UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

DIEGO ALVES ADAUTO

SUPERFÍCIES DE FRONTEIRA LIVRE NA BOLA EUCLIDIANA

Maceió
2015

DIEGO ALVES ADAUTO

SUPERFÍCIES DE FRONTEIRA LIVRE NA BOLA EUCLIDIANA

Dissertação de mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 11 de Dezembro de 2015 a banca examinadora designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Maceió

2015

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

A221s Adauto, Diego Alves.
Superfícies de fronteira livre na bola euclidiana / Diego Alves Adauto. – 2015.
66 f. : il.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 64-66.

1. Steklov. 2. Fronteira livre. 3. Superfícies de Riemann. I. Título.

CDU: 514.764.2

SUPERFÍCIES DE FRONTEIRA LIVRE NA BOLA EUCLIDIANA

DIEGO ALVES ADAUTO

Dissertação de mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva (Orientador)

AGRADECIMENTOS

Primeiro à Deus por toda generosidade, por todas as vezes que me capacitou quando achei que não era capaz, por todas vezes que esteve comigo mesmo sem que eu percebesse sua presença, mas o Senhor me provou que esteve lá. Agradeço também por todas as pessoas que o senhor pôs em meu caminho até aqui.

Aos meus familiares, em especial ao meus pais, por tudo que já fizeram por mim e por todo apoio ao longo desses anos de formação acadêmica.

Aos professores do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas por todo conhecimento transmitido, em especial ao meus professores do mestrado: Krerley, André Contiero, Peter, Maria Andrade, Ali Golmakani, Márcio Batista, Marcos Petrúcio e Luis Guilhermo.

Ao professor Márcio Batista devo inúmeros outros agradecimento, o mais importante deles é o voto de confiança que tem depositado em mim ao me orientar desde a graduação. Muito obrigado!

Aos professores Feliciano Aguiar, e novamente, Marcos Petrúcio e Luis Guilhermo pela solidariedade em um período difícil da minha vida pessoal.

Aos meus amigos de curso, em especial Micael Dantas e Iury Oliveira pela amizades, por tantas conversas sobre a matemática, pelo apoio e resenhas. A Tamara Melo, minha nova amiga, por se disponibilizado a ler primeira versão.

À Kryzia Rayná, minha namorada, por ser tão prestativa, incentivadora e por ter aparecido no momento certo. Você foi a luz em um período de escuridão.

E finalmente, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

À todos meu sincero sentimento de gratidão que esta longe de ser fielmente representada pelas palavras acima dirigidas à vocês.

RESUMO

Consideraremos a relação da geometria de variedades Riemannianas com bordo e o primeiro autovalor não-nulo σ_1 da aplicação de Dirichlet-Neumann, o qual denominaremos por primeiro autovalor de Steklov. Para superfície com gênero γ e k componentes de bordos, obtemos a limitação superior $\sigma_1 L(\partial\Sigma) \leq 2(\gamma + k)\pi$, onde $L(\partial\Sigma)$ é o comprimento do bordo $\partial\Sigma$ de Σ. Para $\gamma = 0$ e $k = 0$, esse resultado foi dado por Weinstock em 1954 e é a melhor limitação para esse caso. Entretanto a limitação superior acima não é melhor possível para anéis (superfícies com $\gamma = 0$ e $k = 2$). Determinaremos então a melhor limitação de $\sigma_1 L$ para anéis com alguns tipos de métricas. O primeiro caso que consideramos é o das métricas rotacionalmente simétricas. Para esse caso, mostramos que $\sigma_1 L$ é maximizado pela porção da catenoide centrada na origem a qual encontra uma esfera ortogonalmente ao longo de seu bordo, o catenoide crítico. Em seguida passamos a considerar anéis com métrica pertencente a uma família de métricas, as métricas supercríticas, e mostraremos que $\sigma_1 L$. Para casos mais gerais métricas mais gerais, a qual chamaremos de supercríticas, mostramos que o produto $\sigma_1 L(\partial\Sigma)$ é limitada pelo catenoide crítico, com igualdade se, e somente se, o anel é conformemente equivalente ao catenoide crítico por uma aplicação conforme a qual é uma isometria nos bordos. Motivados pelo caso do anéis, mostramos que uma subvariedade propriamente da bola é imersa por autofunções de Steklov se e somente se é uma solução de bordo livre. Então provaremos uma limitação superior geral para métricas conformes em variedades de qualquer dimensão as quais possam ser imersas por uma aplicação própria conforme na bola unitária. Mostraremos que essa limitação é alcançada apenas por variedades minimamente imersas por autofunções do primeiro autovalor de Steklov.

Palavras-chave: Steklov, fronteira livre e superfícies

ABSTRACT

We consider the relationship of geometry of Riemannian manifolds with boundary and the first nonzero eigenvalue σ_1 applying Dirichlet-Neumann, the first eigenvalue of Steklov. For surface with genus γ and k components edges we obtain the upper bound $\sigma_1 L(\partial\Sigma) \leq 2(\gamma + k)\pi$, where $L(\partial\ s)$ is the boundary length $\partial\Sigma$ of Σ. For $\gamma = 0$ and $k = 0$, this result was given by Weinstock in 1954 and is best limited to this case. However the upper bound above is not best for surfaces that are rings ($\gamma = 0$ and $k = 0$). Then we will determine the best upper bound for some types of metrics. For rotationally symmetric metric, we show that the best limitation is obtained by measuring induced in the portion of catenoid centered at the origin which is the orthogonally ball and thus free board solutions of the ball the edge of which is the sphere in question. For more general cases more general metrics, which we will call supercritical, we show that the product $\sigma_1 L(\partial\Sigma)$ is limited by the critical catenoid, with equality if and only if the ring is accordingly equivalent to critical catenoid By application consistent which is an isometry on the lips. Motivated by the case of rings, we show that a proper submanifold of the ball is immersed by eigenfunctions of Steklov if and only if it is a freeboard solution. Then prove a general upper bound for conformal metrics on manifolds of any dimension which can be immersed for a specific application as the unit ball. We will show that this limitation is achieved only minimally immersed varieties by eigenfunctions of the first eigenvalue of Steklov.

Keywords: Steklov, free boundary and surface.

Sumário

INTRODUÇÃO **8**

1 PRÉ REQUESITOS **10**

1.1 Variedades Riemannianas e Conexão de Levi-Civita 11

1.1.1 Campo de Vetores e Operador Colchete 14

1.1.2 Métricas Riemannianas 15

1.1.3 Conexão de Levi-Civita 16

1.2 Curvatura 18

1.3 A segunda forma fundamental 19

1.4 Operador Laplaciano 21

1.5 Formas diferenciais em variedades diferenciáveis 22

1.6 Fórmula de Green e Teorema de Gauss-Bonnet 29

1.7 Espaços L^p em variedades Riemannianas 30

1.8 Convergência fraca 31

1.9 Espaços de Sobolev $W^{1,p}$ 32

2 O PRIMEIRO AUTOVALOR DE STEKLOV **32**

2.1 Uma estimativa para o primeiro autovalor de Steklov 33

2.2 Métricas rotacionalmente simétricas 37

2.3 Anéis supercríticos 45

3 VOLUMES CONFORMES **48**

4 RELAÇÃO ENTRE O PRIMEIRO AUTOVALOR DE STEKLOV E O VOLUME CONFORME **55**

4.1 O primeiro autovalor de Steklov e volume conforme 56

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA **63**

INTRODUÇÃO

Dada uma variedade Riemanniana compacta Σ com bordo $\partial\Sigma$, a aplicação de Direchlet-Neumann em Σ associa a cada função diferenciável em $\partial\Sigma$ a derivada na direção do vetor normal unitário para fora de $\partial\Sigma$ de uma extensão harmônica dessa função a Σ. É fato conhecido que os autovalores dessa aplicação formam um conjunto discreto$\sigma_0 = 0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq ... \leq \sigma_n \leq ...$, tal que σ_n tende ao infinito. Esses autovalores foram estudados a primeira vez por Steklov em 1902 e desde então são conhecidos como autovalores de Steklov. Em 1954, Weinstock [33] mostrou que para domínios planos simplesmente conexos Σ o valor $\sigma_1 L(\partial\Sigma)$, onde $L(\partial\Sigma)$ é o comprimento de $\partial\Sigma$, é unicamente maximizado pelo disco unitário D. Desde então, vários artigos foram publicados dando estimativas para os autovalores de Steklov em dimensões mais altas e em variedades Riemannianas (ver por exemplo Payne [29], Bandle [3], Hersch e Payne [21], Hersch, Payne e Schiffer [22] , Kuttler e Siggilito [24], Shamma [31], Edward [12], Escobar [13] e [14] e Brock [4]).

Nosso objetivo é expor alguns resultados apresentados por Fraser e Schoen [17]. Nele é apresentado uma interessante relação entre σ_1 e as *soluções de bordo livre* da bola unitária.

Os assuntos abordados são divididos por capítulos. No primeiro capítulo, como seu título sugeri, são expostos os conceitos e resultados que julgamos de conhecimento necessário para compreensão dos demais capítulos, sendo expostos sem grandes detalhes.

Na primeira seção do Capítulo 2 enunciamos e provamos uma extensão do resultado de Weinstok para superfícies Riemannianas com gênero e número de componentes de bordo arbitrários, a qual afirma que

$$\sigma_1 L(\partial\Sigma) \leq 2(\gamma + k)\pi$$

para superfícies de gênero γ com k componentes de bordo. Entretanto, para superfícies com $\gamma = 0$ e $k \geq 2$ a limitação obtida não é ótima e esse fato motiva as demais seções do capítulo. Nelas buscamos determinar a melhor limitação para o valor $\sigma_1 L(\partial\Sigma)$ para algumas famílias de anéis Σ, isto é, superfícies Riemannianas com $\gamma = 0$ e $k = 2$. Na segunda seção, por meio

de uma interessante análise para anéis com métricas rotacionalmente simétrica, mostramos que $\sigma_1 L(\partial\Sigma)$ é maximizado pelo *catenoide crítico*, isto é, a porção do catenoide centrado na origem e localizada na bola unitária a qual encontra a fronteira da bola ortogonalmente ao longo de sua fronteira. Se $T(1) = 2t_1$, onde t_1 é a solução positiva da equação $t_1 = \coth t_1$, o catenoide crítico é caracterizado por ser isométrico ao produto $[0, T(1)] \times S^1$ com respeito a métricas que serão determinadas posteriormente. O valor de $\sigma_1 L$ é igual a $(\sigma_1 L)^* = 4\pi/t_1$. Na seção seguinte, a última deste capítulo, consideramos anéis como métricas mais gerais. Dado um anel Σ, sejam α o quociente entre os comprimentos do bordo de Σ e T o número real positivo para o qual Σ é conformemente equivalente a $[0, T] \times S^1$. Diremos que Σ é supercrítico se $T \geq 1/4(\alpha^{1/2} + \alpha^{-1/2})^2 T(1)$. Mostraremos nesta seção que o valor de $\sigma_1 L$ para anéis supercríticos também é maximizada por $(\sigma_1 L)^*$ e que Σ maximiza $\sigma_1 L$ é conformemente equivalente ao catenoide crítico por uma aplicação conforme que é uma isometria entre os bordos.

No capítulo 3 estudamos a teoria que chamada de volume conforme de bordo e relativo por se trata do análogo da teoria de volume conforme de Li e Yau [28]. Na primeira seção, usamos o Teorema de Gaus-Bonnet para mostrar que para superfícies que são soluções de bordo livre da bola unitária B^n, o comprimento de seu bordo é igual ao máximo dentre os comprimentos de bordo de sua imagem por transformações conformes de B^n. Esse fato é usado posteriormente para mostrarmos que a área de tais superfícies são sempre maior ou igual à π. Observamos ainda que essa desigualdade é equivalente a desigualdade isoperimétrica para essa família de superfícies. No fim do capítulo definimos o volume relativo conforme para variedades que admitem uma imersão conforme própria na bola unitária.

No último capítulo demonstramos um resultado que dá uma limitação superior para o primeiro autovalor não nulo de Steklov de uma variedade Σ que pode ser imersa numa bola unitária B^n por uma aplicação que leva $\partial\Sigma$ sobre o ∂B^n em termos de seu volume relativo conforme e cuja a igualdade implica na existência de uma aplicação harmônica conforme $\phi : \Sigma \to B^n$ a qual, após reescalarmos a métrica original, é isometria em $\partial\Sigma$ tal que $\phi(\Sigma)$ encontra ∂B^n ortogonalmente ao longo de $\phi(\partial\Sigma)$.

1 PRÉ REQUESITOS

1.1 Variedades Riemannianas e Conexão de Levi-Civita

No que se segue, adotaremos a convenção de que uma aplicação diferenciável significa que esta aplicação é infinitamente diferenciável.

Definição 1.1.1. Uma variedade diferenciável de dimensão n é uma conjunto Σ e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \to \Sigma$ de abertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ em Σ tais que

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = \Sigma$.
2. Para todo par α e β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e aplicações $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ e $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.
3. A família $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ é máxima com relação aos itens 1 e 2.

Uma família $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ satisfazendo as condições 1 e 2 na definição acima é chamada de uma estrutura diferenciável no conjunto Σ. O par (U_α, x_α) (ou a aplicação x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é uma parametrização ou um sistema de coordenadas de Σ em p e $x_\alpha(U_\alpha)$ é uma vizinhança coordenada em p.

Observação 1.1.1. *Uma estrutura diferenciável em um conjunto Σ induz uma topologia sobre ele, na qual um conjunto $A \subset \Sigma$ é aberto em Σ se, e somente se, $x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto do $\mathbb{R}^n$ para todo α. Observe que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos $x_\alpha(U_\alpha)$ são abertos e as aplicações x_α são homeomorfismo.*

Em alguns momentos usaremos a notação Σ^n para indicarmos que Σ é uma variedade diferenciável n-dimensional.

Definição 1.1.2. Sejam Σ_1^n e Σ_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ é diferenciável no ponto $p \in \Sigma_1$ se dada uma parametrização $y : V \to \Sigma_2$ de Σ_2 com

$\phi(p) \in y(V)$ existe uma parametrização $x : U \to \Sigma_1$ de Σ_1 em p com $\phi(x(U)) \subset y(V)$ tal que aplicação

$$y^{-1} \circ \phi \circ x : U \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. A aplicação ϕ é dita diferenciável quando é diferenciável em todo ponto $p \in \Sigma_1$. ϕ será de classe C^k, com k inteiro não-negativo, se em vez de diferenciável, tivermos que suas expressões em termos de coordenadas locais, $y^{-1} \circ \phi \circ x$, forem de classe C^k.

Definição 1.1.3. Seja Σ uma variedade diferenciável. Uma curva em Σ é uma aplicação diferenciável na forma $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \Sigma$. Assim, se α é uma curva em Σ, $p = \alpha(0)$ e $\mathfrak{D}_p$ é o conjunto das funções em Σ diferenciáveis em p, o vetor tangente à α em p é por definição a função $\alpha'(0) : \mathfrak{D}_p \to \mathbb{R}$ que a cada função $f \in \mathfrak{D}_p$ o número real

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(\alpha \circ f)}{dt}\right|_{t=0}.$$

O conjunto dos vetores tangentes a Σ em p será indicado por $T_p\Sigma$.

Se tomarmos uma parametrização $x : U \to \Sigma$ em $p = x(0)$, podemos expressar f e α em termos dessa parametrização por

$$f \circ x(q) = f(x_1, ..., x_n)$$

e

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)), t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

para todo $q = (x_1, ..., x_n) \in U$ e todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ Assim, obteremos

$$\begin{aligned}
\alpha'(0)f &= \left.\frac{d(\alpha \circ f)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{d}{dt} f(x_1(t), ..., x_n(t))\right|_{t=0} \\
&= \left.\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right|_{x=0} \\
&= \left(\left.\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right|_{x=0}\right) f,
\end{aligned}$$

onde $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é vetor tangente a curva coordenada $x_i \mapsto x(0, ..., x_i, 0, ...0)$ em $x_i = 0$

Decorre da expressão acima que o conjunto $T_p\Sigma$, com as operações usuais de funções, constitui um espaço vetorial de dimensão n, e que a escolha de uma parametrização

$x : U \to \Sigma$ de Σ em p determina uma base $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{x=0}, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{x=0} \right\}$ em $T_p\Sigma$. O espaço vetorial $T_p\Sigma$ é chamado de espaço tangente de Σ em p.

Com a noção de espaço tangente podemos estender a variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável.

Definição 1.1.4. Sejam Σ_1^n, Σ_2^m variedades diferenciáveis e $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada ponto $p \in \Sigma_1$ e cada vetor $v \in T_p\Sigma_1$, considere uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \Sigma_1$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. A aplicação $d_p\phi : T_p\Sigma_1 \to T_{\phi(p)}\Sigma_2$ dada por $d\phi_p(v) = (\phi \circ \alpha)'(0)$ é chamada diferencial de ϕ em p.

A próxima proposição mostra que $d\phi_p$ é uma aplicação linear bem definida, ou seja, que não depende da escolha de α.

Proposição 1.1.1. *Seja $d_p\phi : T_p\Sigma_1 \to T_{\phi(p)}\Sigma_2$ como na definição acima. Então $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ é uma aplicação linear que não depende da escolha da curva α.*

Demonstração. Ver [7]. □

Definição 1.1.5. Um subconjunto $A \subset \Sigma$ de uma variedade diferenciável Σ^n é dito de medida nula se o conjunto $x^{-1}(A \cup x(U))$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$ para toda parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \Sigma$ de Σ.

Definição 1.1.6. Seja $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis Σ_1 e Σ_2. Um ponto $q \in \Sigma_2$ é chamado de valor crítico de ϕ se existir algum ponto $p \in \phi^{-1}(q)$ tal que $d_p\phi : T_p\Sigma_1 \to T_q\Sigma_2$ não é sobrejetiva.

Teorema 1.1.1 (Sard)**.** *Seja $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis Σ_1 e Σ_2. Então o conjunto dos valores críticos de ϕ tem medida em Σ_2.*

Demonstração. Ver [25]. □

Definição 1.1.7. Sejam Σ_1 e Σ_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ bijetiva e diferenciável é um difeomorfismo se ela e sua inversa são diferenciáveis. A aplicação ϕ é um difeomorfismo local em Σ_1 se existe uma vizinhança U de p em Σ_1 tal que $\phi|_U$ é um difeomorfismo sobre sua imagem $\phi(U)$.

