



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

CICERO TIARLOS NOGUEIRA CRUZ

**HIPERSUPERFÍCIES COM BORDO LIVRE E
RIGIDEZ DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS**

FORTALEZA

2015

CICERO TIARLOS NOGUEIRA CRUZ

HIPERSUPERFÍCIES COM BORDO LIVRE E
RIGIDEZ DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

C961h Cruz, Cícero Tiarlos Nogueira
Hipersuperfícies com bordo livre e rigidez de superfícies mínimas / Cícero Tiarlos Nogueira Cruz
– 2015.
56 f. : enc. ; 31 cm

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Geometria diferencial.
Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1. Geometria diferencial. 2. Curvatura escalar. 3. Invariante de Yamabe. I. Título.

CDD 516.36

HIPERSUPERFÍCIES COM BORDO LIVRE
E RIGIDEZ DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS

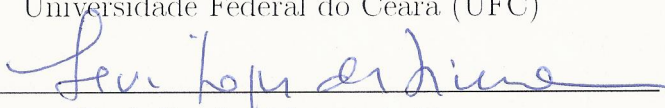
Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 27/ 02/2015.

BANCA EXAMINADORA



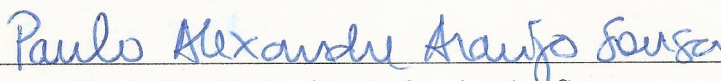
Prof. Dr. Abedenago Alves de Barros (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)



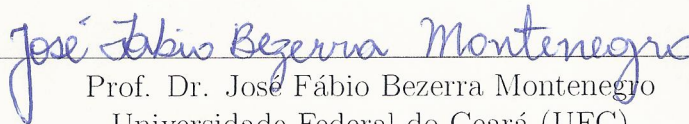
Prof. Dr. Levi Lopes de Lima
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa
Universidade Federal do Piauí (UFPI)



Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a minha família e a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter iluminado meu caminho nessa longa jornada acadêmica e por tornar tudo possível. Sempre serei grato a minha família por todas as experiências e ensinamentos que tive, sei que nesses anos de mestrado e doutorado estive um pouco distante, mas o apoio e força deles foi de fundamental importância para mim.

Agradeço profundamente ao Prof Abdênago Barros pela orientação e por sugerir um tópico tão estimulante para estudo. Minha sincera gratidão ao Prof. Levi Lopes de Lima pelos conselhos e suporte acadêmico a partir do meio do meu doutorado, principalmente por me deixar participar do seu grupo de seminários, donde sei que me beneficiei muito.

Aos professores Gregório Pacelli, Levi Lopes de Lima, Paulo Alexandre Araújo de Sousa e Fábio Montenegro pelas sugestões dadas e pela disponibilidade para participarem da banca examinadora.

Aos colegas da PGMAT pela ajuda direta ou indiretamente, inclusive pelos inúmeros cafezinhos.

Aos funcionários do departamento de matemática, em especial a Andrea pela prestatividade e agilidade.

À CAPES e o CNPQ pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

O barco seguro nunca vai muito longe da
margem.”

Dale Carnegie

RESUMO

Nesta tese, provamos estimativas para o volume e área do bordo de hipersuperfícies estáveis Σ^{n-1} com invariante de Yamabe não positivo satisfazendo à condição de bordo livre em uma variedade Riemanniana de dimensão n com limitação na curvatura escalar e curvatura média do bordo. Supondo ainda que Σ é localmente minimizante de volume em uma variedade M com curvatura escalar limitada inferiormente por uma constante não positiva, concluimos que localmente M divide-se ao longo Σ como $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$, para algum $\varepsilon > 0$. No caso em que Σ localmente minimiza um funcional adequado inspirado pelo trabalho de Yau (2001), uma vizinhança de Σ em M é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + e^{2t}g)$, onde g é Ricci plana. Na segunda parte, estudamos outro fenômeno de rigidez pela curvatura escalar adaptando a técnica desenvolvida por Máximo e Nunes (2013) para mostrar um resultado local de rigidez para uma variedade Riemanniana tridimensional M^3 cuja curvatura escalar é limitada inferiormente por um constante negativa. Provamos o seguinte resultado: Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície mínima estritamente estável que localmente maximiza a massa Hawking em M . Então M perto de Σ é um pedaço de um dos espaços de Kottler.

Palavras-chave: Curvatura escalar. Estabilidade. Invariante de Yamabe. Hipersuperfícies com bordo livre. Rigidez. Folheações CMC.

ABSTRACT

In this thesis, we prove estimates for the volume and boundary area of stable hypersurfaces Σ^{n-1} with nonpositive Yamabe invariant satisfying the free boundary condition in a Riemannian manifold M^n with bounds for the scalar curvature and the mean curvature of the boundary. Assuming further that Σ is locally volume-minimizing in a manifold M with scalar curvature bounded below by a nonpositive constant, we conclude that locally M splits along Σ as $-(\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$, for some $\varepsilon > 0$. In the case that Σ locally minimizes a certain functional inspired by the work of Yau (2001), a neighborhood of Σ in M is isometric to $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + e^{2t}g)$, where g is Ricci flat. In the second part, we study other scalar curvature rigidity phenomena adapting a technique developed by Máximo e Nunes (2013) to show a local rigidity result for three-dimensional Riemannian manifold M^3 whose scalar curvature is bounded from below by a negative constant. We prove the following result: Let $\Sigma^2 \subset M^3$ be a stable minimal surface which locally maximizes the Hawking mass on M . Then M near Σ is a piece of one the Kottler space.

Keywords: Scalar curvature. Stability. Yamabe invariant. Free boundary hypersurfaces. Rigidity. CMC foliations.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	NOÇÕES PRELIMINARES	16
2.1	Notações e Hipersuperfícies com bordo Livre	16
2.2	Discutindo sobre o Problema de Yamabe com bordo	19
2.3	Invariante de Yamabe	21
3	RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES COM BORDO LIVRE .	22
3.1	Estimativas para hipersuperfícies com bordo livre	22
3.2	Rigidez infinitesimal	25
3.3	Folheação local por hipersuperfícies cmc com bordo livre . . .	27
3.4	Comparação de volume e rigidez local	30
3.5	Prova do Teorema B	33
4	MASSA DE HAWKING E RIGIDEZ	36
4.1	Espaço de Kottler	36
4.2	Massa de Hawking e caracterização de seus pontos críticos . .	37
4.3	Massa de Hawking e Rigidez de superfícies mínimas	39
4.4	Observações pertinentes	44
5	FÓRMULAS DE VARIAÇÃO PARA A MASSA DE HAWKING	46
6	CONCLUSÃO	52
	REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

Recentemente, resultados de rigidez envolvendo a curvatura escalar têm sido largamente estudado uma vez que tais problemas são motivados pela teoria de relatividade geral e tem conexões profundas com a teoria de superfícies mínimas. Em dimensão três, por exemplo, diversos tipos de teoremas de rigidez foram estabelecidos supondo a existência de superfícies minimizante de área de algum tipo em variedades tridimensionais.

Um resultado devido a Schoen e Yau (1979a) garante que qualquer superfície que minimize área em uma variedade Riemanniana de dimensão três com curvatura escalar positiva é homeomorfa a \mathbb{S}^2 ou \mathbb{RP}^2 . O que motivou o estudo da rigidez de planos projetivos minimizantes de área em Bray *et al.* (2010) e de esferas minimizantes de área em Bray, Brendle e Neves (2010). No mesmo contexto, Cai e Galloway (2000) provaram que uma três-variedade com curvatura escalar não-negativa é plana em uma vizinhança de um dois-toro mergulhado com dois lados minimizante de área. Para o caso de superfícies com genus $g(\Sigma) > 1$, Nunes (2013) obteve um interessante resultado de rigidez para superfícies mínimas hiperbólicas em três-variedades com curvatura escalar limitada por uma constante negativa. Não podemos nos furtar de comentar o ponto de vista unificado com provas alternativas para alguns dos casos apresentados acima considerados por Micallef e Moraru (2011). O leitor interessado numa boa referência e mais detalhes sobre estes e outros resultados de rigidez, indicamos a consulta de Brendle (2010).

Cai (2002) mostrou uma decomposição local de uma variedade n -dimensional, $n \geq 4$, com curvatura escalar não-negativa contendo uma hipersuperfície minimizante de volume que não admite uma métrica de curvatura escalar positiva. Ainda nesta direção, Moraru (2013) provou uma extensão natural do resultado de rigidez provado por Nunes (2013).

No Capítulo 3 vamos estudar a rigidez de hipersuperfícies com bordo e diremos que uma variedade M tem bordo médio convexo se ∂M tem curvatura média não negativa em quase todo ponto. Salientamos que a geometria do bordo, tal como sua convexidade, e a limitação na curvatura escalar no interior da variedade podem influenciar decisivamente na geometria da variedade ambiente por meio da segunda variação de área. Evidenciando tal conexão, muito recentemente, Ambrósio (2014b) apresentou o seguinte resultado.

Teorema 1.1 (Ambrósio-2014). *Seja M uma variedade Riemanniana tridimensional com bordo médio convexo ∂M e curvatura escalar R^M limitada inferiormente. Se $\Sigma \subset M$ é uma superfície com bordo livre propriamente mergulhada, com dois lados, minimizante de área, então*

$$\frac{1}{2} \inf R^M \text{Area}(\Sigma) + \inf H^{\partial M} L(\partial\Sigma) \leq 2\pi\chi(\Sigma),$$

onde $\text{Area}(\Sigma)$ e $L(\partial\Sigma)$ denotam, respectivamente, a área e o comprimento do bordo de Σ na métrica induzida e $H^{\partial M}$ denota a curvatura média de ∂M .

Assuma que vale a igualdade e que alguma das seguintes hipóteses abaixo ocorrem.

- i) Cada componente de $\partial\Sigma$ é localmente minimizante de comprimento em ∂M ou ;
- ii) $\inf H^{\partial M} = 0$.

Então existe uma vizinhança de Σ em M que é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g)$, onde (Σ, g) tem curvatura gaussiana constante igual a $\frac{1}{2} \inf R^M$ e $\partial\Sigma$ tem curvatura geodésica constante igual a $\inf_M H^{\partial M}$ em Σ .

Além disso, quando a curvatura escalar é limitada por uma constante negativa, Ambrósio apresentou um resultado de rigidez para soluções do problema de Plateau em certas curvas homotopicamente não-triviais com bordo minimizante de comprimento em M .

Antes de enunciarmos o primeiro resultado de nossa tese, denotaremos por $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$ e $\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)$ os invariantes de Yamabe para variedades com bordo (veja Capítulo 2 para definição).

Teorema A. *Seja M^n uma variedade Riemanniana ($n \geq 4$) com bordo médio convexo ∂M tal que a curvatura escalar R^M é limitada inferiormente. Seja Σ^{n-1} uma hipersuperfície com bordo livre compacta, com dois lados, propriamente mergulhada que localmente minimiza o volume.*

I) Se $\inf R^M < 0$ e $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$, então

$$\text{vol}(\Sigma) \geq \left(\frac{\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R^M} \right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (1)$$

Admita ainda que se a igualdade vale, então uma vizinhança de Σ é isométrica ao produto $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ para algum $\varepsilon > 0$, com a métrica $dt^2 + g$, onde g é a métrica induzida em Σ que é Einstein e tem curvatura escalar negativa (de fato, igual a $\inf R^M$) e $\partial\Sigma$ é uma superfície mínima com respeito a métrica induzida.

II) Se $R^M \geq 0$ e $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq 0$, então em uma vizinhança de Σ é isométrica a métrica produto $dt^2 + g$ em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ para algum $\varepsilon > 0$, onde g é a métrica induzida em Σ que é Ricci-plana e $\partial\Sigma$ é uma hipersuperfície mínima com respeito a métrica induzida.

Convém descrever sucintamente as etapas da prova do teorema enunciado acima que consiste na construção de uma família a um-parâmetro de hipersuperfícies com curvatura média constante e bordo livre propriamente mergulhadas, o que junto com a existência da solução do problema Yamabe para variedades compactas com bordo, implica que cada hipersuperfície nesta tal folheação tem o mesmo volume (Para esta comparação de volume, adaptamos a técnica desenvolvida por Moraru (2013)). A partir disso, estaremos aptos a exibir uma isometria de $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ em uma vizinhança de Σ para algum $\varepsilon > 0$.

Nosso próximo resultado de rigidez dá uma contribuição a teoria provando extensões apropriadas do seguinte resultado devido a Yau (2001).

Teorema 1.2 (Yau). *Seja M uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar $R^M \geq -\frac{3}{2}c^2$ e uma das componentes de ∂M é uma superfície orientável incompressível¹ com característica de Euler não-positiva e curvatura média maior igual a c . Assuma que para qualquer bola B em M , $\text{Area}(\partial B) \geq \text{Vol}(B)$. Então M é isométrica ao produto torcido de um toro flat com a reta real.*

Seja $f : \Sigma \rightarrow M$ um mergulho e considere uma variação normal suave de Σ dada pelas aplicações $\tilde{f}(t, \cdot) : \Sigma \rightarrow M$, $\varepsilon > 0$, tal que $\tilde{f}(t, \partial\Sigma)$ é mergulhada para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\tilde{f}(t, \partial\Sigma)$ está contido em ∂M e $\tilde{f}(0, \cdot) = f$. Para cada f associamos a uma função $\mathcal{V} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{V}(t) = \int_{[0,t] \times \Sigma} \tilde{f}^* d\eta, \quad (2)$$

onde $d\eta$ é o elemento de volume canônico em M . A função \mathcal{V} mede o volume² entre $f(0, \cdot)$ e $f(t, \cdot)$. Nosso próximo resultado é o seguinte.

Teorema B. *Seja M uma variedade Riemanniana n -dimensional com curvatura escalar $R^M \geq -n(n-1)$ e bordo médio convexo. Assuma que M contém uma hipersuperfície Σ com bordo livre, propriamente mergulhada, compacta, com dois lados tal que $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq 0$. Se Σ localmente minimiza o funcional $\text{vol}(\Sigma) - (n-1)\mathcal{V}(0)$, então Σ tem uma vizinhança em M a qual é isométrica a $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$, com a métrica torcida $dt^2 + e^{-2t}g$ que é Ricci-plana, onde g é a métrica induzida em Σ e $\partial\Sigma$ é mínima com respeito a métrica induzida.*

A teoria de superfícies mínimas pode ser utilizada para constriuir indutivamente uma longa classe de variedades compactas que não podem ser munidas de métricas de curvatura escalar positiva a partir do estudo de suas obstruções topoógicas. Este tipo argumento foi usado para resolver um problema precursor ao tão conhecido Teorema da Massa Positiva em relatividade geral. Antes de enunciá-lo precisamos definir o seguinte: uma variedade Riemanniana (N, g) de dimensão 3 é assintoticamente plana (AP) se existe um compacto $\Omega \subset N$ tal que $N \setminus \Omega$ é difeomorfa a $\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$, onde a métrica g satisfaz certas condições de decaimento:

$$\begin{aligned} \|g_{ij}(x) - \delta_{ij}\| &\leq C\|x\|^{-1}, \\ \|\partial_k g_{ij}(x)\| &\leq C\|x\|^{-2}, \\ \|\partial_k \partial_l g_{ij}(x)\| &\leq C\|x\|^{-3}, \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva. Ademais, exigimos que $\int_N \|R^N\| dV < +\infty$. É impor-

¹Uma superfície Σ é incompressível em uma três-variedades M se $i_* : \pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(M)$ é injetiva.

²Pelo Teorema de Stokes:

$$\mathcal{V}(t) = \int_{[0,t] \times \Sigma} \tilde{f}^* d\eta = \int_{[0,t] \times \Sigma} d\tilde{f}^*(\eta) = \int_{\Sigma} \tilde{f}(t, \cdot)^*(\eta) - \int_{\Sigma} f^*(\eta).$$

tante ressaltar que variedades AP são de grande interesse em problemas de relatividade geral.

A *massa ADM*, denotada por m_{ADM} , de uma variedade tridimensional assintoticamente plana, conceito estabelecido por Arnowitt, Deser e Misner (1961), é dada por

$$m_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{S_r} \sum_{ij} (\partial_j g_{ij}(x) \nu_i - \partial_i g_{jj} \nu_i) d\sigma_r,$$

onde S_r é a esfera coordenada de raio r , ν é a normal unitária de S_r e $d\sigma_r$ é o elemento de volume induzido pela métrica euclidiana. Uma observação a se fazer é que o limite existe e a quantidade m_{ADM} independe da escolha de coordenadas admissíveis (veja em Bartnik (1986)).

O Teorema de Massa Positiva cujo enunciado afirma que uma variedade AP de dimensão $n \leq 7$ com curvatura escalar não-negativa tem massa ADM não negativa e, a menos de N ser isométrica ao espaço euclidiano \mathbb{R}^n , m_{ADM} é estritamente positiva. Tal importante resultado fora provado por Schoen e Yau (1979b) para $3 \leq n \leq 7$ usando técnicas de superfícies mínimas e mais tarde por Witten (1981) para dimensão qualquer usando spinors e equações de Dirac.

O comportamento da métrica coloca restrições para a geometria do interior, o Teorema da Massa Positiva implica, por exemplo, no seguinte resultado de rigidez.

