

O algoritmo de integração numérica de Newmark (Newmark, 1959) baseia-se no arbítrio da aceleração da resposta dinâmica em um dado espaço de tempo discretizado. Em seu trabalho, Newmark (1959) apresentou uma família de métodos para solução da equação de movimento, representada por

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + (1 - \gamma)\ddot{u}_{i-1}\Delta t + \gamma\ddot{u}_i\Delta t \quad (2.82)$$

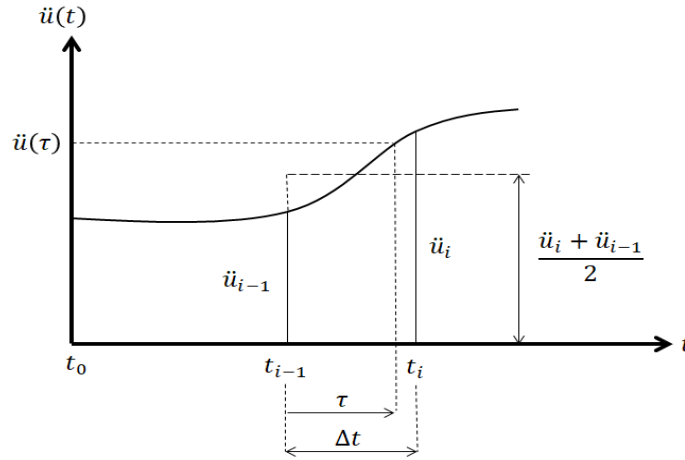
$$u_i = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1}\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{u}_{i-1}\Delta t^2 + \beta\ddot{u}_i\Delta t^2 \quad (2.83)$$

em que os parâmetros γ e β são escolhidos com a finalidade de definir a estabilidade e a precisão da solução.

Partindo do pressuposto da aceleração média constante no espaço de tempo Δt , ilustrado na Figura 2.5, escreve-se a equação da aceleração média dentro desse espaço de tempo para um tempo genérico τ medido a partir do instante t_{i-1} :

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1}}{2} \quad (2.84)$$

Figura 2.5 – Média da aceleração no espaço de tempo Δt .



Fonte: Autor (2020)

Ao realizar a integração analítica na Equação (2.84), obtêm-se as equações da velocidade e deslocamento:

$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_{i-1} + \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1}}{2} \tau \quad (2.85)$$

$$u(\tau) = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1} \tau + \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1}}{4} \tau^2 \quad (2.86)$$

Ao tomar como o tempo generalizado τ igual a Δt , têm-se a velocidade e deslocamento no instante t_i

$$\dot{u}(\tau = \Delta t) = \dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1}}{2} \Delta t \quad (2.87)$$

$$u(\tau = \Delta t) = u_i = u_{i-1} + \dot{u}_{i-1} \Delta t + \frac{\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i-1}}{4} \Delta t^2 \quad (2.88)$$

Verifica-se que, ao se adotar os parâmetros $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$ nas Equações (2.82) e (2.83), obtêm-se as mesmas expressões das Equações (2.87) e (2.88). A vantagem com a utilização da aceleração média, segundo Newmark (1959), é que não se introduz erro por amortecimento numérico ao problema quando se adota $\gamma = 1/2$, enquanto o parâmetro $\beta = 1/4$ garante uma boa estabilidade ao problema.

A partir das Equações (2.87) e (2.88) pode-se isolar a aceleração e velocidade correspondente ao i -ésimo instante de tempo:

$$\ddot{u}_i = -\ddot{u}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t} (u_i - u_{i-1} - \dot{u}_{i-1}\Delta t) \quad (2.89)$$

$$\dot{u}_i = -\dot{u}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} (u_i - u_{i-1}) \quad (2.90)$$

Ao estender a análise para problemas dinâmicos com múltiplos graus de liberdade, as Equações (2.89) e (2.90) tomam a forma

$$\ddot{\mathbf{u}}_i = -\ddot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1} - \dot{\mathbf{u}}_{i-1}\Delta t) \quad (2.91)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_i = -\dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) \quad (2.92)$$

Ao substituir as Equações (2.91) e (2.92) na Equação (2.36) e ao utilizar a mesma notação na discretização do tempo, ou seja, $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(t_i)$, $\dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{u}}(t_i)$ e $\ddot{\mathbf{u}}_i = \ddot{\mathbf{u}}(t_i)$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K}\mathbf{u}_i &= \mathbf{F}_i \\ \mathbf{M} \left[-\ddot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1} - \dot{\mathbf{u}}_{i-1}\Delta t) \right] + \mathbf{C} \left[-\dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}) \right] \\ + \mathbf{K}\mathbf{u}_i &= \mathbf{F}_i \end{aligned} \quad (2.93)$$

que pode ser resumido ao sistema de equações algébricas

$$\mathbf{K}'\mathbf{u}_i = \mathbf{f}'_i \quad (2.94)$$

em que

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{C} \quad (2.95)$$

$$\mathbf{f}'_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{M} \left(\ddot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{u}_{i-1} \right) + \mathbf{C} \left(\dot{\mathbf{u}}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{u}_{i-1} \right) \quad (2.96)$$

É importante ressaltar que esse método proposto por Newmark é incondicionalmente estável, dessa forma o espaçamento Δt é escolhido de tal forma para garantir a acurácia da solução. Neste trabalho é utilizado um espaçamento de tempo prático, recomendado por Soriano (2014), dado por

$$\Delta t \leq \frac{2\pi}{10\omega_{max}} \quad (2.97)$$

em que ω_{max} é o valor da frequência natural do modo de vibração mais elevado que tenha participação relevante na resposta dinâmica.

A aplicação do método de integração de Newmark se inicia então com o vetor inicial de acelerações $\ddot{\mathbf{u}}_0$ que pode ser obtido com os vetores de deslocamento e velocidades iniciais, respectivamente, $\mathbf{u}_0$ e $\dot{\mathbf{u}}_0$. Se as velocidades e deslocamento iniciais forem iguais a zero, então a aceleração inicial também o será, caso contrário, a aceleração inicial pode ser obtida por meio da equação de movimento. Assim,

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0) \quad (2.98)$$

3. TEORIA DE VIGAS E PLACAS

Placas são elementos estruturais em que a sua espessura h é muito menor em relação às suas dimensões planas e é submetida a cargas perpendicular ao seu plano médio, que gera deformações devido à flexão (ver Figura 3.1). Muitas estruturas civis são analisadas como um elemento de placa, a exemplo das lajes em edifícios, tabuleiros de pontes e muros de flexão para contenção. As vigas, assim como as placas, são elementos comumente empregados na modelagem de estruturas lineares em obras civis. Neste capítulo o estudo de vigas será tomando como um caso particular do elemento de placas, visto que se comportam de maneira similar, salvo algumas considerações específicas que são realizadas durante o tratamento teórico neste capítulo.

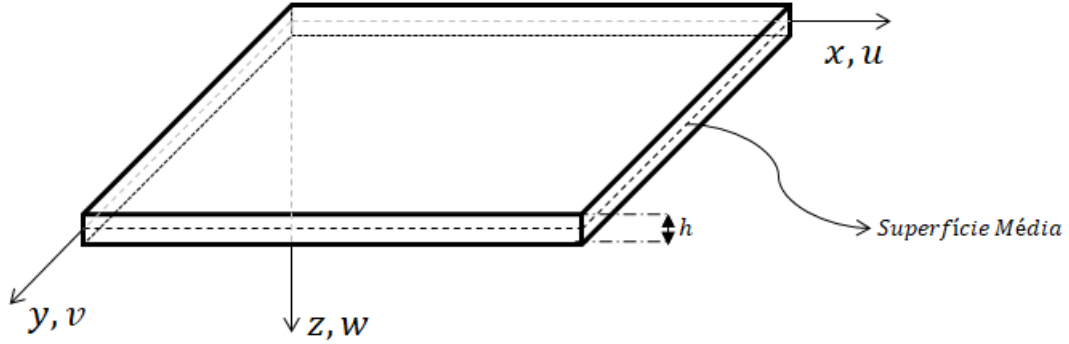
3.1. Breve Fundamentação Teórica de Placas

Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), as placas podem ser classificadas como: (a) placas finas com pequenos deslocamentos, (b) placas finas com grandes deslocamentos e (c) placas espessas. Este trabalho tem como foco as placas finas com pequenos deslocamentos, e assumem-se algumas simplificações propostas por Kirchhoff:

- Os deslocamentos transversais na superfície média são pequenos quando comparados com a espessura da placa;
- Linhas retas perpendiculares à superfície média antes da deformação permanecem retas e perpendiculares à superfície média deformada;
- Tensões normais da direção transversal à superfície média podem ser desconsideradas.

Ao assumir essas hipóteses, todos os componentes de tensões podem ser expressos por meio do deslocamento transversal da placa, e estas são funções de duas coordenadas contidas no plano médio. A Figura 3.1 ilustra uma representação de uma placa com espessura h , coordenadas cartesianas x , y e z com deslocamentos nas respectivas direções u , v e w .

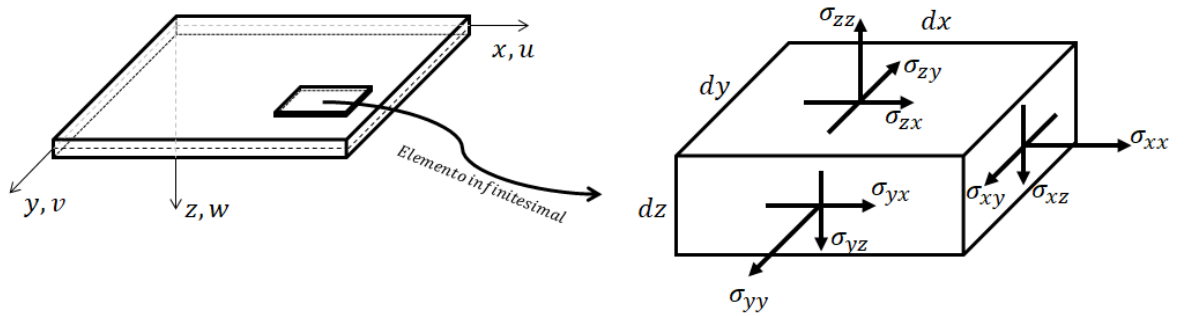
Figura 3.1 – Representação de uma placa com espessura h .



Fonte: Autor (2020)

Com a finalidade de descrever o estado tridimensional de tensão um ponto da placa, é interessante retirar um elemento infinitesimal representativo do elemento de placa com dimensões dx , dy e dz , em que suas faces são paralelas aos planos de coordenadas. Na Figura 3.2 são indicados os componentes das tensões nas três faces visíveis, sabendo que nas outras três faces ocultas e opostas possuem os mesmos componente de tensão, porém com sentidos opostos.

Figura 3.2 – Componentes de tensões em um elemento tridimensional infinitesimal.



Fonte: Autor (2020)

Os componentes normais aos planos x , y e z são denominados, respectivamente, por σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} , enquanto os demais componentes são denominados tangenciais aos planos. O estado de tensões em um ponto do corpo pode então ser definido pelo tensor de tensões

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Pela lei de reciprocidade das tensões de cisalhamento, o tensor de tensões dado pela Equação (3.1) é simétrico, pois $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Por conveniência, pode-se chamar as tensões normais aos planos apenas com a indicação de um único índice, ou seja, $\sigma_{ii} = \sigma_i$. Dessa forma o tensor de tensões pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ sim. & & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

A lei de Hooke estabelece as relações constitutivas para materiais elásticos lineares, em que é possível escrever as deformações em função das tensões. Assim, tem-se

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (3.5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}; \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}; \quad (3.6)$$

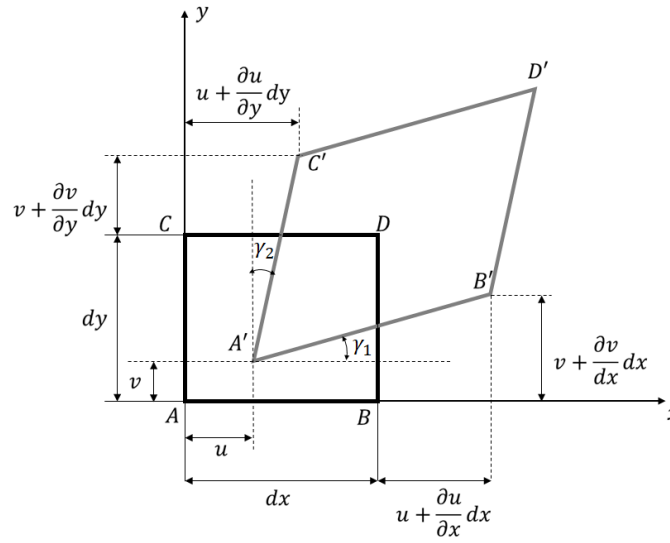
em que

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.7)$$

sendo E é o módulo de elasticidade longitudinal, ν o coeficiente de Poisson e G o módulo de elasticidade transversal do material.

Os deslocamentos de um ponto genérico na placa são expressos pelos componentes u , v e w referentes às direções x , y e z , respectivamente. Na Figura 3.3 é tomado o plano de referência $x - y$ do elemento representativo ilustrado na Figura 3.2, no qual é possível correlacionar os deslocamentos com as deformações de um elemento que, antes da deformação, possui uma geometria $ABCD$ e depois de deformado toma-se a forma $A'B'C'D'$.

Figura 3.3 – Deformações do elemento representativo no plano $x - y$.



Fonte: Autor (2020)

Na Figura 3.3, pode-se identificar que as tensões normais geram uma alteração nas dimensões dx e dy do elemento original, enquanto as tensões tangenciais geram as rotações γ_1 e γ_2 . Por definição, a deformação normal na direção x é dada por

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.8)$$

em que dx' é o comprimento da projeção do lado $A'B'$ no eixo x , dado por

$$dx' = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

A deformação por corte γ_{xy} é composto pela distorção do elemento, ou seja,

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.9)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, de forma similar para as outras direções, têm-se os seguintes componentes de deformações em função do deslocamento:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.11)$$

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.12)$$

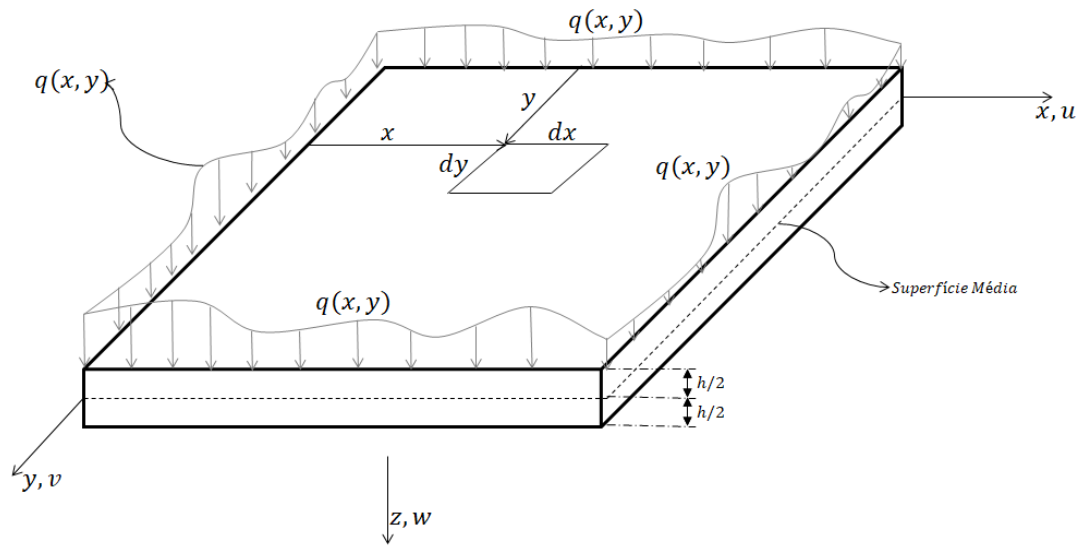
$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.13)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.14)$$

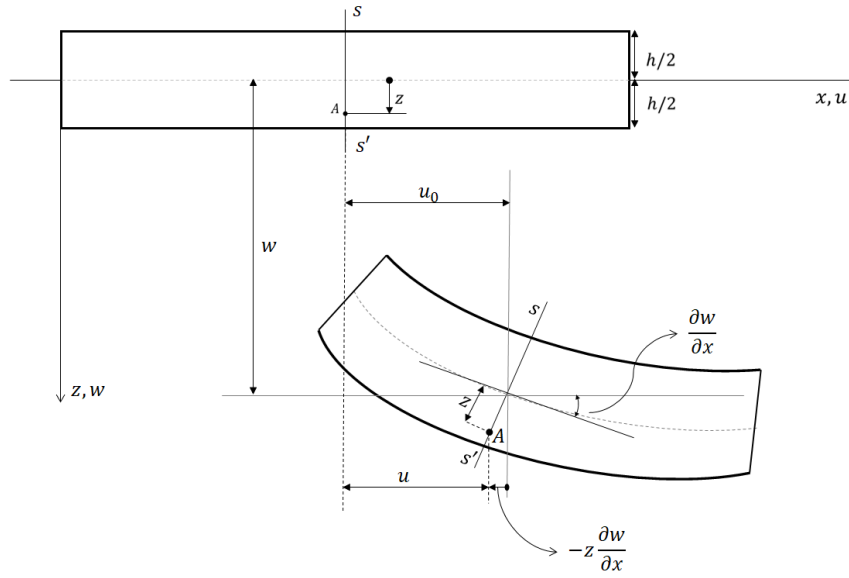
3.2. Análise Estática de Placas

Ao considerar uma placa submetida a um carregamento distribuído $q(x, y)$ como ilustrado pela Figura 3.4, pode-se encontrar as relações entre o deslocamento e as tensões. Ao tomar uma seção transversal no plano $x - z$ e a sua deformada, como apresentada na Figura 3.5, é possível identificar as deflexões em função dos deslocamentos $u(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$.

Figura 3.4 – Geometria e carregamento em uma placa.



Fonte: Autor (2020)

Figura 3.5 – Deformada de uma seção transversal relativa ao plano $x - z$.


Fonte: Autor (2020)

Pela Figura 3.5, ao utilizar a hipótese de Kirchhoff, em que a linha reta ss' permanece reta na situação deformada, o deslocamento na direção de z do ponto A é igual ao deslocamento na superfície média, ou seja,

$$w = w(x, y, z) = w(x, y, 0) = w_0(x, y) \quad (3.15)$$

O deslocamento na direção x é dado por

$$u = u(x, y, z) = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.16)$$

De forma similar se tomar o plano de referência como sendo $y - z$, temos o deslocamento v na direção y como sendo

$$v = v(x, y, z) = v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.17)$$

em que u_0 e v_0 são os deslocamentos na superfície média (para $z = 0$) nas direções x e y , respectivamente. Ao derivar os deslocamentos u e v nas respectivas direções e ao utilizar as Equações (3.8) a (3.14), chega-se à relação de deformações-deslocamentos

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.19)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.20)$$

Ainda pela Lei de Hooke, as tensões podem ser expressas em função das deformações nas formas

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x - \nu \varepsilon_y) \quad (3.21)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y - \nu \varepsilon_x) \quad (3.22)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} \quad (3.23)$$

em que se considera a hipótese de Kirchhoff, ou seja, $\sigma_z \approx 0$.

Ao substituir as Equações (3.18) a (3.20) nas Equações (3.21) a (3.23), chegam-se aos componentes de tensões em função dos deslocamentos:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.24)$$

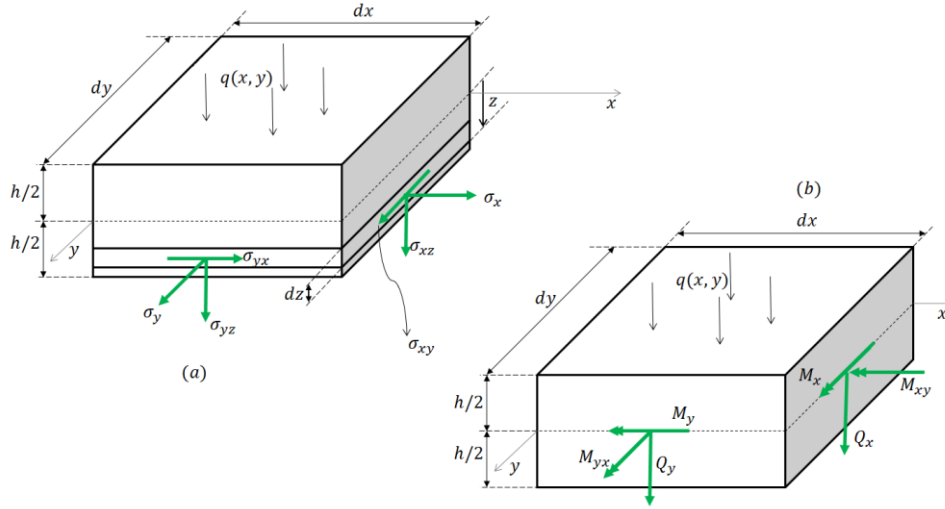
$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.25)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{(1 + \nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.26)$$

É possível ver a partir das Equações (3.24) a (3.26) que as tensões variam ao longo da espessura da placa, assumindo valor nulo no plano médio.

Os esforços internos na placa podem ser obtidos a partir das tensões existentes em uma seção genérica da placa. Na Figura 3.6, para a placa com espessura h e o eixo de referência que passa pela superfície média, os esforços internos solicitantes podem ser encontrados ao se integrar ao longo da seção transversal da placa admitindo uma largura unitária, ou seja, $dy = dx = 1$.

Figura 3.6 – (a) Tensões em uma fibra genérica dz e (b) esforços internos de momento e cisalhamento.



Fonte: Autor (2020)

Assim, os momentos são dados por

$$M_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i z dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3.27)$$

em que $M_{xy} = M_{yx}$. Ao substituir as expressões das tensões dadas pelas Equações (3.24) a (3.26) na Equação (3.27), e ao realizar a integração ao longo da seção da placa, tem-se

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.28)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.29)$$

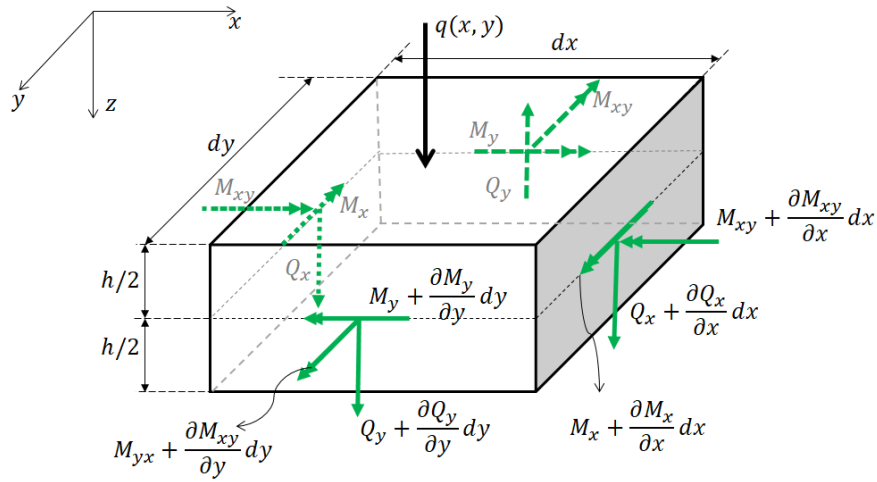
$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.30)$$

em que

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.31)$$

é o modulo de rigidez a flexão da placa. Na Figura 3.7 é apresentado um elemento infinitesimal da placa com variação dos esforços solicitantes em seções paralelas defasadas de dx e dy .

Figura 3.7 – Esforços internos solicitantes e carga distribuída em um elemento infinitesimal de placa.



Fonte: Autor (2020)

Ao analisar a Figura 3.7, e ao fazer o equilíbrio das forças na direção do eixo z , tem-se

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dxdy + qdxdy = 0$$

Ao dividir todos os termos da expressão anterior por $dxdy$, chega-se a

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (3.32)$$

Ao realizar o equilíbrio dos momentos em torno do eixo x , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dxdy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dxdy - Q_y dxdy &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

De forma similar, a equação de equilíbrio em torno do eixo y é dada por

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (3.34)$$

Ao isolar Q_y e Q_x das Equações (3.33) e (3.34), e ao substituir na Equação (3.32), obtém-se a equação diferencial de equilíbrio para flexão da placa fina

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (3.35)$$

A Equação (3.35) pode ser expressa em termos dos deslocamentos da placa substituindo as expressões dos momentos dados pelas Equações (3.28) a (3.30), o que leva a

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \quad (3.36)$$

3.3. Análise Dinâmica de Placas

A Equação (3.36) descreve o comportamento estático da placa sujeita a um carregamento q . Quando a placa está sujeita a uma ação dinâmica externa $q(t)$, adicionam-se os termos referentes às forças inercias e de amortecimento da placa, que resulta em

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + c\dot{w} + \rho h \ddot{w} = q(t) \quad (3.37)$$

em que ρ é a densidade do material da placa, c o coeficiente de amortecimento viscoso, $\dot{w}$ a velocidade na direção transversal da placa e $\ddot{w}$ a aceleração na direção transversal. O termo $c\dot{w}$ representa a parcela da força de amortecimento estrutural e $\rho h \ddot{w}$ representa a parcela da força inercial que surge na placa para contrabalancear a ação dinâmica externa $q(t)$.

Nesta seção será abordada de forma sucinta a teoria de dinâmica de placas, para tal, a formulação apresentada para análise modal é baseada no trabalho de Chakraverty (2019), enquanto para vibrações forçadas em placas é baseada no trabalho de Soedel (2004). Para maiores detalhes, recomenda-se ver o trabalho desses dois autores.

3.3.1. Análise Modal em Placas

A primeira etapa da análise dinâmica consiste na análise modal do sistema a fim de se obter as frequências e modos naturais de vibração; para tal, toma-se a equação de movimento não amortecida e não forçada da placa:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \ddot{w} = 0 \quad (3.38)$$

A Equação (3.38) pode ser rescrita na seguinte forma:

$$D \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = 0 \quad (3.39)$$

em que ∇^2 é o operador de Laplace dado por

$$\begin{aligned} \nabla^2(\cdot) &= \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} \\ \nabla^4(\cdot) &= \nabla^2 \nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial y^4} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ao supor as formas modais de deslocamento da placa para as frequências naturais harmônicas o deslocamento transversal da placa pode ser escrito como

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t}$$

ou, na forma sucinta,

$$w = W e^{i\omega t} \quad (3.41)$$

Substituindo a Equação (3.41) e sua segunda derivada com relação ao tempo na Equação (3.39), tem-se

$$(\nabla^4 - J^4)W = 0 \quad (3.42)$$

$$J^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (3.43)$$

A Equação (3.42) pode ser expandida na forma

$$(\nabla^2 - J^2)(\nabla^2 + J^2)W = 0 \quad (3.44)$$

em que a solução da Equação (3.44) pode ser obtida como superposição das soluções de duas equações diferenciais lineares:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + J^2)W_1 &= 0 \\ (\nabla^2 - J^2)W_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

ou, para facilitar as manipulações algébricas,

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + J^2)W_1 &= 0 \\ (\nabla^2 + (ij)^2)W_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

sendo W_1 e W_2 as soluções de cada equação desacoplada, a solução final fica

$$W = W_1 + W_2 \quad (3.47)$$

Por conta da linearidade do problema, para a solução da Equação (3.46), pode-se escrever

$$W_1 = X_1(x)Y_1(y) \quad (3.48)$$

Ao aplicar a Equação (3.48) na primeira expressão da Equação (3.46), obtém-se a equação diferencial

$$Y_1 \frac{d^2 X_1}{dx^2} + X_1 \frac{d^2 Y_1}{dy^2} + X_1 Y_1 J^2 = 0 \quad (3.49)$$

Essa equação diferencial pode ser desacoplada em outras duas

$$\frac{d^2 X_1}{dx^2} + \alpha_1^2 X_1 = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{d^2 Y_1}{dy^2} + \alpha_2^2 Y_1 = 0 \quad (3.51)$$

em que

$$J^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \quad (3.52)$$

As soluções gerais para as equações diferenciais de segunda ordem das Equações (3.50) e (3.51) são dadas por

$$X_1(x) = A_1 \sin(\alpha_1 x) + B_1 \cos(\alpha_1 x) \quad (3.53)$$

$$Y_1(y) = A_2 \sin(\alpha_2 y) + B_2 \cos(\alpha_2 y) \quad (3.54)$$

De forma similar, para a segunda expressão da Equação (3.46), tem-se

$$W_2 = X_2(x)Y_2(y) \quad (3.55)$$

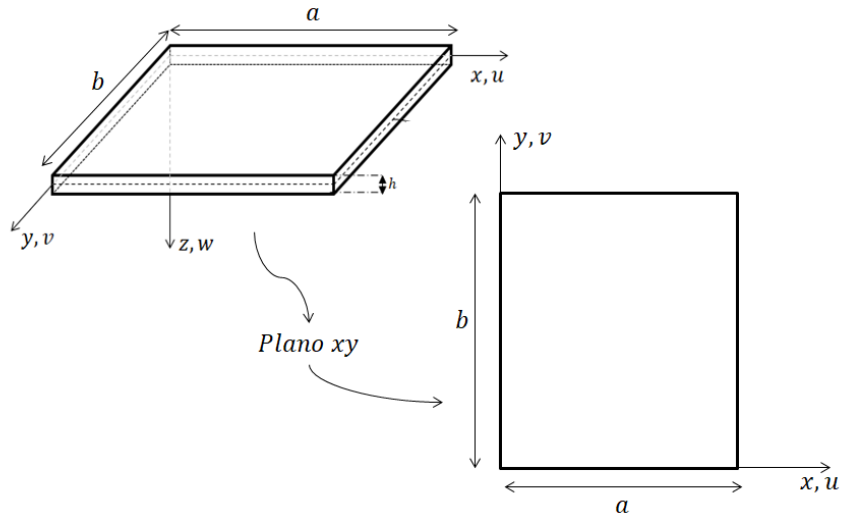
com as soluções

$$X_2(x) = C_1 \sinh(\alpha_1 x) + D_1 \cosh(\alpha_1 x) \quad (3.56)$$

$$Y_2(y) = C_2 \sinh(\alpha_2 y) + D_2 \cosh(\alpha_2 y) \quad (3.57)$$

As constantes $A_1, B_1, A_2, B_2, C_1, D_1, C_2$ e D_2 dependem das condições de contorno da placa. Neste trabalho será desenvolvido para o caso mais comum, em que a placa está simplesmente apoiada em seus quatro bordos.

Figura 3.8 – Representação de uma placa com espessura h e dimensões a e b .



Fonte: Autor (2020)

Ao tomar como referência os sistemas de coordenadas e as dimensões dos bordos da placa como sendo a e b no plano xy da Figura 3.8, as condições de contorno são:

a) Na direção x

$$W(0, y) = 0 \quad (3.58)$$

$$W(a, y) = 0 \quad (3.59)$$

$$M_x(0, y) = D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.60)$$

$$M_x(a, y) = D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.61)$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 W(0, y)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial^2 W(a, y)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.63)$$

b) Na direção y

$$W(x, 0) = 0 \quad (3.64)$$

$$W(x, b) = 0 \quad (3.65)$$

$$M_y(x, 0) = D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.66)$$

$$M_y(x, b) = D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.67)$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 W(x, 0)}{\partial y^2} = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial^2 W(x, b)}{\partial y^2} = 0 \quad (3.69)$$

Primeiro, isolam-se os termos da resposta da direção x , ou seja, $\bar{W}(x)$ das Equações (3.53) e (3.56) como

$$\begin{aligned}\bar{W}(x) &= X_1(x) + X_2(x) \\ &= A_1 \sin(\alpha_1 x) + B_1 \cos(\alpha_1 x) + C_1 \sinh(\alpha_1 x) \\ &\quad + D_1 \cosh(\alpha_1 x)\end{aligned}\tag{3.70}$$

cuja derivada de segunda ordem é dada por

$$\begin{aligned}\bar{W}''(x) &= -A_1 \alpha_1^2 \sin(\alpha_1 x) - B_1 \alpha_1^2 \cos(\alpha_1 x) + C_1 \alpha_1^2 \sinh(\alpha_1 x) \\ &\quad + D_1 \alpha_1^2 \cosh(\alpha_1 x)\end{aligned}\tag{3.71}$$

Ao aplicar as condições de contorno do deslocamento (Equações (3.58) e (3.59)) referente à direção x na Equação (3.70) e as condições de contorno do momento (Equações (3.60) e (3.61)) na Equação (3.71), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}B_1 + D_1 &= 0 \\ A_1 \sin(\alpha_1 a) + B_1 \cos(\alpha_1 a) + C_1 \sinh(\alpha_1 a) + D_1 \cosh(\alpha_1 a) &= 0 \\ -\alpha_1^2 B_1 + \alpha_1^2 D_1 &= 0 \\ -A_1 \alpha_1^2 \sin(\alpha_1 a) - B_1 \alpha_1^2 \cos(\alpha_1 a) + C_1 \alpha_1^2 \sinh(\alpha_1 a) + D_1 \alpha_1^2 \cosh(\alpha_1 a) &= 0\end{aligned}\tag{3.72}$$

que pode ser reescrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha_1 a) & \cos(\alpha_1 a) & \sinh(\alpha_1 a) & \cosh(\alpha_1 a) \\ 0 & -\alpha_1^2 & 0 & \alpha_1^2 \\ -\alpha_1^2 \sin(\alpha_1 a) & -\alpha_1^2 \cos(\alpha_1 a) & \alpha_1^2 \sinh(\alpha_1 a) & \alpha_1^2 \cosh(\alpha_1 a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\tag{3.73}$$

O sistema matricial anterior só pode ser satisfeito se o determinante da matriz for nulo. Expandindo a determinante da matriz, tem-se

$$\sin(\alpha_1 a) \sinh(\alpha_1 a) = 0\tag{3.74}$$

para soluções não triviais, ou seja, $\sinh(\alpha_1 a) \neq 0$:

$$\sin(\alpha_1 a) = 0\tag{3.75}$$

o que resulta em

$$\alpha_1 = \frac{m\pi}{a} \quad (3.76)$$

para m termos inteiros e positivos. A Equação (3.75) também indica que A_1 é o único coeficiente não nulo do sistema de equações. Assim, a expressão da Equação (3.70) fica:

$$\bar{W}(x) = A_1 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (3.77)$$

De forma similar, isolam-se os termos da resposta na direção y , ou seja, $\bar{W}(y)$ das Equações (3.54) e (3.57):

$$\begin{aligned} \bar{W}(y) &= Y_1(y) + Y_2(y) \\ &= A_2 \sin(\alpha_2 y) + B_2 \cos(\alpha_2 y) + C_2 \sinh(\alpha_2 y) \\ &\quad + D_2 \cosh(\alpha_2 y) \end{aligned} \quad (3.78)$$

e ao se aplicar as condições de contorno da direção y , com as mesmas manipulações algébricas chega-se a

$$\sin(\alpha_2 b) = 0 \quad (3.79)$$

ou seja,

$$\alpha_2 = \frac{n\pi}{b} \quad (3.80)$$

que indica também que apenas A_2 é o coeficiente não nulo da Equação (3.78), assim,

$$\bar{W}(y) = A_2 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.81)$$

Substituindo as Equações (3.76) e (3.80) na Equação (3.52) e posteriormente na Equação (3.43), obtém-se a função da frequência natural para uma placa com dimensões a e b , em que seus quatro bordos são simplesmente apoiados:

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (3.82)$$

As funções de forma (funções modais) de deformação da placa são compostas pelo produto das soluções de cada direção, dadas pelas Equações (3.77) e (3.81), ou seja,

$$W_{mn}(x, y) = A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.83)$$

Os subíndices m e n nas Equações (3.82) e (3.83) referem-se aos termos modais em cada direção da placa, ou seja, ω_{mn} e W_{mn} representam, respectivamente, a frequência natural e a forma modal considerando a contribuição do modo m na direção x com o modo n na direção y . É importante ressaltar que existem 21 (vinte e uma) combinações de condições de contorno para os quatro bordos de uma placa retangular. As expressões da função da frequência natural e de formas modais dependem unicamente dessas condições de contorno. Autores como Lessia (1969) apresentam as formulações das frequências e formas modais com mais detalhes para outras condições de contorno.

