

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**JOSIVALDO SILVA DE MELO**

**UMA VISUALIZAÇÃO E A REPRESENTAÇÃO PLANAR DE SÓLIDOS NA  
GEOMETRIA ESPACIAL**

Maceió  
2013

**JOSIVALDO SILVA DE MELO**

**UMA VISUALIZAÇÃO E A REPRESENTAÇÃO PLANAR DE SÓLIDOS NA  
GEOMETRIA ESPACIAL**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional (PROFMAT), como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Ediel Azevedo Guerra

Maceió  
2013

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos**

M528v    Melo, Josivaldo Silva de.  
          A visualização e a representação planar de sólidos na geometria espacial /  
          Josivaldo Silva de Melo. – 2013.  
          77 f. : il.

Orientador: Ediel Azevedo Guerra.  
Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) –  
Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 76-77.

1. Habilidade visual. 2. Representação planar. 3. Sólidos geométricos.  
4. Geometria – Didática. 5. Matemática – Ensino. I. Título.

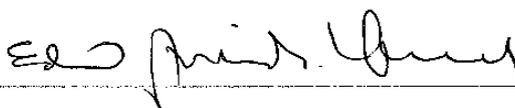
CDU: 514.113:37.025

UMA VISUALIZAÇÃO E A REPRESENTAÇÃO PLANAR DE SÓLIDOS NA  
GEOMETRIA ESPACIAL

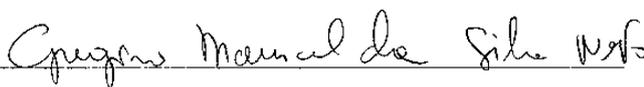
Josivaldo Silva de Melo

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 09 de agosto de 2013 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra (Orientador - UFAL)



Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto (UFAL)



Prof. Dr. Ana Lucia Pinheiro Lima (UFBA)

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por me guiar e levantar nas horas mais difíceis que me encontrei quando da elaboração desse trabalho.

Ao professor Ediel Guerra pelo apoio incondicional que me deu. Desde a ideia central do trabalho às muitas correções que o trabalho sofreu. A paciência, destreza e habilidade de orientar um aluno referencia esse professor como um dos melhores orientadores existentes no quadro de profissionais da Universidade Federal de Alagoas.

A todos os professores do PROFMAT/UFAL, em especial aos professores Fernando Pereira Micena, Marcus Augusto Bronzi, Gregório Manoel da Silva Neto, Vânio Fragoso de Melo, Luis Guillermo Martinez Maza e André Luiz Flores que colaboraram para a minha formação acadêmica.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte dado ao longo de todo o curso de Mestrado.

A minha família que, mesmo na minha ausência durante dois árduos anos, se mantiveram firmes para me apoiar e me incentivar nesse meu sonho.

*“A Geometria é uma das melhores oportunidades que existem para aprender a matematizar a realidade. É uma oportunidade de fazer descobertas como muitos exemplos mostrarão. Com certeza, os números são também um domínio aberto às investigações, e pode-se aprender a pensar através da realização de cálculos, mas as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. Até que possa de algum modo ser dispensadas, as formas no espaço são um guia insubstituível para a pesquisa e a descoberta.”*  
(Freudenthal)

## RESUMO

O objetivo desse trabalho é apresentar uma proposta didática para o desenvolvimento de habilidades visuais e de representação planar de sólidos tridimensionais. A motivação central é proporcionar aos estudantes a possibilidade de uma melhor compreensão das relações entre os objetos tridimensionais e suas representações planares, tópico cada vez mais presente nos exames de avaliação nacional e, também, no exercício de várias profissões e na função de produções artísticas. Ao mesmo tempo, como nosso desejo áureo é o de atrair o aluno para o estudo da Geometria, exporemos situações do cotidiano onde nosso estudante perceberá o quão grande é a presença e aplicabilidade desse ramo da Matemática tão atraente, que é a Geometria. Exemplificaremos momentos, lugares, objetos, animais, profissões etc, que tornam evidente a presença natural dessa matéria, remetendo-nos à importância de dominarmos, pelo menos, os conceitos básicos geométricos. Ainda, com o mesmo intuito, e, com fulcro em teóricos como Jean Piaget e Van Hiele, não poderíamos nos furtar de expor o uso de materiais concretos e manipulativos no ensino da Geometria. Tudo isso para, de maneira mais atraente, despertar uma visão diferente no aluno e fazê-lo perceber que a Matemática, especialmente a Geometria, é muito mais do que fórmulas prontas e cálculos analíticos que convergem a um simples número.

Palavras-chave: Habilidade visual. Representação planar. Sólidos geométricos.

## ABSTRACT

The aim of this work is to present a didactic proposal for the development of visual didactic skills and planar visual representation of three dimensional solids. The central motivation is to provide students the possibility of a better understanding of relations between tridimensional objects and their planar representations, topic present in exams of assessment national and, also, in the exercise of various professions and in function artistic productions. At the same time, as aureus is our desire to attract the students to study of Geometry, we will expose everyday situations where the student realized how big is the presence of ther applicability of this branch of Mathematics is so appealing that the Geometry. We exemplify moments, places, objects, animals, professions etc, to make it clear that presence natural of this material, senders us the importance you master, at last of basic geometry concepts. Still in the same order, and fulcrum theorists as Jean Piaget and Van Hiele, we could not us pilfer of exposing the use of concrete materials and manipulative in teaching of Geometry. For all this, more attractive, awaken a different vision on the student and make him realize that Mathematics, especially the Geometry, is more than ready formulas and analytical calculations that converge to a single number.

Keywords: Skill visual. Representation of planar. Geometric solids.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Exemplo de simetria na natureza . . . . .	15
Figura 2 Favos de mel de uma colmeia: formas geométricas e otimização de espaço. . . . .	15
Figura 3 Planalto de Antrim, Irlanda do Norte: Rochas em forma de prismas . . . . .	16
Figura 4 Aerodinâmica: devido as suas formas geométricas, o ar foi muito bem sobre o carro esportivo, diminuindo o atrito e melhorando sua dirigibilidade. . . . .	17
Figura 5 Presença de formas geométricas no motor de um veículo . . . . .	17
Figura 6 Exemplo de translação. . . . .	18
Figura 7 Rotação como mudança de um sistema de eixo para outro. . . . .	18
Figura 8 Reflexão de um ponto A em torno de um eixo $r$ . . . . .	19
Figura 9 Decoração da parede de Al-Azhar Mosque, localizado no Cairo, Egito. Suas formas geométricas tem proporções baseadas no número de Ouro. . . . .	19
Figura 10 Trabalho de M. C. Escher . . . . .	20
Figura 11 O homem Vitruviano: Um belo estudo sobre a proporção do corpo humano . . . . .	20
Figura 12 Obra de Pablo Picasso retratando o Cubismo: Utilização dos sólidos para construir as formas. . . . .	21
Figura 13 Parthenon, em Atenas, Grécia, construído por volta de 440a.C. Suas dimensões externas formam um perfeito Retângulo de Ouro . . . . .	22
Figura 14 Pirâmides de Gizé, Egito, foram construídas tendo em conta a proporção áurea: a razão entre a altura de uma face e a metade do lado é igual ao número de ouro. . . . .	22
Figura 15 Congresso Nacional, Brasília. . . . .	23
Figura 16 Variedade de objetos utilizados no dia a dia com vários formatos geométricos . . . . .	24
Figura 17 Bola de futebol utilizada em 1970. . . . .	25
Figura 18 Icosaedro regular e icosaedro regular truncado envolto por icosaedro regular . . . . .	25
Figura 19 O campo de futebol e suas medidas oficiais . . . . .	26
Figura 20 formas geométricas no campo de futebol . . . . .	27
Figura 21 O esquema tático 3-5-2 e a relação com as figuras geométricas . . . . .	27
Figura 22 Esquema tático 4-4-2 e a relação com as figuras geométricas . . . . .	28
Figura 23 O esquema tático 4-3-3 e a relação com as figuras geométricas . . . . .	28
Figura 24 O esquema tático 2-3-5 e a relação com as figuras geométricas . . . . .	29
Figura 25 O esquema tático 4-2-4 da seleção brasileira de 1970 e a relação com as figuras geométricas . . . . .	29
Figura 26 O esquema tático do Barcelona e a relação com as figuras geométricas . . . . .	30

Figura 27 Matriz Referência ENEM: competências e habilidades. ....	31
Figura 28 Questão 137 - caderno amarelo – 2º dia - ENEM 2010 .....	32
Figura 29 Questão 146 - caderno amarelo – 2º dia - ENEM 2010 .....	33
Figura 30 Questão 140 - caderno amarelo - 2º dia – ENEM 2010 .....	33
Figura 31 Questão 144 - caderno amarelo – 2º dia - ENEM 2011 .....	34
Figura 32 Questão 141 - caderno amarelo – 2º dia - ENEM 2011 .....	35
Figura 33 Questão 149 - caderno amarelo - 2º dia - ENEM 2011 .....	36
Figura 34 Exercícios para desenvolvimento da habilidade visual .....	38
Figura 35 Exercícios para desenvolvimento da habilidade visual .....	39
Figura 36 Exercícios para desenvolvimento da habilidade visual .....	39
Figura 37 Exercícios para desenvolvimento da habilidade visual .....	40
Figura 38 Exercícios para desenvolvimento da habilidade visual .....	40
Figura 39 Exercícios para desenvolvimento da habilidade visual .....	41
Figura 40 Esquematização dos Níveis de conhecimento de Van Hiele .....	45
Figura 41 Caixa de Pandora"vista internamente .....	47
Figura 42 Cubo planificado .....	48
Figura 43 Planificação e perspectiva de um cone reto .....	49
Figura 44 Semiesfera .....	49
Figura 45 Poliedros não convexos. ....	50
Figura 46 Poliedros não convexos .....	51
Figura 47 Perspectiva de um cilindro .....	51
Figura 48 Elipses para bases do desenho da perspectiva cilíndrica .....	52
Figura 49 Cilindro planificado .....	52
Figura 50 Secção do cilindro .....	53
Figura 51 Secção do cilindro .....	53
Figura 52 Secção do cilindro .....	54
Figura 53 Superfícies obtidas ao mudarmos a inclinação .....	54
Figura 54 Cilindro confeccionado com massa .....	55
Figura 55 Quadrado circunscrito .....	56
Figura 56 Prisma quadrangular reto confeccionado de canudos .....	57
Figura 57 Modelo de malha pontilhada .....	58
Figura 58 Exemplos da aplicação da malha pontilhada no auxílio dos desenhos .....	59
Figura 59 A Caixa de Pandora .....	59
Figura 60 Sólidos confeccionados por alunos .....	62

Figura 4.61 Sólidos confeccionados pelos alunos . . . . .	63
Figura 62 Sólidos confeccionados pelos alunos . . . . .	63
Figura 63 Sólidos confeccionados pelos alunos . . . . .	64
Figura 64 Grupo de alunos manipulando o sólido . . . . .	64
Figura 65 Grupo de alunos manipulando o sólido . . . . .	65
Figura 66 Grupo de alunos manipulando o sólido . . . . .	65
Figura 67 Grupo de alunos manipulando o sólido . . . . .	66
Figura 68 Grupo de alunos manipulando o sólido . . . . .	66
Figura 69 Auxílio da malha pontilhada . . . . .	67
Figura 4.70 Auxílio da malha pontilhada . . . . .	68
Figura 71 Debate entre os componentes do grupo . . . . .	68
Figura 72 Debate entre os componentes do grupo . . . . .	69
Figura 73 Alunos representando os sólidos na lousa . . . . .	70
Figura 74 Alunos representando os sólidos na lousa . . . . .	70
Figura 75 Alunos representando os sólidos na lousa . . . . .	71
Figura 76 Alunos representando os sólidos na lousa . . . . .	71
Figura 77 Alunos representando os sólidos na lousa . . . . .	72
Figura 78 Sólido a ser representado e sua perspectiva. . . . .	73
Figura 79 Sólido a ser representado e sua perspectiva . . . . .	74
Figura 80 Sólido a ser representado e sua perspectiva . . . . .	75
Figura 81 Sólido a ser representado e sua perspectiva . . . . .	76
Figura 82 Sólido a ser representado e sua perspectiva . . . . .	76
Figura 83 Sólido a ser representado e sua perspectiva . . . . .	76
Figura 84 Perspectiva de um cilindro seccionado. . . . .	77

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	12
<b>1 A GEOMETRIA DAS “COISAS”</b> .....	14
1.1 <b>As formas geométricas na natureza</b> .....	14
1.2 <b>A Geometria dos veículos</b> .....	16
1.3 <b>A Geometria na arte</b> .....	18
1.4 <b>A Geometria na arquitetura</b> .....	21
1.5 <b>A Geometria das embalagens</b> .....	23
1.6 <b>A Geometria no futebol</b> .....	26
<b>2 VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE OBJETOS TRIDIMENSIONAIS</b> ....	31
2.1 <b>Uma nova tendência na verificação de conhecimentos geométricos nos exames</b> ...	32
2.2 <b>Exercícios para o desenvolvimento da habilidade visual 3-D</b> .....	38
<b>3 UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA</b> .....	42
3.1 <b>Fundamentação teórica para proposta</b> .....	42
3.1.1 <b>O campo da visualização de Gutiérrez</b> .....	42
3.1.2 <b>Piaget e a criação da imagem mental</b> .....	43
3.1.3 <b>O ensino da Geometria por Van Hiele</b> .....	44
3.1.4 <b>A visão de Luiz Carlos Pais acerca do pensamento geométrico</b> .....	46
3.2 <b>A proposta de aula</b> .....	46
3.2.1 <b>Sessão 1: enxergar os sólidos de olhos fechados</b> .....	47
3.2.2 <b>Sessão 2: Representações, seções, criação e manipulação de sólidos</b> .....	51
3.3 <b>Considerações sobre as atividades propostas</b> .....	58
<b>4 A PROPOSTA DE AULA EFETIVAMENTE APLICADA</b> .....	60
4.1 <b>A aplicação do trabalho em sala de aula</b> .....	60
4.2 <b>Resultados parciais</b> .....	72
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	78
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	80

## INTRODUÇÃO

A Geometria, apesar de ser uma das áreas mais atraentes da Matemática, ainda é uma das áreas na qual os estudantes apresentam maiores dificuldades de aprendizagem. Para fácil constatação desse argumento, basta verificar o que se tem revelado em sala de aula e também nos exames nacionais.

Por que explorar esse tópico da matemática?

A Geometria é uma ferramenta muito importante para a descrição e a relação do homem com o espaço em que vive. Por ser bastante intuitiva, é um dos ramos da Matemática que pode estimular o interesse pelo aprendizado dessa ciência, pois pode revelar a realidade que rodeia o aluno, dando oportunidade de desenvolver habilidades criativas na busca de estratégias para solucionar os mais diversos problemas e situações do cotidiano.

Ora, acreditamos que ao dominar o estudo da Geometria Espacial, o aluno consegue agregar à sua vida acadêmica habilidades e competências que convergem para a visualização de objetos tridimensionais e a representação de tais objetos (tridimensionais) na superfície bidimensional de um papel ou uma lousa, por exemplo.

Em contraponto, a experiência de ensino de Geometria no ensino médio sem a utilização de material concreto tem conduzido o tema ao rol de assuntos de difícil aprendizagem para os alunos, ficando estes expostos a fórmulas prontas, as quais se sentem obrigados a memorizar e aplicar na questão conveniente. Tudo isso, de forma mecânica e de assimilação temporária.

Usando uma analogia, podemos comparar o processo de ensino da Geometria com o processo de venda de um produto. Na venda de um produto, o primeiro passo é levar o comprador a se convencer de que o produto que ele vai adquirir vale à pena. No ensino da Geometria o primeiro passo é convencer o estudante de que os saberes que vai adquirir serão relevantes para ele. Assim para “vendermos” a Geometria em sala de aula, faremos com que o aluno se sinta atraído pelo produto. É o que propomos no capítulo 1 deste trabalho. Tentamos mostrar que o estudo da Geometria torna-se prazeroso e dinâmico ao percebermos que esse conteúdo matemático está presente nas mais diversas áreas de conhecimento, na natureza, nas atividades do cotidiano e no lazer.

No que se refere ao aspecto visualização, encontramos, como exporemos no Capítulo 2 deste trabalho, questões das últimas edições do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), enfatizando a importância que os elaboradores dos exames estão dando ao desenvolvimento da habilidade visual. Isto remete ao professor uma busca mais aguçada de meios e estratégias para trabalhar a interpretação do que expomos na lousa (plano) para a mente dos nossos alunos (espaço).

Em seguida, para obter resultados efetivos da proposta, resolvemos aplicar o trabalho em sala de aula. Escolhemos uma turma de 2º ano do ensino médio composta de 40 alunos, com faixa etária de 15 a 16 anos. A turma foi escolhida porque o conteúdo de Geometria Espacial está previsto na matriz curricular da próxima unidade letiva desses estudantes. Assim, como base para próxima unidade letiva, resolvemos introduzir na unidade corrente o desenvolvimento da habilidade visual. Enxergar e processar mentalmente as formas dos sólidos, em nosso entendimento, ajudará na aproximação e conexão dos cálculos com as situações problemas do cotidiano.

Proponho neste estudo desenvolver uma proposta de visualização do espaço a partir do plano bem como a abordagem de noções de Geometria Espacial por meio de material manipulativo, alertando os professores da necessidade da utilização de materiais concretos para que o seu ensino torne-se mais compreensível e significativo aos alunos durante o processo ensino-aprendizagem. Espero, dessa forma, contribuir para uma aproximação mais agradável e satisfatória dos estudantes às noções fundamentais da geometria espacial euclidiana de modo a não lhe frustrar no desejo de aprender.

## 1 A GEOMETRIA DAS “COISAS”

As figuras geométricas e suas propriedades fazem parte das matrizes curriculares do ensino médio. O que percebemos é que esses assuntos, geralmente, só estão dispostos na parte final do livro texto, o que induz o professor a acompanhar, deixando-os para o final do semestre, quando se tem tempo. É comum alguns professores seguirem determinado livro, preferindo dar ênfase ao aspecto lógico-formal da matemática a explorar o lado visual e aplicado da Geometria. Com isso, esse tópico tão importante da Matemática é lecionado de forma abreviada, apenas para cumprir o programa exigido. Somam-se a esse problema, a herança da deficiência do entendimento das formas tridimensionais e suas relações com o mundo físico, implicando perda da noção de que o mundo real é quem dá origem aos conceitos básicos da Geometria.

