

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS-UFAL
INSTITUTO DE FÍSICA

CAIO VITOR CASTRO MENDES

EFEITO TALBOT EM UMA REDE ÓPTICA COM CARGA TOPOLOGICA

MACEIÓ
2017

CAIO VITOR CASTRO MENDES

EFEITO TALBOT EM UMA REDE ÓPTICA COM CARGA TOPOLOGICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva

Maceió
2017

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho

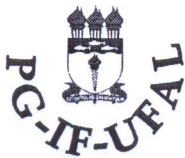
M538e Mendes, Caio Vitor Castro.
Efeito Talbot em uma rede óptica com carga topológica / Caio Vitor Castro
Mendes. - 2019.
58 f. : il.

Orientador: Alcenísio José de Jesus Silva.
Dissertação (mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 55-58.

1. Efeito Talbot (Física). 2. Redes ópticas. 3. Difração. I. Título.

CDU: 535.4



Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Física

Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL, Brasil
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

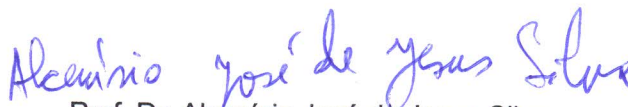
**“Efeito Talbot em uma Rede Óptica com Carga
Topológica”**

por

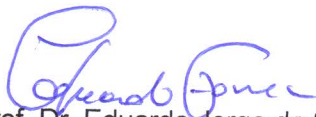
Caio Vitor Castro Mendes

A Banca Examinadora composta pelos professores Alcenísio José de Jesus Silva (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Eduardo Jorge da Silva Fonseca, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Willamys Cristiano Soares Silva, do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 20 de fevereiro de 2017



Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva



Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca



Prof. Dr. Willamys Cristiano Soares Silva

AGRADECIMENTOS

- Primeiramente aos meus pais;
- Ao professor Alcenísio pelo apoio e toda ajuda fornecida;
- Aos meus amigos do GON, em especial ao Artur, por me ajudar com a imagem do aparato experimental;
- Aos meus amigos da física em geral, em especial a Michele Côelho, por me ajudar com os erros em LaTeX.
- À FAPEAL pelo apoio financeiro.

"Uma mente necessita de livros da mesma forma que uma espada necessita de uma pedra de amolar se quisermos que se mantenha afiada."

Tyrion Lannister (As crônicas de Gelo e Fogo)

RESUMO

Estudamos o resultado da interferência pela superposição de redes ópticas, que são campos não difratantes propagando no espaço livre mostramos o efeito Talbot. Estas redes são formadas pela transformada de Fourier de um estado "quase" momento angular orbital (MAO). Observamos teórica e experimentalmente que, embora as imagens de Talbot mudem, o comprimento de Talbot é insensível a carga topológica do estado quase-MAO. Nossas descobertas podem ser úteis para redes fotônicas de gravação a laser.

Palavras-chave: Efeito Talbot. Redes Ópticas. Difração.

ABSTRACT

We studied the interference resulting from the superposition of optical lattices, which are non-diffracting fields propagating in free space, and showed a Talbot self-imaging effect. These lattices are formed by spatially Fourier transforming a “quasi”-orbital angular momentum (OAM) state. We observed theoretically and experimentally that although the Talbot images change, the Talbot length is insensitive to the topological charge of the “quasi”-OAM state. Our findings can be useful for laser-written photonic lattices.

Keywords: Talbot Effect. Optical Lattice. Diffraction.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Carpete de Talbot	16
Figura 2 – Distribuição de intensidade do feixe Bessel no plano transversal é independente de z	21
Figura 3 – Abertura circular. Sua transformada de Fourier é um feixe Bessel. A região em vermelho é onde passa luz, quanto menor esta abertura, maior a distância de propagação do feixe Bessel.	23
Figura 4 – Distribuição de intensidade do feixe Bessel no plano transversal é independente de z	24
Figura 5 – Intensidade do Feixe Bessel para $m = 0$	25
Figura 6 – Perfil de intensidade para o feixe Bessel com $m = 3$	25
Figura 7 – (a) Gravação do holograma a partir de uma onda de referência (b) reconstrução do feixe de interesse	26
Figura 8 – Esquema de um modulador espacial de luz	27
Figura 9 – Intensidade de dois feixes Bessel interferindo com a mesma amplitude e frequência espacial $k_{r1} = 4$ e $k_{r2} = \frac{k_{r1}}{5}$ versus distância de propagação normalizada pelo comprimento de Rayleigh.	29
Figura 10 – (a) Detalhes da propagação inicial dos feixes. (b) Intensidade de dois feixes Bessel interferindo (curva sólida) com a mesma amplitude e frequência espacial $k_{r1} = 4$ (curva pontilhada) e $k_{r2} = \frac{k_{r1}}{5}$ (curva tracejada) versus distância de propagação normalizada.	29
Figura 11 – Evolução da superposição de feixes Bessel: (a) Plot em 3D. (b) Contorno do perfil transversal, mostrando o Talbot ao longo da propagação.	30
Figura 12 – Aparato experimental simplificado.	31
Figura 13 – Sequência de fotografias mostrando a evolução dos feixes Bessel na primeira repetição.	32
Figura 14 – Sequência de fotos mostrando os máximos e mínimos ao longo da propagação.	33
Figura 15 – Redes ópticas cujo os parâmetros utilizados foram: $Q = 3, \rho_1 = 1mm^{-1}, p_1 = 1$ e $p_2 = 2$ (a) $\rho_2 = 1,5mm^{-1}$. (b) $\rho_2 = 2mm^{-1}$. (c) $\rho_2 = 2,5mm^{-1}$	36
Figura 16 – Redes ópticas cujo os parâmetros utilizados foram: $Q = 3, \rho_1 = 1mm^{-1}, p_1 = 2$ e $p_2 = 5$ (a) $\rho_2 = 1,5mm^{-1}$. (b) $\rho_2 = 2mm^{-1}$. (c) $\rho_2 = 2,5mm^{-1}$	37
Figura 17 – Redes ópticas alterando a quantidade de ondas planas. Parâmetros: $p_1 = p_2 = 1, \rho_1 = 1mm^{-1}, \rho_2 = 1,5mm^{-1}$. (a) $Q = 30$ (b) $Q = 50$ (c) $Q = 70$	37
Figura 18 – Redes ópticas alterando a quantidade de ondas planas. Parâmetros: $p_1 = p_2 = 1, \rho_1 = 1mm^{-1}, \rho_2 = 2,5mm^{-1}$. (a) $Q = 70$ (b) $Q = 90$ (c) $Q = 120$	38
Figura 19 – Transformada da Fourier das redes ópticas. Parâmetros: $p_1 = 1, p_2 = 2, \rho_1 = 1mm^{-1}, \rho_2 = 2,5mm^{-1}$. (a) $Q = 3$ (b) $Q = 4$ (c) $Q = 5$	38
Figura 20 – Relação da fase das ondas planas com suas cargas topológicas.	39
Figura 21 – Transformada da Fourier das redes ópticas. Parâmetros: $p_1 = 1, p_2 = 2, \rho_1 = 1mm^{-1}, \rho_2 = 2,5mm^{-1}$. (a) $Q = 10$ (b) $Q = 20$ (c) $Q = 30$	40
Figura 22 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 3; p_1 = 1; p_2 = 2; \rho_1 = 5mm^{-1}; \rho_2 = 7,5mm^{-1}$	45
Figura 23 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 3; p_1 = 1; p_2 = 2; \rho_1 = 5mm^{-1}; \rho_2 = 10mm^{-1}$	46

Figura 24 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 3; p_1 = p_2 = 1; \rho_1 = 5mm^{-1}; \rho_2 = 7,5mm^{-1}$	47
Figura 25 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 4; p_1 = p_2 = 1; \rho_1 = 5mm^{-1}; \rho_2 = 7,5mm^{-1}$	48
Figura 26 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 4; p_1 = p_2 = 1; \rho_1 = 5mm^{-1}; \rho_2 = 12,5mm^{-1}$	49
Figura 27 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 4; p_1 = p_2 = 2; \rho_1 = 5mm^{-1}; \rho_2 = 7,5mm^{-1}$	50
Figura 28 – Aparato experimental. E: Espelho, L_1 : Lente 1, DF: Divisor de Feixe, L_2 : Lente 2, MEL: Modulador espacial da luz, FE = Filtro Espacial, L_3 : Lente 3, CCD: Câmera.	51
Figura 29 – $p_1 = 1, p_2 = 2, \rho_1 = 1mm^{-1}, \rho_2 = 2,5mm^{-1}$. (a) $Q = 3$ (b) $Q = 4$	53
Figura 30 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação(experimento). Parâmetros: $Q = 3; p_1 = 1; p_2 = 2; \rho_1 = 1mm^{-1}; \rho_2 = 1,5mm^{-1}$	54
Figura 31 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação(experimento). Parâmetros: $Q = 3; p_1 = 1; p_2 = 2; \rho_1 = 1mm^{-1}; \rho_2 = 2mm^{-1}$	55
Figura 32 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação(experimento). Parâmetros: $Q = 3; p_1 = p_2 = 2; \rho_1 = 1mm^{-1}; \rho_2 = 1,5mm^{-1}$	56
Figura 33 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação(experimento). Parâmetros: $Q = 4; p_1 = p_2 = 1; \rho_1 = 1mm^{-1}; \rho_2 = 1,5mm^{-1}$	57
Figura 34 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 4; p_1 = p_2 = 1; \rho_1 = 1mm^{-1}; \rho_2 = 2,5mm^{-1}$	58
Figura 35 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação(experimento). Parâmetros: $Q = 4; p_1 = p_2 = 2; \rho_1 = 1mm^{-1}; \rho_2 = 1,5mm^{-1}$	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	EFEITO TALBOT	16
2.1	Introdução	16
2.2	Teoria	17
2.3	Efeito Talbot a partir da interferência de feixes Bessel	17
2.3.1	Introdução	17
2.3.2	Feixe Bessel	18
2.3.2.1	Introdução	18
2.3.2.2	Equação de Helmholtz e sua solução em coordenadas cilíndricas	18
2.3.2.3	Propriedade não difrativa do feixe Bessel	23
2.3.2.4	Geração de feixes Bessel	25
2.3.3	Efeito Talbot a partir da interferência de feixes Bessel - Teórico	27
2.3.4	Efeito Talbot a partir da interferência de feixes Bessel - Experimental	30
2.4	Conclusão	34
3	EFEITO TALBOT EM UMA REDE ÓPTICA COM CARGA TOPO- LÓGICA	35
3.1	Introdução	35
3.2	Modelo Teórico	35
3.2.1	Redes Ópticas	35
3.2.2	Resultados Teóricos	44
3.3	Experimento	50
3.3.1	Metodologia e Procedimentos	51
3.3.2	Resultados Experimentais	52
3.4	Conclusão	59
4	CONCLUSÃO GERAL E PERSPECTIVAS FUTURAS	61
	REFERÊNCIAS	62

1 INTRODUÇÃO

A luz vem sendo objeto de estudo de cientistas e filósofos desde muito tempo atrás. A primeira observação sobre a luz foi feita por Lucrécio, no século I a.C. Ele escreveu que a luz solar e o seu calor eram compostos de pequenas partículas. A luz só se tornou um objeto de estudo mais frequente a partir da unificação do eletromagnetismo com a óptica, no ano de 1845 por Michael Faraday (GOODMAN, 2005). Entretanto, o relacionamento completo entre a óptica e o eletromagnetismo foi estabelecido por James Clerk Maxwell. Desta época em diante surgiram vários estudos e a descoberta de diversos fenômenos físicos, um deles foi o efeito Talbot ou também conhecido como efeito da auto imagem. Este fenômeno é caracterizado pela repetição periódica de uma distribuição de campos planares em certos tipos de campos ondulatórios. Estes campos podem ser acústicos (SAIGA; ICHIOKA, 1985) (LIU et al., 2012), de elétrons (MCMORRAN; CRONIN, 2009), de plasmons (ZHANG et al., 2009), raio x (CLOETENS et al., 1997) (YAROSHENKO et al., 2014), de fótons (VIDAL et al., 2008) (SONG et al., 2011) (CHEN et al., 2014), atômicos (CHAPMAN et al., 1995) e etc. Foi-se encontrado diversas aplicações interessantes do efeito Talbot em diferentes áreas, um bom resumo foi publicado em (WEN et al., 2013). Na óptica, provou-se que o efeito Talbot é consequência natural da difração da luz após atravessar um objeto unidimensional com estrutura periódica com um comprimento de Talbot expresso por $z_T = \frac{d^2}{\lambda}$, onde d e λ são o período da estrutura e o comprimento de onda da luz incidente, respectivamente.

Recentemente, o efeito Talbot foi teoricamente explorado usando momento angular orbital (MAO) do emaranhamento de dois fótons, mostrando que o comprimento de Talbot não varia com a carga topológica (CT) (SUN; ZHANG, 2016), entretanto, este efeito não foi explorado experimentalmente.

Esta dissertação foi dividida em quatro capítulos. O primeiro é a introdução, o próximo é sobre o efeito Talbot da forma mais simples possível, o terceiro sobre redes ópticas e nossos resultados teóricos e experimentais e o último uma conclusão geral deste trabalho.

O capítulo 1, este capítulo, tem o intuito de dar breves noções do que será abordado durante todo o trabalho, de forma que facilite a compreensão e fique mais organizado os conteúdos necessários para entender o efeito Talbot.

O capítulo 2 é o que trata do efeito da auto-imagem, inicialmente apenas usando ondas planas, como foi estudado por Rayleigh. Em seguida, estudamos sobre feixes Bessel e como fazer uso da interferência da sua Transformada de Fourier para criar o efeito de auto-imagem.

Este é um capítulo que serve como base para compreender o ponto central desta dissertação, que é o capítulo 3 e seus resultados.

No capítulo 3 é exibido uma breve explicação sobre o que são redes ópticas e como são formadas, além de suas transformadas de Fourier. Depois disso exibimos nossos resultados, tanto teórico quanto experimentais do efeito Talbot usando redes ópticas.

O capítulo 4 temos as conclusões do trabalho, fazendo um breve apanhado do que foi estudado e os resultados obtidos, bem como futuros trabalhos que podem ser realizados a partir deste.

Esta divisão foi feita para facilitar a compreensão dos assuntos abordados no trabalho e também para uma melhor organização do mesmo. Todos os capítulos aqui tem fundamental importância na compreensão desta dissertação.

2 Efeito Talbot

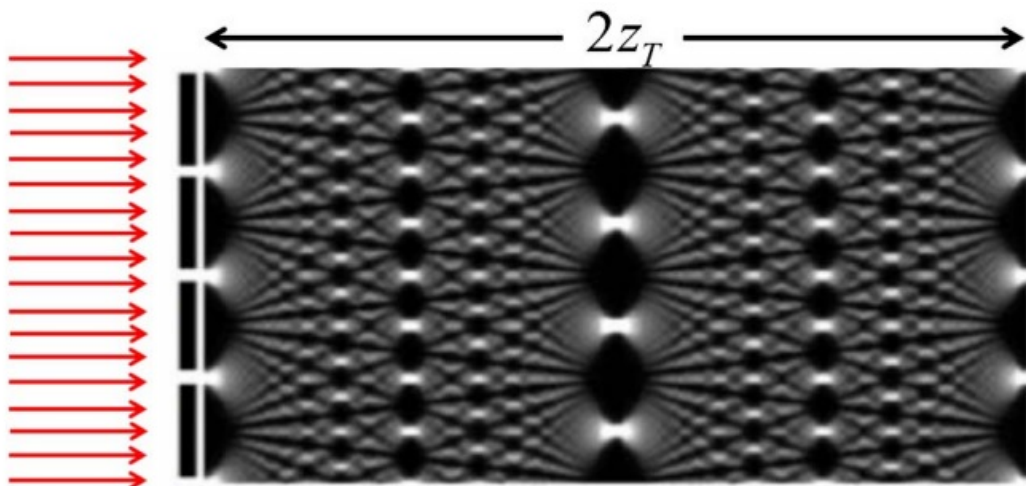
2.1 INTRODUÇÃO

Quando uma luz atravessa uma estrutura periódica difratante, ocorre a interferência de várias ondas e, conseqüentemente, surge um padrão de difração. Ao observar os raios que emergem da estrutura, vê-se que, ao longo da propagação, o padrão de difração criado pela interferência destes raios se repetem periodicamente em distâncias iguais. Este fenômeno é conhecido como efeito Talbot ou auto-imagem. Henry Fox Talbot foi o primeiro a observar que a onda resultante se propaga de tal maneira que ela assume um padrão onde sua intensidade se repete em intervalos periódicos ao longo da propagação. A distância em que ocorre a repetição é conhecida como comprimento de Talbot, z_T , e é dada por: $z_T = \frac{2a^2}{\lambda}$. Onde a é o período da estrutura e λ o comprimento de onda.

Em 1880, Lord Rayleigh mostrou que o efeito Talbot é uma consequência natural da difração de Fresnel, ou seja, ao medir a intensidade do padrão de difração para o campo próximo após atravessar uma estrutura periódica, esta intensidade se repetirá periodicamente.

Em distâncias fracionais do comprimento de Talbot também temos uma imagem da grade se repetindo periodicamente deslocadas em relação à da grade original. O conjunto destas imagens ficou conhecida como carpete de Talbot e é exibida na fig. (1).

Figura 1 – Carpete de Talbot



Fonte: J. Wen, Y. Zhang, and M. Xiao, 2013

Na próxima seção iremos estudar o efeito Talbot da forma mostrada por Lord Rayleigh. Este capítulo serve como referência para entender a forma mais básica deste fenômeno abordado neste trabalho.

2.2 TEORIA

Considere um conjunto de fendas paralelas unidimensional - o problema também pode ser resolvido bidimensionalmente, entretanto, por simplicidade optamos pelo caso unidimensional -, este conjunto pode ser representado por (WEN et al., 2013)

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2i\pi nx}{d}}, \quad (1)$$

onde c_n é a amplitude do n ésimo harmônico e d o período espacial do objeto. Caso c_n na eq.(1) não seja definido pode-se dizer que esta expressão é válida para qualquer objeto periódico.

De acordo com a teoria de difração de Fresnel (SALEH et al., 1991), ao iluminar uma abertura periódica com uma onda plana, o campo $E(x)$ para uma distância z é proporcional a:

$$E(x) \propto \int_{-\infty}^{\infty} dx' A(x') e^{-i\pi \frac{(x-x')^2}{\lambda z}}. \quad (2)$$

Então, resolvendo a integral, temos:

$$E(x) \propto \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{i\pi n^2 \lambda z}{d^2} + \frac{2i\pi nx}{d}\right), \quad (3)$$

onde o comprimento de Talbot é dado por:

$$z_T = \frac{2md^2}{\lambda}, \quad (4)$$

m é um positivo inteiro que está relacionado com o número da auto-imagem.

Além de usar uma onda plana, também é possível repetir a conta usando uma onda gaussiana, o comprimento de Talbot então será dado por (PATORSKI, 1989)

$$z_T = 2m \frac{d^2}{\lambda} \left(\frac{w_z}{w_0}\right)^2, \quad (5)$$

onde w_0 é a cintura inicial do feixe e $w_z = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}$.

Encontra-se estudos para diversos tipos de aberturas e feixes na literatura, na próxima seção será apresentado o efeito Talbot a partir da interferência de feixes Bessel.

2.3 EFEITO TALBOT A PARTIR DA INTERFERÊNCIA DE FEIXES BESSEL

2.3.1 Introdução

Esta seção é dedicada a estudar dois trabalhos específicos, o primeiro é o caso do efeito Talbot usando a interferência de dois feixes Bessel do ponto de vista teórico e o outro caso do

ponto de vista experimental. Nesta seção será então explicado o que é um feixe Bessel, como encontrar sua equação e de que forma ocorre o efeito Talbot a partir da interferência de dois feixes Bessel.

2.3.2 Feixe Bessel

2.3.2.1 Introdução

Vamos estudar agora sobre uma família de feixes que tem sua distribuição de intensidade constante ao longo da propagação, conhecidos como feixes não difratante e que são soluções da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas. Esta família de feixes é conhecida como feixes Bessel (DURNIN, 1987)(DURNIN et al., 1987). Vamos deduzir a expressão do feixe Bessel de duas formas, inicialmente a partir da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas e em seguida usando a teoria da difração e mostrando que podemos chegar na expressão de feixe Bessel pode ser obtido de duas formas diferentes. Em seguida será analisado a propriedade no difrativa do feixe Bessel, estudando os resultados obtidos por Durnin em seu trabalho.

2.3.2.2 Equação de Helmholtz e sua solução em coordenadas cilíndricas

Para encontrar a solução da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas devemos lembrar que uma onda é descrita por uma função escalar, conhecida como função de onda(SALEH et al., 1991). Esta função de onda é descrita matematicamente por uma função real da posição $\vec{r} = (x, y, z)$ e do tempo t , aqui denotada por $u(\vec{r}, t)$. Esta função obedece uma equação diferencial de segunda ordem conhecida como equação de onda:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

onde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador Laplaciano em coordenadas cartesianas(WEBER; ARFKEN, 2003). Vale ressaltar que, qualquer função que satisfaça a eq. (6) representa uma onda óptica.