Definição 1.1.8. Sejam Σ_1^n e Σ_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ é dita uma imersão se a diferencial $d_p\phi : T_p\Sigma_1 \to T_{\phi(p)}\Sigma_2$ é injetiva para todo

$p \in \Sigma_1$. Se $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$, a aplicação inclusão $i : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ é uma imersão e $i : \Sigma_1 \to \phi(\Sigma_1)$ é uma homeomorfismo com a topologia induzida por Σ_2 em $\phi(\Sigma_1)$, diremos que Σ_1 é uma subvariedade de Σ_2.

Definição 1.1.9. Seja Σ uma variedade diferenciável. Diz-se que Σ é orientável se admite uma estrutura diferenciável $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ tal que

1. para todo par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, a mudança de variável $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ tem determinante jacobiano positivo.

Em caso contrário diz-se que Σ é não-orientável.

A escolha de uma estrutura diferenciável $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ que satisfaça a condição (1) na definição acima é chamada uma orientação de Σ e Σ é, então, orientada. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem (1) determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz (1). Estando Σ orientada, as parametrizações da orientação fixada serão ditas positiva.

Não é difícil concluir que se Σ é orientável e conexa, então Σ possui exatamente duas orientações distintas.

Sejam Σ_1 e Σ_2 variedades diferenciáveis e $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ um difeomorfismo. Então Σ_1 é orientável, se e somente se, Σ_2 é orientável. Se Σ_1 e Σ_2 são conexas e estão orientadas, ϕ induz uma orientação em Σ_2 que pode ou não coincidir com a tomada inicialmente. Quando o primeiro ocorre, dizemos que ϕ preserva a orientação e no segundo caso, que ϕ reverte a orientação.

1.1.1 Campo de Vetores e Operador Colchete

Definição 1.1.10. Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável Σ é uma aplicação que a cada ponto $p \in \Sigma$ associa uma vetor $X(p) \in T_p\Sigma$. Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \Sigma$ em um ponto $p \in \Sigma$, é possível escrever $X(p)$ como combinação linear da base associada a x,

$$X(p) \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

Diremos que X é diferenciável se para todo ponto $p \in \Sigma$, existir uma parametrização $x : U \to \Sigma$ em p tal a função $a_i : U \to \mathbb{R}$ é diferenciáveis, para $i = 1, ..., n$.

Às vezes é conveniente pensar em campos de vetores como uma aplicação $X : \mathfrak{D} \to \mathfrak{F}$ entres os conjuntos $\mathfrak{D}$ das funções diferenciáveis em Σ e o conjunto $\mathfrak{F}$ das funções em Σ, definida da seguinte maneira

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

para todo $f \in \mathfrak{D}$, onde na expressão acima cometemos o abuso de notação de indicarmos por f a expressão de $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ na parametrização x. Observem ainda que a expressão acima para Xf não depende da escolha da parametrização x. Neste contexto, é possível verificar que X é diferenciável se, e somente se, $X : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$.

A interpretação de campos de vetores diferenciáveis em uma variedade como operador em $\mathfrak{D}$ nos permite considerar as interações entre campos. Por exemplo, se X e Y são campos vetoriais diferenciáveis em Σ e $f \in \mathfrak{D}$, podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. Mas em geral, tais operadores não nos levam a campos de vetores por envolverem derivadas de ordem maior que um. O próximo lema garante a existência de um campo Z em Σ tal que $Zf = (XY - YX)f$ para todo par de campos de vetores X e Y fixado e toda função $f \in \mathfrak{D}$.

Lema 1.1.1. *Sejam X e Y campos de vetores diferenciáveis em uma variedade diferenciável Σ. Então existe um único campo de vetores diferenciável Z tal que, para todo $f \in \mathfrak{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.*

Demonstração. Ver [7]. □

O campo vetorial Z dado no lema acima é chamado o colchete $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y.

1.1.2 Métricas Riemannianas

Definição 1.1.11. Uma métrica Riemanniana ou uma estrutura Riemanniana em uma variedade diferenciável Σ é uma correspondência que a cada ponto $p \in \Sigma$ associa um produto interno $g(p)(.,.) = \langle .,. \rangle_p$ em $T_p\Sigma$ que varia diferencialmente no sentido que: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \Sigma$ é uma parametrização de Σ em p, com $x(x_1, ..., x_n) = q$ e $\frac{\partial}{x_i}(q)$ o i-ésimo vetor da base associada a x em $T_p\Sigma$, então $\langle \frac{\partial}{x_i}(q), \frac{\partial}{x_j}(q) \rangle = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ é uma função diferenciável em U.

É possível verificar que a definição não depende da escolha de parametrizações. Outra maneira de expressar a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par de campo vetoriais diferenciáveis X e Y em uma vizinhança V de Σ, a função $\langle X, Y \rangle$ é diferenciável em V.

Deixaremos de indicar o índice p em $g(.,.)(p) = \langle ., . \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de engano. As funções g_{ij} são chamadas as expressões da métrica Riemanniana em relação a métrica x.

Definição 1.1.12. Uma variedade diferenciável Σ munida com uma métrica Riemanniana g, (Σ, g), é chamada de uma variedade Riemanniana.

Definição 1.1.13. Sejam (Σ_1, g) e (Σ_2, h) variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ é chamada de uma aplicação conforme quando existe uma função positiva $\lambda : \Sigma_1 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f^*h(u, v)(p) = h(df_p(u), df_p(v))(f(p)) = \lambda^2(p)g(u, v)(p)$$

para todo $p \in \Sigma_1$ e todo par $u, v \in T_p\Sigma_1$. A função λ^2 é chamada de coeficiente de conformidade. No caso particular em que λ é constante igual a 1, f é chamada de uma isometria de Σ_1 sobre Σ_2.

Observe que a correspondência f^*h define uma métrica Riemanniana em Σ_1, chamada métrica induzida por h.

A próxima proposição é um resultado de existência de métricas Riemannianas para variedades diferenciáveis com uma certa topologia.

Proposição 1.1.2. *Uma variedade diferenciável Σ, cuja topologia é de Hausdorff e com base enumerável, possui uma métrica Riemanniana.*

Demonstração. Ver [7]. □

Desse momento em diante, consideraremos apenas variedades diferenciáveis com as características topológicas apresentadas na proposição anterior.

1.1.3 Conexão de Levi-Civita

De agora em diante, usaremos a notação $\mathfrak{X}(\Sigma)$ para indicarmos o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis em uma variedade diferenciável Σ e a $\mathfrak{D}(\Sigma)$ para o anel das funções diferenciáveis em Σ.

Definição 1.1.14. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável Σ é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma),$$

cuja imagem de um par $(X, Y) \in \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma)$ por $\nabla_X Y$, a qual satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

Para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $f, g \in \mathfrak{D}(\Sigma)$.

Definição 1.1.15. Um campo de vetores V ao longo de uma curva $c : I \to \Sigma$ é uma aplicação que a cada ponto $p \in I$ associa um vetor $V(t) \in T_{c(t)}\Sigma$. Diz-se que V é diferenciável se para toda função diferenciável f em Σ, a função $t \mapsto V(t)f$ é diferenciável em I.

Proposição 1.1.3. *Seja Σ uma variedade Riemanniana com conexão ∇. Então existe uma única correspondência que a cada campo de vetores V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to \Sigma$ associa um outro campo de vetores $\nabla_t V$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:*

1. *$\nabla_t (V + W) = \nabla_t V + \nabla_t W$;*
2. *$\nabla_t (fV) = \frac{df}{dt} V + f\nabla_t V$, onde f é uma função diferenciável em I;*
3. *Se V é induzida por um campo de vetores de $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\nabla_t V = \nabla_{dc/dt} Y$.*

Definição 1.1.16. Seja (Σ, g) uma variedade Riemanniana com uma conexão afim ∇. Diremos que ∇ é uma conexão de Levi-Civita ou Riemanniana se para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ tivermos que

1. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$;
2. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.

O seguinte teorema fala sobre a existência de conexões Riemannianas em variedades Riemannianas.

Teorema 1.1.2 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade Riemanniana* (Σ, g)*, existe uma única conexão Riemanniana* ∇ *em* Σ*.*

Demonstração. Ver [7]. □

Teorema 1.1.3. *Seja* Σ *uma variedade Riemanniana. Se* ∇ *é sua conexão de Levi-Civita,* $c : I \to \Sigma$ *uma curva diferenciável e* V, W *campo de vetores diferenciáveis ao longo de* c*, então*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \nabla_t V, W\rangle + \langle V, \nabla_t W\rangle.$$

Demonstração. Ver [7]. □

1.2 Curvatura

Definição 1.2.1. A curvatura R de uma variedade Riemanniana Σ é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Acima ∇ indica a conexão Riemanniana de Σ.

A curvatura R é interpretada como um modo de medir o quanto a variedade Σ deixa de ser euclidiana. Essa interpretação é meramente um formalismo.

Proposição 1.2.1. *Seja* $\sigma \subset T_p\Sigma$ *um subespaço bi-dimensional do espaço tangente e* $x, y \in \sigma$ *dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y\rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

está bem definido e K *não depende da escolha dos vetores* $x, y \in \sigma$*.*

Demonstração. Ver [7]. □

Definição 1.2.2. Dado $p \in \Sigma$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_p\Sigma$, o número real $K(\sigma) = K(x, y)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado de curvatura seccional de σ em p. Se Σ é uma variedade bi-dimensional, K é chamado de curvatura Gaussiana de Σ em p.

1.3 A segunda forma fundamental

Seja $f : \Sigma^n \to S^{n+m=k}$ uma imersão. Então, para cada ponto $p \in \Sigma$, existe uma vizinhança $U \subset \Sigma$ de p tal que $f(U) \subset S$ é uma subvariedade de S. Isto quer dizer que existem uma vizinhança $V \subset S$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\phi : V \to W$ em um aberto de W de $\mathbb{R}^k$, tais que ϕ aplica $f(U) \cap V$ em um aberto $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Por simplicidade, passaremos a identificar U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_q\Sigma$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}S$.

Para cada $p \in \Sigma$, o produto interno em T_pS decompõe T_pS na soma direta

$$T_pS = T_p\Sigma \oplus T_p\Sigma^{\perp}$$

onde $T_p\Sigma^{\perp}$ é complemento ortogonal de $T_p\Sigma$ em T_pS.

Se $v \in T_pS$, com $p \in \Sigma$, podemos escrever

$$v = v^T + v^{\perp},$$

onde $v^T \in T_p\Sigma$ é componente tangencial e $v^{\perp} \in T_p\Sigma^{\perp}$ é a componente normal de v.

Sejam D a conexão Riemanniana de S, X e Y campos de vetores locais de Σ e $\bar{X}$,$\bar{Y}$ suas respectivas extensões locais em S, então aplicação dada por

$$\nabla_X Y = (D_{\bar{X}}\bar{Y})^T$$

é a conexão Riemanniana relativa a métrica de Σ induzida pela métrica de S e

$$A(X,Y) = D_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y = (D_{\bar{X}}\bar{Y})^{\perp}$$

é uma campo local de S normal a Σ. $A(X,Y)$ não depende da escolha das extensões $\bar{X}, \bar{Y}$. De fato, se $\bar{X}_1$ é uma extensão de X e $\bar{Y}_1$ é uma extensão de Y, temos que

$$(D_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y) - (D_{\bar{X}_1}\bar{Y} - \nabla_X Y) = D_{\bar{X}-\bar{X}_1}\bar{Y},$$

anula-se em Σ uma vez que $\bar{X} - \bar{X}_1|_{\Sigma} = 0$. Além disto,

$$(D_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y) - (D_{\bar{X}}\bar{Y}_1 - \nabla_X Y) = D_{\bar{X}}(\bar{Y} - \bar{Y}_1) = 0,$$

pois $\bar{Y} - \bar{Y}_1 = 0$ ao longo das trajetórias de X. Portanto, $A(X,Y)$ está bem definida.

No que se segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis definidos em U e normais a $U \approx f(U)$.

Proposição 1.3.1. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $A : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$A(X,Y) = D_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y = (D_{\bar{X}}\bar{Y})^{\perp}$$

é bilinear simétrica.

Demonstração. Ver [7]. □

Usando a bilinearidade de A e exprimindo os campos de vetores em termos de uma base associada a um sistema de coordenadas, poderemos observar que o valor de $A(X,Y)(p)$ depende apenas dos valores dos campos X e Y no ponto p. Segue-se portanto que a forma bilinear abaixo está bem definida.

Sejam $p \in \Sigma$ e $\eta \in T_p\Sigma^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \big\langle A(x,y), \eta \big\rangle,$$

$x, y \in T_p\Sigma$, é pela proposição anterior, uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.3.1. A forma quadrática II_η definida em $T_p\Sigma$ por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η.

O termo segunda forma fundamental é também utilizado para designar a aplicação A.

Seja $S_\eta : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ a aplicação auto-adjunta associada H_η definida por meio da identidade

$$\big\langle S_\eta(x), y \big\rangle = H_\eta(x,y) = \big\langle A(x,y), \eta \big\rangle.$$

A próxima proposição nos dá uma expressão da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da conexão da variedade ambiente S.

Proposição 1.3.2. *Sejam $p \in \Sigma$, $x \in T_p\Sigma$, $\eta \in T_p\Sigma^{\perp}$ e N uma extensão local normal a Σ. Então*

$$S_\eta(x) = -(D_x N)^T.$$

Demonstração. Ver [7]. □

Sejam $x, y \in T_p\Sigma \subset T_pS$ vetores linearmente e $K(x,y)$, $\bar{K}(x,y)$ as respectivas curvaturas seccionais de Σ e S do plano gerado por esses vetores. O próximo resultado exprime a diferença entre K e $\bar{K}$ em termos valores da segunda forma fundamental aplicada em x e y.

Teorema 1.3.1 (Gauss)**.** *Sejam $p \in \Sigma$ e x, y vetores ortonormais de $T_p\Sigma$. Então*

$$K(x,y) - \bar{K}(x,y) = \big\langle A(x,x), A(y,y) \big\rangle - |A(x,y)|^2 \tag{1.1}$$

Demonstração. Ver [7]. □

Definição 1.3.2. Uma imersão $f : \Sigma \to S$ é mínima se para todo $p \in \Sigma$ e todo $\eta \in T_p\Sigma^{\perp}$ tem-se que o traço de S_η é igual a zero.

Definição 1.3.3. Escolhendo um referencial ortonormal $E_1, ..., E_n, \eta_1, ..., \eta_m$ de vetores em S tal que $E_1, ..., E_n \in \mathfrak{X}(U)$ e $\eta_1, ..., \eta_m \in \mathfrak{X}(U)^{\perp}$, onde U é uma vizinhança de p na qual f é uma mergulho, o vetor definido por

$$H = \sum_{i=1}^{n} A(E_i, E_i) = \sum_{j=1}^{m} (\mathrm{tr} S_{\eta_j})\eta_j,$$

é chamado vetor curvatura média de f.

É claro que a imersão f é mínima se, e somente se, o vetor curvatura média H é identicamente nulo. Uma outra observação interessante é que H não depende do modo com que escolhemos $E_1, ..., E_n$. Isso pode ser verificado na segunda igualdade da definição de H.

1.4 Operador Laplaciano

Definição 1.4.1. Dada uma função diferenciável $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ definida em uma variedade Riemanniana Σ definimos o gradiente de f, ∇f, como o campo de vetores para o qual é válido a igualdade

$$\big\langle \nabla f, v \big\rangle = v(f)$$

para todo vetor tangente v a Σ.

Definição 1.4.2. Dado um campo de vetores diferenciável $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ definimos o seu divergente, div X, como como o traço da aplicação $v \mapsto \nabla_v X$, $\mathrm{tr}(v \mapsto \nabla_v X)$, isto é,

$$(\mathrm{div} X)(p) = \mathrm{tr}(v \mapsto \nabla_v X)$$

onde $v \in T_p\Sigma$.

Definição 1.4.3. Dada uma função $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ de classe C^2 definida sobre Σ, o Laplaciano de f, Δf, é definido por

$$\Delta f = \mathrm{div} \nabla f.$$

A seguir daremos a expressão do Laplaciano de uma função f diferenciável em termos de um sistema de coordenadas locais. Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \Sigma$ é uma parametrização da variedade Σ em ponto $p \in \Sigma$ e indicarmos por ∂_i o i-ésimo vetor da base de $T_p\Sigma$ associada x temos Δf expressa em termos de coordenadas locais por

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j}^{n} \partial_i (g^{ij} \sqrt{g} \partial_j f), \tag{1.2}$$

onde g é o determinante da matriz (g_{ij}) e g^{ij} é coeficiente localizado na interseção da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz inversa de (g_{ij}) (ver [9]).

Definição 1.4.4. Uma função $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ de classe C^2 é dita harmônica se Δf é identicamente nulo.

Segue-se da definição e da expressão (1.2) para o Laplaciano de uma função f em termos das coordenadas locais que f expressa localmente é solução da E.D.P.

$$\sum_{i,j}^{n} \partial_i (g^{ij} \sqrt{g} \partial_j f) = 0,$$

e assim f é diferenciável (ver [16]).

1.5 Formas diferenciais em variedades diferenciáveis

Seja E uma espaço vetorial de dimensão finita sobre os números reais. Uma k-forma alternada em E é uma aplicação $f : \underbrace{E \times ... \times E}_{k-vezes} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades

1. $f(v_1, ..., v_{i-1}, \alpha v_i + \beta \bar{v}_i, v_{i+1}, ..., v_k) = \alpha f(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + \beta f(v_1, ..., \bar{v}_i, ..., v_k)$, para quaisquer $v_1, ..., v_{i-1}, v_i, \bar{v}_i, v_{i+1}, ..., v_k \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $i = 1, ..., k$;

2. $f(v_i, ..., v_k) = 0$ sempre que existirem $i, j \in \{1, ..., k\}$ distintos tais que $v_i = v_j$.

O conjunto das k-formas alternadas em um espaço E será indicada por $\Lambda^k(E)$.

Definição 1.5.1. Seja Σ^n uma variedade diferenciável. Uma k-forma diferenciável sobre Σ é uma associação ω que a cada ponto $p \in \Sigma$ associa a uma k-forma alternada $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p\Sigma)$.