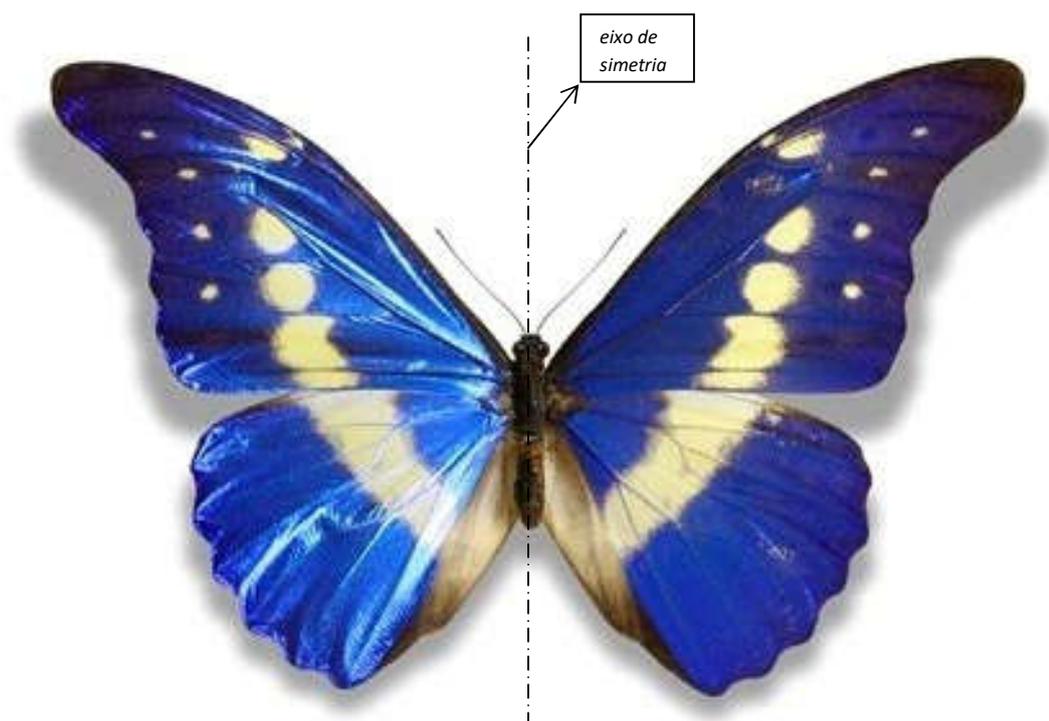
O grande desafio do professor é atrair o aluno para sua disciplina, desenvolvendo nestes as habilidades para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela, no que concerne a aspectos geométricos. Antes de expor as fórmulas e exercícios de Geometria, o professor habilidoso mostra a utilidade e importância daquela matéria no cotidiano do aluno. Assimilando as aplicações e utilidades dessa matéria, esse estudo tornar-se-á bem mais eficiente e produtivo.

Sugerimos então, a seguir, algumas aplicações que deixarão claras a presença da Geometria em nossas vidas.

### 1.1 As formas geométricas na natureza

Ao analisarmos as características geométricas na natureza, uma das que mais se tornam evidente é a **simetria**. Em termos geométricos, considera-se simetria como a semelhança exata da forma em torno de uma determinada linha reta (eixo), ponto ou plano. Essa simetria na natureza é um fenômeno de destaque que nos remete à admiração do equilíbrio, padrão, proporção, harmonia, beleza e perfeição divina.

**Figura 1 – Exemplo de simetria na natureza**



Fonte: Disponível em <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/geometria.htm>> Acesso em 02 dez. 2012.

Podemos também identificar figuras regulares na natureza. A que mais nos desperta curiosidade, ora seja pela sua perfeita construção ora seja pela sua funcionalidade e otimização de espaço é, sem dúvida a construção de um favo de mel das abelhas, aproximando-se de um prisma hexagonal.

**Figura 2 - Favos de mel de uma colmeia: formas geométricas e otimização de espaço.**



Fonte: Disponível em <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/geometria.htm>> Acesso em 02 dez. 2012.

Já no mundo mineral verificamos a presença dos sólidos geométricos em suas formas. Um dos mais famosos de todo o mundo é a Calçada dos Gigantes, localizada no Planalto de Antrim, Irlanda do Norte. Consiste em um aglomerado de colunas de rochas basálticas em formato de prismas de várias alturas.

**Figura 3 - Planalto de Antrim, Irlanda do Norte: Rochas em forma de prismas**

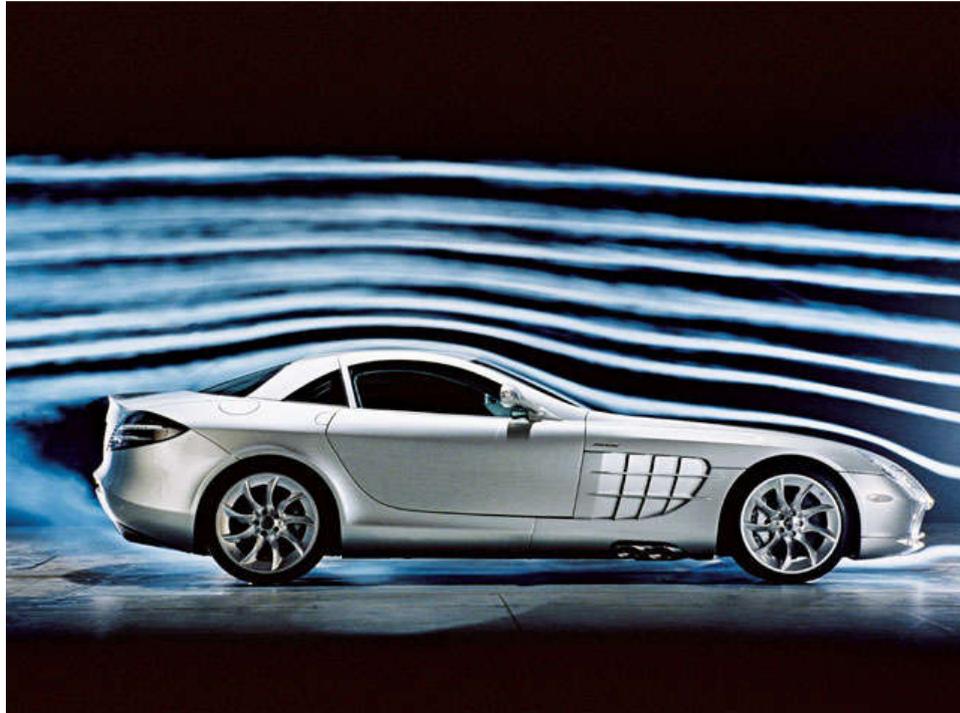


Fonte: Disponível em <<http://www.slideshare.net/rosangelacpr/as-formas-geomtricas-na-natureza>> Acesso em 02 dez. 2012.

## 1.2 A Geometria dos veículos

Até nos motores dos veículos, a Geometria se faz presente. É o principal fator determinante da potência do motor à queima de combustível. Um modelo de automóvel, em geral, é caracterizado principalmente pelo volume de seu motor. Assim, geralmente associamos os números 1.0 ou 1.000 a motores de baixa potência e menor preço. O volume e a potência do motor aumentam na proporção que avançamos numericamente para as classificações convencionais de 1.6, 1.8 ou 2.0 (quando expressas em litros) ou em seus correspondentes 1000, 1600, 1800 ou 2000 (quando expressos em centímetros cúbicos). Por exemplo: um automóvel com uma cilindrada de 2 litros (2 litros/rotação) aspira e expira dois litros de gás por cada volta do virabrequim (eixo que movimenta os pistões do motor). Quando o virabrequim faz uma volta, todos os pistões fizeram uma ida e uma volta, produzindo força ao motor do automóvel. A Geometria do carro é que define sua aerodinâmica, melhorando assim sua dirigibilidade, sua segurança, consumo de combustível e a própria beleza tão estimada por nós.

**Figura 4 - Aerodinâmica: devido às suas formas geométricas, o ar flui muito bem sobre o carro esportivo, diminuindo o atrito e melhorando sua dirigibilidade.**



Fonte: Disponível em <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/geometria.htm>> Acesso em 02 dez. 2012.

Podemos explorar ainda, a grande quantidade de formas geométricas no motor de um automóvel.

**Figura 5 – Presença de formas geométricas no motor de um veículo**



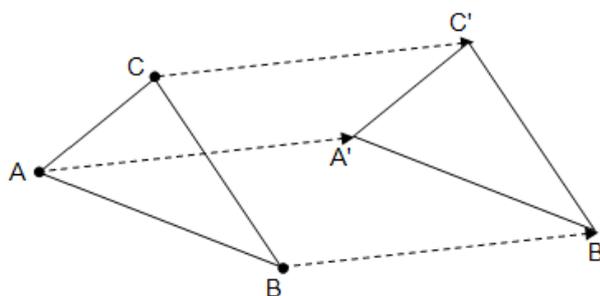
Fonte: Disponível em <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/geometria.htm>> Acesso em 02 dez. 2012.

### 1.3 A Geometria na arte

Podemos observar que a aplicação dos princípios geométricos foram preponderantes em muitas obras de arte, o que torna evidente que as ideias matemáticas estão por trás dessas fascinantes pinturas e esculturas. Notam-se as transformações isométricas como translação, rotação, reflexão.

Translação é o movimento que um objeto realiza de um ponto a outro. É o deslocamento paralelo, em linha reta na mesma direção e no mesmo sentido, de um objeto ou figura, em função de um vetor percorrendo a mesma distância.

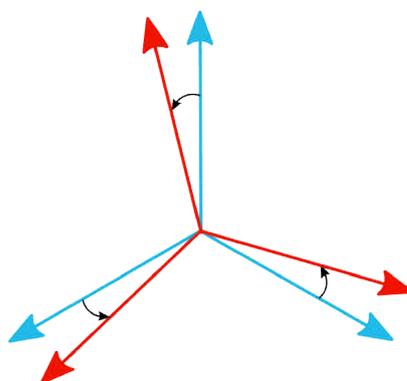
**Figura 6 – Exemplo de translação**



Fonte: Disponível em <<http://www.obichinhodosaber.com/wp-content/uploads/2012/09/translação-1-figura.png>> Acesso em 12 agosto 2013.

A rotação é uma transformação que produz um giro de um objeto em torno de um centro fixo, segundo um ângulo determinado.

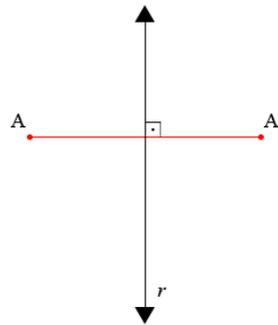
**Figura 7 – Rotação como mudança de um sistema de eixo para outro**



Fonte: Disponível em <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/geometria.htm>> Acesso em 12 agosto 2013.

Reflexão é uma transformação geométrica que envolve um ponto a ser refletido e uma reta, transformando o ponto num outro simétrico com relação ao eixo fornecido.

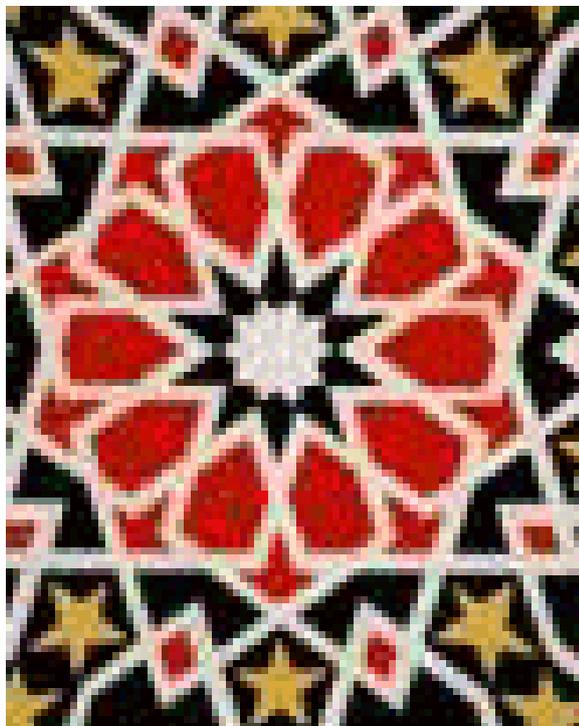
**Figura 8 – Reflexão de um ponto A em torno de um eixo  $r$ .**



Fonte: Disponível em <<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/21/Reflexaoeixo.png>> Acesso em 12 agosto de 2013.

Constatamos algumas dessas transformações em obras de artes.

**Figura 9 - Decoração da parede de Al-Azhar Mosque, localizado no Cairo, Egito. Suas formas geométricas tem proporções baseadas no Número de Ouro.**



Fonte: Disponível em <<http://www.qfojo.net/irracionais/ouro.htm>> Acesso em 02 dez 2012.

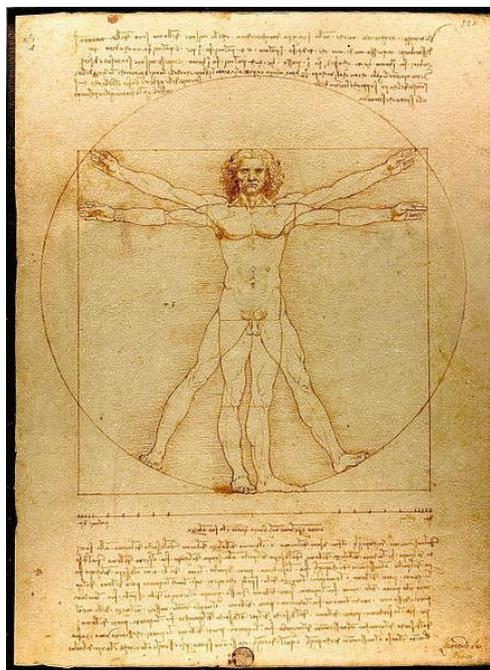
**Figura 10 - Trabalho de M. C. Escher**



Fonte: Disponível em <[http:// www.fotolog.com.br/beier](http://www.fotolog.com.br/beier)> Acesso em 02 dez 2012.

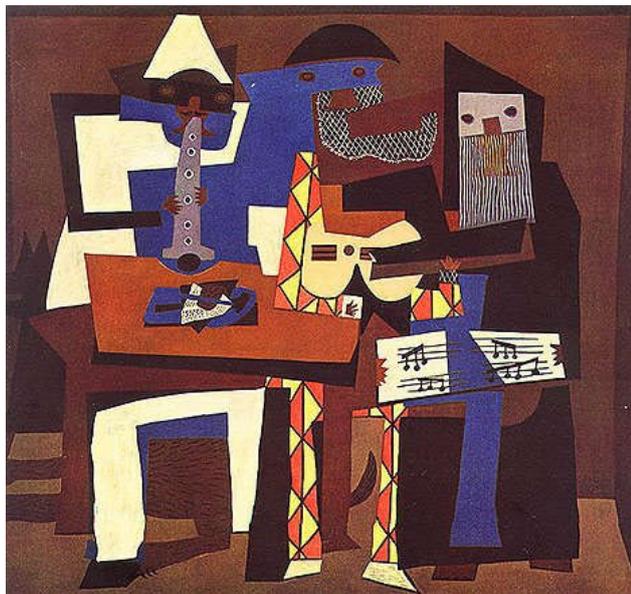
Alguns artistas famosos enfatizam o uso dos princípios matemáticos em suas obras de arte, dentre eles podemos destacar Leonardo da Vinci e Pablo Picasso.

**Figura 11 - O homem Vitruviano: Um belo estudo sobre a proporção do corpo humano**



Fonte: Disponível em <[http:// www.fotolog.com.br/beier](http://www.fotolog.com.br/beier)> Acesso em 02 12 2012.

**Figura 12 - Obra de Pablo Picasso retratando o Cubismo: Utilização dos sólidos para construir as formas.**



Fonte: Disponível em <[http:// www.fotolog.com.br/beier](http://www.fotolog.com.br/beier)> Acesso em 02 dez 2012.

#### **1.4 A Geometria na arquitetura**

A presença marcante da Geometria na arquitetura torna-se bastante evidente ao nos depararmos com todas as formas e modelos arquitetônicos ao nosso redor. Em destaque, retângulo de ouro, construído a partir do número de ouro, é considerado a mais estética das formas retangulares e é utilizado pelo homem na arquitetura.

O retângulo de ouro surge do processo de divisão em média e extrema razão, de Euclides. Ele é assim chamado porque ao dividir-se a base desse retângulo pela sua altura, obtêm-se o número de ouro que é aproximadamente 1,618.

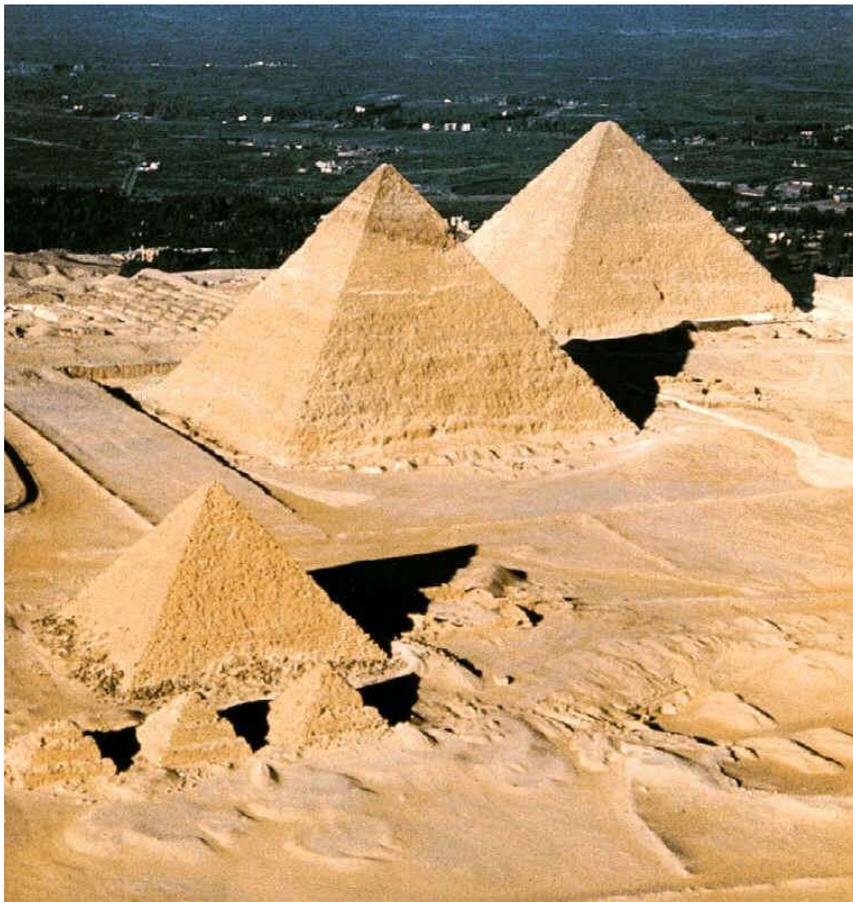
Observe as construções:

**Figura 13 - Parthenon, em Atenas, Grécia, construído por volta de 440a.C. Suas dimensões externas formam um perfeito Retângulo de Ouro**



Fonte: Disponível em <[http:// www.fotolog.com.br/beier](http://www.fotolog.com.br/beier)> Acesso em 02 dez 2012.

**Figura 14 - Pirâmides de Gizé, Egito, foram construídas tendo em conta a proporção áurea: a razão entre a altura de uma face e a metade do lado é igual ao número de ouro.**



Fonte: Disponível em <[http:// www.apolo11.com/curiosidades](http://www.apolo11.com/curiosidades)> Acesso em 02 dez 2012.

Torna-se evidente que os princípios da Geometria regem as construções desde um simples edifício popular de formato prismático, a prédios com formas mais rebuscadas, tipo cônica, piramidal e até mesmo recentes projetos contemporâneos, aparentemente caóticos e sem formas definidas, mas que são traçados através de novos conceitos geométricos

**Figura 15 - Congresso Nacional, Brasília.**



Fonte: Disponível em <[http://: www.guiabsb.com.br/pontosturisticos](http://www.guiabsb.com.br/pontosturisticos)> Acesso em 02 dez 2012.