3.3.2. Vibrações Forçadas em Placas

Ao utilizar o conceito de decomposição modal já apresentado na Seção 2.3.1, escreve-se a resposta da placa da seguinte forma:

$$w(x, y, t) = \sum_j W_j(x, y) d_j(t) \quad (3.84)$$

em que $W_j(x, y)$ é a função modal referente ao modo j (Ver Equação (3.83)), e $d_j(t)$ o deslocamento modal. A ideia é reescrever a equação de movimento da placa, dada pela Equação (3.37), com o uso do operador Laplaciano da Equação (3.40) e com a Equação (3.84), o que leva a

$$\sum_j [D\nabla^4 W_j d_j + c W_j \dot{d}_j + \rho h W_j \ddot{d}_j] = q(t) \quad (3.85)$$

Da análise modal, por meio da Equação (3.42), pode-se ver que

$$D\nabla^4 W_j = \rho h \omega_j^2 W_j \quad (3.86)$$

e, substituindo na Equação (3.85), tem-se

$$\sum_j [\rho h \ddot{d}_j + c \dot{d}_j + \rho h \omega_j^2 d_j] W_j = q(t) \quad (3.87)$$

Ao aproveitar da ortogonalidade da função modal, já descrita no Capítulo 2, multiplica-se a Equação (3.87) pela função modal do j -ésimo modo W_j , o que leva a

$$\sum_j [\rho h \ddot{d}_j + c \dot{d}_j + \rho h \omega_j^2 d_j] W_j^2 = W_j q(t) \quad (3.88)$$

que ao se integrar sobre as dimensões da placa e ao remover o somatório, visto que se quer calcular o deslocamento modal de cada modo separado, para posterior somar as contribuições de acordo com cada modo específico, tem-se

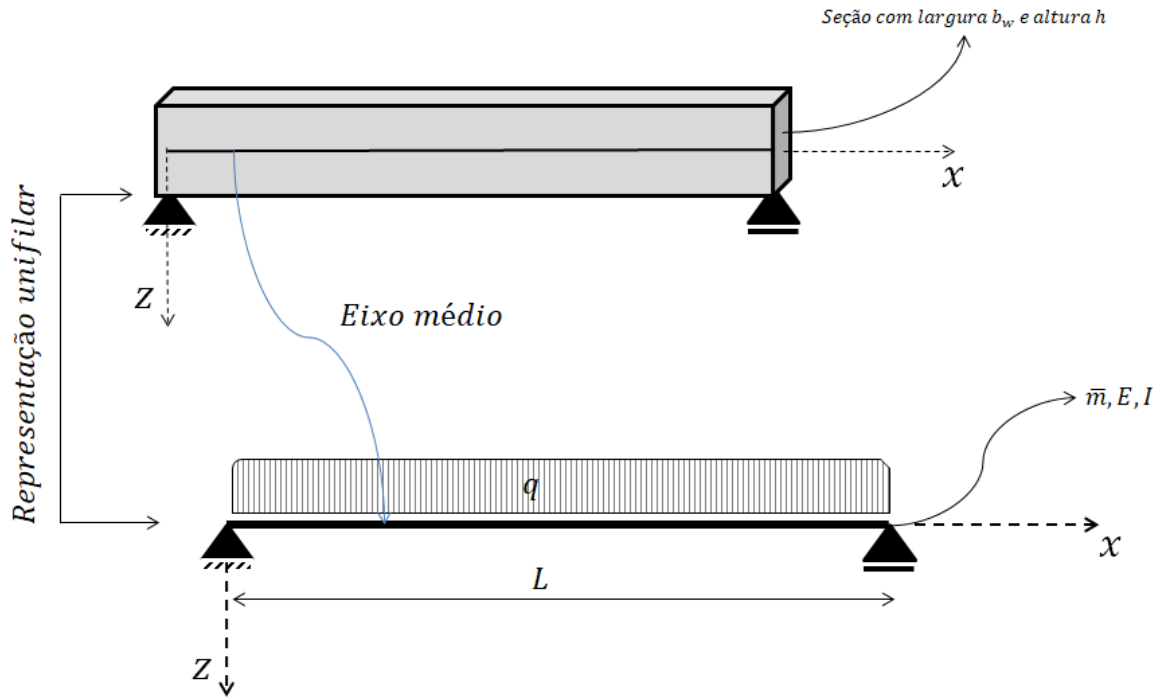
$$(\rho h \ddot{d}_j + c \dot{d}_j + \rho h \omega_j^2 d_j) \int_0^b \int_0^a W_j^2 dx dy = \int_0^b \int_0^a W_j q(t) dx dy \quad (3.89)$$

A Equação (3.89) representa a equação de movimento de uma placa submetida a um carregamento dinâmico qualquer $q(t)$. A resolução dessa equação fornece o deslocamento modal d_j , e que, com a equação (3.84) pode-se obter o deslocamento dinâmico em qualquer ponto da placa. Uma forma de resolver a Equação (3.89) é empregar o algoritmo de integração numérica no tempo de *Newmark* apresentado na seção 2.4. Ao utilizar o algoritmo de *Newmark*, pode-se obter a resposta no domínio do tempo total (resposta transiente e estacionária) para qualquer tipo de carregamento $q(t)$.

3.4. Breve Fundamentação Teórica de Vigas

Os elementos de vigas podem ser vistos como um caso particular de placas, em que por se tratar de um elemento unidimensional as formulações são feitas em um eixo médio de referência (ao invés de um plano médio) e toma-se apenas uma das direções da placa (neste trabalho a direção x). A Figura 3.9 ilustra de forma esquemática uma viga simplesmente apoiada em seus extremos.

Figura 3.9 – Representação de uma viga de vão L , com carga distribuída q , módulo de elasticidade E , momento de inércia I e massa distribuída linearmente $\bar{m}$.



Fonte: Autor (2020)

Assim, seguindo o mesmo raciocínio abordado anteriormente para placas, ao se tomar como referência apenas o eixo x , a equação diferencial que descreve o deslocamento de uma viga sob carregamento distribuído é dada por (SORIANO, 2014)

$$D_v \frac{d^4 w}{dx^4} = q \quad (3.90)$$

em que $D_v = EI$ é o módulo de rigidez à flexão da viga, w é o deslocamento transversal (direção z) ao longo do comprimento da viga.

3.5. Análise Dinâmica em Vigas

A Equação (3.90) descreve o comportamento estático da viga sujeita a um carregamento q . Quando a viga está sujeita a uma ação dinâmica externa $q(t)$, adicionam-se os termos referentes às forças inercias e de amortecimento da viga, o que leva a

$$D_v \frac{d^4 w}{dx^4} + c\dot{w} + \bar{m}\ddot{w} = q(t) \quad (3.91)$$

em que $\bar{m}$ é a massa distribuída linearmente, c o coeficiente de amortecimento viscoso, $\dot{w}$ a velocidade na direção transversal da viga e $\ddot{w}$ a aceleração na direção transversal. O termo $c\dot{w}$ representa a parcela da força de amortecimento estrutural e $\bar{m}\ddot{w}$ representa a parcela da força inercial que surge na viga para contrabalancear a ação dinâmica externa $q(t)$.

Nesta seção será abordada de uma forma sucinta a teoria de dinâmica de vigas, visto que serão aproveitadas as formulações desenvolvidas nas seções anteriores para placas.

3.5.1. Análise Modal em Vigas

A primeira etapa da análise dinâmica consiste na análise modal do sistema a fim de se obter as frequências e modos naturais de vibração; para tal, toma-se a equação de movimento não amortecida e não forçada da viga

$$D_v \frac{d^4 w}{dx^4} + \bar{m} \ddot{w} = 0 \quad (3.92)$$

Nota-se que a Equação (3.92) é similar a Equação (3.38), porém como referência o eixo x . Dessa forma, pode-se seguir o mesmo raciocínio empregado na Seção 3.3.1, ao isolar apenas os termos na direção x , percebe-se que a função modal para a viga simplesmente apoiada em seus extremos é igual a Equação (3.77), e ao normalizar esta equação chega-se a

$$\varphi_j(x) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (3.93)$$

que representa a função modal referente ao modo j para uma viga simplesmente apoiada em seus extremos.

Ao supor as formas modais de deslocamento da viga para as frequências naturais harmônicas, o deslocamento transversal da viga pode ser escrito como

$$w = \varphi_j(x)e^{i\omega t} \quad (3.94)$$

Ao substituir a Equação (3.94) e suas derivadas na (3.92), tem-se

$$\frac{d^4 \varphi_j}{dx^4} + J^4 \varphi_j = 0 \quad (3.95)$$

$$J^4 = \frac{\bar{m}\omega^2}{D_v} \quad (3.96)$$

em que J^4 é o mesmo parâmetro definido pela Equação (3.43) para a direção x , ou seja, ao se reescrever a Equação (3.52) para a direção x , tem-se

$$J^2 = \alpha_1^2 \quad (3.97)$$

Da Equação (3.93) tem-se o valor de α_1 ; substituindo na Equação (3.97) e posteriormente substituindo na Equação (3.96) tem-se a função da frequência natural da viga

$$\omega = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{D_v}{\bar{m}}} \quad (3.98)$$

4. CONTROLE DE VIBRAÇÕES

A tendência cada vez mais forte de projetar estruturas mais arrojadas e em ambientes com solicitações com características dinâmicas têm induzido os engenheiros estruturais a considerarem a utilização de sistemas auxiliares (sistemas mecânicos, equipamentos ou materiais viscoelásticos) em estruturas (existentes ou na fase de projeto) com o objetivo de garantir o serviço e o estado limite último visando a resposta dinâmica controlada da estrutura original. Neste capítulo será abordado de forma resumida alguns tipos desses sistemas auxiliares de controle de vibrações, e posteriormente será focado em um típico específico de atenuador: o Amortecedor de Massa Sintonizado (AMS).

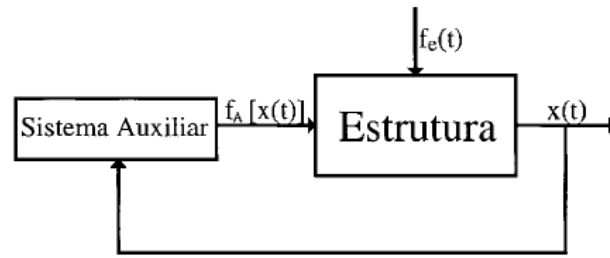
4.1. Breve Fundamentação Teórica

Os problemas em estruturas (estado limite de serviço e/ou estado limite último) sob ação de cargas dinâmicas podem ser mitigados ao se alterar as propriedades da própria estrutura (rigidez, massa ou amortecimento). No entanto, existem limitações (estéticas, arquitetônicas, etc.) que inviabilizam a redução de vibrações a partir das alterações das características da própria estrutura.

Uma solução alternativa da citada no parágrafo anterior é a utilização de atenuadores dinâmicos. Os sistemas de controle (atenuadores) são dispositivos acoplados à estrutura em que se deseja reduzir ou controlar as vibrações provenientes de ações dinâmicas externas. Os atenuadores dinâmicos podem ser divididos em passivos, ativos e híbridos.

Atenuadores passivos geralmente são sistemas de controle de ciclo fechado, ou seja, a força de controle depende da resposta (deslocamento, velocidade e aceleração) da estrutura na qual o atenuador está acoplado, bem como da força de excitação (das frequências). A Figura 4.1 ilustra fluxograma de um sistema de controle passivo de ciclo fechado.

Figura 4.1 – Sistema de controle de ciclo fechado.

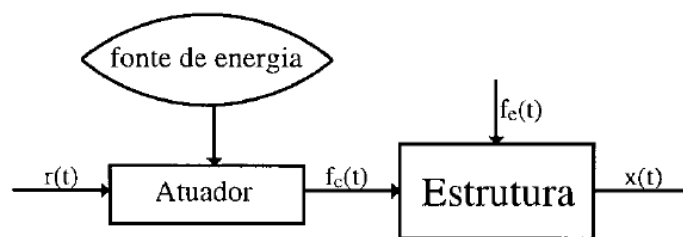


Fonte: Adaptado de BATTISTA (1993)

Como a calibração do atenuador passivo está intrinsicamente relacionado com a estrutura e a força de excitação, se houver alguma perturbação no sistema original (mudança na característica da estrutura ou na ação dinâmica) o sistema de controle pode se tornar ineficaz ou até mesmo intensificar os problemas de vibrações. A vantagem do atenuador passivo é a simplicidade de instalação e não necessita de uma fonte externa de energia.

Os atenuadores ativos são sistemas de controle de ciclo fechado ou aberto. Nos atenuadores de ciclo aberto, a força de controle é gerada por um atuador que é alimentado por uma fonte de energia externa. O atuador é regulado em função da força de excitação produzindo uma força de controle específica para reduzir as vibrações na estrutura. A Figura 4.2 ilustra fluxograma de um sistema de controle ativo de ciclo aberto.

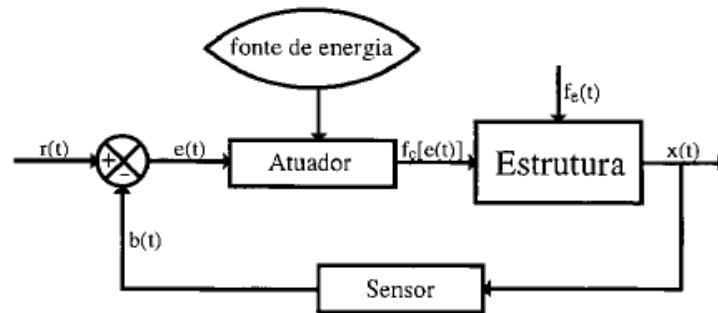
Figura 4.2 – Sistema de controle ativo de ciclo aberto.



Fonte: Adaptado de BATTISTA (1993)

Já os atenuadores de ciclo fechado, a força de controle é gerada por um atuador que é alimentado por uma fonte de energia externa. O atuador por sua vez é regulado a partir da resposta da estrutura por meio de um sensor instalado na mesma que emite um sinal de erro de resposta. A Figura 4.3 ilustra fluxograma de um sistema de controle ativo de ciclo fechado.

Figura 4.3 – Sistema de controle ativo de ciclo fechado.



Fonte: Adaptado de BATTISTA (1993)

Na Figura 4.1, Figura 4.2 e Figura 4.3, $f_e(t)$ é a força de excitação, $x(t)$ é a resposta da estrutura, $f_c[e(t)]$ é a força de controle em função do erro de resposta da estrutura ($e(t)$) e $r(t)$ é o sinal de resposta regulado no atuador. Os atuadores ativos são interessantes, principalmente em situações de cargas dinâmicas com grande variabilidade, em que o sensor regula automaticamente a força de controle necessária; bem como para cargas de impacto que necessita de uma resposta rápida do atuador. Porém, a necessidade de uma fonte de energia externa que atue ao longo de toda a vida útil da estrutura atenuada é um fator negativo desse tipo de sistema de controle, que pode inviabilizar sua utilização, como por exemplo, dificuldades de instalação da fonte de energia e/ou custo extra gerado para o empreendimento ao longo do tempo.

Os atuadores híbridos (passivo/ativos), como o nome já sugere, são composições dos dois tipos de atuadores, que buscam utilizar as vantagens de cada um.

Este trabalho tem como foco os atuadores do tipo passivo, visto que estes tipos de atuadores são mais encontrados na literatura e na aplicação usual em estruturas civis; por serem atuadores que independem de uma fonte de energia externa e de sensores instalados na estrutura diminuem o custo relativo a sua utilização durante a vida útil da estrutura, outro fator é que os atuadores ativos exigem um dimensionamento de dispositivos eletromecânicos o que não é de interesse deste trabalho. Dessa forma, nos itens seguintes serão abordados alguns tipos de sistemas de controle passivos, bem como o modelo de acoplamento estrutural.

4.2. Alguns Tipos Usuais de Atuadores Passivos

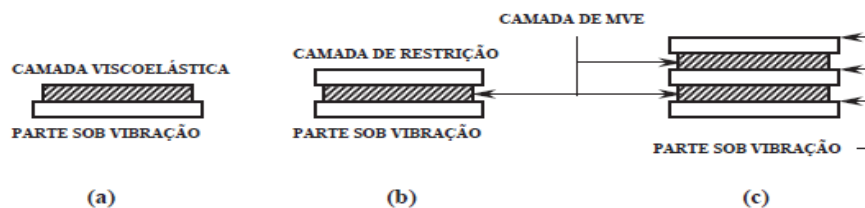
Na literatura e o no mercado existem diversos tipos e composições de atuadores dinâmicos para resolução de problemas estruturais. Alguns dos sistemas de controle passivos usuais são:

Mecanismos de Amortecimento Adicional, Isoladores de Vibrações, Atenuador Dinâmico Sincronizado, Atenuador de Coluna Líquida, e Atenuador Pendular Não Linear.

4.2.1. Mecanismos de Amortecimento Adicional (MAA)

Estes tipos de atenuadores são caracterizados pela adição de amortecimento em pontos estratégicos na estrutura com a finalidade de controlar as vibrações por geração de forças não conservativas. O aumento do amortecimento da estrutura é alcançado sem alterar as características dinâmicas da estrutura original (frequências e modos de vibrações naturais). O amortecimento pode ser viscoelástico (dispositivos com líquidos ou materiais compósitos viscoelástico chamados de MVE, ver Figura 4.4), de fricção (mecanismos de atrito a seco ou de Coulomb) e elastoplástico (que dissipa energia por deformação plástica).

Figura 4.4 – Algumas configurações de amortecedores viscoelásticos: (a) simples camada de MVE, (b) com camada de restrição, (c) duplo sanduiche.



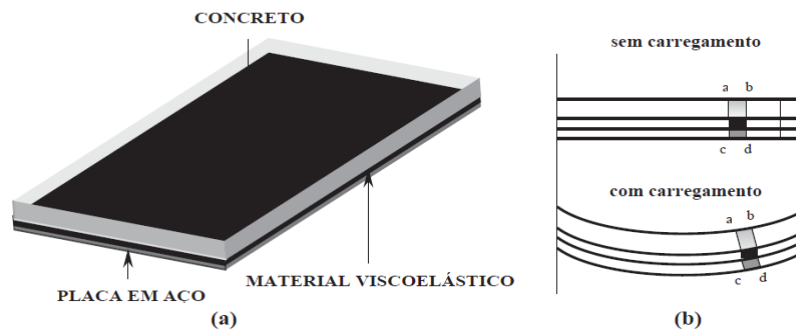
Fonte: VASCONCELOS (2003)

Na Figura 4.5 é ilustrada de forma esquemática uma maneira de empregar os materiais viscoelásticos em placas para atenuação de vibrações.

Em essência, o material viscoelástico é acoplado à placa e restringido por outra camada para que a dissipação de energia seja gerada pelo deslocamento relativo entre a placa e a camada de restrição (como está ilustrado na Figura 4.5b).

No trabalho de Saidi et al. (2011) pode ser visto um desenvolvimento teórico-experimental, bem como a aplicação de um tipo de atenuador viscoelástico aplicado em estruturas, o autor realizou estudos em vigas metálicas e de concreto armado.

Figura 4.5 – (a) representação de uma placa com material viscoelástico acoplado, (b) representação da seção da placa com e sem carregamento atuante.



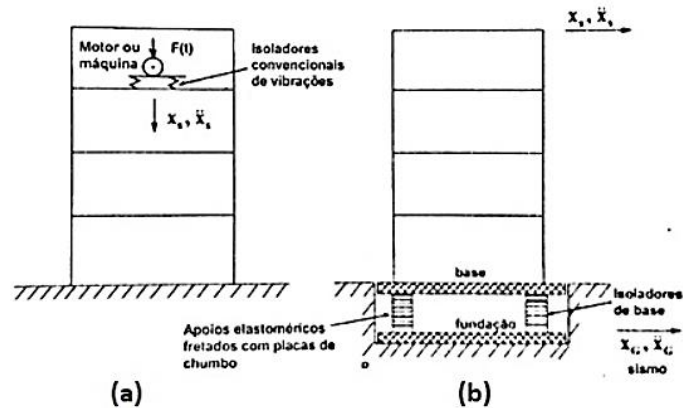
Fonte: VASCONCELOS (2003)

4.2.2. Isoladores de Vibrações (IV)

Os isoladores de vibrações geralmente são empregados em equipamentos industriais para isolar as acelerações excessivas do suporte e evitar problemas de funcionamento da máquina, como também o inverso, isolar o piso da fábrica das acelerações excessivas geradas por determinadas máquinas (ver Figura 4.6a). O sistema de isolamento para esses casos é usualmente composto de molas ou material com rigidez controlada sob os apoios dos equipamentos.

Outra aplicação recorrente dos isoladores de vibrações é a atenuação da resposta dinâmica de estruturas sujeitas à sismos (ver Figura 4.6b). O princípio básico do isolamento sísmico consiste em desacoplar a estrutura do solo por meio de dispositivos com rigidez controlada (atenuador), geralmente elastômeros. O dimensionamento desses atenuadores é feito em função do nível de transmissibilidade que o projetista deseja alcançar.

Figura 4.6 – Isoladores de Vibrações.



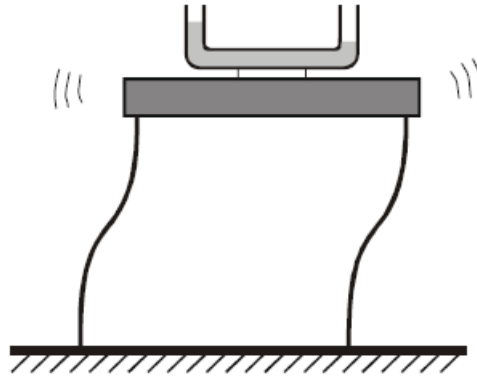
Fonte: Adaptado de BATTISTA (1993)

4.2.3. Atenuador de Coluna Líquida (ACL)

Segundo Souza (2003) os atenuadores de coluna líquida consistem em um recipiente tubular, geralmente em forma de “U”, rígido, que contém um líquido sujeito à pressão atmosférica. A geometria do recipiente e o tipo do líquido a ser utilizado é especificado pelo projetista para atenuar as vibrações. Quando o ACL está acoplado à estrutura, a resposta da estrutura devido à excitação externa movimenta o líquido, que gera forças que alteram as características dinâmicas da própria estrutura reduzindo as vibrações.

A Figura 4.7 ilustra um modelo estrutural com um grau de liberdade com um ACL acoplado.

Figura 4.7 – Representação do acoplamento do ACL em uma estrutura com um grau de liberdade.



Fonte: SOUZA (2003)

Ainda segundo Souza (2003), o funcionamento do atenuador consiste na geração de forças de controle a partir do movimento oscilatório da coluna líquida do trecho vertical do tubo e na dissipação da energia pela perda de carga hidráulica do movimento do líquido.

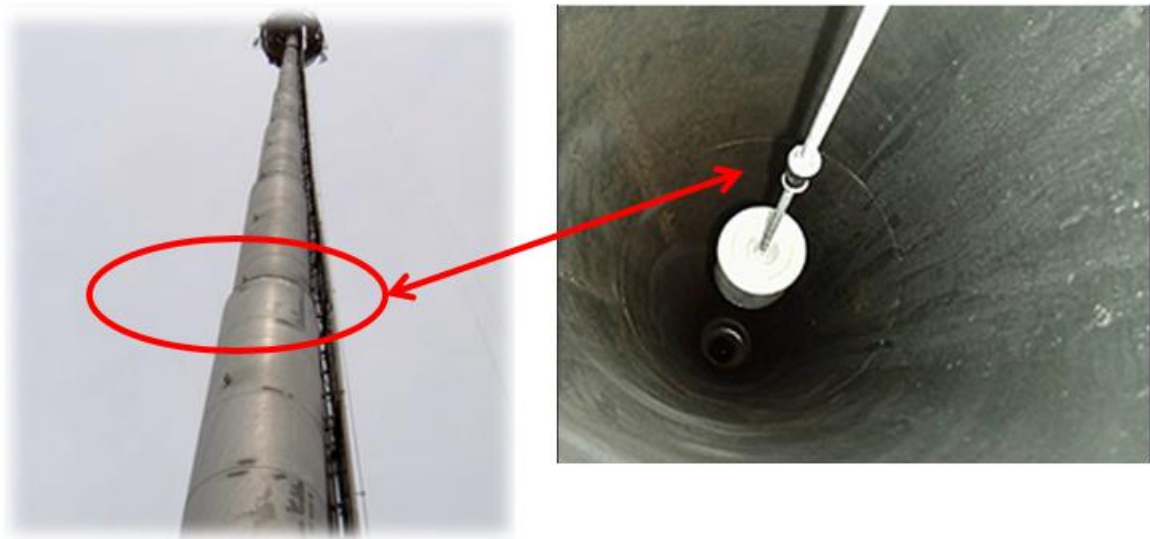
4.2.4. Atenuador Pendular Não-Linear (APNL)

O APNL trata-se de um pêndulo acoplado à estrutura com a finalidade de reduzir as vibrações por meio de forças inerciais geradas pelo pêndulo. Este tipo de atenuador pode operar em regime não linear, diferentemente dos outros atenuadores citados anteriormente, em geral o APNL é aplicado em torres esbeltas sujeitas a vibrações excessiva devido à ação aleatória de vento (PINHEIRO, 1997).

Além das forças inerciais geradas pela massa do pêndulo neste tipo de atenuador, pode-se também levar em conta forças elásticas, inserindo rigidez na ligação do pêndulo com a estrutura, porém na prática tenta-se trabalhar com o pêndulo em movimento livre.

A Figura 4.8 mostra um pêndulo no interior de uma torre que apresentava vibrações excessivas devido à ação do vento.

Figura 4.8 – Interior de uma torre com pêndulo acoplado para reduzir vibrações excessivas.



Fonte: Adaptado de (<http://www.controllato.com.br/>)

4.2.5. Amortecedor de Massa Sintonizado (AMS)

O amortecedor de massa sintonizado (AMS) é um mecanismo composto basicamente de uma massa, mola e as vezes de um amortecedor (este último pouco utilizado). Em geral esses dispositivos são calibrados para que sua frequência fique próxima da frequência natural (ou da frequência referente ao modo que se deseja atenuar) do sistema estrutural em que está acoplado; dessa forma o AMS gera forças inerciais que se contrapõe às forças inerciais geradas na estrutura pela ação dinâmica externa.

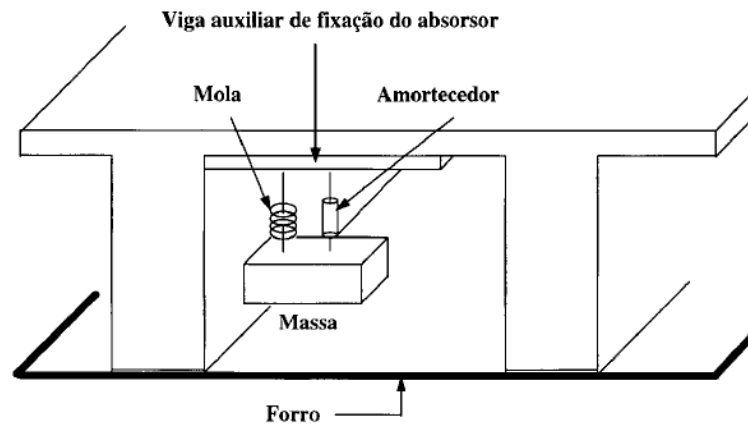
A Figura 4.9 mostra de forma esquemática uma maneira de acoplar o amortecedor de massa sintonizado em um trecho de uma laje nervurada com a finalidade de redução das vibrações da mesma.

Os amortecedores de massa sintonizados são frequentemente utilizados acoplados em estruturas que possuem vibrações excessivas. Quando essas estruturas são excitadas por uma força com frequência constante é possível modificar o padrão de vibrações, reduzindo-os, inserindo massas sob molas e mecanismos de amortecimento acoplados à estrutura original (HARRIS; PIERSOL, 2002).

Neste trabalho o foco principal será dado a este tipo de atenuador de vibrações por ser amplamente utilizado e devido à facilidade de fabricação do mesmo. O conceito de modelagem desse sistema mecânico é relativamente simples, pois se trata de adicionar rigidez, massa e amortecimento no sistema estrutural principal. Nos próximos capítulos serão

descritas de forma mais minuciosa o processo de modelagem e acoplamento desse tipo de atenuador.

Figura 4.9 – Representação esquemática de um amortecedor de massa sintonizado em um trecho de uma laje nervurada.



Fonte: VASCONCELOS (1998)

4.3. Modelagem Estrutural com Amortecedor Acoplado

Nesta seção será realizada uma abordagem de modelagem de um sistema estrutural com um Amortecedor de Massa Sintonizado (AMS) acoplado. Inicialmente, faz-se uma análise para um grau de liberdade de uma estrutura não amortecida com um atenuador também não amortecido e, posteriormente, considera-se o amortecimento para a estrutura e o amortecedor.

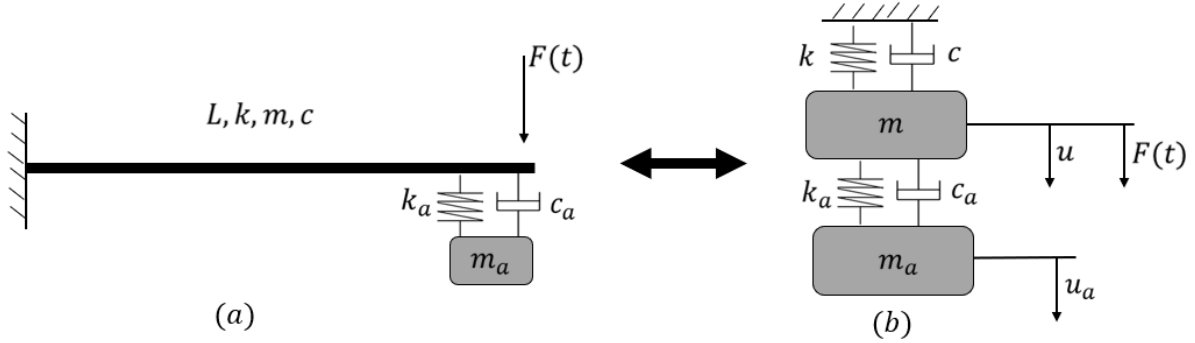
4.3.1. Estrutura Amortecida Simples e AMS Amortecido

Para fins práticos, considera-se a viga engastada na Figura 4.10a com vão de comprimento L , rigidez à flexão k e massa m . A viga está submetida a uma ação dinâmica externa $F(t)$ e possui um grau de liberdade, ou seja, quando submetida a ação dinâmica possui um deslocamento oscilatório u medido na sua extremidade.

Com a finalidade de reduzir as vibrações na viga engastada apresentada na Figura 4.10a, adiciona-se um Amortecedor de Massa Sintonizado na extremidade da viga.

O sistema estrutural (viga engastada e amortecedor) possui, agora, dois graus de liberdade e podem ser descritos como um sistema massa-mola conforme mostrado na Figura 4.10b, em que m_a e k_a são, respectivamente, a massa e a rigidez do amortecedor.

Figura 4.10 – (a) Viga engastada com um AMS amortecido acoplado na extremidade, (b) representação da viga e AMS como um sistema massa-mola-amortecedor.



Fonte: Autor (2020)

O sistema de equações diferenciais do movimento do sistema estrutural apresentado na Figura 4.10, é dada por

$$\begin{cases} m\ddot{u} + (c + c_a)\dot{u} + (k + k_a)u - c_a\dot{u}_a - k_a u_a = F(t) \\ m_a\ddot{u}_a + c_a\dot{u}_a + k_a u_a - c_a\dot{u} - k_a u = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

O sistema de equações anterior pode ser reescrito na forma matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.2)$$

em que, $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, e $\mathbf{K}$ são, respectivamente, a matriz de massa, amortecimento e rigidez do sistema estrutural; enquanto $\ddot{\mathbf{u}}$, $\dot{\mathbf{u}}$, e $\mathbf{u}$ são os vetores que contêm a aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente. Dessa forma, a Equação (4.1) na forma matricial fica

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c + c_a & -c_a \\ -c_a & c_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{u}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ u_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Ao admitir $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 e^{i\Omega t}$, uma solução possível para o sistema tem a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{A} e^{i\Omega t} \\ \dot{\mathbf{u}} &= i\Omega \mathbf{A} e^{i\Omega t} = i\Omega \mathbf{u} \\ \ddot{\mathbf{u}} &= -\Omega^2 \mathbf{A} e^{i\Omega t} = -\Omega^2 \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ao substituir as expressões da Equação (4.4) na Equação (4.2), tem-se

$$(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.5)$$

Ao definir a matriz $\mathbf{B} = (-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C} + \mathbf{K})$ e $\mathbf{H} = \mathbf{B}^{-1}$, tem-se

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{F} \quad (4.6)$$

Ao expandir a Equação (4.6) e ao realizar o produto, tem-se

$$\begin{Bmatrix} u \\ u_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_0 e^{i\Omega t} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} u &= h_{11} F_0 e^{i\Omega t} \\ u_a &= h_{21} F_0 e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que os termos h_{11} e h_{21} da matriz $\mathbf{H}$ são obtidos nas formas

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{-\Omega^2 m_a + i\Omega c_a + k_a}{\det(\mathbf{B})} \\ h_{21} &= \frac{i\Omega c_a + k_a}{\det(\mathbf{B})} \end{aligned} \quad (4.9)$$

no qual o determinante da matriz $\mathbf{B}$ é dado por

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \Omega^4 m m_a - \Omega^2 c c_a - \Omega^2 k m_a - \Omega^2 m k_a - \Omega^2 k_a m_a + k k_a \\ &\quad + (-\Omega^3 c m_a - \Omega^3 m c_a - \Omega^3 c_a m_a + \Omega c k_a + \Omega k c_a) i \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ao dividir numerador e denominador da Equação (4.9) por k e, posteriormente, por k_a , as Equações (4.9) e (4.10) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{(1 - r_a^2 + i2\xi_a r_a)/k}{\det(\mathbf{B})} \\ h_{21} &= \frac{(i2\xi_a r_a + 1)/k}{\det(\mathbf{B})} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= r^2 r_a^2 - 4r r_a \xi \xi_a - r_a^2 - r^2 - r^2 \mu + 1 \\ &\quad + (-2\xi r r_a^2 - 2\xi_a r^2 r_a - 2\xi_a r^2 r_a \mu + 2\xi r + 2\xi_a r_a) i \end{aligned} \quad (4.12)$$

em que

$$r_a = \frac{\Omega}{\omega_a} \quad (4.13)$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega} \quad (4.14)$$

$$\frac{k_a}{k} = \frac{\omega_a^2 m_a}{\omega^2 m} = \frac{r^2}{r_a^2} \mu \quad (4.15)$$

$$\mu = \frac{m_a}{m} \quad (4.16)$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega^2} \quad (4.17)$$

$$\xi_a = \frac{c_a}{2m_a\omega_a^2}$$

Os coeficientes da Equação (4.17) são, respectivamente, a taxa de amortecimento da estrutura e do AMS, μ é a relação de massas do AMS e a estrutura, r_a é a relação de frequência da força e a frequência do AMS e r é a relação de frequência da força e a frequência da estrutura. Dessa forma, o deslocamento da estrutura pode ser determinado ao substituir a Equação (4.11) na Equação (4.8):

$$u = \frac{F_0}{k} \frac{(1 - r_a^2 + i2\xi_a r_a)}{\det(\mathbf{B})} e^{i\Omega t} \quad (4.18)$$

Nota-se que a expressão (4.18) está em notação complexa, ou seja, a parte real é a resposta referente à solicitação *cosseno* da força externa e a parte imaginária a resposta referente à solicitação *seno* da força externa. Ao tomar a amplitude máxima da resposta da Equação (4.18), tem-se

$$A = \frac{F_0}{k} \frac{(1 - r_a^2 + i2\xi_a r_a)}{\det(\mathbf{B})} = u_{est} \frac{(1 - r_a^2 + i2\xi_a r_a)}{\det(\mathbf{B})} \quad (4.19)$$

A amplitude na notação polar é obtida ao se aplicar o módulo da amplitude em notação complexa. Assim, a resposta normalizada tem a forma

$$R = \left| \frac{A}{u_{est}} \right| = \sqrt{\frac{(1 - r_a^2)^2 + (2\xi_a r_a)^2}{|\det(\mathbf{B})|}} \quad (4.20)$$

De forma similar, a resposta normalizada do mas é dada por

$$R_a = \left| \frac{A_a}{u_{est}} \right| = \sqrt{\frac{1 + (2\xi_a r_a)^2}{|\det(\mathbf{B})|}} \quad (4.21)$$

em que

$$\begin{aligned} |\det(\mathbf{B})| = & (r^2 r_a^2 - 4r r_a \xi \xi_a - r_a^2 - r^2 - r^2 \mu + 1)^2 \\ & + (-2\xi r r_a^2 - 2\xi_a r^2 r_a - 2\xi_a r^2 r_a \mu + 2\xi r + 2\xi_a r_a)^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Nota-se que para tornar o sistema principal indeslocável o numerador da Equação (4.20) tem que ser igual a zero, assim,

$$(1 - r_a^2)^2 + (2\xi_a r_a)^2 = 0 \rightarrow r_a = 1 \text{ e } \xi_a = 0 \quad (4.23)$$

ou seja, os parâmetros ótimos para tornar a estrutura principal imóvel são

$$\begin{aligned} r_a = 1 & \rightarrow \omega_a = \Omega \\ \xi_a = 0 & \rightarrow c_a = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

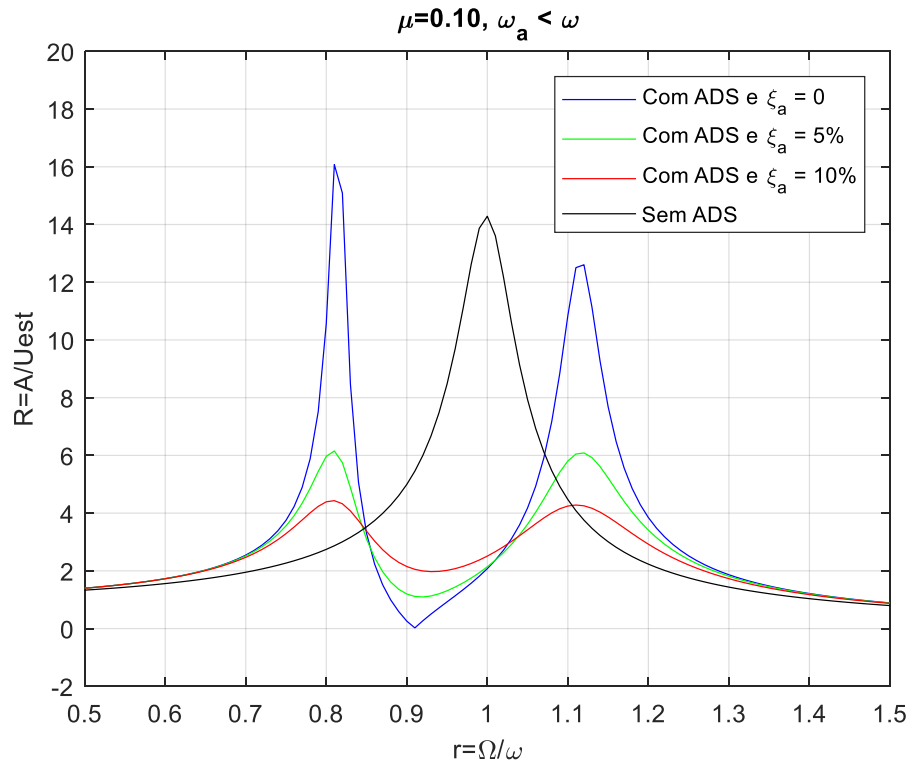
Observa-se das expressões da Equação (4.24) que o AMS é mais eficiente sem amortecimento e com sua frequência natural igual à frequência de excitação. Como foi dito anteriormente, é muito difícil a eliminação total da vibração da estrutura principal. Será realizada uma avaliação paramétrica da resposta da estrutura em função dos parâmetros do AMS. Considera-se em todos os casos analisado uma taxa de amortecimento da estrutura (ξ) igual a 3,5%.