Uma vez que a equação de onda é linear, é possível aplicar o princípio da superposição: se $u_1(\vec{r}, t)$ e $u_2(\vec{r}, t)$ representam possíveis ondas ópticas, então $u(\vec{r}, t) = u_1(\vec{r}, t) + u_2(\vec{r}, t)$ também representará.

O campo escalar de uma onda monocromática é representada por uma função de onda com dependência temporal harmônica (SALEH et al., 1991)(GOODMAN, 2005), dada por:

$$u(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cos [2\pi\nu t + \varphi(\vec{r})], \quad (7)$$

onde $a(\vec{r})$ é a amplitude da onda, φ a fase e ν a frequência. É conveniente escrever a eq.(7) em termos da função complexa:

$$U(\vec{r}, t) = a(\vec{r})\exp(i\varphi)\exp(i2\pi\nu t), \quad (8)$$

sendo $u(\vec{r}, t) = \text{Re} [U(\vec{r}, t)]$, dada por (RUDIN, 2006)

$$\text{Re} [U(\vec{r}, t)] = \frac{1}{2} [U(\vec{r}, t) + U^*(\vec{r}, t)], \quad (9)$$

cujos símbolos * representa o complexo conjugado. A função $U(\vec{r}, t)$, conhecida como função de onda complexa, descreve a onda completamente. A função de onda $u(\vec{r}, t)$ é simplesmente a parte real. Tanto a função de onda quanto a função de onda complexa devem satisfazer a equação da onda:

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (10)$$

Reescrevendo a eq.(8) da forma:

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r})\exp(i2\pi\nu t), \quad (11)$$

onde o fator independente do tempo está em $U(\vec{r}) = a(\vec{r})\exp[i\varphi(\vec{r})]$ e é conhecido como a amplitude complexa da onda. Substituindo eq.(11) em eq.(9):

$$u(\vec{r}, t) = \text{Re} [U(\vec{r})\exp(i2\pi\nu t)] = \frac{1}{2} [U(\vec{r})\exp(i2\pi\nu t) + U^*(\vec{r})\exp(-i2\pi\nu t)]. \quad (12)$$

Substituindo eq.(11) na eq.(10):

$$(\nabla^2 + k^2) U = 0, \quad (13)$$

onde k é o número de onda, dado por $k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$. A eq.(13) é conhecida como equação de Helmholtz (GOODMAN, 2005).

Substituindo a eq.(7) na eq.(9), ficaremos com:

$$u^2(\vec{r}, t) = 2a^2(\vec{r})\cos^2 [2\pi\nu t + \varphi(\vec{r})] = |U(\vec{r})|^2 \{1 + \cos [2(2\pi\nu t + \varphi(\vec{r}))]\}. \quad (14)$$

Fazendo a média na eq.(14) em um tempo muito maior que o período óptico, $\frac{1}{\nu}$, o segundo termo desaparece, logo:

$$I(\vec{r}) = |U(\vec{r})|^2, \quad (15)$$

que é conhecida como a intensidade óptica de uma onda monocromática (SALEH et al., 1991) e é dada pelo quadrado da norma de sua amplitude complexa e também é invariante no tempo.

Agora escrevemos a eq.(13) em coordenadas cilíndricas(WEBER; ARFKEN, 2003)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0. \quad (16)$$

Usando separação de variáveis, ficamos com:

$$U(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z). \quad (17)$$

Substituindo a eq.(17) na eq.(16) e dividindo por $R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$:

$$\frac{1}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + k^2 = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}. \quad (18)$$

Igualamos a uma contante, temos então:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\beta^2 Z, \quad (19)$$

logo:

$$Z(z) = \exp(i\beta z). \quad (20)$$

Multiplicando o lado esquerdo da eq.(18) por ρ^2 e igualando a uma contante β^2 , teremos:

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + (k^2 - \beta^2) \rho^2 = 0. \quad (21)$$

Escrevendo $\alpha = \rho^2 - \beta^2$:

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \alpha^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}. \quad (22)$$

Como o lado esquerdo da eq.(22) depende de R e o lado direito depende apenas de Φ é fácil perceber que para a igualdade ser válida é necessário que os dois lados sejam constantes, ou seja:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -m^2 \Phi. \quad (23)$$

A solução da eq.(23) é dada por:

$$\Phi(\phi) = \exp(im\phi). \quad (24)$$

Mas, sabendo que a função $U(\rho, \phi, z)$, por continuidade, deve estar sempre definida para $\phi = 0$ e $\phi = 2\pi$, logo, $U(\rho, 0, z) = U(\rho, 2\pi, z)$ para qualquer ρ e z . Então, ao impor a condição de que $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, implica dizer que m deve ser inteiro ou igual a zero, ou seja, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Vamos encontrar agora a parte radial da equação diferencial, para isso, o lado direito da eq.(22) deve ser igual a m^2 . Multiplicando toda a equação por $R(\rho)$, ficamos com:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + (\alpha^2 \rho^2 - m^2) R = 0. \quad (25)$$

Calculando a derivada na primeira parte da eq.(25) e dividindo tudo por ρ^2 , teremos:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \left(\alpha^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (26)$$

A eq.(26) é conhecida como equação diferencial de Bessel de ordem m . Suas soluções são funções de Bessel de ordem m (WEBER; ARFKEN, 2003), $J_m(\alpha\rho)$. Finalmente, a amplitude complexa da onda, eq.(17), é escrita em termos da eq.(20), eq.(24) e eq.(26):

$$U(\rho, \phi, z) = U_m J_m(\alpha\rho) \exp(im\phi) \exp(i\beta z), \quad (27)$$

onde U_m é uma constante, J_m é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem m , α e β são as componentes transversal e longitudinal do vetor de onda, onde $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. ρ, ϕ e z são as componentes radial, azimutal e longitudinal da onda, respectivamente. É importante observar que as soluções com $\rho = 0$ não são admitidas.

Para $m = 0$ podemos escrever a amplitude complexa como:

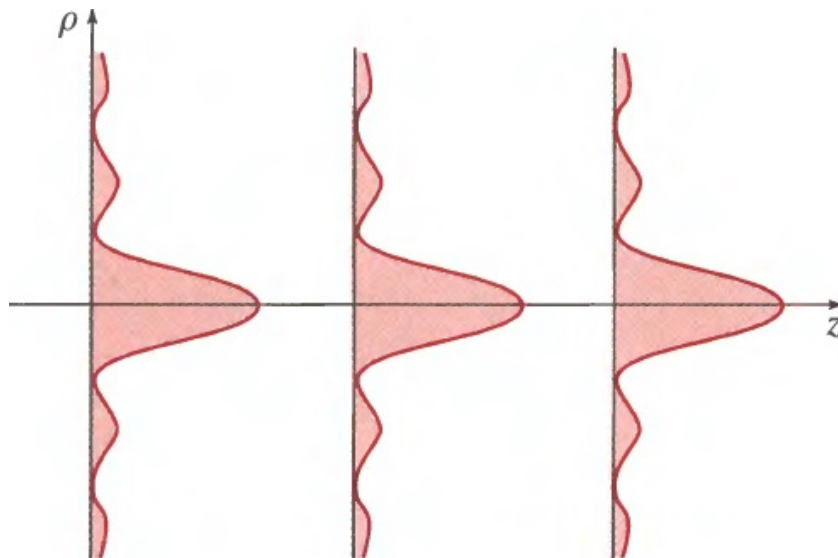
$$U(\rho, \phi, z) = U_0 J_0(\alpha\rho) \exp(i\beta z), \quad (28)$$

e sua distribuição de intensidade é dada por:

$$I(\rho, \phi, z) = |U_0|^2 J_0^2(\alpha\rho), \quad (29)$$

onde a eq.(29) possui simetria circular variando com ρ e invariante em z , como mostra a fig.(2)

Figura 2 – Distribuição de intensidade do feixe Bessel no plano transversal é independente de z



Fonte: Saleh, 2007, p. 99

Uma outra forma de obter o mesmo resultado é fazendo uso da transformada de Fourier em coordenadas cilíndricas (GOODMAN, 2005). Mostra-se que a difração por uma abertura

circular tem como resultado um feixe Bessel. Para isso, faz-se uso da solução exata da eq.(13) em coordenadas cilíndricas (GOODMAN, 2005)

$$U(\rho, \phi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty A(\alpha, \psi) \exp[i\alpha\rho\cos(\psi - \phi)] \exp(i\beta z) \alpha d\alpha d\psi. \quad (30)$$

O termo $A(\alpha, \psi)$, da eq.(30) é interpretado para o nosso caso como a abertura por onde a luz passará e ocorrerá a difração, neste caso, uma abertura circular. Para a existência do feixe Bessel por uma distância muito maior, a largura da abertura circular deve ser o mais fino possível, teoricamente consideramos uma delta de Dirac. A expressão é dada por:

$$A(\alpha, \psi) = A_0 \exp(im\phi) \delta(\alpha - \alpha_0). \quad (31)$$

substituindo a eq.(31) na eq.(30), temos:

$$U(\rho, \phi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty A_0 \exp(im\phi) \delta(\alpha - \alpha_0) \exp[i\alpha\rho\cos(\psi - \phi)] \exp(i\beta z) \alpha d\alpha d\psi. \quad (32)$$

Sabendo que (WEBER; ARFKEN, 2003):

$$f(a) = \int_0^\infty \delta(x - a) dx. \quad (33)$$

Então, fazendo uso da eq.(33), a eq.(32) fica:

$$U(\rho, \phi, z) = \int_0^{2\pi} A_0 \exp(im\phi) \exp[i\alpha_0\rho\cos(\psi - \phi)] \exp(i\beta z) \alpha_0 d\psi. \quad (34)$$

Esta integral em ψ é dada por (WEBER; ARFKEN, 2003):

$$J_m(x) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(im\theta) \exp[ix\cos(\theta)] d\theta, \quad (35)$$

substituindo:

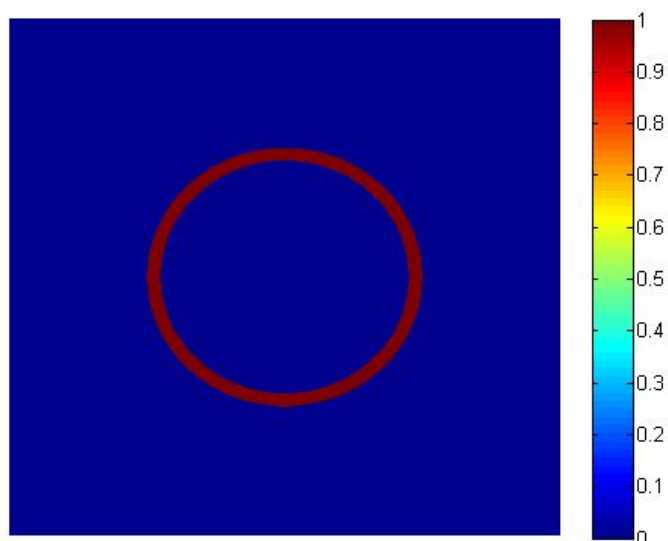
$$U(\rho, \phi, z) = \frac{2\pi}{i^l} A_0 \alpha_0 J_m(\alpha_0 \rho) \exp(im\phi) \exp(i\beta z), \quad (36)$$

escrevendo $U_0 = \frac{2\pi}{i^l} A_0 \alpha_0$:

$$U(\rho, \phi, z) = U_0 J_m(\alpha_0 \rho) \exp(im\phi) \exp(i\beta z). \quad (37)$$

A eq.(37) é exatamente a mesma que a eq.(27), comprovando assim que o feixe Bessel pode ser obtido usando a teoria de Fresnel ou resolvendo a equação de Helmholtz. A fig.(3) representa a abertura da eq.(31).

Figura 3 – Abertura circular. Sua transformada de Fourier é um feixe Bessel. A região em vermelho é onde passa luz, quanto menor esta abertura, maior a distância de propagação do feixe Bessel.



Fonte: Autor.

2.3.2.3 Propriedade não difrativa do feixe Bessel

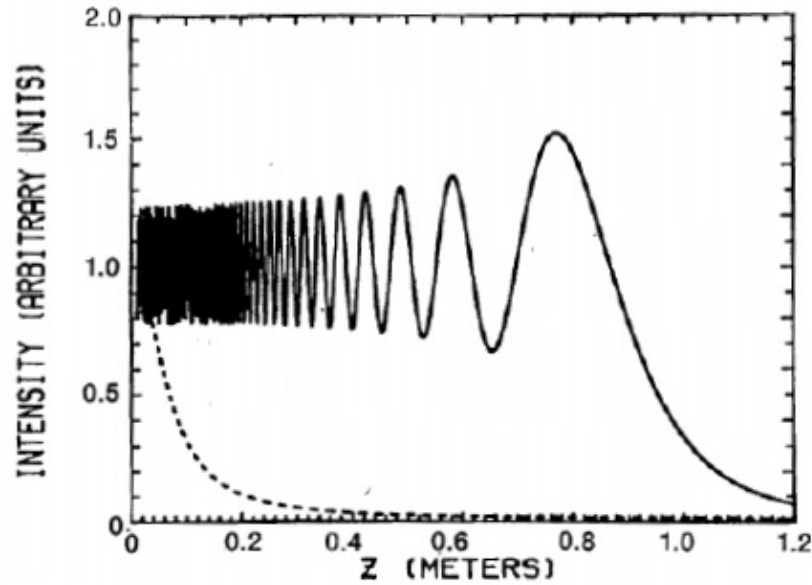
Uma característica bastante interessante da eq(27) é que, ao longo da propagação, a distribuição de intensidade do feixe Bessel é constante, ou seja:

$$I(\rho, \phi, z > 0) = I(\rho, \phi, z = 0), \quad (38)$$

justificando assim o adjetivo de não difratante.

Em seu trabalho, Durnin(DURNIN, 1987) compara distâncias de propagação entre o feixe da eq(27) e um do tipo Gaussiano, exibido na fig(4). Esta figura nos mostra a intensidade do ponto central de um feixe Bessel comparado com o de um feixe Gaussiano. É possível observar que, apesar de ocorrer oscilações - causadas pela extensão finita da janela computacional-, a intensidade no centro do feixe é mantido diferente de zero por uma distância muito maior que a do feixe Gaussiano com a mesma distribuição de largura espacial.

Figura 4 – Distribuição de intensidade do feixe Bessel no plano transversal é independente de z



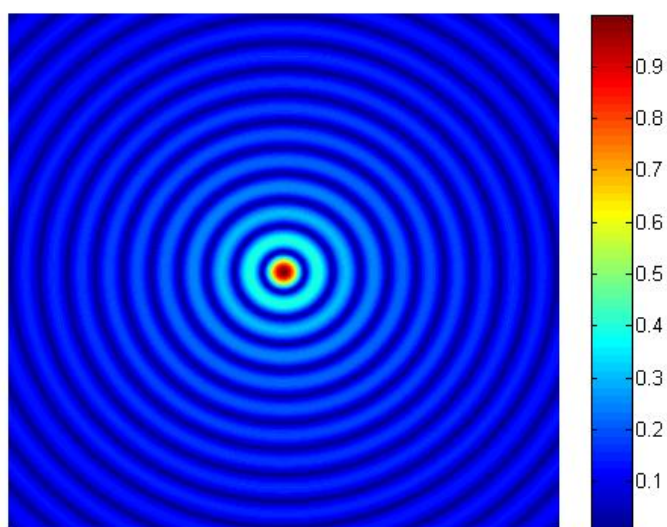
Fonte: Durnin(DURNIN, 1987), 1987

Entretanto, na teoria, considera-se que um feixe Bessel perfeito é aquele que possui energia infinita e capaz de estender-se por todo plano transversal. Como é impossível realizar o feixe Bessel experimentalmente, é feita uma aproximação, os chamados feixes Bessel truncados, gerados a partir de aberturas circulares de larguras finitas. Experimentalmente, os feixes Bessel ficam dependendo de um z_{max} , onde este é o limite de propagação sem "desaparecer". Este feixe é gerado iluminando uma fenda circular de diâmetro d , colocada no plano focal de uma lente de raio R e comprimento focal f e é dada pela expressão:

$$z_{max} = \frac{2fR}{d}. \quad (39)$$

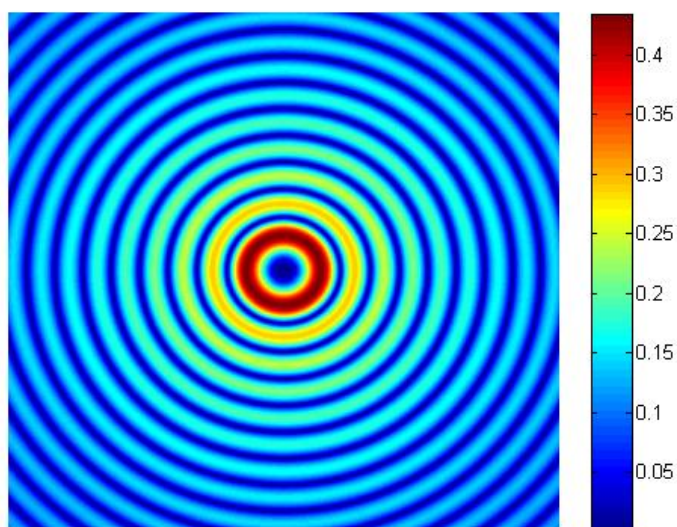
Os feixes Bessel têm uma característica específica, seus anéis concêntricos. Os feixes cuja carga topológica vale zero, possuem intensidade máxima em seu centro, como pode ser visto na fig.(5). No caso de uma carga topológica maior que zero, o centro tem uma intensidade nula, mostrado na fig.(6).

Figura 5 – Intensidade do Feixe Bessel para $m = 0$.



Fonte: Autor

Figura 6 – Perfil de intensidade para o feixe Bessel com $m = 3$.



Fonte: Autor

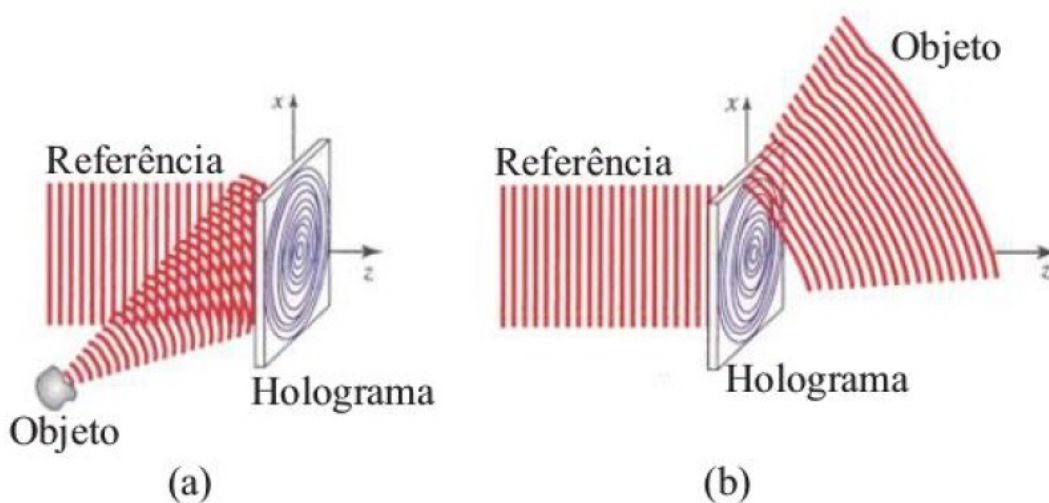
2.3.2.4 Geração de feixes Bessel

Existem algumas formas de gerar o feixe Bessel, são elas: Iluminando uma abertura circular colocada no plano focal de uma lente (DURNIN et al., 1987), utilizando um áxicon, que é uma lente com superfície cônica (ARLT; DHOLAKIA, 2000) ou fazendo uso de um holograma

gerado por computador (CHATTRAPIBAN et al., 2003), método este que iremos explorar nesta dissertação.

Um holograma é a gravação do padrão de interferência entre o feixe de interesse com um feixe de referência, geralmente uma onda plana (HECKENBERG et al., 1992). A fig(7) mostra o processo para geração do feixe de interesse. Ao iluminarmos o holograma com o feixe de referência, a partir da difração da luz, reconstruímos o feixe de interesse.

Figura 7 – (a) Gravação do holograma a partir de uma onda de referência (b) reconstrução do feixe de interesse

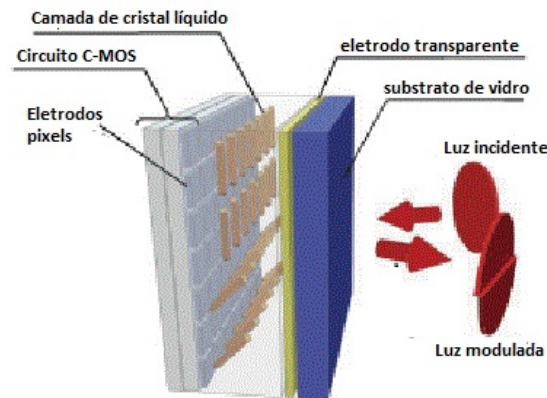


Fonte: Saleh(SALEH et al., 1991), 2007, p. 139

Antigamente os hologramas eram feitos a partir de transparências, o padrão de interferência sendo gravado nelas, processo complexo e muito demorado. Atualmente um método muito mais simples é fazendo uso de um modulador espacial de luz(MEL). Fazendo uso de um MEL de fase, é possível projetarmos hologramas de fase a partir de técnicas de holografia (KIRK; JONES, 1971)(ARRIZÓN et al., 2007). Os hologramas gerados por essas técnicas são imagens digitais, preto e branco, com 256 tons de cinza, cada tom corresponde a uma fase diferente, variando de 0 a 2π .