### **1.5 A Geometria das embalagens**

Na tentativa de tornar o estudo da Geometria ainda mais atraente, o professor pode lançar mão de uma ferramenta bastante comum e presente no dia a dia do seu aluno: as embalagens e seus formatos geométricos. As embalagens podem ser utilizadas como modelo alternativo e concreto para abordagem desse conteúdo.

Além dos conceitos de Geometria Plana e Espacial, este trabalho permite observar e analisar outros conceitos como, por exemplo, sistemas de medidas (linearidade, superfície, volume etc). Alia-se a isso, o fato de que o uso de embalagens no ensino da Geometria permite a contextualização entre conteúdos matemáticos.

Ao manusear embalagens, num primeiro momento o professor poderá resgatar conceitos geométricos que os alunos têm e mostrar outros relevantes como nomenclatura, classificação, elementos etc. Com isso, os alunos compreenderão melhor a relação entre duas retas, entre reta e plano e entre planos paralelos, perpendiculares e concorrentes; ângulo e ângulo poliédrico; propriedades dos polígonos (triângulos, quadriláteros etc); da circunferência e do círculo além dos sólidos geométricos.

**Figura 1.5.1 - Variedade de objetos utilizados no dia a dia com vários formatos geométricos**



Fonte: Disponível em <<http://www.slideshare.net/gaussufflante/a-geometria-das-embalagens>> Acesso em 02 dez 2012.

Pretende-se chamar a atenção dos alunos para aspectos – sejam funcionais, estéticos ou econômicos, que estabeleçam critérios para definição das formas, conferindo sentido às classificações. Busca-se proporcionar aos mesmos a possibilidade de compreender os conceitos geométricos através da visualização, manipulação e observação das diferentes formas geométricas que são encontradas nas embalagens.

Com isso, as embalagens tornam-se um modelo significativo e atrativo no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de Geometria Plana e espacial.

## 1.6 A Geometria no futebol

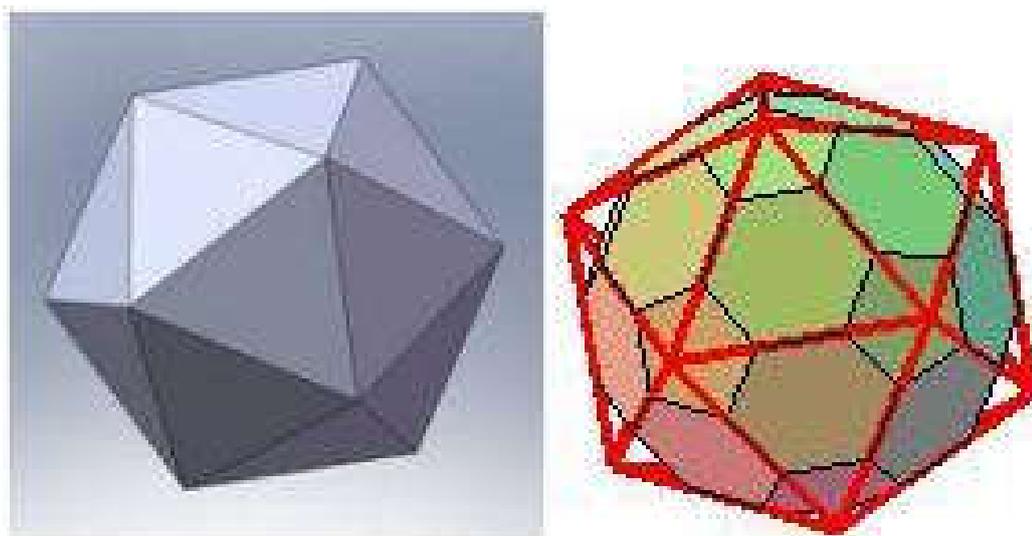
Podemos utilizar a bola de futebol, com seu histórico e relação com o poliedro de Platão que a originou, o icosaedro. O icosaedro é um sólido, com 20 faces triangulares, e neste poliedro, incidem em cada vértice 5 arestas. E para construção da bola da copa de 70, que é o icosaedro truncado, foi “cortada” as pontas do icosaedro regular, como mostra a figura abaixo.

**Figura 17 - Bola de futebol utilizada em 1970.**



Fonte: Disponível em <<http://www.ugf.br/files/jornalmatematica/oficina-de-matematica>> Acesso em 02 dez. 2012.

**Figura 18 – Icosaedro regular e icosaedro regular truncado envolto por icosaedro regular**



Fonte: <Disponível em <http://mymathematics.flies.wordpress.com>> Acesso em 02 dez 2012.

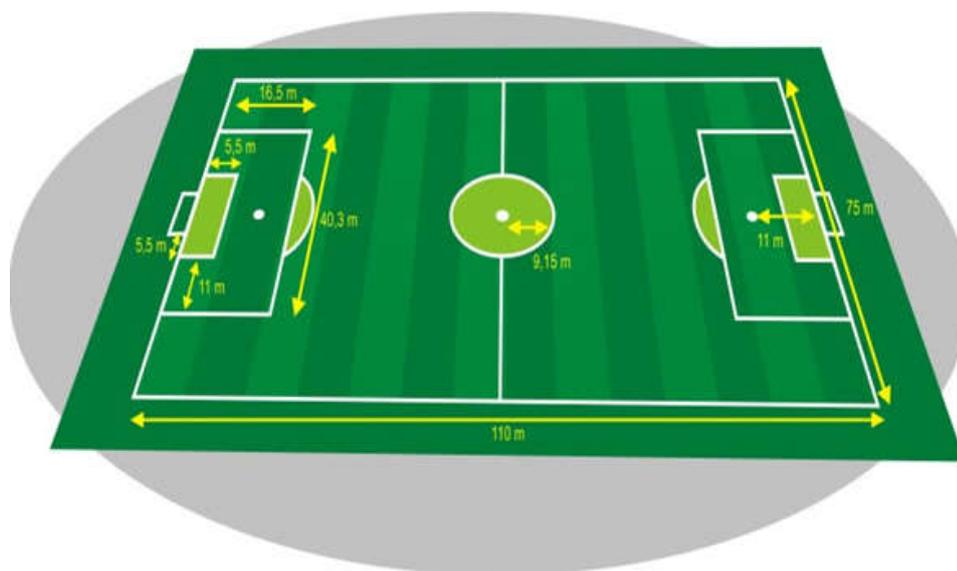
Observe que foram cortadas 12 pirâmides de base regular, de maneira que retiraram-se todos os vértices do icosaedro e formaram-se 60 vértices no icosaedro truncado, formando assim a bola de futebol, que agora tem em cada um dos seus vértices o encontro de apenas 3 arestas, o que facilita a costura da bola de futebol.

Em seguida, exploraremos o campo de futebol, onde podemos observar, matematicamente falando, ângulos, figuras geométricas, ponto, circunferência, posição

relativa entre retas, áreas, perímetros entre outros aspectos que o professor, usando sua criatividade, pode navegar com seus alunos na busca de um estudo atrativo e produtor da Geometria.

Inicialmente, o professor pode apresentar o campo de futebol com suas dimensões oficiais, e nele, poderá explorar suas medidas, o sistema métrico decimal, perímetros, comprimento da circunferência central, comprimento de arcos, razões e proporções.

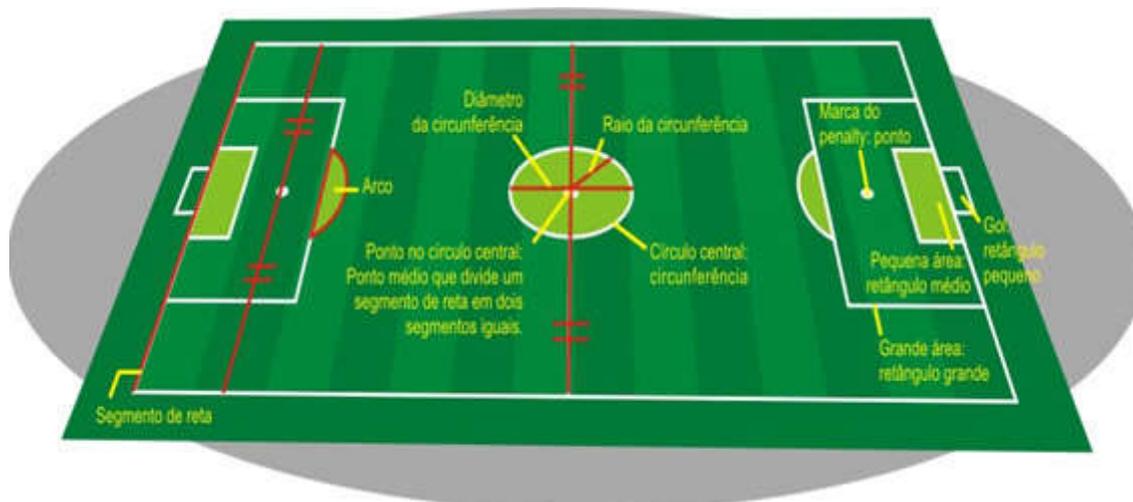
**Figura 19 – O campo de futebol e suas medidas oficiais**



Fonte: Disponível em <<http://www.ugf.br/files/jornalmatematica/oficina-de-matematica>> Acesso em 02 dez 2012.

Em seguida, o estudo das diversas áreas (do círculo central, das pequenas e grandes áreas, dos segmentos circulares etc) pode ser observado. Agrega-se valor ao trabalho, quando também envolvemos aspectos financeiros, como, por exemplo, o custo da grama por metro quadrado.

**Figura 20 – formas geométricas no campo de futebol**



Fonte: Disponível em <<http://www.ugf.br/files/jornalmatematica/oficina-de-matematica>> Acesso em 02 dez 2012.

Os esquemas táticos utilizados pelos técnicos em uma partida de futebol são baseados em figuras geométricas. Para esses treinadores, quanto mais disciplinados forem seus atletas em relação à obediência na formação das figuras geométricas em campo mais eficiente será seu esquema de jogo.

Por exemplo, um esquema tático utilizado pela maioria dos técnicos brasileiros e também pelo técnico da seleção Luiz Felipe Scolari na conquista da copa do mundo de 2002 é o 3-5-2 (três zagueiros, 5 jogadores de meio de campo e 2 atacantes). Neste esquema visualizamos um triângulo equilátero, dois triângulos isósceles e um retângulo.

**Figura 21 - O esquema tático 3-5-2 e a relação com as figuras geométricas**



Fonte: Disponível em <<http://www.ugf.br/files/jornalmatematica/oficina-de-matematica>> Acesso em 02 dez.

Já o técnico Carlos Alberto da Parreira, na conquista da copa do mundo de 1994, nos Estados Unidos, utilizou o esquema tático 4-4-2. Neste esquema, visualizamos um triângulo equilátero, dois trapézios um quadrado e um retângulo.

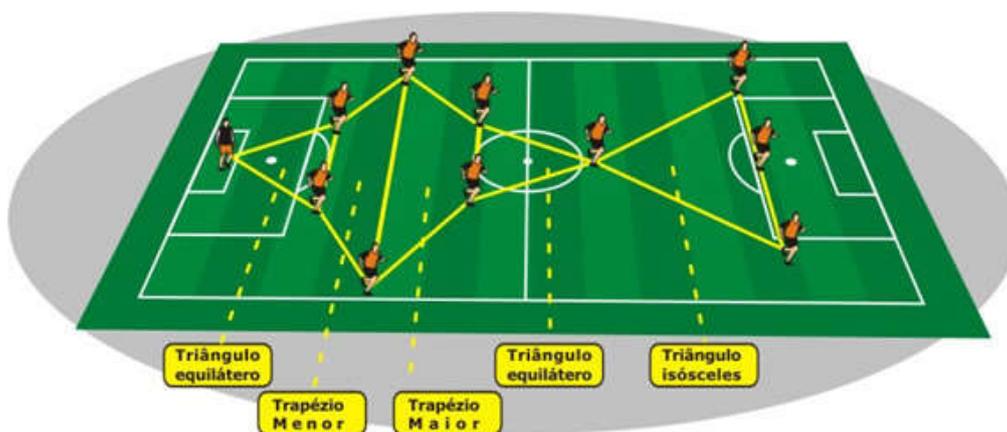
**Figura 22 - Esquema tático 4-4-2 e a relação com as figuras geométricas**



Fonte: Disponível em <<http://www.ugf.br/files/jornalmatematica/oficina-de-matematica>> Acesso em 02 dez 2012.

O esquema tático 4-3-3, que os treinadores usam quando necessitam ser ofensivos pode ser observado no esquema abaixo. Neste esquema visualizamos dois triângulos equiláteros, um triângulo isósceles e dois trapézios.

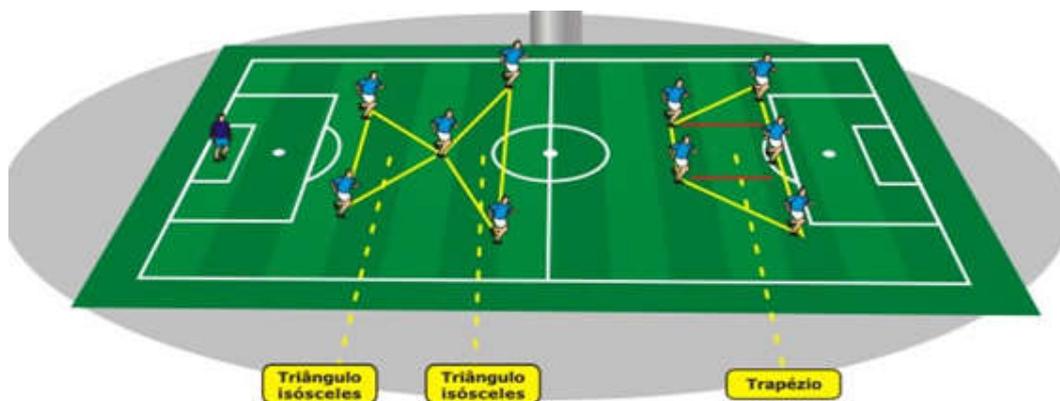
**Figura 23 - O esquema tático 4-3-3 e a relação com as figuras geométricas**



Fonte: Disponível em <<http://www.ugf.br/files/jornalmatematica/oficina-de-matematica>> Acesso em 02 dez 2012.

O Flamengo, quando campeão mundial, utilizou um esquema de jogo inovador, era o 2-3-5, que diminuiu sua fragilidade defensiva. Neste esquema visualizamos dois triângulos isósceles e um trapézio.

**Figura 24 - O esquema tático 2-3-5 e a relação com as figuras geométricas**



Fonte: Disponível em <<http://www.ugf.br/files/jornalmatematica/oficina-de-matematica>> Acesso em 02 dez 2012.

A brilhante seleção brasileira de 1970, considerada uma das melhores de todos os tempos, jogava muito recuada para os parâmetros da época mas sempre buscando o contra ataque. Os quatro jogadores da defesa formavam um trapézio e os jogadores de meio de campo e ataque formavam um triângulo isósceles.

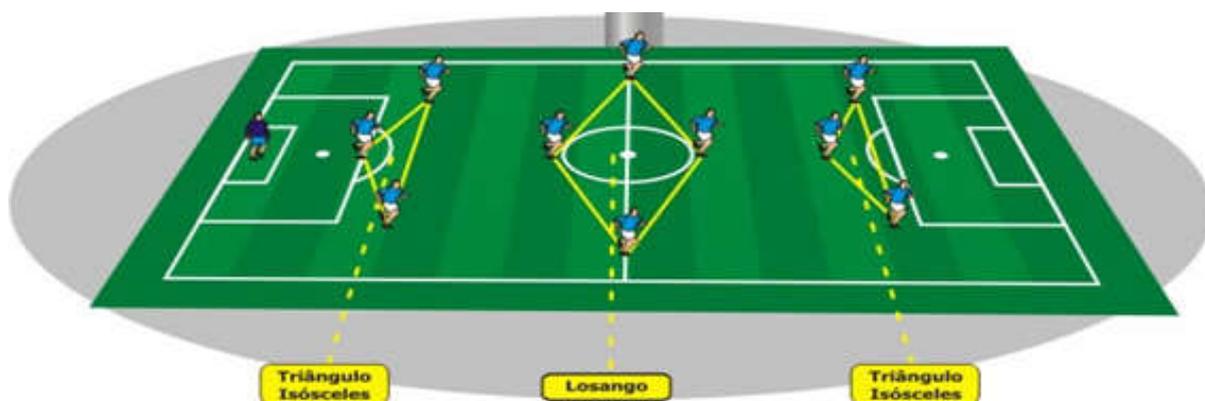
**Figura 25 - O esquema tático 4-2-4 da seleção brasileira de 1970 e a relação com as figuras geométricas**



Fonte: Disponível em <<http://www.ugf.br/files/jornalmatematica/oficina-de-matematica>> Acesso em 02 dez. 2012.

E não podemos deixar de fora a equipe que está em evidência atualmente, o Barcelona, do melhor jogador do mundo, Messi. O Barcelona joga no estilo da seleção espanhola de 1996, o 3-4-3, concentrando bastantes jogadores no meio campo, intensificando a movimentação, proporcionando maior proteção à defesa e maior apoio ao ataque. Neste esquema, visualizamos apenas dois triângulos isósceles e um losango.

**Figura 26 - O esquema tático do Barcelona e a relação com as figuras geométricas**



Fonte: Disponível em <<http://www.ugf.br/files/jornalmatematica/oficina-de-matematica>> Acesso em 02 dez 2012.

Se para nós, professores, ensinando Geometria dessa forma, nos sentimos motivados na transmissão das informações geométricas, imaginemos como essa metodologia será recepcionada na cabeça de nossos jovens alunos que, a partir dessa nova roupagem do processo de aprendizagem, perceberão que a Matemática está presente, até mesmo, em suas diversões favoritas.

*A geometria existe, como já disse o filósofo, por toda parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.*

*(Livro - O homem que calculava.)*

## 2 VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE OBJETOS TRIDIMENSIONAIS

É fato que uma das maiores, se não a maior, das dificuldades dos alunos ao estudarem Geometria espacial é a visualização do objeto, que exposto sempre no plano terá que ser assimilado e interpretado no espaço tridimensional. Tudo isso, tendo como ambiente de cognição, sua própria cabeça.

Ao ensinar aspectos geométricos, o professor de Matemática tem como ferramentas principais de trabalho, a lousa e o pincel (às vezes, o quadro negro e o giz). Esse professor, às vezes, ora por negligência inocente ora por insipiência, percebe que tudo que se está representando na lousa é bidimensional e que, cabe apenas ao aluno transportar aquela figura-objeto para o mundo 3-D. Fácil missão? Nem sempre!

Assim, como nossos alunos irão elaborar cálculos numéricos, simples ou avançados, concernentes à Geometria Espacial se, ao menos, conseguem visualizar tal objeto?

Baseados nessas necessidades, mostraremos alguns aspectos e conceitos que ultimamente vêm sendo propostos ou solicitados com mais frequência em nossos exames nacionais, como veremos adiante.

