Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ana Paula Dantas de Souza

Equações Integro-Diferenciais de Ordem Fracionária

Maceió
2013

Ana Paula Dantas de Souza

Equações Integro-Diferenciais de Ordem Fracionária

Dissertação de mestrado na área de concentração de Análise submetida em 18 de setembro de 2013 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar de Souza Almeida

Maceió
2013

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

S729e Souza, Ana Paula Dantas de.
Equações integro-diferenciais de ordem fracionária / Ana Paula Dantas de Souza. – 2013.
67 f. : il.

Orientador: Julio Cesar de Souza Almeida.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 66-67.

1. Semigrupos de operadores lineares limitados. 2. Semigrupos analíticos. 3. Equações integro-diferenciais de ordem fracionária. I. Título.

CDU: 517.98

Equações Integro-Diferenciais de Ordem Fracionária

Ana Paula Dantas de Souza

Dissertação de mestrado na área de concentração de Análise submetida em 18 de setembro de 2013 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Julio Cesar de Souza Almeida (Orientador)

Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira (UFAL)

Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández (UFRJ)

AGRADECIMENTOS

A Deus por me proteger nos momentos difíceis, me dar força interior para vencer as dificuldades e mostrar os caminho nas horas incertas. À minha família pelo apoio incondicional em todos os momentos deste mestrado.

Em especial, agradeço à minha mãe Marlene que sempre esteve ao meu lado me apoiando e dando forças para que eu conseguisse meus objetivos. Ao meu pai Cândido, que com sua responsabilidade e honestidade, me ensinou a escolher sempre o melhor caminho.

Ao meu namorado Allan que esteve comigo durante toda a minha vida acadêmica e sempre me incentivou com seus valiosos conselhos.

Ao meu orientador Prof. Julio Cesar, pela liberdade e confiança referente ao presente trabalho, além da compreensão em todos os momentos necessários. Agradeço aos membros da banca examinadora, Professores Krerley Oliveira e Adán Corcho, pela disponibilidade de participar e pelas contribuições acerca da dissertação. Agradeço também a todos os professores do Instituto de Matemática, os quais se mostram grandes mestres.

Meus agradecimentos aos colegas de turma e com certeza futuros excelentes profissionais: Allan, Felipe, Marcos e Max, pelo convívio, troca de ideias e crescimento mútuo.

À FAPEAL, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação apresentaremos a demonstração de um Teorema obtido por C. Cuevas e J.C. de Souza, o qual estabelece a existência e unicidade de solução branda S-assintoticamente ω-periódica para uma equação semilinear fracionária. Além disso, abordaremos uma aplicação deste problema para uma equação diferencial parcial de ordem fracionária. Este artigo foi publicado em 2008 no Applied Mathematics Letters, com o título *S-asymptotically ω-periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations.*

Palavras-chave: Semigrupos fortemente contínuos de operadores limitados. Semigrupos Analíticos. Equações integro-diferenciais de ordem fracionária.

ABSTRACT

In this work we demonstrate a theorem obtained by C. Cuevas e J.C. de Souza, which establishes the existence and uniqueness of mild solution S-asymptotically ω-periodic for a semilinear fractional equation. In addition, we discuss an application of this problem for a partial differential equation of fractional order. This article was published in 2008 in Applied Mathematics Letters, as the title *S-asymptotically ω-periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations*.

Keywords: Strongly continuous semigroups of bounded operators. Analytic semigroups. Integro-differential equations of fractional order.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **7**

1 PRELIMINARES **9**
1.1 **Integração de funções com valores vetoriais** 9
1.2 **Um Pouco de Topologia** 12
1.2.1 Teorema de Ponto Fixo 12
1.2.2 Medidas de Não-Compacidade 14
1.3 **Cálculo Fracionário** 15
1.3.1 Operador Integral 17
1.3.2 Operador Diferencial 19

2 FUNÇÕES S-ASSINTOTICAMENTE ω-PERIÓDICAS **21**

3 SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES LIMITADOS **26**
3.1 **Semigrupos Uniformemente Contínuos** 26
3.2 **Semigrupos Fortemente Contínuos** 29
3.3 **O Teorema de Hille-Yosida** 34
3.4 **Semigrupos Analíticos** 40
3.5 **O Semigrupo Gaussiano** 48

4 SOLUÇÕES S-ASSINTOTICAMENTE ω-PERIÓDICAS DE EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO FRACIONÁRIA **53**
4.1 **Operador Solução** 53
4.2 **Soluções brandas S-assintoticamente ω-periódica** 56

REFERÊNCIAS **66**

INTRODUÇÃO

Esta dissertação está baseada no artigo *S-asymptotically ω-periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations* de 2008. Neste artigo Cuevas e Souza provaram a existência e a unicidade de soluções brandas S-assintoticamente ω-periódicas da equação de evolução semilinear do tipo fracionária

$$\begin{aligned} v'(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Av(s)ds + f(t,v(t)) \quad t \geq 0, & (1) \\ v(0) &= u_0 \in X, & (2) \end{aligned}$$

onde $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear densamente definido do tipo setorial num espaço de Banach complexo X e $f : [0,\infty) \times X \to X$ é uma função contínua satisfazendo uma condição tipo Lipschitz.

O objetivo deste trabalho é demonstrar o resultado citado acima obtido por Cuevas e Souza. Com esse intuito, na primeira seção do Capítulo 1, abordamos o conceito de Integração de Bochner, que estende o conceito de integral de Lebesgue para funções com valores em um espaço de Banach. Ao longo desta dissertação, salvo menção contrária, X munido da norma $\|\cdot\|_X$ representará um espaço de Banach.

Na seção 1.2, apresentamos uma breve exposição de Medidas de Não-compacidade e enunciamos um Teorema de Ponto Fixo, sendo este, ferramenta fundamental para a demonstração do principal resultado deste trabalho.

A seção 1.3 trata do estudo do cálculo fracionário. De acordo com a abordagem feita neste capítulo, a integral do tipo convolução em (**??**) é conhecida como a integral de Riemann-Liouville de ordem $\alpha - 1 > 0$, ou seja,

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Av(s)ds = J^{\alpha-1}Av(t).$$

O estudo das funções contínuas e limitadas $f : [0,\infty) \to X$, para as quais existe $\omega > 0$ tal que $\lim_{t\to\infty}(f(t+\omega) - f(t)) = 0$, é apresentado no Capítulo 2 e retomado no Capítulo 4. No decorrer do segundo capítulo, chamaremos estas funções de S-assintoticamente ω-periódicas e estudaremos as principais propriedades desta classe de funções. Já no quarto capítulo, verificamos a existência de soluções brandas S-assintoticamente ω-periódica para o problema (**??**)-(**??**).

Os Semigrupos Lineares Limitados são abordados no Capítulo 3. Nas seções 3.1, 3.2 e 3.4, nos dedicamos ao estudo qualitativo dos Semigrupos Uniformemente Contínuos, dos C_0-semigrupos e dos Semigrupos Analíticos, respectivamente. Na seção 3.3, estabelecemos vários resultados com a finalidade de demonstrar o Teorema de Hille-Yosida. Por fim, na seção 3.5, apresentamos um exemplo de semigrupo analítico, a saber, o Semigrupo Gaussiano, o qual será novamente citado no último resultado deste trabalho.

O último capítulo está dividido em duas seções. Na primeira, introduzimos algumas definições relevantes para o entendimento da segunda seção. Por exemplo, veremos a importante definição de operador linear setorial tipo μ.

Definição 0.1. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ fechado é dito* ***setorial do tipo*** *μ se existem $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $M > 0$ tais que seu resolvente existe fora do setor*

$$\mu + S_\theta = \{\mu + \lambda; \lambda \in \mathbb{C}, \mid arg(-\lambda) \mid < \theta\}$$

e

$$\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leq \frac{M}{\mid \lambda - \mu \mid}, \quad \lambda \notin \mu + S_\theta.$$

Na seção final, definimos o conceito de solução branda S-assintoticamente ω-periódica para o problema (**??**)-(**??**).

Definição 0.0.1. *Suponha que A é o gerador de um operador solução integrável $S_\alpha(t)$. Uma função $u \in C_b([0,\infty), X)$ é dita uma* ***solução branda S-assintoticamente ω-periódica*** *do problema (**??**)-(**??**) se $u : \mathbb{R}_+ \to X$ for uma função S-assintoticamente ω-periódica e satisfaz*

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds, \qquad \forall t \geq 0. \tag{3}$$

Além disso, utilizamos os capítulos anteriores para mostrar alguns resultados importantes que garantem a existência e unicidade de solução branda S-assintoticamente ω-periódica. Entre esses, destacamos o resultado abaixo:

Teorema 0.1. *Sejam A um operador setorial do tipo $\mu < 0$, $f : [0,\infty) \times X \to X$ uma função contínua tal que $f(\cdot, 0)$ é integrável em $[0,\infty)$ e $L : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e integrável tal que*

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L(t) \| x - y \|, \qquad \textit{para todo } x, y \in X, t \geq 0.$$

*Então o problema (**??**) e (**??**) tem uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica. Além disso, vale*

$$\| u \|_\infty \leq \overline{C}(\| u_0 \| + \| f(\cdot,0) \|_1) \exp(\overline{C} \| L \|_1),$$

onde $\overline{C}$ é uma constante suave e positiva.

1 PRELIMINARES

Neste capítulo fixamos notações e apresentamos os requisitos necessários para a compreensão desta dissertação.

1.1 Integração de funções com valores vetoriais

Neste seção temos como objetivo apresentar uma breve introdução da integral de Bochner. Abordaremos apenas o necessário para compreensão dos Capítulos 3 e 4. Para um estudo mais detalhado consulte [?] e [?]. Como já convencionamos, X representará um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_X$. Além disso, $\mathcal{L}(X)$ é o espaço de Banach dos operadores lineares limitados de X em X com a norma usual.

A integral de Bochner estende a definição de integral de Lebesgue para funções com valores em um espaço de Banach, como o limite de integrais de funções simples. Para isto, consideremos f uma função

$$f : J \to X$$

definida em algum intervalo $J \subset \mathbb{R}$.

Definição 1.1.1. *Uma função vetorial $f : J \subset \mathbb{R} \to X$ é dita **simples** se f pode ser representada por*

$$f = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{J_k}, \tag{1.1}$$

para algum $n \in \mathbb{N}$, onde $x_k \in X$ e J_k são subconjuntos mensuráveis de J com medida de Lebesgue finita $\mu(J_k)$.

Se f é uma função simples, definimos sua integral por

$$\int_J f(s)ds := \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(J_k),$$

a qual independe da representação em (**??**).

Definição 1.1.2. *Se f pode ser aproximada pontualmente por funções simples, ou seja, se existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples em J tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|f(s) - f_n(s)\| = 0 \quad \mu - q.t.p. \tag{1.2}$$

*então f é dita **(fortemente) mensurável**.*

Com esta definição, o conjunto das funções mensuráveis é um espaço vetorial.

Definição 1.1.3. *Se f é mensurável e existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples em J, tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_J \|f(s)-f_n(s)\|ds = 0, \tag{1.3}$$

então dizemos que f é (Bochner) integrável. A integral acima é uma integral de Lebesgue.

Se f é integrável, definimos sua integral por

$$\int_J f(s)ds := \lim_{n\to\infty}\int_J f_n(s)ds,$$

a qual independe da sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na definição acima.

No que se segue, listaremos algumas propriedades elementares das funções mensuráveis. As demonstrações podem ser encontradas em [?].

Proposição 1.1. *Seja $f : J \to X$ uma função vetorial, então*

1. *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções mensuráveis definidas em J que converge para f no sentido (??), então f também é mensurável.*

2. *Se f é mensurável e $F : J \to \mathcal{L}(X)$ é fortemente contínua, então a composição $F \circ f : J \to X$ também é mensurável.*

Proposição 1.2. *Se f é mensurável, então as afirmações são equivalentes:*

(i) f *é integrável.*

(ii) $\int_J \|f(s)\|ds < \infty$.

Como consequência imediata das Proposições **??** e **??**, podemos observar que se $f : J \to X$ é uma função integrável e $F : J \to \mathcal{L}(X)$ é fortemente contínua, então a composta $F \circ f : J \to X$ é também integrável. Além disso, as seguintes propriedades são válidas para a integral de Bochner.

(i) $\| \int_J f(s)ds \| \leq \int_J \| f(s) \| ds$;

(ii) (Teorema de Fubini) Seja $I = I_1 \times I_2$ um retângulo em $\mathbb{R}^2$. Seja $f : I \to X$ mensurável e suponha que

$$\int_{I_1}\int_{I_2} \|f(s,t)\|dtds < \infty.$$

Então f é Bochner integrável e

$$\int_{I_1}\int_{I_2} f(s,t)dtds \quad \text{e} \quad \int_{I_2}\int_{I_1} f(s,t)dsdt$$

existem e são iguais. Além disso as integrais acima coincidem com $\int_I f(s,t)d(s,t)$.

(iii) (Teorema da Convergência Dominada) Sejam $f_n : I \to X$, com $n \in \mathbb{N}$, funções Bochner integráveis. Se $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ existe em μ-q.t.p. e existe uma função integrável $g : I \to \mathbb{R}$ tal que $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ em μ-q.t.p. para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é Bochner integrável e

$$\int_I f(t) = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n(t)dt.$$

Além disso, $\int_I \|f(t) - f_n(t)\|dt \to 0$, quando $n \to \infty$.

A proposição **??** será utilizada no capítulo 3 e sua demonstração segue diretamente do próximo resultado.

Teorema 1.1. *Sejam $T : X \to Y$ um operador linear limitado entre os espaços de Banach X e Y e $f : I \to X$ Bochner integrável. Então $T \circ f : t \mapsto T(f(t))$ é Bochner integrável e*

$$T\Big(\int_J f(s)ds\Big) = \int_J T(f(s))ds.$$

Demonstração. Sabemos que $\int_I f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n(t)dt$, onde $g_n : I \to X$ são funções simples. Assim

$$\int_I g_n(t)dt = \sum_{i=1}^{k_n} x_{in}\mu(J_{in}).$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} T\Big(\int_J f(t)dt\Big) &= T\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} x_{in}\mu(J_{in})\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} T\Big(x_{in}\mu(J_{in})\Big). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_I \|T(f(t)) - T(g_n(t))\|dt \leq \|T\| \int_I \|f(t) - g_n(t)\|dt \to 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_I T(f(t))dt &= \lim_{n\to\infty} \int_I T(g_n(t))dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} T(x_{in})\mu(J_{in}). \end{aligned}$$

□

O resultado a seguir nos garante, sob algumas hipóteses, que podemos comutar integração com aplicações de operadores fechados.

Proposição 1.3. *Sejam X, Y espaços de Banach e $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador fechado. Se $f : J \to X$ é uma função integrável, $f(s) \in D(A)$ para quase todo $s \in J$ e $Af : J \to Y$ dado por $(Af)(s) := Af(s)$ é integrável, então $\int_J f(s)ds \in D(A)$ e*

$$A\Big(\int_J f(s)ds\Big) = \int_J Af(s)ds.$$

Demonstração. Consideremos o espaço de Banach $X \times X$ com a norma $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Se denotamos por $G(A)$ o gráfico de A, por definição $G(A)$ é um subespaço fechado de $X \times X$. Defina $g : I \to G(A) \subset X \times X$ por $g(t) := (f(t), A(f(t)))$. Portanto, g é mensurável e, como f e $A \circ f$ são integráveis, temos

$$\int_I \|g(t)\|dt = \int_I \|f(t)\|dt + \int_I \|A(f(t))\|dt < \infty.$$

Logo g é Bochner integrável. Considere os operadores limitados $P_i : X \times X \to X$ definidos por $P_i(x_1, x_2) = x_i$, para $i = 1, 2$. Do teorema (**??**), obtemos

$$\begin{aligned} \int_I g(t)dt &= \Big(P_1\Big(\int_I g(t)dt\Big), P_2\Big(\int_I g(t)dt\Big)\Big) \\ &= \Big(\int_I (P_1 \circ g)(t)dt, \int_I (P_2 \circ g)(t)dt\Big) \\ &= \Big(\int_I f(t)dt, \int_I A(f(t))dt\Big). \end{aligned}$$

Além disso, $\int_I g(t)dt \in G(A)$, pois $\int_I g(t)dt$ é limite de pontos de $G(A)$. Portanto,

$$\int_I f(t)dt \in D(A) \quad \text{e} \quad A\Big(\int_I f(t)dt\Big) = \int_I A(f(t))dt.$$

$\square$

1.2 Um Pouco de Topologia

Nesta segunda seção, apresentaremos um Teorema de Ponto Fixo e a noção de medidas de não-compacidade, os quais são requisitos necessários para a compreensão dos principais resultados desta dissertação, a saber, os Teoremas **??** e **??**.

1.2.1 Teorema de Ponto Fixo

O próximo teorema é uma consequência do Teorema do ponto fixo de Banach e sua demonstração pode ser encontrada em [**?**].