A Figura 4.11 mostra a influência do amortecimento do AMS na redução da resposta dinâmica da estrutura. Nota-se que, como foi salientado anteriormente, quanto menor o amortecimento do AMS mais eficiente. Vale ressaltar, entretanto, que nas regiões fora da faixa de operação do AMS ocorre um pico de resposta maior que a resposta quando a estrutura não possui o AMS.

É importante esse fato, pois em situações de cargas de máquinas, por exemplo, antes de chegar à frequência de operação, a máquina passa por frequências menores e nesse caso pode amplificar os deslocamentos de maneira indesejável. Se a máquina possui um princípio de funcionamento em que a frequência de operação é alcançada rapidamente quando ligada,

em geral, não haverá problemas; porém se a máquina demora a estabilizar na sua frequência de operação pode correr picos de deslocamentos deletérios à estrutura.

Figura 4.11 – Resposta da estrutura para diferentes taxas de amortecimento (ξ_a) do AMS.

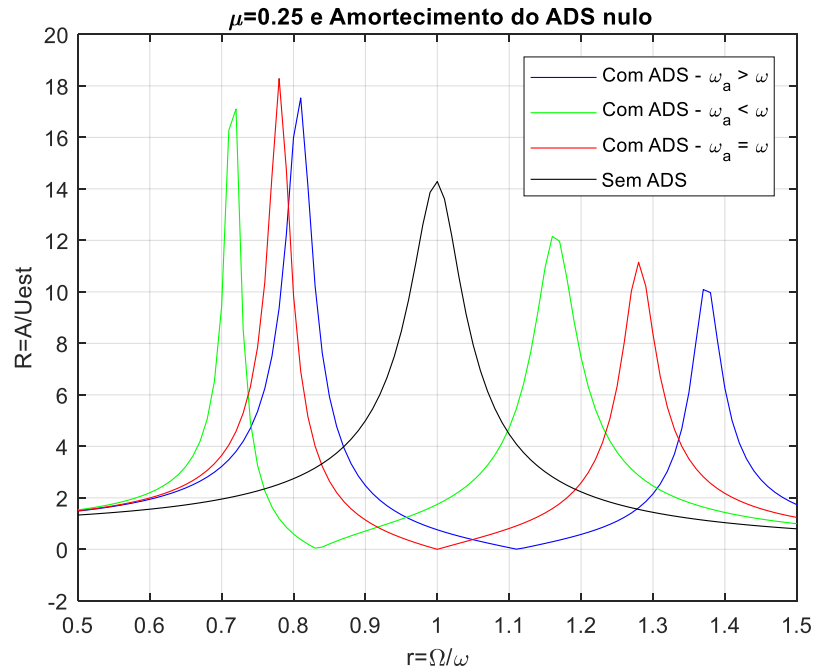


Fonte: Autor (2020)

A Figura 4.12 ilustra os tipos de atenuação em função da frequência. Para frequências do AMS maiores que a frequência da estrutura, a faixa de operação do AMS fica nas frequências maiores, enquanto para frequências do AMS menores que da estrutura a faixa de operação do AMS, fica nas frequências mais baixas.

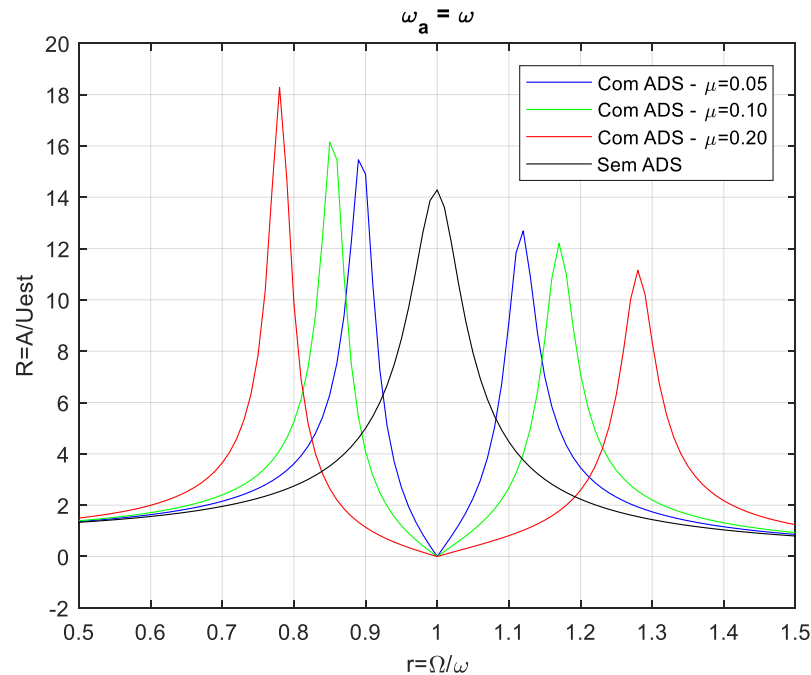
Este tipo de análise é importante, pois, ao imaginar uma situação em que a frequência de excitação está um pouco acima da frequência da estrutura original é interessante que o AMS tenha uma frequência natural também acima (sintonizado em alta frequência); caso contrário, é interessante que o AMS seja calibrado com uma frequência natural abaixo da frequência natural da estrutura (sintonizado em baixa frequência).

Figura 4.12 – Resposta da estrutura para diferentes frequências (ω_a) do AMS.



Fonte: Autor (2020)

Na Figura 4.13 a faixa de operação é central, em torno de r (pois a frequência do AMS está sintonizada com a frequência da estrutura), porém a medida que a massa do AMS aumenta, essa faixa de operação se torna mais abrangente.

Figura 4.13 – Resposta da estrutura para diferentes massas do amortecedor (μ) do AMS.

Fonte: Autor (2020)

Sob recomendação de Connor (2000), é interessante que as respostas em frequências sejam plotadas em função das características do AMS para auxiliar no dimensionamento do mesmo. Esta medida é adotada pois, para o caso da inclusão do amortecimento da estrutura, não é possível explicitar a relação ótima entre a frequência do AMS e a frequência da estrutura ($f = \omega_a/\omega$) em função de μ . O procedimento se baseia em iniciar com valores fixados de μ e ξ e plotar a resposta da estrutura (R) em função de r ; para valores de f e ξ_a a partir dos gráficos gerados avaliar onde se encontra o menor pico de resposta da estrutura e identificar qual as características de f e ξ_a que geraram esse menor pico, assim, estes são chamados de f_{ot} e $\xi_{a,ot}$ (parâmetros do AMS otimizados); a partir desses valores ótimos, é plotado a resposta da estrutura otimizada (R_{ot}) em função de μ , assim é possível determinar a massa do AMS para controlar as vibrações excessivas.

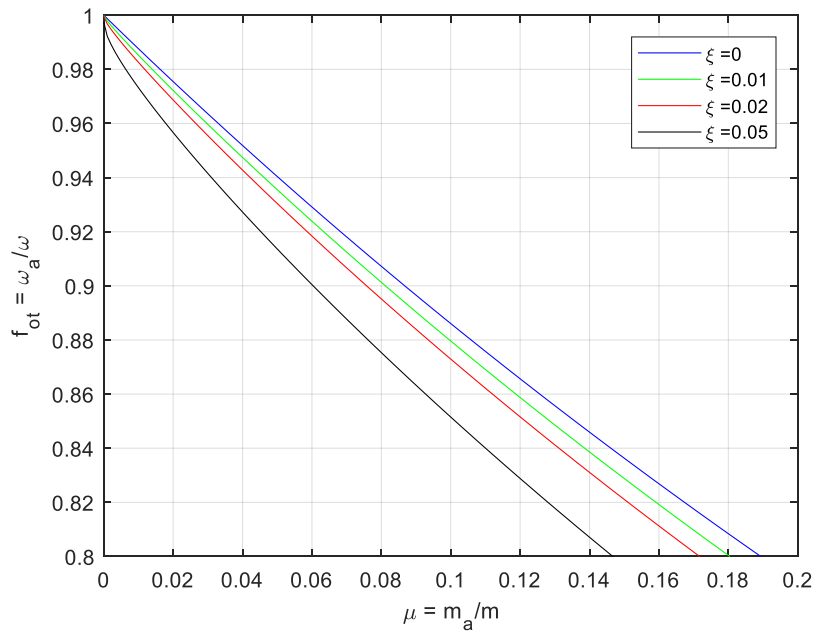
Ainda no trabalho de Connor (2000), é recomendado valores otimizados de f_{ot} e $\xi_{a,ot}$ que foram determinados por Tsai e Lin em 1993 pelas de curvas de ajuste e são reproduzidas a seguir (TSAI; LIN, 1983 *apud* CONNOR, 2000):

$$f_{ot} = \left(\frac{\sqrt{1 - 0,5\mu}}{1 + \mu} + \sqrt{1 - 2\xi^2} - 1 \right) - [2,375 - 1,034\sqrt{\mu} - 0,426\mu]\xi\sqrt{\mu} - (3,730 - 16,903\sqrt{\mu} + 20,496\mu)\xi^2\sqrt{\mu} \quad (4.25)$$

$$\xi_{a,ot} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)(1 - 0,5\mu)}} + (0,151\xi - 0,170\xi^2) + (0,163\xi + 4,980\xi^2)\mu \quad (4.26)$$

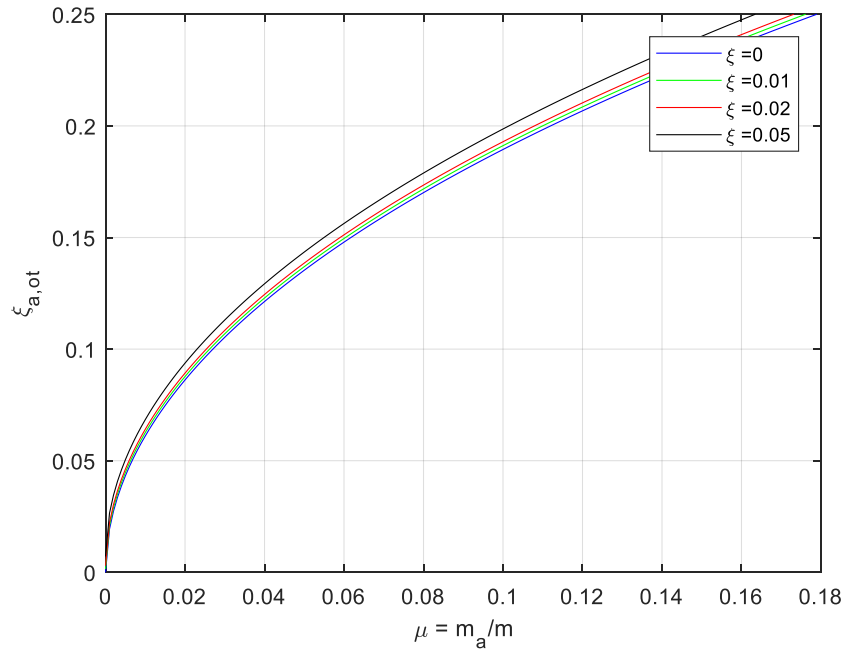
A Figura 4.14 mostra o gráfico de f_{ot} em função de μ , enquanto a Figura 4.15 mostra o gráfico de $\xi_{a,ot}$, também em função de μ .

Figura 4.14 – Relação ótima entre frequência do AMS e frequência da estrutura em função de μ .



Fonte: Autor (2020)

Figura 4.15 – Taxa de amortecimento ótima em função de μ .

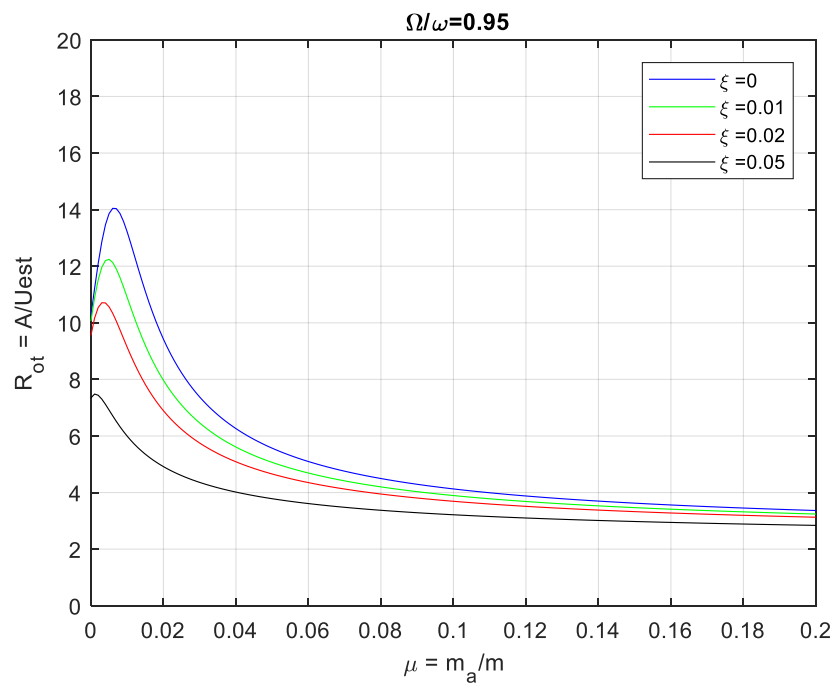


Fonte: Autor (2020)

Com as Equações (4.25) e (4.26) substituídas na Equação (4.20), podem ser montados os gráficos (ver Figura 4.16 a Figura 4.18) da resposta ótima da estrutura (R_{ot}) em função de μ , ao se levar em consideração a relação:

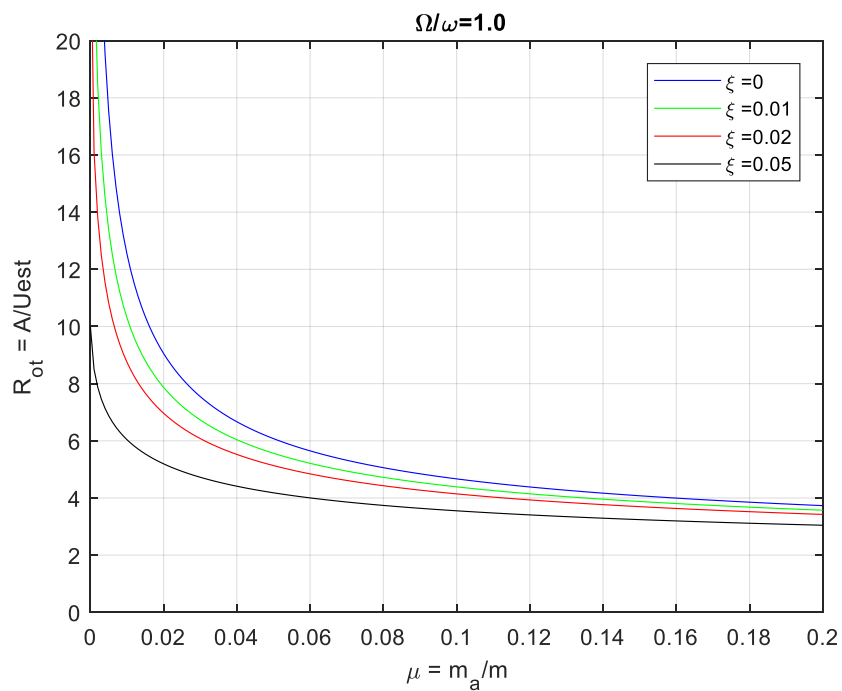
$$f = \frac{\omega_a}{\omega} = \frac{r}{r_a} \rightarrow r_a = \frac{r}{f} \quad (4.27)$$

Figura 4.16 – Máxima resposta da estrutura em função de μ para $r = 0,95$.



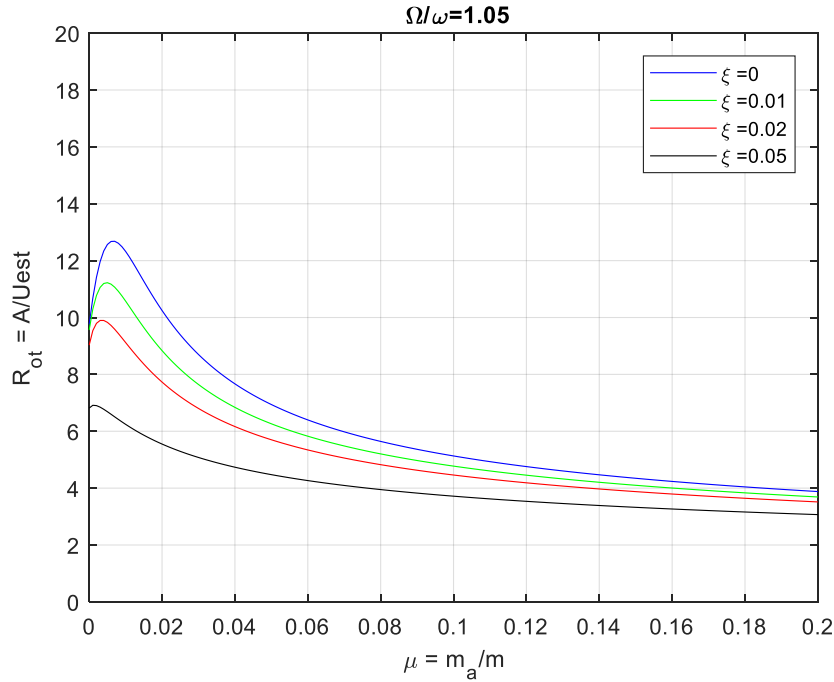
Fonte: Autor (2020)

Figura 4.17 – Máxima resposta da estrutura em função de μ para $r = 1,0$.



Fonte: Autor (2020)

Figura 4.18 – Máxima resposta da estrutura em função de μ para $r = 1,05$.



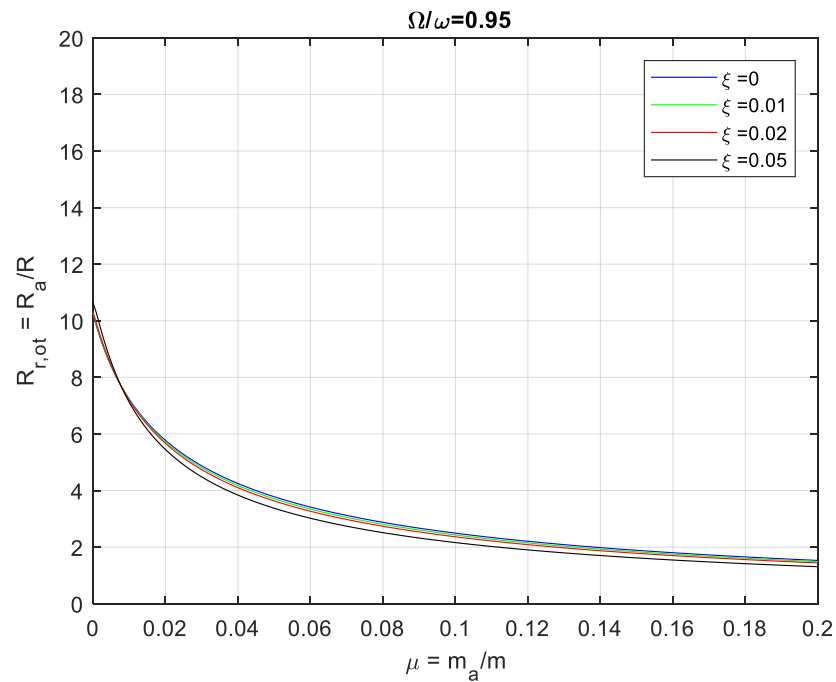
Fonte: Autor (2020)

A resposta do AMS também pode ser plotada para cada caso de r ao substituir as Equações (4.25), (4.26) e (4.27) na Equação (4.21). É conveniente plotar o deslocamento relativo entre o AMS e a estrutura. Ao dividir a Equação (4.21) pela (4.20), obtém-se a resposta relativa

$$R_{r,ot} = \frac{R_a}{R} = \frac{A_a}{A} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi_a r_a)^2}{(1 - r_a^2)^2 + (2\xi_a r_a)^2}} \quad (4.28)$$

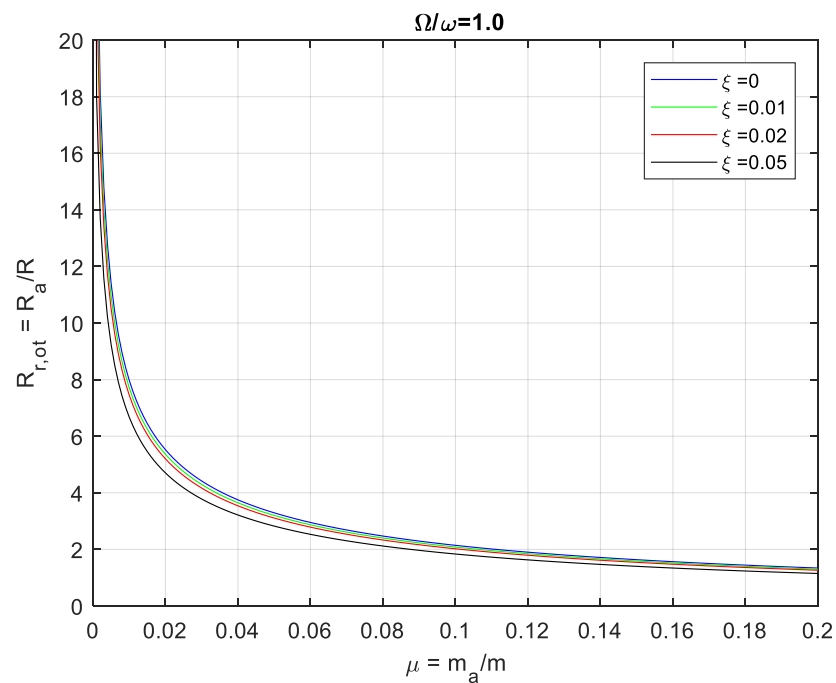
A seguir são mostrados os gráficos com a resposta relativa entre o AMS e a estrutura (ver Figura 4.19 a Figura 4.21), nota-se que a taxa de amortecimento da estrutura pouco influi na resposta relativa entre o AMS e a estrutura. Estes tipos de gráfico são uteis para auxiliar no dimensionamento do AMS a partir de informações iniciais da estrutura e do grau de atenuação pretendida pelo projetista.

Figura 4.19 – Máxima resposta relativa entre o AMS e a estrutura em função de μ para $r = 0,95$.



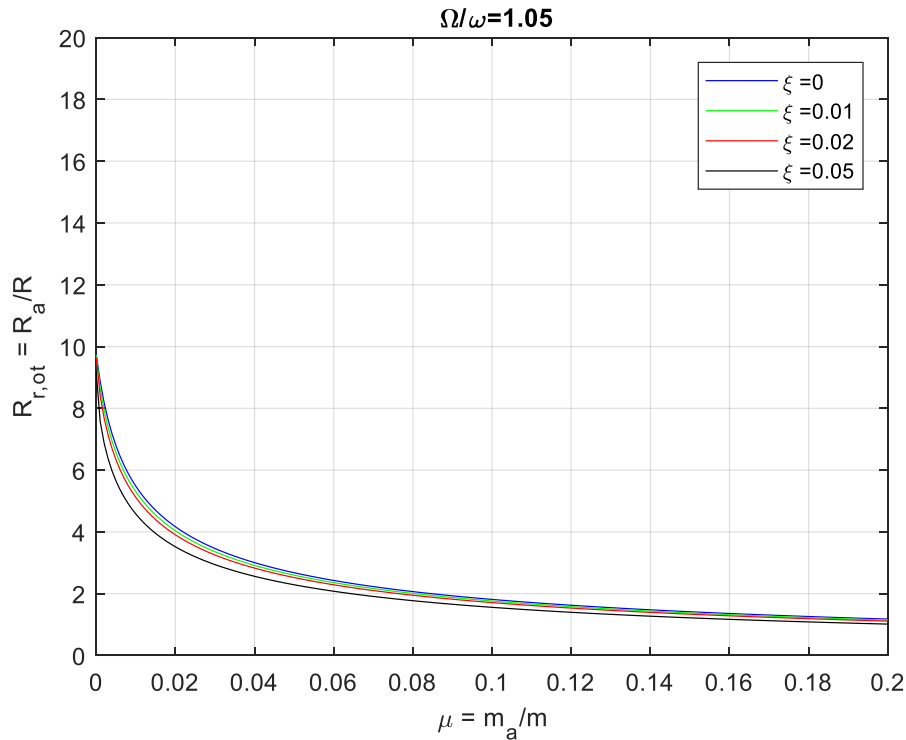
Fonte: Autor (2020)

Figura 4.20 – Máxima resposta relativa entre o AMS e a estrutura em função de μ para $r = 1,0$.



Fonte: Autor (2020)

Figura 4.21 – Máxima resposta relativa entre o AMS e a estrutura em função de μ para $r = 1,05$.



Fonte: Autor (2020)

O procedimento de dimensionamento consiste em: definir a resposta máxima pretendida para a estrutura (gráficos da Figura 4.16 a Figura 4.18) e para o AMS (gráficos da Figura 4.19 a Figura 4.21) consultam-se os respectivos gráficos e encontra-se o coeficiente μ necessário.

Com a Equação (4.16) determina-se a massa do AMS. Posteriormente, com o gráfico da Figura 4.14 ou com a Equação (4.25), determina-se f_{ot} .

De forma similar, utilizando o gráfico da Figura 4.15, determina-se a taxa de amortecimento do AMS.

Uma observação importante é que as análises realizadas nesta seção foram com relação a uma ação dinâmica de frequência de excitação (Ω) constante. Segundo Battista (1993), quando a frequência excitadora é variável, não existe dedução teórica para a calibração ideal do amortecedor, assim, a calibração deve ser realizada a partir de estudo paramétrico ou com a utilização de algoritmos de otimização. O estudo de otimização será abordado no Capítulo 5 deste trabalho.

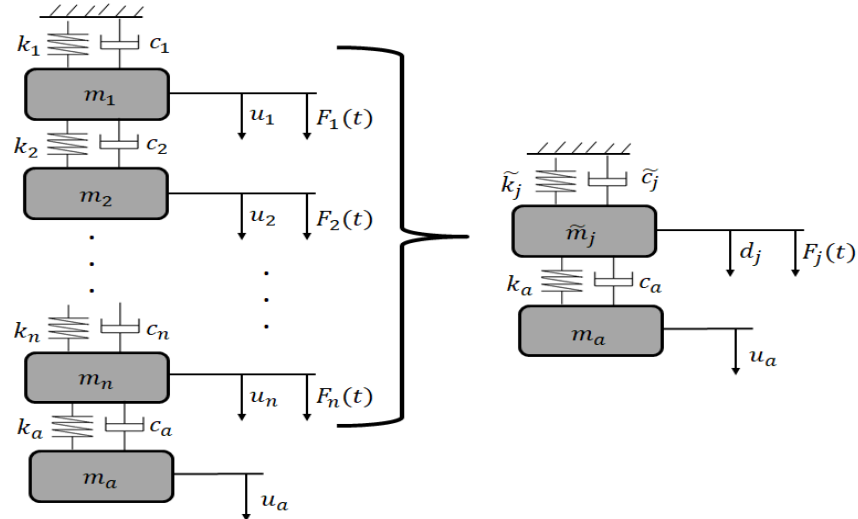
4.3.2. Estrutura de Múltiplos Graus de Liberdade e AMS Amortecido – Abordagem Discreta

Nesta seção é estendida a análise realizada para sistemas de um grau de liberdade da seção anterior para sistemas estruturais com mais de um grau de liberdade. Uma breve abordagem da modelagem de estruturas de múltiplos graus de liberdade com o AMS acoplado em um grau de liberdade específico é feita. Os conceitos mais gerais sobre o tema estão mais detalhados em Connor (2000).

A ideia geral é transformar o sistema principal de múltiplos graus de liberdade, já discretizado, em um sistema equivalente de um grau de liberdade pelo método da superposição modal; e o amortecedor é acoplado posteriormente no sistema modal reduzido. A Figura 4.22 mostra de forma esquemática a redução do sistema principal para um sistema com um grau de liberdade referente ao modo j .

Na Figura 4.22, a redução da estrutura discretizada para a forma modal é realizada seguindo as indicações da Seção 2.3.1.

Figura 4.22 – Redução da estrutura principal para sistema de um grau de liberdade na forma modal.



Fonte: Autor (2020)

Como foi mostrado na Seção 4.3, o AMS cobre apenas um range de frequência de operação; dessa forma, deve-se primeiramente escolher qual modo de vibração deseja-se atenuar as vibrações, e a partir daí as análises podem ser prosseguidas utilizando a mesma metodologia abordada na Seção 4.3.1.

Dessa forma, a equação do sistema transformado é escrita no mesmo formato que apresentado na Seção 4.3.1, porém com referência ao modo j , ou seja,

$$\begin{cases} \tilde{m}_j \ddot{d}_j + (\tilde{c}_j + c_a) \dot{d}_j + (\tilde{k}_j + k_a) d_j - c_a \dot{u}_a - k_a u_a = \tilde{F}_j \\ m_a \ddot{u}_a + c_a \dot{u}_a + k_a u_a - c_a \dot{d}_j - k_a d_j = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

A solução para o sistema da Equação (4.29) é igual ao apresentado na seção anterior, assim a resposta normalizada referente ao modo j é dada por

$$R_j = \left| \frac{A_j}{u_{est,j}} \right| = \sqrt{\frac{(1 - r_a^2)^2 + (2\xi_a r_a)^2}{|\det(\mathbf{B})|}} \quad (4.30)$$

em que $|\det(\mathbf{B})|$ é definido pela Equação (4.22) e os parâmetros da estrutura são

$$\mu = \frac{m_a}{\tilde{m}_j} \quad (4.31)$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega_j} \quad (4.32)$$

O deslocamento d_j pode ser calculado na forma

$$d_j = u_{est,j} R_j = \frac{\tilde{F}_j}{\tilde{k}_j} \sqrt{\frac{(1 - r_a^2)^2 + (2\xi_a r_a)^2}{|\det(\mathbf{B})|}} \quad (4.33)$$

O deslocamento dinâmico na coordenada nodal n , $u_n = u(x_n)$, é obtido pela superposição modal:

$$u_n = \varphi_{n1} d_1 + \varphi_{n2} d_2 + \dots \quad (4.34)$$

Quando a força de excitação possuir sua frequência igual ou próxima a uma frequência natural específica (ω_k) o modo k será dominante, sendo assim a Equação (4.34) é assumida como

$$u_n \approx \varphi_{nk} d_k \quad (4.35)$$

O procedimento de especificação do AMS é realizado de forma similar ao apresentado na seção anterior, utilizando, inclusive, os gráficos para encontrar a massa, frequência, rigidez e amortecimento do AMS:

$$m_a = \mu \tilde{m}_k = \mu \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_k \quad (4.36)$$

$$\omega_a = f_{ot} \omega_k \quad (4.37)$$

$$c_a = 2 \xi_{a,ot} \omega_a m_a \quad (4.38)$$

$$k_a = \omega_a^2 m_a \quad (4.39)$$

em que f_{ot} é encontrado pela Figura 4.14 ou Equação (4.25) e $\xi_{a,ot}$ pela Figura 4.15 ou Equação (4.26).

Outra abordagem é inserir as características do(s) amortecedor(es) diretamente nas matrizes completas do sistema estrutural. Tomando a equação de movimento da estrutura principal dada pela Equação (2.36), adiciona-se a contribuição dos AMSs em cada grau de liberdade. A Figura 4.23 ilustra como é feito o acoplamento de cada AMS em cada grau de liberdade da estrutura discretizada.