Teorema 1.3 (Miao-(2002)). *Seja $(\Sigma^n, g) \subset \mathbb{R}^n$ a variedade com bordo não-vazio com curvatura escalar não-negativa tal que $\partial\Sigma$ é isométrico a \mathbb{S}^{n-1} e tem curvatura média limitada inferiormente por $n-1$. Então g é isométrica a métrica da bola unitária euclidiana.*

Observação 1.1. *Em relação a deformabilidade (ou flexibilidade), temos, por exemplo, o impressionante contra-exemplo dado à conjectura de Min-Oo, que fazendo analogia ao Teorema da Massa Positiva, pressupunha que uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $R^M \geq n(n-1)$ e bordo isométrico a \mathbb{S}^{n-1} teria que ser isométrico ao hemisfério \mathbb{S}_+^{n-1} com a métrica usual. Tal contra-exemplo fora dado por Brendle, Marques e Neves (2011). Sabe-se que esta afirmação de rigidez é verificada apenas para $n=2$, em Toponogov (1959), e certos casos especiais. Vale ainda citar o resultado de Cruz, Lima e Montenegro (2014), fortemente relacionado ao de Brendle et al., onde deformações do espaço de Sitter-Schwarzschild de dimensão $n \geq 3$ foram exibidas.*

Outro interessante resultado de rigidez fora obtido por Máximo e Nunes (2013), utilizando da suposição da local maximalidade da *massa de Hawking* de uma superfície $\Sigma \subset M^3$, que denotaremos por $\mathfrak{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma)$ (Veja a definição no Capítulo 4). O fato fundamental que conecta a massa de Hawking e a massa ADM é que se $S_r(0)$ é uma esfera coordenada de raio r em uma carta coordenada AP, então

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathfrak{m}_{\mathcal{H}}(S_r) = m_{ADM}.$$

Enunciaremos abaixo o tal resultado de rigidez local para duas esferas devido a Máximo e Nunes.

Teorema 1.4 (Máximo, Nunes-2013). *Seja M uma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura escalar $R^M \geq 2$. Se $\Sigma^2 \subset M^3$ é uma esfera mínima estritamente estável mergulhada que localmente maximiza a massa de Hawking, então Σ tem métrica induzida g de curvatura gaussiana constante igual a $c > 1$, e uma vizinhança de Σ em M é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, g_{ss})$ para algum ε , onde g_{ss} é a métrica deSitter-Schwarzschild em $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$.*

Nosso próximo resultado diz respeito ao resultado do teorema acima, no contexto hiperbólico. Antes, iremos adotar a definição de variedades localmente assintoticamente hiperbólica (LAH) dada por Lee e Neves (2013):

Definição 1.1. *Dizemos que uma C^i -métrica Riemanniana g em uma variedade suave M^3 é C^i localmente assintoticamente hiperbólicas se existe um conjunto compacto $K \subset M$ e uma superfície $(\widehat{\Sigma}, \widehat{g})$ de curvatura gaussiana constante \widehat{k} tal que $M \setminus K$ é difeomorfa a $(1, +\infty) \times \widehat{\Sigma}$ com a métrica*

$$g = \frac{d\ell^2}{\widehat{k} + \ell^2} + \ell^2 \widehat{g} + \frac{h}{\ell} + \mathfrak{e},$$

onde h é um 2-tensor simétrico C^i em $\widehat{\Sigma}$ dependendo de ℓ de tal maneira que existe uma função μ em $\widehat{\Sigma}$ tal que $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \text{tr}_{\widehat{g}} h = \mu$, onde a convergência é de classe C^i . Ademais, \mathfrak{e} é um 2-tensor em M simétrico tal que

$$\|\mathfrak{e}\|_b + \ell \|\overline{\nabla} \mathfrak{e}\|_b + \dots + \ell^i \|\overline{\nabla}^i \mathfrak{e}\|_b = o(\ell^{-3}),$$

em que b é a métrica hiperbólica $\frac{d\ell^2}{\widehat{k} + \ell^2} + \ell^2 \widehat{g}$ e $\overline{\nabla}$ é a derivada tomada com respeito a b .

No cenário acima, a massa é definida como

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{\text{Area}(\widehat{\Sigma})} \int_{\widehat{\Sigma}} \mu d\widehat{g}. \quad (3)$$

Observação 1.2. *No mesmo contexto, Wang (2001), Chruściel e Herzlich (2003) provaram um Teorema da Massa Positiva no sentido assintoticamente hiperbólico, onde agora a variedade M tem curvatura escalar $R^M \geq -6$ e sob certas condições, M pode ser isométrica ao espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 .*

No Capítulo 4, como já mencionado anteriormente, provaremos o similar do Teorema 1.4 em uma importante classe de variedades localmente assintoticamente hiperbólicas dadas pelas métricas de Kottler, representado nas variedades $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2, (g_{adss})_a)$, $(\mathbb{R} \times \widetilde{\Sigma}, \widetilde{g}_a)$ e $(\mathbb{R} \times \widehat{\Sigma}, g'_a)$, que serão definidas oportunamente no Capítulo 4.

Teorema C. *Sejam M^3 uma variedade Riemanniana com curvatura escalar limitada inferiormente por uma constante Λ e $\Sigma \subset M$ uma superfície mínima com dois lados com-*

pacta mergulhada estritamente estável tal que localmente maximiza a massa de Hawking. Então

$$(\lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda)Area(\Sigma) = 2\pi\chi(\Sigma), \quad (4)$$

Σ é totalmente geodésica, $R = \Lambda$ em Σ e $K_\Sigma = \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{Area(\Sigma)}$. Assumindo $\Lambda = -6$ e que uma das seguinte condições valem.

- (i) Se Σ é uma esfera, então Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a $\frac{1}{a^2}$ e uma vizinhança de Σ em M é isométrica a métrica Anti-de Sitter-Schwarzschild $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^2, (g_{adss})_a)$ para algum $\varepsilon > 0$.*
- (ii) Se Σ tem genus $g(\Sigma) \geq 2$, então Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a $-\frac{1}{a^2}$ para $a^2 > \frac{1}{3}$ e uma vizinhança de Σ em M é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \tilde{\Sigma}, \tilde{g}_a)$ para algum $\varepsilon > 0$, onde \tilde{g}_a é uma métrica de curvatura gaussiana constante -1 em $\tilde{\Sigma}$.*
- (iii) Se Σ tem genus $g(\Sigma) = 1$, então Σ tem curvatura Gaussiana constante igual a zero e uma vizinhança de Σ em M é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \hat{\Sigma}, g'_a)$ para algum $\varepsilon > 0$, onde g'_a é uma métrica flat em uma vizinhança em $\hat{\Sigma}$.*

Esta tese é organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos algumas ferramentas e noções fundamentais para o estudo nos demais capítulos. No Capítulo 3 obtemos algumas estimativas para hipersuperfícies com bordo livre e um teorema de decomposição local de hipersuperfícies com bordo médio convexo e curvatura escalar não negativa. No Capítulo 4, apresentamos os espaços de Kottler, caracterizamos seus pontos críticos e apresentamos um resultado de rigidez local envolvendo a massa de Hawking, cuja fórmulas de variação serão calculadas no Capítulo 5.

2 NOÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo, temos o objetivo de fixar a notação e a terminologia a ser usada, além de apresentar de forma sucinta uma introdução para o estudo de hipersuperfícies com bordo livre, além de alguns fatos pertinentes sobre o problema de Yamabe com bordo a serem utilizados no decorrer desta tese. Omitiremos as demonstrações neste capítulo, entretanto daremos todas as referências necessárias para um melhor aprofundamento do conteúdo ao leitor se assim ele desejar.

2.1 Notações e Hipersuperfícies com bordo Livre

Seja (M, g_M) uma variedade Riemanniana de dimensão n com bordo ∂M não vazio e conexão de Levi-Civita D que contenha uma hipersuperfície compacta propriamente imersa $\mathfrak{f} : \Sigma \rightarrow M$, ou seja, \mathfrak{f} é uma imersão e $\mathfrak{f}(\Sigma) \cap \partial M = \mathfrak{f}(\partial\Sigma)$.

Denote por \mathcal{R} o tensor curvatura Riemanniana de M dado por

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z,$$

em que X, Y e Z são campos de vetores em M e $[,]$ é o colchete de Lie, temos ainda que

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle \mathcal{R}(X, e_i)Y, e_i \rangle$$

denota o tensor de Ricci, onde $g_M = \langle , \rangle$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal arbitrária. Convenientemente, dizemos que uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável é dita ser Ricci-plana se a curvatura de Ricci é zero em todo os seus pontos. Definimos ainda a curvatura escalar como $R^M = \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i)$.

Expressamos a conexão induzida em Σ como

$$\nabla_X Y = (D_X Y)^T,$$

onde $(\cdot)^T$ é a projeção de um vetor no espaço tangente de Σ , com segunda forma fundamental h^Σ de Σ dada por

$$h^\Sigma(X, Y) = (\nabla_X Y)^\mathcal{N},$$

em que $(\cdot)^\mathcal{N}$ denota a componente ortonormal ao espaço tangente a Σ .

O vetor curvatura média de Σ em um ponto $p \in \Sigma$ é expressado como

$$\vec{H}(p) = \sum_{i=1}^{n-1} h^\Sigma(e_i, e_i),$$

onde agora $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de $T_p \Sigma$ com respeito a \mathfrak{f} .

Seja N um campo normal unitário ao longo de Σ em um ponto $p \in \Sigma$. A curvatura média de Σ em p com respeito a N é definida por

$$H(p) = -\langle \vec{H}(p), N(p) \rangle.$$

Dizemos ainda que uma hipersuperfície é CMC se sua curvatura média H é constante. Quando, em particular, $H \equiv 0$, então Σ é chamada de mínima. Hipersuperfícies mínimas em uma variedade Riemanniana são pontos críticos do problema variacional de minimização de volume, enquanto hipersuperfícies CMC também são soluções do mesmo problema variacional quando restrito as variações que preservam volume. Iremos definir o caso mínimo mais adiante.

Sejam X, Y, Z e W campos vetoriais em Σ . A fórmula abaixo expressa a relação entre a curvatura do ambiente M e de sua hipersuperfície Σ

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = \mathcal{R}^\Sigma(X, Y, Z, W) - \langle h^\Sigma(X, W), h^\Sigma(Y, Z) \rangle - \langle h^\Sigma(X, Z), h^\Sigma(Y, W) \rangle, \quad (5)$$

onde \mathcal{R}^Σ representa a curvatura riemanniana de Σ . Para futuras referências, tomando sucessivos traços em (5), obtemos a seguinte expressão:

$$\text{Ric}(N, N) = \frac{1}{2}(R^M - R_g + H^2 - \|h^\Sigma\|^2). \quad (6)$$

Definição 2.1. Dizemos que Σ tem bordo livre se Σ intersepta ∂M orthogonalmente ao longo de $\partial\Sigma$.

Note que se Σ tem bordo livre e W é um campo vetorial normal ao longo de Σ , então W é tangente a ∂M ao longo de Σ .

Uma variação de \mathfrak{f} é uma aplicação diferenciável $\tilde{\mathfrak{f}} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow M$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ com velocidade inicial

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathfrak{f}}(t, \cdot) \big|_{t=0} = X,$$

tal que $\tilde{\mathfrak{f}}(t, \cdot) : \Sigma \rightarrow M$ é uma imersão tal que $\tilde{\mathfrak{f}}((-\varepsilon, \varepsilon) \times \partial\Sigma)$ está contido em ∂M e $\tilde{\mathfrak{f}}(0, \cdot) = \mathfrak{f}$. É intuitivo pensar em t como o tempo ao longo do qual Σ evolui. Suponha que Σ tem *dois lados* no sentido que admite um campo vetorial normal unitário suave N definido globalmente em Σ , logo $X = \varphi N$, onde $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$. Uma vez que $\text{div}_\Sigma(X) = \text{div}(X^T) - \langle \vec{H}, X \rangle$, podemos deduzir facilmente a fórmula da primeira variação do volume:

$$\delta\Sigma(\varphi) = \frac{\partial}{\partial t} \text{vol}(\Sigma_t) \big|_{t=0} = \int_\Sigma H \varphi d\sigma + \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu \rangle d\sigma_{\partial\Sigma}, \quad (7)$$

onde $d\sigma$ e $d\sigma_{\partial\Sigma}$ são o elemento de volume e de área de Σ e $\partial\Sigma$, respectivamente.

Apartir de (7), Σ é ponto crítico do problema variacional se, e somente se, é

mínima e tem bordo livre.

Definimos agora o funcional $\mathcal{J} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{J}(t) = \text{vol}(\Sigma_t) - (n-1)\mathcal{V}(t).$$

Para uma variação normal Σ_t de Σ , o Lema 2.1(ii) de Barbosa, do Carmo e Eschenburg (1988) garante que

$$\mathcal{V}'(0) = \int_{\Sigma} \varphi d\sigma,$$

assim a fórmula da primeira variação do funcional \mathcal{J} é expressa da seguinte maneira:

$$\mathcal{J}'(0) = \int_{\Sigma} (H - (n-1))\varphi d\sigma + \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu \rangle d\sigma_{\partial\Sigma}. \quad (8)$$

Analogamente ao caso do funcional volume, Σ é crítico para tal problema variacional se, e somente se, $H = n-1$ e Σ tem bordo livre.

Sabemos que hipersuperfícies mínimas com bordo livre são pontos críticos para o funcional volume, a equação de estabilidade do problema variacional, que discutiremos melhor a seguir, é dado pela segunda derivada do funcional volume:

$$\delta^2\Sigma(\varphi, \varphi) = - \int_{\Sigma} \varphi \mathcal{L}\varphi d\sigma + \int_{\partial\Sigma} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \Pi(N, N)\varphi \right) \varphi d\sigma_{\partial\Sigma}, \quad (9)$$

onde Π denota a segunda forma fundamental de ∂M com relação ao vetor normal unitário que aponta para o interior e \mathcal{L} é um operador linear de segunda ordem conhecido como operador de Jacobi, às vezes chamado na literatura de operador de estabilidade, que está definido abaixo:

$$\mathcal{L} = \Delta_{\Sigma} + \text{Ric}(N, N) + \|h^{\Sigma}\|^2,$$

onde Δ_{Σ} é o Laplaciano na métrica induzida por \mathbf{f} .

Assumindo agora que Σ é crítico, a segunda fórmula de variação $\mathcal{J}''(0)$ coincide com $\delta^2\Sigma(\varphi, \varphi)$ (ver (Castro e Rosales, 2014, Proposição 3.5)). Recordando que o índice de uma hipersuperfície mínima é definido como a dimensão máxima de qualquer subespaço do $C^{\infty}(\Sigma)$ na qual $\delta^2\Sigma$ é negativo definitivo, o que grosseiramente falando, mede o número de direções independentes, em que a hipersuperfície falha ao minimizar o volume. Assim, uma hipersuperfície mínima com dois lados Σ é estável se, e somente se, $\delta^2\Sigma(\varphi, \varphi) \geq 0$ para todo $\varphi \in C^{\infty}(\Sigma)$, ou, equivalentemente, o índice de Σ é igual a zero. Caso contrário, ela é dita instável. O seguinte resultado é consequência de (9).

Proposição 2.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta n -dimensional com bordo ∂M não-vazia. Suponha que M tem curvatura de Ricci não-negativa e ∂M estritamente convexo no que diz respeito à normal unitária interior, ou seja, existe uma*

constante $k > 0$ tal que $h^{\partial M}(u, u) \geq k > 0$ para qualquer vetor unitário tangente a ∂M .

Então, qualquer hipersuperfície Σ com bordo livre, propriamente imersa, mínima, suave e dois lados deve ser instável. Quando $n \leq 8$, isto implica que o $(n-1)$ -grupo de homologia relativa se anula: $H_{n-1}(M, \partial M) = 0$.

Demonstração. Veja Lema 2.1 em Fraser e Li (2014). \square

Definição 2.2. Dizemos que uma hipersuperfície compacta Σ é minimizante de volume se ela tiver o menor volume entre todas as hipersuperfícies homotópicas a Σ . Observe que isto equivale a dizer que Σ é mínima e estável. Similarmente, Σ é \mathcal{J} -estável quando $\mathcal{J}''(0) \geq 0$ para toda variação normal de Σ .

2.2 Discutindo sobre o Problema de Yamabe com bordo

O problema de Yamabe discute se qualquer métrica riemanniana g em uma variedade compacta suave M de dimensão no mínimo 3 é conforme a uma métrica de curvatura escalar constante. Tal problema pode ser encarado como um análogo do Teorema da Uniformização³ para dimensão $n \geq 3$. Resposta a tal questionamento apareceram nos trabalhos de Trudinger (1968), Aubin (1976) e Schoen (1984).

Considere uma variedade Riemanniana $(n-1)$ -dimensional ($n \geq 4$) Σ com bordo $\partial\Sigma$ não vazio. Para $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$, defina o seguinte funcional

$$Q_g^{a,b}(\varphi) = \frac{\int_{\Sigma} \left(\frac{4(n-2)}{n-3} \|\nabla \varphi\|_g^2 + R_g \varphi^2 \right) d\sigma + 2 \int_{\partial\Sigma} \kappa_g \varphi^2 d\sigma_{\partial\Sigma}}{\left(a \left(\int_{\Sigma} \varphi^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma \right) + b \left(\int_{\partial\Sigma} \varphi^{\frac{2(n-2)}{n-3}} d\sigma_{\partial\Sigma} \right)^{\frac{n-1}{n-2}} \right)^{\frac{n-3}{n-1}}}, \quad (10)$$

onde k_g denota a curvatura média de $\partial\Sigma$.