Um MEL é composto por uma camada de substrato de vidro, após o vidro ela contém eletrodos transparentes, seguido de uma camada de cristais líquidos e em uma fina camada constituída de *pixels* eletrodos, por fim, um circuito C-MOS. A fig(8) mostra de forma mais clara como um MEL é composto.

Figura 8 – Esquema de um modulador espacial de luz



Fonte: Hamamatsu. Light Phase Control. disponível em:
<https://www.hamamatsu.com/eu/en/technology/innovation/lcos-slm/index.html>

Os *pixels* de cristal líquido pode ser controlada eletronicamente, sendo assim possível desenhar hologramas que codificam a amplitude e a fase de campos complexos. Aqui usamos como exemplo a geração do feixe Bessel, entretanto, esta técnica de holografia pode ser utilizado para gerar vários outros tipos de feixes ou aberturas, inclusive as redes ópticas utilizadas neste trabalho.

2.3.3 Efeito Talbot a partir da interferência de feixes Bessel - Teórico

No trabalho teórico da referência (CHÁVEZ-CERDA et al., 1998), os autores fizeram uso da superposição de dois feixes Bessel propagando no espaço livre. O artigo todo foi feito numericamente e mostrou que existe efeito Talbot a partir da interferência dos feixes durante a propagação.

Uma forma prática de se obter uma superposição de feixes Bessel é usar duas aberturas circulares de raios k_{r0} e k_{r1} , seguidas por uma lente colocada a uma distância igual ao comprimento focal f . Sabe-se, pela óptica de Fourier, que a luz sofre uma transformada de Fourier ao passar por uma lente (SALEH et al., 1991), ou seja, neste processo utilizado no trabalho eles colocaram a lente para realizar a transformada de Fourier das duas aberturas circulares. Matematicamente, isto é o mesmo que:

$$h_0(k_r) = \exp(i\Phi_0)\delta(k_r - k_{r0}) + a\exp(i\Phi_1)\delta(k_r - k_{r1}), \quad (40)$$

onde $\Phi_j = ik_{zj}z + \phi_j; j = 0, 1; k_r = \sqrt{(k_x^2 + k_y^2)}$; a é um fator de amplitude. Este é o caso ideal para a geração de um feixe Bessel, entretanto, sabe-se que não é possível realizar

isto experimentalmente. Usar as deltas de Dirac indica que a abertura é a mais fina possível, experimentalmente, se a abertura circular for muito fina, não haverá passagem de luz suficiente. No caso teórico o feixe Bessel ao longo de toda propagação, entretanto, experimentalmente é feito a aproximação para o feixe Bessel truncado, que só existe em uma região finita. Apesar do trabalho ser teórico, foi utilizado aberturas anelares com tamanho finito, simulando o resultado que seria obtido em um laboratório. O campo descrito pela luz produzida pelas estruturas circulares, emergindo das lentes, é dado por:

$$H_j^{dentro}(r, z) = [J_0(k_{rj}r) - iN_0(k_{rj}r)] \exp(ik_{zj}z + i\phi_j); \quad (41)$$

$$H_j^{fora}(r, z) = [J_0(k_{rj}r) - iN_0(k_{rj}r)] \exp(ik_{zj}z + i\phi_j), \quad (42)$$

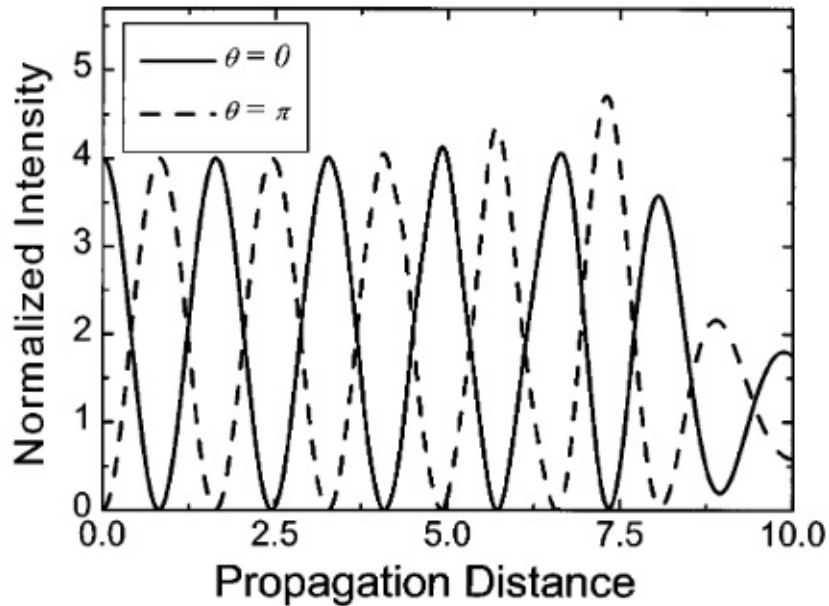
onde $j = 0$ e $j = 1$ se refere a luz passando através dos anéis 0 e 1, respectivamente. Dentro e Fora significa o anel menor ou maior, sendo definido pelo raio k_{rj} de cada anel. Para fazer a superposição dos feixes Bessel é necessário que seja feito a soma das eq.(41) e eq.(42), de forma que o termo N_0 seja cancelado. A intensidade da superposição desses campos é dada por:

$$I(r, z) = J_0^2(k_{r0}r) + J_0^2(k_{r1}r) + 2J_0^2(k_{r1}r) \cos [k_{z0} - k_{z1}z + \theta], \quad (43)$$

onde $\theta = \phi_0 + \phi_1$ e $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. O último termo da eq.(43) é referente ao termo de interferência.

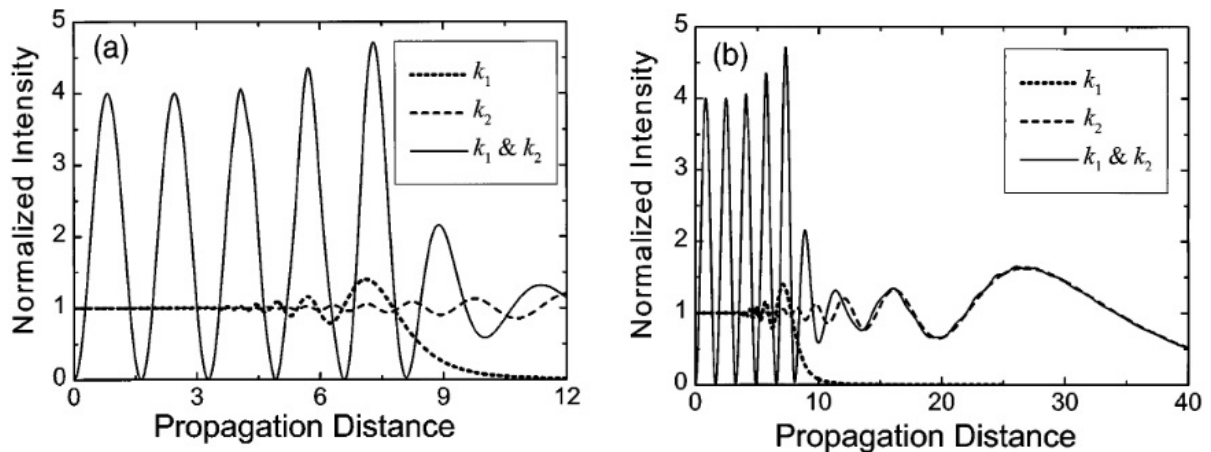
Os autores também calcularam numericamente a evolução da intensidade após passar pela lente, isto é importante pois, como foi dito, o feixe Bessel existe em apenas uma região finita, assim podemos ver a região de existência do mesmo. A fig.(9) mostra a propagação da superposição dos feixes Bessel, os parâmetros utilizados foram: $k_{r1} = 4$ e $k_{r2} = \frac{k_{r1}}{5}$ em fase, ou seja $\theta = 0$ e fora de fase $\theta = \pi$. Como é possível ver, existe um comportamento oscilatório de aproximadamente $z_p \approx \pi$ e que a posição dos máximos e mínimos variam dependendo da fase inicial entre os feixes. Após isto, foi feito o *plot* de dois feixes Bessel fora de fase e com a mesma amplitude e depois usado a superposição dos dois feixes Bessel. A intensidade do feixe começa a diminuir, como pode ser visto na fig.(10). A oscilação tem relação com o quão fino os anéis são, de forma que, após um período, ele realmente tende a perder este comportamento oscilatório. Na fig.(10A), mostra os detalhes da evolução inicial dos feixes, já na fig.(10B) é exibido o caso para uma distância de propagação muito maior, mostrando a perda da oscilação para uma distância maior.

Figura 9 – Intensidade de dois feixes Bessel interferindo com a mesma amplitude e frequência espacial $k_{r1} = 4$ e $k_{r2} = \frac{k_{r1}}{5}$ versus distância de propagação normalizada pelo comprimento de Rayleigh.



Fonte: S.Chávez-Cerda, M.A. Meneses-Nava e J. Miguel Hickmann(CHÁVEZ-CERDA et al., 1998).

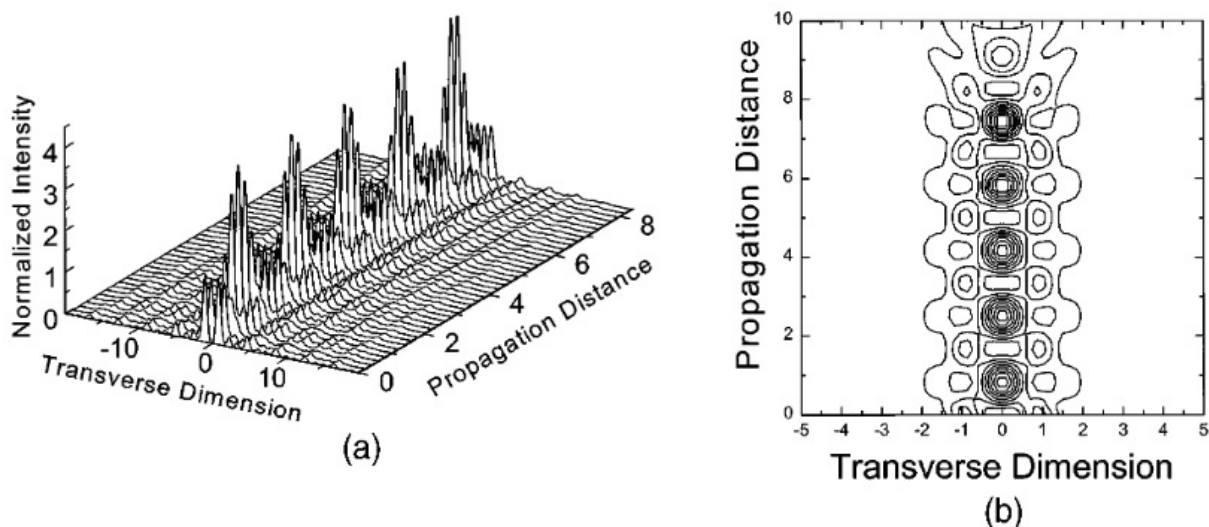
Figura 10 – (a) Detalhes da propagação inicial dos feixes. (b) Intensidade de dois feixes Bessel interferindo (curva sólida) com a mesma amplitude e frequência espacial $k_{r1} = 4$ (curva pontilhada) e $k_{r2} = \frac{k_{r1}}{5}$ (curva tracejada) versus distância de propagação normalizada.



Fonte: S.Chávez-Cerda, M.A. Meneses-Nava e J. Miguel Hickmann(CHÁVEZ-CERDA et al., 1998).

Agora, na fig.(11A) foi feito o *plot* da superposição dos feixes Bessel na propagação ao longo de quatro repetições. Nesta simulação, foi usada uma fase θ entre os anéis que é igual a π e a razão entre as amplitudes dos feixes é igual a 1. Na fig.(11B), foi exibido o mapa de contorno do perfil transversal, mostrando o efeito Talbot ao longo da propagação.

Figura 11 – Evolução da superposição de feixes Bessel: (a) Plot em 3D. (b) Contorno do perfil transversal, mostrando o Talbot ao longo da propagação.



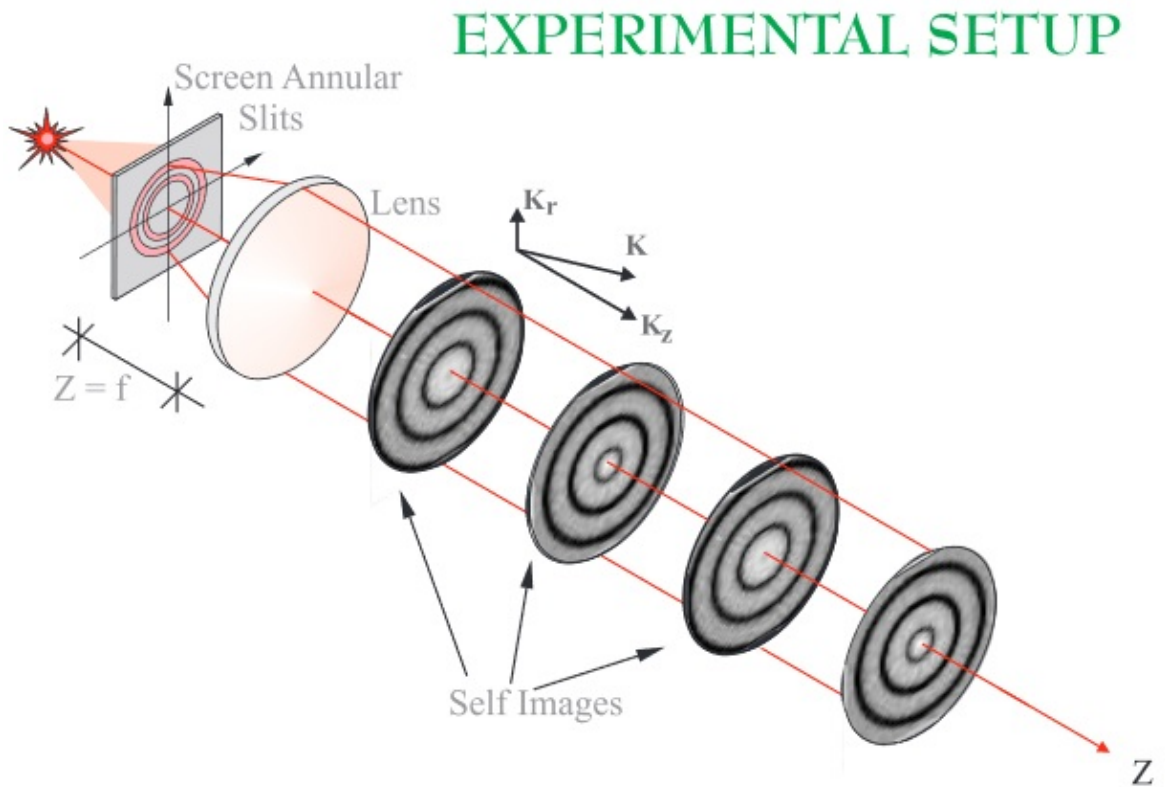
Fonte: S.Chávez-Cerda, M.A. Meneses-Nava e J. Miguel Hickmann(CHÁVEZ-CERDA et al., 1998).

A fig.(11) fecha o artigo comprovando o efeito Talbot usando uma superposição de feixe Bessel é possível teoricamente, dando assim uma confirmação que nosso trabalho também é possível de ser realizado com sucesso. Veremos agora o trabalho experimental.

2.3.4 Efeito Talbot a partir da interferência de feixes Bessel - Experimental

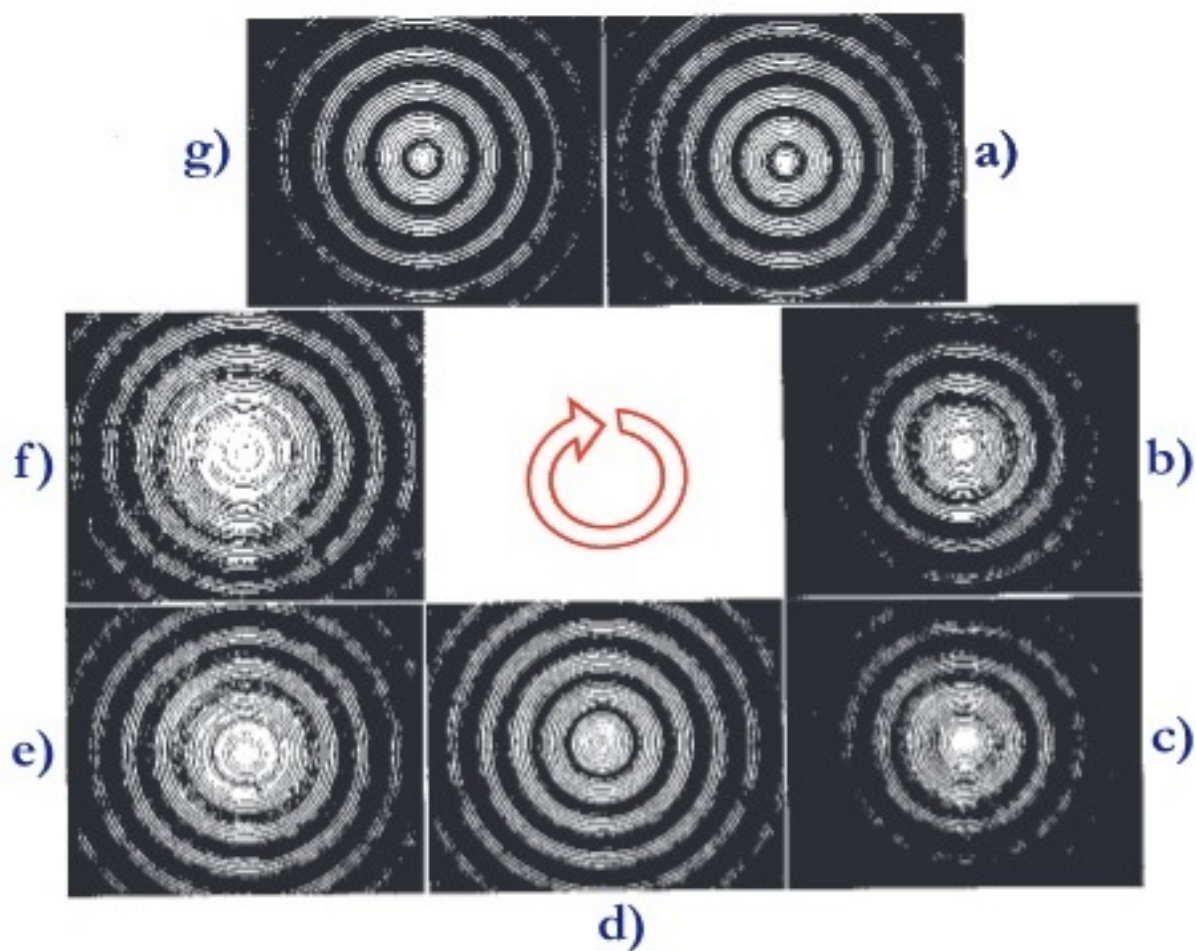
Neste experimento, foi usado um laser He-Ne de $10mW$, a luz emitida deste laser foi então filtrada espacialmente, focalizando-a com uma objetiva $40x$ com um filtro espacial de $5\mu m$. Para colimar a luz resultante, usou-se uma segunda lente exatamente na posição do filtro espacial. A luz obtida incide em uma tela com duas aberturas anelares, ambas com $0,1mm$ de espessura e $1,63mm$ e $2,11mm$ de raios do anel interno e o externo, respectivamente. Após a tela, colocou-se uma outra lente de comprimento focal $f = 750mm$. A fig.(12) mostra o aparato experimental simplificado usado para obter a superposição de feixes Bessel. Usando este aparato foi obtido uma transmissão de luz através das aberturas circulares melhor que 15%. Uma sequência de fotografia foi tirada ao longo da propagação. Usou-se uma câmera sem nenhuma objetiva, com uma exposição direta à luz. Na fig.(13(a-g)), foi tirado fotos nas distâncias 0, 6.8, 13.6, 20.4, 27.2, 34.0 e 40.8 cm, respectivamente. Estas distâncias cobrem um período de repetição do Talbot, é visível que a última fotografia tem o mesmo padrão de intensidade da figura inicial. A fig.(13d) corresponde a meio Talbot e mostra uma situação onde é produzido um mínimo no centro do feixe.

Figura 12 – Aparato experimental simplificado.