Primeiramente, expande as matrizes da estrutura principal em função do número de AMSs que serão adicionados; assim as matrizes do sistema estrutural composto pela estrutura principal com os AMSs acoplados serão

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (4.40)$$

em que $\mathbf{M}_s = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_a$, $\mathbf{C}_s = \mathbf{C}_e + \mathbf{C}_a$ e $\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_a$. As matrizes expandidas da estrutura original são denominadas como $\mathbf{M}_e$, $\mathbf{C}_e$ e $\mathbf{K}_e$, enquanto $\mathbf{M}_a$, $\mathbf{C}_a$ e $\mathbf{K}_a$ são as matrizes que contêm as características de cada AMS, definidas a seguir:

$$\mathbf{M}_{e[n_{gl}+n_{AMS}, n_{gl}+n_{AMS}]} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{[n_{gl}, n_{gl}]} & \mathbf{0}_{[n_{AMS}, n_{AMS}]} \\ \mathbf{0}_{[n_{AMS}, n_{AMS}]} & \mathbf{0}_{[n_{AMS}, n_{AMS}]} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{C}_{e[n_{gl}+n_{AMS}, n_{gl}+n_{AMS}]} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{[n_{gl}, n_{gl}]} & \mathbf{0}_{[n_{AMS}, n_{AMS}]} \\ \mathbf{0}_{[n_{AMS}, n_{AMS}]} & \mathbf{0}_{[n_{AMS}, n_{AMS}]} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{K}_{e[n_{gl}+n_{AMS}, n_{gl}+n_{AMS}]} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{[n_{gl}, n_{gl}]} & \mathbf{0}_{[n_{AMS}, n_{AMS}]} \\ \mathbf{0}_{[n_{AMS}, n_{AMS}]} & \mathbf{0}_{[n_{AMS}, n_{AMS}]} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{M}_{a[n_{gl}+i, n_{gl}+i]} = m_{ai} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{C}_{a[i, i]} = \mathbf{C}_{a[n_{gl}+i, n_{gl}+i]} = c_{ai} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{C}_{a[n_{gl}+i, i]} = \mathbf{C}_{a[i, n_{gl}+i]} = -c_{ai}$$

$$\mathbf{K}_{a[i, i]} = \mathbf{K}_{a[n_{gl}+i, n_{gl}+i]} = k_{ai}$$

$$\mathbf{K}_{a[n_{gl}+i, i]} = \mathbf{K}_{a[i, n_{gl}+i]} = -k_{ai} \quad (4.46)$$

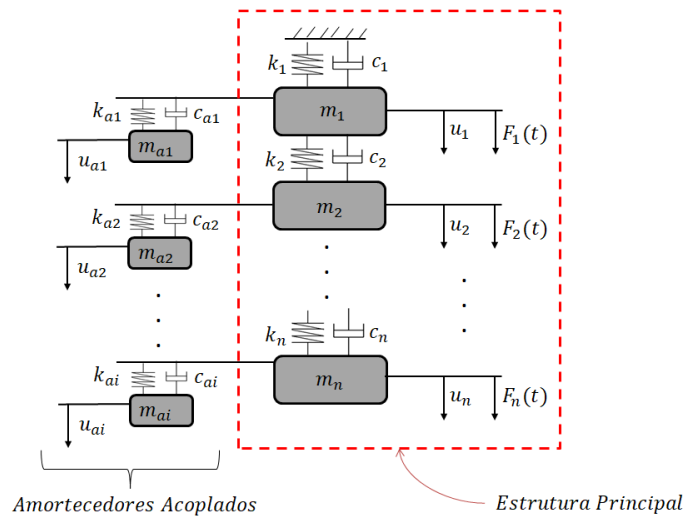
$$\mathbf{F}_{[n_{gl}+n_{AMS},1]}(t) = [F_1(t) \quad F_2(t) \quad \dots \quad F_n(t) \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad (4.47)$$

Os subíndices das matrizes apresentadas representam a dimensão das mesmas. Assim:

n_{gl} – número total de graus de liberdade da estrutura principal;

n_{AMS} – número total de AMS;

Figura 4.23 – Representação do modelo estrutural discretizado com AMSs acoplados em cada grau de liberdade.



Fonte: Autor (2020)

4.3.3. Estrutura de Múltiplos Graus de Liberdade e AMS Amortecido – Abordagem Analítica

De um modo mais geral, pode-se modelar o acoplamento dos amortecedores de massa sintonizados em estruturas de forma analítica. Para tal é necessário que se encontre funções analíticas que descrevam a estrutura continuamente em seu domínio em contraponto com o método discreto em que a estrutura é dividida em elementos genéricos ao longo do domínio (visto na seção anterior). A vantagem dessa abordagem é uma redução no tempo de processamento da estrutura, visto que os deslocamentos são calculados apenas nos pontos de interesse e o sistema de equações é reduzido a uma única equação. A desvantagem é que, para cada geometria da estrutura ou condições de contorno diferentes, as funções analíticas devem ser encontradas novamente, e para alguns casos, encontrar essas funções se torna uma tarefa nada fácil, ou até impossível.

Dada uma estrutura qualquer, neste caso será partido de um elemento bidimensional (uma placa) apoiada em seus quatro bordos. Este elemento estrutural possui AMSs acoplados como ilustrado na Figura 4.24.

A equação de movimento da placa já foi desenvolvida no Capítulo 3. O intuito é realizar a redução modal da equação da placa, com a finalidade de obter a equação de movimento modal com a contribuição de cada AMS acoplado na mesma. Assim, parte-se da Equação (3.87); como foi discutido no Capítulo 2, o valor da função modal não tem significado físico, representa apenas a proporção de deslocamento entre os pontos do domínio da estrutura. Assim, toma-se a função modal normalizada da expressão apresentada pela Equação (3.83):

$$\varphi_j(x, y) = \frac{W_j}{A_{mn}} = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.48)$$

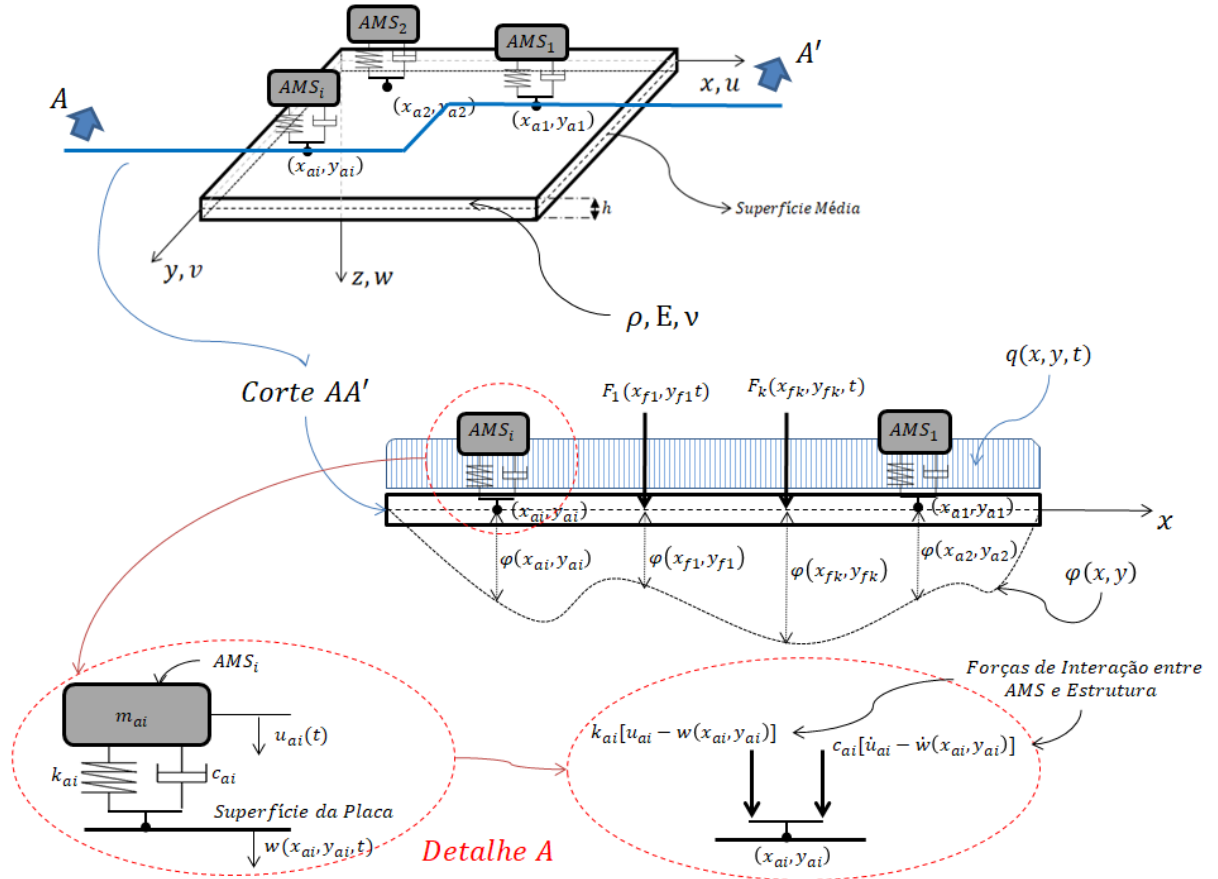
A Equação (3.87) é então reescrita com relação a apenas o j -ésimo modo e utilizando a notação da Equação (4.48). Além da carga distribuída ao longo da placa, são adicionadas as cargas concentradas F_k e as forças de interação entre os AMSs e a placa F_{ai} :

$$\begin{aligned} \rho h \varphi_j(x, y) \ddot{d}_j + c \varphi_j(x, y) \dot{d}_j + \rho h \omega_j^2 \varphi_j(x, y) d_j \\ = q(x, y, t) + \sum_k F_k(x_{fk}, y_{fk}) + \sum_i F_{ai}(x_{ai}, y_{ai}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Ao impor agora o balanço de energia, ou seja, o trabalho realizado pelas forças externas (forças dinâmicas distribuídas, concentradas e forças oriundas do AMS) é igual ao trabalho realizado pelos esforços internos (esforços inerciais, de amortecimento e de rigidez). Para tal, multiplica-se cada parcela de força do sistema pela função modal de deslocamento no ponto em que cada força atua (Ver Corte AA' na Figura 4.24), assim, tem-se

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_0^b \int_0^a \rho h \varphi_j^2(x, y) dx dy \right) \ddot{d}_j + \left(\int_0^b \int_0^a c \varphi_j^2(x, y) dx dy \right) \dot{d}_j \\
 & + \left(\int_0^b \int_0^a \rho h \omega_j^2 \varphi_j^2(x, y) dx dy \right) d_j \\
 & = \int_0^b \int_0^a \varphi_j(x, y) q(x, y, t) dx dy \\
 & + \sum_k F_k(x_{fk}, y_{fk}, t) \varphi_j(x_{fk}, y_{fk}) \\
 & + \sum_i F_{ai}(x_{ai}, y_{ai}, t) \varphi_j(x_{ai}, y_{ai})
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Figura 4.24 – Representação de uma placa com AMSs acoplados.



Fonte: Autor (2020)

Por meio do “Detalhe A” da Figura 4.24, pode-se ver que a força de interação entre cada AMS e a placa é dada por

$$F_{ai} = k_{ai}[u_{ai} - w(x_{ai}, y_{ai})] + c_{ai}[\dot{u}_{ai} - \dot{w}(x_{ai}, y_{ai})]$$

ou

$$F_{ai} = k_{ai}[u_{ai} - \varphi_j(x_{ai}, y_{ai})d_j] + c_{ai}[\dot{u}_{ai} - \varphi_j(x_{ai}, y_{ai})\dot{d}_j] \quad (4.51)$$

Ao substituir a Equação (4.51) na Equação (4.50), tem-se a equação completa para o movimento de uma placa sob carregamento distribuído e concentrado e AMSs acoplados:

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^b \int_0^a \rho h \varphi_j^2(x, y) dx dy \right) \ddot{d}_j + \left(\int_0^b \int_0^a c \varphi_j^2(x, y) dx dy \right) \dot{d}_j \\ & + \left(\int_0^b \int_0^a \rho h \omega_j^2 \varphi_j^2(x, y) dx dy \right) d_j \\ & = \int_0^b \int_0^a \varphi_j(x, y) q(x, y, t) dx dy \\ & + \sum_k F_k(x_{fk}, y_{fk}, t) \varphi_j(x_{fk}, y_{fk}) + \sum_i k_{ai} u_{ai} \varphi_j(x_{ai}, y_{ai}) \\ & - \sum_i k_{ai} \varphi_j^2(x_{ai}, y_{ai}) d_j + \sum_i c_{ai} \dot{u}_{ai} \varphi_j(x_{ai}, y_{ai}) \\ & - \sum_i c_{ai} \varphi_j^2(x_{ai}, y_{ai}) \dot{d}_j \end{aligned} \quad (4.52)$$

lembrando que cada AMS possui sua equação de movimento, dada por

$$m_{ai} \ddot{u}_{ai} + c_{ai} \dot{u}_{ai} - c_{ai} \varphi_j(x_{ai}, y_{ai}) \dot{d}_j + k_{ai} u_{ai} - k_{ai} \varphi_j(x_{ai}, y_{ai}) d_j = 0 \quad (4.53)$$

formando assim o sistema de equações diferenciais de movimento, composto por uma equação diferencial referente ao comportamento da estrutura (Equação (4.52)) e i equações referentes a cada AMS (Equação (4.53)).

Comparando a Equação (4.52) com a forma genérica da equação de movimento dada pela Equação (2.1), percebe-se que

$$m_j = \int_0^b \int_0^a \rho h \varphi_j^2(x, y) dx dy \quad (4.54)$$

$$c_j = \int_0^b \int_0^a c \varphi_j^2(x, y) dx dy \quad (4.55)$$

$$k_j = \int_0^b \int_0^a \rho h \omega_j^2 \varphi_j^2(x, y) dx dy \quad (4.56)$$

Assim, a equação de movimento da estrutura pode ser reescrita de uma forma mais enxuta como

$$\begin{aligned} m_j \ddot{d}_j + c_j \dot{d}_j + k_j d_j &= \int_0^b \int_0^a \varphi_j(x, y) q(x, y, t) dx dy \\ &+ \sum_k F_k(x_{fk}, y_{fk}, t) \varphi_j(x_{fk}, y_{fk}) + \sum_i k_{ai} u_{ai} \varphi_j(x_{ai}, y_{ai}) \\ &- \sum_i k_{ai} \varphi_j^2(x_{ai}, y_{ai}) d_j + \sum_i c_{ai} \dot{u}_{ai} \varphi_j(x_{ai}, y_{ai}) \\ &- \sum_i c_{ai} \varphi_j^2(x_{ai}, y_{ai}) \dot{d}_j \end{aligned} \quad (4.57)$$

O sistema de equações composto pelas Equações (4.53) e (4.57) pode ser escrito na forma matricial como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{F} \quad (4.58)$$

em que

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_j & & & & \\ & m_{a1} & & & \\ & & m_{a2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & m_{ai} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_j + \sum_i \varphi_j^2(x_{ai}, y_{ai}) c_{ai} & -\varphi_j(x_{a1}, y_{a1}) c_{a1} & -\varphi_j(x_{a2}, y_{a2}) c_{a2} & \cdots & -\varphi_j(x_{ai}, y_{ai}) c_{ai} \\ & c_{a1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\varphi_j(x_{a1}, y_{a1}) c_{a1} & & & & \\ -\varphi_j(x_{a2}, y_{a2}) c_{a2} & 0 & c_{a2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varphi_j(x_{ai}, y_{ai}) c_{ai} & 0 & 0 & \cdots & c_{ai} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{K} \\
 &= \begin{bmatrix} k_j + \sum_i \phi_j^2(x_{ai}, y_{ai})k_{ai} & -\phi_j(x_{a1}, y_{a1})k_{a1} & -\phi_j(x_{a2}, y_{a2})k_{a2} & \cdots & -\phi_j(x_{ai}, y_{ai})k_{ai} \\ -\phi_j(x_{a1}, y_{a1})k_{a1} & k_{a1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\phi_j(x_{a2}, y_{a2})k_{a2} & 0 & k_{a2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\phi_j(x_{ai}, y_{ai})k_{ai} & 0 & 0 & \cdots & k_{ai} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \int_0^b \int_0^a \phi_j(x, y) q(x, y, t) dx dy + \sum_k F_k(x_{fk}, y_{fk}, t) \phi_j(x_{fk}, y_{fk}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} d_j \\ u_{a1} \\ u_{a2} \\ \vdots \\ u_{ai} \end{Bmatrix} \tag{4.63}$$

A Equação (4.58) pode ser resolvida utilizando o algoritmo de integração numérica de *Newmark* exposto na Seção 2.4, em que o vetor de deslocamento $\mathbf{z}$ é encontrado; e posteriormente o deslocamento nodal da placa $w(x, y, t)$ pode então ser calculado:

$$w(x, y, t) = \phi_j(x, y)d_j \tag{4.64}$$

5. OTIMIZAÇÃO

O processo de otimização visa à minimização ou maximização de funções, satisfazendo a certas restrições inerentes ao problema abordado. Para a aplicação da otimização no campo da engenharia, é necessário que o engenheiro tenha em mente a teoria e os algoritmos que lidam com a avaliação de máximos e mínimos de funções (BELEGUNDU; CHANDRUPATLA, 2011).

A modelagem do problema deve ser realizada de tal forma que o caracterize da maneira mais fidedigna possível; e o tipo de algoritmo deve ser escolhido para que se busque o melhor desempenho possível de acordo com o problema abordado e a forma que foi modelada.

5.1. Conceitos Gerais

De maneira geral, o problema de otimização é formatado para minimizar a função

$$g_0(\mathbf{x}) \tag{5.1}$$

chamada de função objetivo, sujeita às seguintes restrições:

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{5.2}$$

$$h_r(\mathbf{x}) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, l \tag{5.3}$$

com os limites para as variáveis de projeto:

$$\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \tag{5.4}$$

em que $\mathbf{x}$ é o vetor que contém as variáveis de projeto a serem determinadas, $g_i(\mathbf{x})$ são as restrições de desigualdade, $h_r(\mathbf{x})$ as restrições de igualdade, $\mathbf{x}_L$ e $\mathbf{x}_U$ os vetores que contêm os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto, respectivamente. Em geral os limites inferiores e superiores são formatados de forma a transformar em restrições de desigualdades. As funções de restrições e a função objetivo podem ser lineares ou não, e a depender da complexidade dessas funções existe uma abordagem em termos do algoritmo a ser utilizado.

O processo de otimização necessita de valores iniciais das variáveis de projeto $\mathbf{x}_0$, e posteriormente essas variáveis são atualizadas pelo algoritmo até convergir para valores

ótimos ($\mathbf{x}^*$) que minimizem (ou maximizem) a função objetivo. A atualização das variáveis de projeto para algoritmo de otimização baseado em gradiente é realizada na forma

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} + p\mathbf{d}^{[k]} \quad (5.5)$$

em que p é o passo de cada iteração, $\mathbf{d}^{[k]}$ é a direção de busca da iteração k . Em geral, as diferenças entre os algoritmos de otimização estão na forma de determinar a direção de busca.

5.2. Otimização Estrutural

O projetista estrutural realiza a concepção dos projetos baseados na experiência (e/ou intuição profissional) própria, respaldado pela teoria técnica voltada para análise e dimensionamento das estruturas. O objetivo do projetista é encontrar a melhor maneira de empregar os materiais e suas dimensões geométricas a fim de obter o melhor desempenho do sistema estrutural, com segurança e com custo-benefício atrativo ao mercado da construção civil.

A otimização estrutural visa auxiliar a concepção estrutural para obter, de forma automatizada, um projeto com a melhor relação custo-benefício, dados o objetivo do projetista e as restrições inerentes ao projeto.

5.2.1. Tipos de Problemas em Otimização Estrutural

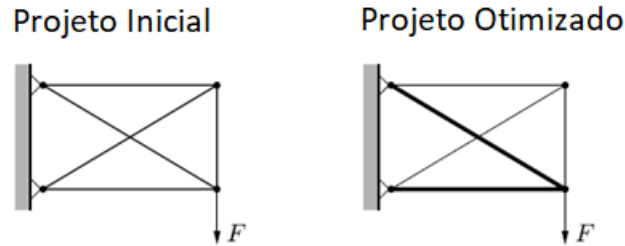
Segundo Christensen e Klarbring (2009) a otimização estrutural pode ser dividida em três tipos de classes de problemas: otimização dimensional, otimização de forma e otimização topológica.

Na otimização dimensional a variável de projeto é alguma dimensão geométrica do elemento estrutural, como por exemplo: espessura, ou seja, área de seção transversal. Este tipo de otimização tem como objetivo encontrar quais dimensões geométricas de cada elemento do sistema estrutural que produza um projeto ótimo. Nota-se que nesse tipo de otimização, as condições de contorno e as conectividades da estrutura são mantidos. Assim o projetista deve inicialmente realizar a concepção (lançamento) estrutural previamente, e o processo de otimização será realizado apenas na escolha das dimensões dos elementos dessa estrutura. A Figura 5.1 ilustra um exemplo esquemático de uma treliça plana sob otimização dimensional.

A otimização de forma tem como procedimento encontrar a forma do sistema estrutural que melhor produza um projeto otimizado. Para tal, as alterações devem ser realizadas nas coordenadas geométricas da estrutura, para então definir qual configuração nodal resultara em um projeto ótimo. Neste tipo de otimização não há alteração nas condições

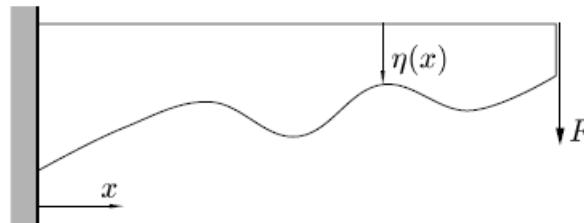
de contorno da estrutura nem na sua conectividade. A Figura 5.2 ilustra um exemplo esquemático de uma viga em balanço sob otimização de forma.

Figura 5.1 – Treliça plana sob otimização dimensional alterando a seção transversal das barras.



Fonte: Adaptado de CHRISTENSEN e KLARBRING (2009)

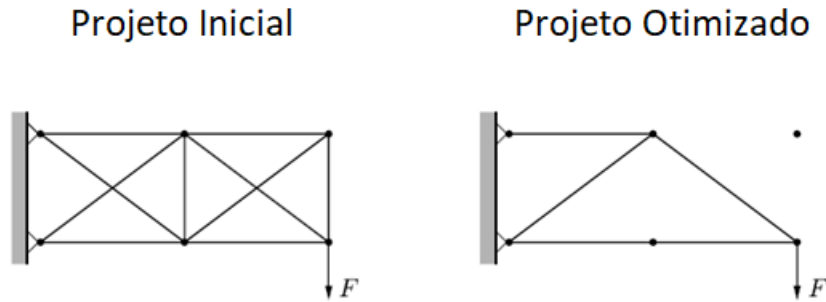
Figura 5.2 – Problema de otimização de forma. Encontrar a função $\eta(x)$ que melhor define a forma da viga em balanço.



Fonte: CHRISTENSEN e KLARBRING (2009)

Otimização topológica é a mais geral forma de otimização estrutural. Na otimização topológica o domínio, as condições de contorno e os parâmetros geométricos da estrutura podem ser alterados para se chegar a um projeto ótimo. A Figura 5.3 ilustra um exemplo esquemático de uma treliça plana sob otimização topológica.

Figura 5.3 – Otimização topológica em uma treliça plana.



Fonte: Adaptado de CHRISTENSEN e KLARBRING (2009)

Pela Figura 5.3 nota-se que, na otimização topológica, as conectividades podem ser alteradas e os elementos podem sumir do projeto original, essas características trazem consigo um problema numérico de instabilidade na solução no momento da análise estrutural (cálculo dos deslocamentos e tensões); fazendo assim este tipo de otimização mais complexo, que exige um cuidado maior na sua abordagem.

Para os estudos numéricos desenvolvidos nesta dissertação é empregado à otimização dimensional, visto que os parâmetros dos amortecedores de massa sintonizados são as variáveis de projeto no processo de otimização.

5.3. Condição *Karash-Kuhn-Tucker* de Otimalidade (KKT Condition)

Os multiplicadores de Lagrange (λ_i) são coeficientes, contidos na função Lagrangiana, que auxiliam a determinar as restrições ativas em um problema de otimização com restrições de desigualdade. Restrições ativas são aquelas que limitam a região viável na qual estão as variáveis de projeto que atendem o problema de otimização.

Segundo Christensen e Klarbring (2009), a função Lagrangiana é definida como

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = g_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \quad (5.6)$$

em que λ_i são os multiplicadores de Lagrange associados a cada uma das funções de restrições $g_i(\mathbf{x})$ e $g_0(\mathbf{x})$ a função objetivo já definida pela Equação (5.1). A partir da definição da função Lagrangiana as condições de *Karash-Kuhn-Tucker* (KKT) são postas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_j} = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (5.8)$$

$$\lambda_i g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.9)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (5.10)$$

em que a Equação (5.7) é a derivada parcial da função Lagrangiana em relação às variáveis de projeto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_0(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \quad (5.11)$$

ou

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \nabla g_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i \quad (5.12)$$

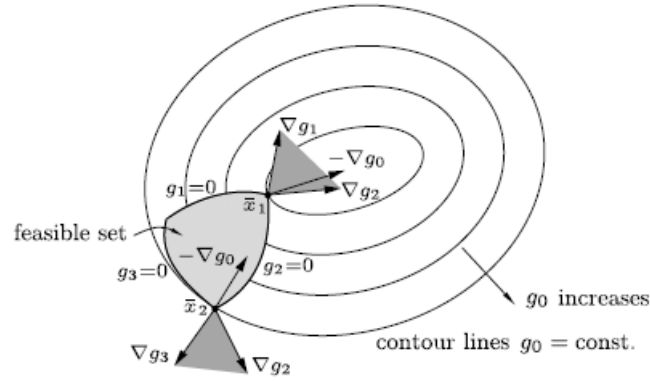
na qual ∇g_0 é o gradiente da função objetivo, e ∇g_i o gradiente das funções de restrição. Pela Equação (5.9) percebe-se que se a restrição for inativa, ou seja, $g_i(\mathbf{x}) \neq 0$, então o multiplicador de Lagrange correspondente é igual a zero ($\lambda_i = 0$). De forma similar, se a restrição tiver ativa, ou seja, $g_i(\mathbf{x}) = 0$, o multiplicador de Lagrange assume um valor positivo $\lambda_i \geq 0$.

Assim, diz-se que cada ponto $(\mathbf{x}^*, \lambda)$ que satisfaça as Equações (5.7) a (5.10) é chamado de ponto KKT, e é um ponto candidato a ótimo. Tomando as Equações (5.7) e (5.12), tem-se a relação entre o gradiente da função objetivo e o gradiente das restrições:

$$-\nabla g_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i \quad (5.13)$$

Percebe-se que uma condição necessária para que o ponto $(\mathbf{x}^*, \lambda)$ seja ótimo é quando o valor negativo do gradiente da função objetivo é uma combinação linear dos gradientes das restrições. A Figura 5.4 apresenta uma interpretação geométrica da condição de *Karash-Kuhn-Tucker* (KKT).

Figura 5.4 – Interpretação geométrica da condição KKT.



Fonte: CHRISTENSEN e KLARBRING (2009)

Será visto nas seções futuras deste trabalho que o gradiente da função objetivo está relacionado com a direção de busca do ponto ótimo do problema de otimização. Nota-se da Figura 5.4 que a região viável (*feasible set*) é delimitada pelas restrições g_1 , g_2 e g_3 . Partindo inicialmente do ponto $\bar{x}_2$, o vetor que representa gradiente da função objetivo ($-\nabla g_0$) neste ponto não pode ser representado pela combinação linear dos vetores que representam os gradientes das restrições g_2 e g_3 (∇g_2 e ∇g_3), portanto este ponto não é um candidato a ponto ótimo. Em contrapartida, se tomarmos o ponto $\bar{x}_1$, este é um ponto candidato a ser ótimo, visto que o gradiente pode ser escrito pela combinação dos gradientes das restrições g_1 e g_2 ($-\nabla g_0 = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$). Diz-se então que as restrições g_1 e g_2 neste ponto são ativas e a restrição g_3 é inativa e que $\bar{x}_1$ tem as condições necessárias para ser um ponto ótimo do projeto.

Vale ressaltar que a condição KKT aponta para pontos candidatos de mínimo da função, porém, mínimos locais. Caso o problema de otimização seja convexo, o KKT automaticamente atende para mínimo global. A identificação de convexidade é abordada na Seção 5.4.

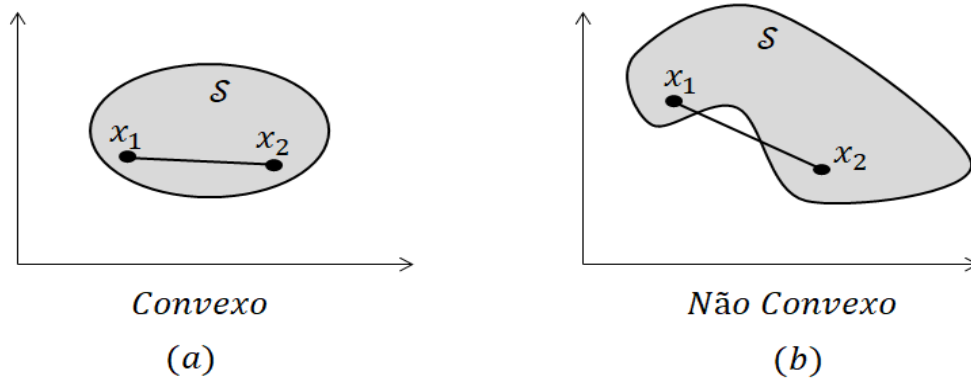
5.4.Convexidade de funções

A convexidade de funções é uma propriedade importante na otimização, pois, quando o problema é convexo pode-se determinar o mínimo global. Segundo Christensen e Klarbring (2009), um conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ convexo para todo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{S}$ atende a

$$\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \in \mathcal{S}$$

ou seja, o conjunto é convexo se todos os pontos em uma linha que conecta dois pontos dentro deste conjunto, também pertencem a esse conjunto; a Figura 5.5 ilustra um conjunto convexo e não convexo.

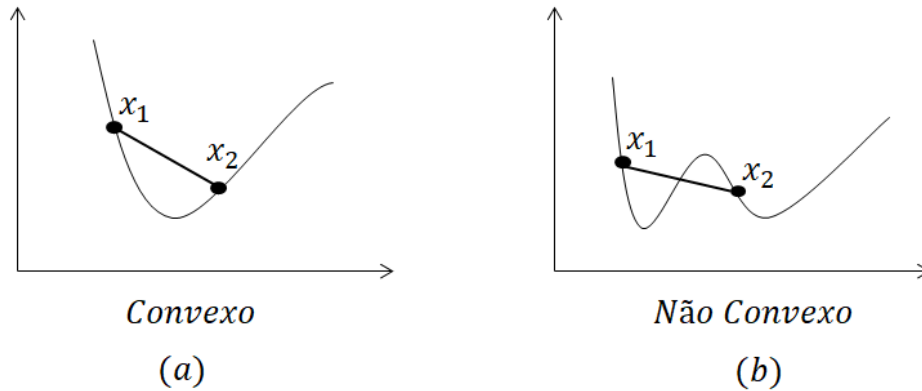
Figura 5.5 – Representação de um conjunto (a) convexo e (b) não convexo.



Fonte: Autor (2020)

Da mesma forma, a função $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa (em um conjunto convexo $S \subset \mathbb{R}^n$) se todo $x_1, x_2 \in S$ com $x_1 \neq x_2$ e para todo $\lambda \in (0,1)$ (ver Figura 5.6), atende a $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$

Figura 5.6 – Representação de funções (a) convexas e (b) não convexas.



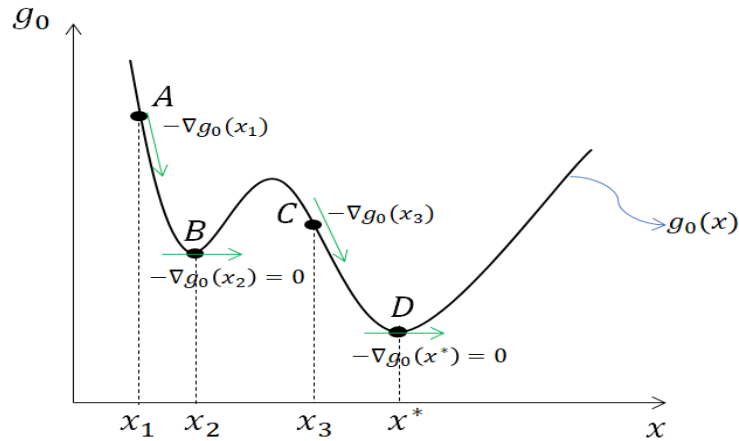
Fonte: Autor (2020)

Foi comentado na seção anterior que o local mínimo também é global mínimo em uma função convexa. Nos processos de otimização nem sempre se chega a um ótimo mínimo global, em geral demanda um grande custo computacional para tal; em certos problemas é satisfatória a obtenção do mínimo local.

Imagina-se um problema de otimização sem restrição, em que se deseja encontrar o ponto ótimo x^* que corresponde ao mínimo de uma função $g_0(x)$. Para fins ilustrativos, uma

função abstrata é representada pela Figura 5.7 na qual a seta em verde representa o vetor do gradiente da função objeto no respectivo ponto.

Figura 5.7 – Representação de uma função (não convexa) com mínimo local e mínimo global.



Fonte: Autor (2020)

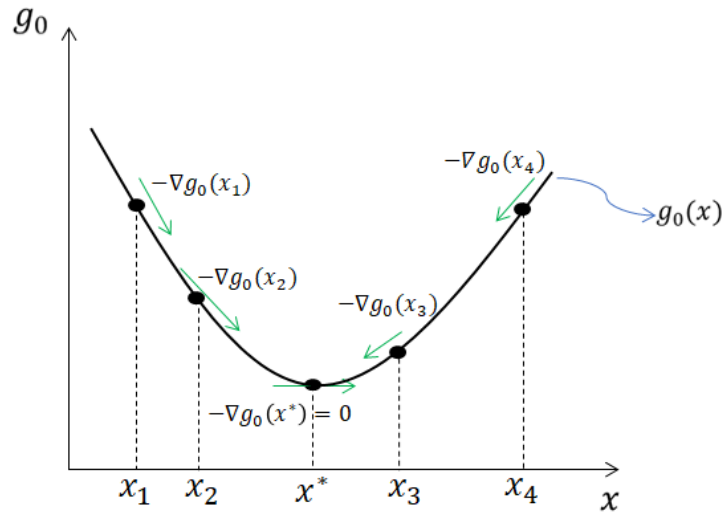
Sabe-se que o gradiente de uma função representa a taxa de crescimento da mesma, ou seja, o vetor gradiente indica a direção de crescimento da função. Quando desejamos encontrar o mínimo de uma função temos que caminhar para a direção oposta do vetor gradiente.

Se tomarmos o ponto A da Figura 5.7 como ponto inicial para o processo de busca de mínimo da função g_0 , devemos primeiramente calcular o gradiente da função neste ponto. O vetor gradiente da função objetivo no ponto A irá direcionar para o ponto B ; calculando agora o vetor gradiente da função objetivo no ponto B , este será nulo visto que x_2 é um ponto de inflexão da função. Porém, percebe-se que se iniciarmos o processo de busca de mínimo pelo ponto C , o gradiente neste ponto apontará para o ponto D , e o gradiente no ponto D também é nulo e possui um valor da função objetivo menor que o ponto B , ou seja, $g_0(x^*) < g_0(x_2)$. Assim, diz-se que o ponto B é um ponto de mínimo local, enquanto o ponto D é mínimo global, visto que, não há nenhum outro ponto, nesta janela de observação da função, que retorne um valor mínimo para a função g_0 . Assim, x^* é o valor da variável de projeto ótimo que conduz ao menor valor da função objetivo $g_0(x^*)$.

Do exemplo ilustrativo do parágrafo anterior, nota-se que, a depender do ponto inicial do processo de busca, chega-se ou não a um ponto de mínimo global, visto que se trata de uma função não convexa.

Para funções convexas é fácil ver graficamente que o mínimo local é o mínimo global da função objetivo. A Figura 5.8 ilustra uma função convexa na qual o mínimo é global.

Figura 5.8 – Representação de uma função (convexa) com mínimo global.



Fonte: Autor (2020)

Diferente da função apresentada na Figura 5.7, qualquer ponto inicial do processo de busca, o vetor gradiente apontará para o mínimo global da função convexa apresentada na Figura 5.8.

Percebe-se que quando um problema de otimização é convexo, o processo de busca do ponto ótimo é mais simples, pois não necessita verificar se o ponto encontrado é um ótimo local ou global. Porém, em muitos casos reais, os problemas de otimização são não convexas, que exigem uma abordagem adequada em termos de algoritmo. Existe ainda a possibilidade de transformar problemas não convexas em problemas convexas por meio de aproximações (lineares, quadráticas, MMA, etc.) para poder utilizar algoritmos mais simples e ganhar em termos de desempenho computacional (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

5.5.Direção de Busca

Na seção anterior foi comentado que, a partir de um ponto inicial, busca-se chegar ao ponto ótimo (variável de projeto ótima) que minimize a função objetivo. Este processo de busca é realizado atualizando as variáveis de projeto pela da Equação (5.5).