Sejam Y e Z espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_Y$ e $\|\cdot\|_Z$, respectivamente. Suponha a existência de uma relação de ordem parcial $\preceq$ em Z e uma aplicação $m : Y \to Z$ satisfazendo as condições abaixo:

(i) Para todo $y \in Y$, $0 \preceq m(y)$;

(ii) a norma $\|\cdot\|_Z$ é monótona com respeito a ordem parcial $\preceq$, ou seja, se $0 \preceq z_1 \preceq z_2$, então $\|z_1\|_Z \leq \|z_2\|_Z$;

(iii) Existem constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que

$$\|y\|_Y \leq C_1 \|m(y)\|_Z \text{ e } \|m(y)\|_Z \leq C_2 \|y\|_Y, \quad \text{para todo } y \in Y.$$

Nestas condições, enunciamos o seguinte Teorema:

Teorema 1.2. *Sejam $S \subset Y$ um conjunto fechado e não vazio e $P : S \to S$ uma aplicação contínua. Suponha que existe um operador linear e limitado $B : Z \to Z$ tal que:*

(I) *O raio espectral $r(B) < 1$;*

(II) *O operador B é crescente com relação a ordem parcial $\preceq$, ou seja, se $0 \preceq z_1 \preceq z_2$, então $Bz_1 \preceq Bz_2$;*

(III) *Para todo $y_1, y_2 \in S$, tem-se que $m(Py_1 - Py_2) \preceq Bm(y_1 - y_2)$.*

Então, P tem um único ponto fixo.

A seguir mostraremos um exemplo de uma aplicação $m : Y \to Z$, a qual satisfaz as hipóteses **(i)**, **(ii)** e **(iii)**. Este exemplo será utilizado na demonstração do Teorema **??**.

Exemplo 1.1. *Seja $C_b([0,\infty), X)$ o espaço das funções contínuas e limitadas munido da norma da convergência uniforme. Considere os espaços $Y = C_b([0,\infty), X)$ e $Z = C_b([0,\infty), \mathbb{R})$. Considere Z com a ordem pontual, isto é, se $u_1, u_2 \in Z$, dizemos que $u_1 \preceq u_2$, quando $u_1(t) \leq u_2(t)$ para todo $t \geq 0$. Para cada $u \in C_b([0,\infty), X)$, defina*

$$m(u)(t) = \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)\|, \qquad t \geq 0.$$

*Então, m é uma aplicação $m : C_b([0,\infty), X) \to C_b([0,\infty), \mathbb{R})$ que satisfaz as hipóteses **(i)**, **(ii)** e **(iii)**.*

Primeiramente mostraremos que m toma valores em $C_b([0,\infty), \mathbb{R})$. Seja u uma função no espaço $C_b([0,\infty), X)$. Então, temos que

$$\mid m(u)(t) \mid \leq \sup_{s\in[0,\infty)} \|u(s)\| = \|u\|_\infty, \qquad t \geq 0,$$

o que mostra que $m(u)$ é limitada. Além disso, dados $\varepsilon > 0$ e $t \geq 0$, tome $h = h(\varepsilon, t) > 0$ tal que se $\theta, \theta' \in [t, t+h]$, então $\|u(\theta) - u(\theta')\| < \varepsilon$. Se $\sup_{s\in[0,t+h]} \|u(s)\|$ for atingido no intervalo $[0,t]$, então

$$\mid m(u)(t+h) - m(u)(t) \mid \;=\; \mid \sup_{s\in[0,t+h]} \|u(s)\| - \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)\| \mid = 0 < \varepsilon.$$

Suponha agora que $\sup_{s\in[0,t+h]} \|u(s)\|$ seja atingido no intervalo $(t, t+h]$ e seja s' o menor valor em $(t, t+h]$ tal que $\sup_{s\in[0,t+h]} \|u(s)\| = \|u(s')\|$. Seja também s'' o maior valor em $[0,t]$ tal que $\sup_{s\in[0,t]} \|u(s)\| = \|u(s'')\|$. Sabemos que $\|u(s'')\| < \|u(s')\|$ e $\|u(s'')\| \in [\|u(s'')\|, \|u(s')\|]$. Segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $\tilde{s} \in [s'', s']$ tal que $\|u(\tilde{s})\| = \|u(s'')\|$. Da escolha de s' e s'' temos que $\tilde{s} \in [t, s'] \subseteq [t, t+h]$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mid m(u)(t+h) - m(u)(t) \mid \;&=\; \mid \sup_{s\in[0,t+h]} \|u(s)\| - \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)\| \mid \\
&= \|u(s')\| - \|u(s'')\| \\
&= \|u(s')\| - \|u(\tilde{s})\| \\
&\leq \|u(s') - u(\tilde{s})\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Com um processo análogo, mostra-se a desigualdade acima, para $h < 0$ com $t+h \geq 0$. Com isso, mostramos que $m(u)$ é contínua e, portanto, $m(u) \in C_b([0,\infty),\mathbb{R})$. As hipóteses **(i)** e **(ii)** são obviamente satisfeitas. Se $u \in C_b([0,\infty),X)$, temos

$$\begin{aligned}
\|m(u)(t)\|_Z &= \sup_{t\in[0,\infty)} \mid m(u)(t) \mid \\
&= \sup_{t\in[0,\infty)} \left(\sup_{s\in[0,t]} \|u(s)\| \right) \\
&= \sup_{t\in[0,\infty)} \|u(t)\| = \|u\|_Y,
\end{aligned}$$

o que mostra que vale **(iii)**, com $C_1 = C_2 = 1$.

1.2.2 Medidas de Não-Compacidade

A definição de medida de não compacidade de subconjuntos limitados mostra-se bastante útil na teoria de equações diferenciais em espaços de Banach. A seguir, definiremos medidas de não compacidade e abordaremos algumas propriedades que serão utilizadas nas próximas seções.

Definição 1.1. *Sejam E um espaço de Banach, B um subconjunto limitado de E e $\varepsilon > 0$. Uma cobertura $\{V_i\}$ de B é uma ε-cobertura se $diam(V_i) < \varepsilon$ para todo i. A **medida de não compacidade de** B é definida por*

$$\psi_E(B) = \inf\{\varepsilon > 0; \textit{existe uma } \varepsilon\textit{-cobertura finita de } B\}.$$

Uma cobertura $\{B_i\}$ de B por bolas de raio $\leq \varepsilon$ é chamada de ε-cobertura restrita de B. Assim, a medida restrita de não compacidade é definida por

$$\psi_E(B) = \inf\{\varepsilon > 0; \text{existe uma } \varepsilon\text{-cobertura restrita finita de } B\}.$$

A proposição a seguir apresenta várias propriedades das medidas de não compacidade que serão utilizadas no capítulo 4, cujas demonstrações podem ser encontradas em [?].

Proposição 1.4. *Sejam A e B subconjuntos limitados de um espaço de Banach E. Então*

(a) $\psi_E(A) = 0$ *se, e somente se,* $\overline{A}$ *é compacto;*

(b) $\psi_E(A) = \psi_E(\overline{A})$;

(c) $\psi_E(\lambda A) = \mid \lambda \mid \psi_E(A)$;

(d) Se $A \subset B$, *então* $\psi_E(A) \leq \psi_E(B)$;

(e) $\psi_E(A+B) \leq \psi_E(A) + \psi_E(B)$.

1.3 Cálculo Fracionário

O principal objetivo do cálculo fracionário é manter, num sentido generalizado, a relação entre operadores diferenciais e operadores integrais dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo. A seguir, serão introduzidas algumas notações convenientes para o operador diferencial e para o operador integral.

Definição 1.2. *Denotemos por* $\boldsymbol{D}$ *o operador que corresponde uma função diferenciável a sua derivada, isto é*

$$Df(x) := f^{'}(x).$$

Definição 1.3. *Denotemos por* J_a *o operador que correponde uma função* f*, assumindo ser (Riemann) integrável no intervalo compacto* $[a, b]$ *a sua primitiva centrada em* a*, isto é*

$$J_a f(x) := \int_a^x f(t)dt,$$

para $a \leq x \leq b$*.*

Definição 1.4. *Para* $n \in \mathbb{N}$*, usaremos o símbolo* D^n *e* J_a^n *para denotar a n-ésima iteração de* D *e* J_a*, respectivamente, isto é*

$$D^1 := D \quad e \quad J_a^1 := J_a,$$

e

$$D^n := DD^{n-1} \quad e \quad J_a^n := J_a J_a^{n-1}, \quad para\ n \geq 2.$$

Com estas notações o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser reescrito como

$$DJ_a f = f$$

o que implica

$$D^n J_a^n f = f, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, D^n é a inversa a esquerda de J_a^n, num espaço adequado de funções. Nosso objetivo será estender num certo sentido a definição **??**, para $n \in \mathbb{R}$. Para isto, desejamos preservar esta propriedade. Existem várias generalizações possíveis, em nosso caso, estamos interessados na generalização de Riemann-Liouville.

Antes de definirmos os operadores D^n e J_a^n, para $n \in \mathbb{R}$, lembraremos algumas propriedades já conhecidas para o caso $n \in \mathbb{N}$. O resultado a seguir pode ser demonstrado por indução e tem como utilidade reduzir o cálculo de J_a^n a uma única integral tipo convolução.

Lema 1.1. *Seja* f *uma função Riemann integrável em* $[a, b]$*. Então, para* $a \leq x \leq b$ *e* $n \in \mathbb{N}$*, temos*

$$J_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

O lema abaixo é uma consequência do Teorema Fundamental do Cálculo.

Lema 1.2. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m > n$. Seja f uma função contínua com n-ésima derivada no intervalo $[a, b]$. Então,*

$$D^n f = D^m J_a^{m-n} f.$$

O lema **??** nos mostra que será útil generalizar a noção de fatorial para $n \in \mathbb{R}$. A esta generalização, que definiremos a seguir, denominaremos de Função Gamma.

Definição 1.5. *A função $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definida por*

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

*é chamada **Função Gamma de Euler**.*

O resultado a seguir prova, num certo sentido, a generalidade que propomos à Função Gamma ter:

Teorema 1.3. *Para $n \in \mathbb{N}$, vale que*

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução. Para $n = 1$, temos

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \lim_{k \to \infty} \int_0^k e^{-t} dt = \lim_{k \to \infty} (1 - e^{-k}) = 1.$$

Agora, suponha que o teorema valha para $n = x$ e verifiquemos para $n = x + 1$, isto é

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{k \to \infty, y \to 0^+} \int_y^k t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{k \to \infty, y \to 0^+} \left(e^{-y} y^x - e^{-k} k^x + x \int_y^k t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\ &= x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x(x-1)! = x!$$

$\square$

Definição 1.6. *Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, a **integral de Beta de Euler** é definida por*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt.$$

Uma propriedade importante que relaciona a integral beta e a integral gama é dada pela relação

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

1.3.1 Operador Integral

Definição 1.7. *Seja $n \in (0, \infty)$. O operador J_a^n, definido em $L^1[a,b]$ por*

$$J_a^n f(x) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt,$$

para $a \leq x \leq b$, é chamado de ***Operador Integral de Riemann-Liouville de ordem n****. Para $n = 0$, definimos $J_a^0 f(x) := I$, onde I representa o operador identidade.*

Segue do lema **??** e do Teorema **??** que a integral fracionária de Riemann-Liouville coincide com a definição clássica de J_a^n, para $n \in \mathbb{N}$, exceto pelo fato de estendemos o domínio de Riemann integrável para Lebesgue integrável. Além disso, podemos observar que no caso $n \geq 1$, a integral $J_a^n f(x)$ existe para todo $x \in [a,b]$, pois o integrando é o produto de uma função integrável f com uma função contínua $g(t) = (x-t)^{n-1}$.

No caso em que $0 < n < 1$, a situação não é tão clara, mas é justificada pelo próximo resultado.

Lema 1.3. *Sejam $f \in L^1[a,b]$ e $n > 0$. Então, a integral $J_a^n f(x)$ existe em quase todo ponto $x \in [a,b]$. Além disso, a função $J_a^n f$ pertence a $L^1[a,b]$.*

Demonstração. Basta observar que

$$\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x-t)\phi_2(t)dt = (\phi_1 * \phi_2)(x)$$

onde

$$\phi_1(u) = \begin{cases} u^{n-1}, & \text{para } 0 < u \leq b-a \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e

$$\phi_2(u) = \begin{cases} f(u), & \text{para } a < u \leq b \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por construção $\phi_j \in L^1(\mathbb{R})$ para $j \in \{1,2\}$. Portanto segue da Desigualdade de Young que $J_a^n f$ existe em q.t.p. e $J_a^n f \in L^1[a,b]$.

□

A seguir, abordaremos um exemplo que será utilizado posteriormente.

Exemplo 1.2. *Considere $f(x) = (x-a)^\beta$, onde $\beta, n \in \mathbb{R}$ são tais que $\beta > -1$ e $n > 0$. Então*

$$J_a^n f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}(x-a)^{n+\beta}.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
J_a^n f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (t-a)^\beta (x-t)^{n-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^1 (s(x-a))^\beta (x-a-s(x-a))^{n-1} (x-a) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} (x-a)^{n+\beta} \int_0^1 s^\beta (1-s)^{n-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} (x-a)^{n+\beta} B(\beta+1, n) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} (x-a)^{n+\beta}.
\end{aligned}$$

Outra propriedade importante dos operadores integrais de ordem inteira também será preservada pela nossa generalização:

Teorema 1.4. *Sejam $m, n \geq 0$ e $\phi \in L^1[a,b]$. Então*

$$J_a^m J_a^n \phi = J_a^{m+n} \phi,$$

em quase todo ponto em $[a,b]$. Além disso, se $\phi \in C[a,b]$ ou $m+n \geq 1$, então a igualdade vale em todo $[a,b]$.

Demonstração. Temos que

$$J_a^m J_a^n \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{m-1} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} \phi(\tau) d\tau dt.$$

Do lema **??**, segue que a integral existe. Além do mais, pelo Teorema de Fubini, podemos comutar a ordem de integração, obtendo

$$\begin{aligned}
J_a^m J_a^n \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \int_\tau^x (x-t)^{m-1} (t-\tau)^{n-1} \phi(\tau) dt d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau) \int_\tau^x (x-t)^{m-1} (t-\tau)^{n-1} dt d\tau.
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $t = \tau + s(x-\tau)$, temos

$$\begin{aligned}
J_a^m J_a^n \phi(x) &= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau) \int_0^1 [(x-\tau)(1-s)]^{m-1} [s(x-\tau)]^{n-1} (x-\tau) ds d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_a^x \phi(\tau) (x-\tau)^{m+n-1} \int_0^1 (1-s)^{m-1} s^{n-1} ds d\tau.
\end{aligned}$$

Como $\int_0^1 (1-s)^{m-1}s^{n-1}ds = B(n,m) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, teremos que

$$J_a^m J_a^n \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(m+n)} \int_a^x \phi(\tau)(x-\tau)^{m+n-1} d\tau = J_a^{m+n}\phi(x),$$

em quase todo $[a,b]$. Além disso, se $\phi \in C[a,b]$, então $J_a^n\phi \in C[a,b]$ e, portanto, $J_a^m J_a^n \phi \in C[a,b]$ e $J_a^{m+n}\phi \in C[a,b]$. Assim, utilizando que duas funções contínuas que coincidem em quase todo ponto, coincidem em todo $[a,b]$.Segue que, $J_a^m J_a^n \phi(x) = J_a^{m+n}\phi(x)$, para todo $x \in [a,b]$.

Finalmente, se $\phi \in L^1[a,b]$ e $m+n \geq 1$, segue do resultado acima que

$$J_a^m J_a^n \phi = J_a^{m+n}\phi = J_a^{m+n-1} J_a^1 \phi,$$

em q.t.p. Como $J_a^1\phi$ é contínua, temos que $J_a^{m+n}\phi = J_a^{m+n-1}J_a^1\phi$ é contínua. Utilizando novamente que duas funções contínuas que coincidem quase todo ponto devem coincidir em todo intervalo $[a,b]$, o resultado segue.

□

Para finalizar esta subseção, enunciaremos um corolário que é uma consequencia direta do teorema anterior.

Corolário 1.1. *Sejam $\phi \in L^1[a,b]$ e $m,n \in \mathbb{R}$, tais que $m,n \geq 0$. Então*

$$J_a^m J_a^n \phi = J_a^n J_a^m \phi.$$

1.3.2 Operador Diferencial

Definição 1.8. *Sejam $n \in \mathbb{R}_+$ e $m = \lceil n \rceil$. O operador D_a^n, definido por*

$$D_a^n f := D^m J_a^{m-n} f$$

é chamado ***Operador Diferencial de Riemann-Liouville de ordem fracionária n****. Para $n = 0$, definimos $D_a^0 := I$, onde I é o operador identidade.*

Em consequência do lema **??**, o operador D_a^n coincide com a definição clássica para $n \in \mathbb{N}$. O lema **??** também pode ser estendido para o caso onde $n \in \mathbb{R}_+$, como veremos a seguir.