Dada uma n-forma diferencial ω em Σ e uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to \Sigma$ de Σ, usaremos a notação $\{dx_1, ..., dx_n\}$ para indicarmos a base dual de $T_p\Sigma^*$ correspondente a

base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(q), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(q)\right\}$ de $T_q\Sigma$, $q \in x(U)$, associada a $x : U \to \Sigma$. Toda n-forma ω em Σ pode ser localmente expressa da seguinte maneira

$$w(q) = a(q)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n \tag{1.3}$$

onde $a : x(U) \to \mathbb{R}$ é alguma função e $dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ é a n-forma alternada

$$dx_1 \wedge ... \wedge dx_n(v_1, ..., v_n) = \det(dx_i(v_j)),$$

para todo $v_1, ..., v_n \in T_q\Sigma$.

Exemplo 1.5.1 (Elemento de volume)**.** Orientar uma espaço vetorial E é escolher uma base $\{u_1, ..., u_n\} \subset E$, chamá-la de *positiva* e dizer que também é positiva qualquer outra base $\{v_1, ..., v_n\} \subset E$ tal que se $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_j$ $(j = 1, ..., n)$, onde $det[a_{ij}] > 0$.

Se Σ^n é uma variedade Riemanniana orientada, então, para todo ponto $p \in \Sigma$, $T_p\Sigma$ possui uma orientação natural na qual a base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right\} \subset T_p\Sigma$, associada a uma parametrização positiva $x : U \to \mathbb{R}$ de Σ em p, é dita positiva. A orientação de $T_p\Sigma$ assim definida não depende da escolha da parametrização positiva x.

Considerando para cada $p \in \Sigma$ a orientação de $T_p\Sigma$ acima, o *elemento de volume* dV de Σ é a n-forma diferenciável definida da seguinte maneira:

Dado $p \in \Sigma$, escolhemos uma base ortonormal positiva $\{u_1, ..., u_n\} \subset T_p\Sigma$ e $v_1, ..., v_n \in T_p\Sigma$ põe-se

$$dV(p)(v_1, ..., v_n) = \det[a_{ij}],$$

onde $a_{ij} = \langle u_i, v_j \rangle$. Não é difícil constatar que dV é uma n-forma diferencial em Σ, entretanto $dV(p)$ aparenta depender da base $\{u_1, ..., u_n\}$. Para verificarmos a independência de dV do modo como tomamos as bases nos espaços tangentes, usaremos a *matriz de Gram* $\tilde{g} = \tilde{g}(v_1, ..., v_n) = [\langle v_i, v_j \rangle]$. Temos $\langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}.a_{kj}$, assim $\tilde{g} = a^T.a$, onde $a = [a_{ij}]$ e a^T a matriz transposta de a. Portanto,

$$\det \tilde{g} = (\det a)^2 = (dV(v_1, ...v_n))^2.$$

Como evidentemente $\det \tilde{g}$ não depende de escolhas arbitrárias, o mesmo pode se afirmar sobre $dV(v_1, ..., v_n) = \pm\sqrt{\det \tilde{g}}$, onde o sinal é de $+$ se $\{v_1, ..., v_n\}$ é uma base positiva e de $-$ em caso contrário.

Dada uma parametrização positiva $x : U \to \mathbb{R}$ de Σ em p, podemos expressar dV na vizinhança coordenada $x(U)$ como em (1.3). Para determinarmos a função $a : U \to \mathbb{R}$ em

um ponto $q \in x(U)$ basta aplicarmos $\frac{\partial}{\partial x_1}(q), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(q) \in T_q\Sigma$ a dV, isto é

$$a(q) = dV(q)(\frac{\partial}{\partial x_1}(q), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(q)) = \sqrt{g}.$$

Assim, o elemento de volume é igual a $dV = \sqrt{g}dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ em $x(U)$.

Seja $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis Σ_1^n e Σ_2^n. A cada n-forma diferenciável ω de Σ_2 corresponde uma n-forma diferenciável em Σ_1, $f^*\omega$, chamada de o *pullback* de ω por f definida por

$$f^*\omega(p)(v_1, ..., v_n) = w(f(p))(df(v_1), ..., df(v_n)),$$

para todo $p \in \Sigma_1$ e $v_1, ..., v_n \in T_p\Sigma_1$.

Seja ω uma n-forma diferencial sobre uma variedade diferenciável Σ^n. O suporte compacto K de ω é o fecho do conjunto

$$\{p \in \Sigma; \omega(p) \neq 0\}.$$

Seja $\omega = a(x)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ uma n-forma diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Se o suporte K de ω é compacta e está contida num aberto U, definimos a integral de ω em $\mathbb{R}^n$ como sendo o valor da integral da função a sobre U. Em outro termos, temos que

$$\int_\Sigma \omega = \int_U a dx.$$

Para definirmos a integral de uma n-forma diferenciável sobre uma variedade Σ^n mais arbitrária, é conveniente que supor que a variedade é orientável e compacto, consequentemente o suporte de ω também será compacto, afim de evitarmos problemas com a determinação do sinal da integral e de sua convergência, respectivamente. Assumindo esse fato, começamos a definir a integral supondo que o suporte K de ω está contida em uma vizinhança coordenada $V = x(U)$ correspondente a uma parametrização positiva $x : U \to \Sigma$ de Σ. $x^*\omega$ é uma n-forma diferenciável $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto no aberto U. A integral de ω sobre Σ é definida como a integral de $x^*\omega$ sobre $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\int_\Sigma \omega = \int_U x^*\omega.$$

Pode acontecer de K estar contida em uma outra vizinhança coordenada $\bar{V} = y(\bar{U})$ de uma parametrização positiva. Cabe então mostrarmos que nesse caso a definição acima

independe da escolha da vizinhança coordenada que contenha K. Se $x^*\omega = adx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ e $y^*\omega = bdy_1 \wedge ... \wedge dy_n$, então as funções $a : U \to \mathbb{R}$ e $b : \bar{U} \to \mathbb{R}$ cumprem

$$a = \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) b,$$

onde $(\frac{\partial y_j}{\partial x_i})$ é a matriz jacobiana da mudança de coordenada $y^{-1} \circ x : x^{-1}(V \cap \bar{V}) \to \mathbb{R}^n$. Segue-se portanto que a integral de ω sobre Σ nas condições acima está bem definida.

Consideremos agora o caso em que o suporte K de ω não está contido em uma vizinhança coordenada. Seja $\{V_\alpha\}$ a cobertura de Σ correspondente a orientação adotada e suponha a existência de uma família de funções diferenciáveis $\phi_1, ..., \phi_m$ tais que

1. $\sum_{i=1}^m \phi_i = 1$;

2. $0 \leq \phi_i \leq 1$, e o suporte de ϕ esta contido em $V_{\alpha_i} = V_i$.

A família $\{\phi_i\}$ será denominada uma partição diferenciável da unidade subordinada à cobertura $\{V_\alpha\}$.

Definimos a integral de ω em Σ por

$$\int_\Sigma \omega = \sum_{i=1}^m \int_\Sigma \phi_i \omega.$$

A definição acima independe da cobertura de Σ escolhida e da partição diferenciável da unidade associada a ela (ver [8]).

Proposição 1.5.1 (Existência de uma partição diferenciável da unidade)**.** *Sejam Σ uma variedade diferenciável compacta e $\{V_\alpha\}$ uma cobertura aberta finita de Σ por vizinhanças coordenadas. Então, existem funções diferenciáveis $\phi_1, ..., \phi_m$ tais que*

1. $\sum_{i=1}^m \phi_i = 1$;

2. $0 \leq \phi_i \leq 1$, e o suporte de ϕ esta contido em $V_{\alpha_i} = V_i$.

Demonstração. Ver [8]. □

A noção de variedade diferenciáveis, os conceitos e resultados dados até o momento pode ser estendidos a noção de variedades diferenciáveis com bordo. Basicamente a definição de variedades diferenciáveis e variedades diferenciáveis com bordo mudam apenas por tomarmos os domínios das parametrizações por abertos de semi-planos ao invés de abertos do $\mathbb{R}^n$. Abaixo daremos as definições de modo mais preciso e estabeleceremos alguns resultados.

Seja H^n semi-plano de $\mathbb{R}^n$ dado por $H^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq 0\}$. Os conjuntos abertos de H^n são aqueles obtidos pela interseção de H^n com abertos do $\mathbb{R}^n$.

Uma aplicação $\phi : V \to \mathbb{R}^m$ é dita diferenciável se existir alguma aplicação diferenciável $F : U \to \mathbb{R}^m$ definida em um aberto $U \supset V$ de $\mathbb{R}^n$ tal que F estenda f ($F|_V = f$). Se ϕ é diferenciável, sua derivada em $p \in V$, $d\phi_p$, é definida como a derivada de F em p, ou seja, $d\phi_p = dF_p$. Quando V não contém pontos da forma $(0, x_2, ..., x_n)$, então V é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e a definição de $d\phi_p$ coincide com a usual. Se p é da forma $(0, x_2, ..., x_n)$, então $d\phi_p$ é definida para todos os vetores tangentes as curvas em U que passam por p, isto é, para todos o vetores de $\mathbb{R}^n$ com origem em p. Utilizando essas curvas, é possível mostrar que a definição de $d\phi_p$ independe da extensão F de ϕ escolhida e assim temos que $d\phi_p$ está bem definida.

Definição 1.5.2. Uma variedade diferenciável n-dimensional com bordo (regular), é um conjunto Σ e uma família de aplicações injetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset H^n \to \Sigma$ tais que

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = \Sigma$;
2. Para todo par α e β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e aplicações $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ e $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis;
3. A família $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ é máxima com relação aos itens 1 e 2.

Um ponto $p \in \Sigma$ é chamado *ponto de bordo* em Σ se, para alguma parametrização $x : U \to \Sigma$ em p, tivermos que $x(0, x_2, ..., x_n) = p$.

Lema 1.5.1. *A definição de ponto de bordo de Σ independe da parametrização escolhida.*

Demonstração. Ver [8]. □

Segue-se do lema anterior que a noção de ponto de bordo esta bem definida. O conjunto formado por todos pontos do bordo de uma variedade com bordo Σ será indicado por $\partial\Sigma$ e chamada de bordo de Σ.

Os conceitos e resultados vistos anteriormente para variedade diferenciáveis são dados de maneira análoga para variedades com bordo, apenas trocando $\mathbb{R}^n$ por H^n.

Proposição 1.5.2. *Seja Σ é uma variedade diferenciável n-dimensional com bordo. Então $\partial\Sigma$ é uma variedade $(n-1)$-dimensional no sentindo tradicional. Além disso, se Σ é orientável, toda orientação de Σ induz uma orientação em $\partial\Sigma$ de maneira natural.*

Demonstração. Ver [8]. □

Desde que o bordo $\partial\Sigma$ é uma variedade diferenciável $(n-1)$-dimensional, podemos, para cada ponto $p \in \partial\Sigma$, considerar o espaço tangente a $T_p\partial\Sigma$ em $\partial\Sigma$. Segue-se das definições que $T_p\partial\Sigma$ é um subespaço vetorial de $T_p\Sigma$ de co-dimensão 1. Logo, podemos considerar o subespaço de $T_p\Sigma$ formado pelo conjunto dos vetores normais a $\partial\Sigma$. Um desses vetores de particular importância para nós é o chamado *vetor conormal* ao qual será definido a seguir.

Definição 1.5.3. Seja Σ^n uma variedade Riemanniana orientada com bordo. Dado um ponto $p \in \partial\Sigma$, diz-se que uma vetor $v \in T_p\Sigma$ aponta para fora de Σ quando existir uma parametrização positiva $x : U \to \Sigma$ definida em um subconjunto aberto U de H^n, com $p = x(u)$, $v = d_u x(v_0)$ com v_0 apontando para fora de H^n. O vetor conormal ν a $\partial\Sigma$ no ponto $p \in \partial\Sigma$ é o vetor unitário normal a $T_p\partial\Sigma$ que aponta para fora de Σ.

Teorema 1.5.1. *Seja Σ^{n+1} uma variedade Riemanniana com bordo com $n+1 \geq 2$. Dado um ponto $p \in \partial\Sigma$, uma base $\{v_1, ..., v_n\} \subset T_p\partial\Sigma$ quanto a orientação induzida por Σ se, e somente se, para todo vetor $v \in T_p\Sigma$ apontando para fora de Σ, a base $\{v, v_1, ..., v_n\} \subset T_p\Sigma$ é positiva.*

A seguir daremos uma sequência de resultados sobre integração em variedades.

Teorema 1.5.2. *Sejam Σ_1^n e Σ_2^n variedades diferenciáveis orientadas e conexas, $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ um difeomorfismo que preserva orientação e ω uma n-forma diferenciável em Σ_2. Então*

$$\int_{\Sigma_1} \phi^*\omega = \int_{\Sigma_2} \omega$$

.

Demonstração. Ver [27]. □

Definição 1.5.4. A energia de uma função diferenciável $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ definida em uma variedade diferenciável (com ou sem bordo) Σ é por definição o valor da integral

$$E(f) = \int_\Sigma |\nabla f|^2 dV.$$

Quando $\partial\Sigma \neq \emptyset$, diremos que f minimiza a energia para indicarmos que

$$E(f) \leq E(g)$$

para toda função diferenciável $g : \Sigma \to \mathbb{R}$ com a mesma condição de bordo que f, ou seja, $f = g$ em $\partial\Sigma$. Neste caso em particular, teremos que

$$E(f) \leq E(f + t\eta)$$

para toda função diferenciável $\eta : \Sigma \to \mathbb{R}$ identicamente nula em $\partial\Sigma$ e todo $t \in \mathbb{R}$.

Lema 1.5.2. *Uma função diferenciável $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ em uma variedade Σ satisfaz*

$$E(f) \leq E(f + t\eta),$$

para toda função diferenciável $\eta : \Sigma \to \mathbb{R}$ com suporte compacto e $t \in \mathbb{R}$, se, e somente se, é harmônica.

Demonstração. Ver [23]. □

Definição 1.5.5. O grau de uma aplicação diferenciável $\phi : \Sigma_1^n \to \Sigma_2^n$ entre variedades diferenciáveis orientadas, fechadas e conexas Σ_1 e Σ_2 em relação a um valor regular $q_0 \in \Sigma_2$, deg ϕ_{q_0}, é por definição o número inteiro

$$\deg\phi_{q_0} = \sum_{p \in \phi^{-1}(q_0)} \operatorname{sgn}\left(\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)\right),$$

onde $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p)\right)$ é o determinante jacobiano da expressão de ϕ em termos de parametrizações positivas $x : U \to \Sigma_1$ e $y : V \to \Sigma_2$ de $p \in \phi^{-1}(q_0)$ e q_0, respectivamente, e sgn é função sinal dada por

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad t < 0 \\ 0, & \text{se} \quad t = 0 \\ 1, & \text{se} \quad 0 < t \end{cases}$$

Teorema 1.5.3. *O grau de uma aplicação ϕ (como acima) independe da escolha do valor regular q_0.*

Demonstração. Ver [11]. □

Definição 1.5.6. Seja ϕ como anteriormente. O grau de ϕ, deg ϕ, é grau de ϕ com respeito a qualquer um dos seus valores regulares q_0.

Observem que a definição acima foi dada para variedades sem bordo, porém é possível estender a noção de grau a uma aplicação ϕ definida entre variedades com bordo nas mesmas

condições tomadas para Σ_1 e Σ_2 e que leve bordo no bordo. Para esse caso, o grau de ϕ é tomado como o grau da restrição de ϕ aos pontos interiores de variedade domínio, ou seja, dos pontos da variedade diferenciável com bordo na qual ϕ está definida e que não pertencem ao bordo.

Teorema 1.5.4. *Sejam $\phi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ como acima e ω uma n-forma diferencial de Σ_2. Então,*

$$\int_{\Sigma_1} \phi^*\omega = (deg\ \phi) \int_{\Sigma_2} \omega. \tag{1.4}$$

Demonstração. Ver [11]. □

Observação 1.5.1. *O teorema acima é valido também para funções ϕ definidas em variedades com bordo as quais levem bordo em bordo.*

1.6 Fórmula de Green e Teorema de Gauss-Bonnet

Seja Σ uma variedade Riemanniana orientada com bordo $\partial\Sigma$. Considerando em $\partial\Sigma$ a orientação e a métrica induzida por Σ, indicaremos pordA o elemento de volume de$\partial\Sigma$ e por ν o campo de vetores normais unitários apontando para fora de Σ ao longo de$\partial\Sigma$.

Teorema 1.6.1 (Fórmula de Green)**.** *Sejam $h : \Sigma \to \mathbb{R}$ e $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis tais que $h(\nabla f)$ tem suporte compacto em Σ. Então,*

$$\int_\Sigma \{h\Delta f + \langle \nabla h, \nabla f \rangle\} dV = \int_{\partial\Sigma} h \frac{\partial f}{\partial \nu} dA.$$

Demonstração. Ver [9] □

O próximo resultado, o Teorema de Gauss-Bonnet, é restrito as superfícies Riemannianas conexas orientadas, mas antes de apresentá-lo precisaremos introduzir o conceito de curvatura geodésica.

Definição 1.6.1. Seja Σ uma superfície Riemanniana. A curvatura geodésica, κ_g, de uma curva $\alpha : (a, b) \to \Sigma$ imersa em Σ é definida como o quociente

$$\kappa_g = \frac{\langle \nabla_t \alpha', \imath\alpha' \rangle}{|\alpha'|^3},$$

onde $\imath$ é a rotação por $\pi/2$ radianos.

Teorema 1.6.2 (Gauss-Bonnet)**.** *Seja Σ uma superfície Riemanniana compacta com bordo $\partial\Sigma$. Se dA é o elemento de área de Σ e ds o elemento comprimento de arco de Σ, então*

$$\int_{\partial\Sigma} \kappa_g ds + \int_{\Sigma} K dA = 2\pi\chi(\Sigma), \tag{1.5}$$

onde χ é característica de Euler de Σ.

Demonstração. Ver [10]. □

1.7 Espaços L^p em variedades Riemannianas

Seja (Σ, g) uma variedade Riemannina. Dado um número real $p > 0$, o espaço L^p de Σ, $L^p = L^p(\Sigma)$, é o conjunto das funções integráveis $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ tais que

$$\int_{\Sigma} |f|^p dV < +\infty$$

munido com a norma que para cada $f \in L^p$, associa o número real não-negativo

$$||f||_{L^p} = \left(\int_{\Sigma} |f|^p dV \right)^{1/p}.$$

Teorema 1.7.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ números reais positivos tais que $1/p + 1/q = 1$. Então, para todo par de funções $f \in L^p$ e $g \in L^q$, vale a seguinte desigualdade*

$$\int_{\Sigma} |fg| dV \leq \left(\int_{\Sigma} |f|^p dV \right)^{1/p} \left(\int_{\Sigma} |g|^q dV \right)^{1/q} = ||f||_{L^p} ||g||_{L^q}.$$

Demonstração. Ver [5]. □

Lema 1.7.1. *Sejam f e g como no lema anterior. Então a igualdade na desigualdade de Hölder ocorre se, e somente se,*

$$af^p + bg^q = 0$$

q.t.p.,para algum par de constantes a e b.