Sendo $\mathbf{x}^{[k]}$ o vetor das variáveis de projeto da iteração k , logo para $k = 0$, tem-se o vetor inicial das variáveis de projeto. O objetivo é encontrar uma direção de busca $\mathbf{d}^{[k]}$ que

atualize a variável de projeto de modo a obter um valor da função objetivo menor. Portanto o que se procura atender é

$$g_0(\mathbf{x}^{[k]} + p\mathbf{d}^{[k]}) < g_0(\mathbf{x}^{[k]}) \quad (5.14)$$

De acordo com a recomendação de Belegundu e Chandrupatla (2011), a função objetivo é representada em série de Taylor em torno de $\mathbf{x}^{[k]}$:

$$g_0(\mathbf{x}^{[k]} + p\mathbf{d}^{[k]}) = g_0(\mathbf{x}^{[k]}) + p\nabla g_0(\mathbf{x}^{[k]})^T \mathbf{d}^{[k]} + \mathbf{O}(p^2) \quad (5.15)$$

Assim, a variação δg_0 na função objetivo é dada por $\delta g_0 = g_0(\mathbf{x}^{[k]} + p\mathbf{d}^{[k]}) - g_0(\mathbf{x}^{[k]})$, ou seja, a Equação (5.15) é reescrita na forma

$$\delta g_0 = p\nabla g_0(\mathbf{x}^{[k]})^T \mathbf{d}^{[k]} + \mathbf{O}(p^2) \quad (5.16)$$

Ao admitir um passo p suficiente pequeno, o termo $\mathbf{O}(p^2)$ é desprezível, assim a equação anterior fica

$$\delta g_0 \cong p\nabla g_0(\mathbf{x}^{[k]})^T \mathbf{d}^{[k]} \quad (5.17)$$

Para que haja uma redução na função objetivo, a variação desta função deve ser negativa, ou seja, $\delta g_0 < 0$. Assim, necessita-se de uma direção de busca $\mathbf{d}^{[k]}$ que garanta essa descida no valor da função:

$$\delta g_0 \cong p\nabla g_0(\mathbf{x}^{[k]})^T \mathbf{d}^{[k]} < 0$$

$$\nabla g_0(\mathbf{x}^{[k]})^T \mathbf{d}^{[k]} < 0 \quad (5.18)$$

Dessa forma a direção de busca $\mathbf{d}^{[k]}$ tem que ser tal que satisfaça a Equação (5.18) para que a atualização da variável de projeto no processo de otimização conduza a uma minimização da função, ou seja, a busca seja decrescente.

O Método da Máxima Declive (*Steepest Descent Method*), um dos algoritmos mais básicos de otimização, define essa direção de busca como sendo

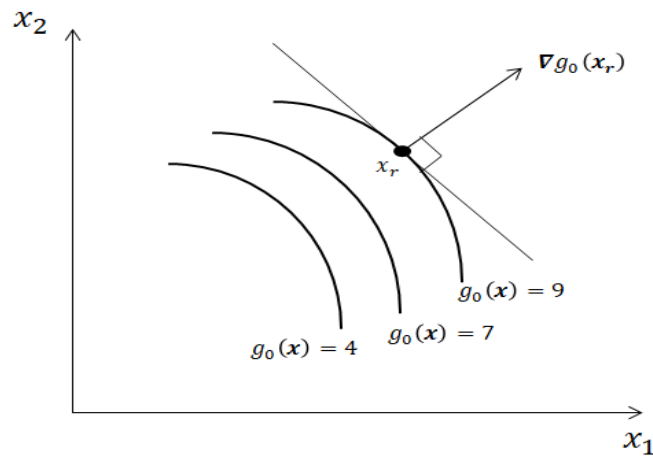
$$\mathbf{d}^{[k]} = -\nabla g_0(\mathbf{x}^{[k]}) \quad (5.19)$$

Aproveitando-se da característica do gradiente da função, a direção de busca dada pela Equação (5.19) satisfaz a relação da Equação (5.18), visto que $\nabla g_0(\mathbf{x}^{[k]})^T \mathbf{d}^{[k]} = -\|\nabla g_0(\mathbf{x}^{[k]})\|^2 < 0$. Em geral, é comum utilizar a direção de busca como um vetor unitário, ou seja,

$$\mathbf{d}^{[k]} = -\frac{\nabla g_0(\mathbf{x}^{[k]})}{\|\nabla g_0(\mathbf{x}^{[k]})\|} \quad (5.20)$$

Considerando a função objetivo como uma superfície, o vetor gradiente é normal (perpendicular) às curvas constantes da função objetivo, e com direção indicada para o crescimento da função. A Figura 5.9 ilustra o significado geométrico do vetor gradiente em uma função com mais de uma variável de projeto.

Figura 5.9 – Significado geométrico do vetor gradiente em uma função com duas variáveis.



Fonte: Autor (2020)

O gradiente de funções com uma variável é um caso particular, que se resume a própria derivada da função no respectivo ponto, ou seja, indica a inclinação da reta tangente à curva no respectivo ponto, e direciona para a região de crescimento desta função; isto pode ser verificado nos gráficos apresentados anteriormente na Figura 5.7 e na Figura 5.8, em que a função objetivo depende de uma única variável.

5.6. Método do Ponto Interior (*Interior Point Method*)

Os problemas de otimização na engenharia em grande parte das vezes estão sujeitos às restrições inerentes ao projeto estrutural. Nesta seção será abordado um algoritmo de busca de

mínimos de funções. O método do ponto interior é um algoritmo baseado em penalidade, que tem como objetivo procurar por mínimos de funções dentro da região viável do problema, região essa definida pelas restrições (BELEGUNDU; CHANDRUPATLA, 2011).

Define-se então uma função de barreira como $B(\mathbf{x})$, em que a mesma é continua, positiva e tende ao infinito à medida que as variáveis de projeto $\mathbf{x}$ se aproximam do contorno da região viável. Existem duas funções de barreira populares: a Função de Barreira Inversa, dada por

$$B(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(\mathbf{x})} \quad (5.21)$$

e a Função de Barreira Logarítmica, dada por

$$B(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^m \log[-g_i(\mathbf{x})] \quad (5.22)$$

A função objetivo então é combinada com a função de barreira, e o problema de otimização é definido como a minimização da função $T(\mathbf{x})$, dada por

$$T(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{\varsigma} B(\mathbf{x}) \quad (5.23)$$

em que, a partir de um ponto inicial $\mathbf{x}^{[0]}$ que pertence a região viável e $\varsigma > 0$, o mínimo de $T(\mathbf{x})$, em geral, retornará um novo ponto, no qual pertence a região viável, desde que $T(\mathbf{x})$ se torne infinito no contorno da região. À medida que ς aumenta, o termo de penalidade $\frac{1}{\varsigma} B(\mathbf{x})$ é reduzido. Isso permite uma redução na função objetivo enquanto mantém a viabilidade (BELEGUNDU; CHANDRUPATLA, 2011).

6. ESTUDO NUMÉRICO

Os elementos de vigas e placas são largamente utilizados para modelagem de estruturas correntes na engenharia civil; dito isso, este capítulo tem como foco realizar um estudo numérico em cima desses dois elementos aplicando todo o desenvolvimento teórico discutido ao longo deste trabalho, os resultados são comparados com os encontrados na literatura.

As análises estáticas e dinâmicas deste capítulo são realizadas em algoritmos desenvolvidos em MatLab. Quanto à otimização, utiliza-se o *toolbox* de otimização, funções pré-programadas dentro do *software*. Na função *fmincon* emprega-se o algoritmo *interior-point-method* com uma limitação de chamadas de funções objeto de 3000 vezes. A tolerância para a violação da restrição é de $1 \cdot 10^{-6}$ com 1000 iterações; tamanho do passo de cada iteração igual a $1 \cdot 10^{-10}$ e critério de otimalidade igual a $1 \cdot 10^{-6}$.

Em todas as análises, os exemplos numéricos são processados utilizando um notebook com processador Intel Core i7 8th Geração, 16 Gb de memória RAM e SSD de 128 Gb.

6.1. Hipóteses Iniciais Gerais

Em todos os estudos numéricos desenvolvidos neste capítulo trabalha-se em regime de pequenos deslocamentos e deformações; o material considerado é homogêneo, isotrópico e elástico. As seções transversais planas permanecem planas após deformações.

Trabalha-se com o modelo de massa concentrada para a viga, enquanto se adota o modelo de massa consistente para o caso de placas. O amortecimento estrutural é obtido pela formulação de Rayleigh, amortecimento proporcional (ver Equação (2.59)).

São estudados neste capítulo três casos para a viga: viga com um AMS, três AMSs amortecidos e finalmente três AMSs não amortecidos. Em placas são estudados dois casos: placa com um AMS e com dois AMSs. Para todos os casos adota-se como função objetivo a relação de massas μ entre o AMS (ou AMSs) e a massa modal da estrutura. Para o caso de um único AMS a função objetivo é dada pela Equação (6.1), enquanto, para as simulações com três AMSs, a função objetivo é dada pela Equação (6.2)

$$\min g_0(x) = \mu = \frac{m_a}{m_j} \quad (6.1)$$

$$\min g_0(\mathbf{x}) = \sum_i \mu_i = \frac{m_{a,1} + m_{a,2} \dots + m_{a,i}}{m_j} \quad (6.2)$$

em que m_j é a massa modal da estrutura definida pela Equação (2.45).

Em termos de restrições, são adotadas duas restrições mecânicas e outras duas relacionadas à modificação da curva de resposta da estrutura em função da frequência. A restrição mecânica do deslocamento total (ver Equação (6.3)), é imposta com a finalidade de garantir que, em todo o domínio do tempo, a resposta da estrutura esteja abaixo do limite estabelecido. Para as simulações realizadas na Seção 6.2, a restrição é dada pela Equação (6.3), enquanto para a Seção 6.3 é dada pela Equação (6.4)

$$g_1(\mathbf{x}) = u_{\max}(\mathbf{x}, t) - u_{\lim} \leq 0 \quad \text{para } 0 \leq t \leq 3 \text{ s} \quad (6.3)$$

$$g_1(\mathbf{x}) = u_{\max}(\mathbf{x}, t) - u_{\lim} \leq 0 \quad \text{para } 0 \leq t \leq 8 \text{ s} \quad (6.4)$$

em que, $u_{\max}$ é o deslocamento dinâmico máximo no histórico de tempo calculado via algoritmo de Newmark (Ver Seção 2.4) e $u_{\lim}$ é o deslocamento dinâmico limite (menor deslocamento encontrado pelo estudo realizado por Valencia (2007)) dado por $u_{\lim} = 0,0165 \text{ m}$ para o caso de utilização um AMS e $u_{\lim} = 0,0151 \text{ m}$ quando utilizado três AMSs. Nas análises com placas, quando utilizado um AMS o deslocamento limite é $u_{\lim} = 0,00071 \text{ m}$, enquanto com a utilização de dois AMSs o deslocamento é igual a $u_{\lim} = 0,00073 \text{ m}$.

Adicionando a restrição de igualdade h_1 (Equação (6.5)) da derivada do máximo deslocamento da resposta estacionária com relação à frequência de excitação Ω no ponto de interesse igual a zero, faz-se com que a inclinação da reta tangente neste ponto seja nula, ou seja, força-se a existência de um patamar na vizinhança do ponto de interesse, tornando o máximo deslocamento menos sensível a mudanças na frequência de excitação Ω .

$$h_1(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_{e,\max}(\mathbf{x})}{\partial \Omega} = 0 \quad (6.5)$$

em que, $u_{e,\max}(\mathbf{x})$ é o deslocamento no regime estacionário calculado pelas Equações (4.33) e (4.35).

Ao inserir uma segunda restrição de desigualdade g_2 (ver Equação (6.6)) da segunda derivada da resposta estacionária com relação à frequência de excitação Ω no ponto de interesse menor ou igual a zero, faz-se com que a função do deslocamento máximo seja côncava na região de interesse, apontando para uma sensibilidade negativa da curva de resposta da viga com o AMS, ou ampliando o patamar da função na vizinhança do ponto de interesse. Assim, as equações de restrições que definem o problema de otimização são

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 u_{e,m\acute{a}x}(\mathbf{x})}{\partial \Omega^2} \leq 0 \quad (6.6)$$

Tomando agora terceira restrição de desigualdade g_3 como a restrição do problema em limitar o deslocamento dinâmico estacionário da viga.

$$g_3(\mathbf{x}) = u_{e,m\acute{a}x}(\mathbf{x}) - u_{lim} \leq 0 \quad (6.7)$$

em que, $u_{e,m\acute{a}x}(\mathbf{x})$ é o deslocamento no regime estacionário calculado pelas Equações (4.33) e (4.35). Esta abordagem é adotada para verificar a eficiência em termos de resposta e processamento, visto que a otimização é realizada diretamente sem a necessidade da chamada do algoritmo de integração numérica de Newmark em cada iteração.

Definidas as restrições e as funções objetivo, o problema de otimização está posto. O ponto inicial das variáveis de projeto é adotado como os valores obtidos por Valencia (2007), visto que o algoritmo de otimização (Interior-Point Method) exige que o ponto inicial pertença a região viável. Foram realizados seis tipos de simulações para cada caso de acoplamento dos AMSs em vigas e três simulações para cada caso de acoplamento dos AMSs em placas. A Tabela 6.1 e a Tabela 6.2 mostram de maneira ilustrativa os tipos de simulações para cada caso em vigas e placas, respectivamente.

Tabela 6.1 – Simulações realizadas para cada caso de acoplamento dos AMSs na viga.

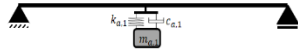
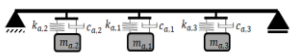
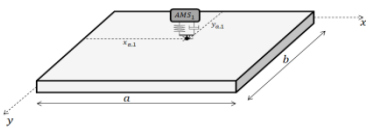
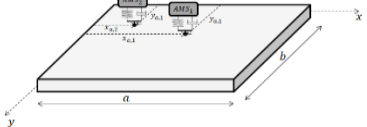
		Casos de Acoplamento dos AMSs		
				
Simulações com as Restrições de Otimização	g_1	Restrição do Deslocamento Total		
	g_1 e h_1	Combinação das restrições do Deslocamento Total e a Primeira derivada do Deslocamento Estacionário		
	g_1, g_2 e h_1	Combinação das restrições do Deslocamento Total, da Primeira Derivada do Deslocamento estacionário e da Segunda Derivada do Deslocamento Estacionário		
	g_3	Restrição do Deslocamento Estacionário		
	g_3 e h_1	Combinação das restrições do Deslocamento Estacionário e a Primeira derivada do Deslocamento Estacionário		
	g_3, g_2 e h_1	Combinação das restrições do Deslocamento Estacionário, da Primeira Derivada do Deslocamento estacionário e da Segunda Derivada do Deslocamento Estacionário		

Tabela 6.2 – Simulações realizadas para cada caso de acoplamento dos AMSs na placa.

		Casos de Acoplamento dos AMSs	
			
Simulações com as Restrições de Otimização	g_1	Restrição do Deslocamento Total	
	g_1 e h_1	Combinação das restrições do Deslocamento Total e a Primeira derivada do Deslocamento Estacionário	
	g_1, g_2 e h_1	Combinação das restrições do Deslocamento Total, da Primeira Derivada do Deslocamento estacionário e da Segunda Derivada do Deslocamento Estacionário	

6.2.Viga com Carga Concentrada

Nos estudos numéricos abordados nesta seção, a estrutura será modelada em elementos de viga por meio do método da rigidez direta. O elemento de viga possui dois graus de liberdade em cada nó, um referente ao deslocamento transversal e outro de rotação. Assim, a matriz de rigidez da estrutura é montada a partir da contribuição da matriz de rigidez de cada elemento que a compõe. O mesmo conceito se aplica para as matrizes de massa e de amortecimento.

Dessa forma o procedimento de acoplamento dos AMSs segue como abordado na Seção 4.3.2.

O estudo numérico realizado nesta seção será validado e comparado a um trabalho desenvolvido por Valencia (2007), em que o autor realiza um estudo paramétrico sobre AMSs acoplados em vigas metálicas.

No presente trabalho o fluxo de análise é realizado da seguinte forma:

- a) A viga é modelada pelo método da rigidez direta;
- b) Da análise modal, encontra-se uma função aproximada para a forma modal da viga por meio dos autovetores;
- c) O AMS é acoplado em um sistema modal reduzido viga (ver Seção 4.3.2);
- d) A viga com o AMS é calculada utilizando os parâmetros do trabalho de Valencia (2007);
- e) A viga com o AMS é calculada novamente utilizando o algoritmo de otimização, em que as variáveis de projeto são as características do AMS (rigidez, massa e amortecimento);
- f) Os resultados obtidos nos itens “d” e “e” são comparados com a resposta da viga metálica sem o sistema de controle.

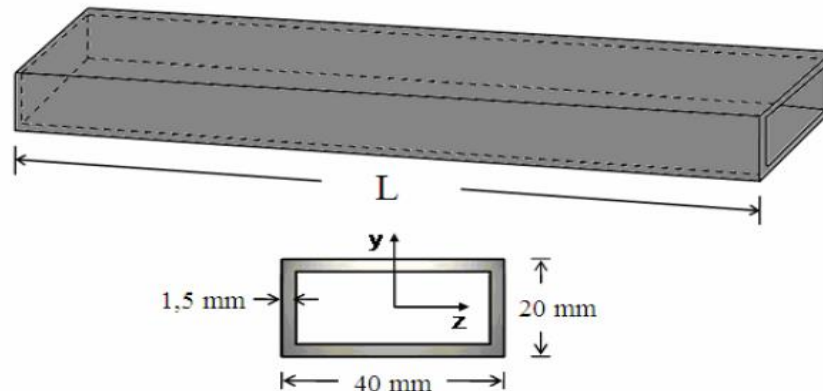
6.2.1. Descrição da Estrutura e Modelo de Análise

A viga metálica adotada pela literatura de referência consiste em um perfil tubular retangular vazado, simplesmente apoiado em suas extremidades. A Figura 6.1 ilustra a viga descrita e suas características estão na Tabela 6.3.

O perfil metálico é discretizado em dez elementos de viga com comprimento de 0,2 m cada. Cada elemento de viga possui dois nós e cada nó dois graus de liberdade (um de rotação e outro de translação vertical) totalizando 22 graus de liberdade.

A resposta da estrutura é obtida utilizando o algoritmo de Newmark, em que se adota o espaçamento temporal sugerido pela Equação (2.97), tomando a frequência $\omega_{20} = 51984 \text{ rad/s}$, resultando em um $\Delta t = 1,2087 \cdot 10^{-5} \text{ s}$. O tempo total da análise dinâmica é de 3 s, dessa forma totalizando 248.206 passos de tempo no algoritmo de integração de Newmark.

Figura 6.1 – Atributos geométricos da viga metálica em estudo.



Fonte: Valencia (2007)

Tabela 6.3 – Características da viga metálica.

Características	Nomenclatura	Unidade de Medida	Valor
Comprimento	L	m	2,0
Momento de Inércia	I	m^4	$1,152 \cdot 10^{-8}$
Massa Linear	$\bar{m}$	kg/m	1,3422
Módulo de Elasticidade	E	N/m^2	$1,999 \cdot 10^{11}$
Taxa de Amortecimento	ξ	%	5,0

Ao realizar a análise modal da viga metálica, são obtidas as características dinâmicas, mostradas na Tabela 6.4 para as três primeiras frequências naturais e suas formas modais. Para avaliar a aproximação dos valores obtidos com o algoritmo desenvolvido, na Tabela 6.5 é possível ver as frequências naturais da viga utilizando a formulação da Equação (3.98) empregando os parâmetros da Tabela 6.3, bem como as frequências naturais obtidas por Valencia (2007); nota-se que os valores são bem próximos, validando a discretização adotada.

Tabela 6.4 – Características modais da viga metálica.

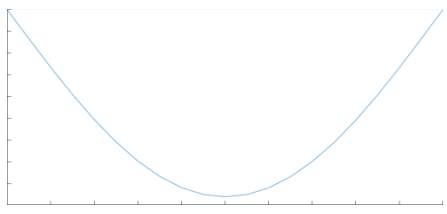
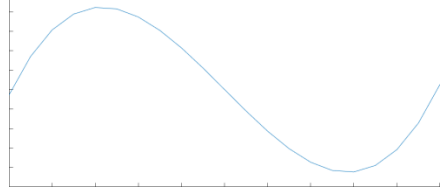
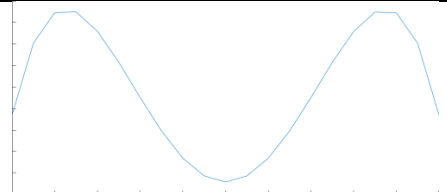
Frequências Naturais (ω_j)	Valor	Forma Modal
ω_1	102,2045 rad/s ou 16,266 Hz	
ω_2	408,8591 rad/s ou 65,0719 Hz	
ω_3	920,3260 rad/s ou 146,4744 Hz	

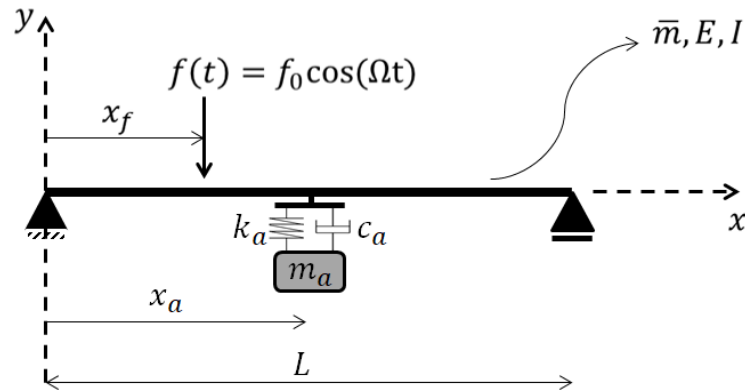
Tabela 6.5 – Frequências para a viga metálica utilizando formulação analítica e obtida por Valencia (2007).

Frequências Naturais (ω_j)	Analítico (Hz)	Valência (2007) (Hz)
ω_1	16,266	16,265
ω_2	65,0645	65,043
ω_3	146,3951	146,29

6.2.2. Utilização de Um AMS Acoplado

Uma representação esquemática da viga com o AMS acoplado pode ser vista na Figura 6.2. A carga dinâmica tem amplitude igual a $f_0 = 100 \text{ N}$ com frequência $\Omega = \omega_1$ e está posicionada no vão central ($x_f = L/2$), assim como o AMS ($x_a = L/2$).

Figura 6.2 – Viga simplesmente apoiada com um amortecedor acoplado.



Fonte: Autor (2020)

Para a abordagem do problema via otimização, definem-se as variáveis de projeto como os parâmetros normalizados de massa e frequência do AMS e sua taxa de amortecimento dadas pela Tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Descrição das variáveis de projeto.

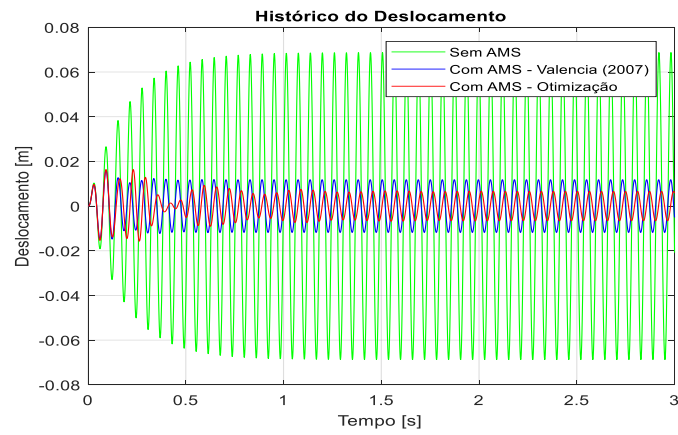
Variável de Projeto	Parâmetro do AMS	Nomenclatura
x_1	Relação de Massa	μ
x_2	Relação de Frequência	f
x_3	Taxa de Amortecimento	ξ_a

A Figura 6.3 apresenta a resposta da viga metálica sem o AMS e as respostas obtidas ao considerar um AMS acoplado levando em conta a restrição mecânica do deslocamento total e as restrições das derivadas. É possível também plotar a resposta estacionária da viga em função da relação de frequência da força de excitação e frequência natural. A resposta da viga em função da frequência é apresentada pela Figura 6.4.

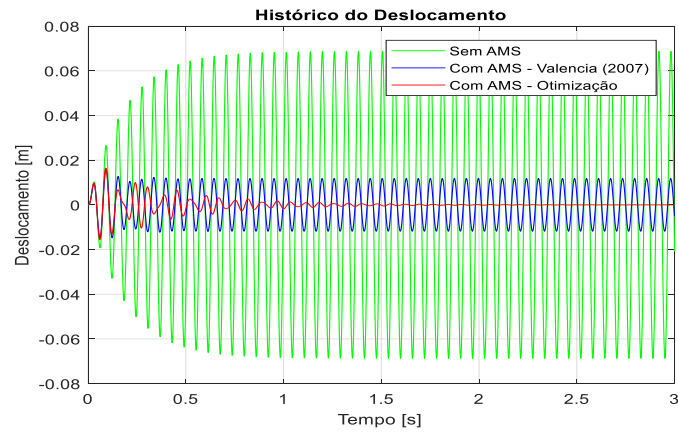
A Tabela 6.7 exhibe os valores ótimos das variáveis de projeto encontrados pelo algoritmo de otimização, enquanto a Tabela 6.8 apresenta os valores máximos dos deslocamentos totais e estacionários no histórico de tempo analisado.

Na Figura 6.5 é possível analisar a evolução das variáveis de projeto, a máxima restrição calculada, bem como o valor da função objetivo durante as iterações no processo de otimização.

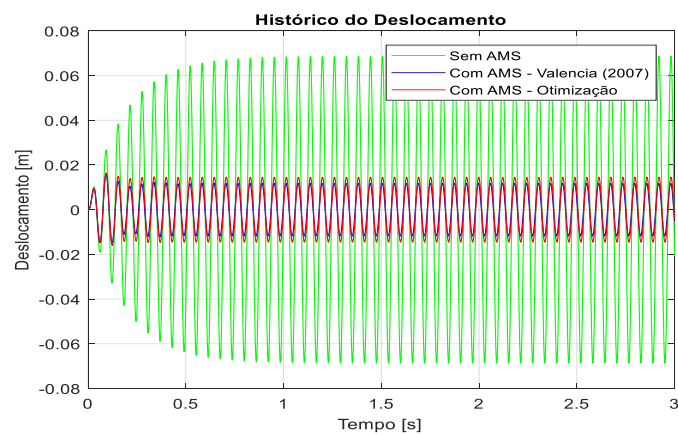
Figura 6.3 – Histórico do deslocamento para a viga metálica, com e sem um AMS acoplado, sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1



(a)



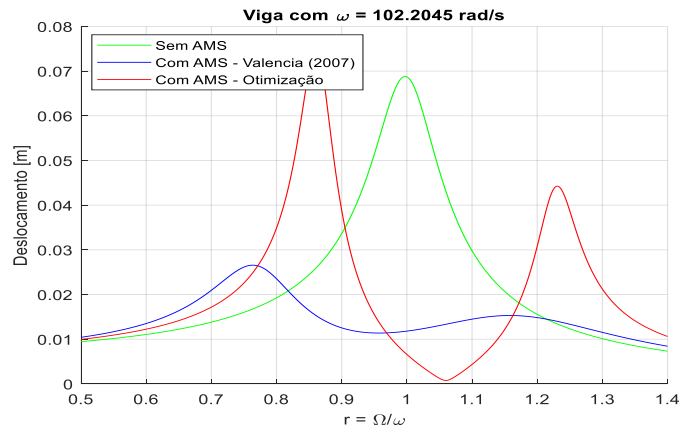
(b)



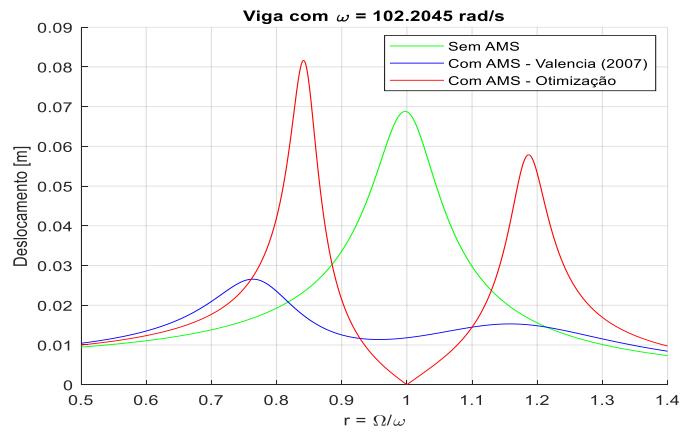
(c)

Fonte: Autor (2020)

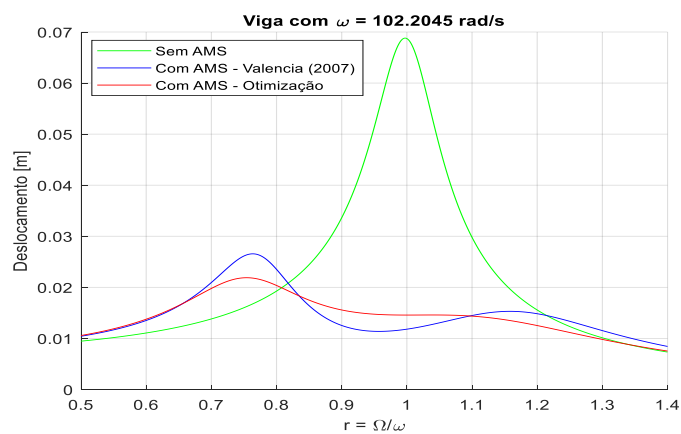
Figura 6.4 – Deslocamento estacionário da viga em função da frequência normalizada, com e sem um AMS acoplado, sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1, g_2 e h_1 .



(a)



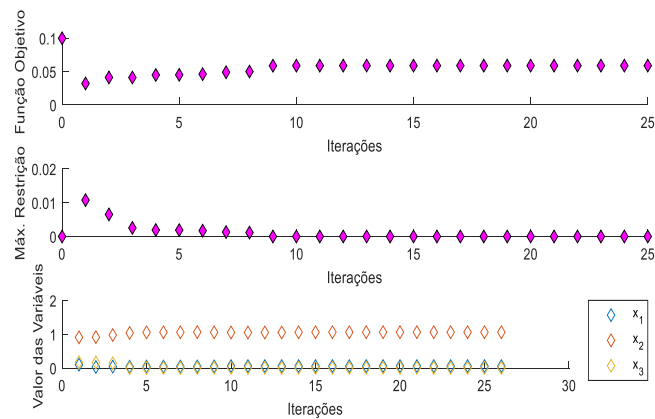
(b)



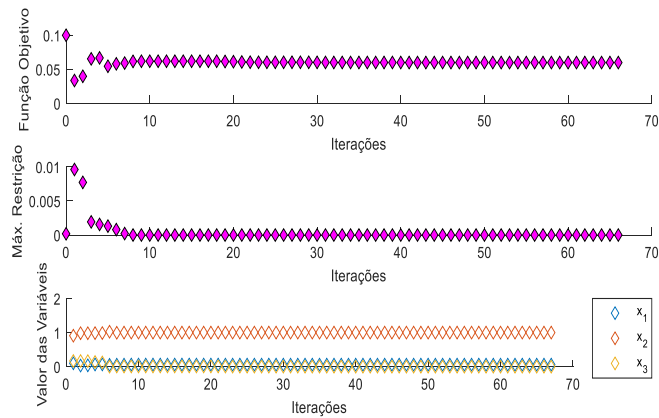
(c)

Fonte: Autor (2020)

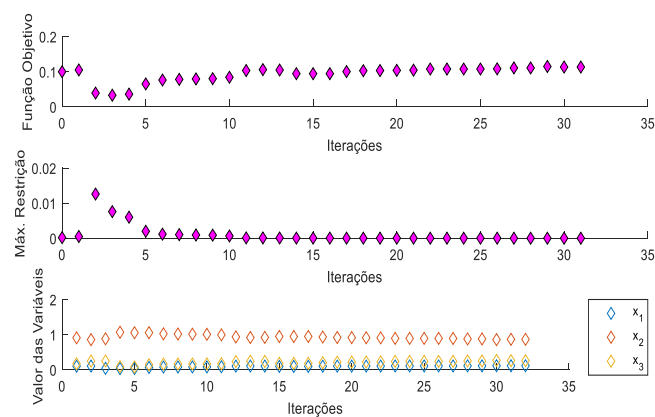
Figura 6.5 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a viga metálica com um AMS acoplado sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autor (2020)

Tabela 6.7 – Variáveis de projeto otimizadas para um AMS acoplado na viga sob as restrições g_1 , g_2 e h_1 .

Variável de Projeto Otimizada	Nomenclatura	Otimização		
		g_1	g_1 e h_1	g_1, g_2 e h_1
x_1^*	μ	0,0589	0,0598	0,1131
x_2^*	f	1,0599	1,000	0,8661
x_3^*	ξ_a	0,0073	0,0000	0,2585
Tempo de Processamento		327,33 s	628,63 s	478,04 s

Tabela 6.8 – Deslocamentos máximos da viga com um AMS acoplado na viga sob as restrições g_1 , g_2 e h_1 .

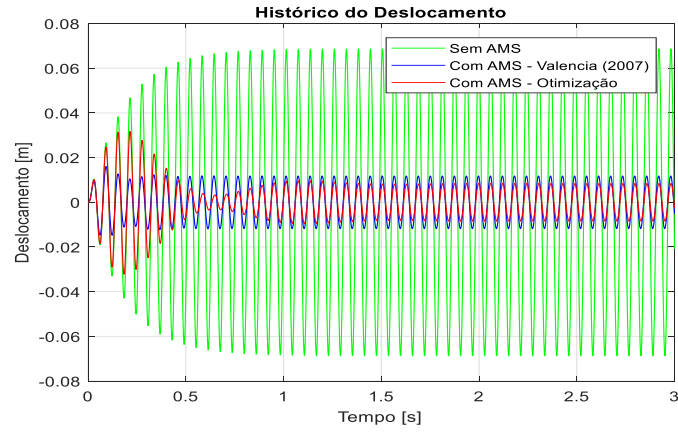
Resposta Estrutural	Sem AMS	Valencia (2007)	Otimização		
			g_1	g_1 e h_1	g_1, g_2 e h_1
Deslocamento Total [m]	0,06871	0,0165	0,01635	0,0165	0,0165
Deslocamento Estacionário [m]	0,06871	0,01182	0,006601	0,0000205	0,01458

A Figura 6.6 apresenta a resposta da viga metálica sem o AMS bem como as respostas obtidas ao considerar um AMS acoplado levando em conta a restrição mecânica do deslocamento estacionário e as restrições das derivadas. É possível também plotar a resposta estacionária da viga em função da relação de frequência da força de excitação e frequência natural. A resposta da viga em função da frequência é apresentada pela Figura 6.7.

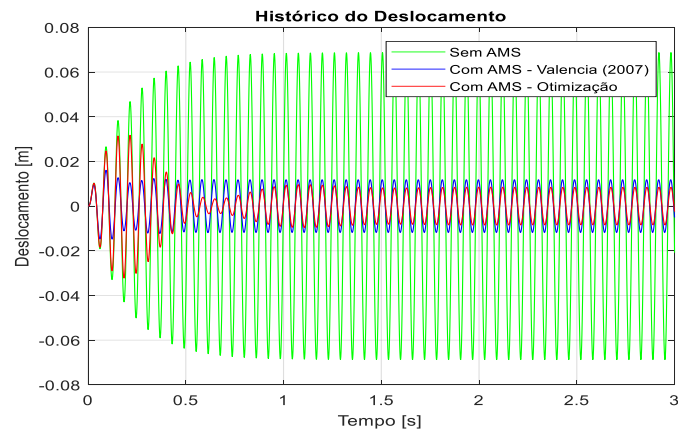
A Tabela 6.9 exhibe os valores ótimos das variáveis de projeto encontrados pelo algoritmo de otimização, enquanto a Tabela 6.10 apresenta os valores máximos dos deslocamentos totais e estacionários no histórico de tempo analisado.

Na Figura 6.8 é possível analisar a evolução das variáveis de projeto, a máxima restrição calculada, bem como o valor da função objetivo durante as iterações no processo de otimização.