Lema 1.4. *Sejam $n \in \mathbb{R}_+$ e $m \in \mathbb{N}$, tal que $m > n$. Então*

$$D_a^n = D^m J_a^{m-n}.$$

Demonstração. Como $m \geq \lceil n \rceil$ e $m, \lceil n \rceil \in \mathbb{N}$, temos $D^{m-\lceil n \rceil} J^{m-\lceil n \rceil} = I$ e, assim,

$$D^m J_a^{m-n} = D^{\lceil n \rceil} D^{m-\lceil n \rceil} J^{m-\lceil n \rceil} J^{\lceil n \rceil - n} = D^{\lceil n \rceil} J_a^{\lceil n \rceil - n} = D_a^n.$$

□

Teorema 1.5. *Sejam $n_1, n_2 \geq 0$ e $\phi \in L^1[a,b]$. Se $f = J_a^{n_1+n_2}\phi$, então*

$$D_a^{n_1} D_a^{n_2} f = D_a^{n_1+n_2} f.$$

Demonstração. Pela definição de derivada de ordem fracionária e pelo teorema fundamental do cálculo para o caso natural, temos que

$$\begin{aligned} D_a^{n_1} D_a^{n_2} f &= D^{\lceil n_1 \rceil} J_a^{\lceil n_1 \rceil - n_1} D^{\lceil n_2 \rceil} J_a^{\lceil n_2 \rceil - n_2} J_a^{n_1+n_2} \phi \\ &= D^{\lceil n_1 \rceil} J_a^{\lceil n_1 \rceil - n_1} D^{\lceil n_2 \rceil} J_a^{\lceil n_2 \rceil + n_1} \phi \\ &= D^{\lceil n_1 \rceil} J_a^{\lceil n_1 \rceil - n_1} D^{\lceil n_2 \rceil} J_a^{\lceil n_2 \rceil} J_a^{n_1} \phi \\ &= D^{\lceil n_1 \rceil} J_a^{\lceil n_1 \rceil - n_1} J_a^{n_1} \phi \\ &= D^{\lceil n_1 \rceil} J_a^{\lceil n_1 \rceil} \phi = \phi. \end{aligned}$$

Analogamente, podemos ver que $D_a^{n_1+n_2} f = \phi$.

□

Com tudo que foi visto até aqui, será possível estender o Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 1.6. *Seja $n \geq 0$. Se $f \in L^1[a,b]$, então*

$$D_a^n J_a^n f = f,$$

em quase todo ponto.

Demonstração. Para $n = 0$, temos por definição que os operadores D_a^n e J_a^n são iguais ao operador identidade. Assim não há nada o que ser demonstrado.

Para $n > 0$, basta considerar $m = \lceil n \rceil \in \mathbb{N}$, para assim obter que

$$D_a^n J_a^n f = D_a^m J_a^{m-n} J_a^n f = D_a^m J_a^m f = f.$$

□

Para finalizar esta subseção, introduziremos a noção de transformada de Laplace, com a finalidade de obter uma relação entre esta e a integral de ordem fracionária, a qual será utilizada na demonstração da Proposição **??**.

Definição 1.9. *Sejam X um espaço de Banach e $f : \mathbb{R}_+ \to X$ uma função mensurável, exponencialmente limitada com expoente $\omega \in \mathbb{R}$. Então, definimos a **transformada de Laplace** $\mathcal{L}f : \{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda > \omega\} \to X$ por*

$$\mathcal{L}f(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt.$$

Com isso, pode-se demonstrar que

$$\mathcal{L}(J^\alpha f)(z) = \frac{\mathcal{L}(f)(z)}{z^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

2 FUNÇÕES S-ASSINTOTICAMENTE ω-PERIÓDICAS

Consideremos $C_b([0,\infty),X)$ o espaço das funções contínuas e limitadas definidas em $[0,\infty)$ com valores em X, dotado da norma da convergência uniforme, a qual denotaremos por $\|\cdot\|_\infty$. Além disso, $C_0([0,\infty),X)$ e $C_\omega([0,\infty),X)$, para $\omega>0$, serão subespaços de $C_b([0,\infty),X)$ definidos por

$$C_0([0,\infty),X)=\{f\in C_b([0,\infty),X);\lim_{t\to\infty}\| f(t)\|=0\},$$

$$C_\omega([0,\infty),X)=\{f\in C_b([0,\infty),X);\quad f \text{ é } \omega\text{-periódica }\}.$$

Agora, introduziremos algumas definições importantes que serão utilizadas no decorrer deste capítulo e do capítulo 4.

Definição 2.1. *Sejam $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}$ um conjunto de números reais e $l>0$. Dizemos que $\mathcal{P}$ é **l-denso** em $\mathbb{R}$, se $[a,a+l]\cap\mathcal{P}\neq\emptyset$ para todo $a\in\mathbb{R}$.*

Alternativamente, dizemos que o conjunto $\mathcal{P}$ é *relativamente denso* em $\mathbb{R}$.

Definição 2.2. *Uma função $f\in C_b(\mathbb{R},X)$ é chamada **quase periódica** se, para cada $\varepsilon>0$, existe um subconjunto de $\mathbb{R}$ relativamente denso, denotado por $\mathcal{H}(\varepsilon,f)$, tal que*

$$\| f(t+\xi)-f(t)\|<\varepsilon,\forall t\in\mathbb{R} \text{ e } \forall\xi\in\mathcal{H}(\varepsilon,f).$$

Definição 2.3. *Uma função $f\in C_b([0,\infty),X)$ é chamada **assintoticamente quase periódica** se existe uma função quase periódica g e uma função $\varphi\in C_0([0,\infty),X)$, tais que $f=g+\varphi$. Se g é ω-periódica, f é dita **assintoticamente ω-periódica**.*

Vale ressaltar que a Proposição 1.12 em [**?**], garante a unicidade da decomposição $f=g+\varphi$ na definição acima.

No restante desta seção, por simplicidade, fixaremos algumas notações. Para um número positivo fixado ω e para cada $t\geq 0$, consideremos a decomposição

$$t=\xi(t)+\tau(t)\omega, \tag{2.1}$$

com $\xi(t)\in[0,\omega)$ e $\tau(t)\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Além disso, para $h\geq 0$ e $f\in C_b([0,\infty),X)$, denotaremos por f_h a função $f_h:[0,\infty)\to X$ definida por $f_h(t)=f(t+h)$.

Agora, veremos algumas propriedades qualitativas das funções contínuas e limitadas $f:[0,\infty)\to X$, para as quais existe $\omega>0$ tal que $\lim_{t\to\infty}(f(t+\omega)-f(t))=0$ (estas funções serão chamadas funções S-assintoticamente ω-periódicas). Começaremos estabelecendo algumas terminologias.

Definição 2.4. *Uma função $f \in C_b([0,\infty),X)$ é dita* ***S-assintoticamente periódica*** *se existe $\omega > 0$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty}(f(t+\omega)-f(t))=0.$$

Neste caso, dizemos que ω é um período assintótico de f e que f é S-assintoticamente ω-periódica.

Observe que dadas duas funções S-assintoticamente ω-periódicas , a dizer f e g, e $\alpha \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), então a função $F := f + \alpha g$ também é S-assintoticamente ω-periódica. Com isso, usaremos a notação $SAP_\omega(X)$ para denotar o subespaço de $C_b([0,\infty),X)$ formado pelo conjunto das funções S-assintoticamente ω-periódicas.

O resultado a seguir é uma consequência imediata das definições anteriores.

Lema 2.1. *Sejam $f : [0,\infty) \to X$ uma função S-assintoticamente ω-periódica e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty$. Se $f_{t_n} \to F$ uniformemente em compactos de $[0,\infty)$, então $F \in C_\omega([0,\infty),X)$.*

Demonstração. Como F é limite uniforme em subconjuntos compactos de $[0,\infty)$ de funções contínuas e limitadas, então $F \in C_b([0,\infty),X)$. Para $t \geq 0$ e $\varepsilon > 0$, podemos escolher $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\| F(s) - f_{t_n}(s) \| = \| F(s) - f(t_n + s) \| \leq \frac{\varepsilon}{3},\ s \in [t, t+\omega]$$

e

$$\| f(\mu + t_n + \omega) - f(\mu + t_n) \| \leq \frac{\varepsilon}{3},\ \mu \geq 0,$$

para todo $n \geq n_0$. Assim, para $n \geq n_0$, temos que

$$\begin{aligned}
\| F(t+\omega) - F(t) \| &\leq \| F(t+\omega) - f(t+\omega+t_n) \| + \| f(t+\omega+t_n) - f(t+t_n) \| \\
&\quad + \| f(t+t_n) - F(t) \| \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto $F(t+\omega) = F(t)$.

□

É importante notar que nem toda função S-assintoticamente μ-periódica é assintoticamente μ-periódica. Daremos um exemplo disso a seguir.

Exemplo 2.1. *Seja $X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}; x_n \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$, munido da norma*

$$\| (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Consideremos $f : [0,\infty) \to X$ definida por $f(t) = \left(\dfrac{2nt}{t^2+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. A função f assim definida é limitada, uniformemente contínua e S-assintoticamente μ-periódica para cada $\mu > 0$. No entanto, f não é assintoticamente μ-periódica.

De fato, sabemos que $(t-n)^2 \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\| f(t) \| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{2nt}{t^2+n^2} \right| \leq 1, \ \forall t \in [0,\infty). \tag{2.2}$$

Agora, sejam $s,t \in [0,\infty)$, temos que

$$\begin{aligned} f(t+s)-f(t) &= \Big(\frac{2n(t+s)}{(t+s)^2+n^2}\Big)_{n\in\mathbb{N}} - \Big(\frac{2nt}{t^2+n^2}\Big)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \Big(\frac{(t^2+n^2)(2nt+2ns)-2nt(n^2+t^2+s^2+2ts)}{[(t+s)^2+n^2](t^2+n^2)}\Big)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \Big(\frac{2sn(n^2-st-t^2)}{[(t+s)^2+n^2](t^2+n^2)}\Big)_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|f(t+s)-f(t)\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{2sn(n^2-st-t^2)}{[(t+s)^2+n^2](t^2+n^2)} \right| \\ &\leq \sup_{n\geq 1} \frac{2sn \mid n^2-st-t^2 \mid}{[(t+s)^2+n^2](t^2+n^2)} \\ &\leq 2s. \end{aligned}$$

Desta desigualdade e de (??), f é limitada e uniformemente contínua. Além disso, para $\mu > 0$ e $t \geq 1$ temos

$$\begin{aligned} \|f(t+\mu)-f(t)\| &\leq \sup_{n\geq 1} \frac{2n\mu}{(t^2+n^2)} \\ &\leq \frac{\mu}{t}. \end{aligned}$$

Portanto f é S-assintoticamente μ-periódica para todo $\mu > 0$. No entanto, f não é assintoticamente μ-periódica. Para mostrar esta afirmação, suponha que existem $g \in C_\mu([0,\infty),X)$ e $\varphi \in C_0([0,\infty),X)$ tal que $f = g+\varphi$. Se $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então cada coordenada f_n é assintoticamente μ-periódica e $f_n(t+k\mu) = g_n(t)+\varphi_n(t+k\mu)$, para cada $k,n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$. Como $\lim_{k\to\infty} f_n(t+k\mu) = 0$, então $g_n(t) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$. Consequentemente, a função g é identicamente nula e $f = \varphi$, o que não pode ocorrer, pois $\|f(n)\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Isto prova que f não é assintoticamente μ-periódica.

Proposição 2.1. *Seja $f : [0,\infty) \to X$ uma função S-assintoticamente ω-periódica e assintoticamente quase periódica. Então, f é assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. Podemos decompor f como $f = g+\varphi$, onde g é uma função quase periódica e $\varphi \in C_0([0,\infty),X)$. Como f é assintoticamente quase periódica, existe uma sequência de número reais $(t_n)_{n\in\mathbb{R}}$ tal que $t_n \to \infty$ e $g_{t_n} \to g$ uniformemente em $[0,\infty)$.

Portanto $f_{t_n} = g_{t_n} + \varphi_{t_n} \to g$ uniformemente em $[0,\infty)$. Segue do Lema (**??**) que $g \in C_\omega([0,\infty), X)$ o que, por sua vez, implica que a função f é assintoticamente ω-periódica.

□

A definição que se segue será crucial para a compreensão dos próximos resultados:

Definição 2.5. *Definimos o espaço $F(\mathbb{R}^+, X)$, como sendo o espaço das funções contínuas $h : [0,\infty) \to X$ que satisfazem a seguinte propriedade:*

I) *Dado $\varepsilon > 0$, existe $T = T(\varepsilon) \geq 0$ tal que o conjunto de números reais*

$$\mathcal{T}_{+,T}(h,\varepsilon) := \{\tau \geq 0; \sup_{t\geq T} \|h(t+\tau) - h(t)\| < \varepsilon\}$$

é relativamente denso em $[0,\infty)$. Desta forma, podemos encontrar $L(\varepsilon)$ tal que $\mathcal{T}_{+,T}(h,\varepsilon) \cap [a, a+L(\varepsilon)] \neq \emptyset$, para todo $a \geq 0$.

Assim, se f é uma função assintoticamente quase periódica, então $f \in F(\mathbb{R}^+, X)$. Mais geralmente, vale o próximo Teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [?].

Teorema 2.1. *Uma função f é assintoticamente quase periódica se, e somente se, $f \in F(\mathbb{R}^+, X)$.*

O seguinte corolário do Teorema acima nos dará um bom método para saber se uma dada função é assintoticamente ω-periódica.

Corolário 2.1. *Seja $\varphi \in C_b([0,\infty), X)$. Suponha que existe uma sequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, com $n_1 = 1$ e $n_j \to \infty$ quando $j \to \infty$, tal que*

$$\alpha = \sup_{j\in\mathbb{N}} (n_{j+1} - n_j) < \infty \qquad e \qquad \lim_{t\to\infty} (\varphi(t + n_j\omega) - \varphi(t)) = 0$$

uniformemente para $j \in \mathbb{N}$, então φ é assintoticamente ω-periódica.

Demonstração. Tomando $j = 1$, no limite posto no enunciado, obtemos

$$\lim_{t\to\infty} (\varphi(t+\omega) - \varphi(t)) = \lim_{t\to\infty} (\varphi(t + n_1\omega) - \varphi(t)) = 0.$$

Portanto, φ é S-assintoticamente ω-periódica. Agora, mostremos que φ é assintoticamente quase periódica. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\sup_{t\geq N} \|f(t + n_j\omega) - f(t)\| < \varepsilon, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Tome $L(\varepsilon) = \alpha\omega + \varepsilon$. Para $a \geq 0$, existe $j_a \in \mathbb{N}$ tal que $n_{j_a}\omega \in [a, a+L(\varepsilon)]$. Além disso, se definimos $\mathcal{T}_\omega = \{n_j\omega, j \in \mathbb{N}; \sup_{t\geq N} \|f(t+n_j\omega) - f(t)\| < \varepsilon\}$, podemos ver que $n_{j_a}\omega \in \mathcal{T}_\omega$. Assim, $[a, a+L(\varepsilon)] \cap \mathcal{T}_\omega \neq \emptyset$. Além do mais, como $a \geq 0$ foi tomado arbitrariamente, segue que o conjunto $\mathcal{T}_\omega$ é relativamente denso em $[0,\infty)$. Mas,

$$\mathcal{T}_\omega \subset \mathcal{T}_{+,T}(f,\varepsilon) := \{\tau \geq 0; \sup_{t\geq T} \|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon\}.$$

Daí, $\mathcal{T}_{+,T}(f,\varepsilon)$ também é relativamente denso em $[0,\infty)$. Com isso, temos que $f \in F(\mathbb{R}^+, X)$, utilizando o Teorema **??**, segue que f é assintoticamente quase periódica.

□

Concluiremos esta seção com alguns conceitos e propriedades do espaço $SAP_\omega(X)$.

Teorema 2.2. *O subespaço $SAP_\omega(X) \subset C_b([0,\infty), X)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $SAP_\omega(X)$ que converge para $f \in C_b([0,\infty), X)$. A decomposição

$$f(\omega+t) - f(t) = f(\omega+t) - f_n(\omega+t) + f_n(\omega+t) - f_n(t) + f_n(t) - f(t),$$

nos mostra que $\lim_{t\to\infty} f(\omega+t) - f(t) = 0$. Portanto, $f \in SAP_\omega(X)$.

□

Definição 2.6. *Seja $f : [0,\infty) \times X \to X$ uma função contínua. Dizemos que f é uniformemente S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados se, para todo $K \subset X$ limitado, o conjunto $\{f(t,x); t \geq 0, x \in K\}$ é limitado e, além disso,*

$$\lim_{t\to\infty} (f(t+\omega, x) - f(t,x)) = 0,$$

uniformemente em K.