Demonstração. Ver [5]. □

1.8 Convergência fraca

Seja E uma espaço vetorial normado. Um funcional linear $f : E \to \mathbb{R}$ é dito limitado se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq c||x||,$$

para todo $x \in E$, onde $|.|$ é a função módulo da reta e $||.||$ é a norma de E. O espaço vetorial formado por todos os funcionais lineares limitados de E, com as operações usuais de soma entre funções e multiplicação por escalar, munido da norma

$$||f|| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||},$$

para todo funcional linear limitado f, será indicado por E^* e chamado o *espaço dual* de E. Como E^* é um espaço normado, podemos considerar o seu dual, $E^{**} = (E^*)^*$, onde E^{**} é chamado de *bi-dual* de E.

Lema 1.8.1. *Dado $x \in E$, defina $F_x : E^* \to \mathbb{R}$ por*

$$F_x(f) = f(x),$$

para todo $f \in E^*$. Então $F_x \in E^{**}$ e $||F_x|| = ||x||$.

Definição 1.8.1. Dado um espaço normado E, defina $J : E \to E^{**}$ por $J(x) = F_x$. E é dito reflexivo se $J(E) = E^{**}$.

Exemplo 1.8.1. O espaço L^p é reflexivo para $1 < p < +\infty$ (ver [30]).

Definição 1.8.2. Dizemos que uma sequência (x_n) de um espaço vetorial normado E converge fracamente para um ponto $x \in E$, e indicamos por $x_n \rightharpoonup x$, se para todo funcional linear limitado $f \in E^*$, tivermos que $\lim f(x_n) = f(x)$. Nesse caso x é chamado limite fraco de (x_n). Quando (x_n) converge fracamente, dizemos que (x_n) é fracamente convergente.

Observação 1.8.1. *Diremos que uma sequência (x_n) converge fortemente quando essa sequência convergir no sentido usual. A notação $x_n \to x$ será usada para indicarmos que* $\lim x_n = x$.

Lema 1.8.2. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *O limite fraco quando existe é único;*

2. *Toda sequência fracamente convergente é limitada;*

3. $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$.

Demonstração. Ver [30]. □

Lema 1.8.3. *Se (x_n) converge fracamente para x, então*

$$||x|| \leq \liminf ||x_n||. \tag{1.6}$$

Teorema 1.8.1. *Se E é reflexivo e (x_n) uma sequência limitada de E, então (x_n) possui uma subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Ver [30]. □

1.9 Espaços de Sobolev $W^{1,p}$

Dado $p > 1$, seja $\Im_p$ o espaço vetorial das funções diferenciáveis $\phi \in L^p(\Sigma)$ tais que $||\nabla\phi|| \in L^p(\Sigma)$.

Definição 1.9.1. O espaço de Sobolev $W^{1,p} = W^{1,p}(\Sigma)$ é o complemento do conjunto $\Im_p$ com respeito a norma

$$||\phi||_{W^{k,p}} = \left[||\phi||^p_{L^p} + ||\nabla\phi||^p_{L^p}\right]^{1/p}.$$

Proposição 1.9.1. *$W^{1,p}$ é reflexivo para todo número real $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Ver [6]. □

Definição 1.9.2. Um subconjunto A de um espaço normado E é dito pré-compacto se o seu fecho $\tilde{A}$ é compacto.

Definição 1.9.3. Dizemos que um espaço normado E_1 está compactamente mergulhado em um espaço normado E_2, se

1. E_1 é um subespaço de E_2;

2. O operador inclusão $I : E_1 \to E_2$ por $Iv = v$ para todo $v \in E_1$ é limitado;

3. Todo subconjunto $A \subset E_1$ limitado em E_1 é pré-compacto em E_2.

2 O Primeiro Autovalor Não-Nulo de Steklov

2.1 Uma estimativa para o primeiro autovalor de Steklov

Seja (Σ, g) uma variedade Riemanniana compacta k-dimensional com bordo $\partial\Sigma$ e operador Laplaciano Δ_g. Dada uma função $u \in C^\infty(\partial\Sigma)$, seja $\hat{u}$ a extensão harmônica de u, isto é,

$$\begin{cases} \Delta_g \hat{u} = 0 & \text{em} \quad \Sigma \\ \hat{u} = u & \text{sobre} \quad \partial\Sigma. \end{cases}$$

A aplicação de Dirichlet-Neumann $\mathfrak{L} : C^\infty(\partial\Sigma) \to C^\infty(\partial\Sigma)$ associa a cada função $u \in C^\infty(\partial\Sigma)$ a derivada direcional de sua extensão na direção do vetor conormal ν ao bordo $\partial\Sigma$,

$$\mathfrak{L}u = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu}.$$

Os autovalores dessa função foram estudados a primeira vez em 1902 por Steklov e desde então são chamados de autovalores de Steklov. Esses autovalores constituem um conjunto enumerável $\sigma_0 < \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq ...$ de valores reais não negativos os quais tendem ao infinito (ver [15]). Desde de que as funções constantes fazem parte do núcleo da aplicação de Direchlet-Neumann, temos que $\sigma_0 = 0$. Já o primeiro autovalor não-nulo σ_1 possui a seguinte caracterização variacional

$$\sigma_1 = \inf_{u \in C^1(\partial\Sigma), \int_{\partial\Sigma} u = 0} \frac{\int_\Sigma |\nabla \hat{u}|^2 da}{\int_{\partial\Sigma} u^2 ds} \tag{2.7}$$

(ver [15]).

Os autovalores de Steklov estão relacionados com alguns problemas geométricos, um de especial interesse para nós o problema de bordo livre de um domínio. Uma subvariedade mínima Σ propriamente imersa de uma domínio Ω é dita ser *solução de bordo de livre* de Ω se Σ encontra ∂B^n ao longo de $\partial\Sigma$, ou seja, se os vetores conormais a$\partial\Sigma$ coincidir com os cornomais de $\partial\Omega$ ao longo de $\partial\Sigma$.

Os Lema 2.1.1 exprime um resultado que relaciona os autovalores da aplicação de Direchlet-Neumann e as soluções de bordo livre na bola unitária centrada na origem B^n de $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.1.1. *Seja Σ^k uma subvariedade propriamente imersa da bola unitária B^n. Então Σ é uma subvariedade mínima a qual é solução de bordo livre de B^n se, e somente se, as funções coordenadas de Σ em $\mathbb{R}^n$ são autofunções de Steklov associada ao autovalor* 1.

Demonstração. Seja $x_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ a função que a cada ponto $p \in \Sigma$ associa sua i-ésima coordenada em $\mathbb{R}^n$, $\langle p, e_i \rangle$, onde e_i é o i-ésimo vetor base canônica do $\mathbb{R}^n$. Desde que estamos assumindo que Σ é uma subvariedade mínima, temos necessariamente que função coordenada x_i é harmônica para $i = 1, ..., n$. De fato, considerando um referencial ortonormal $\{E_1, ..., E_k\}$ de Σ, temos que o gradiente ∇x_i em Σ é dado por $\nabla x_i = e_i - e_i^\perp$, onde $e_i^\perp$ é componente ortogonal de e_i com respeito ao espaços tangentes a Σ, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta x_i &= \operatorname{div}(\nabla x_i) \\
&= \sum_j \langle \nabla_{E_j}(\nabla x_i), E_j \rangle. \\
&= \sum_j \langle D_{E_j}(e_i - e_i^\perp) - D_{E_j}(e_i - e_i^\perp)^\perp, E_j \rangle \\
&= \sum_j \langle D_{E_j}(e_i - e_i^\perp), E_j \rangle \\
&= \sum_j \langle D_{E_j}(e_i) - D_{E_j}(e_i^\perp), E_j \rangle \\
&= \sum_j -\langle D_{E_j}(e_i^\perp), E_j \rangle.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Desde que $\langle e_i^\perp, E_j \rangle = 0$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= E_j \langle e_i^\perp, E_j \rangle \\
&= \langle D_{E_j} e_i^\perp, E_j \rangle + \langle D e_i^\perp, D_{E_j} E_j \rangle
\end{aligned} \tag{2.9}$$

e consequentemente que

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= \sum_j \left\langle e_i^{\perp}, D_{E_j} E_j \right\rangle \\ &= \sum_j \left\langle e_i, (D_{E_j} E_j)^{\perp} \right\rangle \\ &= \left\langle e_i, \sum_j (D_{E_j} E_j)^{\perp} \right\rangle \\ &= \left\langle e_i, H \right\rangle \\ &= H_i,\end{aligned} \tag{2.10}$$

onde $H = (H_1, ..., H_n)$ é o vetor curvatura média de Σ. Provando assim nossa afirmação preliminar.

Portanto, para que Σ seja solução de bordo livre , uma vez que esta já é uma subvariedade de B^n é mínima, é necessário que vetor conormal ν em $\partial\Sigma$ coincida com o vetor posição no $\mathbb{R}^n$ para todo ponto $p \in \partial\Sigma$. Em outras palavras, se $\nu = (\nu_1, ...\nu_n)$, Σ é solução de bordo livre em B^n se, e somente se,

$$x_i = \nu_i = \left\langle \nu, e_i \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \nu} x_i,$$

para todo $i = 1, ..., n$. □

O primeiro resultado dando uma limitação para σ_1 foi determinado por Weinstock [33]. Nele é provado que se Σ é um domínio plano simplesmente conexo, então

$$\sigma_1 L(\partial\Sigma) \leq 2\pi,$$

onde $L(\partial\Sigma)$ é comprimento de $\partial\Sigma$, e que a igualdade ocorre se, e somente se, Σ é o disco. Posteriormente Weinstock provou que para superfícies Σ simplesmente conexas com bordo, a desigualdade permanecia a mesma e que neste caso a igualdade acontece se, e somente se, existi uma aplicação conforme de Σ sobre o disco a qual seja uma isometria nos bordos. O próximo teorema generaliza os resultados dados por Weinstock.

Teorema 2.1.1. *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana compacta de gênero γ e k componentes de bordo. Então temos a seguinte estimativa para o primeiro autovalor não-nulo de Steklov σ_1 de Σ*

$$\sigma_1 L(\partial\Sigma) \leq 2(\gamma + k)\pi,$$

onde $L(\partial\Sigma)$ indica o comprimento do bordo de Σ.

Demonstração. Toda superfície Riemanniana compacta admite uma função de Alhfors, isto é, uma aplicação $\phi : \Sigma \to D$ definida em Σ sobre o disco D unitário do $\mathbb{R}^2$ a qual é própria, conforme e com grau no máximo igual a $\gamma + k$. Sem perda de generalidade podemos, pelo Lema 4.1.1, admitir que $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ é tal que

$$\int_{\partial\Sigma} \phi_i ds = 0,$$

para $i = 1, 2$. Assim as funções ϕ_1 e ϕ_2 podem ser usadas como funções teste na caracterização variacional (2.7) de σ_1, obtendo

$$\sigma_1 \int_{\partial\Sigma} \phi_i^2 ds \leq \int_\Sigma |\nabla \hat{\phi}_i|^2 dV \leq \int_\Sigma |\nabla \phi_i|^2 dV. \tag{2.11}$$

Se λ^2 é coeficiente de conformidade entre a métrica induzida por $h = \phi^* g$ e a métrica g, isto é, $h = \lambda^2 g$, e $\{E_1, E_2\}$ é um referencial ortogonal de (Σ, g), temos que

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \lambda^2 g(E_i, E_i) \\ &= h(E_i, E_i) \\ &= \big\langle (d\phi_1(E_i), d\phi_2(E_i)), (d\phi_1(E_i), d\phi_2(E_i)) \big\rangle \\ &= (d\phi_1(E_i))^2 + (d\phi_2(E_i))^2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

para $i = 1, 2$. E portanto,

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 &= ((d\phi_1(E_1))^2 + (d\phi_2(E_1))^2) + ((d\phi_1(E_2))^2 + (d\phi_2(E_2))^2) \\ &= ((d\phi_1(E_1))^2 + (d\phi_1(E_2))^2) + ((d\phi_2(E_1))^2 + (d\phi_2(E_2))^2) \\ &= |\nabla\phi_1|^2 + |\nabla\phi_2|^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \sum_{i=1}^{2} |\nabla \phi_i|^2 dV &= 2 \int_\Sigma \lambda^2 dV \\ &= 2 \int_\Sigma \phi^* d\tilde{V} \\ &= 2\mathrm{deg}(\phi)\pi \\ &\leq 2(\gamma + k)\pi, \end{aligned}$$

onde $d\tilde{V}$ é o elemento de volume de D relativo a métrica canônica. Portanto, se somarmos a respectiva desigualdade (2.11) para $i = 1, 2$ e usarmos que $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial D$ juntamente com a desigualdade acima, obtemos que

$$\sigma_1 L(\Sigma) = \sigma_1 \int_{\partial\Sigma} \sum_{i=1}^{2} \phi_i^2 ds \leq \int_\Sigma \sum_{i=1}^{2} |\nabla \phi_i|^2 dV \leq 2(\gamma + k)\pi.$$

□

O próximo teorema mostra que a desigualdade obtida no teorema anterior não é ótima para alguns tipos de superfícies, no sentindo que a desigualdade é estrita. Esse resultado motiva a próxima seção.

Teorema 2.1.2. *Seja Σ uma superfície compacta de gênero 0 com k componentes de bordo, $k \geq 2$. Se σ_1 é o primeiro autovalor não nulo de Steklov de Σ relativa a métrica g, então*

$$\sigma_1 L(\partial\Sigma) < 2k\pi.$$

Demonstração. Ver [17]. □

2.2 Métricas rotacionalmente simétricas

Nesta seção consideraremos o problema de determinar o conjunto dos autovalores de Steklov de uma anel Σ com uma métrica da forma$g = dr^2 + a(r)^2 d\theta^2$ para alguma função positiva a, $0 < r_1 < r < r_2$ e $\theta \in S^1$.

Dada uma superfície (Σ, g) como acima, existe $T > 0$ e uma função positiva f definida em no intervalo $[0, T]$ tais que o produto $S = [0, T] \times S^1$ dotado da métrica $h = f(t)^2(dt^2 + d\theta^2)$ é isométrico a Σ. De fato, pois se $\tilde{f}(r) = \int_{r_1}^{r} a(s)^{-1} ds$, temos, pelo Teorema fundamental do Cálculo, que $\tilde{f}'(r) = a(r)^{-1} > 0$ e consequentemente que $\tilde{f}$ é inversível. Assim, se considerarmos a aplicação $F : [b, c] \times S^1 \to \Sigma$, onde b é ínfimo e c o supremo da imagem de $\tilde{f}$, cuja expressão em termos de coordenadas locais é dada por $(t, \theta) \mapsto (\tilde{f}^{-1}, \theta)$, teremos que F é uma isometria uma vez que $dF(\partial/\partial t) = a(h^{-1}(t))\partial/\partial r$, $dF(\partial/\partial\theta) = \partial/\partial\theta$ e consequentemente $F^* g = a^2(h^{-1}(t))(dt^2 + d\theta^2)$.

Como isometrias preserva o conjunto desses autovalores, voltamos nossa atenção a superfícies da forma $S = [0, T] \times S^1$ com métrica do tipo $h = f(t)^2(dt^2 + d\theta^2)$.

Uma função u é uma autofunção associada ao primeiro autovalor σ_1 da aplicação de Direchlet-Neumann em (S, h) se é harmônica e satisfaz a condição de bordo $\partial u/\partial\nu = \sigma_1 u$ em ∂S. Desde que métricas conformes em superfícies determinam operadores Laplacianos que diferem por um fator, temos que u é harmônica se, e somente, for harmônica com relação a qualquer métrica conforme a h. Em particular, se u é harmônica com respeito a $dt^2 + d\theta^2$, ou que equivalentemente, se u satisfazer a identidade $u_{tt} + u_{\theta\theta} = 0$ em termos locais.

Desde de que os vetores conormais a $\Gamma_0 = \{t = 0\}$ são dados por $\nu = -f(0)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}$ e sobre $\Gamma_1 = \{t = T\}$ por $\nu = f(T)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}$ e os elementos de arco nas respectivas componentes são

$f(0)d\theta$ e $f(T)d\theta$ em $t = 0$ e $t = T$, temos pelo Teorema 1.6.1 que

$$\int_S |\nabla u|^2 dV = \int_{\partial S} u\frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \int_{\Gamma_1} uu_t d\theta - \int_{\Gamma_0} uu_t d\theta.$$

Já a norma $L^2(\partial S)$ de u é dada por

$$\int_{\partial S} u^2 ds = \int_{\Gamma_0} u^2 f(0) d\theta + \int_{\Gamma_1} u^2 f(T) d\theta.$$

Assim podemos concluir, de acordo com a caracterização (2.7), que σ_1 depende apenas dos valores de u em ∂S e de f em $t = 0$ e $t = T$. Assim, se $\tilde{f}(t)(dt^2 + d\theta^2)$ é uma métrica em S tal que $\tilde{f}(0) = f(0)$ e $\tilde{f}(T) = f(T)$, temos que o primeiro autovalor de S com respeito a essa métrica coincide com o primeiro autovalor relativo a h. Sem perca de generalidade, podemos assumir daqui por diante que f é a função afim dada por

$$f(t) = (1 - \frac{t}{T})f(0) + \frac{t}{T}f(T).$$

Para calcularmos os autovalores de Steklov, consideraremos funções harmônicas na forma $u(t, \theta) = \alpha(t)\beta(\theta)$. Aplicando o método da separação de variáveis, obtemos para cada inteiro n uma solução. Para $n \geq 1$ as soluções são combinações lineares das funções $\sinh(nt)\sin(n\theta), \sinh(nt)\cos(n\theta), \cosh(nt)\sin(n\theta)$ e $\cosh(nt)\cos(n\theta)$ e no caso de $n = 0$, as combinações lineares são entre as funções t e 1. Para que sejam autofunções é necessário que $\partial u/\partial \nu = \lambda u$ em $\partial\Sigma$, ou equivalentemente $u_t = -\lambda f(0)u$ em Γ_0 e $u_t = \lambda f(T)u$ em Γ_1.