Existem dois modos de estender o problema de Yamabe para variedades com bordo, o primeiro é encontrar uma métrica $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-3}} g$ tal que sua curvatura escalar $R_{\tilde{g}}$ é constante igual a C e $\kappa_{\tilde{g}}$ é zero, o que equivale à existência de um ponto crítico para o funcional $Q_g^{1,0}(\varphi)$ para qualquer função positiva suave φ em Σ satisfazendo o problema abaixo

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma} \varphi - \frac{n-3}{4(n-2)} R_g \varphi + \frac{n-3}{4(n-2)} C \varphi^{\frac{n+1}{n-3}} = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{n-3}{2(n-2)} \kappa_g \varphi = 0 & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (11)$$

onde ν é o vetor normal que aponta para fora de $\partial\Sigma$. A segunda extensão natural é encontrar uma métrica conforme escalar-plana em Σ cujo bordo é uma hipersuperfície com curvatura média constante igual a K , que em termos analíticos, corresponde a encontrar

³O Teorema da uniformização garante que se M é uma superfície compacta equipada com métrica Riemanniana g_0 . Então existe uma métrica Riemanniana g em M conforme a g_0 com curvatura escalar constante

uma solução positiva para o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma}\varphi - \frac{n-3}{4(n-2)}R_g\varphi = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \frac{n-3}{2(n-2)}k_g\varphi = \frac{n-3}{2(n-2)}K\varphi^{\frac{n-1}{n-3}} & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (12)$$

Na próxima seção, introduziremos o invariante de Yamabe para variedades com fronteira. Primeiro, precisamos definir o seguinte. A constante de Yamabe é definida por

$$Q_g^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma) = \inf_{\varphi \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^+)} Q_g^{a,b}(\varphi) \quad \text{para } (a, b) \in \{(0, 1), (1, 0)\}, \quad (13)$$

que é invariante sob mudança conforme da métrica g para $(a, b) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$ (veja Escobar (1992b), (1996)), e que ainda satisfaz

$$-\infty \leq Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq Q_g^{1,0}(\mathbb{S}_+^n, \partial\mathbb{S}_+^n),$$

onde $Q_g^{1,0}(\mathbb{S}_+^n, \partial\mathbb{S}_+^n)$ denota o invariante de Yamabe do hemisfério \mathbb{S}_+^n equipado com a métrica canônica e

$$-\infty \leq Q_g^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq Q_g^{0,1}(B^n, \partial B^n),$$

onde B^n é a bola unitária em \mathbb{R}^n equipada com a métrica usual.

Desde que $Q_g^{1,0}$ e $Q_g^{0,1}$ não satisfazem à condição de Palais-Smale, métodos variacionais não garantem a existência de minimizantes. Entretanto, fora provado por Escobar (1992b) que se

$$Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < Q_g^{1,0}(\mathbb{S}_+^{n-1}, \partial\mathbb{S}_+^{n-1}),$$

então existe uma solução minimizante para o problema (11), onde a constante C tem o mesmo sinal que $Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$. De modo análogo, quando $Q_g^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)$ é finito e

$$Q_g^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma) < Q_g^{0,1}(B^{n-1}, \partial B^{n-1}),$$

existe uma métrica suave de curvatura escalar plana e curvatura média do bordo igual a K que tem o mesmo sinal que $Q_g^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)$.

Existem trabalhos interessantes relacionados a este assunto sobre existência e compacidade de soluções do problema de Yamabe em variedades com bordo, dentre os quais indicamos Escobar (1992b,a, 1996), Marques (2005, 2007) e Almaraz (2010). Especificamente com relação a unicidade podemos citar alguns resultados. O primeiro será o seguinte teorema estabelecido por Escobar (1990) que de certo modo, corresponde ao apresentado em Obata (1971/72) para variedades com bordo.

Teorema 2.1. *Seja (Σ, g) uma variedade $n-1$ ($n \geq 4$)-dimensional Einstein com fronteira totalmente geodésica. Se \tilde{g} é métrica na classe conforme de g tal que a curvatura escalar $R_{\tilde{g}}$ é constante e $\kappa_{\tilde{g}} = 0$ então \tilde{g} é Einstein. Ademais, se (Σ, g) não é conformemente equivalente a \mathbb{S}_+^n , então $\tilde{g} = cg$, onde c é uma constante positiva.*

Denote por $[g]$ a classe conforme de uma métrica Riemanniana g e λ_1^g o primeiro autovalor do seguinte par de operadores

$$\begin{cases} \Delta_g + \frac{1}{(n-1)}R_g & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{1}{(n-1)}\kappa_g & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases}$$

Então vale o seguinte resultado provado por Escobar (2003):

Teorema 2.2. *Seja $g \in [g_0]$ com $R_g = R_{g_0}$ e $H_g = H_{g_0} \leq 0$. Se λ_1^g e $\lambda_1^{g_0}$ são positivos ou um deles é igual a zero. Então $g = g_0$.*

2.3 Invariante de Yamabe

Denote por $[g]$ e $\mathcal{C}(\Sigma)$ a classe conforme de g e o espaço de todas as classes conformes em Σ , respectivamente. Podemos então definir o *invariante de Yamabe* de uma variedade compacta Σ com bordo $\partial\Sigma$ tomando o supremo das constantes de Yamabe sobre todas as classes conformes

$$\sigma^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma) = \sup_{[g] \in \mathcal{C}(\Sigma)} \inf_{\varphi > 0} Q_g^{a,b}(\varphi). \quad (14)$$

Schwartz (2009) mostrou que este invariante é monótono quando se adicionam alças sobre a fronteira. Como consequência, por exemplo, uma handlebody \mathcal{H}^n tem invariante maximal, isto é, $\sigma^{a,b}(\mathcal{H}, \partial\mathcal{H}) = \sigma^{a,b}(\mathbb{S}_+^n, \partial\mathbb{S}_+^n)$ for $(a, b) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$.

Em uma superfície Riemanniana a curvatura média da fronteira coincide com sua curvatura geodésica, o que pelo Teorema de Gauss-Bonnet implica que o invariante de Yamabe de uma superfície compacta Σ com bordo $\partial\Sigma$ é dada por um múltiplo da característica de Euler, exatamente $4\pi\chi(\Sigma)$, onde $\chi(\Sigma)$ depende do genus e do número de componentes de Σ .

De fato, em um certo sentido, o invariante de Yamabe pode ser visto como generalização da característica de Euler em dimensões maiores.

Observação 2.1. *Escobar (1992a) mostrou que $Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$ é positiva (zero, negativa) se, e somente se, $Q_g^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)$ é positiva (zero, negativa). Portanto, podemos provar o item II) no Teorema A e Teorema B substituindo $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$ por $\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)$.*

3 RIGIDEZ DE HIPERSUPERFÍCIES COM BORDO LIVRE

3.1 Estimativas para hipersuperfícies com bordo livre

Nesta seção, obteremos algumas estimativas para o volume e área do bordo de hipersuperfícies mínimas estáveis com bordo livre em termos da sua curvatura escalar ou média convexidade da fronteira da variedade ambiente. Aproveitando para fixar a notação, denotaremos por M uma variedade Riemanniana n -dimensional com fronteira ∂M cuja curvatura média será dada por $H^{\partial M}$. Assuma ainda que M contenha uma hipersuperfície propriamente imersa Σ com fronteira $\partial\Sigma$. Denotaremos o volume (medida de Hausdorff $(n-1)$ -dimensional) de Σ por $vol(\Sigma)$ e a área (medida de Hausdorff $(n-2)$ -dimensional) de sua fronteira $\partial\Sigma$ por $Area(\partial\Sigma)$, ambos com relação a métrica induzida.

Em relação às estimativas de área de superfícies mínimas compactas em variedades de dimensão três com limitação em sua curvatura escalar, podemos citar Shen e Zhu (1997) e Chen, Fraser e Pang (2012) para o caso de superfícies com bordo livre e índice baixo. Para o caso de hipersuperfícies, é absolutamente natural envolver estimativas que envolvam a constante de Yamabe, como por exemplo, veja o resultado abaixo:

Teorema 3.1. *Se (Σ^{n-1}, g) ($n \geq 4$) é uma variedade compacta com bordo tal que $-\infty < Q_{g'}^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq 0$. Então vale o seguinte.*

- a) *Se $(a, b) = (1, 0)$, então a curvatura escalar R_g de uma métrica $g \in [g']$ com $\kappa_g \geq 0$ satisfaz*

$$\frac{n-3}{4(n-2)} \inf R_g vol(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} \leq Q_{g'}^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma).$$

Se a igualdade vale, então R_g é constante.

- b) *Se $(a, b) = (0, 1)$, então a curvatura média κ_g de uma métrica $g \in [g']$ com $R_g \geq 0$ satisfaz*

$$\frac{n-3}{2} \inf \kappa_g Area(\partial\Sigma)^{\frac{1}{n-2}} \leq Q_{g'}^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma).$$

Se a igualdade vale, então κ_g é constante.

Demonstração. Ver Schwartz (2009), página 121. □

Agora enunciaremos o seguinte resultado que é o primeiro passo na empreitada na prova de nosso resultado de rigidez dado pelo Teorema A.

Teorema 3.2. *Seja M^n uma variedade Riemanniana ($n \geq 4$) com fronteira ∂M não vazia. Se $\Sigma^{n-1} \subset M$ é uma hipersuperfície com bordo livre, compacta, com dois lados, propriamente mergulhada que localmente minimizante o volume, cuja métrica induzida será denotada por g .*

- i) *Suponha que M tem bordo médio convexo e $\inf R^M < 0$. Então, se $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$,*

o volume de Σ satisfaz

$$\text{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} \geq \frac{Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R^M} \geq \frac{\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R^M}.$$

ii) Suponha que M tenha curvatura escalar não-negativa e $\inf H^{\partial M} < 0$. Então, se $\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$, a área de $\partial\Sigma$ satisfaz

$$\text{Area}(\partial\Sigma)^{\frac{1}{n-2}} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{Q_g^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf H^{\partial M}} \right) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf H^{\partial M}} \right).$$

Demonstração. Usando (6) na condição de estabilidade, obtemos

$$\int_{\Sigma} \left(2\|\nabla\varphi\|_g^2 + (R_g - R^M - \|h^{\Sigma}\|^2)\varphi^2 \right) d\sigma - 2 \int_{\partial\Sigma} \Pi(N, N)\varphi^2 d\sigma_{\partial\Sigma} \geq 0. \quad (15)$$

Por outro lado, desde que Σ encontra M ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma$, o vetor conormal ν de $\partial\Sigma$ em Σ que aponta para o exterior Σ coincide com o campo vetorial unitário normal Z de ∂M que aponta para fora de M . Então

$$\kappa_g = \sum_{i=1}^{n-2} \langle \nabla_{e_i} \nu, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-2} \langle \nabla_{e_i} Z, e_i \rangle,$$

onde $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$ é uma base ortonormal para $T\partial\Sigma$. Portanto, vale

$$\Pi(N, N) = H^{\partial M} - k_g \quad \text{em } \partial\Sigma, \quad (16)$$

onde $H^{\partial M}$ é a curvatura média de ∂M com respeito ao vetor unitário conormal interior em Σ .

Usando que $\frac{4(n-2)}{n-3} > 2$ para todo $n \geq 4$ e (16), obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Sigma} \left(a_n \|\nabla\varphi\|_g^2 + R_g \varphi^2 \right) d\sigma - \int_{\Sigma} R^M \varphi^2 d\sigma \\ &\quad - \int_{\partial\Sigma} 2H^{\partial M} \varphi^2 d\sigma_{\partial\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} 2k_g \varphi^2 d\sigma_{\partial\Sigma}, \end{aligned}$$

onde $a_n = \frac{4(n-2)}{n-3}$.

Entretanto pela desigualdade de Hölder

$$\inf R^M \int_{\Sigma} \varphi^2 d\sigma \geq \inf R^M \text{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} \left(\int_{\Sigma} \varphi^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma \right)^{\frac{n-3}{n-1}}.$$

Dai

$$\inf R^M \text{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n-2}} \left(\int_{\Sigma} \varphi^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma \right)^{\frac{n-3}{n-1}} \leq \int_{\Sigma} \left(a_n \|\nabla \varphi\|_g^2 + R_g \varphi^2 \right) d\sigma + \int_{\partial \Sigma} 2\kappa_g \varphi^2 d\sigma_{\partial \Sigma}.$$

Logo para uma função suave positiva φ , vale a seguinte desigualdade

$$\inf R^M \text{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n-2}} \leq \frac{\int_{\Sigma} (a_n \|\nabla \varphi\|_g^2 + R_g \varphi^2) d\sigma + 2 \int_{\partial \Sigma} \kappa_g \varphi^2 d\sigma_{\partial \Sigma}}{\left(\int_{\Sigma} \varphi^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma \right)^{\frac{n-3}{n-1}}}. \quad (17)$$

Utilizando a definição da constante e do invariante de Yamabe (13) e (14) em (17), não é difícil concluir que

$$\begin{aligned} \inf R^M \text{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n-2}} &\leq Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial \Sigma) \\ &\leq \sigma^{1,0}(\Sigma, \partial \Sigma), \end{aligned}$$

o que completa a prova de nosso primeiro item.

Argumentando como no item anterior, para uma função suave positiva φ , obtemos

$$2 \inf H^{\partial M} \text{Area}(\partial \Sigma)^{\frac{1}{n-2}} \leq \frac{\int_{\Sigma} (a_n \|\nabla \varphi\|_g^2 + R_g \varphi^2) d\sigma + 2 \int_{\partial \Sigma} \kappa_g \varphi^2 d\sigma_{\partial \Sigma}}{\left(\int_{\partial \Sigma} \varphi^{\frac{2(n-2)}{n-3}} d\sigma \right)^{\frac{n-3}{n-2}}}. \quad (18)$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \inf H^{\partial M} \text{Area}(\partial \Sigma)^{\frac{1}{n-2}} &\leq \frac{1}{2} Q_g^{0,1}(\Sigma, \partial \Sigma) \\ &\leq \frac{1}{2} \sigma^{0,1}(\Sigma, \partial \Sigma), \end{aligned}$$

isto finaliza a prova do nosso teorema. \square

Em vista do resultado apresentado no Teorema A, é interessante e natural questionar o que ocorre quando, em dimensão $n \geq 3$, a variedade ambiente tem fronteira média convexa e curvatura escalar limitada inferiormente por uma constante positiva. Observamos ainda que uma estimativa como a dada em (1) não vale. Por exemplo, tomando uma variedade $M := \Sigma \times \mathbb{R}$ equipada com a métrica produto, onde $\Sigma = \mathbb{S}_+^{n-2} \times \mathbb{S}^1(r)$, em que $\mathbb{S}^1(r)$ denota o círculo de raio positivo r , teria que M tem curvatura escalar positiva e curvatura média da fronteira negativa, enquanto o volume de Σ diminuiria arbitrariamente a medida que r também diminui.

3.2 Rigidez infinitesimal

Nosso próximo objetivo é construir uma folheação CMC por hipersuperfícies com bordo livre. Antes, entretanto, provaremos a seguinte proposição.

Proposição 3.1. *Nas condições do item I) do Teorema A se Σ atinge a igualdade em (1), então Σ é totalmente geodésica, $R^M = \inf R^M$ e $Ric(N, N) = 0$ em Σ , $H^{\partial M} = 0$ e $\Pi(N, N) = 0$ em $\partial\Sigma$, $\sigma(\Sigma, \partial\Sigma) = 0$, a fronteira $\partial\Sigma$ é uma hipersuperfície mínima e Einstein com respeito a métrica induzida em Σ .*

Demonstração. Da resolução do problema de Yamabe, existe $\varphi_{min} > 0$ para o qual o ínfimo em $Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$ é atingido. Se Σ atinge a igualdade em (1), então podemos observar da prova do Teorema 3.2 que todas as desigualdades de fato são igualdades. O que primeiramente implica que Σ é totalmente geodésica. Como usamos a desigualdade estrita $a_n - 2 > 0$ para obter (17), obviamente obtemos que $\|\nabla\varphi_{min}\|_g^2 = 0$, implicando em φ_{min} constante.

Considere o seguinte problema de fronteira:

$$\begin{cases} -\mathcal{L}\phi = \lambda\phi & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial}{\partial\nu}\phi = \Pi(N, N)\phi & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (19)$$

tal que λ_1 é seu primeiro autovalor. Então

$$\lambda_1 = \inf_{\int_{\Sigma} \phi^2 = 1} \left(\int_{\Sigma} (\|\nabla\phi\|_g^2 + (Ric(N, N) + \|h^{\Sigma}\|^2)\phi^2) d\sigma + \int_{\partial\Sigma} \Pi(N, N)\phi^2 d\sigma_{\partial\Sigma} \right).$$

Segue de $\delta^2\Sigma(\varphi_{min}, \varphi_{min}) = 0$ que $\lambda_1 = 0$. Portanto, as funções constantes satisfazem (19) e consequentemente $\Pi(N, N) = 0$ e $Ric(N, N) = 0$. Note também que a igualdade em (15) implica que $R^M = \inf R^M$ em Σ .

Para o que falta, mostraremos que Σ é Einstein. Dada qualquer (0,2)-tensor h simétrico, defina a família de métricas Riemannianas $\{g(r)\}_{r \in (-\epsilon, \epsilon)}$ dada por $g(r) = g + rh$. Pela resolução do problema de Yamabe com fronteira, existe uma única função positiva $u_r > 0$ tal que $\tilde{g}(r) = u_r^{\frac{4}{n-3}} g(r)$ tem curvatura escalar constante igual a $Q_g^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$ e curvatura média constante na fronteira igual a zero para todo $r \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Antes de prosseguirmos, apresentamos abaixo a primeira variação da curvatura escalar

$$\frac{\partial}{\partial r} R_{\tilde{g}(r)} \Big|_{r=0} = \text{div}(\text{div}h) - \Delta_{\Sigma}(\text{tr}_{\tilde{g}(0)}h) - \langle Ric^{\Sigma}, h \rangle,$$

onde Ric^{Σ} denota a curvatura de Ricci de Σ . Seja $\text{vol}(\Sigma, \tilde{g}(r))$ o volume de Σ na métrica $\tilde{g}(r)$ para $r \in (-\epsilon, \epsilon)$ e \bar{R} a média da curvatura escalar $\bar{R} = \text{vol}(\Sigma)^{-1} \int_{\Sigma} R_g d\sigma$. Vamos calcular a seguir $\frac{\partial}{\partial r} Q_{g(r)}^{1,0}(u_r) \Big|_{r=0}$. Antes, note que as métricas $\tilde{g}(0)$ e $g(0)$ estão na mesma classe conforme com mesma curvatura escalar e curvatura média na fronteira a menos de reescalonamento, a unicidade do problema de Yamabe para variedades com fronteira para

$\inf R^M < 0$ e fronteira sendo uma hipersuperfície mínima implica que $\tilde{g}(0) = g(0)$ (Veja Proposição 2.2).