Fonte: S.Chávez-Cerda, M.A. Meneses-Nava e J. Miguel Hickmann(CHAVEZ-CERDA et al., 1998).

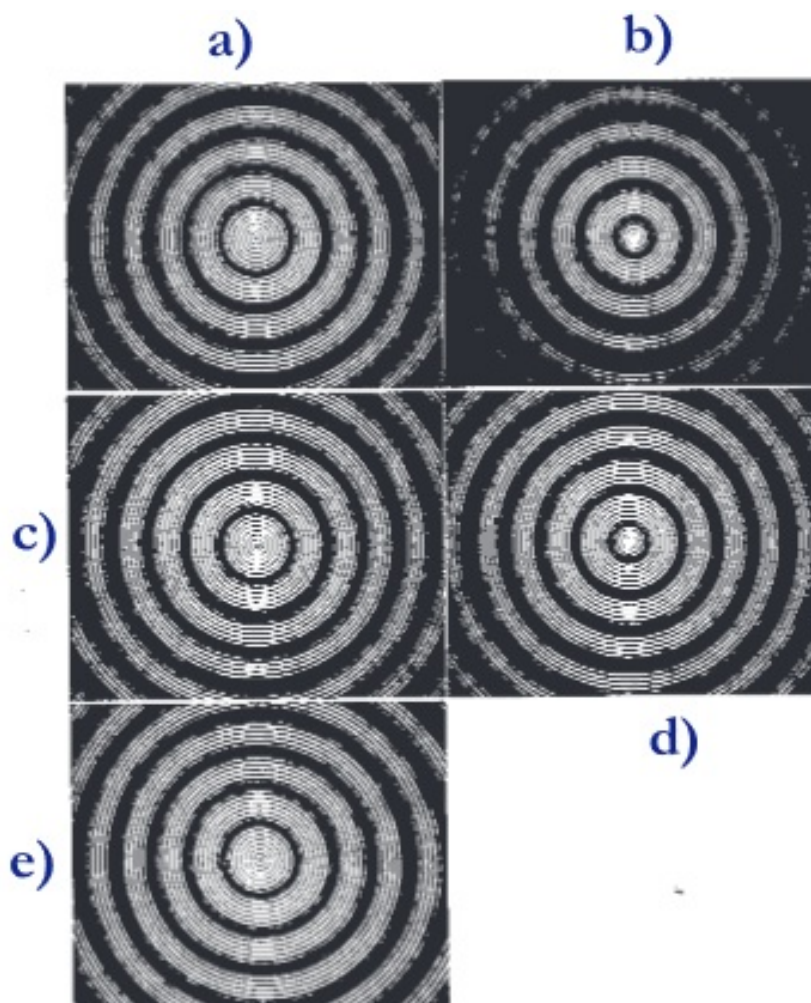
Figura 13 – Sequência de fotografias mostrando a evolução dos feixes Bessel na primeira repetição.



Fonte: S.Chávez-Cerda, M.A. Meneses-Nava e J. Miguel Hickmann(CHAVEZ-CERDA et al., 1998).

A fig.(14(a-e)) mostra a propagação correspondente as distâncias 61.2, 83.2, 102.0, 122.4 e 142.8cm, respectivamente. Estas figuras são apenas de meio e inteiro período de repetição do efeito Talbot. É observado, novamente, o padrão transverso produzido ao longo da propagação. Após uma distância z_{max} do anel, a superposição dos feixes Bessel começa a desaparecer, assim, não ocorrendo mais a repetição.

Figura 14 – Sequência de fotos mostrando os máximos e mínimos ao longo da propagação.



Fonte: S.Chávez-Cerda, M.A. Meneses-Nava e J. Miguel Hickmann(CHAVEZ-CERDA et al., 1998).

A partir da teoria, sabe-se que a frequência de repetição é de 40,8cm, no experimento chegou-se a um valor quase perfeito, 39,7cm. Considerando os erros intrínsecos nas medidas, pode-se considerar como o resultado sendo correto.

A partir disto, é possível ver que existe efeito Talbot também no experimento usando uma superposição de feixes Bessel. Este trabalho, como já dito anteriormente, é um caso limite do nosso, sendo assim, usamos estes dois e mais um terceiro que será explicado posteriormente como base para realizar esta dissertação.

2.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo inicialmente foi mostrado o efeito de auto imagem usando aberturas periódicas e ondas planas, depois mostramos de forma resumida alguns trabalhos que mostraram o mesmo efeito, agora usando aberturas circulares concêntricas e de raios diferentes. Estes estudos realizados aqui serviram como ponto de partida para a obtenção dos nossos resultados.

3 Efeito Talbot em uma rede óptica com carga topológica

3.1 INTRODUÇÃO

Até aqui mostramos alguns casos do efeito Talbot e citamos vários outros já abordados na literatura. Nesta dissertação, propomos um estudo, teórico e experimental, sobre uma nova forma de observar o efeito da auto-imagem, usando redes ópticas como aberturas.

Uma rede óptica é formada pela interferência de múltiplas ondas de um laser, com vetores de onda transversais de mesmo módulo, mas simetricamente orientados em torno da origem, produzindo assim um padrão de onda estacionária. Dentro desse padrão, como os feixes interagem uns com os outros, existem regiões com maior e menor intensidade de luz.

As redes ópticas são de grande importância na área da Mecânica Quântica e aplicações, como a tecnologia de informação quântica (BLOCH, 2005),(JAKSCH, 2004),(MONROE, 2002). A interação de átomos bosônicos em redes ópticas também foi estudado (LEWENSTEIN et al., 2007). Nossa proposta é usar redes ópticas para observar a formação do efeito Talbot ao longo da propagação.

As múltiplas ondas necessárias para formar uma rede óptica pode ser obtida fazendo uso de divisores de feixes e espelhos (MAO et al., 2005), entretanto, a implementação deste método pode ser bastante complicada, por isso, usamos uma técnica de holografia para gerar as redes ópticas.

3.2 MODELO TEÓRICO

3.2.1 Redes Ópticas

Feixes não difratantes ou um número finito de ondas planas têm induzido uma grande variedade de redes ópticas bi e tri dimensionais em meios lineares (ARRIZÓN et al., 2007)(ARRIZÓN et al., 2011)(BECKER et al., 2011)(BOGUSLAWSKI et al., 2011)(FERNANDEZ-VAZQUEZ; MÉNDEZ, 2013)(GAO et al., 2017)(XAVIER et al., 2012b)(XAVIER et al., 2012a) não lineares (ZHANG et al., 2014). Portanto, no contexto de campos ópticos não difratantes, uma rede óptica pode ser expressa pela superposição de Q ondas planas de igual amplitude, cujo vetor de propagação tem uma projeção comum k_z em respeito ao eixo z . O módulo da componente transversa do vetor de propagação k_t é também uma constante dada pela identidade, $k_T^2 = k^2 - k_z^2$, onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda. A projeção do vetor de propagação das ondas interferindo no plano xy forma um anulo, no eixo x , que é múltiplo de $\frac{2\pi}{Q}$. A transformada

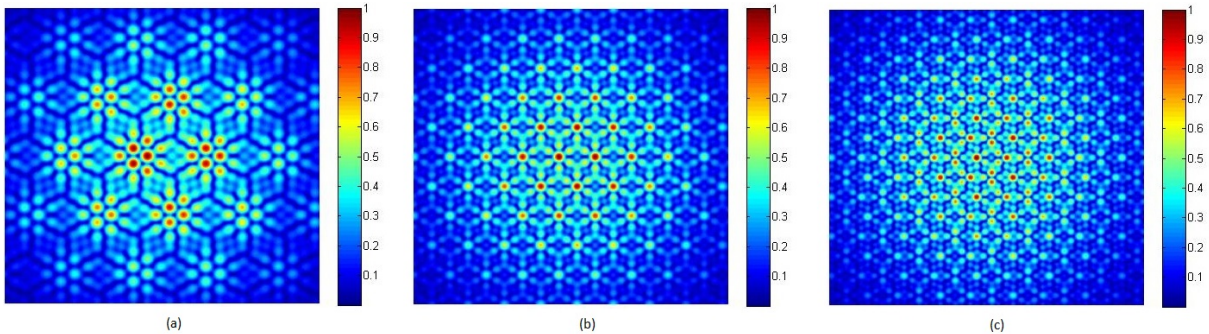
especial inversa de Fourier é considerado uma superposição de feixes gaussianos igualmente deslocados do centro com um certo ângulo azimutal e uma constante de fase proporcional a este ângulo. Uma rede óptica formada por Q ondas planas pode ser escrita como:

$$f(r, \theta) = C \sum_{n=0}^{Q-1} \{ \exp(i\theta_{1n}) \exp [i2\pi\rho_1 r \cos(\theta - n\Delta\theta)] + \exp(i\theta_{2n}) \exp [i2\pi\rho_2 r \cos(\theta - n\Delta\theta)] \} \quad (44)$$

onde r e θ são o raio e o ângulo em coordenadas cilíndricas do sistema, respectivamente. ρ_1 e ρ_2 são as frequências espaciais, $\theta_{ni} = p_i(n\Delta\theta)$, onde $i = 1, 2$ e $\Delta\theta = \frac{2\pi}{Q}$. p é um número inteiro e representa a carga topológica do sistema, neste caso são utilizadas duas redes ópticas, uma com uma carga topológica p_1 e outra com p_2 .

A fig.(15) apresenta três redes ópticas cujo os parâmetros iguais são: $p_1 = 1$ e $p_2 = 2$, $\rho_1 = 1\text{mm}^{-1}$, $Q = 3$. Na fig.(15)a usamos uma frequência espacial $\rho_2 = 1,5\text{mm}^{-1}$, na fig.(16)b $\rho_2 = 2\text{mm}^{-1}$ e na fig.(17c) $\rho_2 = 2,5\text{mm}^{-1}$. Estas figuras nos mostra que conseguimos controlar o padrão das redes ópticas a partir da mudança na frequência espacial.

Figura 15 – Redes ópticas cujo os parâmetros utilizados foram: $Q = 3$, $\rho_1 = 1\text{mm}^{-1}$, $p_1 = 1$ e $p_2 = 2$ (a) $\rho_2 = 1,5\text{mm}^{-1}$. (b) $\rho_2 = 2\text{mm}^{-1}$. (c) $\rho_2 = 2,5\text{mm}^{-1}$

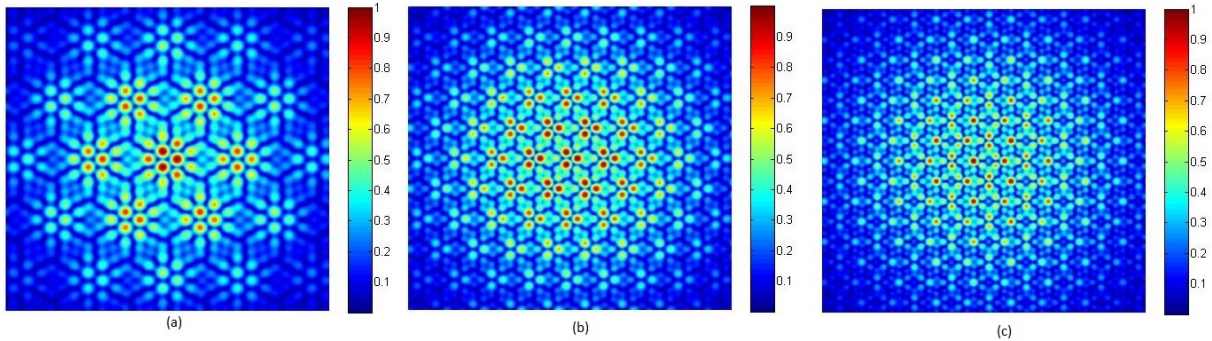


Fonte: Autor

É interessante mostrar o efeito da carga topológica na rede óptica. A fig.(16) exhibe novamente um conjunto de três redes ópticas, com os mesmos parâmetros da figura anterior, entretanto, agora utilizamos $p_1 = 2$ e $p_2 = 6$. Pode-se observar a alteração da carga topológica influencia na mudança da amplitude, isto se dá devido ao fato de estarmos tratando do padrão de intensidade das figuras, calculando o módulo ao quadrado da eq.44) é possível observar que alterar a carga topológica influencia, uma vez que a intensidade depende da diferença entre as cargas, quanto maior for a diferença, maior será a intensidade. A barra de cores ao lado de cada imagem indica a intensidade de cada ponto. Comparando a fig(15) com a fig.(16), vê-se claramente que o padrão não é alterado, entretanto, ele fica mais intenso em determinados pontos.

Isso se dá por causa da diferença entre as cargas topológicas.

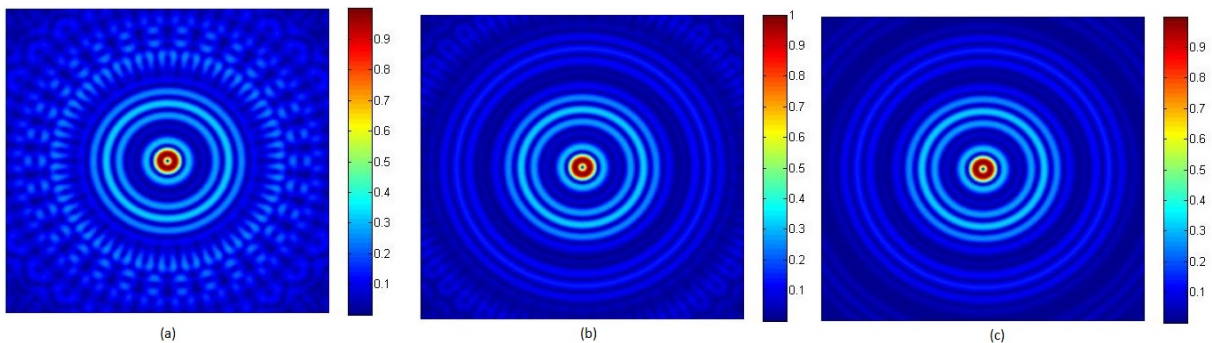
Figura 16 – Redes ópticas cujo os parâmetros utilizados foram: $Q = 3$, $\rho_1 = 1mm^{-1}$, $p_1 = 2$ e $p_2 = 5$ (a) $\rho_2 = 1,5mm^{-1}$. (b) $\rho_2 = 2mm^{-1}$. (c) $\rho_2 = 2,5mm^{-1}$



Fonte: Autor

Vamos agora observar o que ocorre ao aumentar o número de ondas gaussianas. A fig.(17) nos mostra as redes ópticas usando um número Q maior que os anteriores. É possível observarmos que as figuras tendem a virar a interferência de dois feixes Bessel(DURNIN, 1987). Os parâmetros aqui usados são os mesmos da fig.(15), alternando apenas o valor de Q para $Q = 30,50$ e 70 .

Figura 17 – Redes ópticas alterando a quantidade de ondas planas. Parâmetros: $p_1 = p_2 = 1, \rho_1 = 1mm^{-1}, \rho_2 = 1,5mm^{-1}$. (a) $Q = 30$ (b) $Q = 50$ (c) $Q = 70$

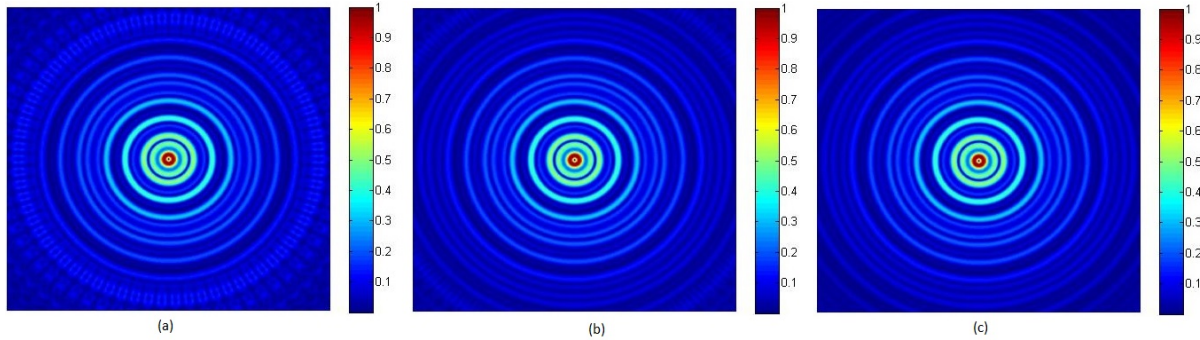


Fonte: Autor

Outra análise que fizemos é de mostrar que, quanto maior a frequência espacial, maior o número de ondas gaussianas para a rede se transformar em um feixe Bessel. Na fig.(18) refizemos o mesmo processo da fig.(17, agora fixando $\rho_2 = 2,5mm^{-1}$ e aumentando a quantidade de ondas planas para $Q = 70, 90$ e 110 . É mais claro ver o motivo da necessidade de aumentar o número de ondas observando a fig.(21, observando a frequência espacial das figuras, podemos ver que, aumentando a frequência espacial, as ondas gaussianas tendem a ficar mais espaçadas umas das

outras, de forma que seja necessário um maior número de ondas para formar uma estrutura anelar.

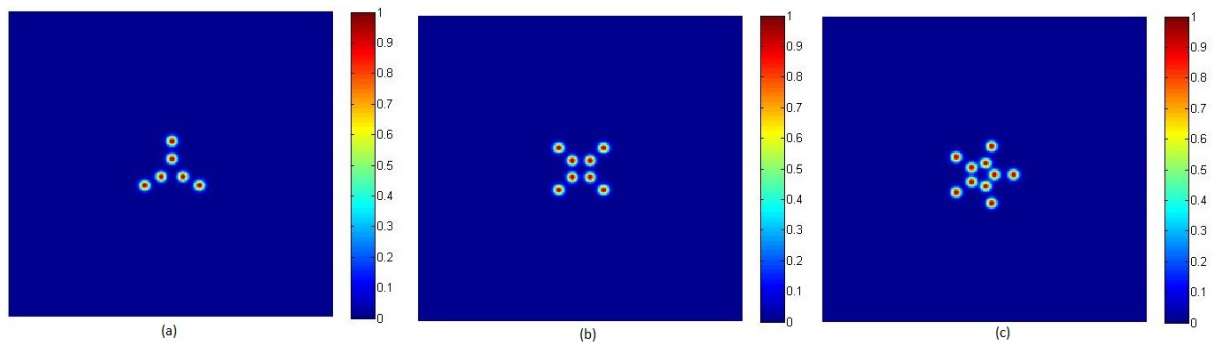
Figura 18 – Redes ópticas alterando a quantidade de ondas planas. Parâmetros: $p_1 = p_2 = 1, \rho_1 = 1mm^{-1}, \rho_2 = 2,5mm^{-1}$. (a) $Q = 70$ (b) $Q = 90$ (c) $Q = 120$



Fonte: Autor

Ao fazermos a transformada inversa de Fourier das redes ópticas nós encontramos o conjunto de ondas, como mostrada na fig.(19). Numericamente realizamos a transformada inversa de Fourier da eq.(44 e usamos como parâmetros $Q = 3, 4$ e 5 e como parâmetros fixos nas três figuras: $p_1 = 1, p_2 = 2, \rho_1 = 1mm^{-1}, \rho_2 = 2,5mm^{-1}$. É possível observar que são formadas estruturas geométricas que variam com o número de ondas planas inseridas.