Para $n = 0$ temos que $\alpha = a + bt$ e que as condições em cada componente de bordo são

$$b = -\lambda f(0)a$$

e

$$b = \lambda f(T)(a + bT).$$

Implicando assim que são dois os valores de λ para os quais temos soluções não-nulas: $\lambda_0^{(1)} = 0$, com autofunções associadas sendo constantes, e

$$\lambda_0^{(2)} = (f(0)f(T)T)^{-1}(f(0) + f(T)), \tag{2.14}$$

cujo o autoespaço associado é gerado por $1 + bt$, onde $b = -\lambda_0^{(2)} f(0)$.

Para $n \geq 1$ as autofunções tem $\alpha = a\sinh(nt) + b\cosh(nt)$ e as condições de bordo são expressas por

$$na = -\lambda f(0)b, \tag{2.15}$$

$$na\cosh(nT) + nb\sinh(nT) = \lambda f(T)(a\sinh(nT) + b\cosh(nT)). \tag{2.16}$$

Resolvendo a equação (2.15) para a e substituindo na equação (2.16), após simplificarmos a expressão resultante, obtemos a seguinte equação quadrática para λ

$$\lambda^2 - n[f(0)^{-1} + f(T)^{-1}]\coth(nT)\lambda + n^2 f(0)^{-1}f(T)^{-1} = 0,$$

cujas raízes são os números reais positivas $\lambda_n^{(1)} < \lambda_n^{(2)}$ dados por

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{n}{2}\big[(f(0)^{-1} + f(T)^{-1})\coth(nT) - \sqrt{D}\big]$$

e

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{n}{2}\big[(f(0)^{-1} + f(T)^{-1})\coth(nT) + \sqrt{D}\big],$$

onde

$$D = [f(0)^{-1} + f(T)^{-1}]^2\coth(nT) - 4f(0)^{-1}f(T)^{-1}.$$

Observe que $\lambda_n^{(1)}$ e $\lambda_n^{(2)}$ possuem multiplicidade 2. Como estamos interessados em determinar o menor autovalor positivo de Steklov , podemos desconsiderar todos os $\lambda_n^{(2)}$ com $n \geq 1$, já que para esses casos $\lambda_n^{(2)} > \lambda_n^{(1)}$. Por outro lado, reescrevendo $\lambda_n^{(1)}$ como

$$\lambda_n^{(1)} = 2nf(0)^{-1}f(T)^{-1}\big[(f(0)^{-1} + f(T)^{-1})\coth(nT) + \sqrt{D}\big]^{-1}, \tag{2.17}$$

temos que $\lambda_n^{(1)}$ é uma função crescente de n, uma vez que para argumentos positivos a função coth é decrescente, implicando assim que $\sigma_1 = \min\{\lambda_0^{(2)}, \lambda_1^{(1)}\}$. Usando as expressões (2.14) e (2.17) para $\lambda_0^{(2)}$ e $\lambda_n^{(1)}$ com $n = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_1^{(1)}}{\lambda_0^{(2)}} &= \frac{T}{2}\left[\coth T - \left(\coth^2 T - \frac{4f(0)f(T)}{(f(0)+f(T))^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{2Tf(0)f(T)}{(f(0)+f(T))^2}\left[\coth T + \left(\coth^2 T - \frac{4f(0)f(T)}{(f(0)+f(T))^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1} \\
&= \frac{2T\alpha}{(\alpha+1)^2}\left[\coth T + \left(\coth^2 T - \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

onde $\alpha = f(0)/f(T)$ é a razão entre os comprimentos das componentes de bordo de S.

Fixando o valor de α, temos que (2.18) é uma função contínua e crescente de T a qual tende a 0 quando T tende a 0 e a infinito quando T tente ao infinito. Logo, existe um único $T(\alpha) > 0$ tal que $T = T(\alpha)$ implica que $\lambda_n^{(1)}/\lambda_0^{(2)} = 1$. Consequentemente

$$\sigma_1 = \begin{cases} \lambda_1^{(1)}, & \text{se} \quad 0 < T \leq T(\alpha) \\ \lambda_0^{(2)}, & \text{se} \quad T(\alpha) \leq T. \end{cases}$$

Por meio dessa expressão podemos concluir que σ_1 é maximizada em $T = T(\alpha)$, uma vez que σ_1 é uma função crescente de T no intervalo $(0, T(\alpha)]$ e decrescente no intervalo $[T(\alpha), \infty)$. Segue-se imediatamente desse fato que se fixarmos a razão α entre os comprimentos das componentes de bordo de S que

$$\begin{aligned}\sigma_1(S)L(\partial S) &\leq \sigma_1(T(\alpha))L(\partial S) \\ &= 2\pi\sigma_1(T(\alpha))(f(0) + f(T)) \\ &= 2\pi[f(0)f(T))T(\alpha)]^{-1}(f(0) + f(T))^2 \\ &= \frac{2\pi}{T(\alpha)}\left[\left(\frac{f(0)}{f(T)}\right)^{1/2} + \left(\frac{f(T)}{f(0)}\right)^{1/2}\right]^2 \\ &= \frac{2\pi}{T(\alpha)}(\alpha^{1/2} + \alpha^{-1/2})^2,\end{aligned} \tag{2.19}$$

onde essa desigualdade foi obtida apenas utilizando a maximidade de σ_1 em $T = T(\alpha)$, o fato de nesse caso $\sigma_1 = \lambda_0^2$ e da expressão (2.14) para λ_0^2. Observe que (2.19) depende apenas do valor α e assim que é válida para a família de superfícies da forma (S, h) cuja razão entre as componentes de bordo é igual a α.

Quanto a multiplicidade de σ_1, temos que é igual a 2 se $T < T(\alpha)$, 1 se $T > T(\alpha)$ e igual a 3 quando $T = T(\alpha)$.

O próximo teorema resume o que foi discutido até o momento e otimiza o valor $\sigma_1 L$ para anéis rotacionalmente simétricos. Nele será dada uma prova a qual identifica o anel máximo para um dado α com uma parte específica de um catenoide centrado na origem e mostramos que $\sigma_1 L$ é maximizado em $\alpha = 1$.

Consideraremos o catenoide parametrizado em $(-\infty, \infty) \times S^1$ por

$$\begin{aligned} x_1(t, \theta) &= \cosh t \cos\theta \\ x_2(t, \theta) &= \cosh t \sin\theta \\ x_3(t, \theta) &= t \end{aligned}$$

com a métrica $g = \cosh^2(t)(dt^2 + d\theta^2)$ induzida pelo $\mathbb{R}^3$. Observe que a porção do catenoide compreendida entre $t = a$ e $t = b$ é conformemente equivalente ao produto $[a, b] \times S^1$.

Lema 2.2.1. *Dado um número real c, existe uma função diferenciável $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que f é constante igual a 1 numa vizinhança de 0 e constante igual a c numa vizinhança de 1.*

Demonstração. Seja $\beta : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ a curva diferenciável dada por

$$\beta(x) = \begin{cases} A^{-1}\exp\left(\frac{1}{x(x+1)}\right) & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/3 \\ cA(A+B)^{-1}\exp\left(\frac{1}{(1-3x)(2-3x)}\right) & \text{se} \quad 1/3 < x < 2/3 \\ 0 & \text{se} \quad 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

onde A é área abaixo do gráfico da função $\exp\left(\frac{1}{x(x+1)}\right)$ no intervalo $(-1, 0]$ e B a área abaixo do gráfico da função $\exp\left(\frac{1}{(1-3x)(2-3x)}\right)$ no intervalo $(1/3, 2/3)$.

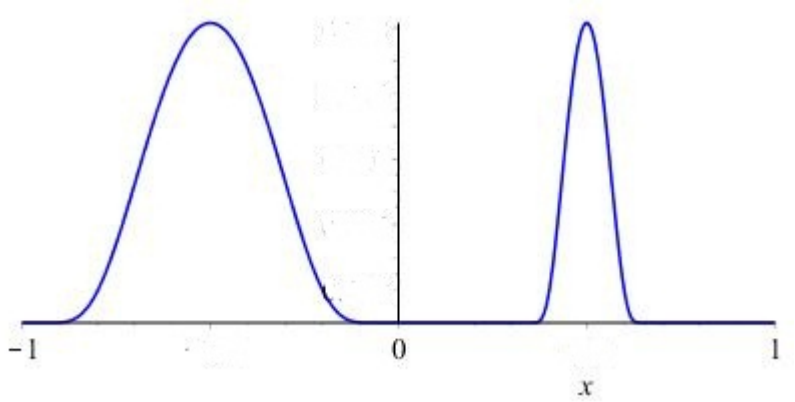

Figura 2.1: Gráfico da função β para algum $c > 0$.

Fazendo $f(t) = \frac{\int_0^t \beta(x)dx}{A}$ para todo $t \in [0, 1]$, temos que f é uma função diferenciável com as propriedades requeridas. □

Observe que o Lema anterior é valido para qualquer intervalo $[a, b]$ da reta $\mathbb{R}$ e que se c é um número positivo, então f é estritamente positiva.

Teorema 2.2.1. *Dado $a \in \mathbb{R}$, sejam t_1 e t_2 as soluções positivas de $t_1 = \cosh(t_1 + a)$ e $t_2 = \cosh(t_2 - a)$. Se fizermos $\alpha = t_1/t_2$, e denotarmos $T(\alpha)$ como na discussão anterior, temos que α é uma função decrescente de a cuja imagem corresponde ao conjunto dos números reais positivos, $T(\alpha) = t_1 + t_2$ e que o valor máximo para $\sigma_1 L$ em todas métricas rotacionalmente simétricas com α fixo é dado por $2\pi(t_1^{-1} + t_2^{-1})$. Mais ainda, o maior valor para $\sigma_1 L$ dentre todas as métricas rotacionalmente simétricas em anéis ocorre apenas quando $a = 0$ e portanto $\alpha = 1$. Em $a = 0$ temos que $t_1 = t_2 \approx 1, 2$.*

Demonstração. Antes de começarmos a demonstrar o teorema, observe que por meio do Teorema da função Implícita podemos verificar que as funções t_1 e t_2 são funções diferenciáveis

de a. Derivando t_1 e t_2 em relação a a, obtemos que t_1 é uma função decrescente de a enquanto t_2 é uma função crescente.

Os valores $-t_1$ e t_2 correspondem aos únicos pontos do gráfico de $x = \cosh(t-a)$ cuja reta tangente passa pela origem.

Voltando a demonstração, dado a, consideremos a parte Σ do catenoide de revolução de centro na origem e curva geratriz igual o gráfico de $x = \cosh(t-a)$ compreendida entre $t = -t_1$ e $t = t_2$. As escolhas de t_1 e t_2 fazem com que os vetores conormais nas componentes $\Gamma_1 = \{t = -t_1\}$ e $\Gamma_2 = \{t = t_2\}$ de $\partial\Sigma$ sejam paralelos ao vetor posição em cada ponto. Além disso, Γ_1 esta contido na esfera de centro na origem e raio$R_1 = \sqrt{\ t_1^2 + \cosh(t_1^2+a)^2}$ e Γ_2 na esfera de mesmo centro e raio $R_2 = \sqrt{t_2^2 + \cosh(t_2^2-a)^2}$. Um raciocínio análogo ao usado na prova do Lema 2.1.1 somado ao fato de Σ ser uma superfície mínima, mostra que o vetor posição $X = (x_1, x_2, x_3)$ restrita à Σ é harmônico e satisfaz a

$$\frac{\partial X}{\partial \nu} = (R_i)^{-1} X,$$

em Γ_i, $i = 1, 2$. Se reescalarmos a métrica g pela função $f : [-t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ dada pelo Lema 2.2.1 para $c = R_1/R_2$, obtemos uma nova métrica $\tilde{g} = fg$ a qual nas proximidades de Γ_1 coincide com g e nas de Γ_2 corresponde a multiplicarmos g por R_1/R_2. X é harmônico com relação a nova métrica, uma vez que $\tilde{g}$ é conforme a g, e cumpre a condição de bordo

$$\frac{\partial X}{\partial \tilde{\nu}} = (f)^{-1}\frac{\partial X}{\partial \nu} = (R_1)^{-1} X,$$

onde $\tilde{\nu}$ é vetor conormal a $\partial\Sigma$ com respeito a métrica $\tilde{g}$, e assim as funções coordenada x_1, x_2 e x_3 são autofunções de Steklov associados ao autovalor $(R_1)^{-1}$. Da discussão prévia ao teorema, sabemos que o único autovalor com possibilidade de ter multiplicidade 3 em $(\Sigma, \tilde{g})$ é σ_1 e que se isso ocorrer, então $(\Sigma, \tilde{g})$ maximiza o valor $\sigma_1 L$ para anéis rotacionalmente simétricos que possuem a mesma razão α entre os comprimentos das componentes de bordo que $(\Sigma, \tilde{g})$, a saber,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(R_1/R_2)^{-1}\cosh(t_2-a)}{\cosh(t_1+a)} \\
&= \frac{\cosh(t_2-a)/R_2}{\cosh(t_1+a)/R_1} \\
&= \frac{\cosh(t_2-a)/\sqrt{t_2^2+\cosh^2(t_2-a)}}{\cosh(t_1+a)/\sqrt{t_1^2+\cosh^2(t_1+a)}} \\
&= \frac{\cosh(t_2-a)/t_2\sqrt{1+\sinh^2(t_2-a)}}{\cosh(t_1+a)/t_1\sqrt{1+\sinh^2(t_1+a)}} \\
&= \frac{t_2^{-1}}{t_1^{-1}} \\
&= \frac{t_1}{t_2}.
\end{aligned}$$

Segue-se que $T(\alpha) = t_1+t_2$ e que o valor máximo de $\sigma_1 L$ em anéis rotacionalmente simétricos com $\alpha = t_1/t_2$ é igual a $2\pi(R_1)^{-1}[\cosh(t_1+a) + (R_1/R_2)\cosh(t_2-a)] = 2\pi(t_1^{-1}+t_2^{-1})$.

Desde que

$$\lim_{a\to\infty} t_1 = \lim_{a\to-\infty} t_2 = 1$$

e

$$\lim_{a\to-\infty} t_1 = \lim_{a\to\infty} t_2 = \infty$$

temos que $\alpha = t_1/t_2$ é uma função contínua decrescente de a que tende a 0 quando a tende a ∞ e a ∞ quando a tende a $-\infty$. Segue-se portanto que a imagem de α corresponde ao conjunto dos números reais positivos.

Resta provarmos que o maior valor de $\sigma_1 L$ ocorre quando $a = 0$, o que equivale a mostrarmos que a função $f(a) = t_1^{-1} + t_2^{-1}$ possui valor máximo em $a = 0$. Como $t_1(a) = t_2(-a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$, temos que f é uma função par e assim que é suficiente apenas mostrarmos que $f(a) < f(0)$ para todo $a > 0$. Derivando f, obtemos que $f'(a) = t_1^{-2}(1-t_1^{-2}) - t_2^{-2}(1-t_2^{-2}) = Q(t_1^{-2}) - Q(t_2^{-2})$, onde $Q(x) = x(1-x)$. Como t_1 e t_2 são maiores que 1, consideraremos apenas os valores de Q no intervalo $(0,1)$ para determinarmos os valores de f'. Desde de que $t_1^{-2}(0) = t_1^{-2}(0) > 1/2$, t_1^{-2} é função crescente de a, t_2^{-2} é decrescente e $Q(1-t_1^{-2}(0)) = Q(t_1^{-2}(0))$, temos que $f(a) < f(0)$ para todo $0 < a < a_0$, onde $a_0 = \sup\{a > 0 | t_2^{-2} \geq 1 - t_1^{-2}(0)\}$.

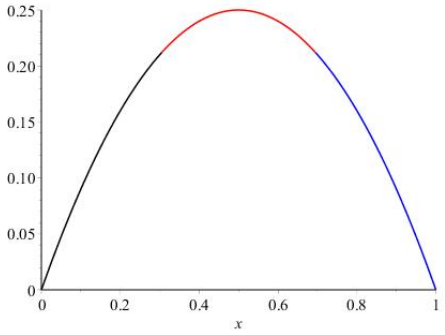

Figura 2.2: Gráfico da função $Q(x)$ no intervalo $[0,1]$. Em azul a imagem de $Q(t_1^{-2})$ e em vermelho imagem por $Q(t_2^{-2})$ dos pontos a tal que $t_2^{-2} \geq 1 - t_1^{-2}(0)$.

Para os demais valores de a temos que

$$\begin{aligned} f(a) &= t_1^{-1} + t_2^{-1} \\ &< 1 + \sqrt{1 - t_1^{-2}(0)}. \end{aligned}$$

Observe no entanto que $1 + \sqrt{1 - t_1^{-2}(0)} < 2t_1^{-1}(0)$. De fato, desde que essa desigualdade é equivalente à mostrarmos que $t_1(0) + \sqrt{t_1^2(0) - 1} < 2$ e

$$\begin{aligned} t_1(0) + \sqrt{t_1^2(0) - 1} &= 1 + \sqrt{\operatorname{csch}^2(t_1(0))} \\ &= 1 + \operatorname{csch}(t_1(0)) \\ &< 2, \end{aligned}$$

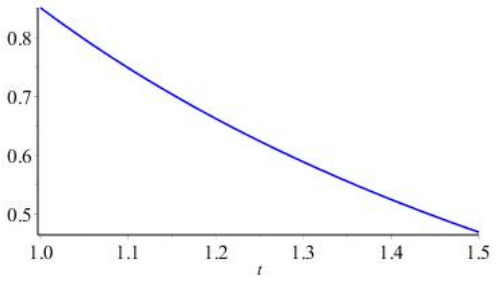

Figura 2.3: Gráfico da função csch t no intervalo $[1, 1.5]$

temos que a desigualdade $1 + \sqrt{1 - t_1^{-2}(0)} < 2t_1^{-1}(0)$ é verdadeira e assim que

$$f(a) < 1 + \sqrt{1 - t_1^{-2}(0)} < 2t_1^{-1}(0) = f(0)$$

para todo a tal que $t_2^{-2} < 1 - t_1^{-2}(0)$. □

O anel extremo considerado no teorema é um superfície minima com uma interessante geometria. Essa superfície é a única porção do catenoide que encontra a bola unitária centrada na origem ortogonalmente ao longo do bordo. Em outras palavras é a única parte do catenoide que é solução de bordo livre na bola. Essa superfície será chamada de *catenoide crítico*.