No que se refere à Geometria, observe o que aparece na Matriz Referência do ENEM, que é fundamentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

**Figura 27 - Matriz Referência ENEM – Competências e habilidades.**

<b>Competência 2</b>	<b>Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.</b>
Habilidade 6	Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
Habilidade 7	Identificar características de figuras planas ou espaciais.
Habilidade 8	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
Habilidade 9	Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Fonte: <<http://www.portaleducarbrasil.com.br/Portal.Base/Web/verContenido.aspx>> Acesso em 03 nov. 2012.

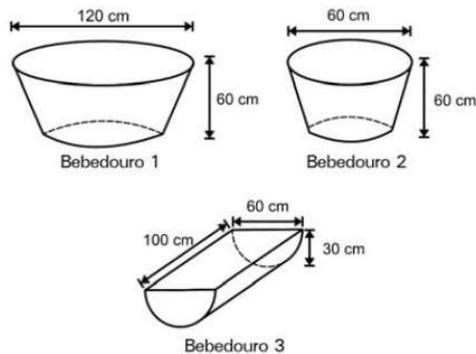
## 2.1 Uma nova tendência na verificação de conhecimentos geométricos nos exames

Analisaremos a seguir alguns problemas propostos nas edições mais recentes do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio):

**Figura 2 - Questão 137 – caderno amarelo – 2º dia - ENEM 2010**

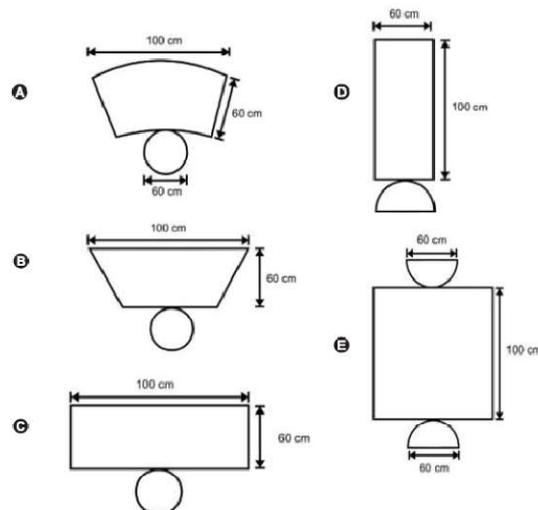
### Questão 137

Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.



A escolha do bebedouro. In: *Biotemas*. V. 22, n.º. 4, 2009 (adaptado).

Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?

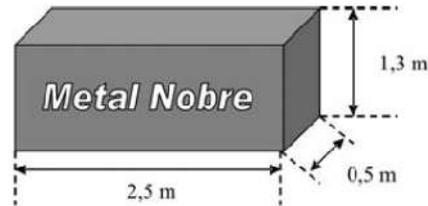


Fonte: MEC – INEP

FIGURA 29 - Questão 146 – caderno amarelo – 2º dia - ENEM 2010

**Questão 146**

A siderúrgica “Metal Nobre” produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.



O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza

- A** massa.
- B** volume.
- C** superfície.
- D** capacidade.
- E** comprimento.

Fonte: MEC – INEP

FIGURA 30 – Questão 140 – caderno amarelo – 2ª dia ENEM

**QUESTÃO 140**

A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

2011



Disponível em: <http://mdmat.psic.ufrgs.br>. Acesso em: 1 maio 2010.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

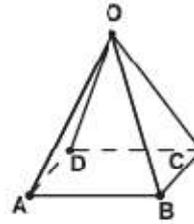
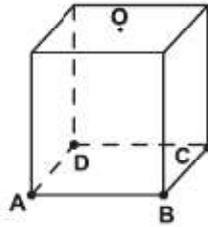
- A** pirâmide.
- B** semiesfera.
- C** cilindro.
- D** tronco de cone.
- E** cone.

Fonte: MEC – INEP

Figura 31 - Questão 144 – caderno amarelo – 2º dia - ENEM 2011

**QUESTÃO 144**

Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.



Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são

- A** todos iguais.
- B** todos diferentes.
- C** três iguais e um diferente.
- D** apenas dois iguais.
- E** iguais dois a dois.

Figura 32 – Questão 141 – caderno amarelo – 2º dia – ENEM 2012

Maria quer inovar sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



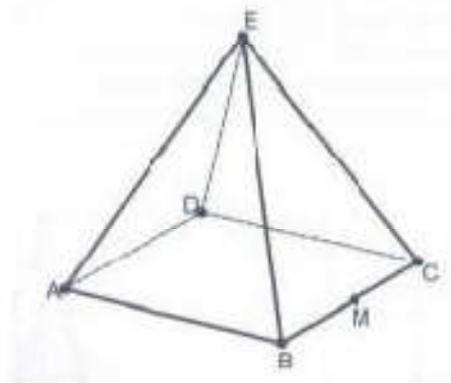
Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

- A) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
- B) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
- C) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.
- D) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
- E) Cilindro, prisma e tronco de cone.

Fonte: Fonte: MEC - INEP

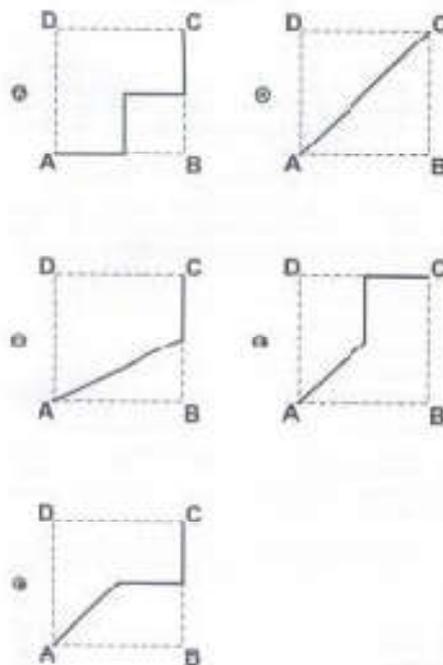
Figura 33 - Questão 149 – caderno amarelo – 2º dia - ENEM 2012

João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano de base da pirâmide.



O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

O desenho que Bruno deve fazer é:



Note que as habilidades exigidas para resolução de tais questões são norteadas muito mais pela inteligência visual, que é a capacidade de interpretar visualmente o objeto em questão, do que simplesmente a aplicação de fórmulas e aferição de cálculos.

Sendo assim, observar e aceitar os conceitos espaciais tais como a **utilidade** da Geometria e as **habilidades espaciais** são ferramentas poderosas para o ensino e melhor aproveitamento da matéria.

Se o professor consegue introduzir, naturalmente, a utilidade da imaginação espacial a seus alunos, estes conseguirão enxergar que, como qualquer outra habilidade mental, os conceitos espaciais são úteis para inúmeras profissões e especialidades. É bem verdade que, em algumas áreas como engenharia e arquitetura, esses conceitos são muito mais exigidos, entretanto ela é necessária para artistas, escultores, pilotos e para muitas outras atividades. Na vida acadêmica, quando o aluno não consegue assimilar bem a Geometria de três dimensões, traz para si dificuldades, não apenas na matemática, mas também em geografia, história, biologia, química e física porque diagramas e esquemas visuais sintetizam muitas informações. Uma pessoa dotada de boa habilidade visual pode mentalmente manipular, girar ou inverter uma figura representada. Imaginar um prédio visto de frente, de lado, por cima ou dando voltas por ele. Apesar dos avançados recursos da computação nos ajudar na representação virtual das figuras, a criação de projetos permanece privativo da mente humana.

A habilidade espacial é um dos mais importantes aspectos das capacidades mentais humanas. É a habilidade de compreender e de interpretar a informação visual, engloba diferentes tipos de habilidades que identificam relações de posição, direção, tamanho, forma e distância entre objetos.

## 2.2 Exercícios para o desenvolvimento da habilidade visual 3-d

Entendemos que é importante o professor detectar o nível da habilidade espacial de seus alunos e, diante disso, desenvolver tais habilidades. O professor Gildo A. Montenegro, da Universidade Federal de Pernambuco, em seu livro - Geometria Descritiva (Editora Edgard Blucher/2004) indica algumas atividades para esse reconhecimento e desenvolvimento da imaginação espacial e as maneiras de representar, por meio de esboços e diagramas, o pensamento em três dimensões. Destacamos algumas dessas atividades que, em nosso entendimento, podem ser aplicadas no ensino básico:

(Ao final de cada atividade, o leitor encontra, dentro do substituto, orientação e comentários relativos a cada uma.)

### Atividade 1:

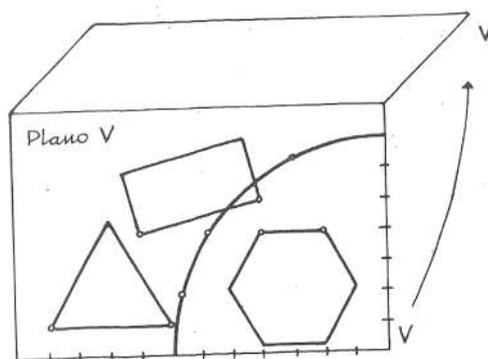
Representar um cubo em diferentes vistas ou posições.

*comentários: o objetivo é enfatizar o paralelismo de linhas e, em seguida, o professor pode solicitar o desenho da sala de aula em perspectiva.*

### Atividade 2:

Rotação

O plano vertical  $V$  é girado até  $V_1$ . Pede-se a representação, no plano  $V_1$ , das figuras dadas.



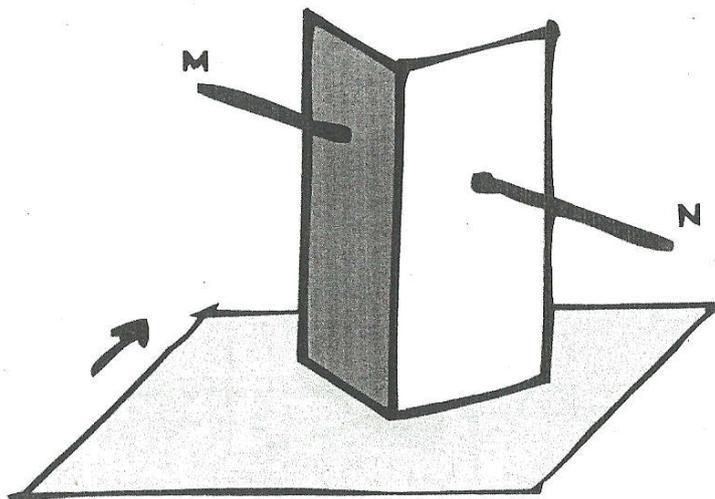
Fonte: livro Geometria Descritiva. Gildo A. Ribeiro. Ed. Blucher

*comentários: serve como introdução do conceito de rotação e de rebatimento, abastecendo futuro de visualização de objetos sob vários ângulos diferentes.*

**Atividade 3:**

Copie a figura abaixo e, em seguida, esboce uma vista da mesma, quando ela é observada no sentido oposto ao da seta.

**Figura 35 – Exercícios para desenvolvimento da habilidade visual**



Fonte: livro Geometria Descritiva. Gildo A. Ribeiro. Ed.Blucher

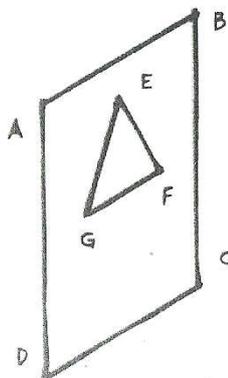
*comentários: o objetivo é a representação da figura a partir de um novo ponto de vista. É o que acontece quando o observador muda de posição.*

**Atividade 4:**

Rebatimento

Representar em sua verdadeira grandeza o quadrado ABCD e a figura nele contida.

**Figura 36 – Exercícios para desenvolvimento da habilidade visual**



Fonte: livro Geometria Descritiva. Gildo A. Ribeiro. Ed.Blucher

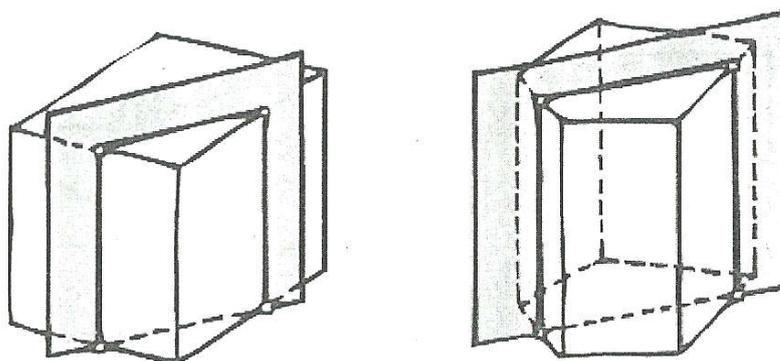
*comentários: trata-se de um problema de rebatimento. Apesar não se afirmar a natureza do triângulo, desperta e ajuda a desenvolver o senso de proporcionalidade.*

**Atividade 5:**

Seção plana

As figuras abaixo mostram poliedros seccionados por planos verticais. Representar esses planos.

**Figura 37 – Exercícios para desenvolvimento da habilidade visual**



*Prismas seccionados*

Fonte: livro Geometria Descritiva. Gildo A. Ribeiro. Ed.Blucher

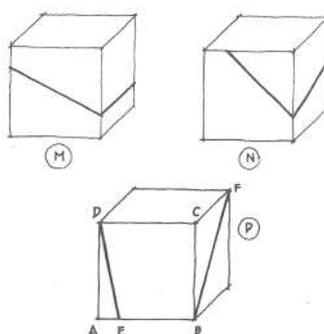
*comentários: O exercício mostra o procedimento para obter e para representar a seção plana no cubo.*

**Atividade 6:**

Seção plana

Os alunos recebem cubos de isopor e neles indicam seções por meio de duas retas, cada uma em face adjacente. Em seguida, os alunos trocam os sólidos, de modo, que cada aluno fará a representação da seção riscada no sólido por um colega.

**Figura 38 – Exercícios para desenvolvimento da habilidade visual**



Fonte: livro Geometria Descritiva. Gildo A. Ribeiro. Ed.Blucher

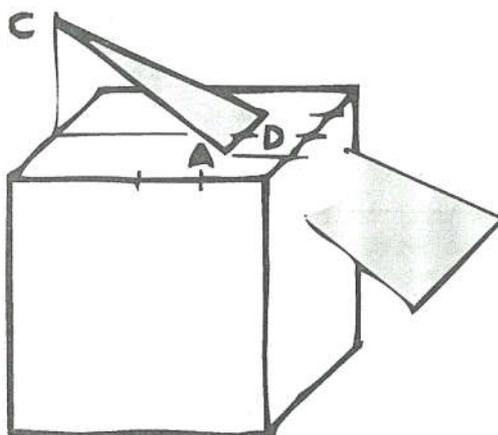
*comentários: esse exercício, tem por objetivo a visualização e representação de secções.*

**Atividade 7:**

Interseção de triângulo e cubo

Completar a interseção do triângulo com o cubo.

**Figura 39 – Exercícios para desenvolvimento da habilidade visual**



Fonte: livro Geometria Descritiva. Gildo A. Ribeiro. Ed. Blucher

comentários: sendo o triângulo isósceles, sua aplicação e entendimento ficará mais evidente. Pode-se em seguida tentar calcular área dessa interseção.

Ressaltamos que as atividades expostas servem apenas como pontapé norteador para as ações do professor criativo e dedicado. Podendo ele, acrescentar e ou excluir algumas delas.

Faz-se necessário o uso de materiais concretos quando da aplicação das atividades pois os alunos estarão ansiosos para manipular tais materiais na prática para, em seguida, expressar tacitamente o que aprenderam. Utilizar materiais como folha de isopor, talas de pega-varetas, massa de modelar, tesoura, tintas de cores diversas, cartolinas etc, tornam a atividade dinâmica, lúdica e extremamente atraente.

### 3 UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

#### 3.1 Fundamentação teórica para a proposta

A presente proposta foi baseada em teorias de ensino-aprendizagem de estudiosos no assunto: Luiz Carlos Pais, Arthur Jean Piaget, Angel Gutiérrez e o casal Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele. Como se verá, enfatizamos o modelo proposto por Van Hiele, registrando-se as devidas adaptações. Agregaremos a este modelo as ideias de Luis Carlos Pais e Gutiérrez, tratando com maior rigor os aspectos relacionados à representação dos sólidos, e, para descrever os processos psicológicos envolvidos nas questões de visualização e de aprendizagem, buscamos apoio em Piaget.

##### 3.1.1 O campo da visualização de Gutiérrez

O campo da visualização, segundo Gutiérrez (1996), é tão extenso que não é viável tentar abordá-lo por inteiro e ao mesmo tempo. O termo “imagem visual” pode ter diferentes significados para diversos autores, relata o autor. Isso por conta da diversidade de áreas – por exemplo: engenharia, arte, medicina, economia, química, entre outras – onde a visualização é considerada relevante.

Para Gutiérrez (1996, p. 9), a visualização em Matemática é “um tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais e espaciais, tanto mentais quanto físicos, desenvolvidos para resolver problemas ou provar propriedades”. A visualização integra-se a quatro elementos principais: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e habilidades de visualização. De acordo com esse autor:

*[...] uma imagem mental é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade, por meio de elementos visuais ou espaciais;*

*[...] uma representação externa pertinente à visualização é qualquer tipo de representação gráfica ou verbal de conceitos ou propriedades incluindo figuras, desenhos, diagramas, etc, que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e produzir raciocínio visual;*

*[...] um processo de visualização é uma ação física ou mental, onde imagens mentais estão envolvidas. Existem dois processos realizados na visualização: a “interpretação visual de informações” para criar imagens mentais e a “interpretação de imagens mentais” para gerar informações*

*(p.9-10).*

Em relação às habilidades de visualização, Gutiérrez (1996, p.10) define os principais tipos, a saber:

**Percepção de figura base:** habilidade de identificar uma figura específica isolando-a de um fundo complexo.

**Constância perceptual:** habilidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma imagem mental) são independentes do tamanho, cor, textura ou posição, e permanecer não confuso quando um objeto ou figura é percebido em diferentes orientações.

**Rotação mental:** habilidade de produzir imagens mentais dinâmicas para visualizar uma configuração em movimento.

**Percepção de posições no espaço:** habilidade de relacionar um objeto, figura ou imagem mental em relação a si mesmo.

**Percepção de relações espaciais:** habilidade de relacionar vários objetos, figuras e/ou imagens mentais uns com os outros ou simultaneamente consigo mesmo.

**Discriminação visual:** habilidade de comparar vários objetos, figuras e/ou imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre eles.

Essas habilidades, que tanto destacamos em nosso trabalho, são entendidas pelo autor como um conjunto de habilidades (por exemplo, imaginar a rotação de um objeto, prever o deslocamento de um sólido, imaginar e compreender movimentos em três dimensões) que devem ser adquiridas pelos alunos.

### 3.1.2 Piaget e a criação da imagem mental

Piaget não realizou seus estudos considerando a educação propriamente dita, mas ao estudar sobre o desenvolvimento mental, bem como as estruturas lógicas da formação da inteligência e do conhecimento, ele observou estruturas operatórias relacionando-as ao estudo e compreensão da Matemática.

O aluno, segundo o autor, constrói seu conhecimento por meio de uma experimentação ativa, ou seja, ele vivencia os objetos sem formar conceitos, pois estes só apareceram a posteriori.

Através da experiência física, o aluno conhece os objetos com sua ação sobre ele, age sobre ele e o manipula, descobre as propriedades materiais que podem ser observadas através da visualização e do manuseio de tais objetos.