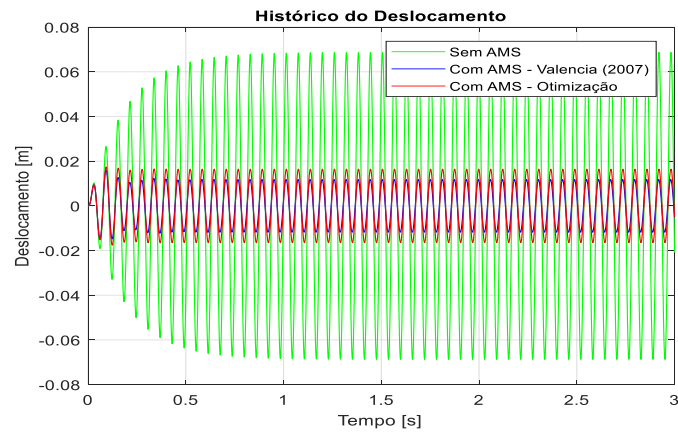
Figura 6.6 – Histórico do deslocamento para a viga metálica, com e sem um AMS acoplado, sob (a) restrição g_3 ,
(b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1



(a)



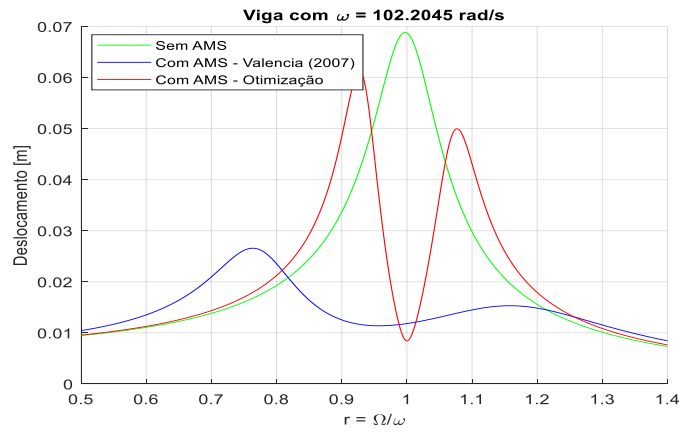
(b)



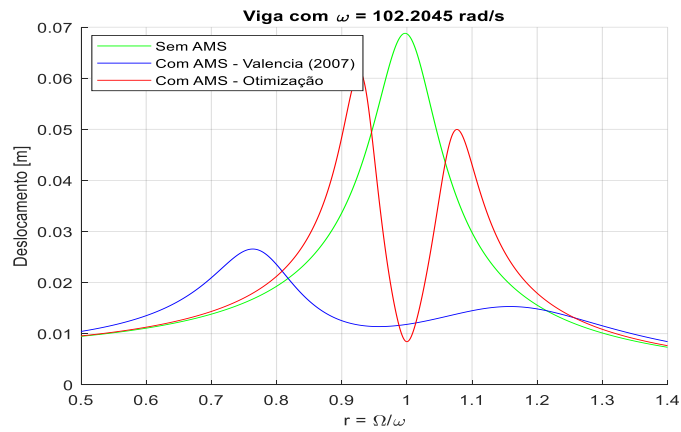
(c)

Fonte: Autor (2020)

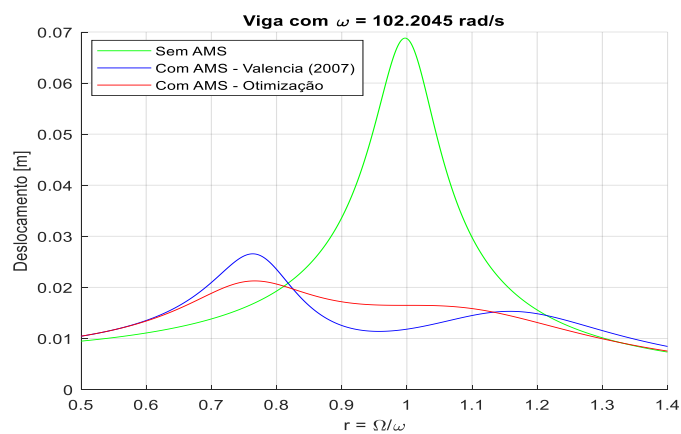
Figura 6.7 – Deslocamento estacionário da viga em função da frequência normalizada, com e sem um AMS acoplado, sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1 .



(a)



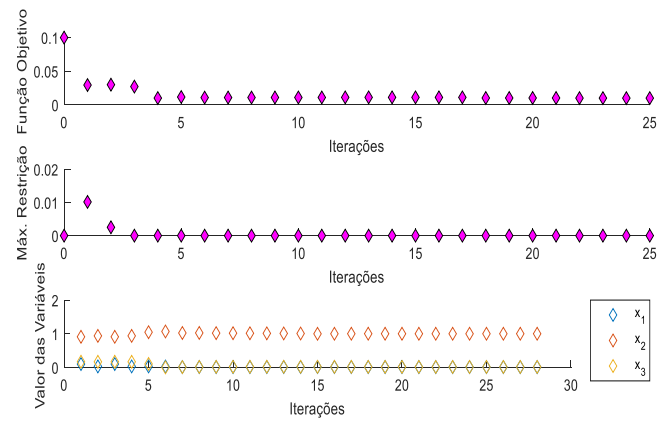
(b)



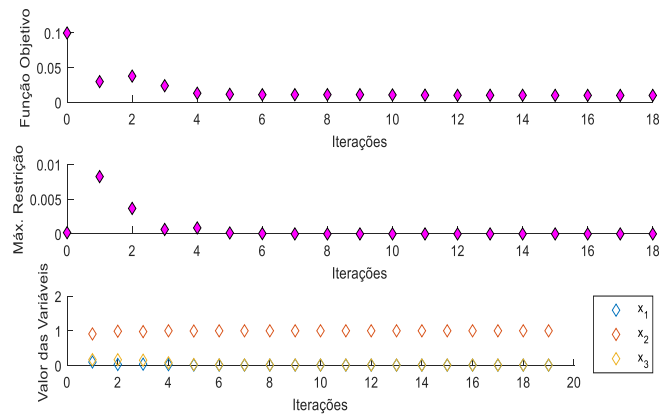
(c)

Fonte: Autor (2020)

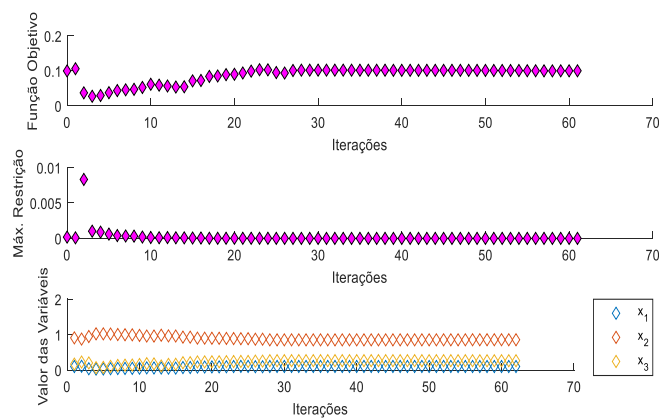
Figura 6.8 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a viga metálica com um AMS acoplado sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autor (2020)

Tabela 6.9 – Variáveis de projeto otimizadas para um AMS acoplado na viga sob as restrições g_2 , g_3 e h_1 .

Variável de Projeto Otimizada	Nomenclatura	Otimização		
		g_3	g_3 e h_1	g_2, g_3 e h_1
x_1^*	μ	0,010	0,010	0,1002
x_2^*	f	1,00	0,9998	0,8561
x_3^*	ξ_a	0,0135	0,0135	0,2636
Tempo de Processamento		8,74 s	8,9 s	14,7 s

Tabela 6.10 – Deslocamentos máximos da viga com um AMS acoplado na viga sob as restrições g_2 , g_3 e h_1 .

Resposta Estrutural	Sem AMS	Valencia (2007)	Otimização		
			g_3	g_3 e h_1	g_2, g_3 e h_1
Deslocamento Total [m]	0,06871	0,0165	0,03172	0,03173	0,01751
Deslocamento Estacionário [m]	0,06871	0,01182	0,008412	0,008437	0,01648

Com as Equações (4.36) a (4.39), calculam-se os parâmetros dos amortecedores da massa sintonizados para cada uma das análises realizadas anteriormente. A Tabela 6.11 apresenta um resumo dos parâmetros obtidos para todas as simulações realizadas nesta subseção.

Tabela 6.11 – Resumo dos parâmetros de um AMS acoplado na viga metálica.

Parâmetro	Valencia (2007)	Otimização					
		Restrições					
		g_1	g_1 e h_1	g_1, g_2 e h_1	g_3	g_3 e h_1	g_2, g_3 e h_1
m_a (kg)	0,2684	0,1581	0,1605	0,3036	0,0268	0,0268	0,2690
k_a (N/m)	2313,50	1855,38	1676,83	2378,95	280,41	280,29	2059,23
ξ_a	0,1680	0,0073	0,0000	0,2585	0,0135	0,0135	0,2636

Pela Tabela 6.11 é possível notar que, em quase todos os casos (exceto para as análises em que há as restrições g_1 , g_2 e h_1), a massa total obtida é menor que a encontrada por Valencia (2007).

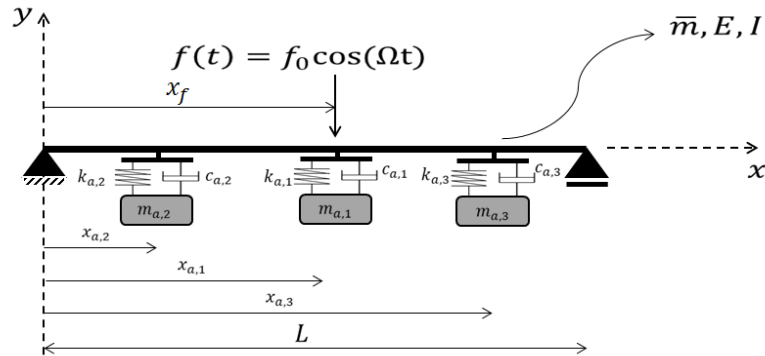
A menor massa obtida é para o caso em que apenas a restrição g_3 está atuando; porém é possível perceber, por meio da resposta em função da frequência, que a faixa de operação é bem reduzida no ponto de interesse ($0,98 \leq r \leq 1,02$), e possui picos fora do ponto de interesse. A resposta no domínio do tempo é satisfatória apenas no regime estacionário, ou seja, nos primeiros segundos a viga não atende o requisito mínimo estabelecido (como esperado). A resposta obtida com as restrições g_1 , g_2 e h_1 apresentou uma faixa de operação

muito boa, com $0,92 \leq r \leq 1,40$, porém exigindo uma massa do AMS maior que a encontrada por Valencia (2007), bem como uma taxa de amortecimento elevada.

6.2.3. Utilização de Três AMSs Acoplados

Nesta seção são utilizados três amortecedores no mesmo modelo estrutural estudado na seção anterior. Uma representação esquemática da viga com os três AMSs acoplados pode ser vista na Figura 6.9. A carga dinâmica, é a mesma adotada anteriormente, com módulo igual a $f_0 = 100 \text{ N}$ com frequência $\Omega = \omega_1$ e está posicionada no vão central ($x_f = L/2$), enquanto os AMSs têm as seguintes posições: o AMS 1 está na posição $x_{a,1} = L/2$, o AMS 2 se encontra em $x_{a,2} = 0,475 \cdot L$ e o AMS 3 na posição $x_{a,2} = 0,525 \cdot L$. Tomando partido da simetria, os parâmetros dos AMSs 2 e 3 são iguais, ou seja, $k_{a,2} = k_{a,3}$, $c_{a,2} = c_{a,3}$ e $m_{a,2} = m_{a,3}$.

Figura 6.9 – Viga simplesmente apoiada com três amortecedores acoplados.



Fonte: Autor (2020)

Para a abordagem do problema via otimização, definem-se as variáveis de projeto como os parâmetros normalizados de massa e frequência dos AMSs e suas taxas de amortecimento dadas pela Tabela 6.12.

Tabela 6.12 – Descrição das variáveis de projeto.

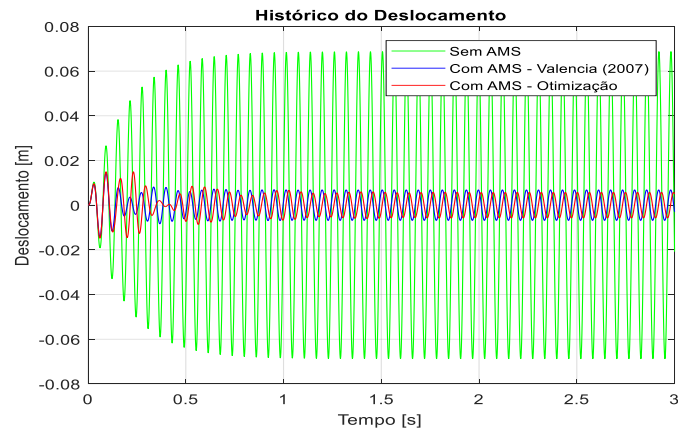
Variável de Projeto	Parâmetro do AMS	Nomenclatura
x_1	Relação de Massa do AMS 1	μ_1
x_2	Relação de Massa dos AMSs 2 e 3	$\mu_2 = \mu_3$
x_3	Relação de Frequência do AMS 1	f_1
x_4	Relação de Frequência dos AMSs 2 e 3	$f_2 = f_3$
x_5	Taxa de Amortecimento do AMS1	$\xi_{a,1}$
x_6	Taxa de Amortecimento dos AMSs 2 e 3	$\xi_{a,2} = \xi_{a,3}$

A Figura 6.10 apresenta a resposta da viga metálica sem os AMSs e as respostas obtidas ao considerar três AMSs acoplados para a restrição mecânica do deslocamento dinâmico total como também as restrições das derivadas. É possível também plotar a resposta estacionária da viga em função da relação de frequência da força de excitação e frequência natural. A resposta da viga em função da frequência é apresentada pela Figura 6.11.

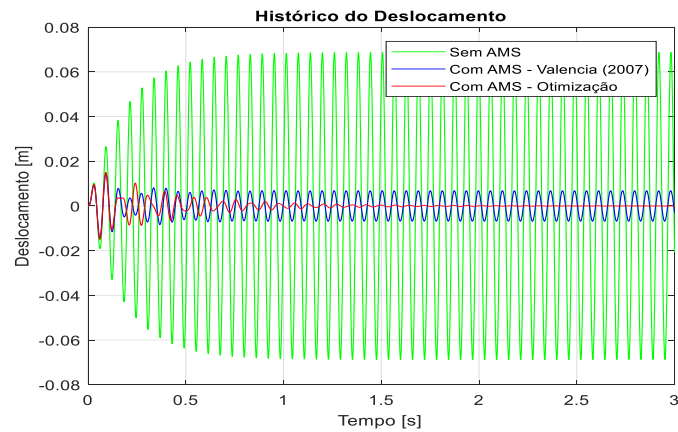
A Tabela 6.13 exhibe os valores ótimos das variáveis de projeto encontrados pelo algoritmo de otimização, enquanto a Tabela 6.14 apresenta os valores máximos dos deslocamentos totais e estacionários no histórico de tempo analisado.

Na Figura 6.12 é possível analisar a evolução das variáveis de projeto a máxima restrição calculada, bem como o valor da função objetivo durante as iterações no processo de otimização.

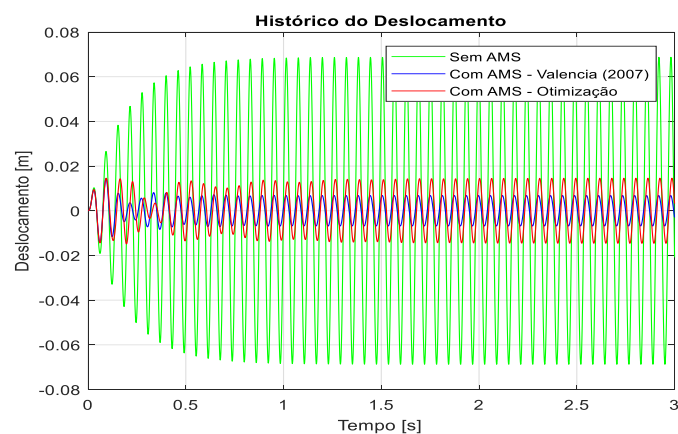
Figura 6.10 – Histórico do deslocamento para a viga metálica, com e sem três AMSs acoplados, sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1



(a)



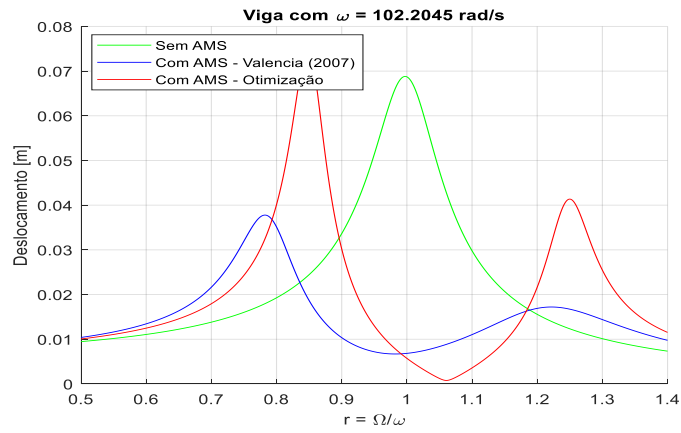
(b)



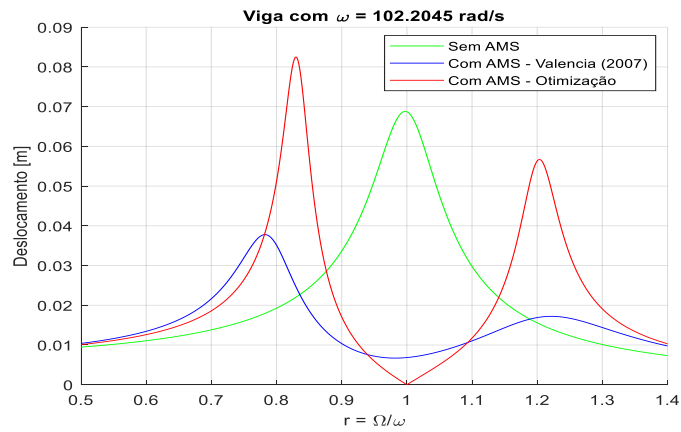
(c)

Fonte: Autor (2020)

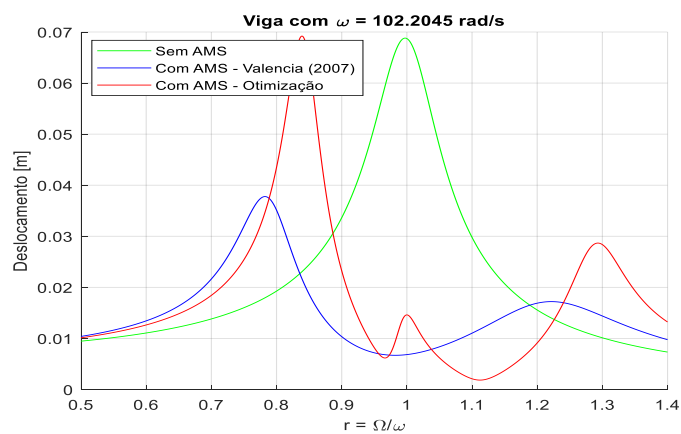
Figura 6.11 – Deslocamento estacionário da viga em função da frequência normalizada, com e sem três AMSs acoplados, sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1 .



(a)



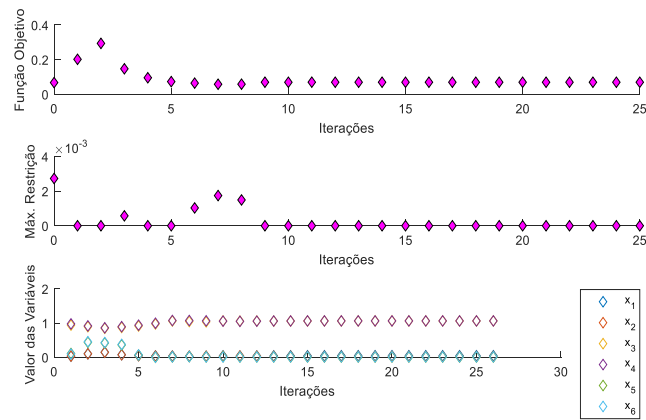
(b)



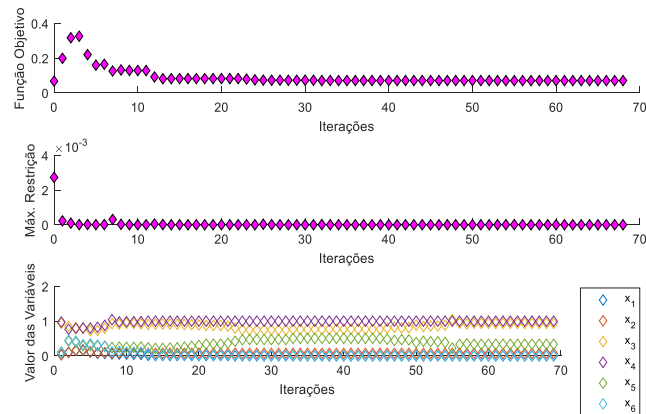
(c)

Fonte: Autor (2020)

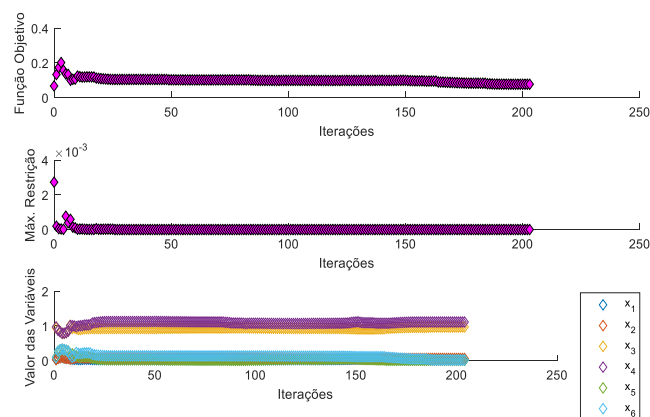
Figura 6.12 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a viga metálica com três AMSs acoplados sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1 .



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autor (2020)

Tabela 6.13 – Variáveis de projeto otimizadas para três AMSs acoplados sob as restrições g_1 , g_2 e h_1 .

Variável de Projeto Otimizada	Nomenclatura	Otimização		
		g_1	g_1 e h_1	g_1, g_2 e h_1
x_1^*	μ_1	0,0449	0,0001	0,0156
x_2^*	$\mu_2 = \mu_3$	0,0245	0,0704	0,0619
x_3^*	f_1	1,0606	0,9359	0,9699
x_4^*	$f_2 = f_3$	1,0614	1,000	1,1124
x_5^*	$\xi_{a,1}$	0,0074	0,3346	0,0166
x_6^*	$\xi_{a,2} = \xi_{a,3}$	0,0121	0,0002	0,0205
Tempo de Processamento		480,6 s	1095,9 s	3619,4 s

Tabela 6.14 – Deslocamentos máximos da viga com três AMSs acoplados sob as restrições g_1 , g_2 e h_1

Resposta Estrutural	Sem AMS	Valencia (2007)	Otimização		
			g_1	g_1 e h_1	g_1, g_2 e h_1
Deslocamento Total [m]	0,06871	0,0151	0,01496	0,0151	0,01460
Deslocamento Estacionário [m]	0,06871	0,006836	0,005772	0,00003	0,01451

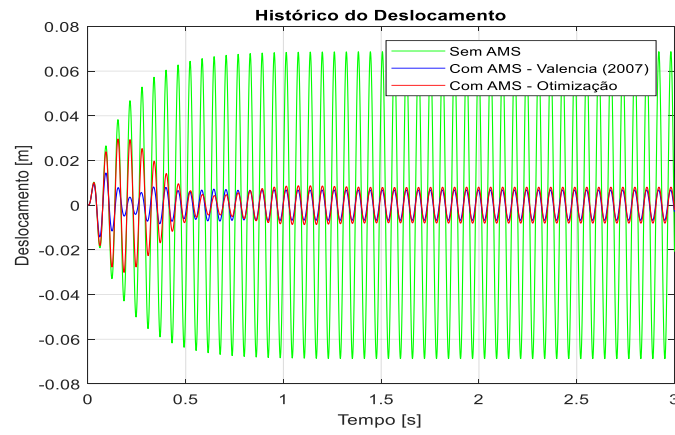
A Figura 6.13 apresenta a resposta da viga metálica sem os AMSs bem como as respostas obtidas ao considerar três AMSs acoplados levando em conta a restrição mecânica do deslocamento dinâmico estacionário como também as restrições das derivadas.

É possível também plotar a resposta estacionária da viga em função da relação de frequência da força de excitação e frequência natural. A resposta da viga em função da frequência é apresentada pela Figura 6.14.

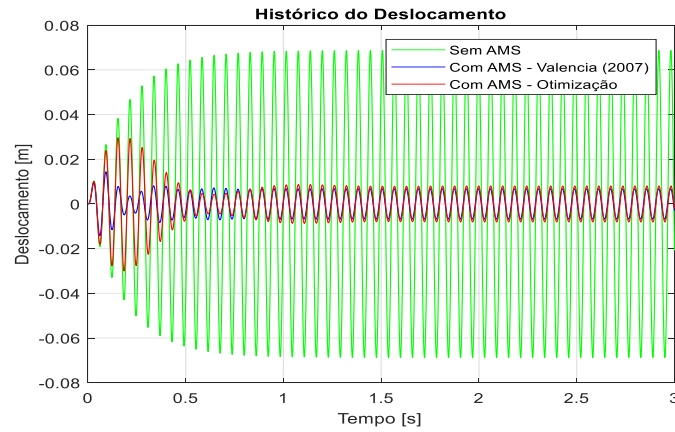
A Tabela 6.15 exibe os valores ótimos das variáveis de projeto encontrados pelo algoritmo de otimização, enquanto a Tabela 6.16 apresenta os valores máximos dos deslocamentos totais e estacionários no histórico de tempo analisado.

Na Figura 6.15 é possível analisar a evolução das variáveis de projeto a máxima restrição calculada, bem como o valor da função objetivo durante as iterações no processo de otimização.

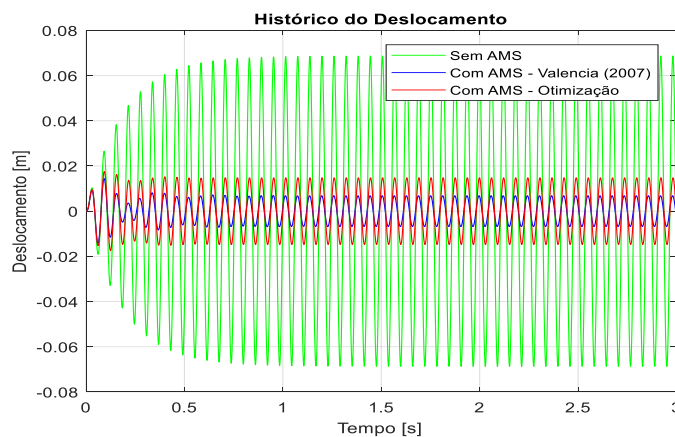
Figura 6.13 – Histórico do deslocamento para a viga metálica, com e sem três AMSs acoplados, sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1 .



(a)



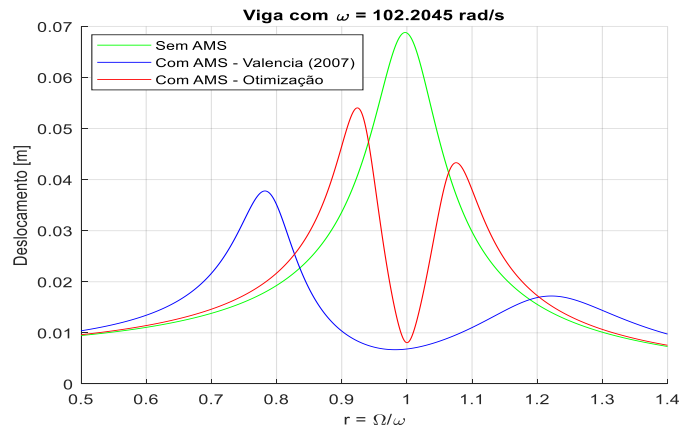
(b)



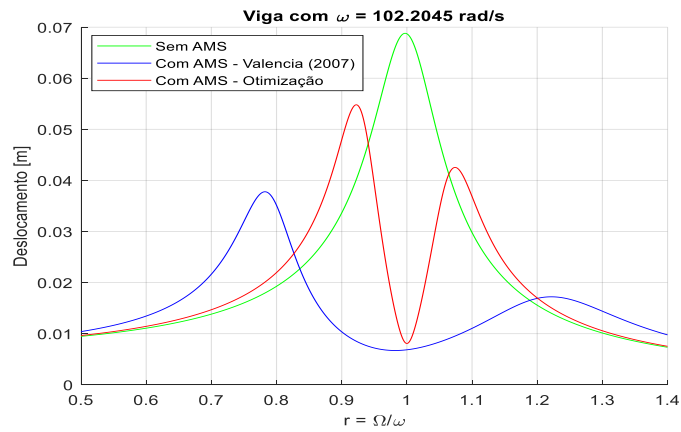
(c)

Fonte: Autor (2020)

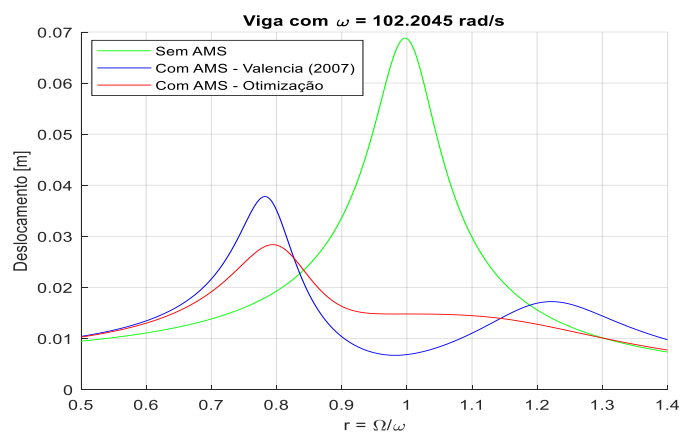
Figura 6.14 – Deslocamento estacionário da viga em função da frequência normalizada, com e sem três AMSs acoplados, sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1 .



(a)



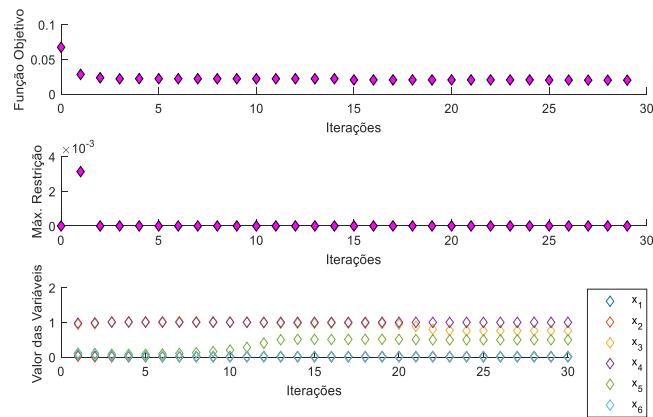
(b)



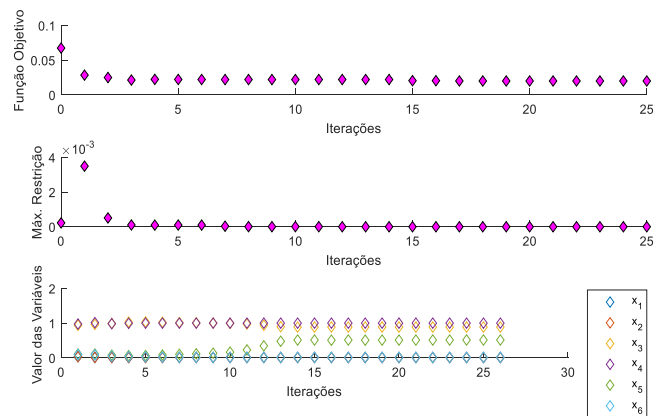
(c)

Fonte: Autor (2020)

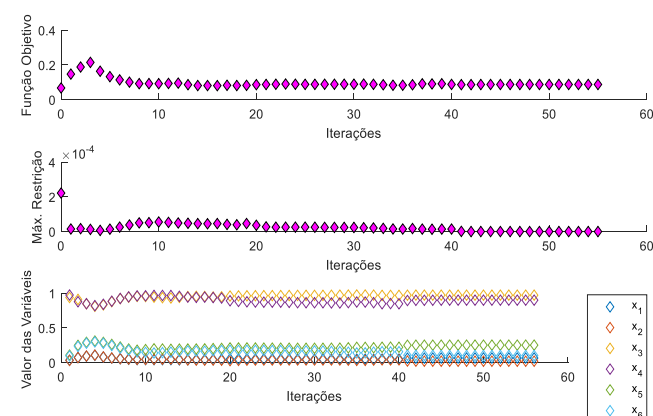
Figura 6.15 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a viga metálica com três AMSs acoplados sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1 .



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autor (2020)

Tabela 6.15 – Variáveis de projeto otimizadas para três AMSs acoplados sob as restrições g_2, g_3 e h_1

Variável de Projeto Otimizada	Nomenclatura	Otimização		
		g_3	g_3 e h_1	g_2, g_3 e h_1
x_1^*	μ_1	0,010	0,010	0,0668
x_2^*	$\mu_2 = \mu_3$	0,010	0,010	0,0208
x_3^*	f_1	0,7590	0,8871	0,9720
x_4^*	$f_2 = f_3$	1,001	1,000	0,9000
x_5^*	$\xi_{a,1}$	0,4969	0,45141	0,2526
x_6^*	$\xi_{a,2} = \xi_{a,3}$	0,0139	0,0131	0,1028
Tempo de Processamento		14,4 s	10,5s	15,0 s

Tabela 6.16 – Deslocamentos máximos da viga com três AMSs acoplados sob as restrições g_2, g_3 e h_1

Resposta Estrutural	Sem AMS	Valencia (2007)	Otimização		
			g_3	g_3 e h_1	g_2, g_3 e h_1
Deslocamento Total [m]	0,06871	0,0151	0,02699	0,02966	0,01761
Deslocamento Estacionário [m]	0,06871	0,006836	0,008029	0,008078	0,01479

Com as Equações (4.36) a (4.39), calculam-se os parâmetros dos amortecedores da massa sintonizados para cada uma das análises realizadas anteriormente. A Tabela 6.17 apresenta um resumo dos parâmetros obtidos para todas as simulações realizadas nesta subseção.

Tabela 6.17 – Resumo dos parâmetros dos três AMSs acoplados na viga metálica.

	Parâmetro	Valencia (2007)	Otimização					
			Restrições					
			g_1	g_1 e h_1	g_1, g_2 e h_1	g_3	g_3 e h_1	g_2, g_3 e h_1
AMS 1	m_a (kg)	0,0938	0,1205	0,0003	0,0419	0,0268	0,0268	0,1793
	k_a (N/m)	863,61	1416,24	2,46	411,50	161,54	220,66	1769,69
	ξ_a	0,1089	0,0074	0,3346	0,0166	0,4969	0,4514	0,2526
AMS 2 e	m_a (kg)	0,0871	0,0329	0,0945	0,0831	0,0134	0,0134	0,0279
AMS 3	k_a (N/m)	863,61	773,95	1974,06	2147,83	280,97	280,41	472,43
	ξ_a	0,0969 / 0,0853	0,0121	0,0002	0,0205	0,0139	0,0131	0,1028

Pela Tabela 6.17, nota-se que, em quase todos os casos (exceto para as análises em que há as restrições g_2, g_3 e h_1), a massa total obtida foi menor que a encontrada pela literatura de referência.

A massa total obtida apenas com a restrição g_1 é a que mais se aproximou com a referência. Vale ressaltar que a resposta em função da frequência não é tão suave fora do ponto de interesse se comparado com a referência, porém satisfatória dentro do ponto de interesse ($r = 1$) e apresentando um deslocamento estacionário quase nulo.

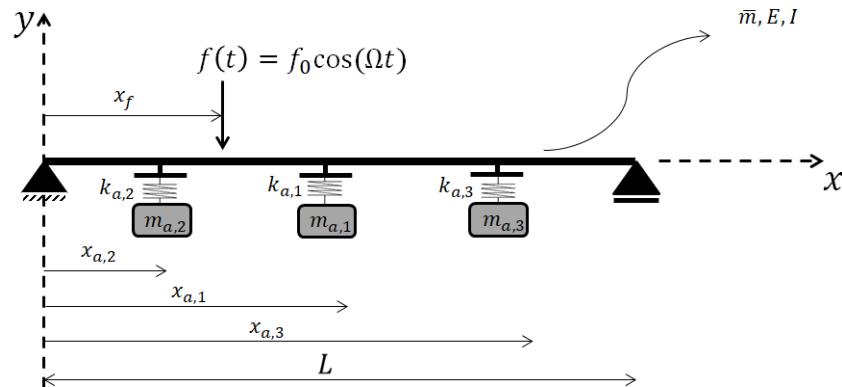
A menor massa obtida é para o caso em que a restrição g_3 está atuando; porém é possível perceber por meio da resposta em função da frequência que a faixa de operação é bem reduzida no ponto de interesse, e possui picos fora do ponto de interesse; a resposta no domínio do tempo é satisfatória apenas no regime estacionário, ou seja, nos primeiros segundos a viga não atende o requisito mínimo estabelecido (como esperado).