Note que o invariante de Yamabe de variedades com fronteira não depende de r o que implica que $Q_{g(r)}^{1,0}(u_r) \leq \sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$ para todo $r \in (-\epsilon, \epsilon)$, ou seja, $\frac{\partial}{\partial r} Q_{g(r)}^{1,0}(u_r)$ em $r = 0$ é igual a zero desde que $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$ é um valor de máximo para $Q_{g(r)}^{1,0}(u_r)$ como uma função de r .

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} Q_{g(r)}^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \Big|_{r=0} &= \frac{d}{dr} \left(\text{vol}(\Sigma, \tilde{g}(r))^{\frac{2-n}{n}} \left[\int_{\Sigma} R_{\tilde{g}(r)} d\sigma + 2 \int_{\partial\Sigma} \kappa_{\tilde{g}(r)} d\sigma_{\partial\Sigma} \right] \right) \Big|_{r=0} \\ &= \text{vol}(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}} \left(\frac{2-n}{n} \text{vol}(\Sigma)^{-1} \int_{\Sigma} \frac{1}{2} (tr_g h) d\sigma \int_{\Sigma} R_g d\sigma_g \right) \\ &\quad + \text{vol}(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}} \left(\int_{\Sigma} \langle -Ric^{\Sigma} + \frac{R_g}{2} g, h \rangle d\sigma + \int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma}(tr_g(h)) d\sigma \right) \\ &\quad + \text{vol}(\Sigma)^{\frac{2-n}{n}} \int_{\partial\Sigma} \langle div(h), \nu \rangle, \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Stokes e que $\frac{\partial}{\partial r} d\sigma \Big|_{r=0} = \frac{1}{2} (tr_g h) d\sigma$.

Finalmente, graças a (6), a curvatura escalar de Σ é constante com respeito à métrica induzida, logo

$$\int_{\Sigma} \langle Ric^{\Sigma} - \frac{1}{n} R_g g, h \rangle d\sigma + \int_{\partial\Sigma} \langle div(h), \nu \rangle + \int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma}(tr_g h) d\sigma = 0.$$

Desde que a expressão acima vale para todo (0,2)-tensor simétrico h , temos

$$- \int_{\Sigma} \|Ric^{\Sigma} - \frac{1}{n} R_g g\|^2 d\sigma + \frac{n-2}{2n} \int_{\partial\Sigma} \langle \nabla R, \nu \rangle d\sigma_{\partial\Sigma} = 0.$$

Deduzimos, então, que o tensor de Ricci livre de traço precisa ser identicamente nulo, o que implica que a hipersuperfície Σ está munida com uma métrica Einstein. \square

Proposição 3.2. *Nas considerações do item II) no Teorema A, temos que Σ é totalmente geodésica, $R^M = 0$ e $Ric(N, N) = 0$ em Σ , $H^{\partial M} = 0$ e $\Pi(N, N) = 0$ em $\partial\Sigma$, $\sigma(\Sigma, \partial\Sigma) = 0$, $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) = 0$, a curvatura média de $\partial\Sigma$ em Σ é igual a zero e Σ é Ricci plana com respeito à métrica induzida.*

Demonstração. Argumentando como na prova do Teorema 3.2, temos

$$0 = \inf R^M \text{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}} \leq \sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq 0.$$

Observe que as desigualdades acima se tornam igualdades, portanto, a prova desta Pro-

posição segue nos mesmos passos que a Proposição 3.1. Além disso, usando que a métrica induzida em Σ é Einstein, bem como (6), deduzimos que Σ é Ricci plana. \square

Definição 3.1. *Uma hipersuperfície Σ com fronteira livre propriamente imersa com dois lados é chamada infinitesimalmente decomponível se é totalmente geodésica, a curvatura escalar $R^M = \inf R^M$ e $\text{Ric}(N, N) = 0$ ao longo de Σ , a curvatura média de ∂M é constante ao longo de $\partial\Sigma$ e igual a $\inf H^{\partial M}$ em todo ponto de $\partial\Sigma$ e Σ é Einstein com respeito a métrica induzida (isto é, atinge o invariante de Yamabe).*

Observamos ainda que exemplos básicos de tal classe de variedades são as faixas horizontais $\{r\} \times \Sigma$ em uma variedade Riemanniana $\mathbb{R} \times \Sigma$ dotada com a métrica produto, onde Σ é uma variedade Einstein com curvatura escalar constante e fronteira sendo uma hipersuperfície com curvatura média constante.

3.3 Folheação local por hipersuperfícies cmc com bordo livre

Provaremos que se Σ é infinitesimal rígida, podemos aplicar o teorema da função implícita para construir uma folheação em uma vizinhança de Σ por hipersuperfícies com bordo livre e curvatura média constante. Baseamo-nos nos trabalhos de Bray, Brendle e Neves (2010), Ambrózio (2014b) e Nunes (2013).

Para fixar notação, se Σ em M é infinitesimalmente decomponível, então existe um campo Y em M tal que coincide com N em Σ e $Y(p)$ é tangente a ∂M para todo $p \in \partial M$. Seja $\psi = \psi(t, x)$ o fluxo de Y .

Proposição 3.3. *Seja M uma variedade Riemanniana n -dimensional com fronteira ∂M tal que $H^{\partial M}$ e R^M são limitadas inferiormente. Assuma ainda que M contenha uma hipersuperfície Σ infinitesimalmente decomponível, então existem $\varepsilon > 0$ e uma função suave $\mu : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\Sigma_t := \{\psi(\mu(t, x) + t, x), x \in \Sigma\}$$

é uma família de hipersuperfícies compactas com bordo livre e curvatura média constante. Ademais $\mu(0, x) = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial t}(0, x) = 0$ e $\int_{\Sigma} \mu(t, \cdot) d\sigma = 0$ para cada $x \in \Sigma$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Demonstração. Uma folheação CMC será construída como em Ambrózio (2014b). Seja $E_n = \{u \in C^{n, \alpha}(\Sigma); \int_{\Sigma} u = 0\}$ um espaço de Banach com expoente de Hölder $\alpha \in (0, 1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Escolha $\delta > 0$, $\tau > 0$ e uma função real u na bola aberta $B_{\delta}(0) = \{u \in C^{2, \alpha}(\Sigma); \|u\|_{2, \alpha} < \delta\}$ tal que o conjunto

$$\Sigma_{u+t} = \{\psi(u(x) + t, x); x \in \Sigma\}$$

defina uma hipersuperfície compacta propriamente mergulhada para todo $(t, u) \in (-\tau, \tau) \times B_{\delta}(0)$.

Seja Z campo vetorial normal unitário de ∂M que coincide com a conormal exterior ν de $\partial\Sigma$. Primeiramente, defina a aplicação $\Phi : (-\tau, \tau) \times (B_\delta(0) \cap E) \rightarrow F \times C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)$ dada por

$$\Phi(t, u) = \left(H(t + u) - \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\Sigma} H(t + u) d\sigma, \langle N_{t+u}, Z_{t+u} \rangle \right),$$

onde N_u denota o campo normal unitário de Σ_u , $Z_u = Z|_{\partial\Sigma_u}$ e $H(u)$ é a curvatura média de Σ_u . Note que Φ é bem definida e $\Phi(0, 0) = (0, 0)$ desde que $\Sigma_0 = \Sigma$ é mínima com bordo livre.

Considere a aplicação $f : (-\tau, \tau) \times \Sigma \rightarrow M$ tal que $f(t, \cdot) = \psi(tv(\cdot), \cdot)$ dá a variação para cada $v \in E$, cujo campo vetorial variacional é $\frac{\partial}{\partial t} f|_{t=0} = vY$ em Σ .

Dado $v \in E$ temos

$$\begin{aligned} D\Phi_{(0,0)}(0, v) &= \frac{d\Phi}{ds}\Big|_{t=0}(0, sv) \\ &= (\Delta_{\Sigma}v + \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma_{\partial\Sigma}, -\frac{\partial v}{\partial \nu}), \end{aligned}$$

onde usamos que $\text{Ric}(N, N) = 0$, $\Pi(N, N) = 0$ e que Σ é totalmente geodésica.

Como $(w, z) \in (F, C^{1,\alpha}(\partial\Sigma))$ implica que

$$\int_{\Sigma} \left(w + \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\partial\Sigma} z d\sigma_{\partial\Sigma} \right) d\sigma = \int_{\partial\Sigma} z d\sigma_{\partial\Sigma},$$

o Teorema 2.1 de Nardi (2013), garante que existe uma única função $\alpha \in E$ resolvendo o seguinte problema de fronteira de Neumann

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma}\alpha = w + \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\partial\Sigma} z d\sigma_{\partial\Sigma} & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = -z, & \text{em } \partial\Sigma. \end{cases} \quad (20)$$

Portanto, $D\Phi_{(0,0)}(0, \alpha) = (w, z)$ e $D\Phi_{(0,0)}$ é um isomorfismo quando restrito a $\{0\} \times E$. Pelo teorema da função implícita existem $\varepsilon > 0$ e uma função suave μ tal que $\mu(0, x) = 0$ e $\mu(t, \cdot) \in B_\delta(0) \cap E$.

Considere a seguinte variação $F(t, x) = \psi(\mu(t, x) + t, x)$ cujo vetor velocidade é igual a $\left(\frac{\partial \mu}{\partial t} + 1 \right) N$ em Σ .

Diferenciando

$$(H(\mu(\cdot, t) + t) - \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\Sigma} H(\mu(\cdot, t) + t) d\sigma, \langle N_{\mu(\cdot, t) + t}, X_{\mu(\cdot, t) + t} \rangle) = (0, 0),$$

em $t = 0$, obteremos que $\frac{\partial}{\partial t} \mu(0, x)$ é contante, pois satisfaz o problema homogêneo de

Neumann. Tomando mais uma vez a derivada em $t = 0$ de $\int_{\Sigma} \mu(t, \cdot) d\sigma = 0$, obtemos

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \mu}{\partial t}(0, \cdot) d\sigma = 0$$

o que implica que $\frac{\partial \mu}{\partial t}(0, x) = 0$.

Uma vez que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(0, x) = N \quad \forall x \in \Sigma,$$

com $F(0, x) = x$, podemos assumir que, diminuindo ε se necessário, uma vizinhança de Σ é parametrizada por F . Logo, o resultado segue. \square

Construímos acima uma folheação em uma vizinhança de Σ em M por uma família de hipersuperfícies propriamente mergulhadas com bordo livre $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$. Agora, considere a seguinte aplicação $\tilde{f}(t, \cdot) : \Sigma \rightarrow M$ dada por $\tilde{f}(t, x) = F(t, x) = \psi(\mu(t, x)t, x)$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Primeiro, para fixar notação, considere o seguinte operador

$$\mathcal{L}(t) = \Delta_{\Sigma_t} + Ric(N_t, N_t) + \|h^{\Sigma_t}\|^2,$$

onde Δ_{Σ_t} , ou apenas Δ_t quando não houver nenhuma ambiguidade, corresponde ao laplaciano de Σ_t na métrica induzida. Além disso, denotamos por N_t o campo vetorial normal unitário em Σ_t que supomos depender suavemente em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$, h^{Σ_t} a segunda forma fundamental de $\tilde{f}(t, \cdot)$ em relação a N_t , $d\sigma_t$ e $d\sigma_{\partial\Sigma_t}$ o elemento de volume de Σ_t e de área de $\partial\Sigma_t$ na métrica induzida por $\tilde{f}(t, \cdot)$, respectivamente.

Definição 3.2 (Função lapso). *Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, definimos a função lapso $\ell_t : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\ell_t(x) = \langle N_t(x), X_t(x) \rangle,$$

onde $X_s = \frac{\partial}{\partial s} \tilde{f}(s, \cdot)$.

O seguinte lema é de fundamental importância podendo ser encontrado, por exemplo, em Ambrózio (2014b).

Lema 3.1. *A função $\ell_t(x)$ satisfaz*

$$H'(t) = -\mathcal{L}(t)\ell_t \text{ em } \Sigma_t \tag{21}$$

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \nu_t} = \Pi(N_t, N_t)\ell_t \text{ em } \partial\Sigma_t, \tag{22}$$

onde $H(t)$ é a curvatura média de Σ_t e $H' = \frac{\partial}{\partial t} H$.

3.4 Comparação de volume e rigidez local

A seguir, apresentamos um teorema de comparação de volume para variedades com fronteira.

Proposição 3.4. *Nas mesmas condições do Teorema A, se Σ é rígida infinitesimalmente, temos*

$$\text{vol}(\Sigma) \geq \text{vol}(\Sigma_t), \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

onde $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ é dado como na Proposição 3.3.

Demonstração. Localmente, cada Σ_t tem bordo livre e curvatura média constante, o que implica que a derivada da segunda variação de volume pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\Sigma_t) = H(t) \int_{\Sigma_t} \langle N_t, X_t \rangle d\sigma_t, \quad (23)$$

para qualquer $t \in [0, \varepsilon)$.

Como $X_0(x) = N(x)$, decrescendo ε se necessário, $\ell_t > 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Assim se provarmos que $H(t) \leq 0$ para $t \in [0, \varepsilon)$ e $H(t) \geq 0$ para $t \in (-\varepsilon, 0]$, então $\frac{d}{dt} \text{vol}(\Sigma_t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, \varepsilon)$ e $\frac{d}{dt} \text{vol}(\Sigma_t) \geq 0 \quad \forall t \in (-\varepsilon, 0]$. Isto seria suficiente para provarmos esta proposição.

Para começar, com ajuda de (6), reescrevemos (21) como

$$2H'(t)(\ell_t)^{-1} = -2(\ell_t)^{-1} \Delta_t \ell_t + R_t - R_t^M - H(t)^2 - \|h^{\Sigma_t}\|^2. \quad (24)$$

Denote por g_t a métrica induzida em Σ . A resolução do problema de Yamabe com fronteira para Σ_t garante que para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ existe uma métrica $\tilde{g}_t = u_t^{\frac{4}{n-3}} g_t$, tal que denotamos u_0 por u , com curvatura escalar constante igual a $\inf R^M$ e fronteira sendo uma hipersuperfície mínima.

Argumentando como em Moraru (2013). Multiplique (24) por u_t^2 e integre ao longo de Σ_t , então

$$2 \int_{\Sigma} H'(t) \frac{u_t^2}{\ell_t} d\sigma_t \leq -2 \int_{\Sigma} \frac{u_t^2}{\ell_t} \Delta_t \ell_t d\sigma_t + \int_{\Sigma} R_t u_t^2 d\sigma_t - \inf R^M \int_{\Sigma} u_t^2 d\sigma_t.$$

Usando no lado esquerdo da desigualdade acima que Σ_t tem curvatura média constante e integrando por partes no lado direito, obtemos

$$\begin{aligned} 2H'(t) \int_{\Sigma} \frac{u_t^2}{\ell_t} d\sigma_t &\leq 2 \int_{\Sigma} \left(2 \frac{u_t}{\ell_t} \langle \nabla_t u_t, \nabla_t \ell_t \rangle - \frac{u_t^2}{\ell_t^2} \|\nabla_t \ell_t\|^2 \right) d\sigma_t \\ &\quad - 2 \int_{\partial \Sigma} \Pi(N_t, N_t) u_t^2 d\sigma_{\partial \Sigma_t} + \int_{\Sigma} R_t u_t^2 d\sigma_t - \inf R^M \int_{\Sigma} u_t^2 d\sigma_t. \end{aligned}$$

Ora, pela desigualdade de Cauchy com epsilon temos

$$2\langle \nabla_t u_t, \nabla_t \ell_t \rangle \leq \|\nabla_t u_t\|^2 \epsilon(t) + \|\nabla_t \ell_t\|^2 \frac{1}{\epsilon(t)}$$

onde $\epsilon(t) = \frac{\ell_t}{u_t}$.

Finalmente

$$\begin{aligned} 2H'(t) \int_{\Sigma} \frac{u_t^2}{\ell_t} d\sigma_t &\leq \int_{\Sigma} (2\|u_t\|^2 + R_t u_t^2) d\sigma_t - 2 \int_{\partial\Sigma} \Pi(N_t, N_t) u_t^2 d\sigma_{\partial\Sigma_t} \\ &\quad - \inf R^M \int_{\Sigma} u_t^2 d\sigma_t. \\ &\leq \int_{\Sigma} (a_n \|u_t\|^2 + R_t u_t^2) d\sigma_t - 2 \int_{\partial\Sigma} H_t^{\partial M} u_t^2 d\sigma_{\partial\Sigma_t} \\ &\quad + 2 \int_{\partial\Sigma} k_t u_t^2 d\sigma_{\partial\Sigma_t} - \inf R^M \int_{\Sigma} u_t^2 d\sigma_t, \end{aligned} \quad (25)$$

onde usamos que $a_n > 2$ para todo $n \geq 4$ e a identidade (16).