2.3 Anéis supercríticos

Qualquer anel Σ é conformemente equivalente ao produto $S = [0, T] \times S^1$, para algum $T > 0$ chamado *modulo conforme*. Nesta seção consideraremos o *caso supercrítico*, onde $T \geq 1/4(\alpha^{1/2} + \alpha^{-1/2})^2 T(1)^{-1}$, onde α é a razão entre os comprimentos das componentes de $\partial\Sigma$ e $T(1)$ é o modulo conforme do catenoide crítico, e mostraremos que o catenoide crítico maximiza o valor $\sigma_1 L$ sobre todos as métricas supercríticas. No que se segue, $(\sigma_1 L)^* = 8\pi/T(1) \approx 4\pi/1,2$ será usada para indicar o correspondente valor de $\sigma_1 L$ para o catenoide crítico.

Exemplo 2.3.1. Seja Σ uma anel rotacionalmente simétrico com $T \geq T(\alpha)$ (ver seção anterior). Então Σ é um anel supercrítico. De fato, pois do Teorema 2.2.1 e das discussões na seção anterior, temos que

$$\frac{2\pi}{T(\alpha)}(\alpha^{1/2} + \alpha^{-1/2})^2 \leq \frac{8\pi}{T(1)}$$

o que implica que

$$\frac{1}{4}(\alpha^{1/2} + \alpha^{-1/2})^2 \leq T(1) \leq T.$$

Teorema 2.3.1. *Para qualquer métrica supercrítica em um anel, temos que*

$$\sigma_1 L \leq (\sigma_1 L)^*,$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, existe uma aplicação conforme de Σ sobre o catenoide crítico o qual é uma isometria sobre os bordos. Em particular, no caso de igualdade, os bordos de Σ tem comprimentos iguais ($\alpha = 1$).

Demonstração. Sejam (Σ, g) um anel com uma métrica supercrítica g e $F : \Sigma \to S$ difeomorfismo conforme de Σ sobre $S = [0, T] \times S^1$. Se Γ_0 e Γ_1 são as componentes do bordo de S, L_0 e L_1 seus respectivos comprimentos pela métrica induzida por g, $F^{-1^*}g$,

indicaremos por $\tilde{\Sigma}$ a superfície S munida da métrica $\tilde{h} = f^2(t)(dt^2 + d\theta^2)$, onde $\tilde{h}$ é a métrica na qual os comprimentos de Γ_0 e Γ_1 são L_0 e L_1, respectivamente.

Fixemos uma autofunção afim $l(t)$ de $\tilde{\Sigma}$ não constante com $||l||_{L^2(\partial\tilde{\Sigma})} = 1$ (ver seção anterior). Temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma}(l\circ F)ds &= \int_{F^{-1}(\Gamma_0)}(l\circ F)ds + \int_{F^{-1}(\Gamma_1)}(l\circ F)ds \\
&= \int_{\Gamma_0} l ds_{(F^{-1^*}g)} + \int_{\Gamma_1} l ds_{(F^{-1^*}g)} \\
&= l(0)\int_{\Gamma_0} ds_{(F^{-1^*}g)} + l(T)\int_{\Gamma_1} ds_{(F^{-1^*}g)} \\
&= l(0)L_0 + l(T)L_1 \\
&= l(0)\int_{\Gamma_0} ds_{\tilde{h}} + l(T)\int_{\Gamma_1} ds_{\tilde{h}} \\
&= \int_{\partial\tilde{\Sigma}} l ds_{\tilde{h}} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

onde $ds_{(F^{-1^*}g)}$ e ds_h são os elementos de comprimento de arco de $\partial\Sigma$ com respeito as métricas $F^{-1^*}g$ e ds_h. A última igualdade decorre do fato de que l é autofunção de $\tilde{\Sigma}$. Se trocarmos $(l\circ F)$ nas expressões acima até a penúltima igualdade por $(l\circ F)^2$ e pela função constante igual a 1, obtemos $||(l\circ F)||_{L^2(\partial\Sigma)} = 1$ e $L(\partial\Sigma) = L(\partial\tilde{\Sigma})$.

De (2.20) temos que $l\circ F$ pode ser usada como função teste na caracterização (2.7) do primeiro autovalor $\sigma_1(\Sigma)$ de Σ, obtendo que

$$\sigma_1(\Sigma) \leq E(l\circ F). \tag{2.21}$$

Por outro lado, a energia de $l\circ F$ é igual a energia de l em $\tilde{\Sigma}$. De fato, pois dado um campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ temos que

$$\begin{aligned}
g(\nabla(l\circ F), X) &= \frac{\partial(l\circ F)}{\partial X} \\
&= \frac{\partial l}{\partial dF(X)} \\
&= h(\nabla l, dF(X)) \\
&= h(dF(dF^{-1}(\nabla l)), dF(X)) \\
&= \lambda^2 g(dF^{-1}(\nabla l), X) \\
&= g(\lambda^2 dF^{-1}(\nabla l), X),
\end{aligned}$$

o que implica $\nabla(l \circ F) = \lambda^2 dF^{-1}(\nabla l)$ e assim,

$$\begin{aligned} ||\nabla(l \circ F)||^2 &= (\lambda^2)^2 g(dF^{-1}(\nabla l), dF^{-1}(\nabla l)) \\ &= (\lambda^2)^2 F^{-1*} g(\nabla l, \nabla l) \\ &= (\lambda^2)^2((\lambda^2)^{-1} h(\nabla l, \nabla l)) \\ &= \lambda^2 ||\nabla l||_h^2. \end{aligned}$$

Integrando ambos lados da igualdade sobre Σ obtemos que

$$\begin{aligned} \int_\Sigma ||\nabla(l \circ F)||^2 dV &= \int_\Sigma \lambda ||\nabla l||_h^2 dV \\ &= \int_\Sigma ||\nabla l||_h^2 dV_{(F*h)} \\ &= \int_{F(\Sigma)} ||\nabla l||_h^2 dV_h \\ &= \int_S ||\nabla l||_h^2 dV_h. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\nabla^{\tilde{h}} l$ é o gradiente de l em $\tilde{\Sigma}$ e $Y \in \mathfrak{X}(S)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial Y} &= \tilde{h}(\nabla^{\tilde{h}} l, Y) \\ &= f(t)^2 h(\nabla^{\tilde{h}} l, Y) \\ &= h(f^2(t)\nabla^{\tilde{h}} l, Y), \end{aligned}$$

o que implica que $\nabla l = f(t)^2 \nabla^{\tilde{h}} l$ e consequentemente que

$$\begin{aligned} \int_S ||\nabla^h l||_h^2 dV_h &= \int_S f(t)^2 ||\nabla^{\tilde{h}} l||_h^2 (f(t)^2 dV_h) \\ &= \int_{\tilde{\Sigma}} ||\nabla^{\tilde{h}} l||_{\tilde{h}}^2 dV_{\tilde{h}}, \end{aligned}$$

o que prova $E(l \circ F) = E(l) = \lambda_0^2$ (ver discussão da seção anterior). Assim, desde que $L(\partial\Sigma) = L(\partial\tilde{\Sigma})$, chegamos a seguinte desigualdade,

$$\begin{aligned} \sigma_1(\Sigma) L(\partial\Sigma) &\leq E(l \circ F) L(\partial\Sigma) \\ &= \lambda_0^{(2)} L(\partial\tilde{\Sigma}) \\ &= 2\pi T^{-1}(\alpha^{1/2} + \alpha^{-1/2})^2 \\ &\leq (\sigma_1 L)^*, \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde da primeira para a segunda igualdade usamos o mesmo raciocínio empregado em (2.19), já da segunda igualdade para última desigualdade utilizamos a hipótese de estarmos considerando uma métrica supercrítica, ou seja, $T \geq 1/4(\alpha^{1/2} + \alpha^{-1/2})^2 T(1)$.

Resta apenas considerarmos o caso de igualdade em (2.22). Nesse caso, temos de (2.22) que $\sigma_1(\Sigma) = E(l \circ F)$ e assim que $l \circ F$ é uma autofunção associada ao primeiro autovalor de Steklov em Σ (ver (2.7)). Desde de que S com a métrica induzida por g, $\lambda^2(dt^2 + d\theta^2)$, é isométrica a Σ, temos que os conjuntos dos seus autovalores coincidem, em particular, λ_0^2 é o primeiro autovalor de Steklov de S com respeito a essa métrica e l é uma autofunção associada. Assim, desde que o vetor conormal ν é dado por $\nu = -\lambda^{-1}\partial/\partial t$ em Γ_0 e $\nu = \lambda^{-1}\partial/\partial t$ em Γ_1, l e $\partial l/\partial t$ são constantes ao longo de cada componente de ∂S e $\partial l/\partial \nu = \lambda_0^{(2)} l$, temos que λ é constante em Γ_0 e Γ_1, o que implica que $\lambda^2(dt^2 + d\theta^2)$ e $\tilde{h}$ são isométricas ao longo do bordo de S pelo modo como definimos $\tilde{h}$. Logo, o conjunto dos autovalores de Σ é mesmo de $\tilde{\Sigma}$, em particular $\sigma_1(\tilde{\Sigma}) = \lambda_0^{(2)}$. Assim, de (2.22), segue-se que $\sigma_1(\tilde{\Sigma})L(\tilde{\Sigma}) = (\sigma_1 L)^*$, o que implica pelo Teorema 2.2.1 que $\tilde{\Sigma}$ é equivalente ao catenoide crítico no sentindo de que $T = T(1)$ e $\alpha = 1$. □

3 VOLUME CONFORME DE BORDO E VOLUME RELATIVO CONFORME

Seja (Σ^k, g) uma variedade Riemanniana compacta com bordo $\partial\Sigma$ que admita uma aplicação conforme $\phi : \Sigma \to B^n$ com $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial B^n$. Denotando por G o grupo das transformações conformes de B^n, definimos os volumes conformes como seguem-se

Definição 3.1.1. Dada uma aplicação $\phi \in C^1(\partial\Sigma, \partial B^n)$ que admite uma extensão $\phi : \Sigma \to B^n$, o n-volume conforme de bordo de ϕ é definido como

$$V_{cb}(\Sigma, n, \phi) = \sup_{f \in G} V(f(\phi(\partial\Sigma)))$$

e n-volume conforme de bordo de Σ por

$$V_{cb}(\Sigma, n) = \inf_{\phi} Vcb(\Sigma, n, \phi),$$

onde o ínfimo é tomado sobre o conjunto de todas aplicações $\phi \in C^1(\partial\Sigma, \partial B^n)$ que possuem uma extensão conforme $\phi : \Sigma \to B^n$. O volume conforme de bordo de Σ é por definição o valor

$$V_{cb}(\Sigma) = \lim_{n \to \infty} V_{cb}(\Sigma, n).$$

Pode ser verificado que $V_{cb}(\Sigma, n) \geq V_{cb}(\Sigma, n+1)$ e assim que $V_{cb}(\Sigma)$ está bem definido.

Observação 3.1.1. *Para qualquer variedade Riemanniana k-dimensional Σ com bordo, o n-volume conforme de Σ é limitado inferiormente pelo volume da esfera $(k-1)$-dimensional:*

$$V_{bc}(\Sigma, n) \geq V(S^{k-1}).$$

Essa afirmação pode ser provada da seguinte maneira: dado um vetor $\theta \in S^{n-1}$, seja $f_\theta(t)$a família a um parâmetro de difeomorfismo da esfera dada pelo fluxo do gradiente do

funcional linear na direção θ. Para todo $t \in \mathbb{R}$, $f_\theta(t)$ fixa os pontos θ e $-\theta$ e além disso $\lim_{t\to\infty} f_\theta(t)(x) = \theta$ para todo $x \in S^{n-1}/\{-\theta\}$. Se $\phi : \partial\Sigma \to S^{n-1}$ é uma aplicação com posto $k-1$, então

$$\lim_{t\to\infty} f_{-\phi(x)}(t)(\phi(\partial\Sigma)) = mV(S^{k-1}),$$

para algum inteiro positivo m. Mais precisamente m é a multiplicidade da subvariedade imersa $\partial\Sigma$ no ponto $-\theta$. Antes de provarmos esse fato, consideremos a seguinte proposição que será utilizada durante a demonstração.

Para $k = 2$ e Σ uma solução do problema de bordo livre de B^n , o seu n-volume é igual ao comprimento de seu bordo.

Proposição 3.1.1. *Seja Σ uma variedade diferenciável e g , $\tilde{g}$ duas métricas Riemannianas tais que $\tilde{g} = e^{2f}g$. Se ∇ e $\tilde{\nabla}$ são as conexões de Σ com respeito a g e $\tilde{g}$, respectivamente, então*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + df(X)Y + df(Y)X - g(X,Y)\nabla f.$$

Demonstração. Ver [15]. □

Teorema 3.1.2. *Seja Σ uma superfície mínima com bordo $\partial\Sigma \subset \partial B^n$ a qual encontra ∂B^n ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma$, dada por uma imersão isométrica $\phi : \Sigma \to B^n$. Então*

$$V_{cb}(\Sigma, n, \phi) = L(\partial\Sigma).$$

Demonstração. Consideremos o operador sem-traço $||A - \frac{1}{2}(Tr_g A)g||^2 dV$ da segunda forma fundamental A de Σ. Esse operador é invariante por elementos de G em superfícies imersas em B^n. De fato pois, se $f \in G$, g é a métrica canônica de B^n, $\tilde{g} = e^{2f}g$ é a métrica induzida por f e $\{E_1, E_2\eta_1, ..., \eta_m\}$ um referencial ortonormal de (B^n, g) tal que $\{E_1, E_2\}$ é um referencial de Σ, então o conjunto dos vetores $\tilde{E}_i = e^{-1}E_i$ e $\tilde{\eta_j} = e^{-1}\eta_j$, com $i = 1, 2$ e $j = 1, ..., m$, constitui um referencial ortonormal de $(B^n, \tilde{g})$ com $\{\tilde{E}_1, \tilde{E}_2\}$ sendo um referencial de $f(\Sigma)$. Assim, se $\tilde{A}$ é a segunda forma fundamental de $f(\Sigma)$, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{ij} &= \tilde{A}(\tilde{E}_i, \tilde{E}_j) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \tilde{g}(\tilde{A}_{ij}, \tilde{\eta_k})\tilde{\eta_k} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \tilde{g}(\tilde{S}_{\tilde{\eta_k}}(\tilde{E}_i), \tilde{E}_j)\tilde{\eta_k} \\
&= \sum_{k=1}^{m} e^{-f} g(\tilde{S}_{\tilde{\eta_k}}(E_i), E_j)\eta_k.
\end{aligned}$$

Por outro lado, desde que $\tilde{S}_{\tilde{\eta_k}}(E_i) = -(\tilde{D}_{E_i}\tilde{N_k})^T$, onde $\tilde{N_k}$ é uma extensão normal de $\tilde{\eta}_k$, temos, aplicando a Proposição 3.1.1 ao segundo membro dessa identidade, que

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{\tilde{\eta_k}}(E_i) &= -\big(D_{E_i}\tilde{N_k} + df(E_i)\tilde{N_k} + df(\tilde{N_k})E_i\big)^T \\
&= -\big(E_i(e^{-f})N_k + e^{-f}D_{E_i}N_k + df(E_i)\tilde{N_k} + e^{-f}df(N_k)E_i\big)^T \\
&= -e^{-f}\big(D_{E_i}N_k + df(N_k)E_i\big)^T \\
&= e^{-f}(S_{\eta_k}(E_i) - df(N_k)E_i),
\end{aligned}$$

onde $N_k = e^{-f}\tilde{N_k}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{ij} &= \sum_{k=1}^{2} e^{-2f} g(S_{\eta_k}(E_i) - df(N_k)E_i, E_j)\eta_k \\
&= e^{-2f}(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{2} g(df(N_k)E_i, E_j)\eta_k) \\
&= e^{-2f}(A_{i,j} - \delta_{ij}\eta),
\end{aligned}$$

onde $A_{ij} = A(E_i, E_j)$ e $\eta = \sum_{k=1}^{2} df(N_k)\eta_k$. Portanto,

$$\begin{aligned}
||\tilde{A} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\tilde{A}\tilde{g}||^2 &= \sum_{i,j=1}^{2} |\tilde{A_{ij}} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\mathrm{tr}\tilde{A}|^2_{\tilde{g}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} (|\tilde{A_{ij}}|^2_{\tilde{g}} - \delta_{ij}\tilde{g}(\tilde{A_{ij}}, \mathrm{tr}\tilde{A}) + \frac{1}{4}\delta_{ij}|\mathrm{tr}\tilde{A}|^2_{\tilde{g}}) \\
&= e^{-2f}\sum_{i,j=1}^{2} (|A_{i,j} - \delta_{ij}\eta|^2 - \delta_{ij}g(A_{i,j} - \delta_{ij}\eta, \mathrm{tr}\ A - 2\eta) + \frac{1}{4}\delta_{ij}|\mathrm{tr}\ A - 2\eta|^2) \\
&= e^{-2f}\left[\left(\sum_{i,j=1}^{2} (|A_{i,j} - \delta_{ij}\eta|^2\right) - g(\mathrm{tr}\ A - 2\eta, \mathrm{tr}\ A - 2\eta) + \frac{1}{2}|\mathrm{tr}\ A - 2\eta|^2)\right] \\
&= e^{-2f}\left[\left(\sum_{i,j=1}^{2} (|A_{i,j} - \delta_{ij}\eta|^2\right) - \frac{1}{2}|\mathrm{tr}\ A - 2\eta|^2)\right] \\
&= e^{-2f}\left[\left(\sum_{i,j=1}^{2} |A_{i,j}|^2\right) - \frac{1}{2}|\mathrm{tr}\ A|^2\right] \\
&= e^{-2f}\sum_{i,j=1}^{2} |A_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\mathrm{tr}A|^2 \\
&= e^{-2f}||A - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ Ag||^2,
\end{aligned}$$

o que mostra que $||A - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ Ag||^2 dV$ é invariante no sentindo já mencionado.