As maiores massa e taxa de amortecimento observadas são para os casos em que está atuando a restrição g_2 , visto que força a suavidade da curva de resposta, e isto pode ser visto nas vigas de resposta em função da frequência

6.2.4. Utilização de Três AMSs não Amortecidos Acoplados

Nesta seção são utilizados três amortecedores no mesmo modelo estrutural estudado na seção anterior, ou seja, os AMSs não possuem do amortecimento viscoso. Uma representação esquemática da viga com os três AMSs acoplados pode ser vista na Figura 6.16. A carga dinâmica é a mesma adotada anteriormente, com módulo igual a $f_0 = 100 \text{ N}$ com frequência $\Omega = \omega_1$ e está posicionada no vão central ($x_f = L/2$), enquanto os AMSs têm as seguintes posições: o AMS 1 está na posição $x_{a,1} = L/2$, o AMS 2 se encontra em $x_{a,2} = 0,475 \cdot L$ e o AMS 3 na posição $x_{a,2} = 0,525 \cdot L$. Tomando partido da simetria, os parâmetros dos AMSs 2 e 3 são iguais, ou seja, $k_{a,2} = k_{a,3}$ e $m_{a,2} = m_{a,3}$.

Figura 6.16 – Viga simplesmente apoiada com três amortecedores não amortecidos acoplados.



Fonte: Autor (2020)

Definem-se as variáveis de projeto como os parâmetros normalizados de massa e frequência dos AMSs dadas pela Tabela 6.18.

Tabela 6.18 – Descrição das variáveis de projeto.

Variável de Projeto	Parâmetro do AMS	Nomenclatura
x_1	Relação de Massa do AMS 1	μ_1
x_2	Relação de Massa dos AMSs 2 e 3	$\mu_2 = \mu_3$
x_3	Relação de Frequência do AMS 1	f_1
x_4	Relação de Frequência dos AMSs 2 e 3	$f_2 = f_3$

A Figura 6.17 apresenta a resposta da viga metálica sem os AMSs e as respostas obtidas ao considerar três AMSs acoplados sob a restrição mecânica do deslocamento dinâmico total e as restrições das derivadas.

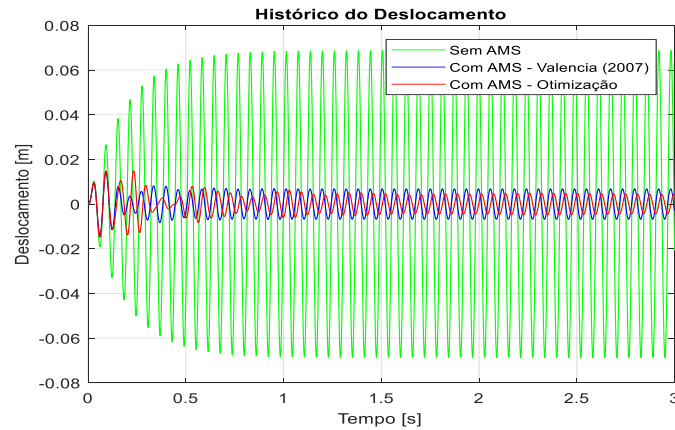
É possível também plotar a resposta estacionária da viga em função da relação de frequência da força de excitação e frequência natural. A resposta da viga em função da frequência é apresentada pela Figura 6.18.

A Tabela 6.19 exhibe os valores ótimos das variáveis de projeto encontrados pelo algoritmo de otimização, enquanto a Tabela 6.20 apresenta os valores máximos dos deslocamentos totais e estacionários no histórico de tempo analisado.

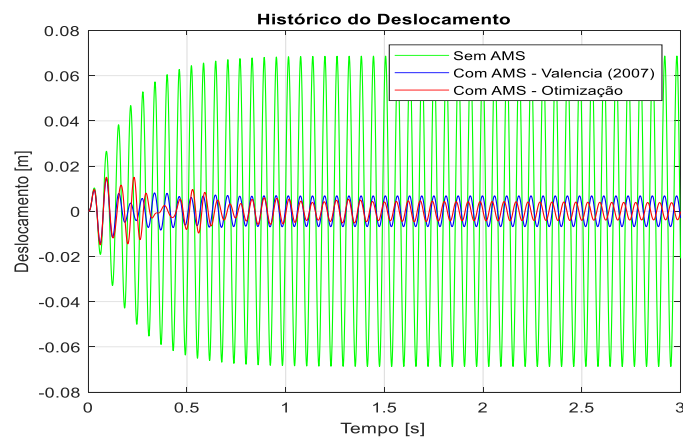
Na Figura 6.19 é possível analisar a evolução das variáveis de projeto a máxima restrição calculada, bem como o valor da função objetivo durante as iterações no processo de otimização.

Ao adicionar a restrição h_1 , tem-se que o algoritmo de otimização não convergiu, pois excedeu o número de cálculo da função objetivo (configurado para 3.000). A máxima restrição calculada apresentou um valor de $3,5 \cdot 10^{-5}$.

Figura 6.17 – Histórico do deslocamento para a viga metálica (com e sem três AMSs não amortecidos acoplados) sob (a) restrição g_1 e (b) restrições g_1, g_2 .



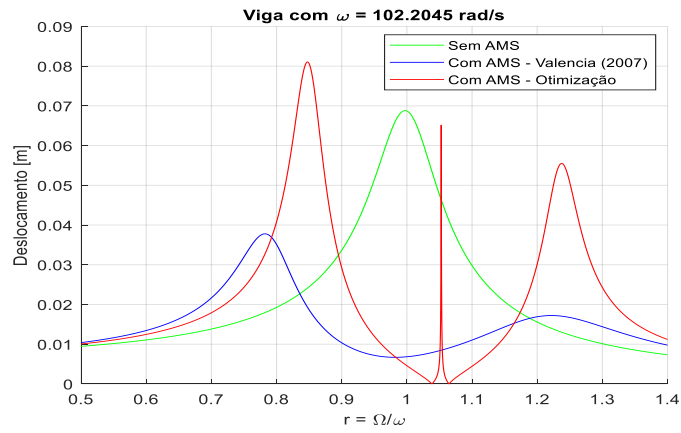
(a)



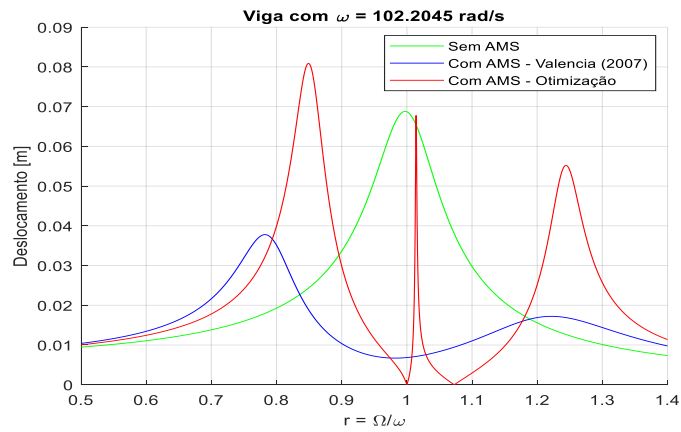
(b)

Fonte: Autor (2020)

Figura 6.18 – Deslocamento estacionário da viga com em função da frequência normalizada (com e sem três AMSs não amortecidos acoplados) sob (a) restrição g_1 e (b) restrições g_1, g_2



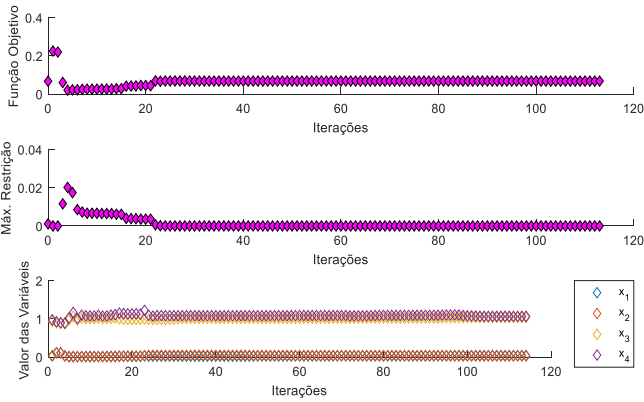
(a)



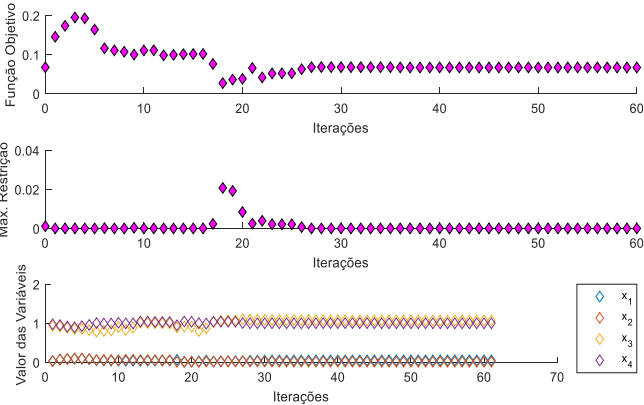
(b)

Fonte: Autor (2020)

Figura 6.19 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a viga metálica com três AMSs não amortecidos acoplados sob (a) restrição g_1 e (b) restrições g_1, g_2 .



(a)



(b)

Fonte: Autor (2020)

Tabela 6.19 – Variáveis de projeto otimizadas para três AMSs não amortecidos acoplados sob as restrições g_1 e g_2 .

Variável de Projeto Otimizada	Nomenclatura	Otimização	
		g_1	g_1 e g_2
x_1^*	μ_1	0,0380	0,0524
x_2^*	$\mu_2 = \mu_3$	0,0298	0,0146
x_3^*	f_1	1,038	1,072
x_4^*	$f_2 = f_3$	1,064	1,000
Tempo de Processamento		1356,0 s	838,0 s

Tabela 6.20 – Deslocamentos máximos da viga com três AMSs não amortecidos acoplados as restrições g_1 e g_2 .

Resposta Estrutural	Sem AMS	Valencia (2007)	Otimização	
			g_1	g_1 e g_2
Deslocamento Total [m]	0,06871	0,0151	0,01496	0,01508
Deslocamento Estacionário [m]	0,06871	0,006836	0,004573	0,003946

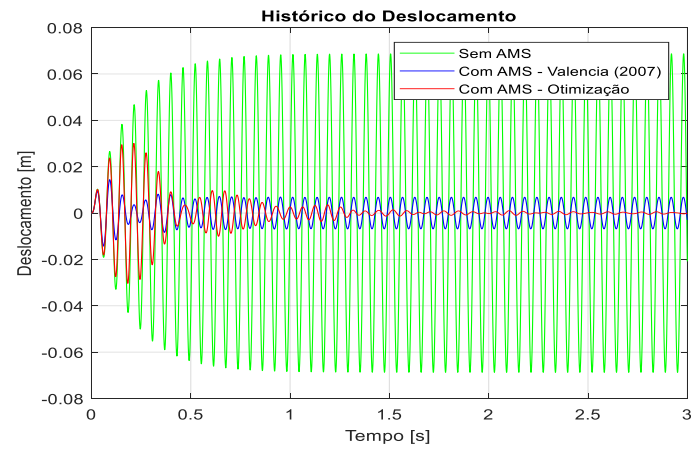
A Figura 6.20 apresenta a resposta da viga metálica sem os AMSs assim como as respostas obtidas ao considerar três AMSs acoplados sob a restrição mecânica do deslocamento dinâmico estacionário e as restrições das derivadas.

É possível também plotar a resposta estacionária da viga em função da relação de frequência da força de excitação e frequência natural. A resposta da viga em função da frequência é apresentada pela Figura 6.21.

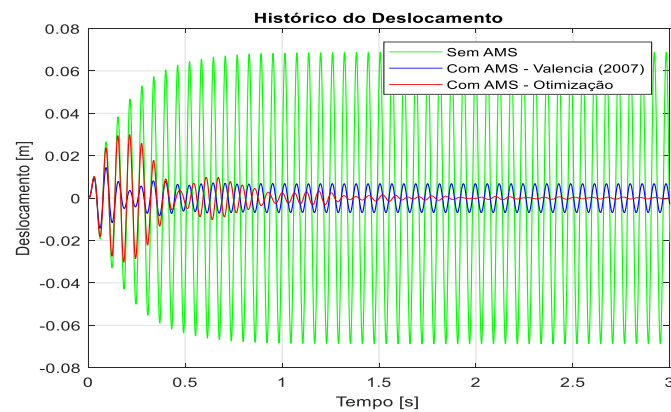
A Tabela 6.21 exhibe os valores ótimos das variáveis de projeto encontrados pelo algoritmo de otimização, enquanto a Tabela 6.22 apresenta os valores máximos dos deslocamentos totais e estacionários no histórico de tempo analisado.

Na Figura 6.22 é possível analisar a evolução das variáveis de projeto a máxima restrição calculada, bem como o valor da função objetivo durante as iterações no processo de otimização.

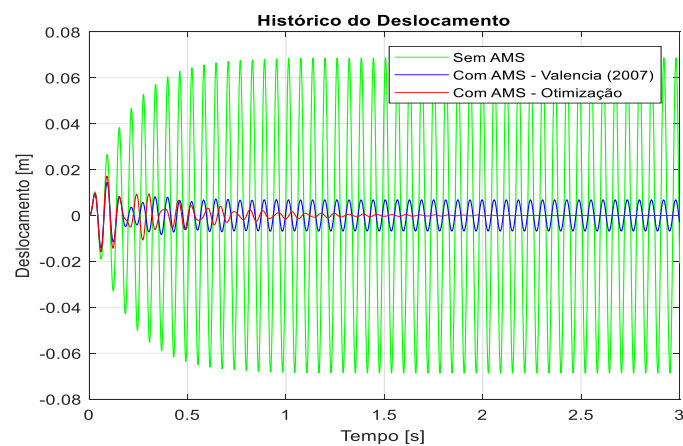
Figura 6.20 – Histórico do deslocamento para a viga metálica (com e sem três AMSs não amortecidos acoplados) sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1 .



(a)



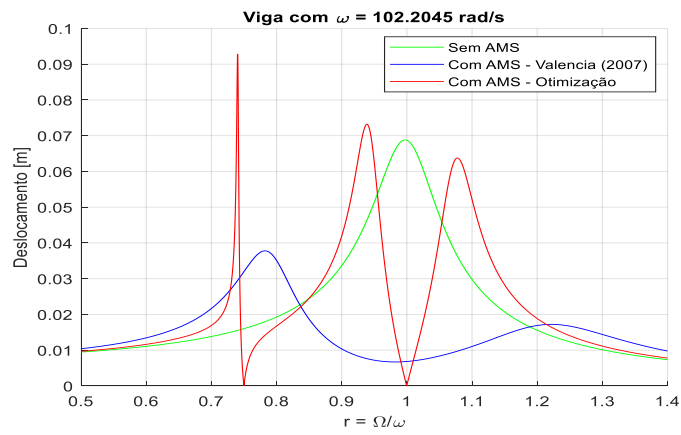
(b)



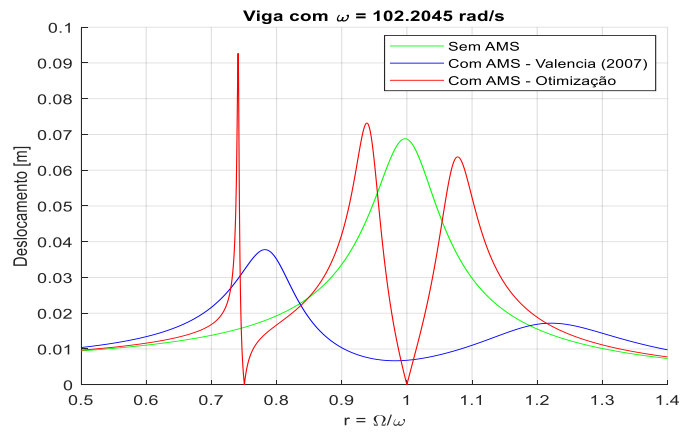
(c)

Fonte: Autor (2020)

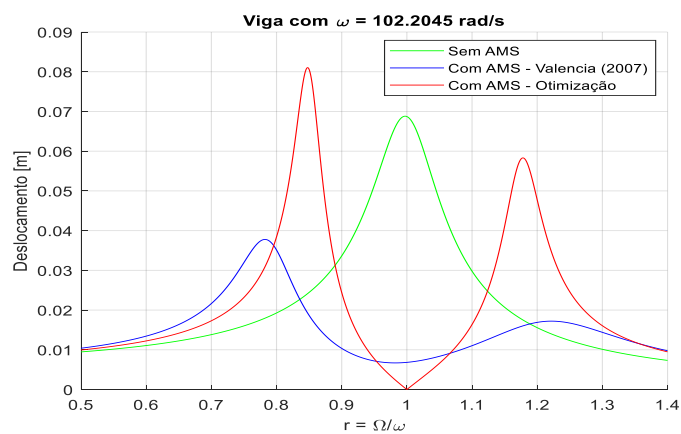
Figura 6.21 – Deslocamento estacionário da viga com em função da frequência normalizada (com e sem três AMSs não amortecidos acoplados) sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1 .



(a)



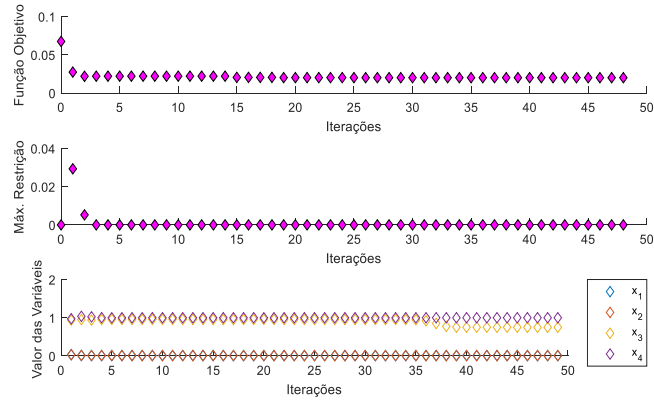
(b)



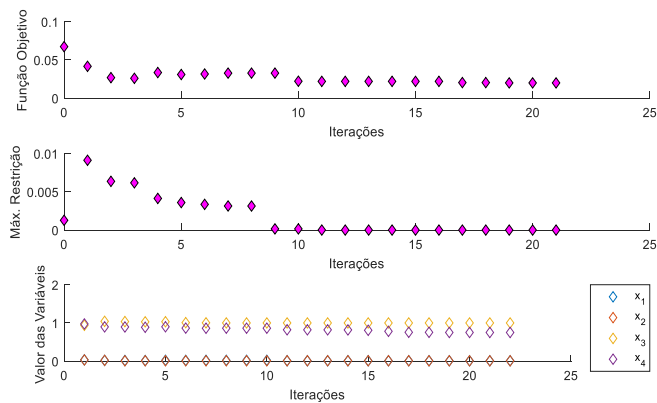
(c)

Fonte: Autor (2020)

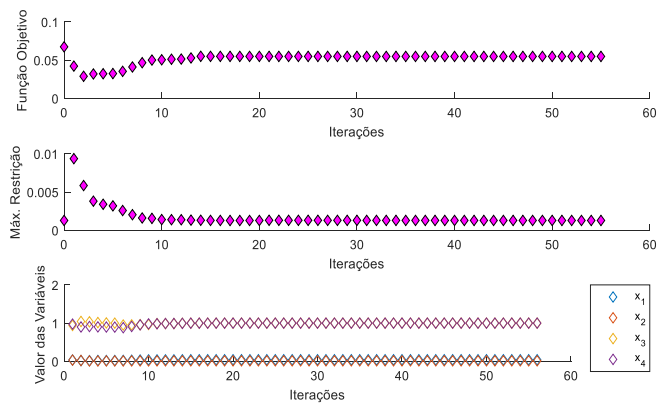
Figura 6.22 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a viga metálica com três AMSs não amortecidos acoplados sob (a) restrição g_3 , (b) restrições g_3 e h_1 e (c) restrições g_2 , g_3 e h_1 .



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autor (2020)

Tabela 6.21 – Variáveis de projeto otimizadas para três AMSs não amortecidos acoplados sob as restrições g_2 , g_3 e h_1 .

Variável de Projeto Otimizada	Nomenclatura	Otimização		
		g_3	g_3 e h_1	g_2, g_3 e h_1
x_1^*	μ_1	0,01	0,01	0,0411
x_2^*	$\mu_2 = \mu_3$	0,01	0,01	0,0137
x_3^*	f_1	0,7499	1,000	1,000
x_4^*	$f_2 = f_3$	0,9997	0,7507	1,000
Tempo de Processamento		13,0 s	9,0 s	13,0 s

Tabela 6.22 – Deslocamentos máximos da viga com três AMSs não amortecidos acoplados sob as restrições g_2 , g_3 e h_1 .

Resposta Estrutural	Sem AMS	Valencia (2007)	Otimização		
			g_3	g_3 e h_1	g_2, g_3 e h_1
Deslocamento Total [m]	0,06871	0,0151	0,03006	0,02996	0,01723
Deslocamento Estacionário [m]	0,06871	0,006836	0,0005654	0,0004874	0,000002

Com as Equações (4.36) a (4.39), calculam-se os parâmetros dos amortecedores da massa sintonizados para cada uma das análises realizadas anteriormente. A Tabela 6.23 apresenta um resumo dos parâmetros obtidos para todas as simulações realizadas nesta subseção.

Tabela 6.23 – Resumo dos parâmetros dos três AMSs não amortecidos acoplados na viga metálica.

	Parâmetro	Valencia (2007)	Otimização				
			Restrições				
			g_1	g_1 e g_2	g_3	g_3 e h_1	g_2, g_3 e h_1
AMS 1	m_a (kg)	0,0938	0,1020	0,1407	0,0268	0,0268	0,1103
	k_a (N/m)	863,61	1148,06	1688,53	157,69	280,41	1152,47
	ξ_a	0,1089	-	-	-	-	-
AMS 2 e AMS 3	m_a (kg)	0,0871	0,0400	0,0196	0,1342	0,0134	0,0184
	k_a (N/m)	863,61	473,00	204,70	1401,19	79,01	192,08
	ξ_a	0,0969 / 0,0853	-	-	-	-	-

Da Tabela 6.17, é possível notar que em quase todos os casos, a massa total obtida foi menor que a encontrada pela literatura de referência.

A massa total obtida apenas com a restrição g_1 e g_2 é a que mais se aproximou com a referência. Vale ressaltar que a resposta em função da frequência não é tão suave fora do ponto de interesse se comparado com a referência, porém satisfatória dentro do ponto de interesse ($r = 1$)

A menor massa obtida é para o caso em que a restrição g_3 e h_1 está atuando; porém é possível perceber por meio da resposta em função da frequência que a faixa de operação é bem reduzida no ponto de interesse, e possui picos fora do ponto de interesse; a resposta no domínio do tempo é satisfatória apenas no regime estacionário, ou seja, nos primeiros segundos a viga não atende o requisito mínimo estabelecido (como esperado).

Observa-se que as curvas de resposta para este caso não são tão suaves, mesmo quando se empregam as restrições das derivadas. Isso se dá pela ausência do amortecimento viscoso.

6.3.Placa com Carga Concentrada

Nos estudos numéricos abordados nesta seção, a estrutura é modelada com o uso de funções analíticas. É utilizada a formulação já apresentada no Capítulo 3 e na Seção 4.3.3. Opta-se por essa abordagem visto que placas são elementos que exigem um maior grau de discretização, o que onera o processamento das análises. Assim, é realizada uma decomposição modal da placa, em que a estrutura é representada por sua equação modal reduzida, e os AMSs são acoplados na mesma.

O estudo numérico realizado nesta seção é validado e comparado a um trabalho desenvolvido por Santos (2009), em que o autor realiza um estudo paramétrico sobre AMSs acoplados em lajes.

No presente trabalho o fluxo de análise é realizado da seguinte forma:

- a) As equações da placa determinadas nos Capítulos 3 e 4 são implementadas no algoritmo;
- b) Da análise modal apresentada no Capítulo 3, adota-se a função modal para redução do sistema;
- c) O AMS é acoplado em um sistema modal reduzido da placa (Ver Seção 4.3.3);
- d) A placa com o AMS é calculada com os parâmetros do trabalho de Santos (2009);

- e) A placa com o AMS é calculada novamente com o algoritmo de otimização, em que as variáveis de projeto são as características do AMS (rigidez, massa e amortecimento);
- f) Os resultados obtidos nos itens “d” e “e” são comparados com a resposta da placa sem o sistema de controle.

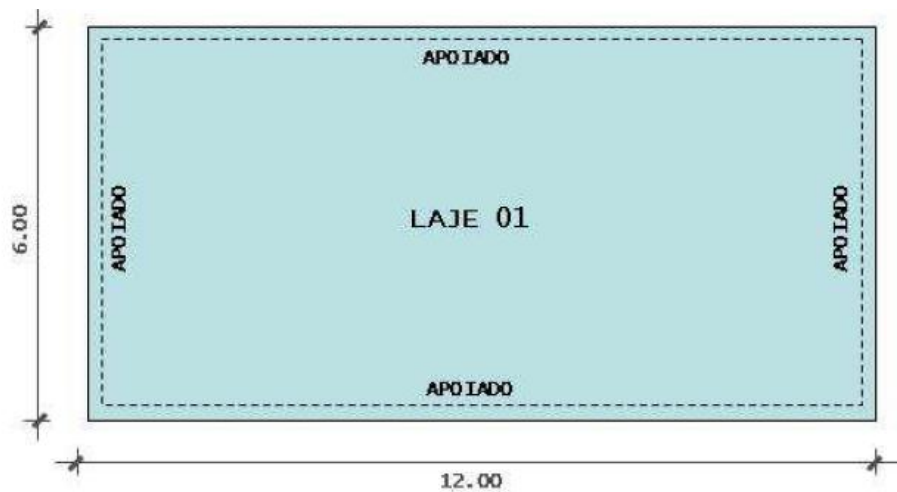
6.3.1. Descrição da Estrutura e Modelo de Análise

A estrutura adotada pela literatura de referência consiste em uma placa, simplesmente apoiado em seus quatro bordos. A Figura 6.23 ilustra a placa descrita e suas características estão na Tabela 6.24.

Tabela 6.24 – Características da placa.

Características	Nomenclatura	Unidade de Medida	Valor
Espessura	h	m	0,07
Densidade do Concreto	ρ	kg/m^3	2500
Módulo de Elasticidade	E	N/m^2	$29 \cdot 10^9$
Coefficiente de Poisson	ν	-	0,3
Taxa de Amortecimento	ξ	%	9,2

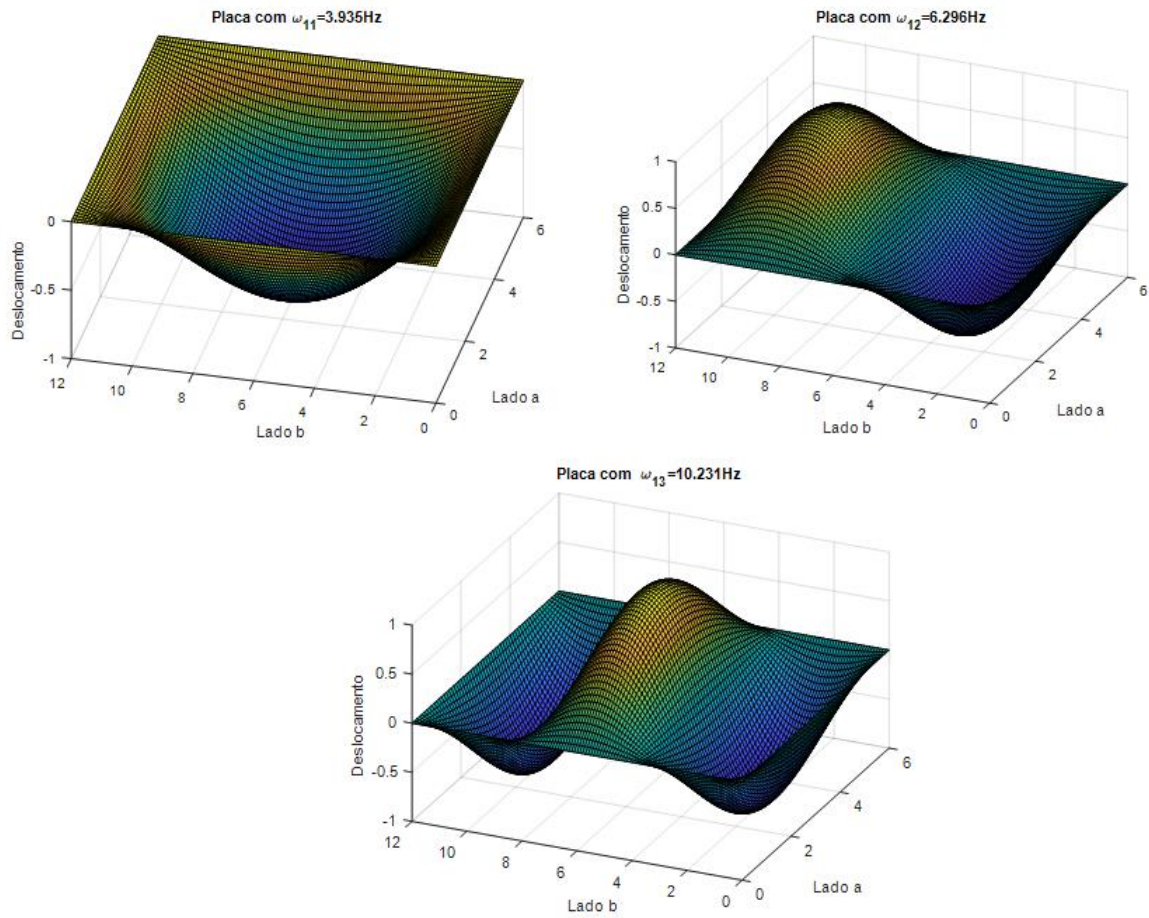
Figura 6.23 – Geometria e condição de contorno da placa.



Fonte: Santos (2009)

O modelo estrutural idealizado consiste em uma placa simplesmente apoiada em seus quatro bordos. Ao realizar a análise modal da placa, pode-se obter as características dinâmicas, mostradas na Figura 6.24 para as três primeiras frequências naturais e suas formas modais.

Figura 6.24 – Modos e frequências naturais da placa.



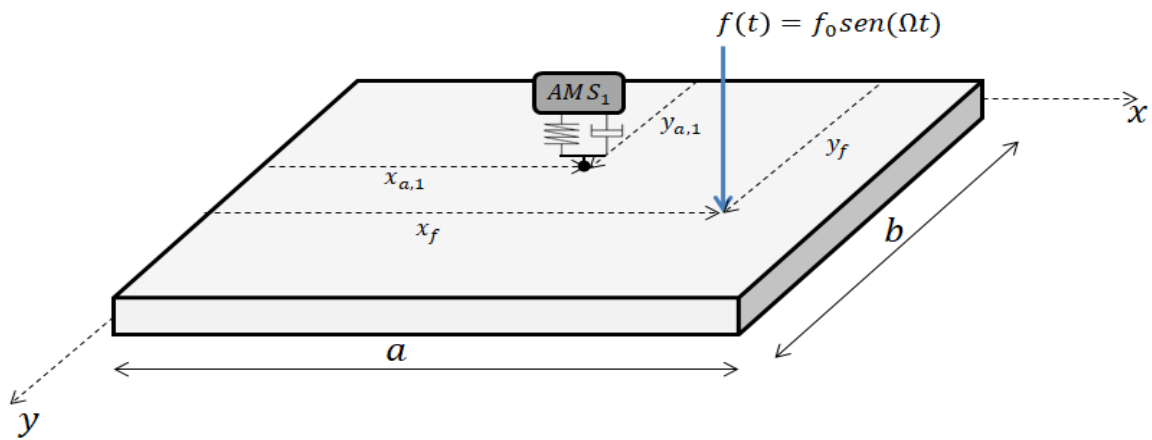
Fonte: Autor (2020)

Nesta seção não são realizadas as análises de otimização com a restrição do deslocamento estacionário, visto que, ao se atender ao deslocamento total no domínio do tempo, o estacionário é automaticamente atendido. Estas análises foram realizadas para o caso de vigas, com a finalidade de entender melhor o processo e avaliar a eficiência para casos em que o transiente pode ser desconsiderado.

6.3.2. Utilização de Um AMS Acoplado

Uma representação esquemática da placa com o AMS acoplado pode ser vista na Figura 6.25. A carga dinâmica tem módulo igual a $f_0 = 1000\text{ N}$ com frequência $\Omega = \omega_{11}$ e está posicionada no vão central ($x_f = a/2$ e $y_f = b/2$), assim como o AMS ($x_{a,1} = a/2$ e $y_{a,1} = b/2$).

Figura 6.25 – Placa com carga concentrada e AMS acoplado.



Fonte: Autor (2020)

Para a abordagem do problema via otimização, definem-se as variáveis de projeto como os parâmetros normalizados de massa e frequência do AMS e sua taxa de amortecimento dadas pela Tabela 6.6.

Tabela 6.25 – Descrição das variáveis de projeto.

Variável de Projeto	Parâmetro do AMS	Nomenclatura
x_1	Relação de Massa	μ
x_2	Relação de Frequência	f
x_3	Taxa de Amortecimento	ξ_a

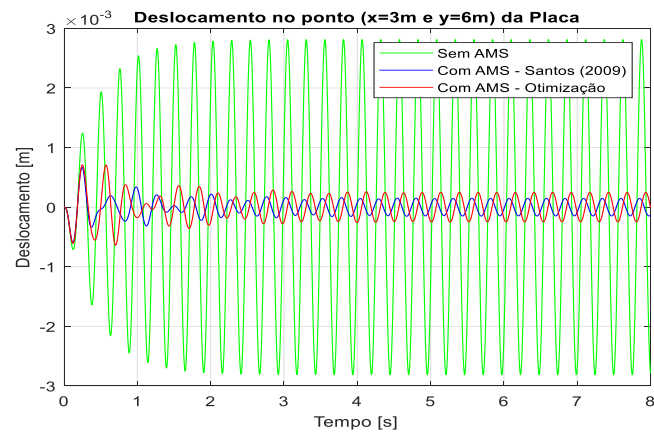
A Figura 6.26 apresenta a resposta da placa em concreto sem o AMS e as respostas obtidas ao considerar um AMS acoplado sob a restrição do deslocamento dinâmico total e as restrições das derivadas.

É possível também plotar a resposta estacionária da placa em função da relação de frequência da força de excitação e frequência natural. A resposta da placa em função da frequência é apresentada pela Figura 6.27.

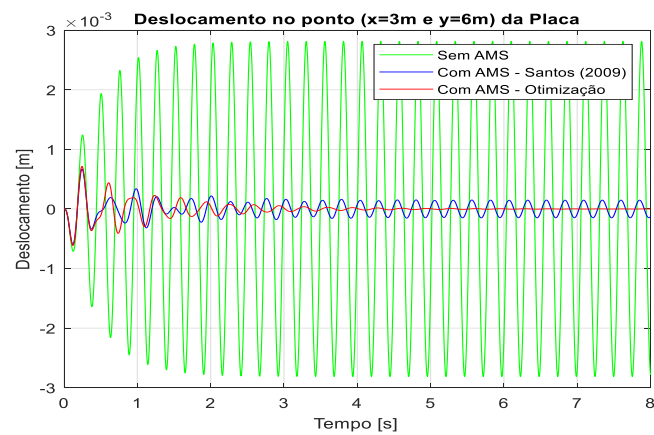
A Tabela 6.26 exhibe os valores ótimos das variáveis de projeto encontrados pelo algoritmo de otimização, enquanto a Tabela 6.27 apresenta os valores máximos dos deslocamentos totais e estacionários no histórico de tempo analisado.

Na Figura 6.28 é possível analisar a evolução das variáveis de projeto a máxima restrição calculada, bem como o valor da função objetivo durante as iterações no processo de otimização.

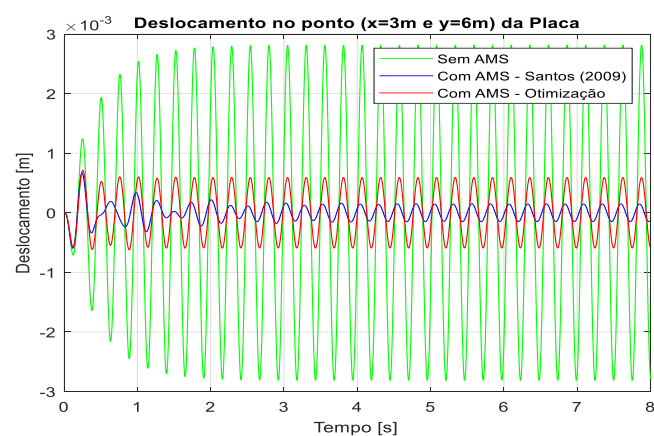
Figura 6.26 – Histórico do deslocamento para a placa em concreto (com e sem um AMS acoplado) sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1, g_2 e h_1 .