Para Piaget (1978) a representação pode significar tanto uma "imagem" mental (um símbolo concreto) quanto conceitos (abstratos). Há uma continuidade entre formas perceptivas e representações figuradas e as imagens visuais necessitam de esquemas motores e perceptivos prévios, adquiridos pela vivência (ação e exploração do indivíduo no meio ao longo do tempo), resultando num novo tipo de esquema avançado, que é a abstração. O termo

representação é, portanto, usado em dois sentidos diferentes, ou seja, como pensamento (independente de esquemas sensório-motores) e como imagem mental ou recordação-imagem.

### 3.1.3 O ensino da Geometria por Van Hiele

O modelo Van Hiele foi resultado de um trabalho realizado pelo casal Pierre Marie Van Hiele e Dina Hiele-Geldof, sob orientação do educador Hans Freudenthal no final da década de 50, na Holanda. O modelo consiste na valorização da aprendizagem como um processo gradual, global e construtivo. Gradual, porque considera que a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica são obtidos gradualmente. Global, porque figuras e propriedades não são abstrações isoladas, se relacionam nos diversos níveis que levam a outros significados. Construtivo, porque pressupõem que não existe transmissão de conhecimentos, mas que o aluno deverá construir ele próprio os seus conceitos.

Van Hiele dividiu o processo de desenvolvimento do conhecimento geométrico em cinco níveis numerados de 0 a 4, posteriormente nomeados por Hoffer (1979) e renumerados de 1 a 5, com a anuência de Van Hiele.

Lorenzato (1995) resume o método dos Van Hiele da seguinte forma:

*“O Modelo de van Hiele”, que concebe diversos níveis de aprendizagem geométrica (ou níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico) com as seguintes características: no nível inicial (visualização), as figuras são avaliadas apenas pela sua aparência, a ele pertencem os alunos que só conseguem reconhecer ou reproduzir figuras (através das formas e não pelas propriedades); no nível seguinte (análise) os alunos conseguem perceber características das figuras e descrever algumas propriedades delas; no outro nível (ordenação), as propriedades das figuras são ordenadas logicamente (inclusão) e a construção das definições se baseia na percepção do necessário e do suficiente. As demonstrações podem ser acompanhadas, memorizadas, mas dificilmente elaboradas. Nos dois níveis seguintes estão aqueles que constroem demonstrações e que comparam sistemas axiomáticos.”*

**FIGURA 40 – Esquematisação dos Níveis de conhecimento de Van Hiele**

<b>NÍVEL</b>	<b>CARACTERÍSTICAS</b>	<b>EXEMPLO</b>
<b>Nível 1 Conhecimento</b>	Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
<b>Nível 2 Análise</b>	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de propriedades: 4 lados iguais, 4 ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
<b>Nível 3 Abstração</b>	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra; Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais, 4 ângulos retos. Reconhecimento de que o quadrado é também um retângulo.
<b>Nível 4 Dedução</b>	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações; Reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
<b>Nível 5 Rigor</b>	Capacidade de compreender demonstrações formais; Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

Fonte: autor, 2013

Embora as pesquisas com níveis sejam importantes, apontamos, humildemente, um entrave que pode ser dúbio ou até mesmo conflituoso para os novos moldes geométricos que sugerimos, o modelo de van Hiele cria ‘rótulos’ para classificar o pensamento geométrico, ao tentar ‘colocá-lo’ em determinado nível. Em outras palavras, é como se o seu desenvolvimento fosse estudado de maneira fragmentada, desconsiderando todo o processo de aprendizagem dos conteúdos e o desenvolvimento de saberes. Como nossa proposta está pautada na mobilização de saberes identificados, nossa preocupação reside no fato de contribuir para o desenvolvimento profissional de professores, essa ideia precisa ser agregada de conhecimentos de outros teóricos que sejam mais flexíveis e que não expirem a ideia de uma Matemática engessada.

### **3.1.4 A visão de Luiz Carlos Pais acerca do desenvolvimento do pensamento geométrico**

O autor destaca três questões fundamentais do conhecimento geométrico: o intuitivo, o experimental e o teórico. De acordo com Pais, para construir o conhecimento teórico geométrico dos alunos, é preciso que o professor considere tanto as questões intuitivas, quanto as atividades experimentais. Esse mesmo autor ressalta quatro elementos fundamentais no processo de representação plana de um objeto tridimensional: objeto, desenho, imagem mental e conceito. O termo objeto é interpretado pelo autor como parte material, palpável do mundo real e que pode ser associada à forma de alguns conceitos geométricos. Por exemplo, o objeto associado ao conceito de cubo pode ser um cubo construído com varetas, cartolina, argila ou qualquer outro material. Assim, o termo objeto é utilizado como modelo físico ou material didático. Segundo Pais (1996), o objeto é entendido como forma primitiva de representar conceitos, uma vez que o processo de construção teórica é lento, gradual e complexo.

Entretanto, o trabalho de manipulação de objetos não pode limitar-se a uma atividade lúdica apenas. É importante que o aluno, ao manipular objetos, consiga interpretar geometricamente a representação envolvida e possa abstrair e generalizar conceitos.

O conhecimento geométrico, segundo os autores, envolve não apenas o reconhecimento visual e nominal de determinadas formas, mas também a exploração consciente do espaço, a comparação de elementos observados e o estabelecimento de relações entre eles. Além disso, pressupõe descobrir propriedades de figuras, construir modelos, elaborar conclusões. Analisando tais pressupostos, os autores consideram que o processo de aprendizagem dos conhecimentos geométricos na escola primária abarca dois grandes momentos que vão desde o nascimento da criança até as diferentes etapas de reconhecimento do mundo em que vive.

### **3.2 A proposta de aula**

Formulamos então uma sugestão de proposta didática para uso direto em sala de aula. Obviamente, como se trata de sugestão, o leitor poderá adaptar as ideias, modificando, acrescentando ou excluindo as metodologias, objetivos e justificativas para aplicação de cada uma delas. Tais adaptações dependem de muitas variáveis como série em curso e nível de cada turma, estrutura física e materiais disponíveis, habilidade geométrica etc.

Ratificamos que nosso objetivo é observar e explorar, tanto a importância da habilidade visual em três dimensões quanto o uso de materiais manipuláveis no ensino da Geometria.

A proposta consiste em um exercício que será desenvolvido em duas sessões.

### 3.2.1 Sessão 1: “enxergar os sólidos do olhos fechados”

Meio paradoxal, não acham? Pois é isso mesmo! Introduziremos alguns sólidos em uma caixa escura e o aluno sem ter tido contato visual anteriormente com os referidos sólidos, apenas utilizando o sentido do tato, tentará identificar e representar conforme roteiro criado e processado apenas pela sua habilidade visual.

Nesta etapa, confeccionamos uma caixa de madeira (escolhemos a cor preta por ser uma cor mística e que desperta a curiosidade pelo desconhecido). Podemos atribuir-lhe um codinome, por exemplo: “Caixa de Pandora” (crie o seu, ou faça uma enquete com a própria turma, ou ainda, deixe que a turma, no desenrolar das atividades apelide sua caixa).

Vide o interior da nossa “Caixa de Pandora”:

**Figura 41 – “Caixa de Pandora” vista internamente (as laterais serão fechadas)**

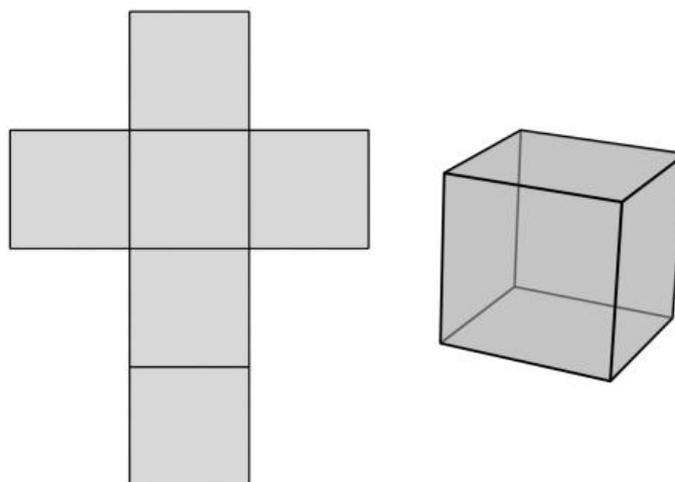


Fonte: Autor, 2013.

#### **ATIVIDADE 1:** Inserção de um cubo na caixa.

Tarefa: Os alunos colocam as mãos dentro da caixa e, sem ver o sólido, identificam e tentam desenhá-lo em perspectiva e planificado.

Comentários: Pelo fato do cubo ter um formato muito comum, essa atividade, considerada introdutória aos nossos trabalhos, transmitirá segurança e ligeira impressão de um trabalho de fácil execução.

**Figura 42 – Cubo planificado**

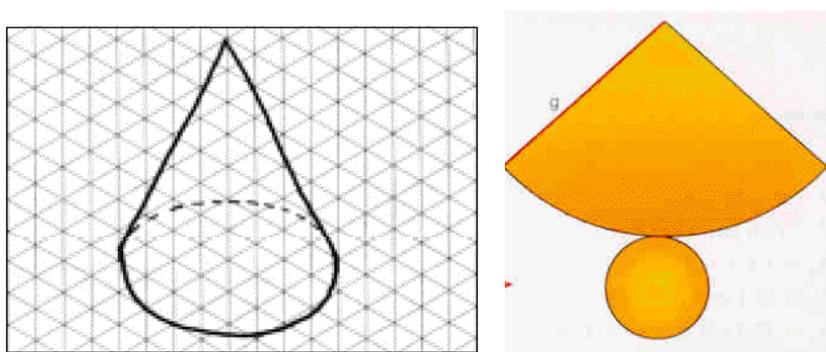
Fonte: disponível em <<http://www.google.com.br/imgresimgurl>> Acesso em 15 nov 2012.

**ATIVIDADE 2: Inserção de um cone na caixa**

Tarefa: Os alunos colocam as mãos na caixa e, sem ver o sólido, tentam desenhá-lo em perspectiva e planificado.

Comentários: A identificação desse sólido não oferece grandes obstáculos, porém, em sua representação, nos depararemos com certo grau de dificuldade haja vista o desenho em perspectiva de um cone ser mais complexo que o de um cubo, por exemplo. Para dirimir tal dificuldade podemos fornecer a malha pontilhada, conforme modelo exposto nas considerações finais dessa seção. A malha pontilhada ajudará, principalmente aos alunos que não possuem tanta habilidade com o desenho, no que diz respeito ao senso de proporcionalidade das figuras.

**Figura 43 – Planificação e perspectiva de um cone reto**



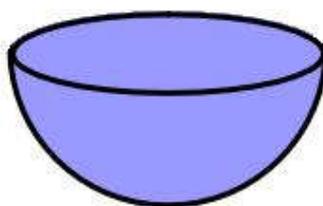
Fonte: disponível em <<http://www.google.com.br/imgresimgurl>> Acesso em 15 nov. 2012.

**ATIVIDADE 3: Inserção de uma semiesfera na caixa**

Tarefa: Os alunos colocam as mãos dentro da caixa e, sem ver o sólido, identificam e tentam desenhá-lo em perspectiva.

Comentários: Outra tarefa de fácil execução, ao não ser pela representação em perspectiva da secção da esfera.

**Figura 44 – emiesfera**



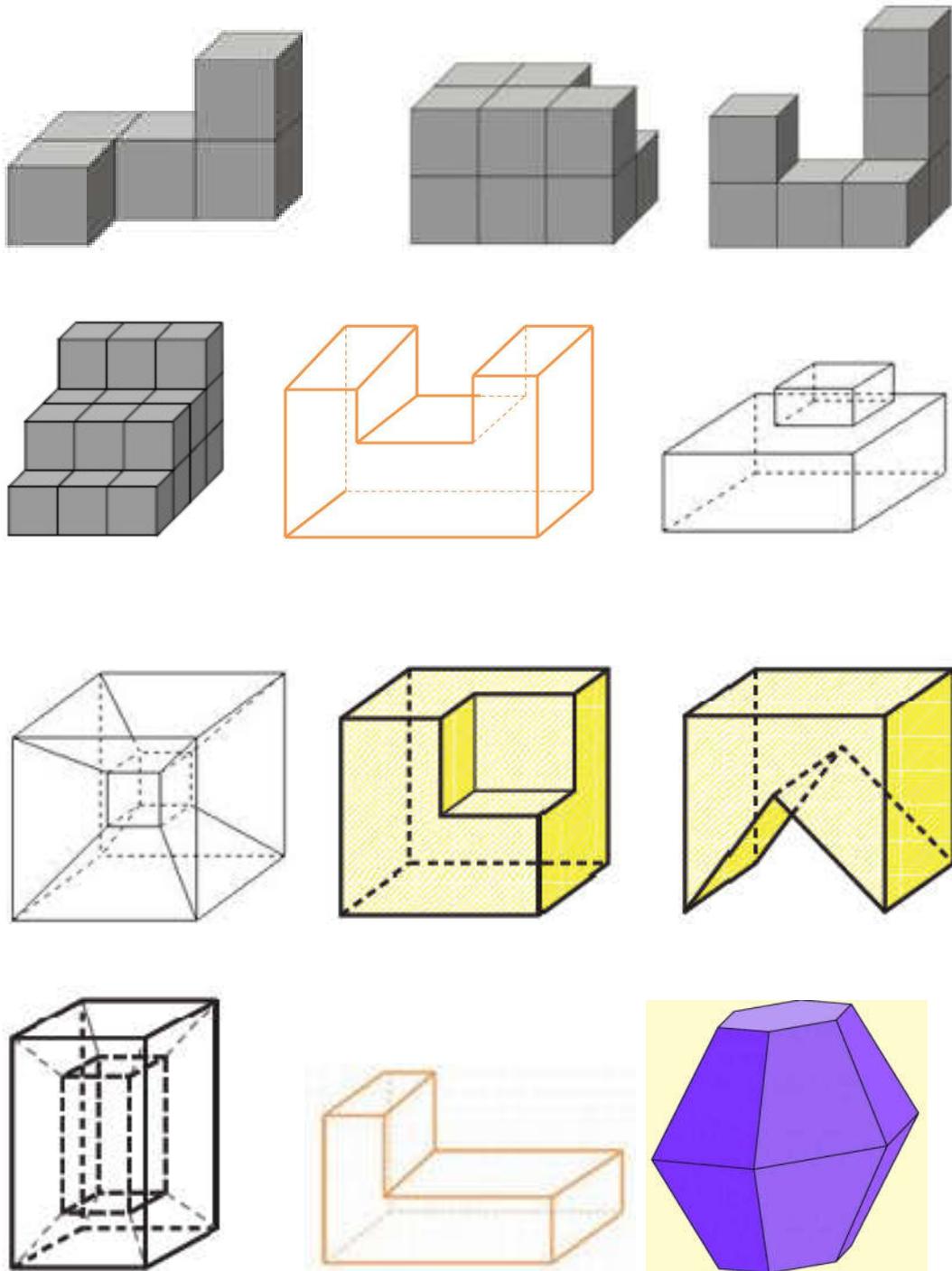
Fonte: Fonte: disponível em <<http://www.google.com.br/imgresimgurl>> Acesso em 15 nov. 2012.

**ATIVIDADE 4: Inserção de sólidos não convencionais na caixa (poliedros não convexos)**

Tarefa: Os alunos colocam as mãos dentro da caixa e, sem ver o sólido, identificam e tentam desenhá-lo em perspectiva.

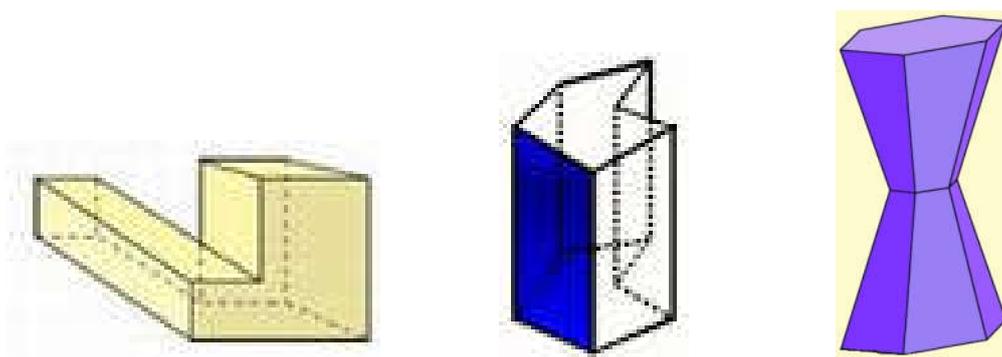
Sugestões de sólidos que podem ser colocados na caixa:

Figura 45 – Poliedros não convexos.



Fonte: <<http://www.google.com.br/searchqpoliedros>> Acesso em 15 nov. 2012.

**Figura 46 – Poliedros não convexos**



Fonte: <<http://www.google.com.br/searchqpoliedros>> Acesso em 15 nov. 2012.

### **3.2.2 Sessão 2: representações, seções, criação e manipulação de sólidos.**

Escolhemos então, a inserção de um cilindro circular reto num prisma quadrangular regular. (Obviamente podem-se usar outros sólidos inscritos).

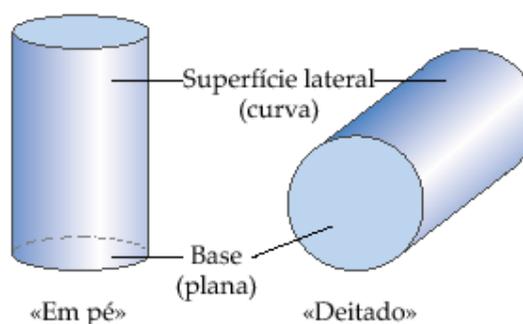
Com isso trabalharemos muitos aspectos geométricos que irão desde sua visualização em 3D à representação e manipulação desses sólidos, podendo ainda explorar aspectos e cálculos analíticos, utilizando areia, água ou outro material mensurável.

A aplicação pode ser subdividida em atividades que podem ser avaliadas por etapas ou como um todo.

#### **ATIVIDADE 1: Representar um cilindro em perspectiva.**

Comentários: representar um sólido com arestas retilíneas é uma tarefa difícil para quem não possui habilidade com o desenho geométrico. Representar um cilindro em perspectiva gera mais dificuldade ainda, uma vez que o desenho em perspectiva de um cilindro não é algo convencional. Veja como seria uma representação ideal de um cilindro:

**Figura 47 – Perspectiva de um cilindro**



Fonte: Disponível em <[http://www.sobrearte.com.br/desenho/perspectiva/formas\\_geometricas.php](http://www.sobrearte.com.br/desenho/perspectiva/formas_geometricas.php)> Acesso em 15 nov. 2012.

O objetivo dessa tarefa é despertar a curiosidade pela perspectiva geométrica e desenvolver a visão de um cilindro visto sob vários ângulos.

Para auxiliar na confecção do cilindro “em pé”, como sugestão, podemos primeiro desenhar duas elipses e, em seguida, agregar altura às regiões elípticas, ligando-as.