Definição 2.7. *Seja $f : [0,\infty) \times X \to X$ uma função contínua. Dizemos que f é assintoticamente uniformemente contínua em conjuntos limitados se, para todo $\varepsilon > 0$ e $K \subset X$ limitado, existem $L_{\varepsilon,K} \geq 0$ e $\delta_{\varepsilon,K} > 0$ tais que $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq L_{\varepsilon,K}$ e $x, y \in K$, com $\|x-y\| \leq \delta_{\varepsilon,K}$.*

Teorema 2.3. *Sejam X, Y espaços de Banach, $u : [0,\infty) \to X$ uma função S-assintoticamente ω-periódica e $f : [0,\infty) \times X \to Y$ uniformemente S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados e uniformemente contínua em conjuntos limitados. Então, $v(t) = f(t, u(t))$ é uma função S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. Como $u \in C_b([0,\infty), X)$, a imagem de u é um subconjunto limitado de X. Da definição **??**, temos que o conjunto $\{v(t) = f(t,u(t)); t \geq 0\}$ é limitado, ou seja, v é uma função limitada. Assim, como u e f são contínuas segue que $v \in C_b([0,\infty), X)$.

Das Definições **??** e **??**, temos que para todo $\varepsilon > 0$, existem $L^1_\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$\max\{\|f(t+\omega, z) - f(t,z)\|, \|f(t,x) - f(t,y)\|\} \leq \varepsilon,$$

para todo $t \geq L^1_\varepsilon$, $x, y, z \in \mathcal{I}(u)$, com $\|x-y\| < \varepsilon$. Além disso, como $u \in SAP_\omega(X)$, existe $L^2_\varepsilon > 0$ tal que $\|u(t+\omega) - u(t)\| < \delta$, para todo $t \geq L^2_\varepsilon$. Assim, para $t \geq \max\{L^1_\varepsilon, L^2_\varepsilon\}$, temos que

$$\begin{aligned}
\|v(t+\omega) - v(t)\| &= \|f(t+\omega, u(t+\omega)) - f(t,u(t))\| \\
&\leq \|f(t+\omega, u(t+\omega)) - f(t, u(t+\omega))\| + \|f(t,u(t+\omega)) - f(t,u(t))\| \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto $v \in SAP_\omega(X)$.

□

3 SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES LIMITADOS

3.1 Semigrupos Uniformemente Contínuos

Como já convencionamos, ao longo desta seção, consideremos X como sendo um espaço de Banach com norma $\| \cdot \|_X$ e $\mathcal{L}(X)$ como sendo o conjunto dos operadores lineares limitados de X em X, com a norma

$$\| T \|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\| Tx \|_X}{\| x \|_X}.$$

Por simplicidade, denotaremos ambas as normas citadas anteriormente por $\| \cdot \|$. O operador identidade em X será denotado por I.

Definição 3.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados de X em X é um* ***semigrupo de operadores lineares limitados em X*** *se*

(i) $T(0) = I$;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todo* $t, s \geq 0$.

Além do mais, diremos que um semigrupo de operadores lineares limitados $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em X é ***uniformemente contínuo*** *se*

$$\lim_{t \to 0^+} \| T(t) - I \| = 0.$$

É possível demonstrar diretamente da definição que se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados, então

$$\lim_{s \to t} \| T(s) - T(t) \| = 0.$$

Definição 3.2. *Denotaremos por $\mathcal{D}(A) \subset X$ o conjunto dado por*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

O operador linear A definido por

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x \Big|_{t=0} \quad \text{para } x \in \mathcal{D}(A).$$

é chamado ***gerador infinitesimal*** *do semigrupo $T(t)$ e $\mathcal{D}(A)$ é o domínio de A.*

O teorema a seguir nos dará uma condição necessária e suficiente para que um operador linear seja gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo. Para provar este resultado, antes enunciaremos e demonstraremos um lema de Análise Funcional.

Lema 3.1. *Seja $T \in \mathcal{L}(X)$, com $\| T \| < 1$. Então $I - T$ é inversível e pertence a $\mathcal{L}(X)$.*

Demonstração. Defina o operador linear

$$S := \sum_{j=0}^{\infty} T^j.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S(I-T) = (I-T)S &= S - T.S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j - \sum_{j=0}^{\infty} T^{j+1} \\ &= I + \sum_{j=1}^{\infty} T^j - \sum_{j=1}^{\infty} T^j \\ &= I. \end{aligned}$$

Portanto $S = (I-T)^{-1}$. Tomando $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned} \| Sx \| &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} T^j x \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \| T^j x \| \\ &\leq \| x \| \sum_{j=0}^{\infty} \| T \|^j . \end{aligned}$$

Como $\| T \| < 1$, temos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \| T \|^j = \frac{1}{1 - \| T \|} =: K$$

Assim, para todo $x \in X$, existe $K > 0$, tal que $\| Sx \| \leq K \| x \|$. Portanto $S = (I-T)^{-1}$ e $S \in \mathcal{L}(X)$.

□

Teorema 3.1. *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado.*

Demonstração. Seja $A : X \to X$ um operador linear limitado. Defina

$$T(t) := e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \tag{3.1}$$

Vê-se facilmente que o lado direito da equação (??) converge em norma para cada $t \geq 0$ e, além disso, define um operador linear limitado $T(t)$. Além do mais, $T(0) = I$ e $T(s+t) = T(s)T(t)$, para todo $t, s \geq 0$. Portanto, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados em X. Mas

$$\begin{aligned}
\| T(t) - I \| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \| A \|^n}{n!} \\
&= t \| A \| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} \| A \|^{n-1}}{n!} \\
&\leq t \| A \| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} \| A \|^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= t \| A \| e^{t\|A\|}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t\to 0^+} \| T(t) - I \| = 0.$$

Assim, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X. Além disso, A é o gerador infinitesimal deste semigrupo, pois

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n - I \Big) - A \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} A^n \right\| \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|t|^{n-1}}{n!} \| A \|^n \\
&= \frac{e^{t\|A\|} - 1}{t} - \| A \| .
\end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| = 0.$$

Reciprocamente, considere $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X. Como $\| T(t) - I \| \longrightarrow 0$, quando $t \to 0^+$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\| T(t) - I \| < 1, \quad \text{sempre que } 0 < t < \delta.$$

Assim, fixado $0 < \rho < \delta$, temos que

$$\Big\|I - \frac{1}{\rho}\int_0^\rho T(s)ds\Big\| = \Big\|\frac{1}{\rho}\,\Big[\int_0^\rho (I - T(s))ds\Big]\Big\| \leq \frac{1}{\rho}\int_0^\rho \parallel I - T(s) \parallel ds < 1.$$

Utilizando o lema **??**, temos que $\int_0^\rho T(s)ds$ é inversível e sua inversa é um operador linear limitado. Agora, seja $h \in (0, \rho)$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(T(h) - I)\int_0^\rho T(s)ds &= \frac{1}{h}\Big\{\int_0^\rho T(h+s)ds - \int_0^\rho T(s)ds\Big\} \\
&= \frac{1}{h}\Big\{\int_h^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^\rho T(s)ds\Big\} \\
&= \frac{1}{h}\Big\{\int_h^\rho T(s)ds + \int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds - \int_h^\rho T(s)ds\Big\} \\
&= \frac{1}{h}\Big\{\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds\Big\}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{T(h) - I}{h} = \frac{1}{h}\Big(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds\Big)\Big(\int_0^\rho T(s)ds\Big)^{-1}. \tag{3.2}$$

Lembrando que, para todo $t \geq 0$, vale

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)ds = T(t),$$

se fizermos $h \to 0^+$ na igualdade (**??**), concluímos que $h^{-1}(T(h) - I)$ converge em norma e, portanto, fortemente para o operador linear limitado $(T(\rho) - I)(\int_0^\rho T(s)ds)^{-1}$, o qual é por definição o gerador de $T(t)$.

□

3.2 Semigrupos Fortemente Contínuos

Nesta seção, definiremos a noção de semigrupo fortemente contínuo. Veremos que o gerador de um semigrupo fortemente contínuo é linear, mas em geral não é limitado. Também mostraremos que o domínio do gerador é um subconjunto denso de X.

Definição 3.3. *Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de operadores lineares limitados em X é um semigrupo **fortemente contínuo** de operadores lineares limitados, se*

$$\lim_{t\to 0} T(t)x = x, \ \textit{para cada } x \in X. \tag{3.3}$$

*Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X é chamado de **semigrupo de classe** C_0 ou simplesmente de C_0**-semigrupo**.*

No Teorema a seguir, veremos que todo C_0-semigrupo possui uma limitação exponencial.

Teorema 3.2. *Considere $T(t)$ um C_0-semigrupo. Existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$, tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \text{ para } 0 \leq t < \infty. \tag{3.4}$$

Demonstração. Primeiramente, mostremos que existe $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é limitado para $t \in [0, \eta]$. De fato, supondo o contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\eta = \frac{1}{n}$, existiria $0 \leq t_n \leq \frac{1}{n}$ com $\|T(t_n)\| \geq n$. Logo, existiria uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $t_n \geq 0$, satisfazendo $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ e $\|T(t_n)\| \geq n$. Assim, pelo Princípio da Limitação Uniforme, deve existir $x \in X$ tal que $T(t_n)x \to \infty$ quando $n \to \infty$, contrariando (**??**). Desta forma, existem constantes $\eta > 0$ e $M \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq M$ para todo $t \in [0, \eta]$. E como $\|T(0)\| = 1$, temos $M \geq 1$.

Seja $t \geq 0$, existem constantes $k \in \mathbb{N}$ e $\delta \in [0, \eta]$ tais que $t = k\eta + \delta$. Portanto, pelas propriedades de semigrupos, temos

$$\| T(t) \| = \| T(k\eta + \delta) \| \leq \| T(\eta) \|^k \| T(\delta) \| \leq MM^{\frac{t}{\eta}}.$$

Tomando $\omega := \eta^{-1} \log M$, temos

$$\| T(t) \| \leq Me^{t\omega}, \quad \text{para } t \geq 0.$$

$\square$

Corolário 3.1. *Se $T(t)$ é um C_0-semigrupo, então para cada $x \in X$, a função $f_x : \mathbb{R}_0^+ \to X$ definida por $f_x(t) := T(t)x$ é contínua definida $\mathbb{R}_0^+$ (a reta real não negativa) e tomando valores em X.*

Demonstração. Para todo $t \geq 0$, mostraremos que $\lim_{s\to t} f_x(s) = f_x(t)$ (observe que para $t = 0$, este limite só faz sentido quando $s > 0$, ou seja, quando $s \to t^+$). De fato, quando $s \to t^+$, tomando $h := s - t > 0$, temos

$$\begin{aligned} \| f_x(s) - f_x(t) \| &= \| T(t+h)x - T(t)x \| \\ &\leq \| T(t) \| \| T(h)x - x \| \longrightarrow 0 \text{ , quando } h \to 0^+. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{s\to t^+} f_x(s) = f_x(t).$$

Além disso, quando $s \to t^-$, para $0 \leq h \leq t$, tomando $h := t - s$, temos

$$\begin{aligned} \| f_x(s) - f_x(t) \| &= \| T(t-h)x - T(t)x \| \\ &\leq \| T(t-h) \| \| x - T(h)x \| \\ &\leq Me^{\omega(t-h)} \| T(h)x - x \| \longrightarrow 0 \text{ , quando } h \to 0^+. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{s\to t} f_x(s) = f_x(t), \text{ para todo } t > 0.$$

$\square$

Teorema 3.3. *Seja $T(t)$ um C_0-semigrupo e seja A seu gerador infinitesimal. Então*

(a) *Para cada $x \in X$,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

(b) *Para cada $x \in X$,temos que $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ e*

$$A\Big(\int_0^t T(t)xds\Big) = T(t)x - x.$$

(c) *Para cada $x \in D(A)$, temos que $T(t)x \in D(A)$ e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{3.5}$$

(d) *Para cada $x \in D(A)$, vale*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

Demonstração.

a) Seja $x \in X$. Como $f_x(t) = T(t)x$ é contínua, então

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

b) Sejam $x \in X$ e $h > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(h+s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{h+t} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^t T(s)xds + \frac{1}{h}\int_t^{h+t} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_h^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{h+t} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds.
\end{aligned}$$

Da letra (a) deste Teorema, sabemos que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h}\Big(\int_0^t T(s)xds\Big) = T(t)x - x.$$

Portanto,

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A) \quad \text{e} \quad A\Big(\int_0^t T(t)xds\Big) = T(t)x - x.$$

c) Seja $x \in D(A)$ e $h > 0$. Então

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}\Big(T(t)x\Big) &= \frac{T(t)T(h)x - T(t)x}{h}\\ &= T(t)\Big(\frac{T(h)-T(t)}{h}\Big)(x).\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h}\Big(T(t)x\Big) = \lim_{t\to 0^+} T(t)\Big(\frac{T(h)-T(t)}{h}\Big)(x) = T(t)Ax. \tag{3.6}$$

Portanto, $T(t)x \in D(A)$, $AT(t)x = T(t)Ax$ e (**??**) implica que

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Assim, a derivada à direita de $T(t)x$ é $T(t)Ax$. Para provar (**??**), temos que mostrar que para $t > 0$, a derivada à esquerda de $T(t)x$ existe e coincide com $T(t)Ax$. Mas, lembre que

$$\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax = T(t-h)\Big(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\Big) + T(t-h)Ax - T(t)Ax.$$

Ambos os termos do lado direito vão para zero, quando $h \to 0^+$. De fato, $x \in D(A)$ e $\| \ T(t-h) \ \|$ é limitado em $0 \le h \le t$, então

$$\Big\|T(t-h)\Big(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\Big)\Big\| \le \|T(t-h)\|\Big\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\Big\| \longrightarrow 0, \text{ quando } \ h \to 0^+.$$

Por outro lado, como $T(t)$ é fortemente contínua, temos que

$$\lim_{h\to 0^+} T(t-h)Ax = T(t)Ax.$$

Portanto,

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} = T(t)Ax.$$

d) Seja $x \in D(A)$. Segue da identidade (**??**) que

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \frac{d}{d\tau} T(\tau)xd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)Axd\tau.$$

□

Corolário 3.2. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $T(t)$, então $D(A)$, o domínio de A, é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Para cada $t > 0$, defina

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)xds.$$

Segue do item (b) do Teorema **??** que $x_t \in D(A)$ e do item (a) do mesmo Teorema, temos que

$$\lim_{t \to 0^+} x_t = T(0)x = x.$$

Assim, $\overline{D(A)} = X$.

Sabemos que o gerador de um semigrupo é um operador linear. Agora mostremos que A é um operador fechado. Com efeito, seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$ com $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$. Segue do item (d) do Teorema (**??**) que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_nds. \tag{3.7}$$

O integrando do lado direito de (**??**) converge uniformemente em intervalos compactos para $T(s)y$. Assim, fazendo $n \to \infty$ em (**??**), temos

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds.$$

Desta forma, para $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)yds \\ &= T(0)y = y. \end{aligned}$$

Portanto, $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Desta forma concluímos que A é um operador linear fechado.

□

Lema 3.2. *Seja $H : I \to X$, onde $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ e X é um espaço normado. Se H é diferenciável e $\frac{d}{dt}H(t) = 0$, $\forall t \in I$, então $H(t) \equiv C$.*

Demonstração. Com efeito, fixado $\lambda \in X^*$, consideremos a função $f : I \to \mathbb{C}$ definida por $f(t) = \lambda(H(t))$. Observe que f é deferenciável, pois

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\lambda(H(t+h)) - \lambda(H(t))}{h} \\ &= \lambda\Big(\lim_{h\to 0} \frac{H(t+h) - H(t)}{h}\Big) \\ &= \lambda(0) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $f(t) = c$, para todo $t \in I$. Em particular para $t_0 \in I$, temos

$$\lambda(H(t)) = f(t) = f(t_0) = \lambda(H(t_0)), \quad \forall t \in I.$$

□

Teorema 3.4. *Sejam $T(t)$ e $S(t)$ C_0-semigrupos de operadores lineares limitados com geradores infinitesimais A e B, respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$, para $t \geq 0$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que para $t = 0$, temos $T(0) = I = S(0)$. Agora, sejam $x \in D(A) = D(B)$ e $t > 0$. Do item (c) do Teorema **??**, segue que a função $f_x(s) := T(t-s)S(s)x$, definida em $[0,t]$ com valores em X, é diferenciável e que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} f_x(s) &= \frac{d}{ds} T(t-s)S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0. \end{aligned}$$

Assim, $f_x(s)$ é constante e, em particular, temos

$$T(t)x = f_x(t) = f_x(0) = S(t)x\ , \qquad \forall\ x \in D(A).$$

Portanto, $S(t)$ e $T(t)$ coincidem em $D(A)$. Como $D(A)$ é denso em X, dado $x \in X$, existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ com $x_n \to x$. Logo, $T(t)x = S(t)x$ para todo $x \in X$, pois $S(t)$ e $T(t)$ são operadores contínuos.