Figura 19 – Transformada da Fourier das redes ópticas. Parâmetros: $p_1 = 1, p_2 = 2, \rho_1 = 1mm^{-1}, \rho_2 = 2,5mm^{-1}$. (a) $Q = 3$ (b) $Q = 4$ (c) $Q = 5$

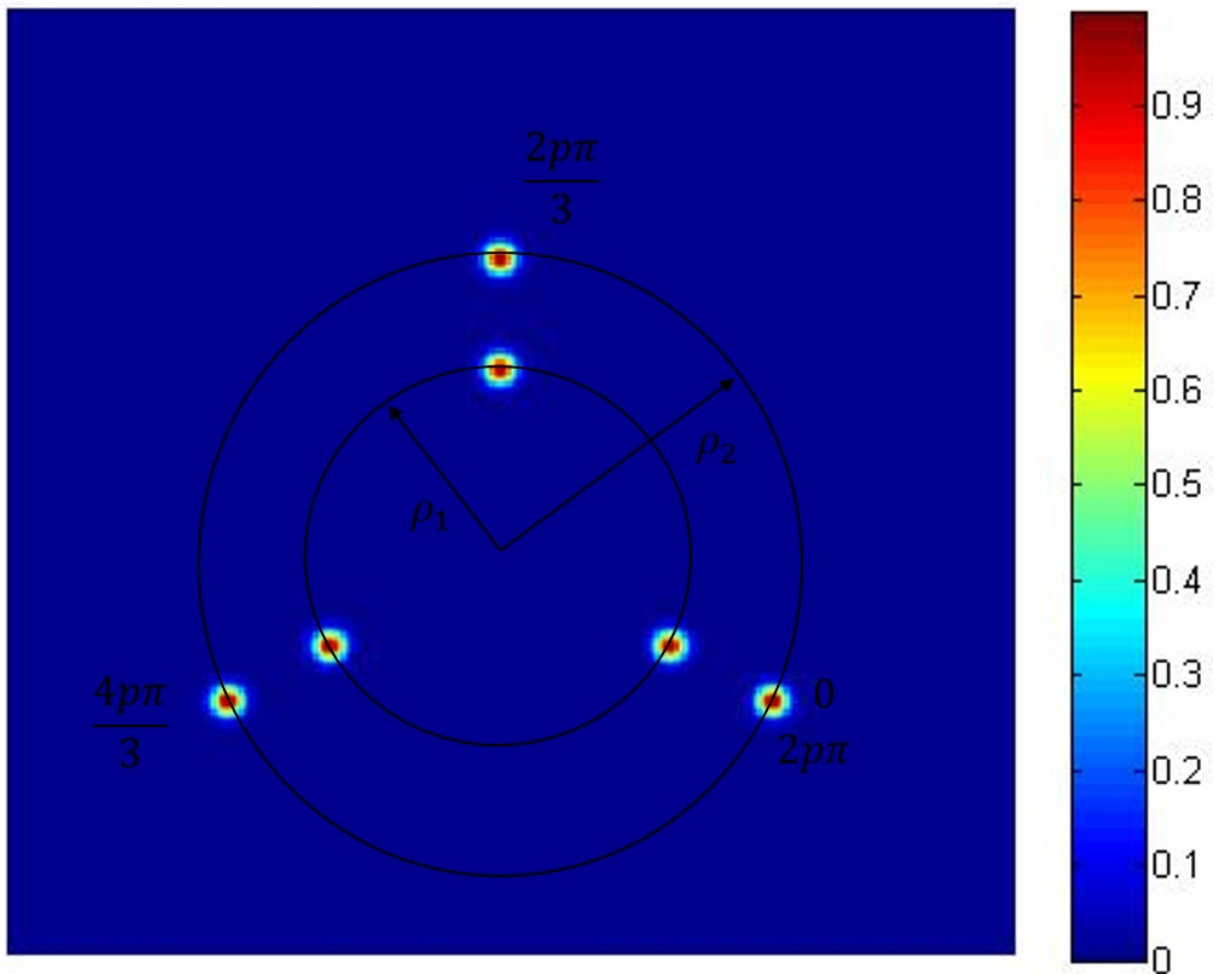


Fonte: Autor

É possível observar que existem dois objetos de mesma geometria para cada imagem da fig.(19), isto se dá devido a soma das duas redes ópticas da eq.(44). O que diferencia uma rede da outra é apenas a carga topológica e a frequência espacial. A carga topológica não influencia no padrão de intensidade, mas exibe diferença na fase das ondas. A fig.(19) é mostrada no plano xy , por isso não é possível observar uma mudança nele ao alterar a carga topológica, entretanto, há uma mudança no eixo z . Temos que cada ponto se encontra em uma fase e que, ao completar um círculo, volta a $2p\pi$. A fase é constante se for uma rede óptica cuja carga topológica for igual

a zero. A fig.(20) ilustra a influência da carga topológica nas ondas planas. Cada um tem sua fase mas existe um atraso de uma em relação a outra no plano z . Com isso, ao alterar a carga topológica também altera a fase das ondas planas bem como o atraso de uma onda em relação a outra para o caso de três ondas planas.

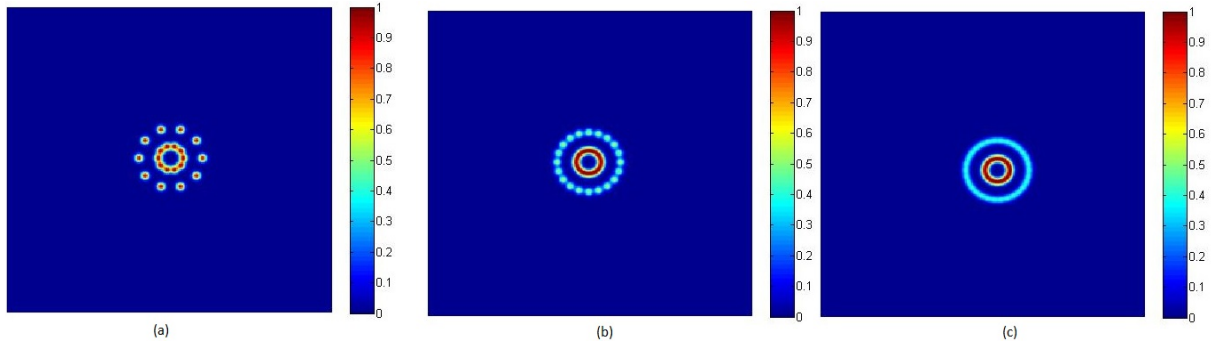
Figura 20 – Relação da fase das ondas planas com suas cargas topológicas.



Fonte: Autor

Aumentando a quantidade de ondas, a estrutura tende a se tornar circular. O que é de se esperar, uma vez que qualquer geometria, tendendo o número de pontas para infinito, tende a virar um círculo, logo, extrapolando a quantidade de ondas para infinito, teremos uma estrutura anelar, como exibido na fig.(21).

Figura 21 – Transformada da Fourier das redes ópticas. Parâmetros: $p_1 = 1, p_2 = 2, \rho_1 = 1mm^{-1}, \rho_2 = 2, 5mm^{-1}$. (a) $Q = 10$ (b) $Q = 20$ (c) $Q = 30$



Fonte: Autor

Na seção anterior calculamos que a transformada de Fourier de uma abertura circular tem como resultado o feixe Bessel, assim, podemos concluir que no caso de ondas tendendo ao infinito, teremos como resultado da transformada de Fourier uma superposição de dois feixes Bessel, como mostrado na fig.(17 e também na referência (ARRIZÓN et al., 2011). No trabalho (ARRIZÓN et al., 2011) os autores estudaram a transformada de Fourier destes conjunto de ondas planas, no nosso caso estamos interessados em obter a interferência de duas redes ópticas para observar o efeito da auto-imagem, entretanto, não vamos realizar o estudo para uma grande quantidade de ondas planas, uma vez que este resultado já foi divulgado na literatura (VIDAL et al., 2008). Focamos nossos estudos para compreender o mesmo fenômeno só que agora em um regime de poucas quantidades de ondas.

Vamos agora calcular o comprimento de Talbot para o caso das redes ópticas, para isso, vamos escrever a eq.(44) em coordenadas cartesianas, devemos lembrar que a regra dos cossenos é dada por:

$$r \cos(\theta - n\Delta\theta) = r [\cos(\theta)\cos(n\Delta\theta) + \sin(\theta)\sin(n\Delta\theta)] = x\cos(n\Delta\theta) + y\sin(n\Delta\theta). \quad (45)$$

Reescrevendo a eq.(44) usando a eq.(45) podemos então utilizar a teoria da difração de Fresnel para resolver o problema. Também é possível resolver o problema em coordenadas cilíndricas entretanto, acarretaria em uma conta um pouco mais trabalhosa, por isso, optamos por resolve-la em coordenadas cartesianas. Reescrevendo a eq.(44), temos:

$$f(x, y) = C \sum_{n=0}^{Q-1} \{ \exp(i\theta_{1n}) \exp[i2\pi\rho_1(x\cos(n\Delta\theta) + y\sin(n\Delta\theta))] + \exp(i\theta_{2n}) \exp[i2\pi\rho_2(x\cos(n\Delta\theta) + y\sin(n\Delta\theta))] \}. \quad (46)$$

Usando a teoria da difração de Fresnel, mostrada na eq.(2), agora em duas dimensões e adaptando para o nosso problema:

$$E(x, y, z) = \frac{C}{\lambda^2 z^2} \sum_{n=0}^{Q-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \exp \left\{ -\frac{i\pi}{\lambda z} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right] \right\} \cdot \{ \exp(i\theta_{1n}) \exp [i2\pi\rho_1(x' \cos(n\Delta\theta) + y' \sin(n\Delta\theta))] + \exp(i\theta_{2n}) \exp [i2\pi\rho_2(x' \cos(n\Delta\theta) + y' \sin(n\Delta\theta))] \}. \quad (47)$$

Separando a eq.(47) em duas, teremos:

$$E(x, y, z) = \frac{C}{\lambda^2 z^2} \sum_{n=0}^{Q-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \exp \left\{ -\frac{i\pi}{\lambda z} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right] \right\} * \exp(i\theta_{1n}) \exp [i2\pi\rho_1(x' \cos(n\Delta\theta) + y' \sin(n\Delta\theta))] + \frac{C}{\lambda^2 z^2} \sum_{n=0}^{Q-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \exp \left\{ -\frac{i\pi}{\lambda z} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right] \right\} * \exp(i\theta_{2n}) \exp [i2\pi\rho_2(x' \cos(n\Delta\theta) + y' \sin(n\Delta\theta))]. \quad (48)$$

É possível ver claramente que a eq.(48) é dividida em duas integrais quase idênticas, mudando apenas a frequência espacial, que é uma constante. Logo, resolveremos a primeira parcela, denominada aqui por E_1 e analogamente vamos obter o resultado da segunda E_2 . Expandindo o termo quadrático:

$$E_1 = \frac{C}{\lambda^2 z^2} \sum_{n=0}^{Q-1} \exp(i\theta_{1n}) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda z} (x^2 + x'^2 - 2xx') + (i2\pi\rho_1 x' \cos(n\Delta\theta)) - \frac{i\pi}{\lambda z} (y^2 + y'^2 + 2yy') + (i2\pi\rho_1 y' \sin(n\Delta\theta)) \right], \quad (49)$$

agrupando os termos com x' e y' :

$$E_1 = \frac{C}{\lambda^2 z^2} \sum_{n=0}^{Q-1} \exp(i\theta_{1n}) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \exp \left[-\frac{i\pi}{\lambda z} x'^2 + x' \left(2i\pi\rho_1 \cos(n\Delta\theta) + \frac{2i\pi}{\lambda z} x \right) - \frac{i\pi}{\lambda z} y'^2 + y' \left(2i\pi\rho_1 \sin(n\Delta\theta) + \frac{2i\pi}{\lambda z} y \right) - \frac{i\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right]. \quad (50)$$

Fazendo uso de uma tabela de integrais (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964), sabemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 \pm bx + c} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a} + c}. \quad (51)$$

Logo, resolvendo a integral da 50 em x' :

$$E_1 = \frac{C}{\lambda^2 z^2} \sum_{n=0}^{Q-1} \exp(i\theta_{1n}) \int_{-\infty}^{\infty} dy' \sqrt{\frac{\lambda z}{i}} \exp \left\{ \left[2i\pi\rho_1 \cos(n\Delta\theta) + \frac{2i\pi x}{\lambda z} \right]^2 \frac{\lambda z}{4\pi i} - \frac{i\pi}{\lambda z} y'^2 + y' \left[2i\pi\rho_1 \sin(n\Delta\theta) + \frac{2i\pi}{\lambda z} y \right] - \frac{i\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right\}. \quad (52)$$

Analogamente resolvemos para y' :

$$E_1 = \frac{C}{\lambda^2 z^2} \sum_{n=0}^{Q-1} \exp(i\theta_{1n}) \sqrt{\frac{\lambda z}{i}} \sqrt{\frac{\lambda z}{i}} \exp \left\{ \left[2i\pi\rho_1 \cos(n\Delta\theta) + \frac{2i\pi x}{\lambda z} \right]^2 \frac{\lambda z}{4\pi i} + \left[2i\pi\rho_1 \sin(n\Delta\theta) + \frac{2i\pi y}{\lambda z} \right]^2 \frac{\lambda z}{4\pi i} - \frac{i\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right\}. \quad (53)$$

Expandindo os quadrados na eq.(52):

$$E_1 = \frac{C}{\lambda^2 z^2} \frac{\lambda z}{i} \sum_{n=0}^{Q-1} \exp(i\theta_{1n}) \exp \left\{ \frac{\lambda z}{4\pi i} \left[-4\pi^2 \rho_1^2 \cos^2(n\Delta\theta) - \frac{4\pi^2 x^2}{\lambda^2 z^2} - \frac{8\pi^2 \rho_1 x \cos(n\Delta\theta)}{\lambda z} \right] + \frac{\lambda z}{4\pi i} \left[-4\pi^2 \rho_1^2 \sin^2(n\Delta\theta) - \frac{4\pi^2 y^2}{\lambda^2 z^2} - \frac{8\pi^2 \rho_1 y \sin(n\Delta\theta)}{\lambda z} - \frac{i\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] \right\}. \quad (54)$$

Usando a propriedade de multiplicação de distribuição e usando a relação que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, temos:

$$E_1 = \frac{C}{\lambda^2 z^2} \frac{\lambda z}{i} \sum_{n=0}^{Q-1} \exp(i\theta_{1n}) \exp \left[-\frac{\lambda z \pi \rho_1^2}{i} - \frac{\pi x^2}{\lambda z i} - \frac{2\pi \rho_1 x \cos(n\Delta\theta)}{i} - \frac{\pi y^2}{\lambda z i} - \frac{2\pi \rho_1 y \sin(n\Delta\theta)}{i} - \frac{i\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right]. \quad (55)$$

Fazendo as simplificações possíveis:

$$E_1 = \frac{C}{\lambda z} \sum_{n=0}^{Q-1} \exp(i\theta_{1n}) \exp \left[i\pi \lambda z \rho_1^2 + 2i\pi \rho_1 x \cos(n\Delta\theta) + 2i\pi \rho_1 y \sin(n\Delta\theta) \right]; \quad (56)$$

Analogamente:

$$E_2 = \frac{C}{\lambda z} \sum_{n=0}^{Q-1} \exp(i\theta_{2n}) \exp \left[i\pi \lambda z \rho_2^2 + 2i\pi \rho_2 x \cos(n\Delta\theta) + 2i\pi \rho_2 y \sin(n\Delta\theta) \right]. \quad (57)$$

Onde, lembrando, $E(x, y, z) = E_1 + E_2$. É possível então calcular a intensidade. Para isso, deve-se recordar que:

$$I(x, y, z) = |E(x, y, z)|^2 = |E_1 + E_2|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2\cos(E_1^* E_2). \quad (58)$$

Por simplicidade, resolvemos separadamente, temos então:

$$|E_1|^2 = \frac{|C|^2}{\lambda^2 z^2} \sum_{n=0}^{Q-1} \sum_{n''=0}^{Q-1} \exp[i(\theta_{1n} - \theta_{1n''})] \exp\left\{2i\pi\rho_1 x \left[\cos(n\Delta\theta) - \cos(n''\Delta\theta)\right] + 2i\pi\rho_1 y \left[\sen(n\Delta\theta) - \sen(n''\Delta\theta)\right]\right\} \quad (59)$$

$$|E_2|^2 = \frac{|C|^2}{\lambda^2 z^2} \sum_{n=0}^{Q-1} \sum_{n'''=0}^{Q-1} \exp[i(\theta_{2n} - \theta_{2n'''})] \exp\left\{2i\pi\rho_2 x \left[\cos(n\Delta\theta) - \cos(n'''\Delta\theta)\right] + 2i\pi\rho_2 y \left[\sen(n\Delta\theta) - \sen(n'''\Delta\theta)\right]\right\}, \quad (60)$$

e o termo de interferência é dado por:

$$E_1^* E_2 = \frac{|C|^2}{\lambda^2 z^2} \sum_{n=0}^{Q-1} \sum_{n'=0}^{Q-1} \exp[i(\theta_{2n} - \theta_{1n'})] \exp\left\{i\pi\lambda z (\rho_2^2 - \rho_1^2) + 2i\pi x \left[\rho_2 \cos(n\Delta\theta) - \rho_1 \cos(n'\Delta\theta)\right] + 2i\pi y \left[\rho_2 \sen(n\Delta\theta) - \rho_1 \sen(n'\Delta\theta)\right]\right\}. \quad (61)$$

Vamos inicialmente focar nossa atenção para a eq.(61). Da mesma forma feita anteriormente, sabemos que o efeito Talbot é descrito pela fase do termo de referência. Pela fórmula de Euler, ao somar 2π à uma exponencial imaginária, ela voltará a ter o mesmo valor. Somando 2π na exponencial da eq.(61), teremos:

$$\begin{aligned} (\theta_{2n} - \theta_{1n'}) + \pi\lambda z_1 (\rho_2^2 - \rho_1^2) + 2\pi x \left[\rho_2 \cos(n\Delta\theta) - \rho_1 \cos(n'\Delta\theta)\right] + \\ 2\pi y \left[\rho_2 \sen(n\Delta\theta) - \rho_1 \sen(n'\Delta\theta)\right] = \\ (\theta_{2n} - \theta_{1n'}) + \pi\lambda z_2 (\rho_2^2 - \rho_1^2) + 2\pi x \left[\rho_2 \cos(n\Delta\theta) - \rho_1 \cos(n'\Delta\theta)\right] + \\ 2\pi y \left[\rho_2 \sen(n\Delta\theta) - \rho_1 \sen(n'\Delta\theta)\right] + 2m\pi. \end{aligned} \quad (62)$$

Resolvendo, ficamos com:

$$\pi\lambda z_1 (\rho_2^2 - \rho_1^2) = \pi\lambda z_2 (\rho_2^2 - \rho_1^2) + 2m\pi, \quad (63)$$

definindo que $z_T = z_1 - z_2$ e isolando, temos que:

$$z_T = \frac{2m}{\lambda(\rho_2^2 - \rho_1^2)}. \quad (64)$$

Onde m é um número inteiro. A partir da eq.(64) vemos que o efeito Talbot é proporcional ao inverso do quadrado das diferenças da frequência espaciais, entretanto, devemos apontar que na eq.(64) a carga topológica e o número de ondas Q não influenciam no comprimento de Talbot. o fato da carga topológica não afetar z_T já havia sido explorado anteriormente (SUN; ZHANG, 2016) e para o nosso trabalho não foi diferente.

3.2.2 Resultados Teóricos

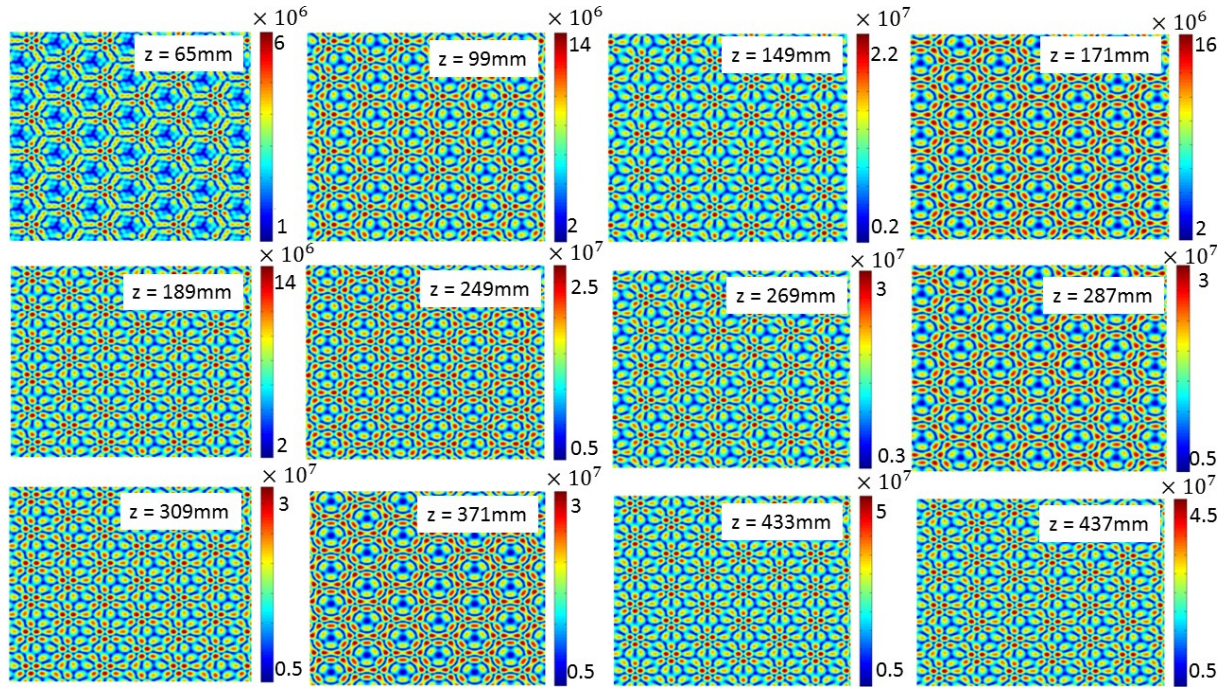
A partir das equações obtidas nesta seção podemos encontrar alguns resultados bastante interessantes. Para isso, foi usado o *software matLAB* para fazer o *plot* da eq.(58). No intuito de termos uma comparação mais precisa, usamos os mesmos parâmetros utilizados nas medições experimentais. Definimos que o comprimento de onda é de $\lambda = 514.10^{-6}$ mm e começamos a calcular com $z = 65mm$ até $z = 465mm$, com passos de 2 em 2 milímetros. O resultado é um total de 200 imagens, das quais apenas as principais foram mostradas aqui para a comparação com os resultados experimentais. Os parâmetros que são variados serão exibidos a cada conjunto de imagem, vamos fazer a análise para diferentes frequências espaciais, cargas topológicas e quantidade de ondas.