**Figura 48 - elipses para bases do desenho da perspectiva cilíndrica**

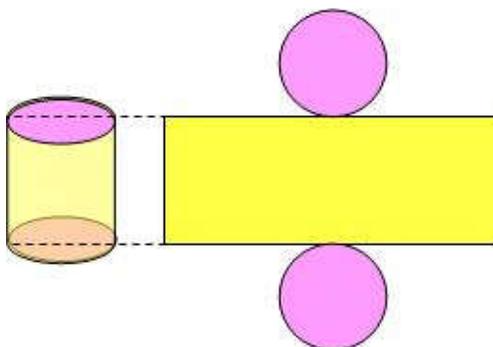


Fonte: Disponível em: <<http://www.brasilecola.com>> Acesso em 15 nov. 2012.

### **ATIVIDADE 2: Representar um cilindro planificado**

Comentários: nessa atividade, é possível observar, identificar, definir e comparar o sólido com a figura desmontada. O uso de régua e compasso deve ser indicado para essa atividade a fim do produto final de cada aluno ser esteticamente atraente e demonstrável. Evitar a exposição de um cilindro planificado antes da realização dessa tarefa.

**Figura 49 – Cilindro planificado**

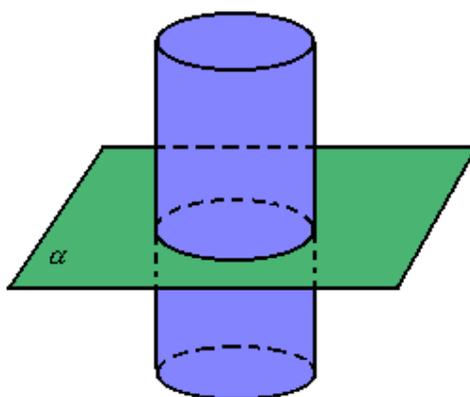


Fonte: Disponível: <<http://www.brasilecola.com>> Acesso em 15 nov 2012.

**ATIVIDADE 3: Representar através de desenhos, a seção de um cilindro obtida por um plano paralelo às suas bases. Em seguida, representar outras seções obtidas por planos não paralelos às bases.**

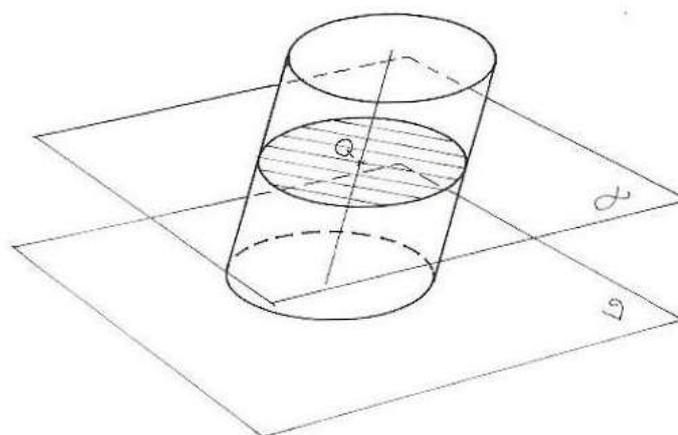
Comentários: Nessa tarefa, os conceitos de paralelismo e perpendicularismo podem ser explorados. Os alunos deverão perceber que, à medida que o plano seccionador for mudando a inclinação, a forma da figura (seção) vai se ovalizando, remetendo-se ao formato de elipses (nos exercícios posteriores, ao manusearmos tais conceitos com materiais manipulativos, os alunos poderão comparar suas figuras com o que realmente acontece na prática).

**Figura 50 - Seção do cilindro**



Fonte: Disponível em <<http://www.somatematica.com.br/espacial>> Acesso em 15 nov. 2012.

**Figura 51 – Seção do cilindro**

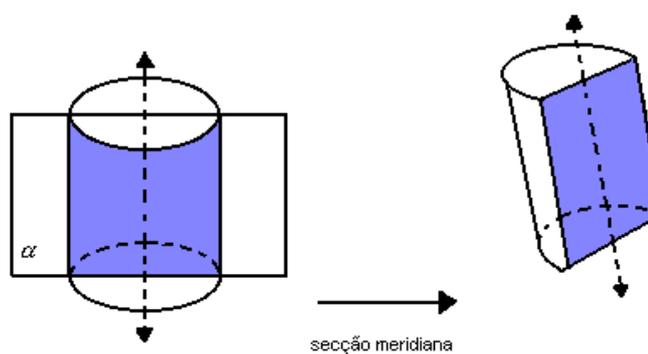


Fonte: Disponível em <<http://www.somatematica.com.br/espacial>> Acesso em 15 nov 2012.

**ATIVIDADE 4: Representar através de desenhos, a seção de um cilindro obtida por um plano perpendicular às suas bases. Em seguida, representar outras seções obtidas por planos não perpendiculares às bases.**

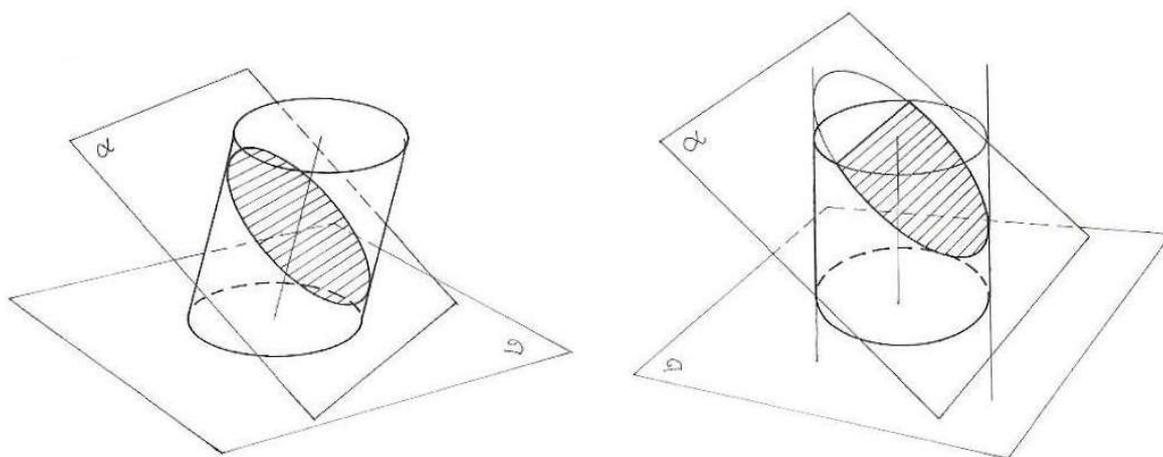
Comentários: Nesta atividade continuamos trabalhando a habilidade visual, pois a partir das inclinações que este plano toma, suas seções ganham formatos diferentes, ao ponto de obtermos paralelogramos e, até mesmo, uma superfície cônica.

**Figura 52 - Seção do cilindro**



Fonte: Disponível em <<http://www.somatematica.com.br/espacial>> Acesso em 15 nov. 2012.

**Figura 53 – Superfícies Obtidas ao mudarmos a inclinação.**



Fonte: Disponível: <<http://studyinpeace.blogspot.com.br/2011/03/tipos-de-secoes-produzidas-num-cilindro.html>> Acesso em 15 nov. 2012.

### **ATIVIDADE 5: Confeccionar um cilindro com massa.**

Comentários: Pode-se utilizar como forma, uma lata vazia de óleo de cozinha que, após preenchida com massa de modelar ou massa utilizada para fixação de vidros, obteremos um perfeito cilindro. Se dispuser de uma forma cilíndrica de um outro material como acrílico,

plástico etc, que seja de fácil desmolde, também poderá ser utilizada. Como dica, podemos utilizar o próprio óleo de cozinha ou vaselina para desmoldar o cilindro de massa de modelar. Nesta etapa, exploraremos as medidas, utilizando régua e registrando os valores das medidas do raio da base, altura do cilindro, comprimento da circunferência, e área do círculo. Este cilindro será, posteriormente, seccionado e inserido no prisma, e em seguida compararemos com os desenhos anteriormente representados.

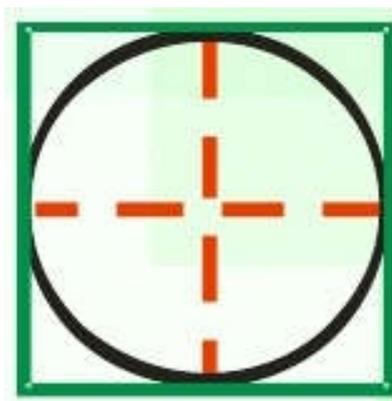
**Figura 54 – Cilindro confeccionado com massa**



Fonte: Autor, 2013

**ATIVIDADE 6: Calcular as medidas do lado de um quadrado que será circunscrito a uma circunferência.**

Comentários: A partir do raio e do comprimento da base do cilindro confeccionado com massa de modelar, procuraremos inscrever essa circunferência nesse quadrado. Observe que os conceitos, expressões e cálculos de lado e apótema dos polígonos podem ser explorados nessa atividade.

**Figura 55 – Quadrado circunscrito**

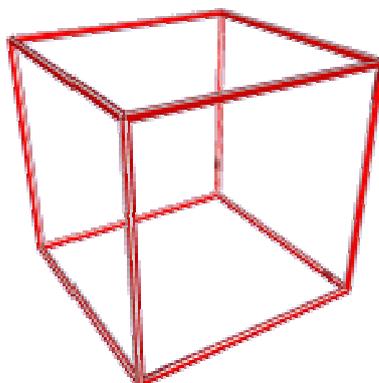
Fonte: Disponível em: < <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html/aula1593>> Acesso em 15 nov 2012.

### **ATIVIDADE 7: Confeccionar um prisma com canudos plásticos**

Comentários: Obviamente, para aplicabilidade do trabalho, esse prisma terá um formato quadrangular regular, cujas dimensões da base estarão de acordo com as dimensões calculadas na atividade anterior (cabe ao professor determinar outro tipo de prisma, dependendo de seus objetivos). O mesmo ocorrerá com a altura desse prisma que será a mesma medida da altura do cilindro confeccionado.

Notamos que o esqueleto montado apenas com canudos plásticos não trará a rigidez necessária para sustentação e manipulação do prisma, sendo então necessário o uso de outros materiais. Para a montagem desse prisma, faremos uma espécie de costura com um barbante (tipo linha de crochê) e uma agulha que pode ser confeccionada com o próprio material do canudo. Para uma rigidez satisfatória, introduziremos palitos (do tipo que se usam em churrasquinhos) por dentro dos canudos. Nesta atividade, deveremos ter o cuidado de, antes de cortar os pedaços de canudo para confecção do prisma, termos explorado os conceitos básicos de arestas, vértices e faces. Podemos usar como ferramenta, a relação de Euler para sólidos convexo:  $V + F = A + 2$  (onde V é o número de vértices, F é o número de faces e A é o número de arestas). As diagonais podem também ser estudadas e dimensionadas, de acordo com o uso do Teorema de Pitágoras. Só então, a partir dessas observações, os alunos devem cortar, na quantidade e medidas certas, os canudos plásticos.

**Figura 56 - Prisma quadrangular reto confeccionado de canudos**



Fonte: Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula>> Acesso em 02 de nov. 2012.

#### **ATIVIDADE 8: O cilindro inscrito no prisma**

Comentários: Os alunos irão constatar, que o prisma construído, a partir dos cálculos efetuados para quantidade e dimensões dos canudos, condizem na prática, com a proposta de circunscrevê-lo ao cilindro de massa.

#### **ATIVIDADE 9: Seções no cilindro confeccionado.**

Comentários: Neste momento, compararemos as figuras imaginadas e visualizadas nas atividades 3 e 4 com as seções obtidas no material concreto.

Utilizando-se de dois ou mais cilindros de massa de modelar, poderemos efetuar seções paralelas e não-paralelas às base bem como seções perpendiculares e não perpendiculares às bases.

#### **ATIVIDADE 10: Obter uma aproximação do número irracional $\pi$ a partir das medidas utilizadas na confecção do cilindro de massa.**

Comentários: Nesta atividade, em posse das medidas do raio e do comprimento do cilindro, obteremos o valor aproximado do número irracional  $\pi$ , através da expressão  $C = 2.\pi.r$  (onde  $C$  é o comprimento da circunferência e  $r$  é o raio da base do cilindro).

#### **ATIVIDADE 11: Cálculo das áreas**

Comentários: Podemos agora, agregar às atividades os conceitos, expressões e cálculos das áreas da base, lateral e total do cilindro bem como as áreas do prisma.

Podem-se utilizar, para melhor visualização, as figuras exigidas na atividade 2, onde solicitamos a planificação do cilindro.

### **ATIVIDADE 12: Cálculo de volumes**

Comentários: Depois de estudarmos e visualizarmos, sob diversos ângulos, os sólidos em epígrafe, podemos calcular seus volumes, dispoindo de suas expressões.

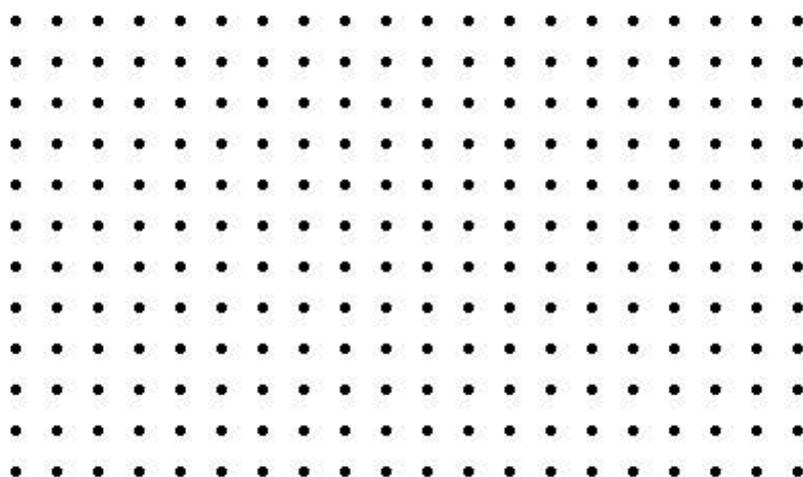
Nessa etapa, o professor pode se estender, observando vários outros aspectos que envolvem volumes, como por exemplo, a razão entre os volumes do prisma e do cilindro inscrito.

### **3.3 Considerações sobre as atividades propostas**

1) Antes da execução das atividades, o professor pode fazer uma breve explanação sobre desenho em perspectiva isométrica (que é uma das mais simples de se assimilar).

Podemos sugerir, para auxiliar os alunos nos desenhos, a malha pontilhada, como forma de orientação quanto as retas a serem traçadas e suas devidas inclinações:

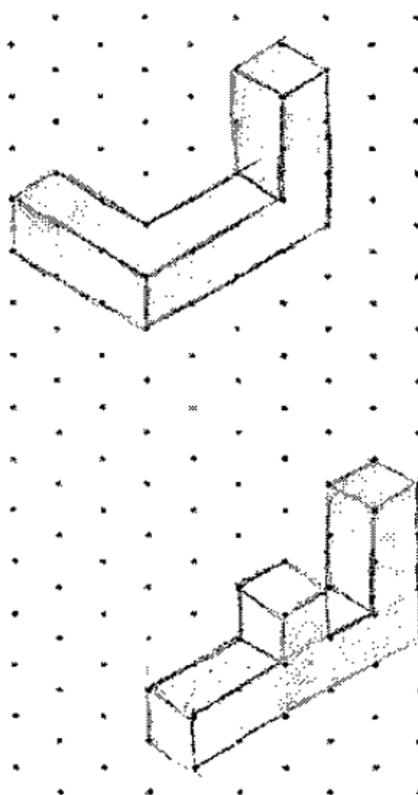
**Figura 57 – Modelo de malha pontilhada**



Fonte: Disponível em : <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/discovirtual/galerias/imagem>> Acesso em 10 de agosto 2013.

Vide exemplo:

**Figura 58 – Exemplos da aplicação da malha pontilhada no auxílio dos desenhos**



Fonte: autor, 2013

- 2) A turma deve ser dividida em grupos, criando assim uma motivação com a disputa dos pontos pré estabelecidos;
- 3) A escolha dos sólidos a serem colocados na caixa pode ser escolha da equipe oponente. Com isso cria-se um clima sadio de disputa entre os grupos;
- 4) Pode-se, também, enumerar os sólidos e sortear a sequência entre os grupos;
- 5) Faz-se necessário o registro das atividades para que, ao término da conclusão, os alunos possam observar as etapas a que foram submetidos e avaliados;
- 6) Após o planejamento, execução e padronização das atividades, este trabalho poderá se tornar um projeto na área de matemática naquela instituição de ensino com cronograma e reserva no calendário escolar.

Esperamos que, conforme destacamos no início desse capítulo, o professor habilitado possa agregar vários outros itens matemáticos às atividades, usar outros sólidos e contextualizar as aplicações da forma mais adequada, em conformidade com suas expectativas e aspirações.

## **4 A PROPOSTA DE AULA EFETIVAMENTE APLICADA (experiência adquirida com a prática)**

Para dar consistência a nossa proposta de aula, escolhemos uma turma do 2º ano do ensino médio, de uma escola na qual leciono a disciplina Matemática. Esta turma foi escolhida pelo fato de que nas próximas unidades letivas está prevista na matriz curricular o tópico Geometria Espacial.

No intuito de melhor aplicabilidade e otimização da proposta em tela, resolvemos desenvolver o trabalho em etapas, de forma gradual, a fim de não “tumultuar” os objetivos pré-estabelecidos. Sendo assim, nessa primeira etapa do trabalho, resolvemos explorar a mais importante das atividades, que consiste em desenvolver e expressar a habilidade visual 3-D, representando no plano, sólidos tridimensionais, os quais os alunos não tiveram contato anteriormente, nem visual tampouco físico.

Pela experiência adquirida, torna-se inviável a introdução de fórmulas e cálculos analíticos nessa fase do trabalho, haja vista que a confecção, explanação e culminância das apresentações, somente nessa fase, demandam um tempo considerável.

### **4.1 – A aplicação do trabalho em sala de aula**

#### **ATIVIDADE 1:**

##### **Explanação e objetivos do trabalho**

Em uma aula inicial, explicitamos os objetivos, pontuações e moldes do trabalho a ser desenvolvido.

Nessa atividade, dividimos a turma em 8 grupos de 5 alunos. Essa divisão ficou a critério dos alunos, visto que sentimos a necessidade de não intervir na criação de cada grupo. Cada aluno entende quais os companheiros com que têm maior afinidade, otimização de deslocamento e pré-disposição aos estudos.

#### **ATIVIDADE 2:**

##### **Confecção da “Caixa de Pandora”**

Quando, na explanação dos trabalhos a serem realizados, foi colocada a existência de uma caixa preta, na qual os sólidos seriam introduzidos, logo apareceram “apelidos” diversos para aquele artefato que, posteriormente, encarei como sendo salutar aos nossos trabalhos. A tal caixa recebeu o codinome “Caixa de Pandora” em alusão a uma caixa enigmática presente na mitologia grega. Pandora, segundo a mitologia grega, foi a primeira mulher criada por

Zeus. A caixa dada à Pandora era na verdade um grande jarro que tinha os males do mundo. Então Pandora, com sua curiosidade, abriu o frasco e todo seu conteúdo foi liberado, exceto um item. O item remanescente foi a esperança.

**Figura 59 – A “Caixa de Pandora”**



Fonte: Autor, 2013.