□

3.3 O Teorema de Hille-Yosida

Seja $T(t)$ um C_0-semigrupo. Já vimos, no Teorema **??**, que existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$, para cada $t \geq 0$. Se $\omega = 0$, $T(t)$ é dito **uniformemente limitado** e se $M = 1$, $T(t)$ é dito **C_0-semigrupo de contrações**. Esta seção é voltada para a caracterização do gerador infinitesimal de C_0-semigrupos de contrações. Condições serão dadas sobre o resolvente de um operador A, as quais são necessárias e suficientes para que A seja o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.

Teorema 3.5. *Se um operador linear A (não limitado) é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, então valem:*

(i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;*

(ii) *O conjunto resolvente de A, $\rho(A)$, contém $\mathbb{R}^+$ e para cada $\lambda > 0$, temos*

$$\| R(\lambda : A) \| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{3.8}$$

Demonstração. Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Segue do Corolário **??** que A é fechado e $D(A)$ é denso em X, logo vale (i). Agora, para $\lambda > 0$ e $x \in X$, defina

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt. \tag{3.9}$$

Como $t \mapsto T(t)x$ é contínua e uniformemente limitada, a integral em (**??**) existe e define um operador linear limitado $R(\lambda)$ satisfazendo

$$\| R(\lambda)x \| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| T(t)x \| \, dt \leq \| x \| \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \leq \frac{1}{\lambda} \| x \| \, . \tag{3.10}$$

Além disso, para $h > 0$, temos

$$\begin{aligned}
T(h)R(\lambda)x &= \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-\lambda t} T(t+h)x dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \Big(\int_h^{N+h} e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt + \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt \Big) \\
&\quad - \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt \\
&= \Big(\lim_{N\to\infty} \int_0^{N+h} e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt \Big) - \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt \\
&= e^{\lambda h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - e^{\lambda h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{T(h)R(\lambda)x - R(\lambda)x}{h} \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt.
\end{aligned}$$

Quando $h \to 0^+$, o lado direito da igualdade acima converge para $\lambda R(\lambda)x - x$. Isto implica que, para cada $x \in X$ e $\lambda > 0$, $R(\lambda)x \in D(A)$ e $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$, ou

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I. \tag{3.11}$$

Para $x \in D(A)$, pela Proposição **??**, temos

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)xdt \\ &= A\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\Big) \\ &= AR(\lambda)x. \end{aligned} \tag{3.12}$$

De (**??**) e (**??**), segue que

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x \ \ para \ \ x \in D(A).$$

Portanto, $R(\lambda)$ é a inversa de $\lambda I - A$ e existe para todo $\lambda > 0$, ou seja, $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$. Segue de **??** que, para todo $x \neq 0$, temos

$$\frac{\| R(\lambda)x \|}{\| x \|} \leq \frac{1}{\lambda} \Longrightarrow \| R(\lambda) \| = \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} \frac{\| R(\lambda)x \|}{\| x \|} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

□

Para mostrar que as condições (i) e (ii) são de fato suficientes para que A seja o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações precisamos de mais alguns lemas.

Lema 3.3. *Seja A um operador satisfazendo (i) e (ii) do Teorema* **??** *e seja $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Então*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \quad para \ cada \ x \in X.$$

Demonstração. Suponha que $x \in D(A)$. Então

$$\begin{aligned} \| \lambda R(\lambda : A)x - x \| &= \| (\lambda R(\lambda : A) - I)x \| \\ &= \| AR(\lambda : A)x \| \\ &= \| R(\lambda : A)Ax \| \leq \tfrac{1}{\lambda} \| Ax \| \to 0, \quad quando \ \ \lambda \to \infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda : A)x = x, \quad \forall x \in D(A).$$

Como $D(A)$ é denso em X e $\| \lambda R(\lambda : A) \| \leq 1$ então, para cada $x \in X$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ e

$$\begin{aligned} \| \lambda R(\lambda : A)x - x \| &= \| \lambda R(\lambda : A)x - \lambda R(\lambda : A)x_n \| + \| \lambda R(\lambda : A)x_n - x_n \| \\ &\quad + \| x_n - x \| \\ &\leq \| \lambda R(\lambda : A) \| \| x - x_n \| + \| \lambda R(\lambda : A)x_n - x_n \| + \| x_n - x \| \\ &\leq \| x - x_n \| + \| \lambda R(\lambda : A)x_n - x_n \| + \| x_n - x \| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $x \in X$, temos que $\lambda R(\lambda : A)x \to x$, quando $\lambda \to \infty$.

□

A *aproximação de Yosida* de um operador A é definido por

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I.$$

Observe que desta última igualdade temos que, se $[0, \infty) \subset \rho(A)$, então $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, pois neste caso sabemos que $R(\lambda : A) \in \mathcal{L}(X)$.

Lema 3.4. *Seja A um operador satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema* **??**. *Se A_λ é a aproximação Yosida de A, então*

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax, \quad \textit{para cada } x \in D(A).$$

Demonstração. Com efeito, para todo $x \in D(A)$, tem-se que $Ax \in X$. Logo do lema **??**, temos que

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda : A) A x = Ax.$$

□

Lema 3.5. *Considere A um operador satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema* **??**. *Se A_λ é a aproximação de Yosida de A, então A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ}. Além disso, para cada $x \in X$, $\lambda, \mu > 0$, temos*

$$\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \| \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \| .$$

Demonstração. Como já observamos que $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, segue do Teorema **??** que A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo e^{tA_λ} de operadores lineares limitados. Além disso,

$$\begin{aligned} \| e^{tA_\lambda} \| &= \| e^{-t\lambda I} e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)} \| \\ &= e^{-t\lambda} \| e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)} \| \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda \|\lambda R(\lambda:A)\|} \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda} = 1 \ . \end{aligned}$$

Portanto e^{tA_λ} é um semigrupo de contrações. Agora, como para qualquer $\lambda, \mu > 0$, (e $t > 0$) os operadores e^{tA_λ}, e^{tA_μ}, A_λ e A_μ comutam, temos que

$$\begin{aligned} \| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x \right) ds \right\| \\ &= \int_0^1 \| t \ (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}) \cdot (A_\lambda x - A_\mu x) \| \, ds \\ &\leq t \int_0^1 \| A_\lambda x - A_\mu x \| \, ds \\ &= t \| A_\lambda x - A_\mu x \| \ . \end{aligned}$$

□

Teorema 3.6. ***(Hille-Yosida)***.

Um operador linear A (não limitado) é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $T(t)$, $t \geq 0$ se, e somente se, valem:

(i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;*

(ii) *O conjunto resolvente de A, $\rho(A)$, contém $\mathbb{R}^+$ e para cada $\lambda > 0$, temos*

$$\| R(\lambda : A) \| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{3.13}$$

Demonstração. Se A é o gerador de um C_0-semigrupo de contrações $T(t)$, segue do Teorema **??** que valem (i) e (ii). Reciprocamente, consideremos um operador linear A satisfazendo (i) e (ii) e sejam $\lambda, \mu > 0$ e $t \in [0, t_0]$, para $t_0 \geq 0$ fixado. Do Lema **??**, segue que para $x \in D(A)$ vale

$$\begin{aligned} \| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| &\leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \| \\ &\leq t_0 \| A_\lambda x - Ax \| + t_0 \| A_\mu x - Ax \| . \end{aligned}$$

Do Lema **??**, segue que

$$\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| \to 0 \ , \ \text{quando } \lambda, \mu \to \infty.$$

Portanto, para $x \in D(A)$, $e^{tA_\lambda}x$ converge quando $\lambda \to \infty$ e a convergência é uniforme em intervalos limitados. Assim, para todo $x \in D(A)$ e $t \in [0, t_0]$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \text{para todo } \lambda, \mu \geq N_1. \tag{3.14}$$

Agora consideremos $x \in X$. Como $D(A)$ é denso em X, existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$, onde, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| x_n - x \| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \text{para todo } n \geq N_2. \tag{3.15}$$

Assim, para $x \in X$ e $t \in [0, t_0]$, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar N suficientemente grande, de forma que

$$\begin{aligned} \| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| &\leq \| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\lambda}x_N \| + \| e^{tA_\lambda}x_N - e^{tA_\mu}x_N \| + \| e^{tA_\mu}x - e^{tA_\mu}x_N \| \\ &\leq \| e^{tA_\lambda} \| \| x - x_N \| + \| e^{tA_\lambda}x_N - e^{tA_\mu}x_N \| + \| e^{tA_\mu} \| \| x - x_N \| \\ &\leq 2 \| x_N - x \| + \| e^{tA_\lambda}x_N - e^{tA_\mu}x_N \| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $e^{tA_\lambda}x$ é uma sequência de Cauchy. Logo $e^{tA_\lambda}x$ converge quando $\lambda \to \infty$, para todo $x \in X$ e $t \in [0, t_0]$, isto é, $e^{tA_\lambda}x$ converge uniformemente em intervalos limitados. Assim, mostraremos que, para todo $t \geq 0$ e $x \in X$, se definimos $T(t)x := \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x$, então $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Primeiramente, observe que $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, pois como $\| e^{tA_\lambda} \| \leq 1$ para todo $t \geq 0$, temos que

$$\| T(t)x \| = \lim_{\lambda \to \infty} \| e^{tA_\lambda}x \| \leq \lim_{\lambda \to \infty} \| e^{tA_\lambda} \| \| x \| \leq \| x \|, \ \text{para todo } x \in X.$$

Agora, mostremos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações. Com efeito, pela definição de $T(t)$ e por $\{e^{tA_\lambda}\}_{t \geq 0}$ ser um semigrupo uniformemente contínuo de contrações, valem

(i) $T(0) = I$, pois para todo $x \in X$, temos

$$T(0)x = \lim_{\lambda \to \infty} x = x.$$

(ii) Para todo $t, s \geq 0$, temos $T(t)T(s) = T(t+s)$, pois para todo $x \in X$ vê-se que

$$\begin{aligned} T(t)T(s)x &= T(t)\Big(\lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}x\Big) = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}e^{tA_\lambda}x \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = T(t+s)x. \end{aligned}$$

(iii) Por fim, temos $\| T(t) \| \leq 1$, pois para todo $x \in X$, já vimos que $\|T(t)x\| \leq \| x \|$ e, daí,

$$\| T(t) \| = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\| T(t)x \|}{\| x \|} \leq 1$$

Portanto, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações. Também sabemos que $t \mapsto T(t)x$, definida para $t \geq 0$, é contínua, pois é limite uniforme das funções contínuas $t \mapsto e^{tA_\lambda}x$, logo $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = T(0)x = x$, ou seja, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Para concluir a demonstração, basta mostrar que A é o gerador infinitesimal de $T(t)$. Se $x \in D(A)$, temos

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty} (e^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t \frac{d}{ds}(e^{sA_\lambda}x)ds \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds = \int_0^t \lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)Axds. \end{aligned}$$

Na terceira igualdade utizamos a letra (c) do Teorema **??** e a quarta e quinta igualdades valem porque $e^{sA_\lambda}A_\lambda x \to T(t)Ax$, quando $\lambda \to \infty$, onde a convergência é uniforme em intarvalos limitados. Sejam B o gerador infinitesimal de $T(t)$ e $x \in D(A)$. Para $t > 0$, segue do item (a) do Teorema **??** que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t T(t)Axds = T(0)Ax = Ax.$$

Portanto $x \in D(B)$ e $Bx = Ax$. Como tomamos x arbitrariamente em $D(A)$, temos que $D(A) \subset D(B)$ e $B|_{D(A)} = A$, ou seja, o operador B é uma extensão do operador A. Assim

$$(I - B)D(A) = (I - A)D(A). \tag{3.16}$$

Do Teorema **??** temos que $1 \in \rho(B)$, pois B é o gerador de um C_0-semigrupo de contrações e por hipótese temos $1 \in \rho(A)$. Desta forma $(I - A)^{-1}$ e $(I - B)^{-1}$ são densamente definidos, ou seja, $\overline{(I - A)D(A)} = X = \overline{(I - B)D(B)}$. Como $I - A$ e $I - B$ são operadores fechados, segue que

$$(I - B)D(B) = X = (I - A)D(A). \tag{3.17}$$

De (**??**) e (**??**), segue que $D(A) = D(B)$ e, portanto, $A = B$.

$\square$

3.4 Semigrupos Analíticos

Nessa seção, generalizamos a ideia de C_0-semigrupos. Iniciaremos com algumas propriedades acerca de funções definidas em subconjuntos do corpo complexo $\mathbb{C}$ tomando valores num espaço de Banach X. Em seguida, definiremos a noção de semigrupos holomorfos.

Definição 3.4. *Sejam X um espaço de Banach e Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Uma função $f : \Omega \to X$ é dita* ***holomorfa*** *em Ω se, para cada $z_0 \in \Omega$, o limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

existe. Neste caso, denotamos este limite por $f^{'}(z_0)$ que é chamada a derivada de f em z_0.

Se f é holomorfa é de fácil demonstração que f é contínua e fracamente holomorfa (ou seja, $x^* \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa, para todo $x^* \in X^*$). O próximo teorema nos diz que vale a recíproca. Para demonstrá-lo usaremos o lema dado a seguir, cuja a demonstração pode ser encontrada em [**?**], página 89.

Lema 3.6. *Seja X um espaço de Banach. A sequência $\{x_n\} \subset X$ é de Cauchy se, e somente se, $\{x^*(x_n)\}$ é uniformemente de Cauchy para $x^* \in X^*$ com $\|x^*\| \leq 1$.*

Teorema 3.7. *Sejam X um espaço de Banach, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : \Omega \to X$. Se f é fracamente holomorfa, então f é holomorfa.*

Demonstração. Sejam $f : \Omega \to X$ fracamente holomorfa, $z_0 \in \Omega$ e $\Gamma = \partial\mathbb{D}(z_0, r)$ uma esfera em Ω, onde $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset \Omega$. Se $x^* \in X^*$, então $x^* \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa e

$$\begin{aligned} & x^*\Big(\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\Big) - (x^*\circ f)^{'}(z_0) \\ = \quad & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Big[\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{z-(z_0+h)} - \frac{1}{z-z_0}\Big) - \frac{1}{(z-z_0)^2}\Big] x^*(f(z))dz. \end{aligned}$$

Como $x^* \circ f$ é contínua em Γ e Γ é um conjunto compacto, então $\mid (x^* \circ f)(z) \mid\leq C_{x^*}$, para todo $z \in \Gamma$. Se olharmos $f(z)$ como sendo uma família de aplicações $f(z) : X^* \to \mathbb{C}$, temos que $f(z)$ é pontualmente limitada para cada $x^* \in X^*$. Então, pelo Teorema da Limitação Uniforme, temos que $\sup_{z\in\Gamma} \|f(z)\| \leq C < \infty$. Logo

$$\begin{aligned} & \Big| x^*\Big(\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\Big) - (x^*\circ f)^{'}(z_0)\Big| \\ \leq \quad & (2\pi)^{-1}\|x^*\|\Big(\sup_{z\in\Gamma}\|f(z)\|\Big)\int_\Gamma \Big|\frac{1}{(z-(z_0+h))(z-z_0)} - \frac{1}{(z-z_0)^2}\Big| dz. \end{aligned}$$

A estimativa mostra que $x^*[(f(z_0+h)-f(z_0))/h]$ é uniformemente de Cauchy para $\|x^*\| \leq 1$.

Do lema anterior concluímos que $[f(z_0+h)-f(z_0)]/h$ converge em X, logo $f(\cdot)$ é fortemente holomorfa.

□

Sejam $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma curva finita e parcialmente suave, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e Γ o traço da curva γ. Consideremos $\Gamma \subset \Omega$ e $f : \Omega \to X$ uma função contínua ao longo de Γ. A integral de linha de f ao longo da curva γ é definida por

$$\int_a^b (f \circ \gamma)(s)\gamma^{'}(s)ds,$$

e denotada por

$$\int_\Gamma f(z)dz.$$

Teorema 3.8. *Sejam X e Y espaços de Banach em $\mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e γ uma curva como na definição acima. Se $f : \Omega \to X$ é uma função contínua ao longo de Γ, então*

$$T\Big(\int_\Gamma f(z)dz\Big) = \int_\Gamma T(f(z))dz. \tag{3.18}$$

Demonstração. Sabemos do Teorema **??** que se $f \circ \gamma : [a,b] \to X$ é Bochner integrável, então $T(f\circ\gamma) : [a,b] \to Y$ é Bochner integrável e vale

$$T\Big(\int_a^b (f\circ\gamma)(s)ds\Big) = \int_a^b T((f\circ\gamma)(s))ds.$$

□

O Teorema de Hahn-Banach junto com o Teorema **??** nos permite, sem muito esforço adicional, estender uma parte significativa da teoria de funções de variáveis complexas para funções com valores vetoriais. Um exemplo importante é a fórmula de Cauchy

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w}dz,$$

onde f é holomorfa em Ω, $\overline{B(z_0,r)} \subset \Omega$ e $w \in B(z_0,r)$. Com efeito, para todo $x^* \in X^*$, temos que $x^*(f)$ é holomorfa, logo

$$x^*(f(w)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{x^*(f(z))}{z-w}dz = x^*\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w}dz\Big).$$

Lema 3.7. *Sejam Y um subespaço fechado de um espaço de Banach X e $Y^0 := \{y^* \in X^*; \langle y, y^*\rangle = 0, \forall y \in Y\}$. Se $y \in X$ satisfaz $\langle y^*, y\rangle = 0$, para todo $y^* \in Y^0$, então $y \in Y$.*

Demonstração. Caso contrário, pelo Teorema de Hahn-Banach, existiria $\overline{y} \in X - Y$, tal que $\langle y^*, \overline{y}\rangle = 0$, para todo $y^* \in Y^0$. Assim, existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(\overline{y}) = dist(\overline{y}, Y) \neq 0$ e $x^* = 0$, para todo $y \in Y$. (Ver lema 4.6-7 de [**?**]).