A partir da eq.(64) e utilizando os parâmetros $\rho_1 = 5mm^{-1}$; $\rho_2 = 7,5mm^{-1}$ além dos parâmetros fixos definidos anteriormente, é fácil verificar que o comprimento de Talbot é dado por:

$$z_T = 124,51mm \quad (65)$$

A fig.(22) exibe o efeito Talbot usando os mesmos parâmetros para encontrar a eq.(65), caso ocorra a repetição do padrão de intensidade nas distâncias obtidas pela equação acima, podemos então confirmar que nossa equação para o comprimento de Talbot está correta. Entretanto, a eq.(65) contém o resultado decimal e nós calculamos para cada 2 milímetros, logo, não podemos obter o mesmo resultado, sendo necessário uma aproximação.

Figura 22 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 3; p_1 = 1; p_2 = 2; \rho_1 = 5mm^{-1}; \rho_2 = 7,5mm^{-1}$



Fonte: Autor

É possível observar que houve uma repetição do padrão exibido no ponto $z = 65mm$ em $z = 189mm$ e $z = 309mm$. Então, a distância entre a primeira repetição e a segunda é de $124mm$. A diferença entre a segunda e a terceira é de $120mm$. Os valores que faltam para ser igual ao resultado obtido com a eq.(64) se dá, primeiramente pelo que foi dito anterior, o comprimento de Talbot não é um valor inteiro. Além disto é visto que a diferença é bastante pequena, apenas de 2 passos, logo, é possível dizer sim que o resultado obtido é correto, apesar de ser uma aproximação.

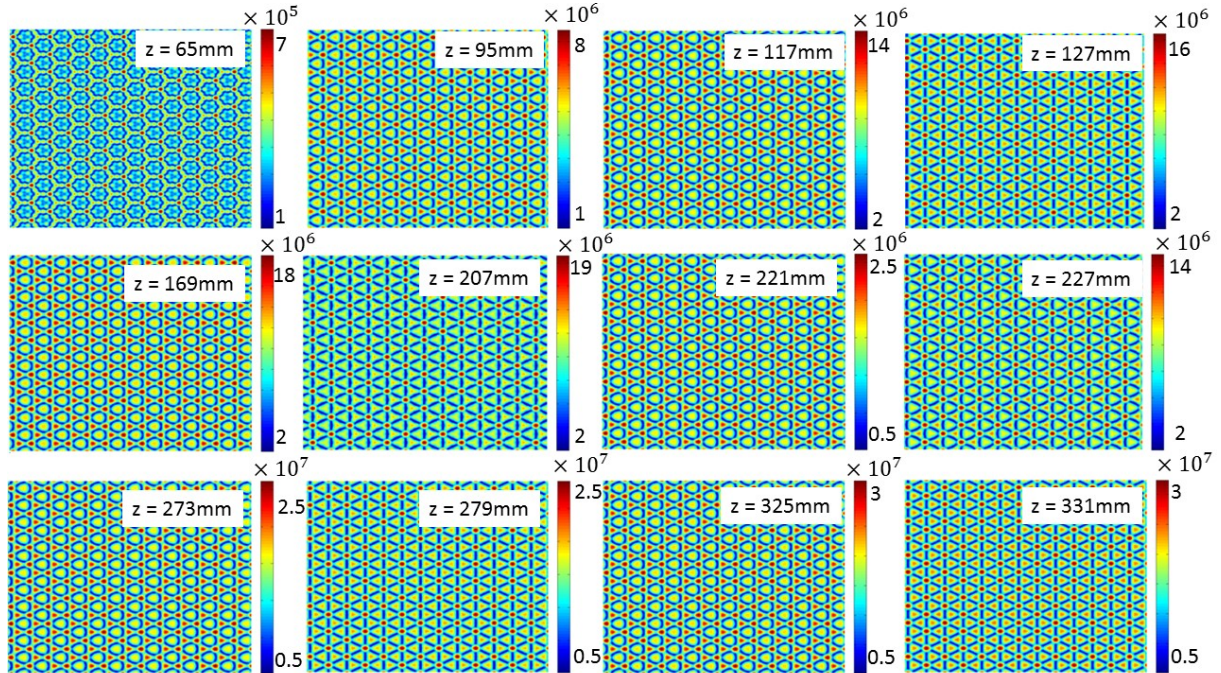
Deve ter atenção para o padrão de difração em $z = 149mm$, pode-se interpreta-lo erroneamente como uma repetição do padrão $z = 65mm$, mas, se for observado com cuidado, vê-se que ele é apenas semelhante. Ele tem um deslocamento em relação ao resultado correto. Isto será observado em diversos outros resultados aqui obtidos, tanto teórico quanto experimental.

Mantendo a carga topológica fixa e alterando uma das frequência espacial espera-se que o comprimento de Talbot diminua. Fazendo uso novamente da eq.(64), agora utilizando como parâmetro $\rho_1 = 5mm^{-1}; \rho_2 = 10mm^{-1}$, o resultado é exibido na fig.(22). O comprimento de Talbot é vale:

$$z_T = 51,88mm \quad (66)$$

Logo, o comprimento de Talbot diminuiu ao aumentar a diferença a diferença entre as frequências espaciais. Pela lógica, veremos uma maior quantidade de repetições do padrão fazendo a propagação ao longo da mesma distância anterior.

Figura 23 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 3$; $p_1 = 1$; $p_2 = 2$; $\rho_1 = 5mm^{-1}$; $\rho_2 = 10mm^{-1}$

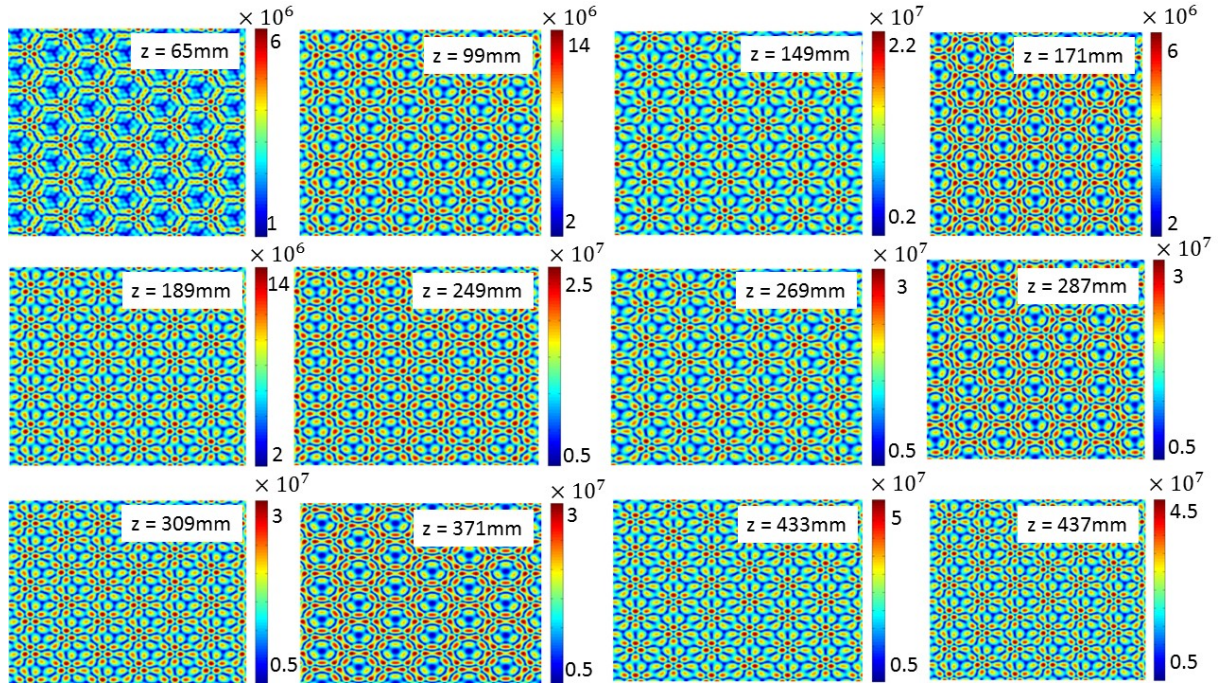


Fonte: Autor

Como era esperado, o padrão agora é diferente do obtido da fig.(22). Neste caso, as repetições ocorreram em $z = 117mm$, $z = 169mm$, $z = 221mm$, $z = 273mm$, $z = 325mm$. A diferença entre a primeira reincidência do padrão e a segunda é de 52mm, da segunda para terceira também de 52mm, igualmente para a terceira e quarta e da quarta pra quinta. Isto mostra que o resultado aqui obtido está de acordo com o esperado pela eq.(66).

Após isto, comprovamos que o MAO da rede não tem influência no comprimento de Talbot, para observar isto, mudamos a carga topológica das redes, ficando agora $p_1 = p_2 = 1$, o comprimento de de Talbot também é dado pela eq.(65)

Figura 24 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 3; p_1 = p_2 = 1; \rho_1 = 5mm^{-1}; \rho_2 = 7,5mm^{-1}$

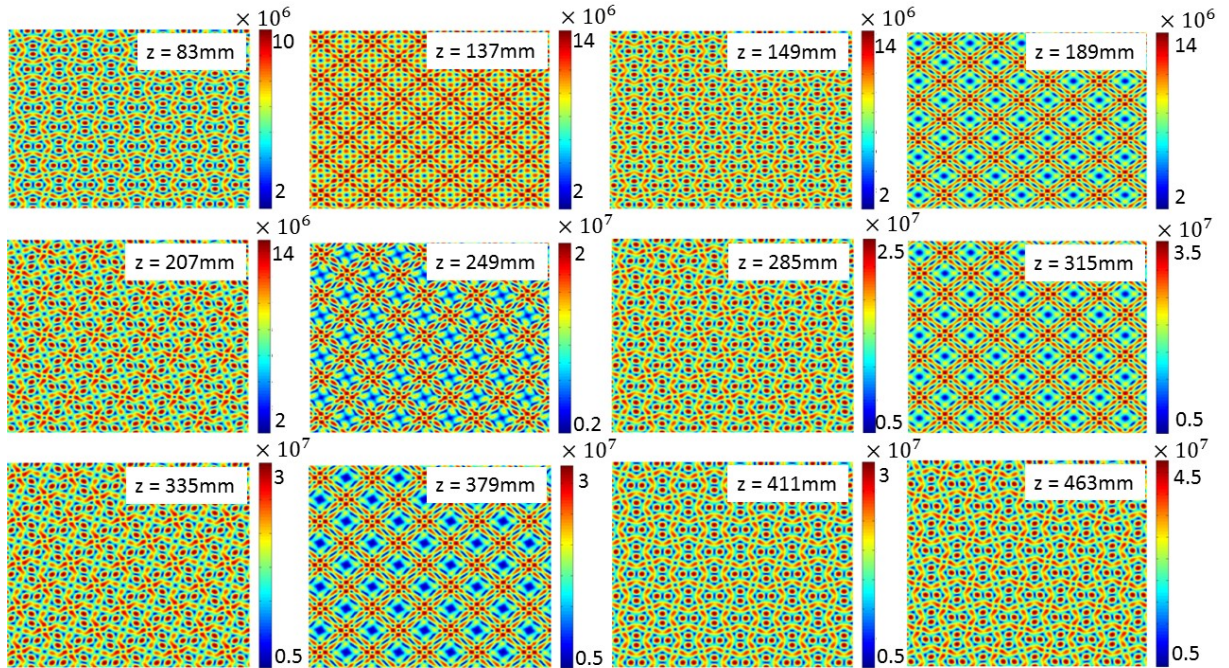


Fonte: Autor

Como se vê, o comprimento de Talbot é o mesmo que para o caso de das cargas topológicas $p_1 = 1; p_2 = 2$ havendo apenas uma mudança no padrão de interferência.

Agora utilizamos quatro ondas planas em vez de três. Neste caso, o resultado deve continuar sendo o mesmo. Fizemos novamente a comparação alterando as frequências espaciais e as cargas topológicas. O comprimento de Talbot não é alterado ao mudar a quantidade de ondas planas, como pode ser visto na fig.(25).

Figura 25 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 4$; $p_1 = p_2 = 1$; $\rho_1 = 5\text{mm}^{-1}$; $\rho_2 = 7,5\text{mm}^{-1}$

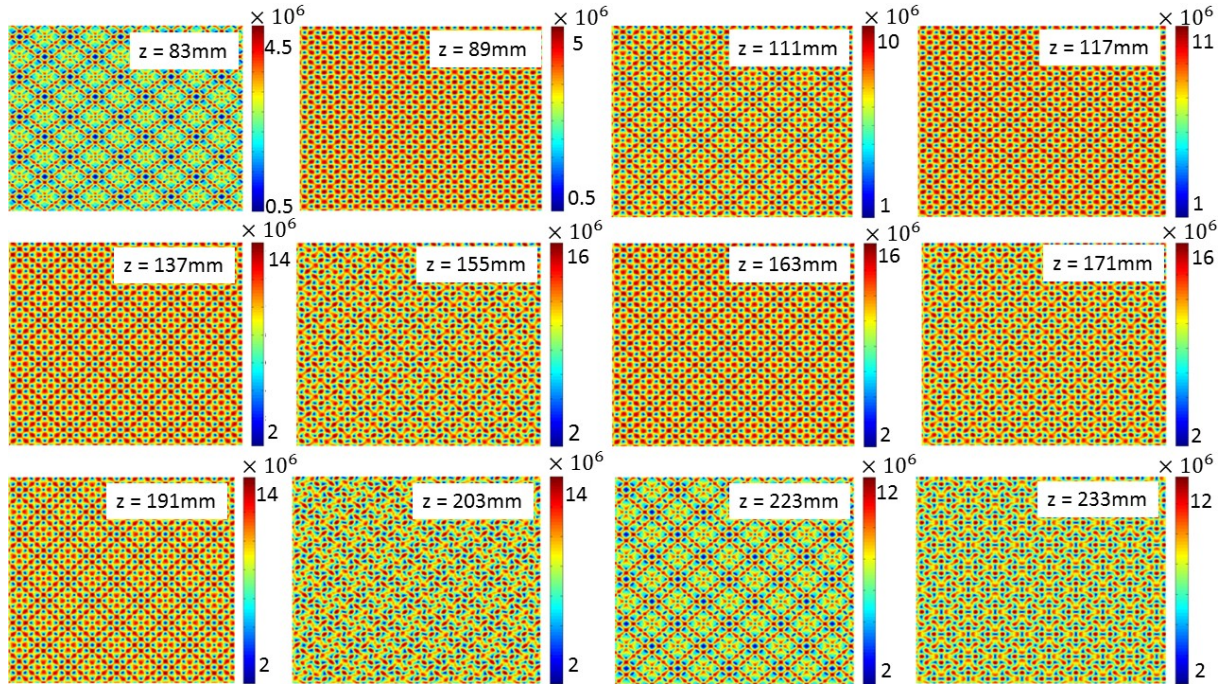


Fonte: Autor

Apesar da pequena diferença em relação ao resultado para $Q = 3$, o resultado é bem aproximado do correto. A diferença entre as duas primeiras repetições é de 124mm, da segunda pra terceira 128mm, da terceira pra quarta 128. A diferença é um pouco maior mas ainda assim é possível aceitar como correta, gira em torno de 4mm.

Mantemos quatro ondas planas e alteramos a frequência espacial para comprovar que o comprimento de Talbot é o mesmo, independente da quantidade de ondas planas.

Figura 26 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 4$; $p_1 = p_2 = 1$; $\rho_1 = 5mm^{-1}$; $\rho_2 = 12,5mm^{-1}$

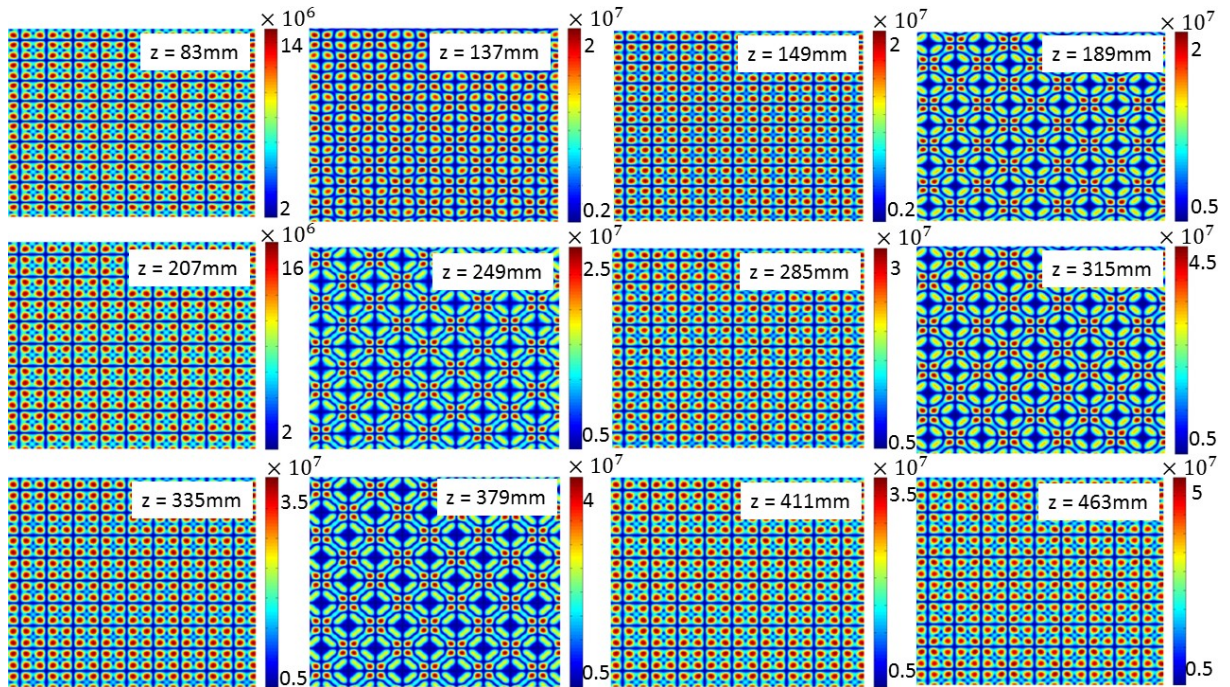


Fonte: Autor

É possível ver, novamente, que o resultado está próximo do valor correto, com pequenas diferenças, na casa dos milímetros. A diferença entre a primeira repetição e a segunda é de 28mm, da segunda para terceira de 26mm, da terceira pra quarta também 26mm e da quarta pra quinta de 30mm. Os resultados giram em torno apenas de 4mm pra mais ou pra menos, logo, pode-se considerar como correto.

Mantemos a frequência espacial fixa em $\rho_1 = 5mm^{-1}$ e $\rho_2 = 7,5mm^{-1}$ e alteramos a carga topológica para conseguir observar que, tanto para $Q = 3$ ou $Q = 4$, o comprimento de Talbot não é alterado, como visto na fig.(27).

Figura 27 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 4$; $p_1 = p_2 = 2$; $\rho_1 = 5\text{mm}^{-1}$; $\rho_2 = 7,5\text{mm}^{-1}$



Fonte: Autor

Mais uma vez confirmamos que a carga topológica não influencia no comprimento de Talbot, apenas em seu padrão.