### **ATIVIDADE 3:**

#### **Confeção dos sólidos**

Fazia-se necessário que os alunos a serem submetidos aos testes, nunca tivessem tido contato físico nem visual com os sólidos a serem inseridos na caixa.

Entretanto, não podíamos perder a oportunidade de realizar a confecção de tais sólidos com alunos. Teríamos perdido assim, um importante momento de manipulação com os sólidos na prática. E para dirimir tal entrave, tomamos outra turma da escola (1º ano do ensino médio) para que confeccionassem e mantivessem contato físico com a manipulação e estudo desses materiais.

Assim, acabamos envolvendo mais alunos do que havíamos previsto, dando-lhes oportunidade de manusear sólidos que serão alvo de matérias nos assuntos vindouros para o

1º ano e mantivemos o 2º ano (turma na qual foi aplicado o trabalho) sem contato algum com os artefatos.

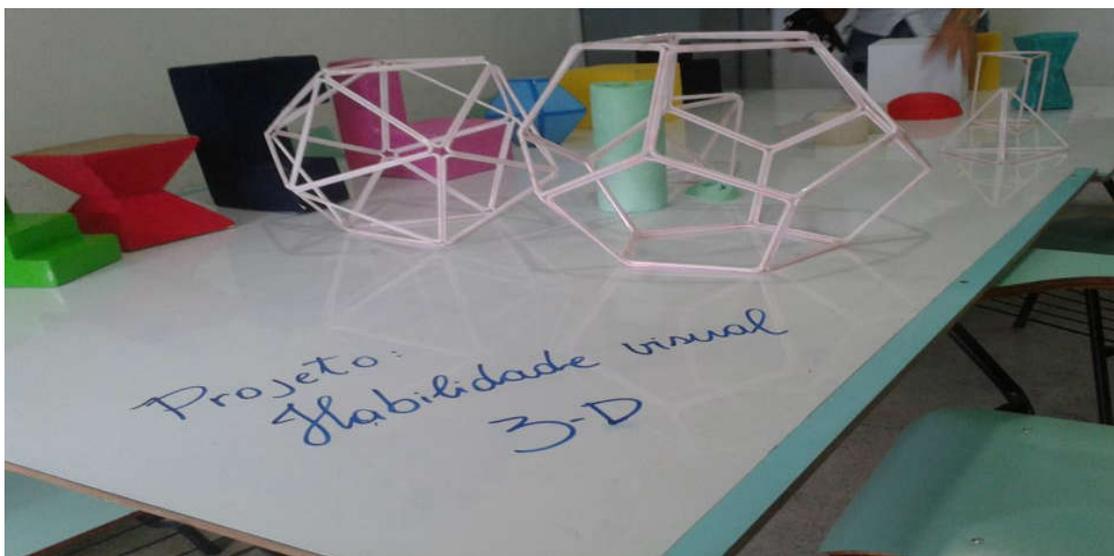
Nada impede que, ao término das atividades, a turma submetida ao trabalho proposto confeccione os sólidos para a próxima turma a ser avaliada. Desta forma, estaremos também dando oportunidade a esta turma de manipular os sólidos a serem analisados e representados.

**Figura 60 – Sólidos confeccionados por alunos**



Fonte: Autor, 2013.

**Figura 61 – Sólidos confeccionados pelos alunos**



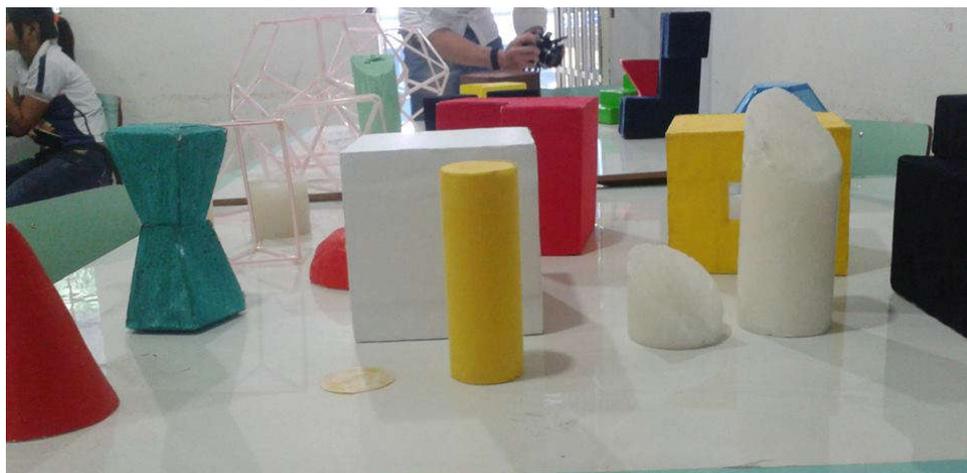
Fonte: Autor, 2013

**Figura 62 – Sólidos confeccionados pelos alunos**



Fonte: Autor, 2013

**Figura 63 – Sólidos confeccionados pelos alunos**



Fonte: Autor, 2013

#### **ATIVIDADE 4:**

##### **Contato do grupo com o sólido inserido na caixa**

Após a divisão da turma em grupos, sem que o aluno tivesse contato com o sólido inserido na caixa, cada grupo, ordenadamente manipulava o sólido e procurava interpretar o formato dele mentalmente.

**Figura 64 – Grupo de alunos manipulando o sólido**



Fonte: Autor, 2013

**Figura 65 – Grupo de alunos manipulando o sólido**



Fonte: Autor, 2013

**Figura 66 – Grupo de alunos manipulando o sólido**



Fonte: Autor, 2013

**Figura 67 – Grupo de alunos manipulando o sólido**



Fonte: Autor, 2013

**Figura 68 – Grupo de alunos manipulando o sólido**



Fonte: Autor, 2013

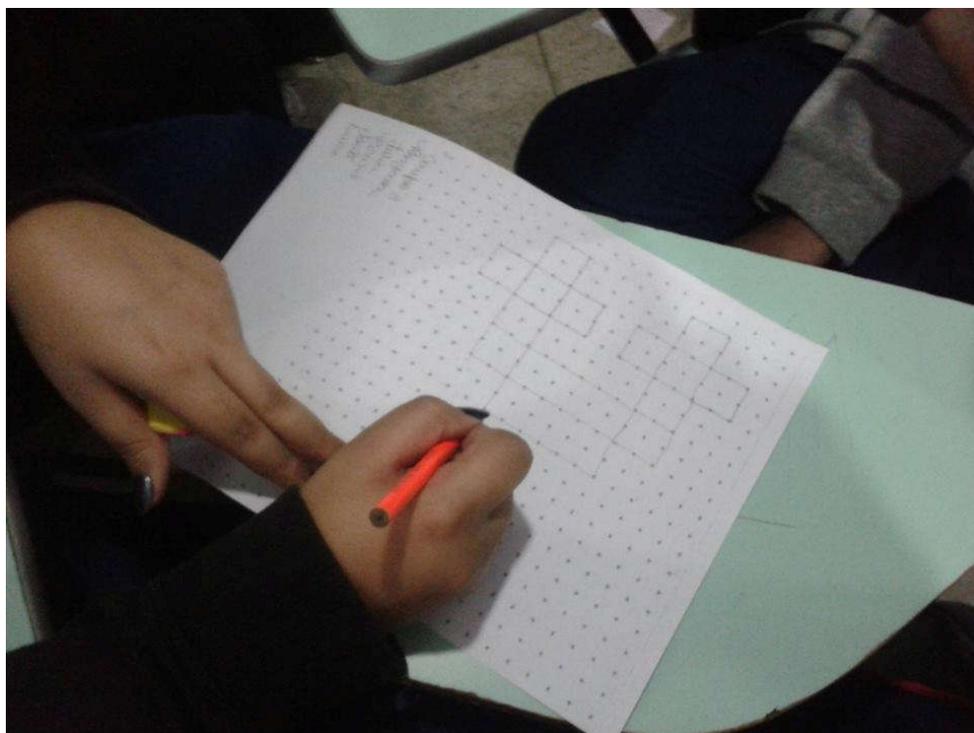
**ATIVIDADE 5:****Trabalhando em equipe: discussão**

Após cada equipe manipular o sólido da caixa, todos voltavam a seus respectivos lugares e iniciavam uma salutar discussão sobre o verdadeiro formato do sólido manipulado.

Ficou evidenciada, nesta atividade, a importância do trabalho em grupo, tendo em vista o valor agregado que pode ser extraído das discussões.

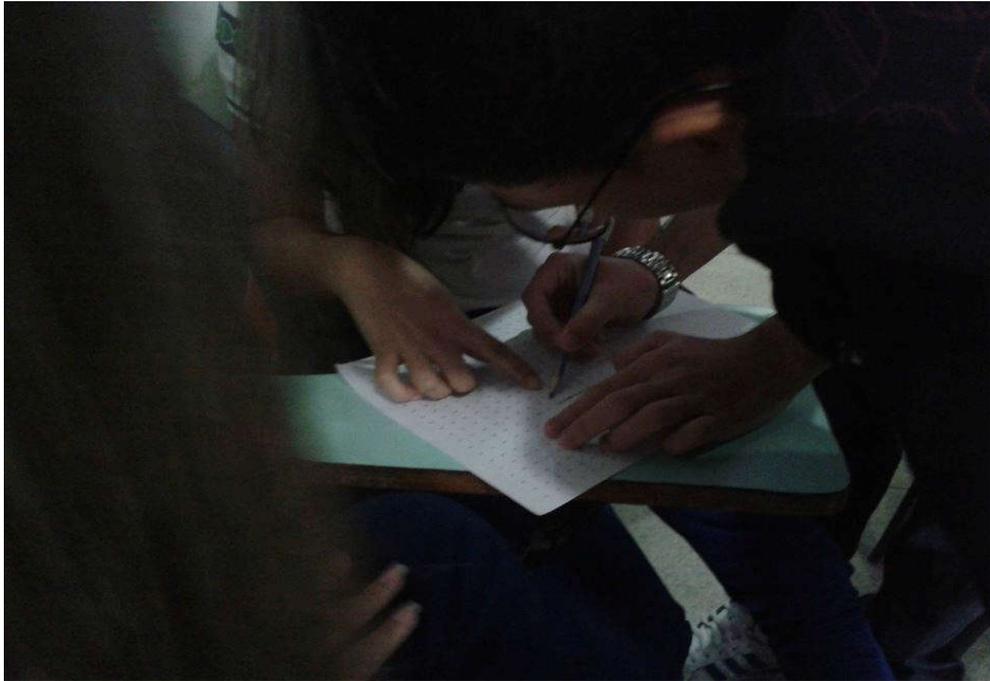
Após definido o formato do referido sólido, os alunos o representavam no papel, com auxílio de uma malha pontilhada, tanto a *perspectiva* quanto a *planificação* do referido sólido.

**Figura 69 – Auxílio da malha pontilhada**



Fonte: Autor, 2013

**Figura 70 – Auxílio da malha pontilhada**



Fonte: Autor, 2013

**Figura 71 – Debate entre os componentes do grupo**



Fonte: Autor, 2013

**Figura 72 – Debate entre os componentes do grupo**



Fonte: Autor, 2013

#### **ATIVIDADE 6:**

#### **REPRESENTAÇÃO DO SÓLIDO NA LOUSA**

Após um consenso quanto ao formato e representação no papel do sólido manipulado, o grupo compartilhou a ideia com os demais alunos da turma, expondo na lousa, a perspectiva bem como a planificação do poliedro. Projetamos na lousa uma malha pontilhada ampliada para que todos pudessem observar os desenhos de maneira satisfatória.

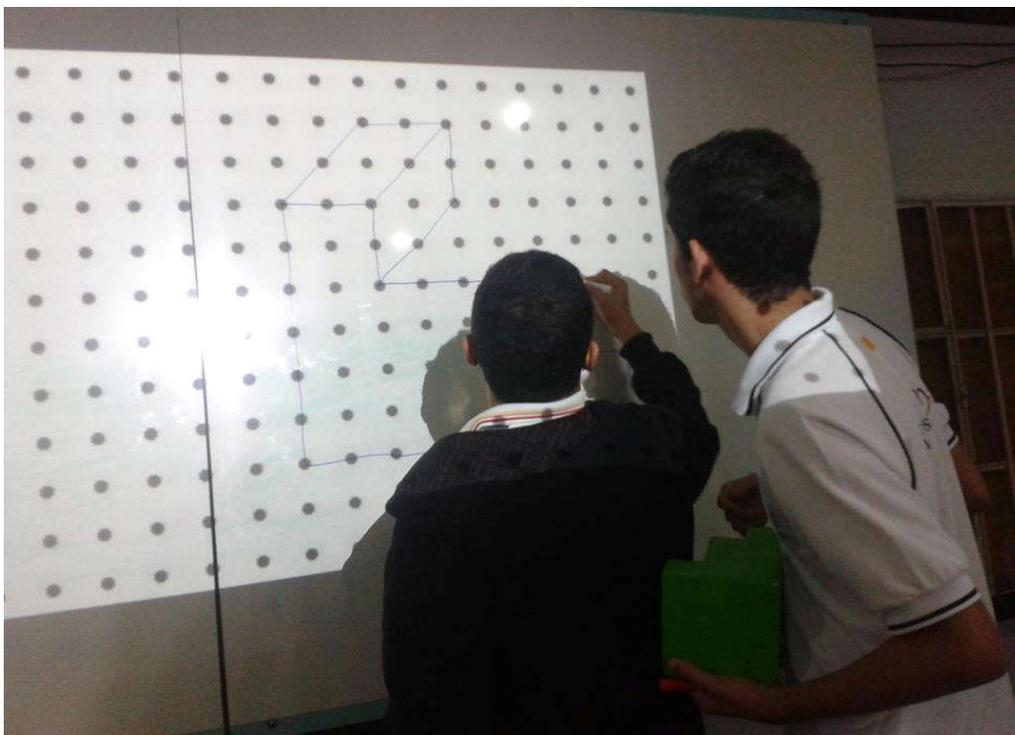
Ratificamos a necessidade, tanto do auxílio da malha pontilhada quanto de uma explanação prévia de tipos de perspectivas, salientando que a perspectiva isométrica foi a mais viável na aplicação do trabalho, por ser a mais simplificada.

**Figura 73 – Alunos representando os sólidos na lousa**



Fonte: Autor, 2013.

**Figura 74 – Alunos representando os sólidos na lousa**



Fonte: Autor, 2013.

**Figura 75 – Alunos representando os sólidos na lousa**



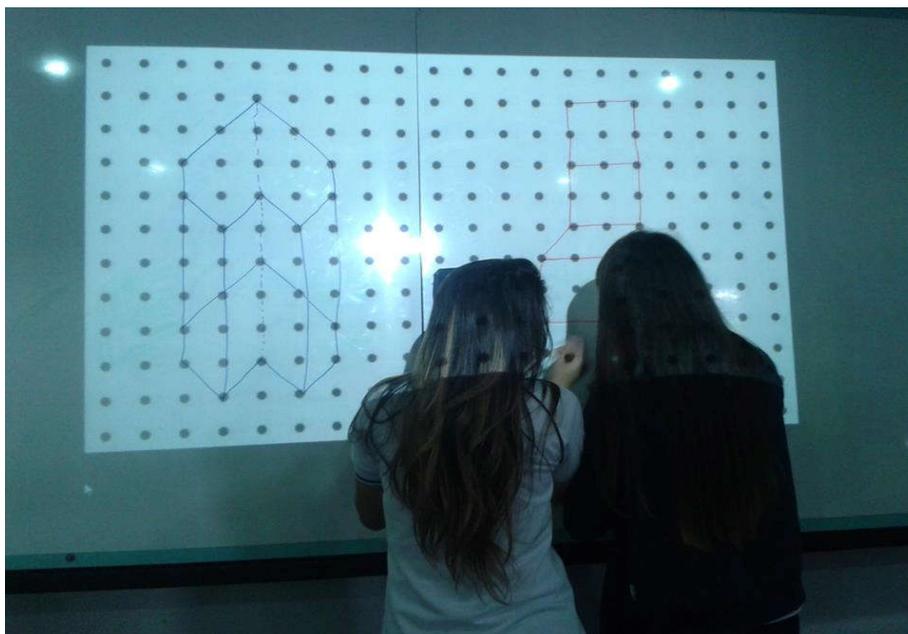
Fonte: Autor, 2013.

**Figura 76 – Alunos representando os sólidos na lousa**



Fonte: Autor, 2013

**Figura 77 – Alunos representando os sólidos na lousa**



Fonte: Autor. 2013

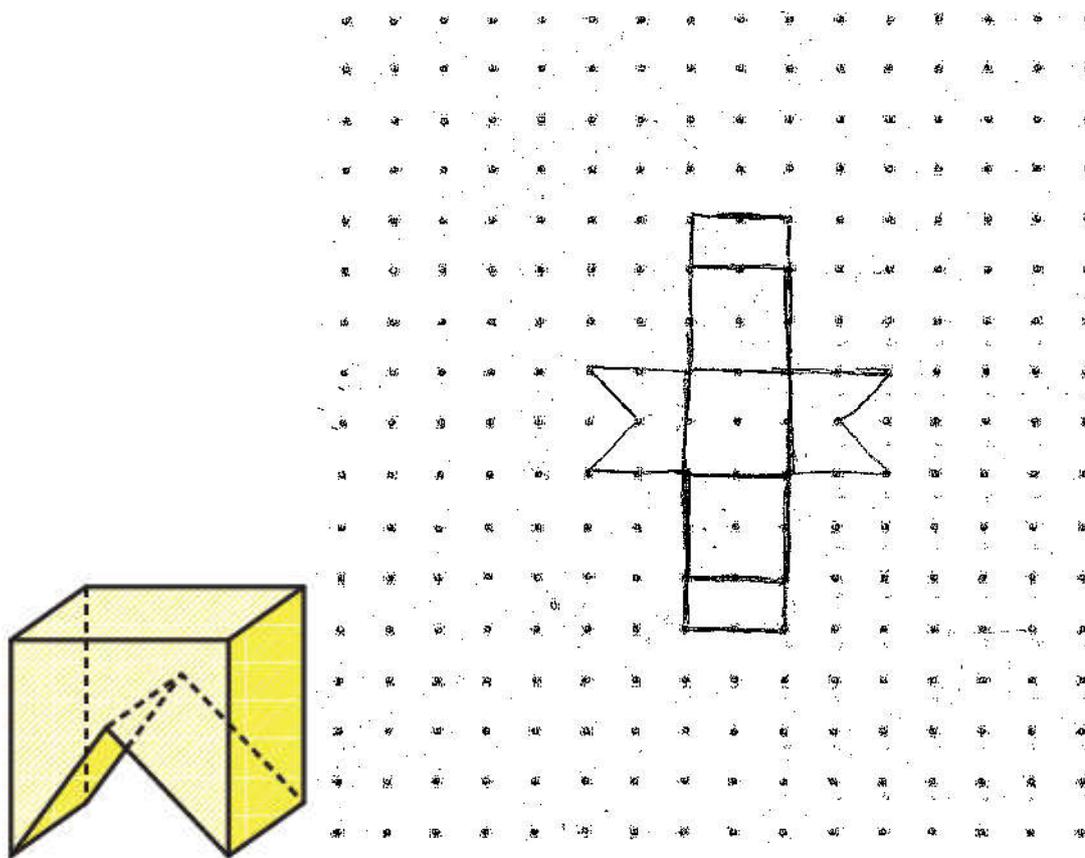
#### **4.2 - Resultados parciais**

Dentre os resultados (parciais), podemos destacar alguns aspectos que sobressaíram quando da aplicação do projeto. Percebemos que, no geral, os alunos têm percepção tridimensional, contudo, a falta de senso de proporcionalidade entre as arestas dos sólidos contribuíram para alguns desenhos defeituosos. A atração pelo desenho também foi observada. Até mesmo a ausência do desenho como disciplina ordinária na matriz curricular do ensino médio foi questionada.