□

Teorema 3.9. *Sejam Y um subespaço fechado de um espaço de Banach X e $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e conexo. Se $f : \Omega \to X$ é holomorfa e existe uma sequência convergente $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ tal que $\lim z_n \in \Omega$ e $f(z_n) \in Y$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(z) \in Y$, para todo $z \in \Omega$.*

Demonstração. Se $x^* \in Y^0$, então $(x^* \circ f)(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x^* \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa e $\lim z_n$ também é um zero de $x^* \circ f$, segue do Teorema 6.20 de [?] que $(x^* \circ f)(z) = 0$, para todo $z \in \Omega$. Portanto $f(z) \in X$ com $\langle x^*, f(z)\rangle = 0$, para todo $x^* \in Y^0$ e todo $z \in \Omega$. Assim, o resultado segue do lema anterior.

□

Agora, generalizemos a ideia de semigrupo abordada na seção 3.2.

Definição 3.5. *Uma aplicação $T : (0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ fortemente contínua é dita* ***semigrupo*** *se satisfaz:*

(a) *$T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s > 0$;*

(b) *Existe $c > 0$, tal que $\| T(t) \| \leq c$, para todo $t \in (0, 1]$;*

(c) *Se $T(t)x = 0$, para todo $t \geq 0$, então $x = 0$.*

O próximo teorema, cuja a demonstração pode ser encontrada em [?], será utilizado para garantir a existência de um operador A que é o gerador de um **semigrupo**, no sentido da definição **??**.

Teorema 3.10. *Seja $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ uma função fortemente contínua satisfazendo*

$$\Big\| \int_0^t S(s)ds \Big\| \leq Me^{\omega t}, \qquad t \geq 0,$$

para $M, \omega \geq 0$. Se $k \in \mathbb{N}$ e $R(\lambda) := \lambda^k \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt$, para $\lambda > \omega$, então são equivalentes:

i) *Existe um operador A tal que $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ e $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ para $\lambda > \omega$;*

ii) *Para $s, t \geq 0$, valem*

$$S(t)S(s) = \frac{1}{(k-1)!}\Big(\int_t^{t+s} (s + t - r)^{k-1} S(r)dr - \int_0^s (s + t - r)^{k-1} S(r)dr \Big)$$

e

$$S(t)x = 0, \quad \forall t \geq 0 \ \Rightarrow x = 0.$$

Pela Definição **??** é fácil ver que $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t > 0$. Dessa forma, faz sentido definir

$$S(t) := \int_0^t T(s)ds.$$

Escolhendo $k = 1$ no Teorema **??** observamos que $S(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ satisfaz a condição (ii) deste teorema. Com efeito, para $s, t > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
S(s)S(t) &= \int_0^s T(r)dr \int_0^t T(\omega)d\omega \\
&= \int_0^s \int_0^t T(r)T(\omega)d\omega dr \\
&= \int_0^s \int_0^t T(r+\omega)d\omega dr \\
&= \int_0^s \int_r^{t+r} T(\omega)d\omega dr \\
&= \int_0^s \Big(\int_0^{t+r} T(\omega)d\omega - \int_0^r T(\omega)d\omega \Big) dr \\
&= \int_0^s S(r+t)dr - \int_0^s S(r)dr \\
&= \int_t^{t+s} S(r)dr - \int_0^s S(r)dr.
\end{aligned}
$$

Portanto, existe um operador $A : D(A) \subset X \to X$ tal que $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ e, para $\lambda > \omega$, vale que

$$
\begin{aligned}
R(\lambda, A) &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)dt.
\end{aligned}
$$

Tal operador A é chamado gerador do semigrupo T. Do Corolário 3.3.11 de [?], podemos observar que um semigrupo é um C_0-semigrupo se, e somente se, seu gerador for densamente definido.

Nos próximos resultados, consideraremos $\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} - \{0\}; |\arg z| < \theta\}$ o setor no plano complexo de ângulo $\theta \in (0, \pi]$.

Definição 3.6. *Considere $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Um semigrupo T em X é chamado* ***holoformo de ângulo*** *θ se T admite uma extensão holomorfa definida em Σ_θ a qual é limitada em $\Sigma_{\theta'} \cap \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, para todo $\theta' \in (0, \theta)$.*

No que segue ao restante desta seção, quando não houver confusão, a extensão de T em Σ_θ também será denotada por T.

Lema 3.8. *Sejam $0 < \theta \leq \pi$ e $f : \Sigma_\theta \to X$ uma função holomorfa tal que*

$$\sup_{z \in \Sigma_{\theta'}} \| f(z) \| < \infty,$$

para todo $\theta' \in (0, \theta)$. Seja $x \in X$.

a) *Se $\lim_{t\to\infty} f(t) = x$, então $\lim_{|z|\to\infty, z\in\Sigma_{\theta'}} f(z) = x$, para todo $\theta' \in (0, \theta)$;*

b) *Se $\lim_{t\to 0^+} f(t) = x$, então $\lim_{|z|\to 0, z\in\Sigma_{\theta'}} f(z) = x$, para todo $\theta' \in (0, \theta)$.*

Demonstração.

a) Seja $f_k(z) = f(kz)$. Segue do Teorema de Vitali, (ver [**?**], Teorema A.5, pág. 467), que $\lim_{k\to\infty} f_k(z) = x$, uniformemente nos subconjuntos compactos de Σ_α. Se $0 < \beta < \alpha$ e $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_k(z) - x\| \leq \varepsilon$, para todo $z \in \Sigma_\beta$, $1 \leq | z | \leq 2$ e $k \geq k_0$. Para $z \in \Sigma_\beta$ e $| z | \geq k_0$, escolha $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq | z | \leq k + 1$, então

$$\|f(z) - x\| = \left\| f_k\left(\frac{z}{k}\right) - x \right\| \leq \varepsilon.$$

b) Utilizar o item (a) para a função $z \mapsto f(z^{-1})$.

Proposição 3.1. *Sejam $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ e T um semigrupo em X com gerador A. Se T é holomorfa de ângulo θ, então valem:*

(a) *$T(z + z') = T(z)T(z')$, para todo $z, z' \in \Sigma_\theta$;*

(b) *Para todo $\theta' \in (0, \theta)$, existem $M \geq 0$ e $\omega \geq 0$ tais que $\| T(z) \| \leq Me^{\omega Rez}$, para todo $z \in \Sigma_{\theta'}$;*

(c) *Seja $\alpha \in (-\theta, \theta)$. Denote por T_α o semigrupo dado por $T_\alpha(t) := T(e^{i\alpha}t)$, para $t \geq 0$. Então $e^{i\alpha}A$ é o gerador de T_α;*

(d) *Se T é um C_0-semigrupo e $z \in \Sigma_{\theta'}$, então*

$$\lim_{z\to 0} T(z)x = x,$$

para todo $x \in X$ e para todo $\theta' \in (0, \theta)$.

Demonstração.

(a) Para $z' \in (0, \infty)$ fixado, considere as funções holomorfas $S(z) = T(z + z')$ e $R(z) = T(z)T(z')$ definidas em Σ_θ tomando valores no espaço de Banach $\mathcal{L}(X)$. Considere $Y := \{0\} \subset \mathcal{L}(X)$, $\Omega := \Sigma_\theta$ e defina $f := R - S$. Considere $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_\theta$ uma sequência dada por $z_n := 1 + \frac{1}{n}$. Assim, $\lim z_n \in \Sigma_\theta$ e, como S e T coincidem em $(0, \infty)$, temos que $f(z_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $f(z_n) \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, pelo teorema **??**, concluímos que $f(z) = 0$ para todo $z \in \Sigma_\theta$ e, portanto,

$$T(z + z') = T(z)T(z'), \quad \forall z \in \Sigma_\theta \;\; e \;\; z' \in (0, \infty).$$

Analogamente, fixando $z \in \Sigma_\theta$, as funções $z' \mapsto T(z+z')$ e $z' \mapsto T(z)T(z')$ coincidem para todo $z' \in (0, \infty)$. Utilizando o Teorema **??**, o resultado segue.

(b) Seja $\theta' \in (0, \theta)$. Como a extensão $T : \Sigma_\theta \to \mathcal{L}(X)$ é limitada em $\Sigma_{\theta'} \cap \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, podemos definir

$$M := \sup_{z \in \Sigma_{\theta'}, |z| \leq 1} \| T(z) \| \quad e \quad \omega' := \max\{\log M, 0\}.$$

Seja $z = te^{i\beta} \in \Sigma_{\theta'}$, onde $t = |z|$ e $|\beta| < \theta'$. Escreva $t = n + s$, onde n é o maior natural menor do que ou igual a t e $s \in [0, 1)$. Defina $T_\beta(t) := T(te^{i\beta})$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\| T(z) \| &= \| T_\beta(t) \| \\
&= \| T_\beta(n + s) \| \\
&\leq \| T_\beta(1) \|^n \| T_\beta(s) \| \\
&\leq M.M^n \\
&\leq Me^{n\omega'} \\
&\leq Me^{|z|\omega'}.
\end{aligned}$$

Como $|z| \leq \dfrac{Rez}{\cos \theta'}$ para todo $z \in \Sigma_{\theta'}$, tomando $\omega := \dfrac{\omega'}{\cos \theta'}$, obtemos

$$\| T(z) \| \leq Me^{\omega Rez}.$$

(c) Seja $\alpha \in (-\theta, \theta)$. Denote por $T_\alpha(t) := T(te^{i\alpha})$, onde $t \geq 0$. Primeiramente, verifiquemos que, de fato, T_α é um semigrupo. Com efeito, valem:

(i) Para todo $s, t > 0$, segue do item (a) deste Teorema que $T_\alpha(t + s) = T_\alpha(t)T_\alpha(s)$.

(ii) Cmo para todo $t \geq 0$, temos que $T_\alpha(t)x = 0$, então $T_{-\alpha}(t)T_\alpha(t)x = 0$. Mas

$$\begin{aligned}
T_{-\alpha}(t)T_\alpha(t)x &= T(te^{-i\alpha})T(te^{i\alpha})x \\
&= T(t(e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}))x \\
&= T(t(2\cos \alpha))x \\
&= T(s)x,
\end{aligned}$$

onde $s := t(2 \cos \alpha) \geq 0$, pois $\alpha \in \left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e $t \geq 0$. Como T restrito a $(0, \infty)$ é um semigrupo, segue que $x = 0$.

(iii) Se $t \in (0,1]$, temos que $T_\alpha(t) = T(te^{i\alpha})$. Seja $z_t := te^{i\alpha}$, com $t = |z_t| \in (0,1]$ e $\alpha \in (-\theta,\theta)$. Então $z_t \in \Sigma_{\theta'} \cap \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, para algum $\theta' \in (0,\theta)$. Logo, existe $C > 0$ tal que

$$\| T_\alpha(z) \| = \| T(te^{i\alpha}) \| = \| T(z_t) \| \leq C, \quad \forall t.$$

Assim, concluímos que T_α é um semigrupo. Agora basta mostrar que seu gerador é $e^{i\alpha}A$, onde A é o gerador de T.

De fato, para $R > 0$, consideremos as curvas $\Gamma_R^1 = \{\gamma_1(t) = t; 0 \leq t \leq R\}$, $\Gamma_R^2 = \{\gamma_2(t) = Re^{it}; 0 \leq t \leq \alpha\}$ e $\Gamma_R^3 = \{\gamma_3(t) = te^{i\alpha}; 0 \leq t \leq R\}$. Defina $\Gamma_R = \Gamma_R^1 \cup \Gamma_R^2 \cup -\Gamma_R^3$ (o sinal de menos na última integral, significa que a curva coincide com Γ_R^3 mas tem direção oposta) e seja $\lambda > 0$. Pelo Teorema **??**, temos que $f(z) := \exp(-\lambda e^{-i\alpha}z)T(z)$ é holoforma em Σ_θ e $\Gamma_R - \{0\} \subset \Sigma_\theta$ é uma curva fechada e suave por partes. Logo do Teorema de Cauchy para funções com valores vetoriais, temos que

$$\int_{\Gamma_R} f(z)x dz = 0, \quad \forall x \in X.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_R} f(z)xdz &= \int_{\Gamma_R^1} f(z)xdz + \int_{\Gamma_R^2} f(z)xdz - \int_{\Gamma_R^3} f(z)xdz \\
&= \int_0^R f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt + \int_0^\alpha f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt - \int_0^R f(\gamma_3(t))\gamma_3'(t)dt \\
&= \int_0^R \exp(-\lambda e^{-i\alpha}t)T(t)xdt + \int_0^\alpha f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt \\
&\quad -e^{i\alpha}\int_0^R e^{-\lambda t}T_\alpha(t)xdt.
\end{aligned}$$

Fazendo $R \to \infty$, obtemos

$$e^{i\alpha}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_\alpha(t)dt = \int_0^\infty \exp(-\lambda e^{-i\alpha}t)T(t)dt. \tag{3.19}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^\alpha f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt \right\| &= \left\| \int_0^\alpha \exp[-i\lambda R(\cos(t-\alpha) + i\mathrm{sen}(t-\alpha)] \right. \\
&\qquad \left. T(Re^{it})Rie^{it}xdt \right\| \\
&\leq \int_0^\alpha | \exp[-\lambda R(\cos(t-\alpha) + i\mathrm{sen}(t-\alpha))] | \\
&\qquad Me^{\omega R\cos t}R\|x\|dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^\alpha e^{-\lambda R\cos(t-\alpha)} RMe^{R\omega\cos t}\|x\|dt \\
&\leq \|x\|M\int_0^\alpha Re^{R(\omega\cos t-\lambda\cos(t-\alpha))}dt \\
&\leq \|x\|M\int_0^\alpha Re^{R(\cos t)(\omega-\lambda\cos\alpha)}dt.
\end{aligned}$$

A última desigualdade segue da identidade $-\cos t\cos\alpha = -\cos(t-\alpha)+\operatorname{sen} t.\operatorname{sen}\alpha$. Daí, escolhendo $\lambda > \frac{\omega}{\cos\alpha}$, temos

$$\left\|\int_0^\alpha f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt\right\| \to 0, \quad \text{quando } R \to 0.$$

Seja A_α o gerador de T_α. Assim, utilizando (**??**), temos que, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha}R(\lambda, A_\alpha)x &= e^{i\alpha}\textstyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_\alpha(t)xdt \\
&= \textstyle\int_0^\infty \exp(-\lambda e^{-i\alpha}t)T(t)xdt \\
&= R(\lambda e^{-i\alpha}, A)x.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& e^{i\alpha}(\lambda I - A_\alpha)^{-1} &=& (\lambda e^{-i\alpha}I - A)^{-1} \\
\Rightarrow\quad & e^{i\alpha}A_\alpha^{-1} &=& A^{-1} \\
\Rightarrow\quad & A_\alpha &=& e^{i\alpha}A.
\end{aligned}$$

(d) Sejam $x \in X$ e $\theta' \in (0,\theta)$. Considere a função holomorfa $f : \Sigma_\theta \to X$ dada por

$$f(z) = e^{-\omega z}T(z)x.$$

Do item (b) deste teorema segue que existem $M \geq 0$ e $\omega \geq 0$ tais que

$$\begin{aligned}
\| f(z) \| &\leq |e^{-\omega z}| \, \| T(z) \| \| x \| \\
&= e^{-\omega Rez} \, \| T(z) \| \| x \| \\
&\leq M \, \| x \| \,, \qquad \forall z \in \Sigma_{\theta'}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{z\in\Sigma_{\theta'}} \| f(z) \| < \infty, \qquad \forall \theta' \in (0,\theta).$$

Como T é um C_0-semigrupo, temos

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} e^{-\omega t}T(t)x = x.$$

Logo, utilizando o Lema **??**, concluímos que

$$\lim_{z\to 0, z\in\Sigma_{\theta'}} e^{-\omega z}T(z)x = \lim_{z\to 0, z\in\Sigma_{\theta'}} f(z) = x.$$

$\square$

Note que, na Proposição **??**, T_α é um C_0-semigrupo para cada $\alpha \in (-\theta,\theta)$ quando T é um C_0-semigrupo, isto é, se $D(A)$ é denso. Em seguida, definiremos semigrupos holomorfos limitados.