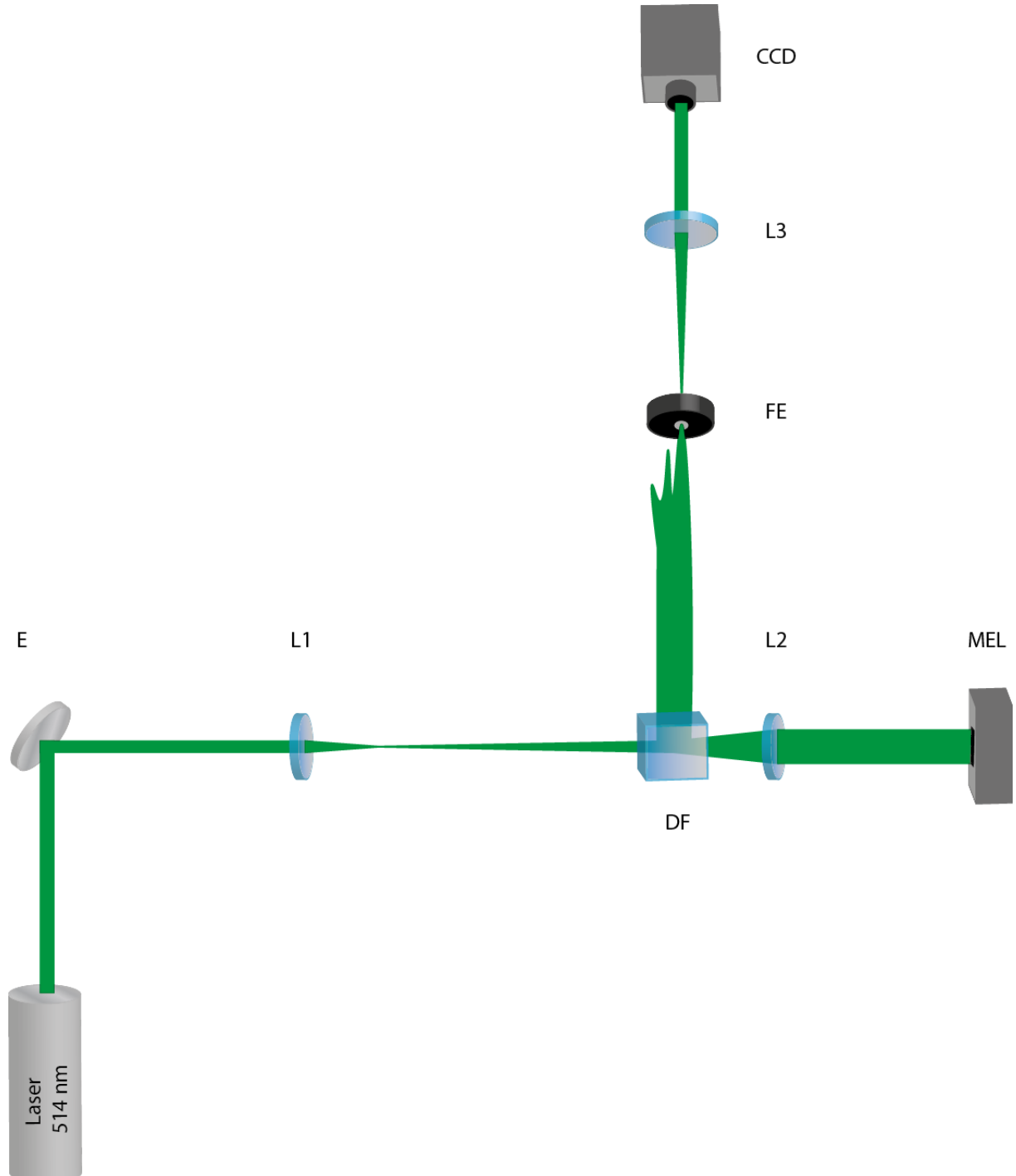
Como já foi provado diversas vezes aqui, o resultado teórico parece consistente, uma vez que foi feito vários testes para diversas cargas topológicas, mostrando que o resultado era sempre o esperado, baseado nos cálculos. Apesar de algumas pequenas diferenças em relação aos valores, não houve nenhuma discrepância a ponto de considerar errado. O próximo passo é comparar os resultados teóricos com os experimentais e mostrar que está de acordo com o esperado.

3.3 EXPERIMENTO

Para comprovar o resultado teórico foi feito o experimento no laboratório. A seguir dividimos esta seção em Metodologia e Procedimentos, onde terá o aparato usado para realizar o experimento e a explicação de cada elemento óptico usado. Depois uma seção reservada para os resultados obtidos, discussões e comparação com os resultados teóricos.

3.3.1 Metodologia e Procedimentos

Figura 28 – Aparato experimental. E: Espelho, L_1 : Lente 1, DF: Divisor de Feixe, L_2 : Lente 2, MEL: Modulador espacial da luz, FE = Filtro Espacial, L3: Lente 3, CCD: Câmera.



Fonte: Autor

A primeira lente L_1 de distância focal $f_1 = 30\text{mm}$ tem a função de expandir o feixe. A segunda, L_2 , cuja distância focal é de $f_2 = 500\text{mm}$ tem a função de colimar o feixe, ou seja, os vetores de onda se encontram paralelos um ao outro, fazendo com que o feixe não expanda

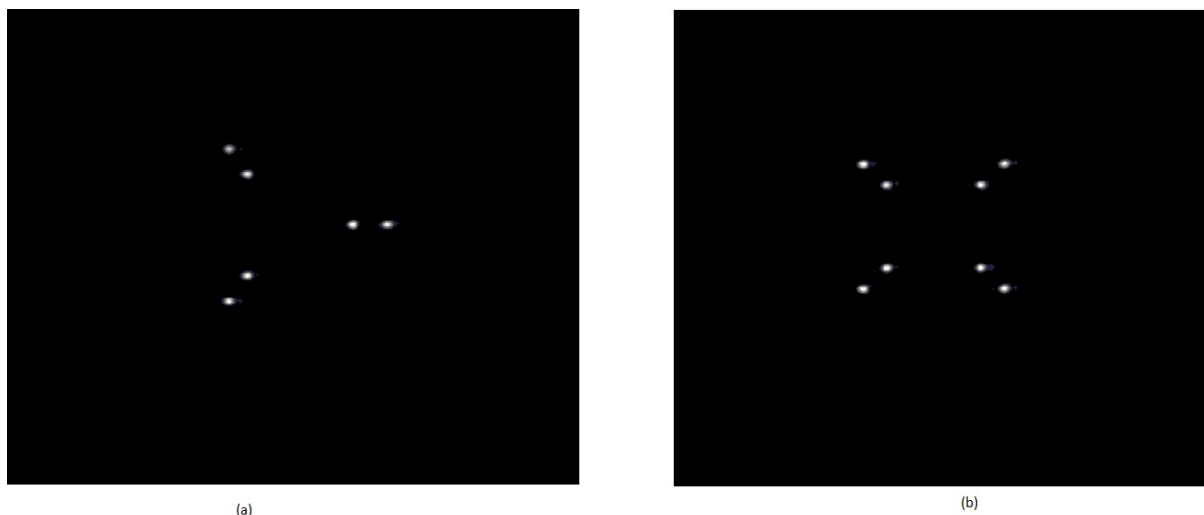
mais. Ela se encontra a 53cm da primeira lente. O feixe deve expandir o suficiente para iluminar o MEL (Modulador Espacial da Luz) de forma uniforme. No display do MEL é inserido um holograma de fase que terá a função de formar as duas redes ópticas, utilizando a eq.(44). Para isso fizemos uso do método do Arrizón (ARRIZÓN et al., 2007). Após passar novamente pela lente de L_2 , ocorre uma transformada de Fourier e então colocamos um filtro espacial, após 50cm da lente L_2 , usado para selecionar o campo desejado, que é espalhado na primeira ordem de difração no plano de Fourier. Uma terceira lente L_3 de comprimento focal $f_3 = 100\text{mm}$ é usada, confocal a lente de L_2 , para formar a imagem em uma câmera CCD que é montada em cima de um translador. Uma imagem do campo no MEL é formada no ponto onde fica a CCD, nós iremos mover o translador de 2 em 2 milímetros, como fizemos usando o *matLAB*. Começamos a ver a imagem em 65mm e indo de 2 em 2 milímetros, paramos em 265mm.

Devido ao uso das lentes de L_2 e L_3 , acontece uma ampliação do objeto, isto se dá por causa do teorema do deslocamento. Sabe-se que a ampliação de um objeto após incidir em duas lentes é dada por $\frac{L_2}{L_3}$. No nosso caso, o resultado é $\frac{1}{5}$. Logo, as frequências espaciais usadas no holograma são cinco vezes menores que as da teoria, ou seja, $\rho_1 = 1\text{mm}^{-1}$ e $\rho_2 = 1,5; 2; 2,5\text{mm}^{-1}$.

3.3.2 Resultados Experimentais

Antes de seguir com os resultados, é interessante mostrar o resultado da Transformada de Fourier e mostrar que ela está de acordo com a fig.(21). Para capturar no experimento foi feita a imagem do plano de Fourier, usando duas lentes confocais e de comprimentos focais iguais, de modo que não ocorra uma ampliação ou redução do tamanho da imagem. Usando a câmera CCD foi possível obter o resultado da fig.(29), que está de acordo com o resultado já obtido anteriormente pela teoria.

Figura 29 – $p_1 = 1, p_2 = 2, \rho_1 = 1mm^{-1}, \rho_2 = 2,5mm^{-1}$. (a) $Q = 3$ (b) $Q = 4$



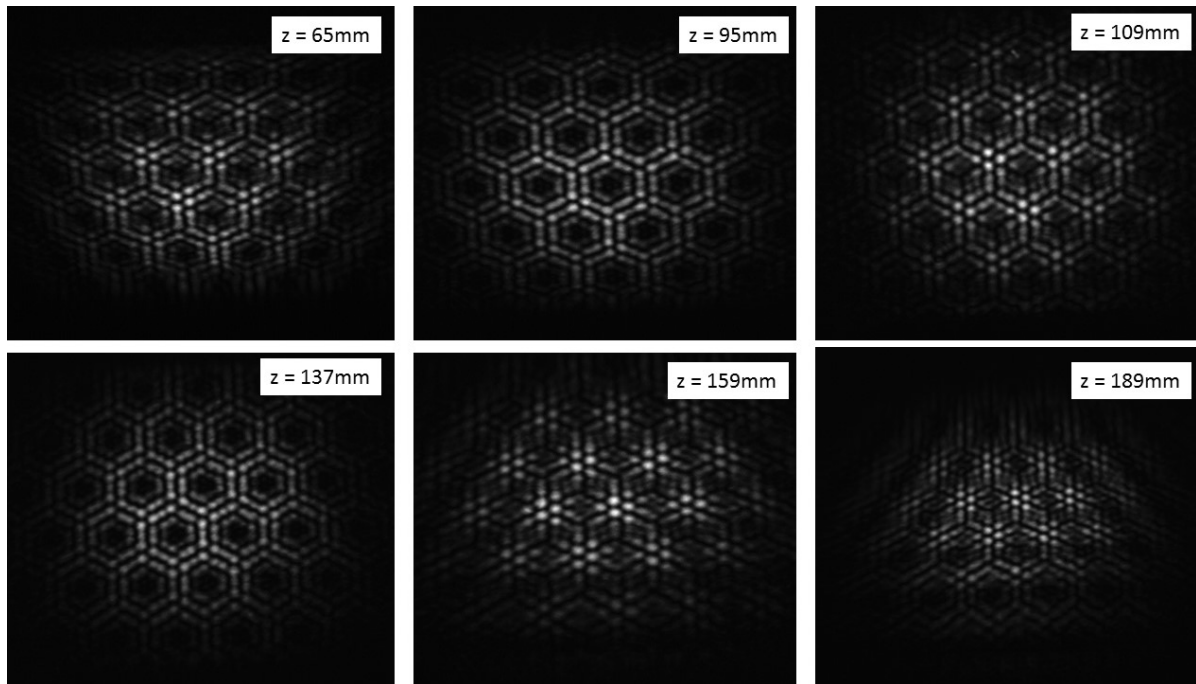
Fonte: Autor

Para obter o resultado da fig.(29) é necessário fazer uso do MEL, no seu display é possível colocar hologramas de fase, no nosso caso, duas redes ópticas.

De posse do modelo teórico e dos hologramas para os diversos parâmetros alterados, obtivemos diferentes padrões de difração ao longo da propagação. Assim, apresentaremos agora os resultados experimentais obtidos e faremos uma comparação com os resultados teóricos já exibidos anteriormente. Novamente, fizemos o experimento alterando a frequência espacial, a carga topológica e a quantidade de ondas planas. Como na teoria considera-se que a energia é infinita e as aberturas de tamanhos infinitamente pequenos, como feito pras aberturas circulares na seção anterior, é possível fazer uma propagação até distâncias infinitas. Entretanto, assim como para a geração de feixes Bessel, não é possível repetir o mesmo procedimento experimentalmente. Devido a isso, a propagação no experimento foi 200mm a menos que o da teoria, mas não afetou o resultado de forma alguma, uma vez que as repetições ocorriam sempre a menos de 200mm.

Como mostrado na teoria, o comprimento de Talbot para estas frequências espaciais é dada pela eq.(65). A fig.(30) representa o padrão de difração ao longo do eixo de propagação.

Figura 30 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação(experimento). Parâmetros: $Q = 3; p_1 = 1; p_2 = 2; \rho_1 = 1mm^{-1}; \rho_2 = 1,5mm^{-1}$



Fonte: Autor

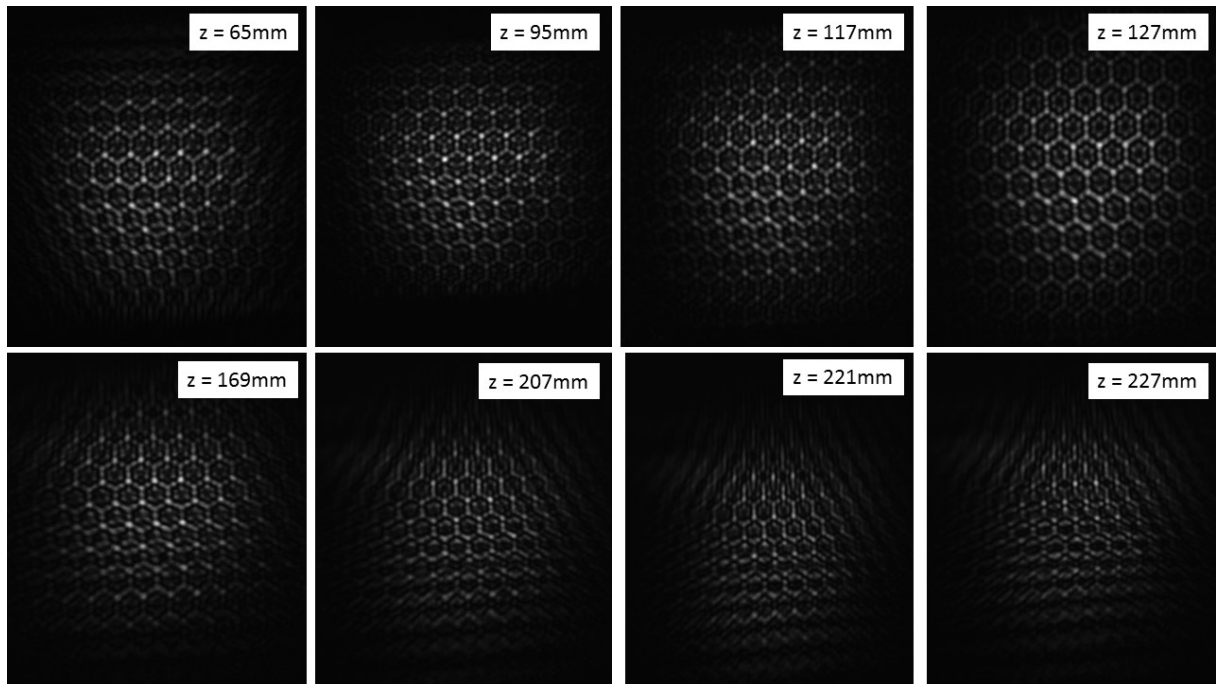
Devido ao problema já dito anteriormente sobre o fato que na teoria a luz que passa pelas fendas terem energia infinitas, neste caso o padrão tende a desaparecer pouco depois de ser feita a propagação. Entretanto, é possível observar que houve uma repetição do padrão em $z = 205mm$, ou seja, $124mm$ após a primeira imagem, confirmando assim, que a eq.(65) estava correta, assim como a teoria. Novamente, deve-se tomar cuidado com o padrão em $z = 65mm$ e $z = 109mm$. Assim como na teoria, neste caso as imagens são apenas semelhantes, causando assim uma falsa impressão de que houve uma repetição neste ponto. A imagem está deslocada em relação ao padrão de Talbot.

Infelizmente, para todos os casos usando a frequência espacial $\rho_2 = 1,5mm$, teremos apenas uma auto imagem, para os outros casos continuaremos tendo várias repetições.

Mudou-se então a frequência espacial, de forma que fosse possível observar a alteração do comprimento de Talbot.

A partir da eq.(66), é possível ver que o comprimento de Talbot irá diminuir em relação ao caso anterior. Sabendo disso, a fig.(31) deve nos mostrar um efeito de auto imagem com uma repetição em uma distância muito menor. Usando agora $\rho_2 = 2mm$.

Figura 31 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação(experimento). Parâmetros: $Q = 3; p_1 = 1; p_2 = 2; \rho_1 = 1mm^{-1}; \rho_2 = 2mm^{-1}$



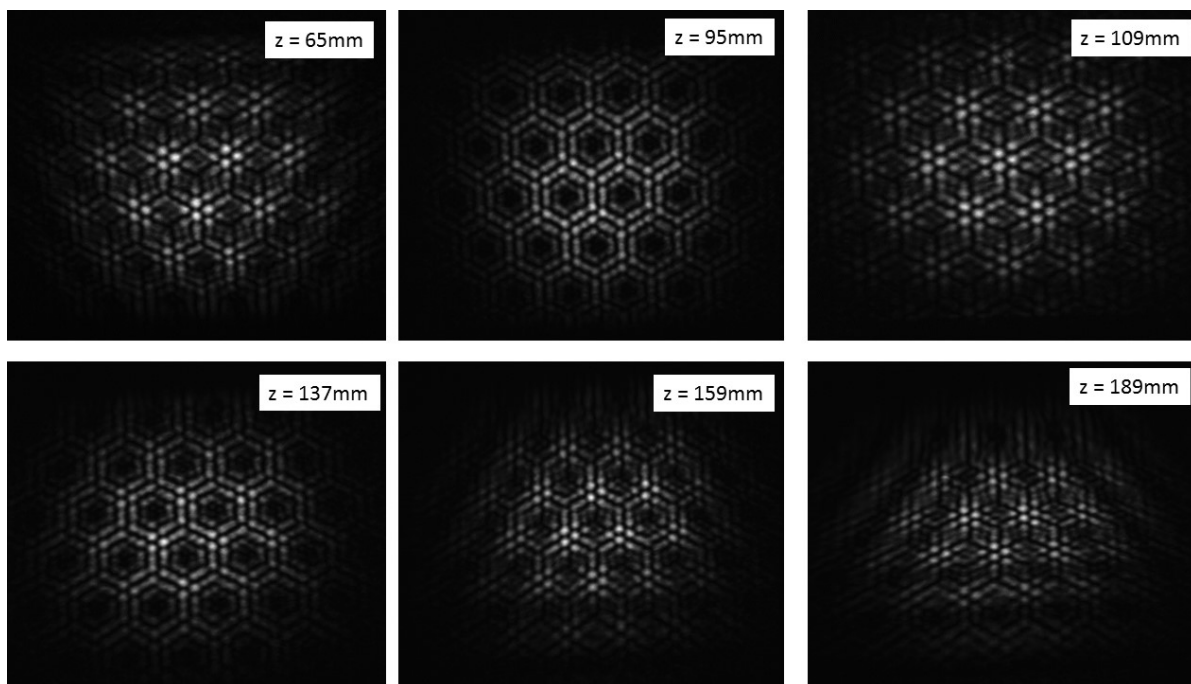
Fonte: Autor

Como esperado, o comprimento de Talbot diminuiu, tornando assim compatível com os resultados teóricos. É possível observar que a diferença entre as repetições são de 52mm, próximo dos 51, 88mm mostrado na teoria. Apesar da pequena diferença, o resultado está de acordo com o esperado pela eq.(66).

É possível se observar que o padrão vai desaparecendo em $z = 221mm$, por isso não foi possível fazer a propagação até a mesma distância feita na teoria.

Agora, mudamos a carga topológica e comparamos com o caso de $\rho_2 = 2mm^{-1}$ e com cargas $p_1 = 1; p_2$, o resultado pode ser conferido na fig.(32).

Figura 32 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação(experimento). Parâmetros: $Q = 3; p_1 = p_2 = 2; \rho_1 = 1mm^{-1}; \rho_2 = 1,5mm^{-1}$

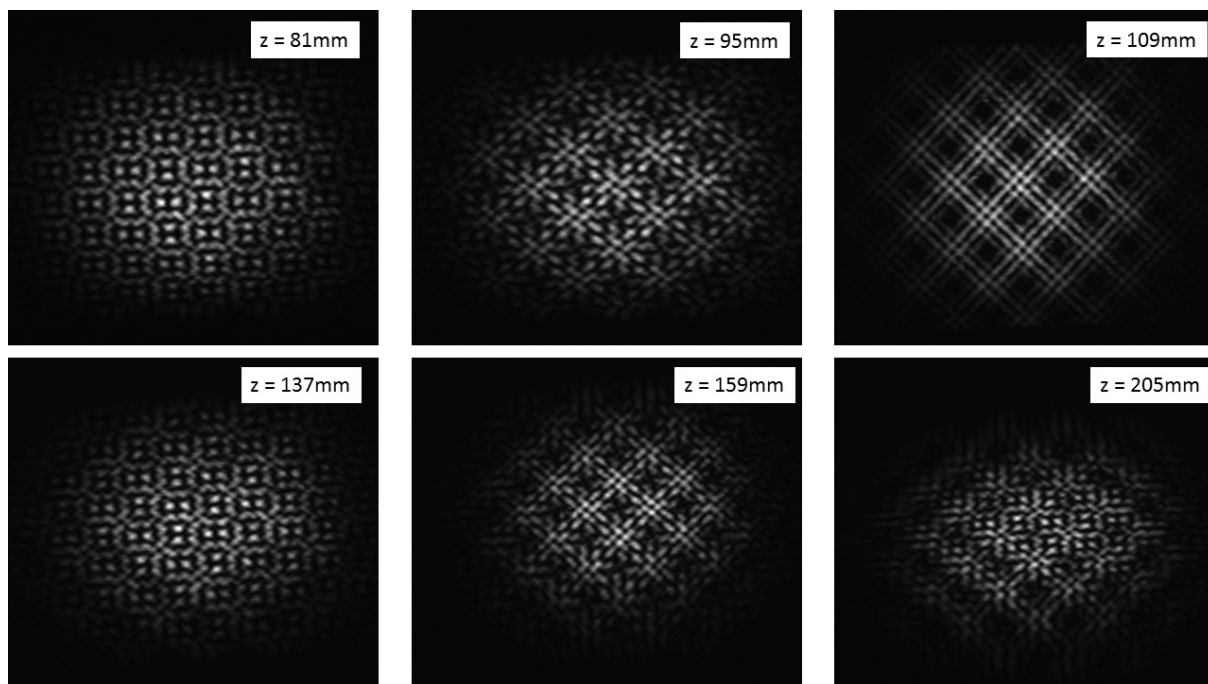


Fonte: Autor

O resultado se encontra de acordo com a teoria e com as contas, o comprimento de Talbot não é alterado mudando a carga topológica.