(a)



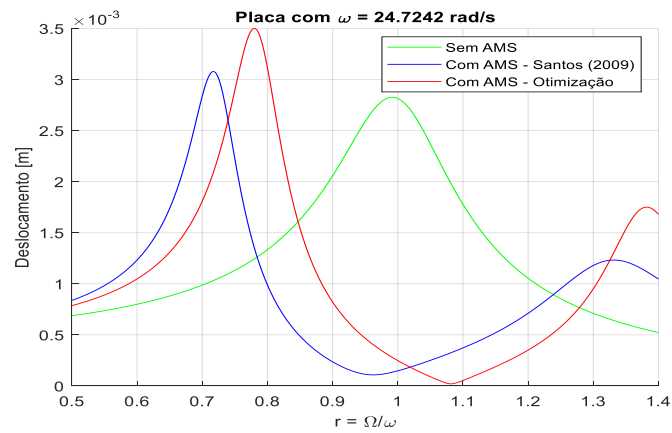
(b)



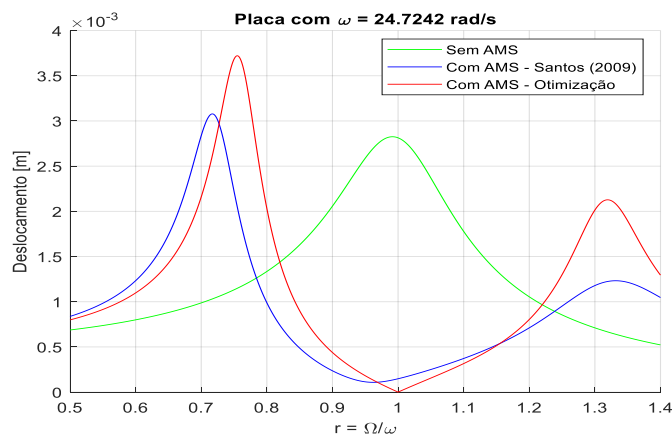
(c)

Fonte: Autor (2020)

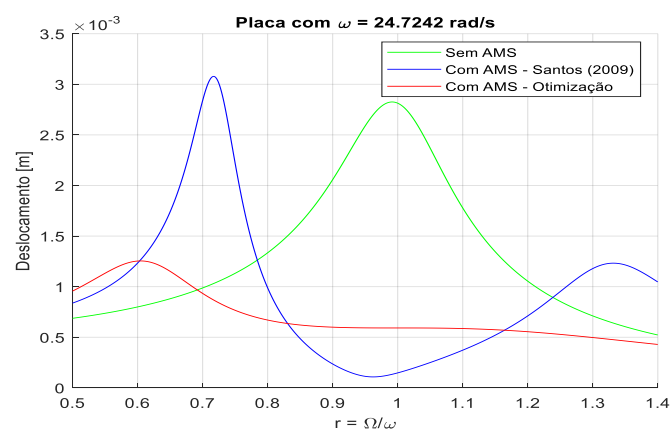
Figura 6.27 – Deslocamento estacionário da placa em função da frequência normalizada (com e sem um AMS acoplado) sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1 .



(a)



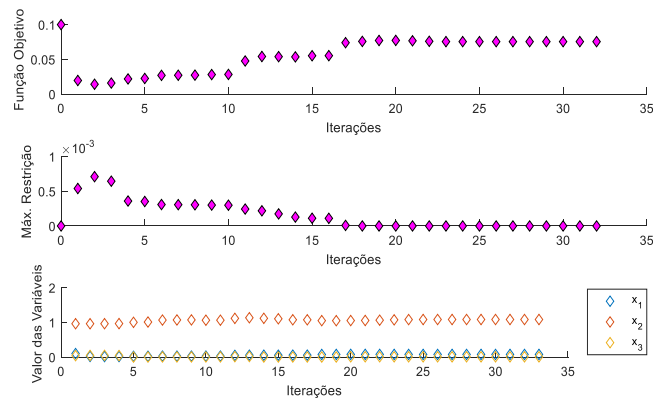
(b)



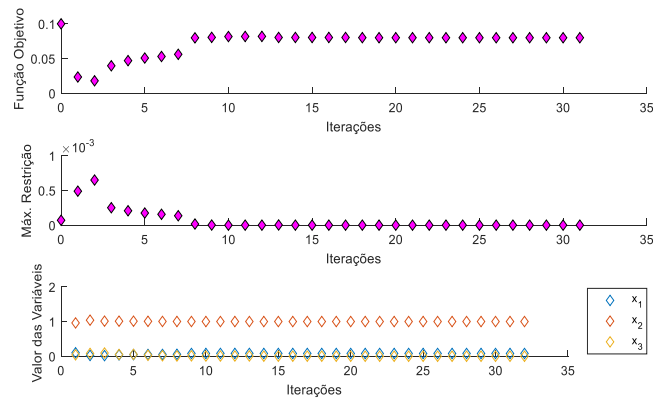
(c)

Fonte: Autor (2020)

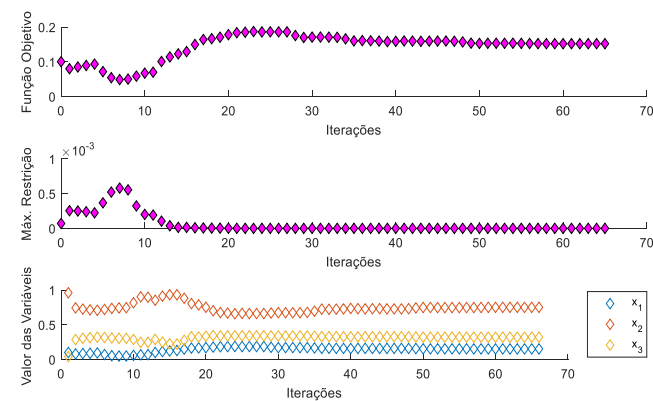
Figura 6.28 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a placa em concreto com um AMS acoplado sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1 .



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autor (2020)

Tabela 6.26 – Variáveis de projeto otimizadas para um AMS acoplado sob as restrições g_1 , g_2 e h_1

Variável de Projeto Otimizada	Nomenclatura	Otimização		
		g_1	g_1 e h_1	g_1, g_2 e h_1
x_1^*	μ	0,0755	0,080	0,1520
x_2^*	f	1,0816	1,000	0,7504
x_3^*	ξ_a	0,0069	0,0001	0,3209
Tempo de Processamento		27 s	20 s	33 s

Tabela 6.27 – Deslocamentos máximos da placa com um AMS acoplado sob as restrições g_1 , g_2 e h_1

Resposta Estrutural	Sem AMS	Santos (2009)	Otimização		
			g_1	g_1 e h_1	g_1, g_2 e h_1
Deslocamento Total [m]	0,0028	0,00071	0,00071	0,00071	0,00071
Deslocamento Estacionário [m]	0,0028	0,0001481	0,0002481	0,000000012	0,0005919

Com as Equações (4.36) a (4.39), calculam-se os parâmetros dos amortecedores da massa sintonizados para cada uma das análises realizadas anteriormente. A Tabela 6.28 apresenta um resumo dos parâmetros obtidos para todas as simulações realizadas nesta subseção.

Tabela 6.28 – Resumo dos parâmetros de um AMS acoplado na placa em concreto.

Parâmetro	Santos (2009)	Otimização		
		Restrições		
		g_1	g_1 e h_1	g_1, g_2 e h_1
m_a (kg)	1260,0000	951,30	1008,0000	1915,2000
k_a (N/m)	709835,16	680291,98	616176,35	659241,11
ξ_a	0,0400	0,0069	0,0001	0,3209

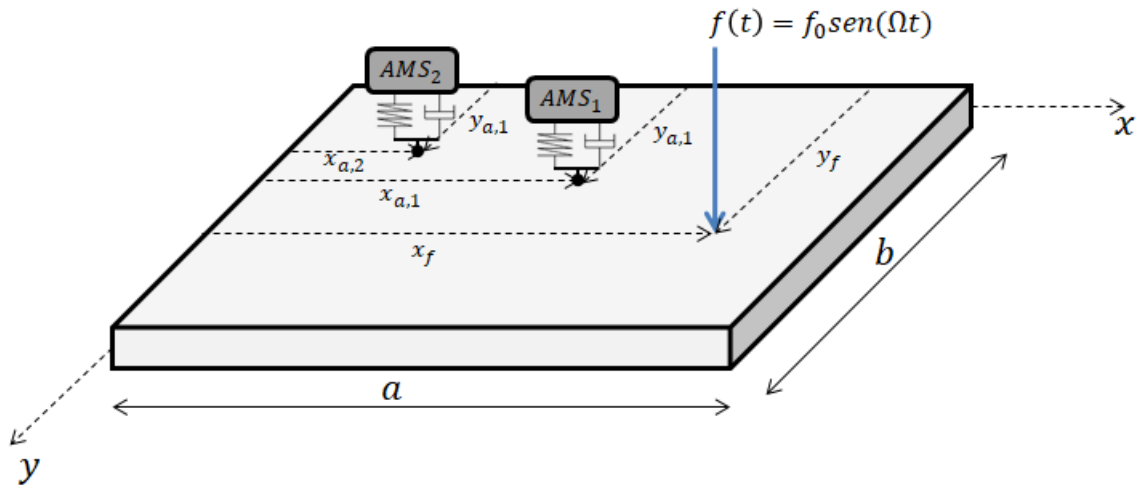
Pode-se perceber que, ao utilizar apenas a restrição g_1 , obtém-se o menor valor de massa do AMS que atende a resposta no domínio do tempo e com uma certa suavidade na resposta em função da frequência, alcançando uma faixa de operação $0,89 \leq r \leq 1,29$. A resposta obtida com a otimização sob as restrições g_1 , g_2 e h_1 possui uma suavidade maior, com faixa de operação $0,71 \leq r \leq 1,40$, porém a taxa de amortecimento é bem elevada, além de possuir uma massa do AMS também maior que a obtida por Santos (2009). Ao utilizar as restrições g_1 e h_1 , o deslocamento dinâmico da viga é quase nulo no regime estacionário, e satisfatório no regime transiente; para esse caso a massa, a rigidez e a taxa de amortecimento

são menores que a obtida por Santos (2009) e alcançando uma faixa de operação $0,86 \leq r \leq 1,21$, o que torna a melhor opção para o caso analisado.

6.3.3. Utilização de Dois AMSs Acoplados

Uma representação esquemática da placa com dois AMSs acoplados pode ser vista na Figura 6.29. A carga dinâmica tem módulo igual a $f_0 = 1000 \text{ N}$ com frequência $\Omega = \omega_{11}$ e está posicionada no vão central ($x_f = a/2$ e $y_f = b/2$). Um AMS está acoplado na posição $x_{a,1} = a/2 = 3 \text{ m}$ e $y_{a,1} = 5,2 \text{ m}$, enquanto o segundo AMS está acoplado na posição $x_{a,2} = a/2 = 3 \text{ m}$ e $y_{a,2} = 5,8 \text{ m}$.

Figura 6.29 – Placa com carga concentrada e dois AMSs acoplados.



Fonte: Autor (2020)

Para a abordagem do problema via otimização, definem-se as variáveis de projeto como os parâmetros normalizados de massa e frequência do AMS e sua taxa de amortecimento dadas pela Tabela 6.29.

Tabela 6.29 – Descrição das variáveis de projeto.

Variável de Projeto	Parâmetro do AMS	Nomenclatura
x_1	Relação de Massa do AMS1	μ_1
x_2	Relação de Massa do AMS2	μ_2
x_3	Relação de Frequência do AMS1	f_1
x_4	Relação de Frequência do AMS2	f_2
x_5	Taxa de Amortecimento do AMS1	$\xi_{a,1}$
x_6	Taxa de Amortecimento do AMS2	$\xi_{a,2}$

Assim, as simulações nesta seção visam apenas verificar se existe alguma vantagem na utilização de mais de um amortecedor na placa em termos de resposta quando comparados com o estudo realizado para um único amortecedor.

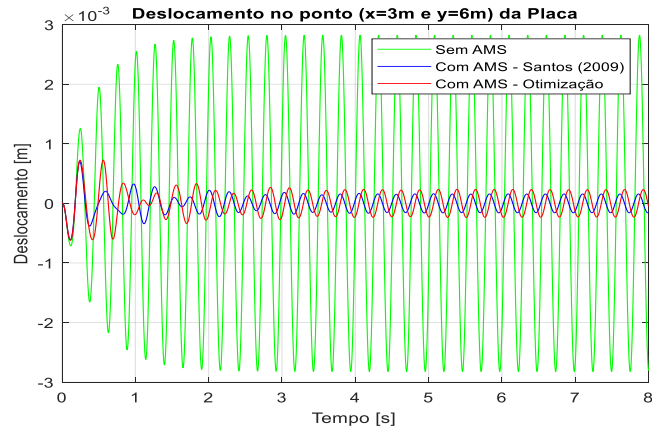
A Figura 6.30 apresenta a resposta da placa em concreto sem os AMSs e as respostas obtidas ao considerar dois AMSs acoplados sob a restrição do deslocamento dinâmico total e as restrições das derivadas.

É possível também plotar a resposta estacionária da placa em função da relação de frequência da força de excitação e frequência natural. A resposta da placa em função da frequência é apresentada pela Figura 6.31.

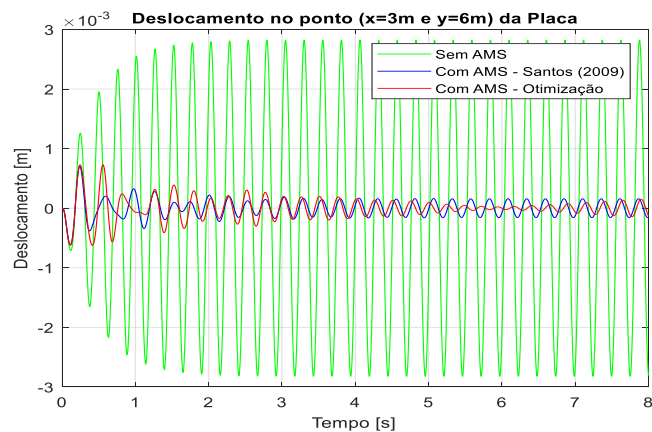
A Tabela 6.30 exhibe os valores ótimos das variáveis de projeto encontrados pelo algoritmo de otimização, enquanto a Tabela 6.31 apresenta os valores máximos dos deslocamentos totais e estacionários no histórico de tempo analisado.

Na Figura 6.32 é possível analisar a evolução das variáveis de projeto a máxima restrição calculada, bem como o valor da função objetivo durante as iterações no processo de otimização.

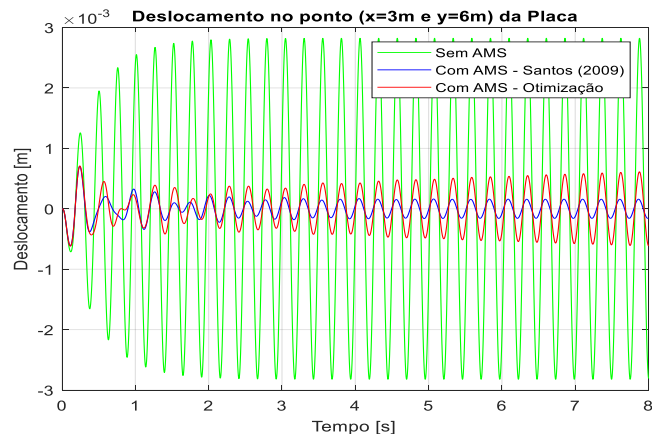
Figura 6.30 – Histórico do deslocamento para a placa em concreto (com e sem dois AMSs acoplados) sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1 .



(a)



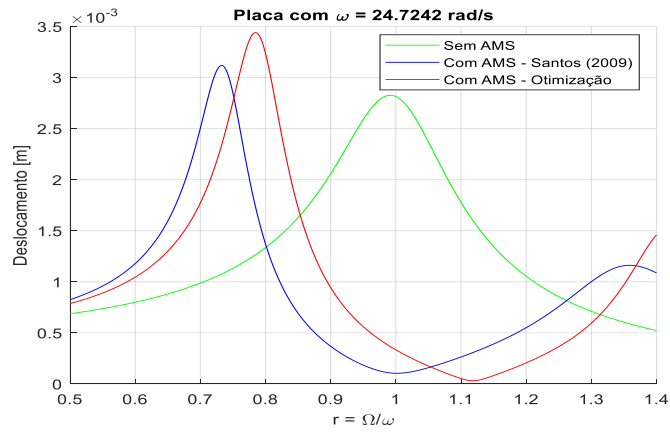
(b)



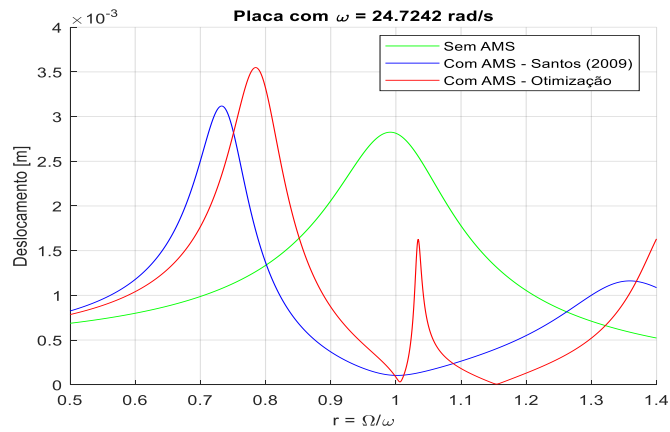
(c)

Fonte: Autor (2020)

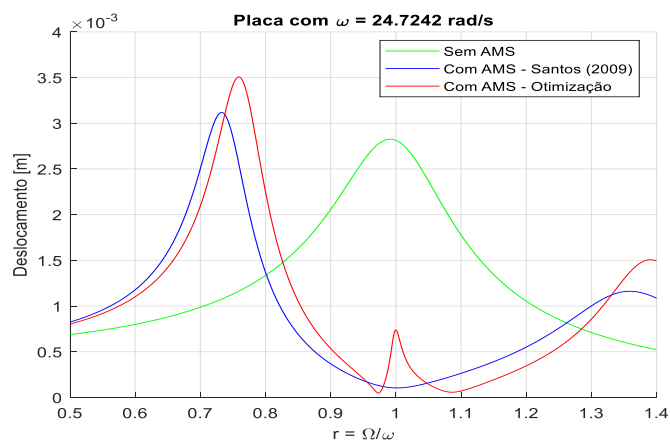
Figura 6.31 – Deslocamento estacionário da placa em função da frequência normalizada (com e sem dois AMSs acoplados) sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1 .



(a)



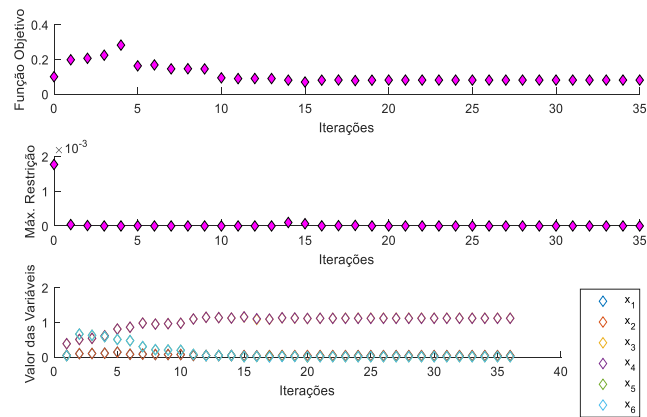
(b)



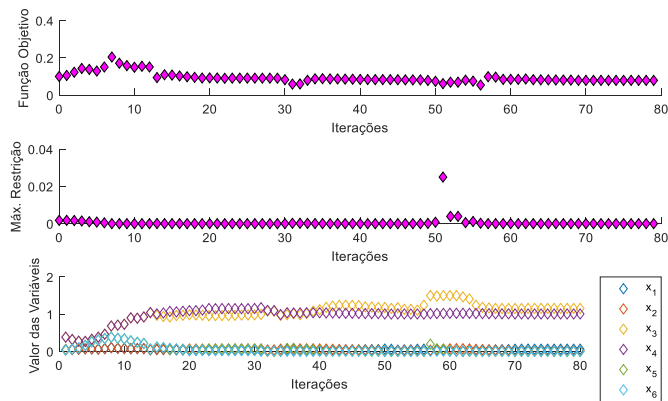
(c)

Fonte: Autor (2020)

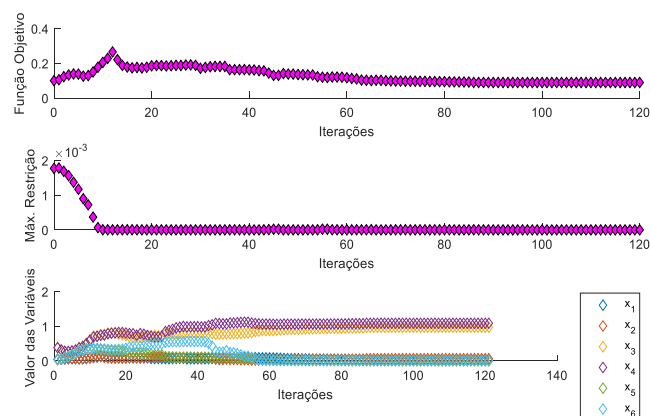
Figura 6.32 – Evolução da função objetivo, máxima restrição calculada e variáveis de projeto para a placa em concreto com dois AMSs acoplados sob (a) restrição g_1 , (b) restrições g_1 e h_1 e (c) restrições g_1 , g_2 e h_1 .



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autor (2020)

Tabela 6.30 – Variáveis de projeto otimizadas para dois AMSs acoplados sob as restrições g_1 , g_2 e h_1 .

Variável de Projeto Otimizada	Nomenclatura	g_1	g_1 e h_1	g_1, g_2 e h_1
x_1^*	μ_1	0,0398	0,0611	0,0225
x_2^*	μ_2	0,0407	0,0179	0,0666
x_3^*	f_1	1,1203	1,1545	0,9736
x_4^*	f_2	1,1164	1,0064	1,0855
x_5^*	$\xi_{a,1}$	0,0115	0,0022	0,0038
x_6^*	$\xi_{a,2}$	0,0111	0,0021	0,0168
Tempo de processamento		208 s	441 s	568 s

Tabela 6.31 – Deslocamentos máximos da placa com dois AMSs acoplados sob as restrições g_1 , g_2 e h_1 .

Resposta Estrutural	Sem AMS	Santos (2009)	Otimização		
			g_1	g_1 e h_1	g_1, g_2 e h_1
Deslocamento Total [m]	0,0028	0,00073	0,00073	0,00073	0,00073
Deslocamento Estacionário [m]	0,0028	0,0001481	0,000234	0,0001503	0,00073

Com as Equações (4.36) a (4.39), calculam-se os parâmetros dos amortecedores da massa sintonizados para cada uma das análises realizadas anteriormente. A Tabela 6.32 apresenta um resumo dos parâmetros obtidos para todas as simulações realizadas nesta subseção.

Tabela 6.32 – Resumo dos parâmetros de dois AMSs acoplados na placa em concreto.

Parâmetro	Santos (2009)	Otimização		
		Restrições		
		g_1	g_1 e h_1	g_1, g_2 e h_1
m_a (kg)	630,00	501,48	769,8600	283,5000
AMS 1 k_a (N/m)	385111,50	384739,51	627254,99	164270,16
ξ_a	0,0400	0,0115	0,0022	0,0038
m_a (kg)	630,00	512,82	225,5400	839,1600
AMS 2 k_a (N/m)	385111,50	390705,12	139639,84	604434,06
ξ_a	0,0400	0,0111	0,0021	0,0168

Nota-se que, em todos os casos, a massa total encontrada pelo processo de otimização é menor que a referência. O deslocamento estacionário sob a restrição g_1 , termos práticos, possui uma faixa de operação ($0,91 \leq r \leq 1,34$) razoavelmente boa; enquanto a resposta

obtida sob as restrições g_1 e h_1 não apresenta uma boa suavidade na curva de resposta. Para este caso analisado, a resposta obtida sob as restrições g_1 , g_2 e h_1 é a mais satisfatória, pois, além de atender o deslocamento dinâmico no domínio do tempo, apresenta certa suavidade na curva de resposta em função da frequência alcançando uma faixa de operação similar com o caso em que apenas g_1 está atuando ($0,88 \leq r \leq 1,30$), porém com uma folga melhor para o caso de baixa frequência; além do que a massa e a taxa de amortecimento não são elevadas.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao considerar as consequências negativas que podem ocorrer em estruturas sob cargas dinâmicas, é fundamental que haja um estudo no sentido de mitigar esses problemas, seja na etapa de projeto ou em estruturas existentes. Este trabalho foi motivado em desenvolver um amparo teórico para reduzir e controlar vibrações em estruturas com a utilização de sistemas mecânicos acoplados a estruturas.

Pôde-se perceber que a utilização dos amortecedores é um recurso bastante eficiente e já utilizado em muitos casos descritos neste trabalho. Porém, os parâmetros de dimensionamento do amortecedor são sensíveis e devem ser escolhidos de forma correta para atingir o objetivo com segurança e economia, uma vez que foi visto que a variação pequena de forma equivocada desses parâmetros pode incorrer até em uma piora no desempenho do sistema estrutural original. O suporte de técnicas de otimização entrou neste trabalho como um recurso valioso para o engenheiro poder especificar o amortecedor de forma segura, eficiente e econômica.

Nos exemplos numéricos apresentados neste trabalho foi demonstrada a eficiência dos amortecedores com a inclusão de uma pequena massa (comparada com a massa total da estrutura) adicional, juntamente com especificação de molas e amortecedores. Ao utilizar as técnicas de otimização, foram encontrados parâmetros também que reduzem a resposta da estrutura, porém foi visto que se deve incluir outras restrições para garantir uma abrangência maior no desempenho dos amortecedores.

No estudo numérico voltado para vigas, o emprego de AMSs não amortecidos viscosos foi tratado com a finalidade de obter uma resposta favorável ao dispensar o dispositivo viscoelástico; esta decisão foi tomada baseada em trabalho como os de Wang et al. (2019) e Werkle, Butz e Tatar (2013) que apontam sobre problemas relacionados à perda de eficiência dos AMSs por falta de sintonização. Estes problemas podem ocorrer devido a defeitos de fabricação do AMS, deterioração natural da estrutura e/ou do AMS, e mudança de utilização; outro problema está relacionado especificamente aos sistemas de amortecedores viscosos que são de difícil especificação e sensíveis à variação de temperatura.

Foi observado que a utilização de AMSs não amortecidos apresentou respostas satisfatórias no domínio do tempo, porém a curva de resposta em função da frequência foi mais sensível na vizinhança do ponto de interesse, em que apresentaram uma faixa de operação em torno de $0,93 \leq r \leq 1,03$. Com isso, em casos reais nos quais a força de

excitação tiver certa variabilidade, ao adotar os AMSs não amortecidos, pode ocorrer perda de eficiência, visto que não abrangem uma margem de frequência maior quando comparado com os casos anteriores. Indica-se, assim, a utilização dessa configuração só no caso em que a frequência da carga dinâmica seja altamente estável e conhecida.

Ao comparar a utilização de um AMS com três AMSs nas vigas metálicas, não foi observada uma redução significativa na massa total dos amortecedores, sendo assim, o emprego de mais de um AMS ficaria mais caro pois aumentaria o custo de fabricação. A não ser que haja algum tipo de limitação no local de instalação do AMS; caso ocorra, se justifica substituir um AMS com dimensões maiores por três AMS com dimensões menores e massas equivalentes com a finalidade de compatibilização com o local de instalação. Vale ressaltar que no estudo numérico foi utilizada uma carga harmônica fixada no vão central; a atuação de cargas aleatórias e em posições diversas pode justificar o emprego de vários AMSs para cobrir as diversas faixas de frequências.

Por se tratar de atenuadores passivos, os AMSs têm, por si só, uma limitação em atenuar grandes faixas de frequências; porém a utilização das restrições das derivadas se mostraram eficazes no processo de otimização para garantir não só o deslocamento necessário no domínio do tempo, como uma curva de resposta em função da frequência menos sensível no ponto de interesse, o que melhora a faixa de operação. Por exemplo, tomando a resposta da viga com um AMS acoplado submetido apenas à restrição mecânica do deslocamento dinâmico total, tem-se uma faixa de operação $0,94 \leq r \leq 1,16$, e quando se adicionam as restrições das derivadas g_2 e h_1 , essa faixa de operação aumenta para $0,92 \leq r \leq 1,40$.

Em alguns casos reais, o regime transiente é desprezível, por se perdurar em um curto espaço de tempo, por isso foram realizadas algumas simulações que utilizaram apenas o deslocamento estacionário como restrição do problema. Os resultados foram satisfatórios, para o presente estudo, visto que o deslocamento dinâmico estacionário foi limitado e o deslocamento no regime transiente se dissipava em frações de segundos. A vantagem desse método é que não há necessidade de realizar as integrações de Newmark em cada iteração no processo de otimização, que reduz significativamente o tempo de processamento das análises. Outra vantagem é que, por se tratar de controle de vibração apenas no regime estacionário, exige-se uma massa menor para os amortecedores, que influencia de maneira positiva no custo de fabricação. No entanto, a faixa de operação para essa situação reduz significativamente, ficando em torno de $0,98 \leq r \leq 1,02$.

Nos estudos numéricos voltados para placas, foram realizadas simulações similares aos das vigas; exceto a exclusão das restrições de deslocamento estacionário, pois ao utilizar a restrição de deslocamento total, atende-se automaticamente o regime estacionário.

No caso de placas, os amortecedores apresentaram eficiência igualmente satisfatória. Com a utilização de um AMS, em geral, a curva de resposta da placa se mostrou suave mesmo para o caso em que não foram utilizadas as restrições das derivadas. Com a utilização das restrições g_1 , g_2 e h_1 , a curva de resposta em função da frequência garantia uma faixa de operação relativamente alta, $0,71 \leq r \leq 1,40$, porém se exigia uma taxa de amortecimento muito elevada, onerando o AMS. Ao utilizar apenas um AMS, os parâmetros obtidos com a restrição g_1 e h_1 se mostraram os mais eficientes, pois atendeu ao deslocamento total, a curva de resposta em função da frequência apresentou comportamento suave com faixa de operação $0,88 \leq r \leq 1,21$, e exigiu massa e taxa de amortecimento com valores baixos.

Ao utilizar dois AMSs acoplados à placa, em geral foram obtidas respostas similares com um AMS; porém se nota uma certa vantagem quando se obtêm os parâmetros com o uso das restrições g_1 , g_2 e h_1 . A resposta total da placa se mostrou praticamente constante e limitado ao deslocamento limite, a curva de resposta em função da frequência atende exatamente no ponto de interesse o deslocamento limite, e no seu entorno apresenta suavidade elevada, com faixa de operação $0,88 \leq r \leq 1,30$, e os parâmetros obtidos apresentaram valores interessantes, visto que a massa e a taxa de amortecimento não são elevados se comparados com o caso para um único AMS.

7.1. Sugestões para Trabalhos Futuros

Algumas sugestões para continuidade deste trabalho são listadas a seguir:

- a) Considerar cargas dinâmicas aleatórias: com isso se pode justificar a utilização de múltiplos AMSs, adicionando, ainda, as suas posições como variáveis de projeto;
- b) Realizar as análises deste trabalho com o uso de outro tipo de atenuador passivo: para placas, atenuadores viscoelásticos são largamente utilizados como alternativa de sistema de controle, pois não necessita alteração na rigidez do sistema;
- c) Aplicar otimização baseada em confiabilidade: dessa forma consegue-se mitigar numericamente de forma eficaz os problemas de faixa de operação do AMS, ao incluir no modelo a variabilidade da estrutura e/ou carga dinâmica que causa a perda de eficiência;
- d) Aplicar otimização para controle de vibrações utilizando atenuadores ativos.

8. REFERÊNCIAS

- BATTISTA, R. C. **Redução e Controle de Vibrações em Estruturas (Notas de Aula)**. Rio de Janeiro, Brasil: PEC-COPPE/UFRJ, Nov de 1993.
- BATTISTA, R. C.; VARELA, W. D.; SANTOS, E. F.; CORREA, W. L. Controle de Vibrações Induzidas por Brinquedos e Pessoas em um Shopping Center. **ENGEVISTA**, v. 16, n. 2, p. 152-164, 2014.
- BELEGUNDU, A. D.; CHANDRUPATLA, T. R. **Optimization Concepts and Applications in Engineering**. 2. New York: Cambridge University Press, 2011.
- CHAKRAVERTY, S. **Vibration of Plates**. 1ª. s.l.: CRC Press, 2019.
- CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An Introduction to Structural Optimization**. Ontario: Springer, 2009.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. 3. Berkeley: Computers & Structures, Inc., 2003.
- CONNOR, J. J. **Introduction to Structural Motion Control**. Massachusetts: MIT/USA, 2000.
- CRAIG, R. R.; KURDILA, A. J. **Fundamentals of Structural Dynamics**. 2. New Jersey : s.n., 1981.
- GASPAR, C. M. R., SILVA, J. G. S.; COSTA-NEVES, L. F. Multimode vibration control of building steel–concrete composite floors submitted to human rhythmic activities. **Computers & Structures**, v. 165, p. 107-122, 2016.
- HARRIS, C. M.; PIERSOL, A. G. **Harris` Shock and Vibration Handbook**. 5. s.l.: McGRAW-HILL, 2002.
- <http://www.controllato.com.br/>. <http://www.controllato.com.br/>. Controllato. [Online] <http://www.controllato.com.br/index.asp>.
- INFANTI, S.; ROBINSON, J.; SMITH, R. **Viscous Dampers for High-Rise Buildings**. Conference on Earthquake Engineering. 14, 2008.

LESSIA, A. W. **Vibration of Plates**. Washington: NASA SP-160, 1969.

NEWMARK, N. M. A Method of Computation for Structural Dynamics. **Journal of Engineering Mechanics Division**, v. 83, n. 3, p. 67-94, 1959.

PINHEIRO, M. A. S. **Absorção Pendular Não-Linear para Redução de Vibrações em Torres Esbeltas**. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1997.

POON, D. C. K.; SHIEH, S.-S.; JOSEPH, L. M.; CHANG, C.-C. Structural Design of Taipei 101, the World's Tallest Building. In: Conference of Council on Tall Buildings and Urban Habitat, 2004, Seoul. **Proceedings...** Seoul, Korea, 2004.

SAIDI, I.; GAD, E. F.; WILSON, J. L.; HARITOS, N. Development of passive viscoelastic damper to attenuate excessive floor vibrations. **Engineering Structures**, v. 33, n. 12, p. 3317-3328, 2011.

SANTOS, M. D. S. **Análise Numérica do Controle de Vibrações em Lajes de Edifícios Utilizando Amortecedores de Massa Sintonizados**. Distrito Federal: Dissertação de Mestrado, UnB, 2009.

SOEDEL, W. **Vibrations of Shells and Plates**. 3ª. New York : CRC Press, 2004.

SORIANO, H. L. **Introdução à Dinâmica das Estruturas**. 1. Rio de Janeiro : Elsevier, 2014.

SOUZA, R. A. **Controle Passivo/Ativo das Oscilações de Estruturas Esbeltas por Meio de Dispositivos Fluido-Dinâmicos**. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 2003.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. 1959. **Theory of Plates and Shells**. 2. s.l. : McGraw-Hill, 1959.

TSAI, H.; LIN, G. Optimum tuned-mass dampers for minimizing steady-state response of support-excited and damped systems. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 22, n. 11, p. 957-973, 1993.

VALENCIA, L. A. L. **Controle de Vibrações em vigas metálicas com distintas configurações de apoio utilizando amortecedores de massa sintonizados**. Brasília: Dissertação de Mestrado, UnB, 2007.

VARELA, W. D.; BATTISTA, R. C. Control of Vibrations Induced by People Walking on Large Span Composite Floor Deck. **Engineering Structures**, v. 33, n. 9, p. 2485-2494, 2011.

VASCONCELOS, R. P. **Atenuação de Vibrações em Lajes Nervuradas de Piso em Concreto Armado**. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1998.

—. 2003. **Controle Dinâmico Estrutural via Mecanismos Viscoelásticos**. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado, COPPE/URFJ, 2003.

WANG, Z.; GAO, H.; WANG, H.; CHEN, Z. Development of stiffness-adjustable tuned mass dampers for frequency retuning. **Advances in Structural Engineering**, v. 22, n. 2, p. 473-485, 2019.

WERKLE H.; BUTZ, C; TATAR, R. Effectiveness of “Detuned” TMD’s for Beam-Like Footbridges. **Advances in Structural Engineering**, v. 16, n. 1, p. 21-31, 2013.