Utilizando a equação de Gauss (1.1) obtemos que

$$\begin{aligned} 2||A-\frac{1}{2}\text{tr } Ag||^2 &= 2\Big[\Big(\sum_{i,j=1}^{2}|A_{i,j}|^2\Big)-\frac{1}{2}|\text{tr } A|^2\Big] \\ &= 2\big[|A_{12}|^2+|A_{21}|^2+|A_{11}+A_{22}|^2-2g(A_{11},A_{22})-\frac{1}{2}|\text{tr } A|^2\big] \\ &= 2(\frac{1}{2}H^2-2K) \\ &= H^2-4K, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\int_\Sigma (H^2-4K)dV=\int_{f(\Sigma)}(\tilde{H}^2-4\tilde{K})d\tilde{V},$$

onde $d\tilde{V}$ é o elemento de área de $f(\Sigma)$ e $\tilde{H}$,$\tilde{K}$ são suas curvaturas média e Gaussiana, respectivamente. Assim, desde que Σ é mínima ($H=0$), temos que

$$-4\int_\Sigma KdV=\int_{f(\Sigma)}(\tilde{H}^2-4\tilde{K})d\tilde{V}. \tag{3.23}$$

Por outro lado, sabemos do Teorema de Gauss-Bonnet que

$$\int_\Sigma KdA=2\pi\chi(\Sigma)-\int_{\partial\Sigma}\kappa ds$$

e

$$\int_{f(\Sigma)}\tilde{K}d\tilde{A}=2\pi\chi(f(\Sigma))-\int_{\partial f(\Sigma)}\tilde{k}d\tilde{s}.$$

Desde que a característica de Euler é invariante por homeomorfismo, temos $2\pi\chi(\Sigma)=2\pi\chi(f(\Sigma))$. Substituindo os valores acima em (3.23) temos

$$\begin{aligned} 4\int_{\partial\Sigma}\kappa_g ds &= \int_{f(\Sigma)}\tilde{H}^2d\tilde{V}+4\int_{\partial f(\Sigma)}\tilde{\kappa_g}d\tilde{s} \\ &\geq 4\int_{\partial f(\Sigma)}\tilde{\kappa_g}d\tilde{s}. \end{aligned}$$

Se T é o vetor tangente unitário orientado e ν é o vetor normal unitário ao longo $\partial\Sigma$ que aponta para dentro de Σ, então

$$\kappa_g=\left\langle\frac{dT}{ds},\nu\right\rangle=-\left\langle T,\frac{d\nu}{ds}\right\rangle=\left\langle T,\frac{d\phi}{ds}\right\rangle=\langle T,T\rangle=1,$$

onde da segunda para a terceira igualdade usamos o fato de que $\nu=-\phi$, já que Σ encontra ∂B^n ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma$. Desde que f é conforme, $f(\Sigma)$ também encontra ∂B^n ao longo de $\partial f(\Sigma)$ e assim também teremos que $\tilde{\kappa_g}=1$. Assim, por (3.24), temos

$$L(\partial\Sigma)\geq\sup_{f\in G}L(f(\partial\Sigma))=V_{cb}(\Sigma,n,\phi)\geq L(\partial\Sigma).$$

□

Teorema 3.1.3. *Seja Σ uma superfície mínima em B^n com bordo $\partial\Sigma \subset \partial B^n$ a qual encontra ∂B^n ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma$. Então*

$$2A(\Sigma) = L(\partial\Sigma) \geq 2\pi.$$

Demonstração. Desde de que Σ é superfície mínima que encontra ∂B^n ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma$ temos que o Laplaciano da função módulo ao quadrado $|.|^2$ em Σ é dada por

$$\begin{aligned}
\Delta|x|^2 &= \mathrm{div}\nabla|x|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{2} \big\langle \nabla_{E_j}(\nabla|x|^2), E_j \big\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{2} \big\langle \nabla_{E_j}(2(x - x^{\perp})), E_j \big\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{2} \big\langle D_{E_j}(2(x - x^{\perp})), E_j \big\rangle \\
&= 2(\sum_{j=1}^{2} \big\langle D_{E_j}(x), E_j \big\rangle - \sum_{j=1}^{2} \big\langle D_{E_j}((x)^{\perp}, E_j \big\rangle) \\
&= 2(\sum_{j=1}^{2} \big\langle D_{E_j}(x), E_j \big\rangle - \sum_{j=1}^{2} \big\langle x, (D_{E_j}(E_j))^{\perp} \big\rangle) \\
&= 2\sum_{j=1}^{2} \big\langle E_j, E_j \big\rangle - 2\big\langle x, H \big\rangle \\
&= 4,
\end{aligned}$$

onde $\{E_1, E_2\}$ é um referencial ortonormal de Σ. De (1.6.1) segue-se que

$$4A(\Sigma) = \int_{\Sigma} \Delta|x|^2 dA = \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial|x|^2}{\partial\nu} ds = 2\int_{\partial\Sigma} \big\langle x, x \big\rangle ds = 2L(\partial\Sigma).$$

Pelo teorema anterior, fazendo ϕ igual a aplicação inclusão de Σ em B^n, e da Observação 3.1.1 temos que

$$2A(\Sigma) = L(\partial\Sigma) = V_{cb}(\Sigma, n, \phi) \geq V_{cb}(\Sigma, n) \geq 2\pi.$$

□

Corolário 3.1.1. *Vale então a desigualdade isoperimétrica para soluções de bordo livre na bola:*

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

Demonstração. Para superfícies mínimas na bola temos que $2A(\Sigma) = L(\partial\Sigma)$, como mostrado no teorema anterior. Segue-se portanto que

$$\frac{L^2}{4\pi} = \left(\frac{L}{2}\right)^2 \pi^{-1} = A^2\pi^{-1} \geq A$$

é equivalente a desigualdade $A \geq \pi$, a qual é verdadeira de acordo com o teorema passado. □

Definição 3.1.2. Seja Σ uma variedade Riemanniana compacta k-dimensional com bordo a qual admite uma aplicação conforme $\phi : \Sigma \to B^n$ com $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial B^n$. O n-volume conforme relativo de ϕ é definido como

$$V_{rc}(\Sigma, n, \phi) = \sup_{f \in G} V(f(\phi(\Sigma)))$$

e o n-volume conforme de Σ por

$$V_{rc}(\Sigma, n) = \inf_{\phi} V_{rc}(\Sigma, n, \phi),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas aplicações não-degeneradas $\phi : \Sigma \to B^n$ com $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial B^n$.

Lema 3.1.1. *Se m e n são inteiros positivos tais que $m \geq n$, então $V_{rc}(\Sigma, n) \geq V_{rc}(\Sigma, m)$.*

Demonstração. Sejam $\phi : \Sigma \to B^n \subset B^m$ uma aplicação conforme, com $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial B^n \subset \partial B^m$, $A = \phi(\Sigma) \subset B^n$ e $f \in G$. Então $f(A)$ esta na calota esférica $f(B^n)$ em B^m cujo bordo esta ∂B^m. Considere agora uma transformação ortogonal T que rotaciona a calota esférica de modo que seu bordo fique sobre um plano n-dimensional paralelo ao plano n-dimensional que contém o bordo de B^n e P a projeção conforme de $T(f(B^n))$ em B^n, onde P não diminui volume, assim, se $A' = P(T(f(A)))$, temos que

$$V(A') \geq V(A).$$

Porém, A' é imagem de A por uma transformação conforme de B^n, o que implica

$$\sup_{F \in G} V(F(A)) \geq \sup_{f \in G'} V(f(A)),$$

onde G denota o grupo das transformações conformes de B^n e G' o grupo das transformações conformes de B^m. □

Definição 3.1.3. O volume relativo conforme de Σ é o valor

$$V_{rc}(\Sigma) = \lim_{n\to\infty} V_{rc}(\Sigma, n).$$

Observação 3.1.2. *Para qualquer variedade k-dimensional Σ com bordo, o n-volume relativo conforme de Σ é limitado inferiormente pelo volume da bola k-dimensional:*

$$V_{rc}(\Sigma, n) \geq V(B^k).$$

Para verificar isso, suponha que $\phi : \Sigma \to B^n$ é uma aplicação conforme com $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial B^n$, a qual tem posto k em $x \in \partial\Sigma$. O difeomorfismo conforme $f_{-\phi(x)}(t)$ considerado na Observação 3.1.1 estende-se a um difeomorfismo conforme de B^n e

$$\lim_{t\to\infty} f_{-\phi(x)}(t)(\phi(\partial\Sigma)) = mV(B^k),$$

para algum m inteiro positivo, a multiplicidade de $\phi(\partial\Sigma)$ em $\phi(x)$.

4 RELAÇÃO ENTRE O PRIMEIRO AUTOVALOR DE STEKLOV E O VOLUME CONFORME

4.1 O primeiro autovalor de Steklov e volume conforme

Lema 4.1.1. *Sejam (Σ, g) uma variedade Riemanniana compacta e ϕ uma aplicação conforme de Σ sobre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Existe uma aplicação $f \in G$ tal que $\psi = f \circ \phi = (\psi_1, ..., \psi_n)$ satisfaz*

$$\int_\Sigma \psi_i dV = 0$$

para $i = 1, ..., n$.

Demonstração. Dados um ponto $p \in S^{n-1}$ e um número real $k \in (0, 1]$, consideremos a aplicação $\gamma^{p,k} = \pi_{-p}^{-1} \circ H_k \circ \pi_{-p}$, onde π_{-p} é a projeção estereográfica de S^{n-1} em $\mathbb{R}^{n-1}$ por $-p$ e H_k é a homotetia em $\mathbb{R}^{n-1}$ correspondente a k. Fazendo $\psi^{p,k} = \gamma^{p,k} \circ \phi$, a aplicação $F : (0, 1] \times S^{n-1} \to B_0^n$ de $(0, 1] \times S^{n-1}$ na bola aberta unitária de $\mathbb{R}^n$ com centro na origem B_0^n dada por

$$F(k, p) = \frac{1}{V(\Sigma)}\Big(\int_\Sigma \psi_1^{p,k} dV, ..., \int_\Sigma \psi_n^{p,k} dV\Big)$$

é contínua. Antes de provarmos a continuidade de F mostraremos que sua imagem realmente

é um subconjunto de B_0^n. De fato, pois para $(k,p) \in (0,1] \times S^{n-1}$ temos

$$\begin{aligned}
||F(p,k)||^2 &= \frac{1}{V(\Sigma)^2}\sum_{i=1}^{n+1}\left(\int_\Sigma \psi_i^{p,k}dV\right)^2 \\
&< \frac{1}{V(\Sigma)^2}\sum_{i=1}^{n+1}\left(V(\Sigma)^{1/2}\left(\int_\Sigma (\psi_i^{p,k})^2 dV\right)^{1/2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{V(\Sigma)}\int_\Sigma \sum_{i=1}^{n+1}(\psi_i^{p,k})^2 dV \\
&= \frac{1}{V(\Sigma)}\int_\Sigma dV \\
&= 1,
\end{aligned}$$

onde a desigualdade acima segue-se da desigualdade de Hölder e do fato que $\left(|\psi_1^{p,k}|, ..., |\psi_n^{p,k}|\right)$ não é constante. Para a continuidade, sejam $(k_m, p_m) \in (0,1] \times S^{n-1}$ uma sequência convergindo para (k,p) e $x \in S^{n-1}$ um ponto distinto de $-p$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x \neq -p_m$ para todo m, assim

$$\begin{aligned}
\lim \gamma^{p_m,k_m}(x) &= \lim\left[-p_m + 2\left(\frac{(1-k_m)|x+p_m|^4 p_m + 2k_m|x+p_m|^2(x+p_m)}{|(1-k_m)|x+p_m|^2 p_m + 2k_m(x+p_m)|^2}\right)\right] \\
&= \left[-p + 2\left(\frac{(1-k)|x+p|^4 p + 2k|x+p|^2(x+p)}{|(1-k)|x+p|^2 p + 2k(x+p)|^2}\right)\right] \\
&= \gamma^{p,k}(x).
\end{aligned}$$

Como a função $||\gamma^{p_m,k_m}||$ é constante igual 1 para todo m, segue-se do Teorema da Convergência Dominada (Ver [5]) que

$$\lim \int_\Sigma \psi_i^{p_m,k_m} dV = \int_\Sigma \psi_i^{p,k} dV$$

para todo $i = 1, ..., n$, o que mostra a continuidade de F .

Desde que $\lim_{k\to 0} \gamma^{k,p}(x) = p$ para todo $x \in S^n$, temos que F poder ser estendida continuamente para uma aplicação $[0,1] \times S^{n-1} \to B^n$ colocando $F(0,p) = p$, já que por argumentos análogos ao usado para mostrarmos a continuidade de F, temos que

$$\lim \int_\Sigma \psi_i^{p_m,k_m} dV = \int_\Sigma \psi_i^{p,0} dV = \int_\Sigma p_i dV = p_i V(\Sigma),$$

onde $(k_m, p_m) \in [0,1] \times S^{n-1} \to B^n$ é uma sequência convergindo para $(0,p)$. Daí e do fato de que $F(1,.)$ é constante, já que $\gamma^{1,p} = \mathrm{Id}_{S^{n-1}}$, temos que F é sobrejetiva. De fato, pois se $y \in B_0^n$ não está na imagem de F, temos que

$$H(k,p) = \frac{kF(1-k,p) + (1-k)y}{|kF(1-k,p) + (1-k)y|}$$

é uma homotopia entre $\mathrm{Id}_{S^{n-1}}$ e uma constante em S^{n-1}, implicando assim que S^n é contrátil, o que é uma contradição (ver [32]). Segue-se que existe $(k,p) \in [0,1] \times S^{n-1}$ tal que $F(k,p) = 0$.

□

Teorema 4.1.1. *Sejam (Σ, g) uma variedade Riemanniana k-dimensional compacta com bordo e σ_1 seu primeiro autovalor de Steklov. Então*

$$\sigma_1 V(\partial\Sigma) V(\Sigma)^{\frac{2-k}{k}} \leq k V_{cr}(\Sigma, n)^{\frac{2}{k}},$$

para todo n para o qual esteja definido $V_{cr}(\Sigma, n)$, ou seja, para todo n para o qual exista uma aplicação conforme $\phi : \Sigma \to B^n$ com $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial B^n$. A igualdade implica na existência de uma aplicação conforme $\phi : \Sigma \to B^n$ a qual, após um reescalonamento da métrica g, é uma isometria sobre $\partial\Sigma$, com $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial B^n$ e tal que $\phi(\Sigma)$ encontra ∂B^n ortogonalmente. Para $k > 2$ essa aplicação é uma imersão isométrica minimal de Σ sobre sua imagem. Mais ainda, imersão é dada por subespaço do espaço de autofunções associada ao primeiro autovalor de Steklov.

Demonstração. Sejam $\phi : \Sigma \to B^n$ uma aplicação conforme com $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial B^n$ ($\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$), a qual podemos assumir pelo Lema 4.1.1 que satisfaz

$$\int_{\partial\Sigma} \phi_i ds = 0 \tag{4.24}$$

para todo $i = 1, ..., n$, e $\hat{\phi}_i$ uma extensão harmônica de $\phi_i|_{\partial\Sigma}$. Sabemos da caracterização variacional (2.7) que

$$\sigma_1 \leq \frac{\int_\Sigma |\nabla \hat{\phi}_i|^2 dV}{\int_{\partial\Sigma} (\phi_i)^2 ds} \leq \frac{\int_\Sigma |\nabla \phi_i|^2 dV}{\int_{\partial\Sigma} (\phi_i)^2 ds}. \tag{4.25}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder a $\sum_{i=1}^n |\nabla \phi_i|^2$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \sum_{i=1}^n |\nabla \phi_i|^2 dV &\leq V(\Sigma)^{\frac{k-2}{k}} \left[\int_\Sigma \left(\sum_{i=1}^n |\nabla \phi_i|^2 \right)^{k/2} dV \right]^{2/k} \\
&= V(\Sigma)^{\frac{k-2}{k}} \left[\int_\Sigma (k\lambda^2)^{k/2} dV \right]^{2/k} \\
&= V(\Sigma)^{\frac{k-2}{k}} \left[\int_\Sigma k^{k/2} \phi^* dV_{S^{n-1}} \right]^{2/k} \\
&= V(\Sigma)^{\frac{k-2}{k}} [k^{k/2} V(\phi(\Sigma))]^{2/k} \\
&\leq k V(\Sigma)^{\frac{k-2}{k}} V_{cr}(\Sigma, n, \phi)^{2/k},
\end{aligned} \tag{4.26}$$

onde da primeira para segunda linha usamos o fato de que $\sum_{i=1}^{n} |\nabla \phi_i|^2 = k\lambda^2$, onde λ^2 é o coeficiente de conformidade de ϕ. Assim, desde que $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial B^n$ e consequentemente que

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Sigma} (\phi_i)^2 ds = \int_{\partial\Sigma} ds = V(\partial\Sigma)$$

segue-se das desigualdades (4.25) para cada $i = 1, ..., n$ e (4.26), que

$$\begin{aligned} \sigma_1 V(\partial\Sigma) &= \sigma_1 \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Sigma} (\phi_i)^2 ds \\ &\leq \int_{\Sigma} \sum_{i=1}^{n} |\nabla \phi_i|^2 dV \qquad . \\ &\leq k V(\Sigma)^{\frac{k-2}{k}} V_{cr}(\Sigma, n, \phi)^{2/k}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Observe que se $F \in G$, então $V_{cr}(\Sigma, n, \phi) = V_{cr}(\Sigma, n, F \circ \phi)$. Isto pode ser provado observando que a aplicação que associa cada $\tilde{F} \in G$ a $\tilde{F} \circ F$ tem imagem igual a G e assim, $\sup_{\tilde{F} \in G} V(\tilde{F}(\partial\phi(\Sigma)) = \sup_{\tilde{F} \in G} V(\tilde{F}(\partial F(\phi(\Sigma))))$. Em particular, temos que $\inf_{\phi} V_{rc}(\Sigma, n, \phi) = V_{rc}(\Sigma, n)$, onde o ínfimo é tomado sobre o conjunto das aplicações conformes $\phi : \Sigma \to B^n$ com $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial B^n$ que satisfazem a propriedade (4.24). Segue-se de (4.27) que

$$\sigma_1 V(\partial\Sigma) V(\Sigma)^{\frac{2-k}{k}} \leq k V_{cr}(\Sigma, n)^{2/k},$$

concluído assim a primeira parte da demonstração.