Abaixo seguem algumas representações dos sólidos em perspectivas e planificados.

Nas planificações, os alunos não encontraram muita dificuldade. Em algumas representações, ficou constatada a perfeita visualização do sólido, sendo que, em alguns casos, os alunos recortavam a figura e tentavam montar para realmente constatar se aquela planificação correspondia ao sólido manipulado. Comparando ao sólido proposto temos algumas planificações e perspectivas

Figura 78 – Sólido a ser representado e sua planificação.

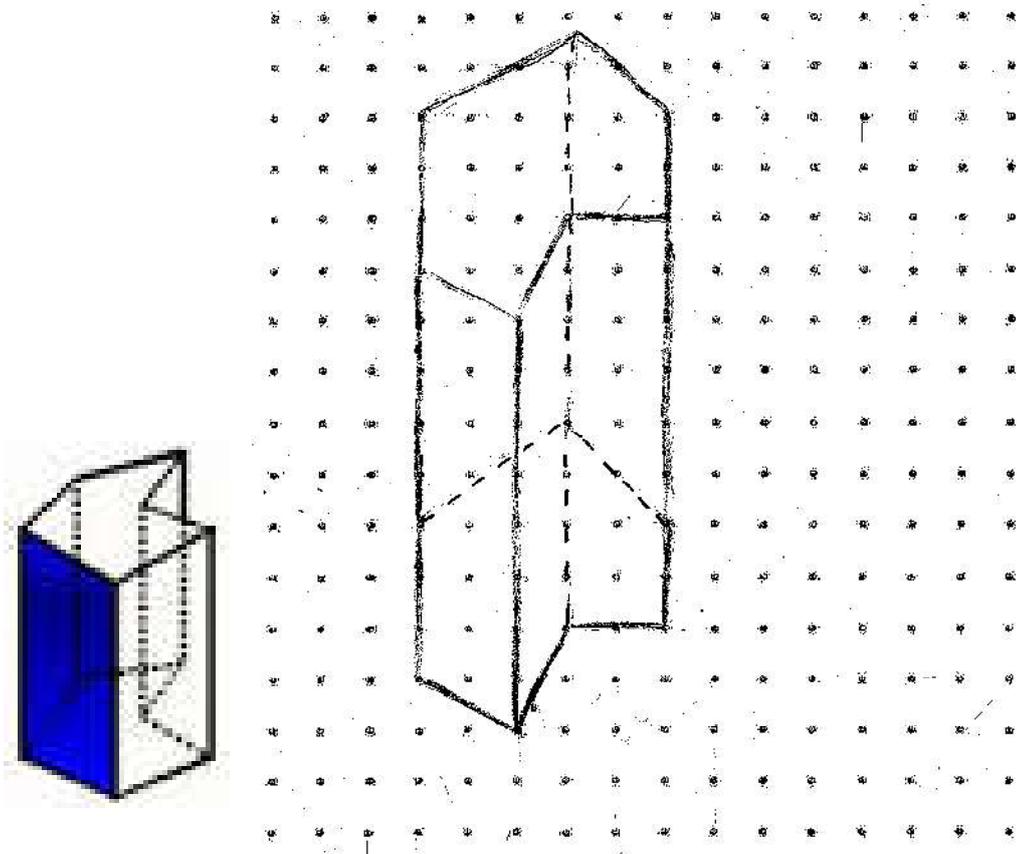


Fonte: Autor, 2013.

Já na representação dos sólidos em perspectiva, constatamos além da habilidade no desenho de alguns alunos a proporcionalidade das arestas quando liberávamos o sólido para auxiliar o desenho na lousa. Foi observada até mesmo a dispensa do auxílio da malha pontilhada na execução de algumas perspectivas haja vista a habilidade de alunos com o desenho geométrico.

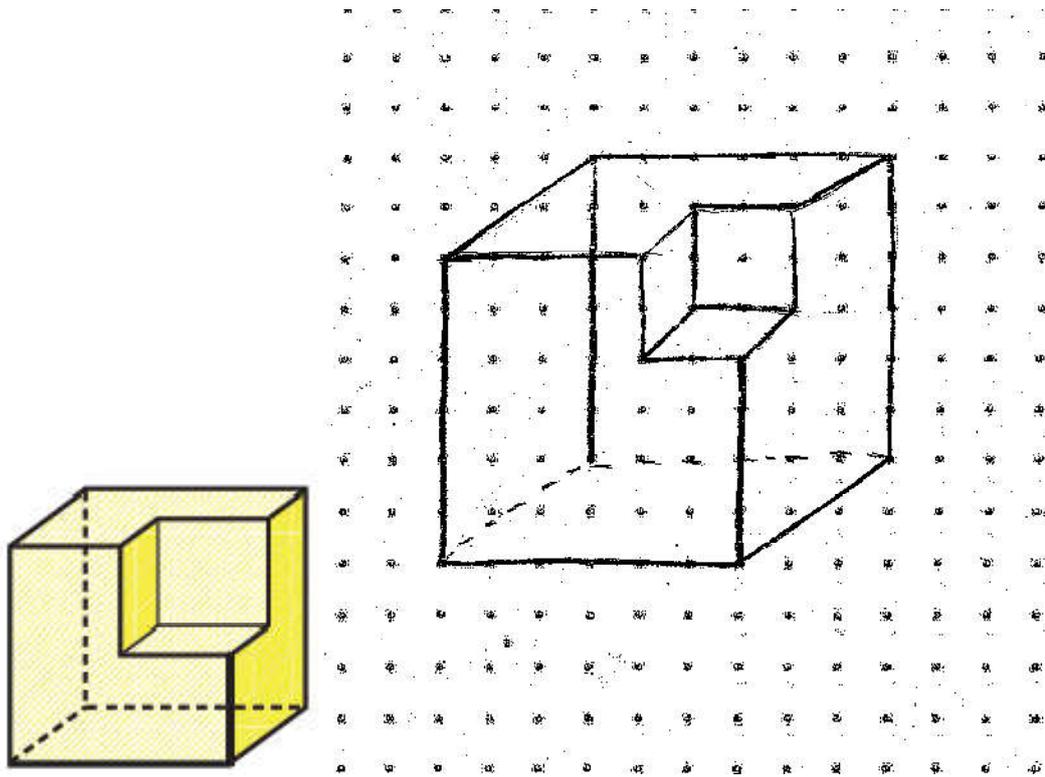
Verificamos também que, em algumas desenhos, o critério de representar com linha tracejada arestas que não estão em primeiro plano de visualização foi considerado.

Figura 79 - Sólido a ser representado e sua perspectiva.



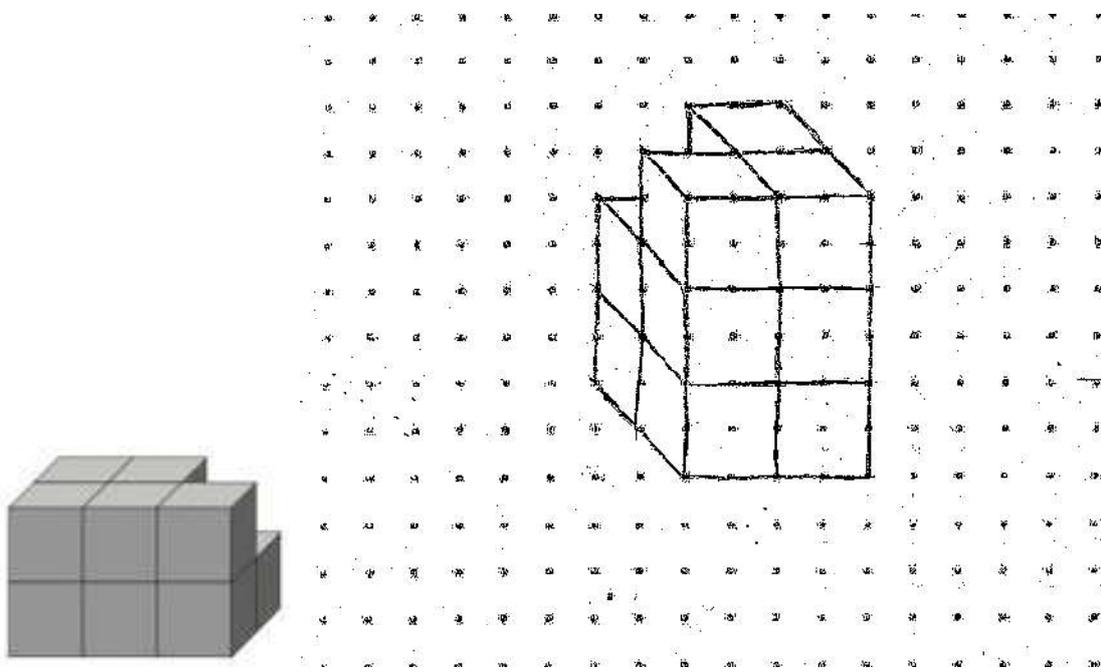
Fonte: Autor, 2013

Figura 80 - Sólido a ser representado e sua perspectiva



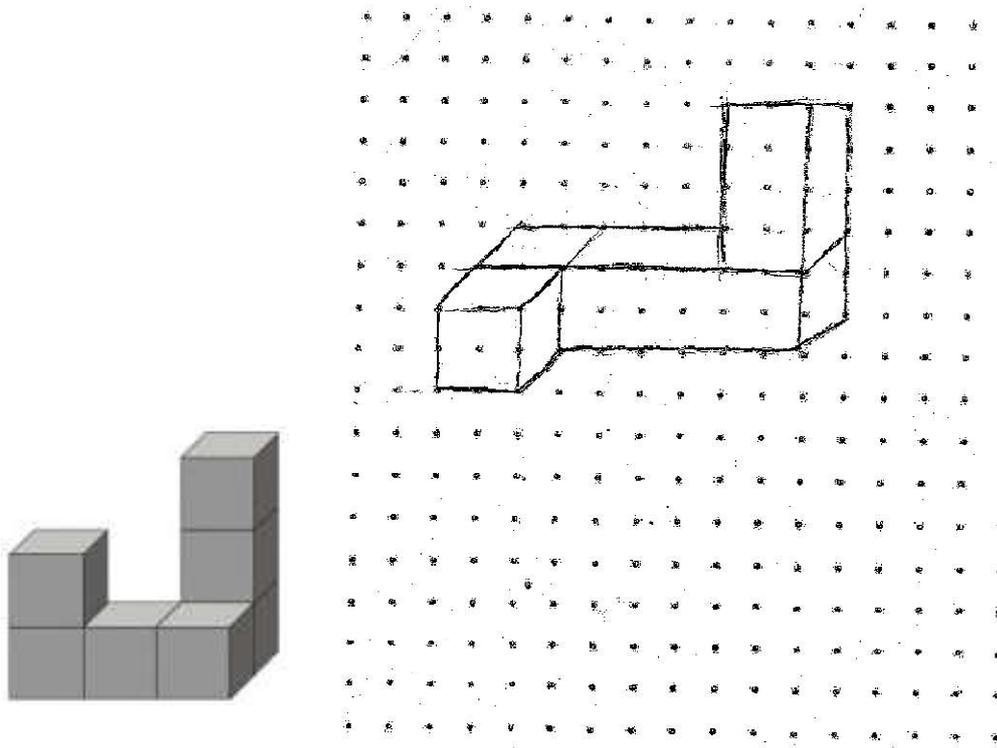
Fonte: Autor, 2013

Figura 81 - Sólido a ser representado e sua perspectiva



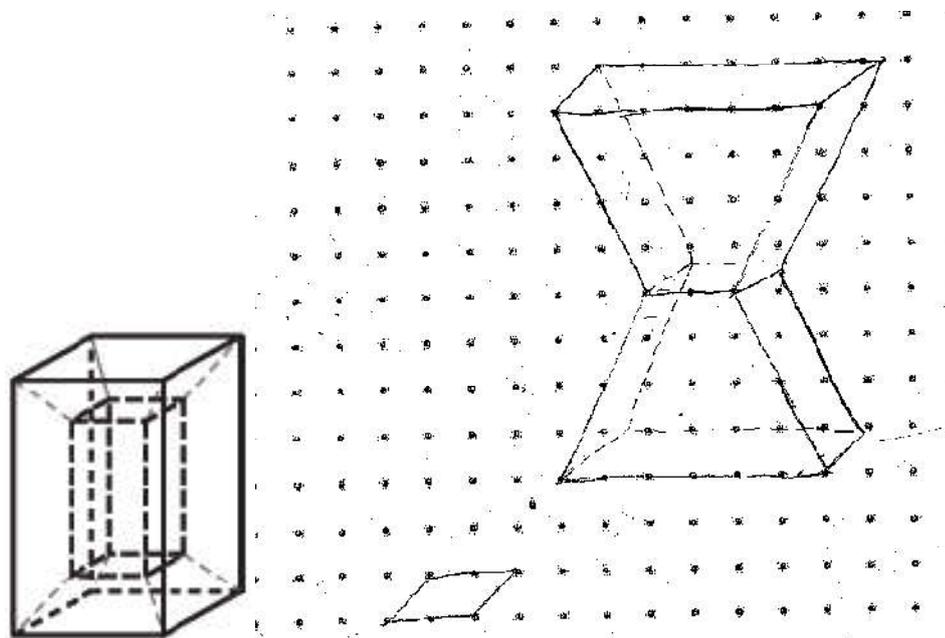
Fonte: Autor, 2013

**Figura 82 - Sólido a ser representado e sua perspectiva**



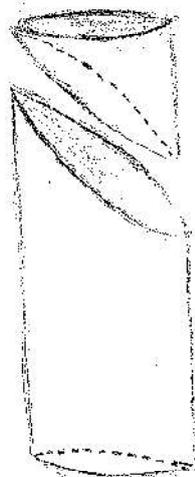
Fonte: Autor, 2013

**Figura 83 - Sólido a ser representado e sua perspectiva**



Fonte: Autor, 2013.

**Figura 84 – Perspectiva de um cilindro seccionado (aluno dispensou o auxílio da malha pontilhada)**



Fonte: Autor, 2013

Quando desafiados a executarem as tarefas propostas, os alunos buscam a maior diversidade de estratégias possíveis. Por exemplo: manipular o sólido de forma a medir suas arestas com palmos da mão, imaginar os sólidos a partir da composição de cubos, numerar as faces dos sólidos para auxiliar a planificação, etc.

Ou seja, quando os alunos criam estratégias para resolver um problema, estão adaptando esse problema num campo de conceitos no qual se pode encontrar a solução.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitas evidências afirmam que a Geometria pode e é encontrada nas coisas mais comuns e rotineiras do nosso cotidiano, estrelando como atriz principal nas mais diversas atividades e ocasiões de nossas vidas.

O que fazemos, nós professores, em muitas ocasiões, é ofuscar o brilho dessa ciência magnífica, impondo aos nossos alunos, cálculos e fórmulas mentais que, quanto mais difíceis forem de serem assimiladas, mais apreciadas por nós serão. E para o alunado, qual a beleza e motivação que se observa ao resolver cálculos analíticos e abstratos, sem perceber suas utilidades e aplicações na vida real?

Quando sugerimos e enfatizamos uma concepção concreta das figuras geométricas, não estamos subjulgando a filosofia das abstrações. Pelo contrário, buscamos, através das experiências concretas uma base sólida para essas abstrações.

No ensino básico, os alunos devem trabalhar com modelos sólidos e com material visual tátil com construção de modelos, esboço e montagem de partes bem como atividade visual (*Deno, 1995*).

“Todo conceito novo deve ser iniciado a partir de experiência concreta e, só depois, dar lugar à abstração; daí retorna ao concreto e vice-versa”. (L. Bertalanffy).

Ao buscar alternativas para a solução dos problemas no ensino-aprendizagem, não basta trocarem-se os instrumentos. Uma aula não se torna moderna simplesmente por ser realizada com recursos do *Data Show*, nenhuma aula pode ser considerada tradicional apenas porque as anotações estão sendo feitas no quadro. O que a pesquisa revela é que no ensino de Matemática podem-se utilizar as tecnologias para favorecer a investigação, para aguçar questionamentos, para tornar aulas mais dinâmicas, para tornar os alunos mais construtores e menos receptores de conhecimento. Mostra também que a posição dos professores nessas aulas será, prioritariamente, de mediadores entre o que se deseja ensinar e o que se deseja aprender.

Para auxiliar o desenvolvimento do pensamento geométrico, é necessário que se proporcione um modo especial de raciocínio, não somente por meio de recursos tecnológicos avançados, mas também por meio da manipulação de materiais concretos, materiais simples, do cotidiano do aluno.

Neste trabalho, fortalece-se a ideia de que o fazer é mais significativo do que o ver ou o ouvir, enfraquecendo-se a crença de que a utilização desses recursos deve somente ser utilizada na aprendizagem inicial dos alunos.

O uso de materiais concretos e o desenvolvimento da habilidade visual proporciona diversas possibilidades de descobertas que os alunos podem obter como recurso na aprendizagem da Geometria, na prática da investigação Matemática e na valorização de suas experiências dentro do processo ensino-aprendizagem.

E, se conseguirmos prestar um pequeno serviço ao ensino, facilitando a aprendizagem das noções práticas de Geometria, teremos obtido o que tanto almejávamos.

## REFERÊNCIAS

- [1] Lima, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 3*, 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [2] MONTENEGRO, Gildo A.. *Geometria Descritiva*. Recife-PE: Blucher, 2004.
- [3] KALEFF, Ana Maria M.R.. *Entendendo Poliedros*, vol. 2, Rio de Janeiro: Universidade Fluminense, 1988
- [4] BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Educação Matemática*. São Paulo: Centauro, 1996
- [5] IEZZI, Gelson; Murakami, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar*, 3. ed. São Paulo: Atual, 1977.
- [6] BRASIL. Ministério da educação e cultura. *Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio. Volume 2: Ciência da natureza, matemática e tecnologia*. Brasília: MEC, 2006, p. 75, 76.
- [7] BRASIL. Ministério da Educação e cultura. *Matriz de referência para o ENEM*. Brasília: MEC/INEP, 2009. 148p.
- [8] D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: Da teoria à prática*. 4. Ed. Campinas: Papirus, 1998.
- [9] BRASIL. Ministério da educação e cultura. *Explorando o Ensino da Matemática*, volume 2. São Paulo: OBMEP. CIBEC/2010.
- [10] PAIS, Luis Carlos. *Ensinar e aprender matemática*. São Paulo: Autentica Editora, 1996.
- [11] Gutierrez, A. *Exploring the links between Van Hiele levels and 3-dimensional geometry*, Structural Topology vol. 18, p. 31-48. Disponível em: <<http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>> Acesso em 02 dez. 2012.