Definição 3.7. *Seja $\theta \in (0, \frac{\theta}{2}]$. Um semigrupo T é dito* ***semigrupo holomorfo limitado de ângulo*** *θ se T admite uma extenção holomorfa limitada em $\Sigma_{\theta'}$ para cada $\theta' \in (0,\theta)$.*

É necessária uma certa prudência sobre esta terminologia. De fato, se T é um semigrupo limitado que é holomorfo, então ele não é necessariamente um semigrupo holomorfo limitado, pois é apenas limitado em $\mathbb{R}_+$ e, assim, pode não ser limitado num setor. Um exemplo em que ocorre isto é com o espaço $X = \mathbb{C}$ e com a função $T(t) = e^{it},\ t \geq 0$. A proposição a seguir segue diretamente do Teorema **??**.

Proposição 3.2. *Um operador A é gerador de um semigrupo holomorfo T se, e somente se, existe $\omega \geq 0$ tal que $A - \omega I$ é gerador de um semigrupo holomorfo limitado S.*

3.5 O Semigrupo Gaussiano

Da teoria de Fourier, sabemos que

$$-\Delta f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{F}f, \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{3.20}$$

Aqui, $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é transformada de Fourier e $\mathcal{M}$ é o operador multiplicação definido em

$$D(\mathcal{M}) = \{g \in L^2(\mathbb{R}^n, d\xi); | \xi |^2 g \in L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)\}$$

por

$$(\mathcal{M}g)(\xi) = | \xi |^2 g(\xi).$$

Pela identidade de Parseval, temos que

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{L^2} = \langle f, g\rangle_{L^2}, \qquad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Para maiores detalhes acerca destes conceitos veja [?], capítulo IX.

Observamos que a igualdade (**??**) acima é uma característica dos operadores autoadjuntos, como pode ser visto no Teorema abaixo.

Teorema 3.11. *Seja A um operador auto-adjunto num espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$ com domínio $D(A)$. Existem um espaço de medida (M, μ), onde μ é uma medida finita, um operador unitário $U : \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu)$ e uma função com valores reais f definida em M a qual é finita em quase toda parte, tais que*

1. *$\psi \in D(A)$ se, e somente se, $f(\cdot)(U\psi)(\cdot) \in L^2(M, d\mu)$.*
2. *Se $\varphi \in U(D(A))$, então $(UAU^{-1}\varphi)(m) = f(m)\varphi(m)$.*

Demonstração. Ver [**?**], pág.261.

□

O operador $\mathcal{M}$ é um operador densamente definido e fechado.

Com efeito, considere $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina a função ψ_n por $\psi_n(x) = \psi(x)$, se $| \ g(x) \ | \leq n$ e $\psi_n(x) = 0$ caso contrário. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n \in D(\mathcal{M})$. Além disso, $\psi_n \to \psi$ na norma $L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$, pois $| \ \psi_n \ | \leq | \ \psi \ |$ q.t.p. e $| \ g\psi_n \ | \leq n \ | \ \psi \ |$. Conclui-se que $\psi_n \in L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Também, temos que $\psi_n \to \psi$ em q.t.p. e, utilizando o teorema da convergência dominada, vemos que $\psi_n \to \psi$ em $L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Portanto, $\mathcal{M}$ é um operador densamente definido. Agora mostremos que $\mathcal{M}$ é um operador linear fechado. Para isso, suponha que $\{\psi_n\}$ é uma sequência em $L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$, tal que $\psi_n \to \psi$ e $\mathcal{M}\psi_n \to \phi$ ambas as convergências em $L^2(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Tomando subsequências, se necessário, podemos supor que $\psi_n \to \psi$ em q.t.p. e $g(\psi_n) \to \phi$ em q.t.p.. Logo, $g(\psi_n) \to g(\psi)$ em q.t.p. e portanto $g(\psi) = \phi$ em q.t.p. Assim, concluímos que $\psi \in D(\mathcal{M})$ e $\mathcal{M}\psi = \phi$. Como é fácil verificar que $D(\mathcal{M})$ é um espaço vetorial e que $\mathcal{M}$ é linear neste domínio, concluímos que $\mathcal{M}$ é um operador densamente definido e fechado. Também é possível mostrar que $\mathcal{M}$ é um operador não limitado.

Dando continuidade ao estudo do Laplaciano, considere $\{f_n\}$ uma sequência em $D(\Delta)$, tal que

$$f_n \to f \quad \text{e} \quad \Delta f_n \to g \quad \text{em } L^2.$$

Assim, $\mathcal{F}f_n \to \mathcal{F}f$ em L^2, já que $\mathcal{F}$ é unitário. Além disso, como $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{F}f_n \to g$, segue que $\mathcal{M}\mathcal{F}f_n \to \mathcal{F}g$. Logo $\mathcal{F}f \in D(\Delta)$ e $\mathcal{M}\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$. Daí, pelo Teorema **??**, temos que $f \in D(\Delta)$ e $\Delta f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{F}f = g$. Com isso, concluímos que Δ é operador fechado.

A seguir, daremos um exemplo de semigrupo holomorfo.

Exemplo 3.1. *(Semigrupo Gaussiano) Sejam $t > 0$, $f \in X := L^2(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$(G(t)f)(x) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}} dy$$

define um C_0-semigrupo holomorfo limitado de ângulo $\frac{\pi}{2}$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Seu gerador é o Laplacioano Δ_X em X com domínio maximal, ou seja,

$$\begin{aligned} D(\Delta_X) &= \{f \in X; \Delta f \in X\} \\ \Delta_X f &= \Delta f, \end{aligned}$$

onde X é identificado como um subespaço de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ e $\Delta f = \sum_{j=1}^n D_j^2 f$.

Com efeito, seja $k_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$k_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Então $G(t)f = k_t * f \in X$. Note que $\mathcal{F}k_t = h_t$, onde $h_t(x) := e^{-t\|x\|^2}$ e $h_{t+s} = h_t h_s$. Como $\mathcal{F}$ é um isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, tal que $\mathcal{F}(\psi * f) = \mathcal{F}\psi.\mathcal{F}f$, para todo $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, então $\mathcal{F}(G(t)f) = h_t.\mathcal{F}f$. Assim,

$$\mathcal{F}(G(t+s)f) = h_{t+s}.\mathcal{F}f = h_t.h_s\mathcal{F}f = \mathcal{F}(G(t)G(s)f).$$

Logo $G(t+s) = G(t)G(s)$, para $t, s > 0$. Como $\{k_t; t > 0\}$ é uma aproximação da identidade, segue do Lema 1.3.3 de [?] que $\|G(t)f - f\| = \|k_t * f - f\| \to 0$, quando $t \to 0^+$, para todo $f \in X$. Portanto G é um C_0-semigrupo.

Agora observe que k_z também é definida para $\mathrm{Re}z > 0$ e a função $z \mapsto k_z : \mathbb{C}_+ \to L^1(\mathbb{R}^n)$ é um holomorfismo satisfazendo $\sup_{z\in\sum_\theta} \|k_z\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$, para cada $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|k_z\|_{L^1} &= \left|\frac{1}{(4\pi z)}\right|^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-\frac{\|x\|^2}{4z}}\right| dx \\
&= \frac{1}{(4\pi|z|)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x\|^2|z|\cos\theta}{4|z|^2}} dx \\
&= \frac{1}{(4\pi|z|)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\|^2}{4|z|}} dx \\
&= \frac{1}{(\cos\theta)^{\frac{n}{2}}}.
\end{aligned}$$

Assim, $G(z) := k_z * f$ define uma extensão de G para $\mathbb{C}_+$ com valores em $\mathcal{L}(X)$ e $\sup_{z\in\sum_\theta} \|G(z)\| < \infty$, para cada $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Desta forma, basta mostrar que o gerador de G é o Operador Laplaciano. Primeiramente, observe que, se $f \in X$ com $\Delta f \in X$ e $m(x) = - \mid x \mid^2$, então

$$\mathcal{F}(\Delta(G(t)f)) = m\mathcal{F}(G(t)f) = mh_t\mathcal{F}f = h_t m\mathcal{F}f = h_t\mathcal{F}(\Delta f) = \mathcal{F}(G(t)\Delta f).$$

Portanto $\Delta(G(t)f) = G(t)(\Delta f)$.

Agora observe que se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e G_1 é um semigrupo gaussiano em $L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big(\int_0^t G_1(s)\Delta\psi ds\Big)(x) &= \int_0^t \mathcal{F}(G_1(s)\Delta\psi)(x)ds \\
&= \int_0^t e^{-s|x|^2}(- \mid x \mid)^2(\mathcal{F}\psi)(x)ds \\
&= (e^{-t|x|^2} - 1)(\mathcal{F}\psi)(x) \\
&= (\mathcal{F}(G_1(t)\psi - \psi))(x).
\end{aligned}$$

Segue da unicidade da transformada de Fourier que

$$\int_0^t G_1(s)\Delta\psi ds = G_1(t)\psi - \psi.$$

Agora, seja $f \in X$, $t > 0$. Mostremos que

$$\Delta \int_0^t G(s) f ds = G(t)f - f.$$

Se $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}
\Big\langle \psi, \Delta \int_0^t G(s) f ds \Big\rangle &= \Big\langle \Delta\psi, \int_0^t G(s) f ds \Big\rangle \\
&= \int_0^t \langle \Delta\psi, G(s) f \rangle ds \\
&= \int_0^t \langle G_1(s)\Delta\psi, f \rangle ds \\
&= \Big\langle \int_0^t G_1(s)\Delta\psi ds, f \Big\rangle \\
&= \langle G_1(t)\psi - \psi, f \rangle \\
&= \langle \psi, G(t)f - f \rangle.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{t\to 0^+} \Delta\Big(\frac{1}{t}\int_0^t G(s) f ds\Big) = \lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)f - f}{t} = B(f),$$

onde B é o gerador de $G(t)$ e $f \in D(B)$. Mas, do Teorema **??**, item (a), temos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t G(s) f ds = f.$$

Usando o fato de Δ ser um operador fechado, concluímos que

$$D(B) \subset D(\Delta) \quad \text{e} \quad Bf = \Delta f, \qquad \forall f \in D(B). \tag{3.21}$$

Para finalizar, façamos duas observações:

Observação 3.1. *Suponha que exista $u \in C([0,\tau], X)$ tal que*

$$\int_0^t u(s) ds \in D(A) \qquad e \qquad \Delta\Big(\int_0^t u(s) ds\Big) = u(t) - x.$$

Defina $v(t) = \int_0^t (u(s) - G(s)x)ds$*. Por hipótese e pelo item (b) do Teorema* **??**, *temos que* $v(t) \in D(\Delta)$*. Assim, se*

$$S(t)y = \int_0^t G(s)yds,$$

então $\Delta S(t)y = G(t)y - y$*, para todo* $y \in X$*. Por fim, se definimos* $w(s) = S(t-s)v(s)$*,* $0 \leq s \leq t$*, temos que*

$$\begin{aligned} w^{'}(s) &= -G(t-s)v(s) + S(t-s)v^{'}(s) \\ &= -G(t-s)v(s) + S(t-s)Av(s) \\ &= -G(t-s)v(s) + AS(t-s)v(s) \\ &= -v(s). \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 = w(s) = \int_0^t w^{'}(s)ds = -\int_0^t v(s)ds,$$

e $v(s) = 0$*, para todo* $s \in [0, \tau]$*. E desta última conclusão, chegamos que*

$$u(t) = G(t)x.$$

Observação 3.2. *Sabemos pelo Teorema* **??**, *que existem* $\omega \geq 0$ *e* $M \leq 1$*, tais que*

$$\|G(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Então para $\lambda > \omega$*, temos*

$$(\lambda - \Delta)(\lambda - B)^{-1}f = f. \tag{3.22}$$

*Na identidade anterior foi utilizada a identidade (***??***) e o fato de* $\mathbb{R}_+ \subset \rho(B)$ *que segue do Teorema* **??**.

Vamos mostrar que $(\lambda - \Delta)$ *é um operador injetivo. Se* $(\lambda - \Delta)f = 0$*, então* $u(t) := e^{\lambda t}f$ *satisfaz*

$$\int_0^t u(s)ds \in D(\Delta) \quad e \quad \Delta\Big(\int_0^t u(s)ds \in D(\Delta)\Big) = u(t) - f.$$

Segue da observação **??** que $u(t) = G(t)f$. Mas,

$$e^{\lambda t}\|f\| = \|e^{\lambda t}f\| = \|u(t)\| = \|G(t)f\| \leq Me^{\omega t}\|f\|.$$

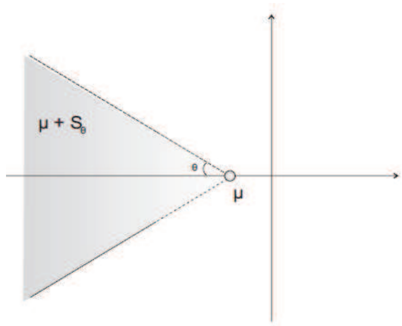
Isso só é possível se $f = 0$.

Da observação **??** e (**??**), temos que $\Delta = B$.

4 SOLUÇÕES S-ASSINTOTICAMENTE ω-PERIÓDICAS DE EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO FRACIONÁRIA

4.1 Operador Solução

Consideremos o setor $\mu + S_\theta = \{\mu + \lambda; \lambda \in \mathbb{C}, \mid \arg(-\lambda) \mid < \theta\}$, como podemos ver abaixo:



Deste modo, dizemos que um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ fechado, com $\overline{D(A)} = X$ é um **operador setorial do tipo** μ se existem $\mu \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $M > 0$, tais que seu resolvente existe fora do setor $\mu + S_\theta$ e além disso

$$\| (\lambda - A)^{-1} \| \leq \frac{M}{\mid \lambda - \mu \mid}, \quad \lambda \notin \mu + S_\theta.$$

Definição 4.1.1. *Sejam X um espaço de Banach, $k \in C(\mathbb{R}_+)$ e $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Dizemos que um operador linear fechado $A : D(A) \subset X \to X$, com $\overline{D(A)} = X$ é o* ***gerador de uma família (a, k)-regularizada****, $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$, se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *$S(t)$ é fortemente contínua, para todo $t \geq 0$. Além disso $S(0) = k(0)I$, onde I é o operador identidade.*

(ii) *$S(t)x \in D(A)$, para todo $t \geq 0$ e $x \in D(A)$. Além disso, vale*

$$A(S(t)x) = S(t)(Ax).$$

(iii) *Vale a equação resolvente (a, k)-regularizada*

$$S(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)AS(s)xds,$$

para todo $x \in D(A)$ e $t \geq 0$.

Definição 4.1.2. *Um operador linear fechado A, com domínio $D(A) \subset X$, é dito o* ***gerador de um operador solução*** *se existem $\mu > 0$ e uma função $S_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X)$ fortemente contínua tais que:*

(i) $\{\lambda^\alpha; Re\lambda > \mu\} \subset \rho(A)$;

(ii) $\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}x = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t)x dt, \quad Re\lambda > \mu \;\; x \in X.$

Neste caso, S_α é o ***operador solução*** *gerado por A.*

Proposição 4.1. *Se A é o gerador de uma família (a, k)-regularizada e exponencialmente limitada $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, onde $a(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ e $k(t) \equiv 1$, com $1 < \alpha < 2$, então A é o gerador de um operador solução S_α, com $S_\alpha = S$.*

Demonstração. Como a família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente limitada, então existem constantes M e $\omega > 0$, tais que

$$\| S(t) \| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, com Re$\lambda > \omega$ e $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)xdt \right\| &\leq \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\lambda t} \| S(t) \| \| x \| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\lambda t} Me^{\omega t} \| x \| dt \\ &\leq M \| x \| \int_0^\infty e^{t(\omega - \mathrm{Re}\lambda)} dt < \infty. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos definir o operador $H(\lambda) : X \to X$ pondo

$$H(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)xdt,$$

Por hipótese, para $x \in D(A)$, temos que

$$\begin{aligned} S(t)x &= x + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} AS(s)xds \\ &= x + J^\alpha AS(t)x. \end{aligned}$$

Usando as propriedades de integração fracionária e aplicando a transformada de Laplace, temos

$$\begin{aligned} H(\lambda)x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}(x + J^\alpha AS(t)x)dt \\ &= x \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt + \mathcal{L}(J^\alpha AS(t)x) \\ &= \frac{x}{\lambda} + \mathcal{L}(J^\alpha AS(t)x) \\ &= \frac{x}{\lambda} + \frac{\mathcal{L}(AS(t)x)}{\lambda^\alpha}. \end{aligned}$$

Deste modo, temos que $\mathcal{L}(AS(t)x) = \lambda^\alpha(H(\lambda)x - x)$. Portanto $Ae^{-\lambda t}S(t)x$ é integrável. Segue da Proposição **??** que $H(\lambda)x \in D(A)$ e que

$$A\Big(\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt\Big) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)xdt.$$

Daí, obtemos que

$$H(\lambda)x = \frac{x}{\lambda} + \frac{AH(\lambda)x}{\lambda^\alpha}.$$

Portanto,

$$\lambda^{1-\alpha}(\lambda^\alpha - A)H(\lambda)x = x, \quad \forall x \in D(A).$$

Como $\overline{D(A)} = X$, temos que $H(\lambda)$ é a inversa a direita de $\lambda^{1-\alpha}(\lambda^\alpha - A)$. Além disso, por (ii) da definição de família (a, k)-regularizada, temos que $H(\lambda)$ é a inversa de $\lambda^{1-\alpha}(\lambda^\alpha - A)$. Assim,

$$(\lambda^{1-\alpha}(\lambda^\alpha - A))^{-1} = H(\lambda) \Longrightarrow (\lambda^\alpha - A)^{-1} = \lambda^{1-\alpha}H(\lambda).$$

Logo $\lambda^\alpha \in \rho(A)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, ou seja,

$$\{\lambda^\alpha; \mathrm{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A).$$

E

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)xdt.$$

Portanto, $S(t)$ é um operador solução gerado por A.