Dividindo (25) por $\left(\int_{\Sigma} u_t^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma \right)^{\frac{n-3}{n-1}}$ e usando que $\inf_M H^{\partial\Sigma} = 0$, temos que

$$\begin{aligned} 2H'(t)\Psi(t) &\leq \frac{\int_{\Sigma} (a_n \|\nabla_t u_t\|_{g_t}^2 + R_t u_t^2) d\sigma_t + 2 \int_{\partial\Sigma} \kappa_t u_t^2 d\sigma_{\partial\Sigma_t}}{\left(\int_{\Sigma} u_t^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma \right)^{\frac{n-3}{n-1}}} \\ &\quad - \inf R^M \frac{\int_{\Sigma} u_t^2 d\sigma_t}{\left(\int_{\Sigma} u_t^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma \right)^{\frac{3-n}{n-1}}}, \end{aligned}$$

onde

$$\Psi(t) = \left(\int_{\Sigma} u_t^{\frac{2(n-1)}{n-3}} d\sigma \right)^{\frac{3-n}{n-1}} \int_{\Sigma} \frac{u_t^2}{\ell_t} d\sigma_t.$$

Temos agora dois casos a considerar que correspondem aos itens *I* e *II* do Teorema A.

Case 1: $\inf R^M < 0$ e $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$.

Segue da desigualdade de Hölder e da definição de constante de Yamabe (13)

que

$$\begin{aligned} 2H'(t)\Psi(t) &\leq Q_{g_t}^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) - \inf R^M \text{vol}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n-1}} \\ &\leq \sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) - \inf R^M \text{vol}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n-1}}, \end{aligned} \quad (26)$$

onde usamos $Q_{g_t}^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq \sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Como mencionado antes, $\tilde{g}_0 = u_0^{\frac{4}{n-3}} g_0$ é uma métrica com curvatura escalar igual a $\inf R^M$ e curvatura média igual a zero. Além disso, em virtude de Σ ser infinitamente rígida e de (6) e (16), temos que $R_{g_0} = \inf R^M$ em Σ e $k_{g_0} = 0$ em $\partial\Sigma$. Daí pelo

Princípio do Máximo, $u_0 \equiv 1$. Incluímos esse argumento a seguir por completude.

Defina $w = u_0^{\frac{4}{n-3}} - 1$. Portanto o problema (11) é equivalente a

$$\begin{cases} \Delta_{\Sigma} w + h(x)w = 0 & \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (27)$$

onde $h(x) = \frac{\inf R^M (n-3)^2}{16(n-2)} (u_0 + u_0^{\frac{n-2}{n-3}} + u_0^{\frac{n-1}{n-3}} + u_0^{\frac{n}{n-3}}) u_0^{\frac{n-7}{n-3}} < 0$. Segue da unicidade do problema de Neumann que $w \equiv 0$ (Gilbarg e Trudinger, 2001, Teorema 3.6).

Por outro lado, como $\ell_0 \equiv 1$, podemos encontrar uma constante positiva K_1 tal que $\phi(t) > K_1$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Combinando (26) e a igualdade (1), inferimos que

$$\begin{aligned} H'(t) &\leq -\frac{\inf R^M}{2K_1} (vol(\Sigma_t)^{\frac{2}{n-1}} - vol(\Sigma)^{\frac{2}{n-1}}) \\ &= -\frac{\inf R^M}{K_1} \int_0^t \left(\frac{d}{ds} vol(\Sigma_s) \right) vol(\Sigma_s)^{\frac{3-n}{n-1}} ds. \end{aligned}$$

Como consequência de (23), temos

$$H'(t) \leq -\frac{\inf R^M}{(n-1)K_1} \int_0^t vol(\Sigma_s)^{\frac{3-n}{n-1}} H(s) \int_{\Sigma} \ell_s d\sigma_s ds. \quad (28)$$

Suponha, por contradição, que existe $t_0 \in (0, \varepsilon)$ such that $H(t_0) > 0$. Assim, defina

$$t^* = \inf \{t \in [0, t_0]; H(t) \geq H(t_0)\}.$$

Afirmamos que nessas condições $t^* = 0$, pois se $t^* > 0$, segue do Teorema do Valor Médio que existe $t_1 \in (0, t^*)$ tal que

$$H'(t_1) = \frac{1}{\tau} H(\tau), \quad (29)$$

o que de posse de (29) e (28), temos

$$H(\tau) \leq -\frac{\inf R^M \tau}{(n-1)K_1} \int_0^{t_1} H(s) \xi(s) ds \leq -\frac{\inf R^M \tau}{(n-1)K_1} \int_0^{t_1} H(\tau) \xi(s) ds,$$

onde

$$\xi(s) = vol(\Sigma_s)^{\frac{3-n}{n-1}} \left(\int_{\Sigma} \ell_s d\sigma_s \right).$$

Pela definição de τ , temos que $H(t) \leq H(t_0) = H(\tau)$ para qualquer $t \in [0, \tau]$. Logo, podemos então encontrar uma constante positiva K_0 tal que $\xi(t) < K_0^{-1} K_1$. Escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon^2 < -\frac{(n-1)K_0}{\inf R^M}$ obtemos

$$H(\tau) \leq -\frac{\inf R^M}{K_0(n-1)} H(\tau) \varepsilon^2 < H(\tau),$$

o que nos dá a contradição e assim t^* é de fato igual a zero.

Desde que $t^* = 0$, segue que $H(0) \geq H(t_0) > 0$, então vamos ter novamente outra contradição. Portanto, $H(t) \geq 0$ para $t \in (-\varepsilon, 0]$ e $H(t) \leq 0$ para $t \in [0, \varepsilon)$ (cuja prova é análoga).

Por (23), concluímos que $\text{vol}(\Sigma_t) \leq \text{vol}(\Sigma)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Case 2: $\inf R^M = 0$ e $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq 0$.

Pela definição de invariante de Yamabe para variedades com fronteira, temos $H'(t) \leq 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Portanto $H(t) \leq H(0) = 0$ para $t \in [0, \varepsilon)$ e $H(t) \geq H(0) = 0$ para $t \in (-\varepsilon, 0]$. Daí, $\text{vol}(\Sigma) \geq \text{vol}(\Sigma_t) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. \square

Por fim, resta agora oferecer a demonstração da decomposição local enunciada no Teorema A através da proposição abaixo.

Proposição 3.5. *Se Σ atinge a igualdade em (1), então Σ tem uma vizinhança em M isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g)$ para algum $\varepsilon > 0$, onde g é a métrica induzida em Σ a qual é Einstein.*

Demonstração. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, sejam $\Sigma_t \subset M$ hipersuperfícies com bordo livre assim dadas pela Proposição 3.3. Da Proposição 3.4 concluímos que $\text{vol}(\Sigma_t) \leq \text{vol}(\Sigma)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Em particular, desde que Σ é localmente minimizante de volume, obtemos que

$$\text{vol}(\Sigma_t) = \text{vol}(\Sigma)$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, ou seja, cada Σ_t é infinitamente rígida.

Segue do Lema 3.1 que, uma vez que a função lapso satisfaz o problema homogêneo de Neumann, ℓ_t é constante (como função de t) em cada Σ_t .

Pela já conhecida expressão

$$\nabla_{\frac{\partial t}{\partial t}} N_t = -\nabla_t \ell_t,$$

cuja prova pode ser encontrada em Huisken e Polden (1999), $N_t(x)$ é um vetor paralelo $\forall (t, x) \in \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, já que ℓ_t é constante. Daí as curvas integrais de N_t são geodésicas e seu fluxo é a aplicação exponencial. Daí, a métrica de M perto de Σ deve ser dada como a seguinte métrica produto $dt^2 + g$. \square

3.5 Prova do Teorema B

A primeira etapa na demonstração do Teorema B consiste em obter a seguinte decomposição infinitesimal inspirada parcialmente em (Yau, 2001, Teorema 3.1). (Compare com a Proposição 3.1 e Proposição 3.2).

Proposição 3.6. *Seja M uma variedade Riemanniana n -dimensional com curvatura escalar $R^M \geq -n(n-1)$ e bordo médio convexo. Suponha que M contém uma hipersuperfície*

com bordo livre propriamente mergulhada, compacta, dois lados Σ tal que $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq 0$. Se Σ é \mathcal{J} -estável, então $R^M = -n(n-1)$ e $\text{Ric}(N, N) = -(n-1)$ ao longo de Σ , Σ é umbílica, $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) = 0$, a curvatura média de $\partial\Sigma$ em Σ é igual a zero, $H^{\partial M} = 0$ em cada ponto de $\partial\Sigma$, $\Pi(N, N) = 0$ ao longo $\partial\Sigma$ e a métrica induzida em Σ é Ricci plana.

Demonstração. Da definição de \mathcal{J} -estabilidade, (6) e (16), temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Sigma} \left(2\|\nabla\varphi\|_g^2 + (R_g - (R^M + n(n-1)) - \|\mathring{h}^{\Sigma}\|^2)\varphi^2 \right) d\sigma \\ &\quad + \int_{\partial\Sigma} 2(-H^{\partial M} + \kappa_g)\varphi^2 d\sigma_{\partial\Sigma}, \end{aligned} \quad (29)$$

onde $\mathring{h}^{\Sigma} = h^{\Sigma} - g_{\Sigma}$ é a parte livre de traço de h^{Σ} .

Como $\frac{4(n-2)}{n-3} > 2$ para todo $n \geq 4$, $R^M \geq -n(n-1)$, $\|\mathring{h}^{\Sigma}\|^2 \geq 0$ e o bordo ∂M é médio convexo, (29) torna-se

$$\int_{\Sigma} \left(a_n \|\nabla\varphi\|_g^2 + R_g \varphi^2 \right) d\sigma + \int_{\partial\Sigma} 2k_g \varphi^2 d\sigma_{\partial\Sigma} \geq 0.$$

Assim $Q^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \geq 0$, o que pela definição de invariante de Yamabe, implica que $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \geq 0$. Por outro lado, $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$ é não-positiva por hipótese, logo $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) = 0$. Além disso, ainda obtemos $R^M = -n(n-1)$ e $\|\mathring{h}^{\Sigma}\|^2 = 0$ ao longo de Σ .

Essencialmente, pelos mesmos argumentos que a Proposição 3.1, a prova segue. Entretanto, cabe notar que a expressão (6) e o fato de que Σ ser Einstein implicam que a métrica induzida em Σ é Ricci plana. \square

Prova do Teorema B. Da proposição acima, $\mathcal{L} = \Delta_{\Sigma}$. Assim podemos construir uma folheação em torno de Σ por hipersuperfícies com bordo livre e curvatura média constante.

Desde que Σ localmente minimiza a função \mathcal{J} , temos $H(0) = n-1$. Denotando por g_t a métrica induzida em Σ e por $\widehat{g}_{\tau} = u_{\tau}^{\frac{4}{n-2}} g_{\tau}$ uma métrica conformemente relacionada de curvatura escalar constante e mínima na fronteira. Mostraremos agora que $H(t) \leq n-1$ para $t \in [0, \varepsilon)$. Suponha por contradição que existe $\tau \in (0, \varepsilon)$ tais que $H(\tau) > n-1$ e (diminuindo ε se necessário) $H'(\tau) > 0$. Desde que $R^M \geq n(n-1)$ e $\|h^{\Sigma\tau}\|^2 \geq \frac{H(\tau)^2}{n-1} > n-1$, temos que $R_t^M + \|h^{\Sigma\tau}\|^2 + H(\tau)^2 > 0$, assim por (24), temos que

$$2H'(\tau)\ell_{\tau}^{-1} < -2\ell_{\tau}^{-1}\Delta_{\tau}\ell_{\tau} + R_{\tau},$$

Multiplicando acima por u_{τ}^2 e integrando ao longo de Σ_{τ} , obtemos

$$2 \int_{\Sigma} H'(\tau) \frac{u_{\tau}^2}{\ell_{\tau}} \Sigma d\sigma_{\tau} < -2 \int_{\Sigma_{\tau}} \frac{u_{\tau}^2}{\ell_{\tau}} \Delta_{\tau} \ell_{\tau} d\sigma_{\tau} + \int_{\Sigma} R_{\tau} u_{\tau}^2 d\sigma_{\tau}.$$

Integrando por partes o lado direito e usando a desigualdade de Cauchy com

epsilon, temos de modo similar a Proposição 3.4 que

$$2H'(t) \int_{\Sigma} \frac{u_{\tau}^2}{\ell_{\tau}} d\sigma_{\tau} < \int_{\Sigma_{\tau}} (a_n \|u_{\tau}\|^2 + R_{\tau} u_{\tau}^2) d\sigma_{\tau} + 2 \int_{\partial\Sigma} k_{\tau} u_{\tau}^2 d\sigma_{\partial\Sigma_{\tau}}.$$

De maneira que

$$0 < H'(\tau) \pi(\tau) < \sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma),$$

onde

$$\phi(\tau) = \left(\|u_{\tau}\|_{\frac{2(n-1)}{n-3}}^2 \right)^{-1} \int_{\Sigma} \frac{u_{\tau}^2}{\ell_{\tau}} d\sigma_{\tau}.$$

Como por hipótese $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq 0$, chegamos a uma contradição. Portanto, $H(t) \leq n-1$ para $t \in [0, \varepsilon)$.

Pela fórmula da primeira variação de \mathcal{J} dada em (8), segue que $\mathcal{J}'(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \varepsilon)$. Em vista que \mathcal{J} atinge um mínimo em $t = 0$, segue que $\mathcal{J}'(t) = 0$ para $t \in [0, \varepsilon)$. Donde obtemos

$$H(t) = n-1 \quad \forall t \in [0, \varepsilon).$$

Um argumento similar mostra $H(t) = n-1$ para $t \in (-\varepsilon, 0]$. O Lema 3.1 e a condição de ortogonalidade da fronteira garantem que cada Σ_t é infinitesimalmente decomponível no sentido da proposição anterior.

A menos de isometria, a métrica em uma vizinhança suficientemente pequena de Σ pode ser escrita como $g_M = \ell_t dt^2 + g_t$. Novamente pelo Lema 3.1, a função lapso é constante como função de t em Σ_t , por uma mudança de coordenadas em t , podemos assumir sem perda de generalidade que $\ell_t = 1$.

A métrica induzida em Σ_t obedece a seguinte equação de evolução

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (g_{ij})_t &= -2\ell_t (h_{ij}^{\Sigma})_t \\ &= -2\ell_t (g_{ij})_t, \end{aligned}$$

onde usamos acima a umbilicidade da folheação $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$. Portanto,

$$g_{\Sigma_t} = e^{-2t} g$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Deduzimos então que a métrica induzida por $f(t, x)$ em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ é dada por $dt^2 + e^{-2t} g_{\Sigma}$ que é Ricci-plana, concluindo assim a prova do teorema.

□

4 MASSA DE HAWKING E RIGIDEZ

Neste capítulo, mostraremos como o argumento em Máximo e Nunes (2013) pode ser modificado a fim de conseguirmos mostrar teoremas de decomposição local para uma classe maior de variedades, a saber, os espaços de Kottler. Mais ainda, introduziremos a definição da massa de Hawking, além de classificar seus pontos críticos.

4.1 Espaço de Kottler

Sejam (Σ, g) uma superfície compacta de curvatura gaussiana constante $\widehat{k} = \{-1, 0, 1\}$ e $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ suficientemente grande tal que $\widehat{k} + s^2 - \frac{2\mathbf{m}}{s}$ tenha uma solução positiva, denotaremos este zero por s_0 . O *espaço de Kottler*, ou *espaço de Kottler-Schwarzschild*, é a variedade $(s_0, +\infty) \times \widehat{\Sigma}$ equipada com a seguinte métrica

$$g_{ks} = \frac{ds^2}{\widehat{k} + s^2 - \frac{2\mathbf{m}}{s}} + s^2 g_{\widehat{\Sigma}},$$

onde g_{ks} é métrica de curvatura escalar constante igual a -6 . Este espaço é o análogo ao espaço de Schwarzschild no contexto de variedades localmente assintoticamente hiperbólicas que corresponde às métricas estáticas⁴ com constante cosmológica -3 .

Referências dos espaços apresentados a seguir podem ser encontradas em Brendle, Hung e Wang (2012), Wang *et al.* (2014), Chrusciel e Simon (2001), Lee e Neves (2013) e Wang (2001). Através de uma mudança de variável $r = r(s)$ com

$$r'(s) = \frac{1}{\widehat{k} + s^2 - \frac{2\mathbf{m}}{s}}$$

e $r(s_0) = 0$, a métrica Kottler pode ser reescrita como

$$g_{ks} = dr^2 + u(r)^2 g_{\widehat{\Sigma}},$$

onde $u : [0, +\infty) \rightarrow [s_0, +\infty)$ satisfaz $u(r(s)) = s$. A função u apresenta as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} u(r) &= O(e^r) \quad \text{quando } r \rightarrow \infty, \\ u'(r) &= \left(\widehat{k} + u(r)^2 - \frac{2\mathbf{m}}{u(r)} \right)^{1/2}, \\ u''(r) &= u(r) + \mathbf{m}u(r)^{-2} \geq 0. \end{aligned}$$

Após estender para $[s_0, +\infty) \times \widehat{\Sigma}$, refletimos para obter uma métrica em $\mathbb{R} \times \widehat{\Sigma}$

⁴Uma métrica em (N, g) é estática se existe uma função suave positiva V em N (chamada de potencial estático) tal que $\nabla_g^2 V - (\Delta_g V)g - V Ric_g = 0$.

com curvatura escalar constante -6 de tal maneira que u resolve a seguinte equação diferencial não-linear de segunda ordem

$$u'' - \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{k} - (u')^2}{u}\right) = 0. \quad (30)$$

Considere a família a um-parâmetro de métricas completas $(g_{ks})_a = dr^2 + u_a(r)^2 g_{\widehat{\Sigma}}$ com curvatura escalar constante igual a -6 em que u é uma função suave positiva satisfazendo $u_a(0) = a$ e $u'_a(0) = 0$.