Suponhamos agora que temos a igualdade $\sigma_1 V(\partial\Sigma) V(\Sigma)^{\frac{2-k}{k}} = k V_{cr}(\Sigma, n)^{2/k}$ e consideremos uma sequência de aplicações conformes $\phi^j : \Sigma \to B^n$ com $\phi^j(\partial\Sigma) \subset \partial B^n$ tal que $\lim_{j\to\infty} V_{cr}(\Sigma, n, \phi^j) = V_{cr}(\Sigma, n)$. Desde que mudanças na ordem dos eixos-coordenados de $\mathbb{R}^n$ quando restrita a bola pertencem a G, podemos supor sem perda de generalidade que

$$\int_{\partial\Sigma} \phi_i^j ds = 0$$

para todo j, i, e que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Sigma} (\phi_i^j)^2 dg = \begin{cases} > 0, & \text{se} \quad i = 1, ..., N \\ = 0, & \text{se} \quad i = N+1, ..., n \end{cases}$$

Aplicando (4.25), (4.26) e (4.27) a cada ϕ_i^j, obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma_1 V(\partial\Sigma) &= \sigma_1 \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Sigma} (\phi_i^j)^2 ds \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{\Sigma} |\nabla \phi_i^j|^2 dg \\
&\leq V(\Sigma)^{\frac{k-2}{k}} \left[\int_{\Sigma} \left(\sum_{i=1}^{n} |\nabla \phi_i^j|^2 \right)^{k/2} dV \right]^{2/k} \\
&\leq k V_{cr}(\Sigma, n, \phi^j)^{2/k} V(\Sigma)^{\frac{k-2}{k}}
\end{aligned}$$

e assim que

$$\begin{aligned}
\sigma_1 V(\partial\Sigma) &= \lim_{j\to\infty} \sigma_1 \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Sigma} (\phi_i^j)^2 ds \\
&= \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Sigma} |\nabla \phi_i^j|^2 dV \\
&= \lim_{j\to\infty} V(\Sigma)^{\frac{k-2}{k}} \left[\int_{\Sigma} \left(\sum_{i=1}^{n} |\nabla \phi_i^j|^2 \right)^{k/2} dV \right]^{2/k} \\
&= \sigma_1 V(\partial\Sigma),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

onde a última igualdade vem da hipótese que $\sigma_1 V(\partial\Sigma) V(\Sigma)^{\frac{2-k}{k}} = k V_{cr}(\Sigma, n)^{2/k}$ e do modo como foi tomada a sequência (ϕ^j). Das igualdades acima, concluí-se que para cada i fixado, (ϕ_i^j) é uma sequência limitada de funções em $W^{1,k}(\Sigma)$, uma vez que $\int_\Sigma |\phi_i^j|^2 ds \leq V(\Sigma)$, $\int_\Sigma |\nabla \phi_i^j|^2 dV \leq \sum_{i=1}^n \int_\Sigma |\nabla \phi_i^j|^2 dV$ e $\sum_{i=1}^n \int_\Sigma |\nabla \phi_i^j|^2 dV$ é limitada. Segue-se portanto do Teorema 1.8.1 e de que $W^{1,k}(\Sigma)$ está compactamente contido em $L^2(\Sigma)$ (ver [1]) que, passando a uma subsequência se necessário, (ϕ_i^j) converge fracamente para uma função $\psi_i' : \Sigma \to \mathbb{R}$ em $W^{1,k}(\Sigma)$ e fortemente para uma função $\psi_i : \Sigma \to \mathbb{R}$ em $L^2(\Sigma)$. Cabe observamos entretanto que os limites fraco e forte neste caso são os mesmos. De fato, pois desde que $W^{1,k}(\Sigma)$ esta compactamente contido em $L^2(\Sigma)$, todo funcional linear limitado em $L^2(\Sigma)$ também é limitado em $W^{1,k}(\Sigma)$ e consequentemente que (ϕ_i^j) converge fracamente para ψ_i' em $L^2(\Sigma)$. Segue-se do Lema 1.8.2 que $\psi_i' = \psi_i$. A convergência forte em $L^2(\Sigma)$ implica ainda que $\phi_i^j \to \psi_i$, $\sum_{i=1}^n (\phi_i^j)^2 \to \sum_{i=1}^n (\psi_i)^2$ em Σ e $\sum_{i=1}^n (\phi_i^j)^2 \to \sum_{i=1}^n (\psi_i)^2$ em $\partial\Sigma$, onde as convergências são q.t.p.. Em particular, $\sum_{i=1}^n (\psi_i)^2 \leq 1$ em Σ q.t.p. e $\sum_{i=1}^n (\psi_i)^2 = 1$ em $\partial\Sigma$ q.t.p..

De (4.25) temos

$$\sigma_1 \int_{\partial\Sigma} (\phi_i^j)^2 \leq \int_{\Sigma} |\nabla \phi_i^j|^2 dV$$

e de (4.28) que

$$\lim_{j\to\infty}\sigma_1\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Sigma}(\phi_i^j)^2dV=\lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Sigma}|\nabla\phi_i^j|^2dV,$$

o que implica que

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\Sigma}|\nabla\phi_i^j|^2dV=\lim_{j\to\infty}\sigma_1\int_{\partial\Sigma}(\phi_i^j)^2ds=\sigma_1\int_{\partial\Sigma}(\psi_i)^2ds\leq\int_{\Sigma}|\nabla\psi_i|^2dV. \tag{4.29}$$

Por outro lado, de (4.28), temos que (ϕ_i^j) é uma sequência limitada em $W^{1,2}(\Sigma)$ e assim, passando a uma subsequência se necessária, converge fracamente em$W^{1,2}(\Sigma)$. Entretanto, como $||.||_{L^2(\Sigma)}\leq||.||_{W^{1,k}(\Sigma)}$, temos que ψ_i é o limite fraco de (ϕ_i^j) em $W^{1,2}(\Sigma)$. Então, de acordo com o Lema (1.8.3), temos

$$\left[\int_{\Sigma}|\psi_i|^2dV+\int_{\Sigma}|\nabla\psi_i|^2dV\right]^{1/2}\leq\lim_{j\to\infty}\left[\int_{\Sigma}|\phi_i^j|^2dV+\int_{\Sigma}|\nabla\phi_i^j|^2dV\right]^{1/2},$$

o que implica

$$\int_{\Sigma}|\nabla\psi_i|^2dV\leq\lim_{j\to\infty}\int_{\Sigma}|\nabla\phi_i^j|^2dV$$

e portanto que

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\Sigma}|\nabla\phi_i^j|^2dV=\int_{\Sigma}|\nabla\psi_i|^2dV.$$

Logo, (ϕ_i^j) converge fortemente para ψ_i em $W^{1,2}(\Sigma)$ e cada ψ_i satisfaz a equação

$$\sigma_1\int_{\partial\Sigma}(\psi_i)^2dV=\int_{\Sigma}|\nabla\psi_i|^2dV,$$

ou seja, cada ψ_i é uma autofunção associada ao primeiro autovalor não-nulo de Steklov, consequentemente harmônica (ve (2.7) e Lema (1.5.2)), e assim diferenciável.

Desde de que as aplicações ϕ^j são conformes e cada ϕ_i^j converge fortemente para ψ_i em $W^{1,2}(\Sigma)$, $i=1,...,N$, temos que a aplicação $\psi:\Sigma\to B^N$ dada por $\psi(x)=(\psi_1(x),...,\psi_N(x))$, para todo $x\in\Sigma$, é conforme. Assim, $\psi:\Sigma\to B^N$ é uma aplicação conforme e harmônica com $\psi(\partial\Sigma)\subset\partial B^N$ e que satisfaz

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu}=\sigma_1\psi. \tag{4.30}$$

Para verificarmos conformidade de ψ, observe que é suficiente mostrarmos a condição de conformidade para um referencial ortonormal $\{E_1,...,E_k\}$ de Σ, ou seja, a existência de uma função positiva $\lambda^2:\Sigma\to\mathbb{R}$ tal que $\left\langle d\psi(E_l),d\psi(E_m)\right\rangle=\lambda^2g(E_l,E_m)$ para todo $l,m=1,...,k$. Mostraremos então existência dessa função λ^2. De fato, se

$$|d\psi_i(E_l)-d\phi_i^j(E_l)|^2\leq\sum_{m=1}^{k}(d\psi_i(E_m)-d\phi_i^j(E_m))^2=|\nabla\psi_i-\nabla\phi_i^j|^2\leq||\psi_i-\phi_i^j||^2_{L^2(\Sigma)},$$

temos que $d\phi_i^j(E_l) \to d\psi_i(E_l)$. Assim, desde que

$$\left\langle d\phi^j(E_l), d\phi^j(E_m)\right\rangle = \sum_{i=1}^{N} d\phi_i^j(E_l) d\phi_i^j(E_m),$$

segue-se que

$$\begin{aligned}\left\langle d\psi(E_l), d\psi(E_m)\right\rangle &= \lim \left\langle d\phi^j(E_l), d\phi^j(E_m)\right\rangle \\ &= \lim(\lambda^j)^2 g(E_l, E_m) \\ &= \lambda^2 g(E_l, E_m),\end{aligned}$$

onde $\lambda^2 = \lim(\lambda^j)^2$. As demais propriedades de ψ segue-se das propriedades das funções coordenadas. Se considerarmos Σ com a métrica induzida por ψ e $\tilde{\nu}$ sendo o vetor conormal $\partial\Sigma$ com respeito a essa métrica, temos que

$$\tilde{\nu} = \frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\nu}} = \lambda\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \lambda\sigma_1\psi, \tag{4.31}$$

uma vez que ψ é vetor posição de Σ em $\mathbb{R}^N$, o que implica que $\psi(\Sigma)$ encontra B^N ortogonalmente ao longo de $\psi(\partial\Sigma)$. Reescalonando a métrica original pelo fator σ_1^{-2}, podemos assumir que $\sigma_1 = 1$ e por (4.30) que

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \psi.$$

Assim a equação (4.31) torna-se

$$\tilde{\nu} = \frac{\partial\psi}{\partial\tilde{\nu}} = \lambda\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \lambda\psi.$$

Tomando a norma em ambos os lados da identidade acima e lembrando que $|\tilde{\nu}| = |\psi| = 1$, concluímos que $\lambda = 1$ e assim que ψ é uma isometria de $\partial\Sigma$ sobre ∂B^N quando consideramos ψ com a métrica reescalada.

Finalmente, consideremos o caso onde $k > 2$. Sabemos das discussões anteriores que

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \sum_{i=1}^{N} |\nabla\psi_i|^2 dV &= \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_\Sigma |\nabla\phi_i^j|^2 dV \\ &= \lim_{j\to\infty} V(\Sigma)^{\frac{k-2}{k}} \left[\int_\Sigma \left(\sum_{i=1}^{N} |\nabla\phi_i^j|^2\right)^{k/2} dV\right]^{2/k}.\end{aligned}$$

Desde que

$$\int_\Sigma |\nabla\phi_i^j|^2 dV \le \left(\int_\Sigma |\nabla\phi_i^j|^2 dV\right)^{1/2} \left(\int_\Sigma |\nabla\phi_i^j|^2 dV\right)^{1/2}$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Sigma ||\nabla\phi_i^j|^2 - |\nabla\psi_i|^2|dV &= \int_\Sigma |(|\nabla\phi_i^j| + |\nabla\psi_i|)(|\nabla\phi_i^j| - |\nabla\psi_i|)|dV \\ &\leq \left(\int_\Sigma ||\nabla\phi_i^j| + |\nabla\psi_i||^2 dV\right)^{1/2}\left(\int_\Sigma ||\nabla\phi_i^j| - |\nabla\psi_i||^2 dV\right)^{1/2},\end{aligned}$$

temos que $(\sum_{i=1}^N |\nabla\phi_i|^2)$ converge fortemente para $\sum_{i=1}^N |\nabla\psi_i^j|^2$ em $L^1(\Sigma)$. Como $(\sum_{i=1}^N |\nabla\phi_i^j|^2)$ é limitada em $L^{k/2}$ e da desigualdade de Hölder sabemos que existe uma constante C tal que $||.||_{L_1} \leq C||.||_{L^{k/2}}$, podemos admitir que $(\sum_{i=1}^N |\nabla\phi_i^j|^2)$ converge fracamente para $\sum_{i=1}^N |\nabla\psi_i|^2$ em $L^{k/2}$, implicando que

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \sum_{i=1}^N |\nabla\psi_i|^2 dV &= \lim_{j\to\infty} V(\Sigma)^{\frac{k-2}{k}}\left[\int_\Sigma\left(\sum_{i=1}^N |\nabla\phi_i^j|^2\right)^{k/2} dV\right]^{2/k} \\ &\geq V(\Sigma)^{\frac{k-2}{k}}\left[\int_\Sigma\left(\sum_{i=1}^n |\nabla\psi_i|^2\right)^{k/2} dV\right]^{2/k}\end{aligned}$$

e consequentemente, obtemos a igualdade na seguinte desigualdade de Hölder

$$\int_\Sigma \sum_{i=1}^N |\nabla\psi_i|^2 dV \leq V(\Sigma)^{\frac{k-2}{k}}\left[\int_\Sigma\left(\sum_{i=1}^n |\nabla\psi_i|^2\right)^{k/2} dV\right]^{2/k}.$$

Segue-se do Lema 1.7.1 que $\sum_{i=1}^N |\psi_i^j|^2$ é constante. Logo, como

$$\lambda^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^N |\nabla\psi_i^j|^2,$$

temos que λ^2 é constante. Assim, desde que ψ é uma isometria sobre $\partial\Sigma$, temos que λ^2 é constante igual a 1 e portanto que ψ é uma isometria em Σ. □

O seguinte corolário é imediato uma vez que é apenas um caso particular do Teorema acima, mais precisamente quando $k = 2$.

Corolário 4.1.1. *Sejam (Σ, g) uma superfície compacta com bordo e σ_1 seu primeiro autovalor de Steklov. Então,*

$$\sigma_1 L(\partial\Sigma) \leq 2V_{cr}(\Sigma, n),$$

para todo n para o qual esteja definido $V_{cr}(\Sigma, n)$, ou seja, para todo n para o qual exista uma aplicação conforme $\phi : \Sigma \to B^n$ com $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial B^n$. A igualdade implica na existência de uma aplicação conforme $\phi : \Sigma \to B^n$ a qual, após um rescalonamento da métrica g, é uma isometria sobre $\partial\Sigma$, com $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial B^n$ e tal que $\phi(\Sigma)$ encontra ∂B^n ortogonalmente.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A., FOURNIER J. J. *Sobolev Spaces* 2ed. Netherlands, Elsevier Science, 2005.

[2] AHLFORS, L. *Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions* Comment. Math. Helv. 24 (1950) 100–134.

[3] BANDLE, C., *Über des Stekloffsche Eigenwertproblem: Isoperimetrische Ungleichungen für symmetrische Gebiete*, Z. Angew. Math. Phys. 19 (1968) 627–637.

[4] BROCK, F., *An isoperimetric inequality for eigenvalues of the Stekloff problem*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 81 (2001) 69–71.

[5] BARRA, G. *Measure Theory and Integration*. Cambridge: Woodhead Publishing limited, 2011.

[6] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equations* New York: Springer New York, 2011.

[7] CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. 5ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[8] CARMO, M. P. *Formas Diferenciais e Aplicações*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[9] CHAVEL, I. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. New York: Academic Press, 1984.

[10] CHEN, B.-Y. *Riemannian Submanifolds: A Survey*. Handbook of Differential Geometry, 2000.

[11] DUBROVIN, B. A., FOMENKO A. T., NOVIKOV S.P. *Modern Geometry - Methods and Application: Part II. The Geometry and Topology of Manifolds* New York: Spring-Verlag, 1985.

[12] EDWARD, J., *An inequality for Steklov eigenvalues for planar domains*, Z. Angew. Math. Phys. 45 (1994) 493–496.

[13] ESCOBAR, J. F., *An isoperimetric inequality and the first Steklov eigenvalue*, J. Funct. Anal. 165 (1) (1999) 101–116.

[14] ESCOBAR, J. F.,*A comparison theorem for the first non-zero Steklov eigenvalue*, J. Funct. Anal. 178 (1) (2000) 143–155.

[15] ESCOBAR, J.F. *Topics in PDE's and Differential Geometry*. Goiânia: Ed. da UFG, 2002.

[16] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. 2ed. USA: American Mathematical Society.

[17] FRASER, A. SCHOEN, R. *The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces*. Elsevier, 2010.

[18] GABARD A. *Sur la représentation conforme des surfaces de Riemann á bord et une caractérisation des courbes séparantes*, Comment. Math. Helv. 81 (4) (2006) 945–964.

[19] GIROURD,A., POLTEROVICH, I., *On the Hersch–Payne–Schiffer inequalities for Steklov eigenvalues*, arXiv: 0808.2968v2.

[20] GIROURD,A., POLTEROVICH, I., *Shape optimization for low Neumann and Steklov eigenvalues*, arXiv:0811.2617v1.

[21] HERSCH, J., PAYNE, L., *Extremal principles and isoperimetric inequalities for some mixed problems of Stekloff 's type*, Z. Angew. Math. Phys. 19 (1968) 802–817.

[22] HERSCH, J., PAYNE, L., SCHIFFER, M., *Some inequalities for Stekloff eigenvalues*, Arch. Ration. Mech. Anal. 57 (1974) 99–114.

[23] JOST. J. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. 6ed. Berlin : Springer, 2011.

[24] KUTTLER, J., SIGILLITO, V., *An inequality of a Stekloff eigenvalue by the method of defect*, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969) 357–360.

[25] LEE, J.M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2.ed. New York: Springer-Verlag, 2012.

[26] LEE, J.M. *Introduction to Topological Manifolds*. 2.ed. New York: Springer-Verlag, 2011.

[27] LIMA, E.L. *Análise real v.3: Análise Vetorial*. 3ed. Rio de Janeiro: IMPA,2011.

[28] P. Li, S.-T. Yau, *A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces*, Invent. Math. 69 (1982) 269–291.

[29] PAYNE, L., *New isoperimetric inequalities for eigenvalues and other physical quantities*, Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956) 531–542.

[30] RYNNE, B.P., YOUNGSON, M.A.*Linear Functional Analysis* 2ed.Londor: Springer-Verlag, 2008.

[31] SHAMMA, S., *Asymptotic behavior of Stekloff eigenvalues and eigenfunctions*, SIAM J. Appl. Math. 20 (1971) 482– 490.

[32] SPANIER, E. H. *Algebraic Topology*. EUA : McGraw-Hill, 1966.

[33] WEINSTOCK, R. *Inequalities for a Classical Eigenvalue Problem*. California: Stanford University, (1954) 745-753.