Mudamos agora a quantidade de ondas planas, usaremos agora quatro ondas planas, de forma que confirme nossa teoria que mostra que a quantidade de ondas planas não influencia no comprimento de Talbot.

Figura 33 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação(experimento). Parâmetros: $Q = 4; p_1 = p_2 = 1; \rho_1 = 1mm^{-1}; \rho_2 = 1,5mm^{-1}$

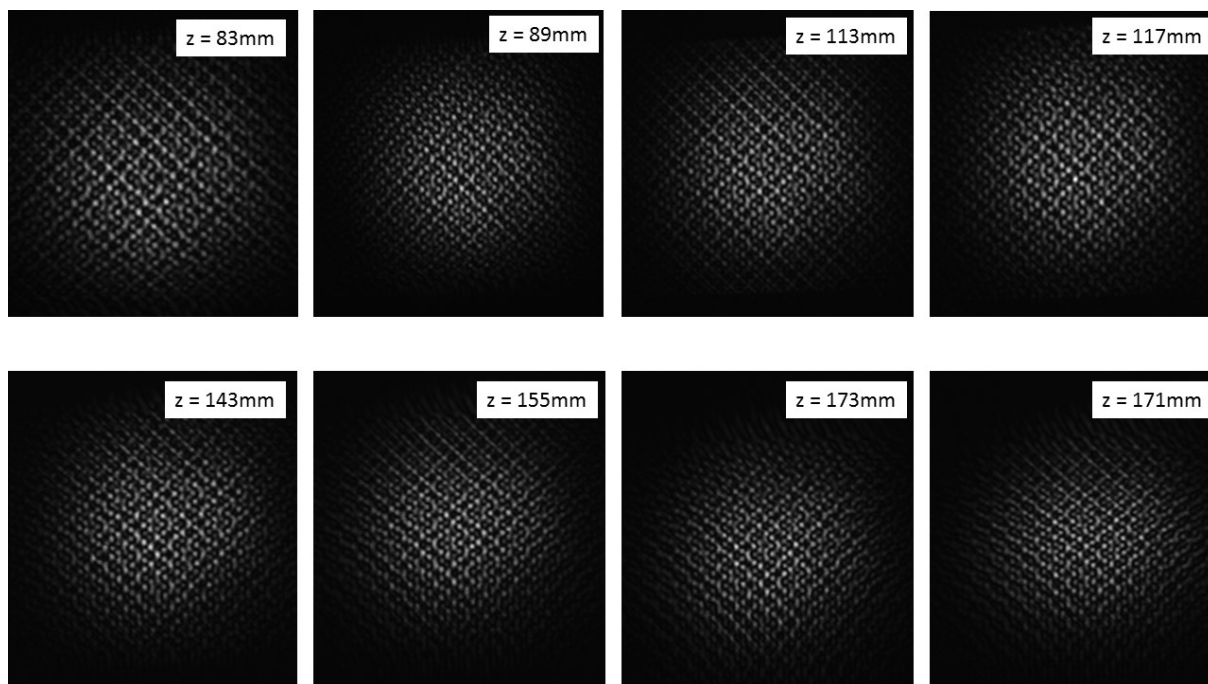


Fonte: Autor

É visto agora que a quantidade de ondas planas também não influenciam no comprimento de Talbot. A repetição ocorre em 124mm, como era de se esperar.

Mais um vez alteramos a frequência espacial para comprovar que os resultados anteriores são corretos.

Figura 34 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação. Parâmetros: $Q = 4$; $p_1 = p_2 = 1$; $\rho_1 = 1\text{mm}^{-1}$; $\rho_2 = 2,5\text{mm}^{-1}$

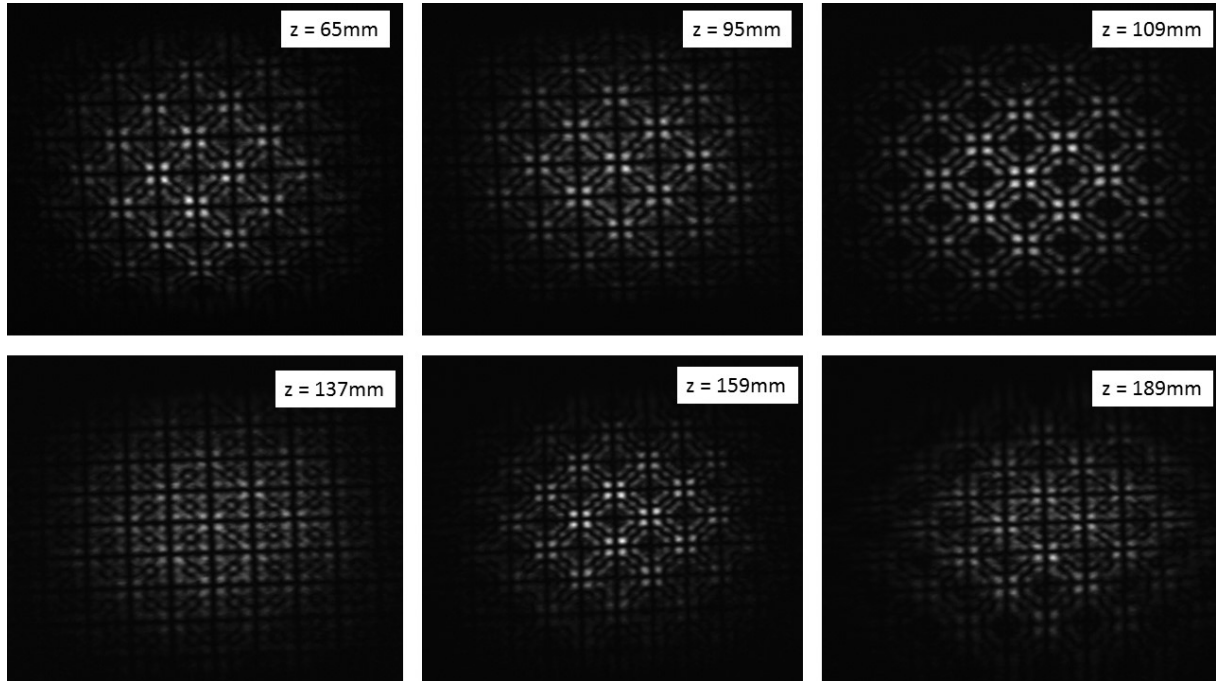


Fonte: Autor

Novamente, o experimento condiz com o resultado obtido na teoria. O comprimento de Talbot no experimento é de 30mm, pouco a mais do que obtido pela equação.

Alteramos outra vez a carga topológica e mantivemos a frequência espacial fixa para obter os resultados já encontrados para o comprimento de Talbot.

Figura 35 – Padrão de difração por duas redes ópticas ao longo do eixo de propagação(experimento). Parâmetros: $Q = 4; p_1 = p_2 = 2; \rho_1 = 1mm^{-1}; \rho_2 = 1,5mm^{-1}$



Fonte: Autor

Mais uma vez confirmamos que a carga topológica não influencia no comprimento de Talbot, mostrando assim que a teoria se encontra correta.

Os resultados encontrados são os já esperados. Com isso, conseguimos comprovar satisfatoriamente que nosso experimento, amparado por uma teoria fortemente sólida, está correto. O comprimento de Talbot não é influenciado pela carga topológica ou pelo tipo da rede óptica, independente de quantas ondas planas forem usadas. Além dos resultados aqui exibidos, foram feitos também para cargas topológicas iguais $p_1 = p_2 = 3, 4, 5$ e também cargas diferentes $p_1 = 1, p_2 = 3; p_1 = 2, p_2 = 3$ e também para cinco ondas planas, $Q = 5$. Entretanto, tais resultados mostraram-se iguais, logo, seria apenas repetição dos resultados acima.

3.4 CONCLUSÃO

Nesta seção faremos uma breve explicação dos resultados obtidos e sobre o que foi feito neste capítulo.

Inicialmente exibimos uma introdução sobre o que são redes ópticas e como funcionam. Mostrou-se então que a transformada de Fourier de redes ópticas é representadas por objetos de várias formas geométricas, dependendo apenas da quantidade de ondas planas usadas. Além

disso, foi visto que, se aumentarmos a quantidade de ondas planas a transformada de Fourier das redes ópticas tendem a virar aberturas circulares, logo, as redes ópticas para uma grande quantidade de ondas planas tende a virar um feixe Bessel.

Baseado na teoria das redes ópticas, foi feito um estudo teórico e chegamos a um comprimento de Talbot que depende das diferenças do inverso do quadrado das frequências espaciais e que não é influenciada pela carga topológica, entretanto, devido a uma diferença de fase criada pelo MAO das redes, acaba que o padrão de Talbot é alterado, mesmo o comprimento de Talbot sendo mantido o mesmo.

Amparado pelos resultados teóricos, montamos um aparato experimental e a partir daí começamos a medir os padrões alterando exaustivamente os parâmetros e confirmando então que sim, o comprimento de Talbot depende do inverso do quadrado das frequências espaciais e não da carga topológica. O resultado é o mesmo, independente da quantidade de ondas planas, mudando apenas o padrão de difração obtido ao longo da propagação.

4 Conclusão Geral e Perspectivas Futuras

Nesta dissertação de mestrado procuramos dar uma contribuição no estudo do efeito Talbot. Neste sentido, investigamos o efeito da auto imagem utilizando redes ópticas com cargas topológicas.

No capítulo 2 fizemos um estudo do efeito Talbot de uma forma geral, abordando da forma como foi criado por Henry Fox Talbot e explicada por Lord Rayleigh. Mostramos que se tivermos um objeto periódico e usarmos a teoria de difração de Fresnel, chegamos ao valor do comprimento de Talbot. Após isso, mostramos algumas aplicações do efeito Talbot, tanto em meios lineares quanto em não lineares. Para vários tipos de feixes e no regime coerente, parcialmente coerente e incoerente.

No capítulo 3 iniciamos fazendo uma breve introdução sobre redes ópticas e sua transformada de Fourier. Repetimos a conta do capítulo 2, usando agora redes ópticas com cargas topológicas, chegando então para um comprimento de Talbot que depende da diferença do quadrado das frequências espaciais. Após o estudo teórico foi confirmado os resultados no laboratório, observando que a carga topológica não altera o comprimento de Talbot.

Com esta visão geral da dissertação apresentada, podemos ver que os resultados contribuem para um melhor entendimento do efeito Talbot e abrindo horizontes para ser usado em aplicações futuras, mostrando que não precisa-se de tantas ondas planas para obter o efeito de auto imagem, uma vez que a quantidade de ondas não altera o comprimento de Talbot.

Entre as diversas perspectivas, pretendemos conseguir tornar o comprimento de Talbot dependente da carga topológica. Um norte possível é fazer uso do trabalho publicado recentemente que controla a carga topológica ao longo da propagação (DORRAH et al., 2016). Baseado neste artigo talvez seja possível fazer uso do mesmo para o efeito Talbot e assim a carga topológica mudar ao longo do eixo de propagação, conseqüentemente mudando o comprimento de Talbot. Tal estudo merece uma maior atenção no futuro.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. Handbook of mathematical functions: With formulas, graphs, and mathematical tables applied mathematics series. **National Bureau of Standards, Washington, DC**, 1964.
- ARLT, J.; DHOLAKIA, K. Generation of high-order bessel beams by use of an axicon. **Optics Communications**, Elsevier, v. 177, n. 1-6, p. 297–301, 2000.
- ARRIZÓN, V.; CHAVEZ-CERDA, S.; RUIZ, U.; CARRADA, R. Periodic and quasi-periodic non-diffracting wave fields generated by superposition of multiple bessel beams. **Optics Express**, Optical Society of America, v. 15, n. 25, p. 16748–16753, 2007.
- ARRIZÓN, V.; LLAVE, D. S. de-la; MÉNDEZ, G.; RUIZ, U. Efficient generation of periodic and quasi-periodic non-diffractive optical fields with phase holograms. **Optics express**, Optical Society of America, v. 19, n. 11, p. 10553–10562, 2011.
- ARRIZÓN, V.; RUIZ, U.; CARRADA, R.; GONZÁLEZ, L. A. Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 24, n. 11, p. 3500–3507, 2007.
- BECKER, J.; ROSE, P.; BOGUSLAWSKI, M.; DENZ, C. Systematic approach to complex periodic vortex and helix lattices. **Optics express**, Optical Society of America, v. 19, n. 10, p. 9848–9862, 2011.
- BLOCH, I. Ultracold quantum gases in optical lattices. **Nature physics**, Nature Publishing Group, v. 1, n. 1, p. 23, 2005.
- BOGUSLAWSKI, M.; ROSE, P.; DENZ, C. Increasing the structural variety of discrete nondiffracting wave fields. **Physical Review A**, APS, v. 84, n. 1, p. 013832, 2011.
- CHAPMAN, M. S.; EKSTROM, C. R.; HAMMOND, T. D.; SCHMIEDMAYER, J.; TANNIAN, B. E.; WEHINGER, S.; PRITCHARD, D. E. Near-field imaging of atom diffraction gratings: The atomic talbot effect. **Physical Review A**, APS, v. 51, n. 1, p. R14, 1995.
- CHATTRAPIBAN, N.; ROGERS, E. A.; COFIELD, D.; III, W. T. H.; ROY, R. Generation of nondiffracting bessel beams by use of a spatial light modulator. **Optics letters**, Optical Society of America, v. 28, n. 22, p. 2183–2185, 2003.
- CHÁVEZ-CERDA, S.; MENESES-NAVA, M.; HICKMANN, J. M. Interference of traveling nondiffracting beams. **Optics letters**, Optical Society of America, v. 23, n. 24, p. 1871–1873, 1998.
- CHAVEZ-CERDA, S.; TEPICHIN, E.; MENESES-NAVA, M.; RAMIREZ, G.; HICKMANN, J. M. Experimental observation of interfering bessel beams. **Optics Express**, Optical Society of America, v. 3, n. 13, p. 524–529, 1998.
- CHEN, H.; ZHANG, X.; ZHU, D.; YANG, C.; JIANG, T.; ZHENG, H.; ZHANG, Y. Dressed four-wave mixing second-order talbot effect. **Physical Review A**, APS, v. 90, n. 4, p. 043846, 2014.
- CLOETENS, P.; GUIGAY, J.; MARTINO, C. D.; BARUCHEL, J.; SCHLENKER, M. Fractional talbot imaging of phase gratings with hard x rays. **Optics letters**, Optical Society of America, v. 22, n. 14, p. 1059–1061, 1997.

DORRAH, A. H.; ZAMBONI-RACHED, M.; MOJAHEDI, M. Controlling the topological charge of twisted light beams with propagation. **Physical Review A**, APS, v. 93, n. 6, p. 063864, 2016.

DURNIN, J. Exact solutions for nondiffracting beams. i. the scalar theory. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 4, n. 4, p. 651–654, 1987.

DURNIN, J.; JR, J. M.; EBERLY, J. Diffraction-free beams. **Physical review letters**, APS, v. 58, n. 15, p. 1499, 1987.

FERNANDEZ-VAZQUEZ, A.; MÉNDEZ, G. On the generation of optical fields satisfying the upper bound diffraction efficiency using phase holograms. **Optics Communications**, Elsevier, v. 301, p. 46–51, 2013.

GAO, Y.; WEN, Z.; ZHENG, L.; ZHAO, L. Complex periodic non-diffracting beams generated by superposition of two identical periodic wave fields. **Optics Communications**, Elsevier, v. 389, p. 123–127, 2017.

GOODMAN, J. W. **Introduction to Fourier optics**. [S.l.]: Roberts and Company Publishers, 2005.

HECKENBERG, N.; MCDUFF, R.; SMITH, C.; WHITE, A. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms. **Optics letters**, Optical Society of America, v. 17, n. 3, p. 221–223, 1992.

JAKSCH, D. Optical lattices, ultracold atoms and quantum information processing. **Contemporary Physics**, Taylor & Francis, v. 45, n. 5, p. 367–381, 2004.

KIRK, J. P.; JONES, A. L. Phase-only complex-valued spatial filter. **JOSA**, Optical Society of America, v. 61, n. 8, p. 1023–1028, 1971.

LEWENSTEIN, M.; SANPERA, A.; AHUFINGER, V.; DAMSKI, B.; SEN, A.; SEN, U. Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond. **Advances In Physics**, Taylor & Francis, v. 56, n. 2, p. 243–379, 2007.

LIU, D.; ZHANG, Y.; CHEN, Z.; WEN, J.; XIAO, M. Acousto-optic tunable second-harmonic talbot effect based on periodically poled linbo 3 crystals. **JOSA B**, Optical Society of America, v. 29, n. 12, p. 3325–3329, 2012.

MAO, W.; DONG, J.; ZHONG, Y.; LIANG, G.; WANG, H. Formation principles of two-dimensional compound photonic lattices by one-step holographic lithography. **Optics express**, Optical Society of America, v. 13, n. 8, p. 2994–2999, 2005.

MCMORRAN, B. J.; CRONIN, A. D. An electron talbot interferometer. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 11, n. 3, p. 033021, 2009.

MONROE, C. Quantum information processing with atoms and photons. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 416, n. 6877, p. 238, 2002.

PATORSKI, K. I the self-imaging phenomenon and its applications. In: **Progress in optics**. [S.l.]: Elsevier, 1989. v. 27, p. 1–108.

RUDIN, W. **Real and complex analysis**. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 2006.

- SAIGA, N.; ICHIOKA, Y. Visualization of the strain wave front of a progressive acoustic wave based on the talbot effect. **Applied optics**, Optical Society of America, v. 24, n. 10, p. 1459–1465, 1985.
- SALEH, B. E.; TEICH, M. C.; SALEH, B. E. **Fundamentals of photonics**. [S.l.]: Wiley New York, 1991.
- SONG, X.-B.; WANG, H.-B.; XIONG, J.; WANG, K.; ZHANG, X.; LUO, K.-H.; WU, L.-A. Experimental observation of quantum talbot effects. **Physical review letters**, APS, v. 107, n. 3, p. 033902, 2011.
- SUN, Y.; ZHANG, X. Unusual quantum talbot effect based on the orbital angular momentum of photons. **Physical Review A**, APS, v. 93, n. 6, p. 063851, 2016.
- VIDAL, I.; CAVALCANTI, S.; FONSECA, E.; HICKMANN, J. Conditional talbot effect using a quantum two-photon state. **Physical Review A**, APS, v. 78, n. 3, p. 033829, 2008.
- WEBER, H. J.; ARFKEN, G. B. **Essential Mathematical Methods for Physicists, ISE**. [S.l.]: Elsevier, 2003.
- WEN, J.; ZHANG, Y.; XIAO, M. The talbot effect: recent advances in classical optics, nonlinear optics, and quantum optics. **Advances in optics and photonics**, Optical Society of America, v. 5, n. 1, p. 83–130, 2013.
- XAVIER, J.; VYAS, S.; SENTHILKUMARAN, P.; JOSEPH, J. Complex 3d vortex lattice formation by phase-engineered multiple beam interference. **International Journal of Optics**, Hindawi, v. 2012, 2012.
- XAVIER, J.; VYAS, S.; SENTHILKUMARAN, P.; JOSEPH, J. Tailored complex 3d vortex lattice structures by perturbed multiples of three-plane waves. **Applied optics**, Optical Society of America, v. 51, n. 12, p. 1872–1878, 2012.
- YAROSHENKO, A.; BECH, M.; POTDEVIN, G.; MALECKI, A.; BIERNATH, T.; WOLF, J.; TAPFER, A.; SCHÜTTLER, M.; MEISER, J.; KUNKA, D. et al. Non-binary phase gratings for x-ray imaging with a compact talbot interferometer. **Optics express**, Optical Society of America, v. 22, n. 1, p. 547–556, 2014.
- ZHANG, W.; ZHAO, C.; WANG, J.; ZHANG, J. An experimental study of the plasmonic talbot effect. **Optics express**, Optical Society of America, v. 17, n. 22, p. 19757–19762, 2009.
- ZHANG, Y.; BELIĆ, M. R.; ZHENG, H.; CHEN, H.; LI, C.; SONG, J.; ZHANG, Y. et al. Nonlinear talbot effect of rogue waves. **Physical Review E**, APS, v. 89, n. 3, p. 032902, 2014.