No caso especial em que $\widehat{k} = 1$, $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2, g_{adss})$ é o anti-de Sitter-Schwarzschild de massa \mathbf{m} positiva. Em seguida, observe que quando \mathbf{m} tende a 0, então $s_0 \rightarrow 0$ e a métrica é, de fato, a métrica hiperbólica

$$g = \frac{ds^2}{1 + s^2} + s^2 g_{\mathbb{S}^2}.$$

Se $\widehat{\Sigma}$ é um toro ($\widehat{k} = 0$) com área igual a 4π , temos o seguinte espaço modelo $(\mathbb{R} \times \widehat{\Sigma}, g')$. Neste caso, se fizermos $\mathbf{m} = 0$ e uma mudança de coordenadas, a métrica g' pode ser reescrita como $dt^2 + e^{2t}\widehat{g}$ em $\mathbb{R} \times \widehat{\Sigma}$.

Por fim, quando $\widehat{k} = -1$, \mathbf{m} pode ser negativo, na verdade, \mathbf{m} pode pertencer ao seguinte intervalo $[-\frac{1}{3\sqrt{3}}, \infty)$. De fato, se $\mathbf{m} \leq 0$, considere a função

$$f(s) = s^2 - 1 - \frac{2\mathbf{m}}{s},$$

então sua derivada $f'(s) = 2s + \frac{2\mathbf{m}}{s^2}$ tem raiz $\tilde{s} = \sqrt[3]{-\mathbf{m}}$. Isto junto com o fato de $f(\tilde{s}) \leq 0$ garante que $\mathbf{m} \geq -\frac{1}{3\sqrt{3}}$. Se \mathbf{m} assume o valor crítico $\mathbf{m} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$, então $((0, \infty) \times \widehat{\Sigma}, \bar{g})$ é uma variedade Riemanniana completa com dois fins, no qual um deles é localmente assintoticamente hiperbólico enquanto o outro é assintótico a uma métrica cilíndrica $dr^2 + \frac{1}{3}g_{\widehat{\Sigma}}$.

4.2 Massa de Hawking e caracterização de seus pontos críticos

Uma quantidade importante neste capítulo é a massa quase-local de Hawking, ou massa de Hawking, que associa para cada superfície fechada a seguinte fórmula:

$$\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma) = \frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(8\pi \mathcal{X}(\Sigma) - \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3}\Lambda \right) d\sigma \right), \quad (31)$$

onde $\Lambda = \inf R^M$.

Considere a função massa de Hawking $\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) = \mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma_t)$. De maneira imprescindível para a teoria, Geroch (1973) mostrou que em uma variedade M com curvatura escalar não negativa, a massa de Hawking de uma superfície Σ é não-decrescente evoluindo

pelo fluxo do inverso da curvatura média no sentido de Huisken e Ilmanen. Vale ressaltar que $\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma_t)$ converge para a massa m_{ADM} , se Σ_t converge para esferas no infinito.

No sentido localmente assintoticamente hiperbólico, veja Lee e Neves (2013), este mesmo tipo de fluxo especial foi utilizado para se provar a desigualdade de Penrose para métricas de massa negativa. Onde entre os ingredientes principais está o fato que $\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t)$ é não decrescente no tempo, $\bar{m} = \sup_{\Sigma} \mu \leq 0$ (veja Definição 1.1) e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) \leq \bar{m}(\max\{1, g(\Sigma) - 1\})^{\frac{3}{2}}.$$

Considere o seguinte funcional definido no espaço das superfícies imersas:

$$\mathcal{Q}(\Sigma) = -\frac{4\pi(g(\Sigma) - 1)}{\text{Area}(\Sigma)} - K_{\Sigma} + \frac{1}{2}(R^M - \Lambda) + \frac{1}{2}\left(\|h^{\Sigma}\|^2 - \frac{1}{2\text{Area}(\Sigma)} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma\right), \quad (32)$$

onde K_{Σ} denota a curvatura gaussiana de Σ .

Baseado na Proposição 3.1 de Máximo e Nunes (2013), apresentamos um resultado de classificação de pontos críticos para a massa Hawking.

Teorema 4.1. *Seja M^3 uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $R^M \geq \Lambda$ e considere $\Sigma \subset M$ uma superfície com dois lados compacta com curvatura média não-negativa (não-positiva).*

Se Σ é um ponto crítico para a massa Hawking, então

I) Σ é mínima;

II) ou Σ é umbilica, $R^M = \Lambda$ em Σ e sua curvatura Gaussiana $K_{\Sigma} = \frac{2\pi\chi(\Sigma)}{\text{Area}(\Sigma)}$.

Em particular, uma superfície Σ com dois lados fechada com curvatura média não-negativa contida $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2, (g_{adss})_a)$, $(\mathbb{R} \times \tilde{\Sigma}, g_a)$ ou $(\mathbb{R} \times \tilde{\Sigma}, g'_a)$ é ponto crítico para $\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma)$ se, e somente se, é mínima ou um slice $\{r\} \times \tilde{\Sigma}$.

Demonstração. Usando a fórmula da primeira variação da massa Hawking (veja Proposição 43 no apêndice), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) \Big|_{t=0} = -\frac{\text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left[\int_{\Sigma} 2\phi \Delta H d\sigma \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Sigma} \left(2K_{\Sigma} + \frac{8\pi(g(\Sigma) - 1)}{\text{Area}(\Sigma)} + \frac{1}{2\text{Area}(\Sigma)} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma - \|h^{\Sigma}\|^2 + (R^M - \Lambda) \right) H \phi d\sigma \right] \\ &= -\frac{2\text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} (\Delta H + \mathcal{Q}(\Sigma)H) \phi d\sigma. \end{aligned}$$

Uma vez que $H \geq 0$. O Princípio do Máximo garante que ou $H \equiv 0$ ou $H > 0$. Se Σ não é mínima temos

$$\frac{1}{H}\Delta H + \mathcal{Q}(\Sigma) = 0. \quad (33)$$

Integrando sobre Σ na igualdade acima, obtemos

$$\int_{\Sigma} \mathcal{Q}(\Sigma) d\sigma = - \int_{\Sigma} \frac{\|\nabla H\|^2}{H^2} d\sigma \leq 0.$$

O Teorema de Gauss-Bonnet e o fato de que $R^M \geq \Lambda$ e $\|h^\Sigma\|^2 \geq \frac{1}{2}H^2$ implicam que $\int_{\Sigma} \mathcal{Q}(\Sigma) d\sigma \geq 0$. Portanto, $\int_{\Sigma} \mathcal{Q}(\Sigma) d\sigma = 0$ e H é constante. A partir de (33), deduzimos que $\mathcal{Q}(\Sigma) = 0$. Consequentemente, obtemos que Σ é umbílica, $R^M = \Lambda$ em Σ e $K_\Sigma = -\frac{4\pi(g(\Sigma)-1)}{Area(\Sigma)}$, provando o teorema \square

Ainda nesse contexto é relevante questionar quem são os máximos locais para a massa de Hawking. Para o caso em que Σ é minimizante de área com $Area(\Sigma) = \frac{4\pi\chi(\Sigma)}{\Lambda}$, a fórmula da segunda variação da massa de Hawking (veja Proposição 5.2) se resume a

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{m}_H(t) \Big|_{t=0} = -\frac{2Area(\Sigma)^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Sigma} (\Delta\varphi)^2 d\sigma.$$

Assim Σ é máximo global para a massa de Hawking. No caso da variedade de Sitter-Schwarzschild $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, veja Teorema 1.4 em Máximo e Nunes (2013).

4.3 Massa de Hawking e Rigidez de superfícies mínimas

Antes de continuar, relembremos que uma superfície Σ é *estritamente estável* se o primeiro autovalor do operador de Jacobi \mathcal{L} , que denotaremos por λ_1 , é positivo.

O ponto de partida é, mais uma vez, oferecer uma expressão envolvendo a área para se concluir um teorema de decomposição infinitesimal.

Proposição 4.1. *Seja M^3 uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $R^M \geq \Lambda$. Se $\Sigma \subset M^3$ é uma superfície mínima compacta com dois lados estritamente estável tal que maximiza a massa de Hawking, então*

$$(\lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda)Area(\Sigma) = 2\pi\chi(\Sigma)$$

Além disso, ao longo de Σ temos $h^\Sigma = 0$, $R^M = \Lambda$, $Ric(N, N) = -\lambda_1$ e a curvatura gaussiana $K_\Sigma = -\frac{4\pi(g(\Sigma)-1)}{Area(\Sigma)}$.

Demonstração. Em nosso caso a fórmula da segunda variação da massa de Hawking se

reduz a

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma)}{2Area(\Sigma)} \left[\int_{\Sigma} (\|\nabla\varphi\|^2 - (Ric(N, N) + \|h^{\Sigma}\|^2))\varphi^2 d\sigma \right] \\ &- \frac{2Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} (\mathcal{L}\varphi)^2 d\sigma - \frac{2}{3}\Lambda \frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} \|\nabla\varphi\|^2 d\sigma \\ &+ \frac{2}{3}\Lambda \frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} (Ric(N, N) + \|h^{\Sigma}\|^2)\varphi^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma) &= -\frac{1}{2(16\pi)^{3/2}Area(\Sigma)^{1/2}} \left(8\pi\mathcal{X}(\Sigma) - \frac{2}{3}\Lambda Area(\Sigma) \right) \int_{\Sigma} \varphi\mathcal{L}\varphi d\sigma \\ &- 2\frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} (\mathcal{L}\varphi)^2 d\sigma + \frac{2}{3}\Lambda \frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} \varphi\mathcal{L}\varphi d\sigma. \end{aligned}$$

Como Σ é máximo local para a massa de Hawking, temos

$$(4\pi\mathcal{X}(\Sigma) - \Lambda Area(\Sigma)) \int_{\Sigma} \varphi\mathcal{L}\varphi d\sigma \geq -2Area(\Sigma) \int_{\Sigma} (\mathcal{L}\varphi)^2 d\sigma.$$

No entanto, como Σ é estritamente estável

$$(\lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda)Area(\Sigma) \geq 2\pi\chi(\Sigma), \quad (34)$$

Por outro lado, a estabilidade estrita de Σ garante que

$$\lambda_1 \int_{\Sigma} \varphi^2 d\sigma + \int_{\Sigma} (Ric(N, N) + \|h^{\Sigma}\|^2)\varphi^2 d\sigma \leq \int_{\Sigma} \|\nabla\varphi\|^2 d\sigma, \quad (35)$$

para qualquer função suave φ em Σ .

Escolhendo $\varphi = 1$ derivamos

$$\lambda_1 Area(\Sigma) + \int_{\Sigma} (Ric(N, N) + \|h^{\Sigma}\|^2) d\sigma \leq 0. \quad (36)$$

Agora, combinando (6) e (36) obtemos

$$\lambda_1 Area(\Sigma) + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (R^M + \|h^{\Sigma}\|^2) d\sigma \leq \int_{\Sigma} K_{\Sigma} d\sigma. \quad (37)$$

Usando que $R \geq \Lambda$ e a fórmula de Gauss-Bonnet nesta última desigualdade, concluímos

$$\lambda_1 Area(\Sigma) + \frac{1}{2}\Lambda Area(\Sigma) \leq 2\pi\chi(\Sigma), \quad (38)$$

terminando a prova da proposição. \square

O seguinte resultado advém da Proposição 3.3 e acarreta na já conhecida construção de uma folheação CMC.

Proposição 4.2. *Seja M^3 uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $R \geq \Lambda$. Se $\Sigma \hookrightarrow M^3$ é uma superfície estável compacta mergulhada mínima satisfazendo*

$$(\lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda)Area(\Sigma) = 2\pi\chi(\Sigma),$$

então existe $\varepsilon > 0$ e uma função suave $\mu : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Sigma_t := \{\exp_x((\mu(t, x) + t)N(x)); x \in \Sigma\}$$

é uma família de superfícies compactas CMC. Além disso, temos que $\mu(0, x) = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial t}(0, x) = 0$ e $\int_{\Sigma} \mu(t, \cdot) d\sigma = 0$ para cada $x \in \Sigma$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Observação 4.1. *Recentemente, Ambrósio (2014a) postou um artigo no Arxiv onde construiu uma folheação $\{\Sigma_t\}_{t \in [0, \infty)}$ de uma variedade (M, g) por esferas CMC fracamente estáveis começando em $\partial M = \Sigma_0$, onde os slices Σ_t que eram pontos críticos da massa de Hawking satisfaziam a condição II do Teorema 4.1.*

Utilizaremos a mesma notação que na Seção 3, isto é, $N_t(x)$ é o campo normal unitário em Σ_t com $N_0(x) = N(x)$ para todo $x \in \Sigma$ e $d\sigma_t$ denota o elemento de área de Σ_t na métrica induzida.

O próximo lema corresponde ao Teorema 3.2 de Huisken e Polden (1999) ou o Lema 3.1 para o caso que Σ tem fronteira vazia.

Lema 4.1. *A função $\ell_t(x)$ satisfaz $H'(t) = \mathcal{L}(t)\ell_t$.*

Da Proposição 4.2 é fácil ver que $\ell_0 = 1$. Portanto, da Proposição 4.1 e do Lema 4.1, deduzimos que para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, existe uma folheação CMC $\Sigma_t \subset M$ em uma vizinhança $\Sigma = \Sigma_0$ de modo que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(t) = -\lambda_1 < 0. \quad (39)$$

Reduzindo ε , se necessário, podemos concluir que

$$\begin{cases} H(t) < 0 & \text{para } t \in (0, \varepsilon) \\ H(t) > 0 & \text{para } t \in (-\varepsilon, 0), \end{cases}$$

em outras palavras, H é uma função decrescente em t .

Ora, do Lema 4.1, obtemos as seguintes igualdades

$$H'(t)Area(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} (Ric(N_t, N_t) + \|h^{\Sigma_t}\|^2) \ell_t d\sigma_t \quad (40)$$

e

$$H'(t) \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\ell_t} d\sigma_t = \int_{\Sigma_t} (Ric(N_t, N_t) + \|h^{\Sigma_t}\|^2) d\sigma_t + \int_{\Sigma_t} \frac{\|\nabla \ell_t\|^2}{\ell_t^2} d\sigma_t, \quad (41)$$

onde esta última decorre do Teorema da Divergência.

Multiplicando (41) por $-\bar{\ell}_t$ e somando com (40), obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} (Ric(N_t, N_t) + \|h^{\Sigma_t}\|^2) \ell_t d\sigma_t &= \bar{\ell}_t \int_{\Sigma_t} (Ric(N_t, N_t) + \|h^{\Sigma_t}\|^2) d\sigma_t + \bar{\ell}_t \int_{\Sigma_t} \frac{\|\nabla \ell_t\|^2}{\ell_t^2} d\sigma_t \\ &+ H'(t) \left(Area(\Sigma_t) - \bar{\ell}_t \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\ell_t} d\sigma_t \right). \end{aligned}$$

Agora, basta notar que pela desigualdade de Hölder que

$$\theta(t, x) := Area(\Sigma_t) - \bar{\ell}_t \int_{\Sigma_t} \frac{1}{\ell_t} d\sigma_t$$

é não-positiva, onde

$$\bar{\ell}_t = \frac{1}{Area(\Sigma_t)} \int_{\Sigma_t} \ell_t d\sigma_t.$$

Como consequência desse cálculo, o seguinte resultado garantirá a monotonicidade da massa Hawking ao longo da folheação Σ_t . O interessante é que o próximo lema pode ser usado para substituir o Lema 5.2 devido a Máximo e Nunes (2013), já que independe do sinal do ínfimo da curvatura escalar da variedade ambiente.

Lema 4.2.

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} (Ric(N_t, N_t) + \|h^{\Sigma_t}\|^2) \ell_t d\sigma_t &= \bar{\ell}_t \int_{\Sigma_t} (Ric(N_t, N_t) + \|h^{\Sigma_t}\|^2) d\sigma_t \\ &+ H'(t) \theta(t, x) + \bar{\ell}_t \int_{\Sigma_t} \frac{\|\nabla \ell_t\|^2}{\ell_t^2} d\sigma_t, \end{aligned}$$

onde $\theta(t, x)$ é uma função não-positiva e $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ é dada como na Proposição 4.2

Prova do Teorema C. Desde que Σ é infinitesimalmente decomponível pela Proposição 4.1, o operador de Jacobi é reescrito como $\mathfrak{L} = \Delta - \lambda_1$, da Proposição 4.2, obtemos uma folheação $\{\Sigma_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ CMC em torno de $\Sigma = \Sigma_0$.

Aplicando o Lema 4.2 na fórmula da primeira variação da massa de Hawking,

temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) &= -\frac{Area(\Sigma_t)^{1/2}}{32\pi^{3/2}}H(t)\left[2\pi\mathcal{X}(\Sigma_t)\bar{\ell}_t - \frac{3}{4}H^2(t)\int_{\Sigma_t}\ell_t d\sigma_t\right. \\
&\quad \left. + \int_{\Sigma_t}\ell_t d\sigma_t + \int_{\Sigma_t}(Ric(N_t, N_t) + \|h^{\Sigma_t}\|^2)\ell_t d\sigma_t\right] \\
&= -\frac{Area(\Sigma_t)^{1/2}}{32\pi^{3/2}}H(t)\left[2\pi\mathcal{X}(\Sigma_t)\bar{\ell}_t - \frac{3}{4}H^2(t)\int_{\Sigma_t}\ell_t d\sigma_t\right. \\
&\quad \left. + \int_{\Sigma_t}\ell_t d\sigma_t + \bar{\ell}_t\int_{\Sigma_t}(Ric(N_t, N_t) + \|h^{\Sigma_t}\|^2)d\sigma_t\right. \\
&\quad \left. + H'(t)\theta(x, t) + \bar{\ell}_t\int_{\Sigma_t}\frac{\|\nabla\ell_t\|^2}{\ell_t^2}d\sigma_t\right].
\end{aligned}$$

Em seguida, usamos a expressão (6) para obtermos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) &= -\frac{Area(\Sigma_t)^{1/2}}{32\pi^{3/2}}H(t)\left[\frac{\bar{\ell}_t}{2}\int_{\Sigma_t}(R^M - \Lambda) + \left(\|h^{\Sigma_t}\|^2 - \frac{H^2(t)}{2}\right)\int_{\Sigma_t}d\sigma_t\right. \\
&\quad \left. + H'(t)\theta(x, t) + \bar{\ell}_t\int_{\Sigma_t}\frac{\|\nabla\ell_t\|^2}{\ell_t^2}d\sigma_t\right].
\end{aligned}$$

Reduzindo ε se necessário, ainda temos $\ell_t(x) > 0$ para cada $x \in \Sigma_t$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Assim $\frac{d}{dt}\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) \geq 0$ para $t \in [0, \varepsilon)$ e $\frac{d}{dt}\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) \leq 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, 0]$. Daí, obtemos

$$\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) \geq \mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma)$$

para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Entretanto, tendo em conta que Σ é localmente um máximo para a massa de Hawking, concluímos que $\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma) \geq \mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t)$. Portanto, a igualdade ocorre e $\frac{d}{dt}\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma_t) \equiv 0$, implicando que cada Σ_t é ponto crítico para a massa de Hawking. i.e, cada Σ_t é umbilica e $R^M = \Lambda$ ao longo de Σ_t .

Como consequência,

$$H'(t)\theta(x, t) + \bar{\ell}_t\int_{\Sigma_t}\frac{\|\nabla\ell_t\|^2}{\ell_t^2}d\sigma_t = 0,$$

para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Desde que

$$H'(t)\theta(x, t) \geq 0,$$

ℓ_t é constante.

De acordo com Huisken e Polden (1999), a métrica induzida em Σ_t evolui como

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_{ij})_t = -2\ell_t(h_{ij}^{\Sigma})_t,$$

onde $g_{\Sigma_t} = (g_{ij})_t$ é a métrica induzida em Σ_t e ℓ_t é constante assim como na prova do

Teorema 1. Ademais, como Σ_t é umbílica e $H(t)$ é constante, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{\Sigma_t} = -2H(t)g_{\Sigma_t}$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

No primeiro item, chegamos a equação $g_{\Sigma_t} = u_a(t)^2 g_{\mathbb{S}^2}$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, onde $u_a(t) = ae^{-\int_0^t H(s)ds}$ e $a^2 = \frac{Area(\Sigma)}{4\pi}$. Então segue da unicidade de soluções para a EDO correspondente que M é isométrica a um pedaço do anti-de Sitter-Schwarzschild com massa positiva. Concluimos, então, que a métrica induzida em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ é dada como $dt^2 + u_a(t)^2 g_{\mathbb{S}^2}$. É absolutamente análogo para o item *ii*) e *iii*), onde no item *ii*), $u_a(t) = ae^{-\int_0^t H(s)ds}$ com $a^2 = \frac{Area(\Sigma)}{4\pi(g(\Sigma)-1)}$ e no item *iii*) $u_a(t) = ae^{-\int_0^t H(s)ds}$ com $a^2 = \frac{Area(\Sigma)}{4\pi}$ (Aqui usamos o fato que $Area(\widehat{\Sigma}) = 4\pi$). \square

4.4 Observações pertinentes

Finalizaremos este capítulo apresentando alguns comentários sobre extensões úteis dos conceitos e resultados aqui apresentados. Antes, enunciaremos o resultado de Nunes sobre rigidez de superfícies hiperbólicas variedades tridimensionais.

Teorema 4.2 (Nunes-2011). *Seja M^3 uma variedade Riemanniana com $R^M \geq -2$. Se Σ é uma superfície Riemanniana mergulhada compacta com dois lados e genus $g(\Sigma) \geq 2$ que é localmente minimizante de área, então*

$$Area(\Sigma) \geq 4\pi(g(\Sigma) - 1).$$

Valendo a igualdade, então Σ tem uma vizinhança que é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma, dt^2 + g)$, onde g é a métrica induzida em Σ com curvatura gaussiana constante igual a -1 .

Seja $(\widetilde{\Sigma}, g_{\widetilde{\Sigma}})$ uma superfície compacta de genus $g(\Sigma) > 1$ e curvatura gaussiana constante -1 tal que $(\mathbb{R} \times \widetilde{\Sigma}, dr^2 + u^2(r)g_{\widetilde{\Sigma}})$ tem curvatura escalar igual a -2 e u é uma função real positiva que satisfaz

$$u'' - \frac{1}{2} \left(u - \frac{1 + (u')^2}{u} \right) = 0.$$

Seja a seguinte família a um-parâmetro de métricas

$$g_a = dr^2 + u_a(r)^2 g_{\widetilde{\Sigma}}, \quad (42)$$

onde $u_a(0) = a > 1$ e $u'_a(0) = 0$.

A métrica $\{g_a\}_{a>1}$ converge para uma métrica produto quando $a \rightarrow 1$. Assim, o resultado de rigidez acima pode ser deduzido para uma superfície estável que localmente maximiza a massa de Hawking. Reescalando a métrica para que $\Lambda = -2$ no item *(ii)*,

Σ teria curvatura gaussiana igual a $-\frac{1}{a^2}$ para $a > 1$ e uma vizinhança de Σ em M é isométrica a $((-\varepsilon, \varepsilon) \times \tilde{\Sigma}, g_a)$ para algum $\varepsilon > 0$. Este é precisamente o caso hiperbólico do Teorema 1.4 em Máximo e Nunes (2013).

Não podemos nos furtar de comentar que um resultado de decomposição para variedades de dimensão 3 com curvatura escalar não-negativa M contendo um toro \mathbb{T}^2 orientável estritamente estável maximizante da massa de Hawking não existe (o que seria em analogia ao caso de Cai e Galloway (2000)), já que tais superfícies não existem em uma variedade tridimensional com $R^M \geq 0$.

5 FÓRMULAS DE VARIAÇÃO PARA A MASSA DE HAWKING

É crucial para o desenvolvimento deste trabalho determinar como a Massa de Hawking evolui perante uma variação normal. Apresentamos aqui o cálculo da primeira e da segunda fórmulas de variação para a massa de Hawking.

Seja $t \rightarrow \Sigma_t$, $|t| < \varepsilon$, uma variação normal de $\Sigma = \Sigma_0$ com campo vetorial variacional $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi N$, onde $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$.

Proposição 5.1 (Fórmula da primeira variação da massa de Hawking).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{-2\text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} \varphi \Delta H d\sigma - \frac{\text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} \left[(R^M - \Lambda) \right. \\ &\quad \left. - \left(2K_{\Sigma} + \frac{8\pi(g(\Sigma) - 1)}{\text{Area}(\Sigma)} \right) + \left(\frac{1}{2\text{Area}(\Sigma)} \int_{\Sigma} H^2 d\sigma - \|h^{\Sigma}\|^2 \right) \right] H \varphi d\sigma. \end{aligned} \quad (43)$$

Demonstração. Evoluindo o funcional massa de Hawking mediante uma variação normal de Σ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1}{2} \left(8\pi \mathcal{X}(\Sigma) - \int_{\Sigma_t} \left(H^2(t) + \frac{2}{3} \Lambda \right) d\sigma_t \right) \frac{\text{Area}(\Sigma_t)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \\ &\quad - \frac{\text{Area}(\Sigma_t)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(\int_{\Sigma_t} 2H(t)H'(t) d\sigma_t + \int_{\Sigma_t} \left(H^2(t) + \frac{2}{3} \Lambda \right) \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right), \end{aligned}$$

O resultado segue aplicando acima em $t = 0$. \square

Lema 5.1. *Sejam ω a 1-forma em Σ dada por $\omega(X) = \text{Ric}(X, N)$ e $Y(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, x)$.*

Vale as seguintes afirmações:

1. $\frac{d}{dt} K_{\Sigma_t} \Big|_{t=0} = -\langle h^{\Sigma}, \nabla^2 \varphi \rangle + H \Delta \varphi + 2\omega(\nabla \varphi) + \text{div}_{\Sigma}(\text{div}_{\Sigma} \omega) \varphi + H K_{\Sigma} \varphi$;
2. $\left(\frac{d}{dt} \Delta_{\Sigma_t} \Big|_{t=0} \right) \varphi = 2\varphi \langle h^{\Sigma}, \nabla^2 \varphi \rangle + 2h^{\Sigma}(\nabla \varphi, \nabla \varphi) - H \|\nabla \varphi\|^2 + \varphi \langle \nabla H, \nabla \varphi \rangle - 2\varphi \omega(\nabla \varphi)$;
3. $\frac{d}{dt} \|h^{\Sigma_t}\|^2 \Big|_{t=0} = 2\langle h^{\Sigma}, \nabla^2 \varphi \rangle + 2R_{iNNj} h_{ij}^{\Sigma} \varphi + 2h_{ij}^{\Sigma} h_{ik}^{\Sigma} h_{jk}^{\Sigma} \varphi$;
4. $L'(0)\varphi = 4\varphi \langle h^{\Sigma}, \nabla^2 \varphi \rangle + 2R_{iNNj} h_{ij}^{\Sigma} \varphi^2 + 2\varphi^2 h_{ij}^{\Sigma} h_{ik}^{\Sigma} h_{jk}^{\Sigma} - 4\varphi \omega(\nabla \varphi) - \varphi^2 \text{div}_{\Sigma}(\text{div}_{\Sigma} \omega) - H K_{\Sigma} \varphi^2 + 2h^{\Sigma}(\nabla \varphi, \nabla \varphi) - H \|\nabla \varphi\|^2 + \varphi \langle \nabla H, \nabla \varphi \rangle + \varphi^2 H \text{Ric}(N, N) + \varphi^2 H \|h^{\Sigma}\|^2$;
5. $\frac{d^2}{dt^2} (d\sigma_t) \Big|_{t=0} = [-\varphi L\varphi + H^2 \varphi^2 + \text{div}_{\Sigma}(\nabla_Y Y)] d\sigma$.

Demonstração. O primeiro item é consequência da evolução da curvatura escalar, enquanto os demais itens podem ser encontrados em Lamm, Metzger e Schulze (2011). \square

Nosso objetivo agora é provar a fórmula da segunda variação da massa de Hawking. Para tanto, fixemos algumas notações. Faça

$$S_t = \text{Ric}(N_t, N_t) + \|h^{\Sigma_t}\|^2$$

e

$$U_t = 8\pi\mathcal{X}(\Sigma_t) - \int_{\Sigma_t} \left(H^2(t) + \frac{2}{3}\Lambda \right) d\sigma_t,$$

onde S_0 e U_0 serão denotados por S e U , respectivamente.

Agora, estamos em posição de anunciar a segunda fórmula de variação para o funcional massa de Hawking.

Proposição 5.2 (Fórmula da segunda variação da massa de Hawking). *Seja $\Sigma \subset M$ um ponto crítico para a massa de Hawking, então vale:*

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) &= -\frac{3}{4} \frac{\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma)}{\text{Area}(\Sigma)^2} \left(\int_{\Sigma} \varphi H d\sigma \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma)}{\text{Area}(\Sigma)} \int_{\Sigma_t} \|\nabla \varphi\|^2 d\sigma \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma)}{\text{Area}(\Sigma)} \int_{\Sigma_t} (\text{Ric}(N, N) + \|h^{\Sigma}\|^2 - H^2) \varphi^2 d\sigma \\ &\quad - \frac{\text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3}\Lambda \right) |\nabla \varphi|^2 d\sigma + \frac{4\text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} H^2 \varphi L \varphi d\sigma \\ &\quad + \frac{\text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3}\Lambda \right) (\text{Ric}(N, N) + \|h^{\Sigma}\|^2 - H^2) \varphi^2 d\sigma \\ &\quad - \frac{2\text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} H L'(0) \varphi d\sigma - \frac{2\text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} (L\varphi)^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Da prova da Proposição 5.1, obtemos na nova terminologia envolvendo S_t e U_t que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) &= \frac{1}{2} \frac{\text{Area}(\Sigma_t)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma_t} U_t \frac{d}{dt} (d\sigma_t) - \frac{\text{Area}(\Sigma_t)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(\int_{\Sigma_t} 2H(t) (\Delta \varphi_t + S_t \varphi_t) d\sigma_t \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Sigma_t} \left(H^2(t) + \frac{2}{3}\Lambda \right) \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right). \end{aligned}$$

Defina as seguintes funções:

- $\mathcal{F}_1 = \frac{1}{2} \frac{\text{Area}(\Sigma_t)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(\int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt} (d\sigma_t) \right) U_t;$
- $\mathcal{F}_2 = -\frac{\text{Area}(\Sigma_t)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma_t} 2H(t) \Delta_t \varphi_t d\sigma_t;$
- $F_3 = -\frac{\text{Area}(\Sigma_t)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma_t} (R - 2K_{\Sigma_t} + H^2(t) + \|h^{\Sigma_t}\|^2) \varphi_t H(t) d\sigma_t;$
- $\mathcal{F}_4 = -\frac{\text{Area}(\Sigma_t)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma_t} \left(H^2(t) + \frac{2}{3}\Lambda \right) \frac{d}{dt} (d\sigma_t).$

A fim de deduzir a prova da fórmula da segunda variação precisamos de lemas auxiliares envolvendo tais funções.

Lema 5.2.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1\Big|_{t=0} &= -\frac{1}{4}\frac{Area(\Sigma)^{-3/2}}{(16\pi)^{3/2}}U\left(\int_{\Sigma}\varphi Hd\sigma\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{Area(\Sigma)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}}U\int_{\Sigma}(\|\nabla\varphi\|^2 - S\varphi^2 + H^2\varphi^2 + \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_Y Y))d\sigma \\
&+ \frac{1}{2}\frac{Area(\Sigma)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\left(\int_{\Sigma}\varphi Hd\sigma\left[\int_{\Sigma}(2H\Delta\varphi + 2SH\varphi)d\sigma\right.\right. \\
&\quad \left.\left.- \int_{\Sigma}\left(H^2 + \frac{2}{3}\Lambda\right)(\varphi H)d\sigma\right]\right).
\end{aligned}$$

Demonstração. Tomando a derivada de \mathcal{F}_1 , obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1 &= -\frac{1}{4}\frac{Area(\Sigma_t)^{-3/2}}{(16\pi)^{3/2}}U_t\int_{\Sigma_t}\frac{d}{dt}(d\sigma_t)\int_{\Sigma_t}\frac{d}{dt}(d\sigma_t) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{Area(\Sigma_t)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\int_{\Sigma_t}\frac{d}{dt}(d\sigma_t)\left[\int_{\Sigma_t}-(2H(t)\Delta_t\varphi_t + 2S_tH(t)\varphi_t)d\sigma_t\right. \\
&\quad \left.- \int_{\Sigma_t}\left(H^2(t) + \frac{2}{3}\Lambda\right)\frac{d}{dt}(d\sigma_t)\right] + \frac{1}{2}\frac{Area(\Sigma_t)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}}U\int_{\Sigma_t}\frac{d^2}{dt^2}(d\sigma_t).
\end{aligned}$$

Agora é suficiente aplicar em $t = 0$ sobre a luz do Lema 5.1 para terminar a prova. \square

Lema 5.3.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_2\Big|_{t=0} &= \frac{Area(\Sigma)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\left(\int_{\Sigma}\varphi Hd\sigma\int_{\Sigma}H\Delta\varphi d\sigma - \int_{\Sigma}(2(\Delta\varphi)^2 + 2\varphi S\Delta\varphi)d\sigma\right. \\
&+ \int_{\Sigma}2H(2\varphi\langle h^{\Sigma}, \nabla^2\varphi\rangle + 2h^{\Sigma}(\nabla\varphi, \nabla\varphi) - H\langle\nabla\varphi, \nabla\varphi\rangle + \varphi\langle\nabla H, \nabla\varphi\rangle \\
&\quad \left.- 2\varphi\omega(\nabla\varphi))d\sigma + \int_{\Sigma}2H\frac{d}{dt}(\Delta\varphi_t)\Big|_{t=0}d\sigma - \int_{\Sigma}2H^2(\Delta\varphi)\varphi d\sigma\right).
\end{aligned}$$

Demonstração. Argumentando como antes em \mathcal{F}_2 obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_2 &= -\frac{Area(\Sigma_t)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\int_{\Sigma_t}\frac{d}{dt}d\sigma_t\int_{\Sigma_t}H(t)\Delta_t\varphi_t(d\sigma_t) - \frac{Area(\Sigma_t)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\left(\int_{\Sigma_t}2H'_t\Delta_t\varphi_td\sigma_t\right. \\
&\quad \left.+ \int_{\Sigma_t}2H(t)\frac{d}{dt}(\Delta_t\varphi_t)d\sigma_t + \int_{\Sigma_t}2H(t)\Delta_t\varphi_t\frac{d}{dt}(d\sigma_t)\right).
\end{aligned}$$

Agora aplique em $t = 0$ e usando mais uma vez o Lema 4.1 segue a prova do lema. \square

Lema 5.4.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_3\Big|_{t=0} &= -\frac{1}{2}\frac{Area(\Sigma)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\int_{\Sigma}(-\varphi H)d\sigma\int_{\Sigma}2S\varphi Hd\sigma - \frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\left[\int_{\Sigma}\left[\frac{d}{dt}R\right]_{t=0}\right. \\
&\quad - 2(-\langle h^{\Sigma}, \nabla^2\varphi\rangle + H\Delta\varphi + 2\omega(\nabla\varphi) + \operatorname{div}_{\Sigma}(\operatorname{div}_{\Sigma}\omega)\varphi + HK_{\Sigma}\varphi) \\
&\quad + 2H(\Delta\varphi + S\varphi) + (2\langle h^{\Sigma}, \nabla^2\varphi\rangle + 2R_{iNNj}h_{ij}^{\Sigma}\varphi + 2h_{ij}^{\Sigma}h_{ik}^{\Sigma}h_{jk}^{\Sigma}\varphi)\Big]\varphi Hd\sigma_t \\
&\quad - \frac{Area(\Sigma_t)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\int_{\Sigma}2S\varphi\Delta\varphi + 2S^2\varphi^2d\sigma + \frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\int_{\Sigma}2SH^2\varphi^2d\sigma \\
&\quad - \frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\int_{\Sigma}2SH\frac{d}{dt}(\varphi_t)\Big|_{t=0}d\sigma.
\end{aligned}$$

Demonstração. Como acima, derivando \mathcal{F}_3 , obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_3 &= -\frac{1}{2}\frac{Area(\Sigma_t)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\int_{\Sigma_t}\frac{d}{dt}(d\sigma_t)\int_{\Sigma_t}2S_t\varphi_t H(t)d\sigma_t \\
&\quad - \frac{Area(\Sigma_t)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\left[\int_{\Sigma_t}\frac{d}{dt}R - 2\frac{d}{dt}K_{\Sigma_t} + 2H(t)(\Delta_t\varphi_t + S_t\varphi_t) + \frac{d}{dt}\|h^{\Sigma_t}\|^2\right]\varphi_t H(t)d\sigma_t \\
&\quad - \frac{Area(\Sigma_t)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\int_{\Sigma_t}2S_t(\Delta_t\varphi_t + S_t\varphi_t)\varphi_t d\sigma_t - \frac{Area(\Sigma_t)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\int_{\Sigma_t}2S_t H(t)\varphi_t \frac{d}{dt}(d\sigma_t) \\
&\quad - \frac{Area(\Sigma_t)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\int_{\Sigma_t}2S_t H(t)\frac{d}{dt}(\varphi_t)d\sigma_t.
\end{aligned}$$

Assim fazendo $t = 0$, segue do Lema 5.1 o que desejamos. □

Finalmente apresentamos nosso último lema.

Lema 5.5.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_4\Big|_{t=0} &= \frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\int_{\Sigma}(2H^2\varphi\Delta\varphi + 2SH^2\varphi^2)d\sigma \\
&\quad - \frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\int_{\Sigma}\left(H^2 + \frac{2}{3}\Lambda\right)(\|\nabla\varphi\|^2 - S\varphi^2 + H^2\varphi^2 + \operatorname{div}_{\Sigma}(\nabla_Y Y))d\sigma \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{Area(\Sigma)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}}\int_{\Sigma}\varphi Hd\sigma\left[\int_{\Sigma}\left(H^2 + \frac{2}{3}\Lambda\right)\varphi Hd\sigma\right].
\end{aligned}$$

Demonstração. Seguindo os mesmos passos, derivamos \mathcal{F}_4 para obter

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_4 &= -\frac{Area(\Sigma_t)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma_t} (2H(t)\Delta_t\varphi_t + 2S_tH(t)\varphi_t) \frac{d}{dt}(d\sigma_t) \\
&\quad -\frac{Area(\Sigma_t)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma_t} \left(H^2(t) + \frac{2}{3}\Lambda\right) \frac{d^2}{dt^2}(d\sigma_t) \\
&\quad -\frac{1}{2} \frac{Area(\Sigma_t)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma_t} \frac{d}{dt}(d\sigma_t) \left[\int_{\Sigma_t} \left(H^2(t) + \frac{2}{3}\Lambda\right) \frac{d}{dt}(d\sigma_t). \right.
\end{aligned}$$

Procedendo exatamente como no lema anterior, completamos a prova do Lema 5.5. □

Prova da Proposição 5.2. Combinando os quatro lemas anteriores, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathbf{m}_{\mathcal{H}}(t) &= -\frac{1}{4} \frac{\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma)}{Area(\Sigma)^2} \left(\int_{\Sigma} \varphi H d\sigma \right)^2 + \frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} (2H^2\varphi\Delta\varphi + 4SH^2\varphi^2) d\sigma \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{Area(\Sigma)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(\int_{\Sigma} \varphi H d\sigma \left[\int_{\Sigma} (2H\Delta\varphi + 2SH\varphi) - \left(H^2 + \frac{2}{3}\Lambda\right)(\varphi H) d\sigma \right] \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{Area(\Sigma)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} \varphi H d\sigma \int_{\Sigma} 2H\Delta\varphi d\sigma + \frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} 2H^2\varphi\Delta\varphi d\sigma \\
&\quad - \frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} (2(\Delta\varphi)^2 + 4S\varphi\Delta\varphi + 2S^2\varphi^2) d\sigma \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{Area(\Sigma)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} \varphi H d\sigma \int_{\Sigma} 2S\varphi H d\sigma - \frac{2Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} HL'(0)\varphi d\sigma \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{Area(\Sigma)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}} S \int_{\Sigma_t} (\|\nabla\varphi\|^2 - S\varphi^2 + H^2\varphi^2) d\sigma \\
&\quad - \frac{Area(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3}\Lambda\right) (\|\nabla\varphi\|^2 - S\varphi^2 + H^2\varphi^2) d\sigma \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{Area(\Sigma)^{-1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} \varphi H d\sigma \left[\int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3}\Lambda\right) \varphi H d\sigma \right].
\end{aligned}$$

Desde que Σ é um ponto crítico para a massa de Hawking, vale a seguinte identidade

$$\int_{\Sigma} 2(H\Delta\varphi + SH\varphi) - \left(H^2 + \frac{2}{3}\Lambda\right)(\varphi H) d\sigma = -\frac{1}{2} Area(\Sigma)^{-1} \int_{\Sigma} \varphi H d\sigma.$$

Portanto, deduzimos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma) \Big|_{t=0} &= -\frac{3}{4} \frac{\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma)}{\text{Area}(\Sigma)^2} \left(\int_{\Sigma} \varphi H d\sigma \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma)}{\text{Area}(\Sigma)} \int_{\Sigma_t} \|\nabla \varphi\|^2 d\sigma \\
&- \frac{1}{2} \frac{\mathbf{m}_{\mathcal{H}}(\Sigma)}{\text{Area}(\Sigma)} \int_{\Sigma_t} (S - H^2) \varphi^2 d\sigma - \frac{2 \text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} (L\varphi)^2 d\sigma \\
&- \frac{\text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) \|\nabla \varphi\|^2 d\sigma + \frac{4 \text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} H^2 \varphi L\varphi d\sigma \\
&+ \frac{\text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} \left(H^2 + \frac{2}{3} \Lambda \right) (S - H^2) \varphi^2 d\sigma \\
&- \frac{2 \text{Area}(\Sigma)^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{\Sigma} H L'(0) \varphi d\sigma,
\end{aligned}$$

provando assim a proposição.

□

6 CONCLUSÃO

Obtemos êxito quanto ao estudo de rigidez de certas hipersuperfícies mínimas com bordo livre de dimensão no mínimo 3 e de superfícies mínimas assumindo a hipótese sobre a local maximalidade da massa de Hawking.

Vale a pena ressaltar que não globalizamos o resultado de rigidez do Teorema A, assim como feito em Bray, Brendle e Neves (2010) e Nunes (2013). O problema de se encontrar um minimizante global de volume na classe de homotopia de uma hipersuperfície é um problema muito delicado mesmo quando o ambiente tem dimensão três e a hipersuperfície é compacta. Na literatura, pode-se encontrar o problema formulado na classe de isotopia (uma clara restrição, já que as isotopias provêm de famílias de difeomorfismos do ambiente). Mesmo assim, a minimização de área gera alguma degeneração a não ser que se permita supor algumas hipóteses topológicas como incompressibilidade da superfície inicial e que o ambiente não contenha nenhuma superfície com 1-lado. Além do mais, em dimensão mais alta, não há teoremas globais de existência de minimizantes de volume com bordo livre de um determinado tipo topológico além do caso dos discos (Meeks e Yau (1980)) para dimensão igual a 2.

A nossa técnica não permite estudar todos os casos de sinais de $\inf R^M$ e $\inf H^{\partial M}$, será que há uma razão mais profunda para isso? Para exemplificar, analisando o caso onde M é uma variedade Riemanniana com curvatura escalar não negativa tal que $\inf H^{\partial M} < 0$ e $\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$, nossa técnica obrigaria a considerar a hipótese de que as componentes de $\partial\Sigma$ sejam localmente máximo para a área. Será que ela nunca é verificada ou existiria algum contra-exemplo elucidativo.

No Capítulo 4, nosso principal dificuldade foi tentar analisar como o método de Máximo e Nunes poderia ser adaptado para uma maior classe de variedade, dado que a técnica deles mostrou-se restritiva para o uso em um contexto hiperbólico.

Nosso objetivo com relação ao trabalho foi alcançado, uma vez que nossos resultados estenderam de maneira satisfatória, parte da literatura existente sobre a rigidez de hipersuperfícies mínimas onde o ambiente apresenta a fraquíssima hipótese na curvatura escalar.

REFERÊNCIAS

- ALMARAZ, S. An existence theorem of conformal scalar-flat metrics on manifolds with boundary. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 248, p. 1–22, 2010.
- AMBRÓZIO, C. On perturbations of the Anti-de Sitter-Schwarzschild spaces of positive mass. **arXiv preprint arXiv:1402.4317**, 2014a.
- AMBRÓZIO, C. Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds. **J. Geom. Anal.**, p. 1–17, 2014b.
- ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. Coordinate Invariance and Energy Expressions in General Relativity. **Phys. Rev.**, v. 122, p. 997–1006, 1961.
- AUBIN, T. Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. **J. Math. Pures Appl.**, v. 55, p. 269–296, 1976.
- BARBOSA, J. L.; DO CARMO, M. P.; ESCHENBURG, J. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds. **Math. Z.**, v. 197, n. 1, p. 123–138, 1988.
- BARTNIK, R. The mass of an asymptotically flat manifold. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 39, p. 661–693, 1986.
- BRAY, H.; BRENDLE, S.; EICHMAIR, M.; NEVES, A. Area-minimizing projective planes in three-manifolds. **Commun. Pure Appl. Math.**, v. 63, p. 1237–1247, 2010.
- BRAY, H.; BRENDLE, S.; NEVES, A. Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds. **Commun. Anal. Geom.**, v. 18, p. 821–830, 2010.
- BRENDLE, S. Rigidity phenomena involving scalar curvature. **arXiv preprint arXiv:1008.3097**, 2010.
- BRENDLE, S.; HUNG, P.K.; WANG, M.T. A Minkowski-type inequality for hypersurfaces in the Anti-deSitter-Schwarzschild manifold. **arXiv preprint arXiv:1209.0669**, 2012. [Http://arxiv.org/abs/1209.0669](http://arxiv.org/abs/1209.0669).
- BRENDLE, S.; NEVES, A.; MARQUES, F. Deformations of the hemisphere that increase scalar curvature. **Invent. Math.**, v. 185, p. 175–197, 2011.
- CAI, M. Volume minimizing hypersurfaces in manifolds of nonnegative scalar curvature, Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry. Mathematical Society of Japan, v. 34 of *Advanced studies in pure mathematics*, p. 1–7. 2002.

- CAI, M.; GALLOWAY, G. Rigidity of area-minimizing tori in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. **Comm. Anal. Geom.**, v. 8, n. 3, p. 565–573, 2000.
- CASTRO, K.; ROSALES, C. Free boundary stable hypersurfaces in manifolds with density and rigidity results. **J. Geom. Phys.**, v. 79, p. 14–28, 2014.
- CHEN, J.; FRASER, A.; PANG, C. Minimal immersions of compact bordered Riemann surfaces with free boundary. **arXiv preprint arXiv:1209.1165**, 2012. ArXiv:1209.1165.
- CHRUSCIEL, P.; HERZLICH, M. The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds. **Pacific J. Math.**, v. 212, n. 2, p. 231–264, 2003.
- CHRUSCIEL, P.; SIMON, W. Towards the classification of static vacuum spacetimes with negative cosmological constant. **J. Math. Phys.**, v. 42, n. 4, p. 1779–1817, 2001.
- CRUZ, C; LIMA, L.; MONTENEGRO, J. Deforming the scalar curvature of the de Sitter-Schwarzschild space. **arXiv 1411.1600**, 2014.
- ESCOBAR, J. Uniqueness theorems on conformal deformation of metrics, Sobolev inequalities and an eigenvalue estimate. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 43, p. 857–883, 1990.
- ESCOBAR, J. Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature at the boundary. **Ann. of Math.**, v. 136, p. 1–50, 1992a.
- ESCOBAR, J. The Yamabe problem on manifolds with boundary. **J. Diff. Geom.**, v. 35, p. 21–84, 1992b.
- ESCOBAR, J. Conformal metrics with prescribed mean curvature on the boundary. **Calc. Var. Partial Differ. Equ.**, v. 4, p. 559–592, 1996.
- ESCOBAR, J. Uniqueness and non-uniqueness of metrics with prescribed scalar and mean curvature on compact manifolds with boundary. **Journal of Functional Analysis**, v. 202, n. 2, p. 424–442, 2003.
- FRASER, A.; LI, M. Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with non-negative Ricci curvature and convex boundary. **Journal of Differential Geometry**, v. 96, n. 2, p. 183–200, 2014. ArXiv:1204.6127.
- GEROCH, R. Energy Extraction. **Ann. New York Acad. Sci.**, v. 224, p. 108–117, 1973.
- GILBARG, D; TRUNDIGER, N.S. Elliptic partial differential equations of second order. 2001.

HUISKEN, G.; POLDEN, A. Geometric evolution equations for hypersurfaces, Springer, p. 45–86. 1999.

LAMM, T.; METZGER, J.; SCHULZE, F. Foliations of asymptotically flat manifolds by surfaces of Willmore type. **Math. Ann.**, v. 350, p. 1–78, 2011.

MARQUES, F. Existence results for the Yamabe problem on manifolds with boundary. **Indiana Univ. Math.**, v. 54, p. 1599–1620, 2005.

MARQUES, F. Conformal deformation to scalar flat metrics with constant mean curvature on the boundary. **Commun. Anal. Geom.**, v. 15, n. 2, p. 381–405, 2007.

MÁXIMO, D; NUNES, I. Hawking mass and local rigidity of minimal two-spheres in three-manifolds. **Commun. Anal. Geom.**, v. 21, n. 2, p. 409–432, 2013.

MEEKS, M.; YAU, S.T. Topology of three dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory. **Annals of Mathematics**, p. 441–484, 1980.

MIAO, P. Positive mass theorem on manifolds admitting corners along a hypersurface. **Adv. Theor. Math. Phys.**, v. 6, p. 1163–1182, 2002.

MICALLEF, M.; MORARU, V. Splitting of 3-manifolds and rigidity of area-minimising surfaces. **arXiv preprint arXiv:1107.5346**, 2011.

MORARU, V. On Area Comparison and Rigidity Involving the Scalar Curvature. **arXiv preprint arXiv:1309.1050**, 2013.

NARDI, G. Schauder estimation for solutions of Poisson’s equation with Neumann boundary condition. **arXiv preprint arXiv:1302.4103**, 2013.

NEVES, A.; LEE, D. The Penrose inequality for asymptotically locally hyperbolic spaces with nonpositive mass. **arXiv preprint arXiv:1310.3002**, 2013.

NUNES, I. Rigidity of Area-Minimizing hyperbolic surfaces in three-manifolds. **Journal of Geometric Analysis**, v. 23, n. 3, p. 1290–1302, 2013.

OBATA, M. The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. **J. Differential Geometry**, v. 6, p. 247–258, 1971/72.

SCHOEN, R. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. **J. Diff. Geom.** , v. 20, p. 479–495, 1984.

SCHOEN, R.; YAU, S.T. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature. **Ann. of Math.**, v. 110, p. 127–142, 1979a.

SCHOEN, R.; YAU, S.T. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. **Comm. Math. Phys.**, v. 65, p. 45–76, 1979b.

SCHWARTZ, R. Monotonicity of the Yamabe invariant under connect sum over the boundary. **Ann. Global Anal. Geom.** , v. 35, p. 115–131, 2009.

SHEN, Y.; ZHU, S. Rigidity of stable minimal hypersurfaces. **Math. Ann.** , v. 3091, 1997.

TOPONOGOV, V. Evaluation of the length of a closed geodesic on a convex surface. **Dokl. Akad. Nauk**, v. 124, p. 282–284, 1959.

TRUNDINGER, N. Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. **Annali Scuola Norm. Sup. Pisa**, v. 22, p. 265–274, 1968.

WANG, M.T.; WU, J.; XIA, C.; YUXIN, G. A penrose inequality for graphs over Kottler space . **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, p. 1–28, 2014.

WANG, X. The mass of asymptotically hyperbolic manifolds. **J. Differential Geom.**, v. 57, n. 2, p. 273–299, 2001.

WITTEN, E. A new proof of the positive mass theorem. **Commun. Math. Phys.**, v. 80, p. 381–402, 1981.

YAU, S.T. Geometry of three manifolds and existence of black hole due to boundary effect. **Adv. Theor. Math. Phy.**, v. 5, p. 755–767, 2001.