□

Sendo assim, uma forma de garantir que A seja gerador de uma operador solução $S_\alpha(t)$ é determinar que A é o gerador de uma família $(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 1)-$regularizada. Condições para que isso ocorra podem ser encontradas em [**??**]. No entanto, tais possibilidades ainda não foram estudadas.

De qualquer forma, faremos uma outra abordagem: Usaremos, sem detalhes, os resultados obtidos na referência [**??**]. Tais são apresentados a seguir:

Lema 4.1. *Se A é um operador setorial do tipo μ, com $0 < \theta < \pi(1 - \frac{\alpha}{2})$, então A é o gerador de um operador solução dado por*

$$S_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\gamma,$$

onde γ é um caminho suave no exterior do setor $\mu + S_\theta$

A seguir apresentamos um esboço da demonstração deste Lema.

Demonstração. A convergência absoluta de $S_\alpha(t)$ é dada pelo Teorema **??** a seguir. Observe agora que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t}S_\alpha(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \eta^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}\int_0^\infty e^{-(\lambda-\eta)t}dtd\eta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\eta^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}}{\eta - \lambda}d\eta \\
&= \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1},
\end{aligned}$$

onde acima estamos usando o teorema de Fubini e a Fórmula de Cauchy.

A condição $\{\lambda^\alpha; \mathrm{Re}\lambda > \mu\} \subset \rho(A)$ pode ser encontrada na prova do Teorema 1 de [**??**]

Teorema 4.1. *Se A é um operador setorial tipo $\mu < 0$, para algum $M > 0$ e $0 \leq \theta < \pi(1 - \frac{\alpha}{2})$, então existe $C > 0$, tal que*

$$\| S_\alpha(t) \| \leq \frac{CM}{1 + |\mu| t^\alpha}, \quad t \geq 0. \tag{4.1}$$

Observe que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + |\mu| t^\alpha} dt = \frac{|\mu|^{-\frac{1}{\alpha}} \pi}{\alpha \operatorname{sen}(\frac{\pi}{\alpha})}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Assim, de fato $S_\alpha(t)$ é integrável.

4.2 Soluções brandas S-assintoticamente ω-periódica

Nesta seção consideremos a existência e unicidade de soluções brandas S-assintoticamente ω-periódicas para o problema

$$\begin{aligned} v'(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Av(s)ds + f(t, v(t)) \quad t \geq 0, && (4.2)\\ v(0) &= u_0 \in X, && (4.3) \end{aligned}$$

onde $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear densamente definido do tipo setorial definido num espaço de Banach complexo X e $f : [0, \infty) \times X \to X$ é uma função contínua satisfazendo uma condição tipo Lipschitz.

Podemos observar que a integral tipo convolução em (**??**) é a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha - 1$, denotada por $J^{\alpha-1}Av(t)$. Seja A é gerador de um operador solução integrável $S_\alpha(t)$. Aplicando o operador J^1 em (**??**), obtemos

$$v(t) = J^\alpha Av(t) + J^1 f(t, v(t)) + v_0.$$

Aplicando a transformada de Laplace e considerando suas propriedades citadas na seção 1.3, temos que

$$\mathcal{L}(v)(\lambda) = \frac{v_0}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}(f)(\lambda) + \frac{1}{\lambda^\alpha}\mathcal{L}(Av)(\lambda).$$

Uma vez que $\lambda^\alpha \in \rho(A)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}\lambda > \mu$, temos que

$$\begin{aligned} (\lambda^\alpha - A)\mathcal{L}(v)(\lambda) &= \lambda^{\alpha-1}v_0 + \lambda^{\alpha-1}\mathcal{L}(f)(\lambda)\\ \Rightarrow \qquad \mathcal{L}(v)(\lambda) &= \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}v_0 + \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}\mathcal{L}(f)(\lambda). \end{aligned}$$

Da Definição **??**, sabemos que

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t) dt = \mathcal{L}(S_\alpha)(\lambda).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(v)(\lambda) &= \mathcal{L}(S_\alpha)(\lambda)v_0 + \mathcal{L}(S_\alpha)(\lambda)\cdot\mathcal{L}(f)(\lambda)\\ &= \mathcal{L}(S_\alpha)(\lambda)v_0 + \mathcal{L}(S_\alpha * f)(\lambda).\end{aligned}$$

Da unicidade da transformada de Laplace, obtemos

$$v(t) = S_\alpha(t)v_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds.$$

Motivados por isso, definimos solução branda para o problema (**??**)-(**??**).

Definição 4.2.1. *Suponha que A é o gerador de um operador solução integrável $S_\alpha(t)$. Uma função $u \in C_b([0,\infty), X)$ é dita uma* ***solução branda S-assintoticamente*** *ω-**periódica** do problema (**??**)-(**??**) se $u : \mathbb{R}_+ \to X$ for uma função S-assintoticamente ω-periódica e satisfaz*

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds, \qquad \forall t \geq 0. \tag{4.4}$$

Teorema 4.2. *Sejam A um operador setorial do tipo $\mu < 0$, com $0 < \theta < \pi(1-\frac{\alpha}{2})$, $f : [0,\infty) \times X \to X$ uma função contínua tal que $f(\cdot, 0)$ é integrável em $[0,\infty)$ e $L : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e integrável tal que*

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L(t) \| x - y \|, \qquad \textit{para todo } x, y \in X, t \geq 0.$$

*Então o problema (**??**)-(**??**) tem uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica. Além disso, vale*

$$\| u \|_\infty \leq \overline{C}(\| u_0 \| + \| f(\cdot,0) \|_1)\exp(\overline{C} \| L \|_1),$$

onde $\overline{C}$ é uma constante suave e positiva.

Demonstração. Seja S_α o operador do lema (**??**), defina o operador Γ_α no espaço $SAP_\omega(X)$ por

$$(\Gamma_\alpha)u(t) := S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds = S_\alpha(t)u_0 + v_\alpha(t). \tag{4.5}$$

Mostremos que Γ_α é um operador com valores em $SAP_\omega(X)$. Seja $x \in X$. Como $S_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X)$ é fortemente contínua, temos que $S_\alpha(\cdot)x$ é contínua. Além disso,

$$\|S_\alpha(t)x\| \leq \frac{CM}{1+ \mid \mu \mid t^\alpha}\|x\| \to 0, \quad \text{quando } t \to \infty.$$

Portanto, $S_\alpha(\cdot)x \in C_b([0,\infty), X)$. Para $\omega > 0$, temos que

$$\|S_\alpha(t+\omega)x + S_\alpha(t)x\| \leq \Big(\frac{CM}{1+ \mid \mu \mid (t+\omega)^\alpha} + \frac{CM}{1+ \mid \mu \mid t^\alpha}\Big)\|x\| \to 0, \quad \text{quando } t \to \infty.$$

Assim, $S_\alpha(\cdot)x \in SAP_\omega(X)$, para todo $x \in X$. Com isso, o problema se reduz em mostrar que $v_\alpha \in SAP_\omega(X)$. Para isto, primeiramente, note que existe $C_{\alpha,x} > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|S_\alpha(t)x\| \leq C_{\alpha,x}, \; x \in X.$$

Daí segue pelo Princípio da Limitação Uniforme que existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que $\sup_{t\in[0,\infty)} \|S_\alpha(t)\| \leq C_\alpha$. Sejam $u \in SAP_\omega(X)$ e $s \geq 0$, da desigualdade

$$\begin{aligned} \|f(s,u(s))\| &\leq \|f(s,u(s)) - f(s,0)\| + \|f(s,0)\| \\ &\leq L(s)\|u(s)\| + \|f(s,0)\|, \end{aligned}$$

segue que a função $s \mapsto f(s,u(s))$ é integrável em $[0,\infty)$. Seja $\varepsilon > 0$, fixemos $a > 0$ tal que

$$\int_a^\infty \|f(s,u(s))\| < \frac{\varepsilon}{3C_\alpha}.$$

Também sabemos que, como a função $s \mapsto f(s,u(s))$ é contínua, o conjunto $K_a := \{f(s,u(s)); s \in [0,a]\}$ é compacto em X. Assim, para $\omega > 0$ e $s \in [0,a]$ existe $T_{\varepsilon,K_a} > 0$, tal que

$$\|S_\alpha(t+\omega)f(s,u(s)) - S_\alpha(t)f(s,u(s))\| < \frac{\varepsilon}{3a},$$

para todo $t \geq T$ e $s \in [0,a]$. Para $t > a$, podemos fazer a seguinte decomposição

$$\begin{aligned} v_\alpha(t+\omega) - v_\alpha(t) &= \int_0^{t+\omega} S_\alpha(t+\omega-s)f(s,u(s))ds - \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds \\ &= \int_0^a (S_\alpha(t+w-s) - S_\alpha(t-s))f(s,u(s))ds \\ &\quad + \int_a^{t+\omega} S_\alpha(t+\omega-s)f(s,u(s))ds - \int_a^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds. \end{aligned}$$

Tomando $t \geq T + a$, obtemos

$$\begin{aligned} \|v_\alpha(t+\omega) - v_\alpha(t)\| &\leq \int_0^a \|S_\alpha(t+w-s)f(s,u(s)) - S_\alpha(t-s)f(s,u(s))\|ds \\ &\quad + C_\alpha \int_a^{t+\omega} \|f(s,u(s))\|ds + C_\alpha \int_a^t \|f(s,u(s))\|ds \\ &\leq \int_0^a \frac{\varepsilon}{3a} ds + 2C_\alpha \int_a^\infty \|f(s,u(s))\|ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2C_\alpha \frac{\varepsilon}{3C_\alpha} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $\lim_{t\to\infty}(v_\alpha(t+\omega) - v_\alpha(t)) = 0$. Mais ainda, da desigualdade

$$\begin{aligned} \|v_\alpha(t)\| &\leq \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|\|f(s,u(s))\|ds \\ &\leq C_\alpha \int_0^\infty \|f(s,u(s))\|ds < \infty, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

temos que v_α é limitada. Agora, mostremos a continuidade de v_α e concluímos que $v_\alpha \in SAP_\omega(X)$.

Para $t \geq 0$ e $h > 0$, vale

$$\begin{aligned} v_\alpha(t+h) - v_\alpha(t) &= \int_0^{t+h} S_\alpha(t+h-s)f(s,u(s))ds - \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds \\ &= \int_0^h S_\alpha(t+h-s)f(s,u(s))ds + \int_h^{t+h} S_\alpha(t+h-s)f(s,u(s))ds \\ &\quad - \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds \\ &= \int_0^t S_\alpha(t-s)[f(s+h,u(s+h)) - f(s,u(s))]ds \\ &\quad + \int_0^h S_\alpha(t+h-s)f(s,u(s))ds. \end{aligned}$$

Para $\varepsilon > 0$, existe $\delta_t > 0$ tal que para todo $0 < h < \delta_t$,

$$\begin{aligned} \|f(s+h,u(s+h)) - f(s,u(s))\| &< \frac{\varepsilon}{2(C_\alpha t+1)}, \quad s \in [0,t+1], \\ \int_0^h \|f(s,u(s))\|ds &< \frac{\varepsilon}{2C_\alpha}. \end{aligned}$$

Assim, para todo $0 < h < \delta_t$, obtemos

$$\begin{aligned} \|v_\alpha(t+h) - v_\alpha(t)\| &\leq C_\alpha \int_0^t \|f(s+h,u(s+h)) - f(s,u(s))\|ds \\ &\quad + C_\alpha \int_0^h \|f(s,u(s))\|ds \\ &\leq C_\alpha t \frac{\varepsilon}{2(C_\alpha t+1)} + C_\alpha \frac{\varepsilon}{2C_\alpha} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que implica que v_α é contínua à direita.

Do que foi visto até aqui, concluímos que $\Gamma_\alpha : SAP_\omega(X) \to SAP_\omega(X)$. Agora, sejam $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$, a desigualdade

$$\begin{aligned} \|\Gamma_\alpha u_1(t) - \Gamma_\alpha u_2(t)\| &\leq \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|\|f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s))\|ds \\ &\leq C_\alpha \int_0^t L(s)\|u_1(s) - u_2(s)\|ds \\ &\leq C_\alpha \int_0^\infty L(s)ds\|u_1 - u_2\|_\infty, \end{aligned}$$

mostra que Γ_α é contínua. Defina o operador linear $B_\alpha : C_b([0,\infty),\mathbb{R}) \to C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ por

$$(B_\alpha g)(t) = C_\alpha \int_0^t L(s)g(s)ds, \qquad \text{para } t \geq 0.$$

B_α é contínua e além disso, B_α é completamente contínua. Para mostrar que B_α é completamente contínua, observe que dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $a > 0$, tal que

$$C_\alpha \int_a^\infty L(s)ds < \varepsilon.$$

Para cada $g \in C_b([0,\infty))$, defina as seguintes funções

$$(\Gamma_1 g)(t) = \begin{cases} C_\alpha \displaystyle\int_0^t L(s)g(s)ds, & 0 \leq t \leq a \\ \\ C_\alpha \displaystyle\int_0^a L(s)g(s)ds, & t \geq a. \end{cases}$$

e

$$(\Gamma_2 g)(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a \\ \\ C_\alpha \displaystyle\int_0^a L(s)g(s)ds, & t \geq a. \end{cases}$$

Seja $R = \{\Gamma_1 g; \|g\|_\infty \leq 1\}$. Se $s,t \geq a$, temos $\mid \Gamma_1 g(s) - \Gamma_1 g(t) \mid = 0$. Se $0 \leq s,t \leq a$, para qualquer $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{C}{\delta}$. Logo, para $\mid s - t \mid < \delta$, temos

$$\begin{aligned} \mid (\Gamma_1 g)(s) - (\Gamma_1 g)(t) \mid &= \mid C_\alpha \int_0^s L(u)g(u)du - C_\alpha \int_0^t L(u)g(u)du \mid \\ &\leq C_\alpha \Big| \int_0^s L(u)g(u)du - \int_0^t L(u)g(u)du \Big| \\ &\leq C_\alpha \int_s^t \Big| L(u)g(u) \Big| du \\ &\leq C_\alpha \sup_{u \leq a} |L(u)g(u)||s-t| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Analogomente, se $s \leq a$ e $t > a$, para $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$, assim para $|s-t| < \delta$, temos $|a - s| < \delta$, logo

$$\begin{aligned} \mid (\Gamma_1 g)(s) - (\Gamma_1 g)(t) \mid &= \mid C_\alpha \int_0^s L(u)g(u)du - C_\alpha \int_0^a L(u)g(u)du \mid \\ &\leq C_\alpha \int_s^a \Big| L(u)g(u) \Big| du < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto a família $R_\varepsilon = \{\Gamma_1(g); \|g\|_\infty \leq 1\}$ é equicontínua. Também podemos observar que R_ε é uniformemente limitada, pois se $0 \leq t \leq a$, temos

$$\mid (\Gamma_1 g)(t) \mid \leq C_\alpha \int_0^t \|L(u)\| \|g(u)\| du < \infty,$$

do mesmo modo, para $t \geq a$, temos

$$\mid (\Gamma_1 g)(t) \mid \leq C_\alpha \int_0^a \|L(u)\| \|g(u)\| du < \infty.$$

Do Teorema de Arzela-Ascoli concluimos que R_ε é relativamente compacto. No entanto, observe que

$$B_\alpha g(t) = \Gamma_1 g(t) + \Gamma_2 g(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto

$$B_\alpha := \{B_\alpha g; \|g\| \leq 1\} \subset R_\varepsilon + \{\beta; \beta \in C_b([0,\infty)), \|\beta\|_\infty \leq \varepsilon\} = R_\varepsilon + D_\varepsilon$$

Pela Proposição **??**, $\psi_{C_b([0,\infty))}(R_\varepsilon) = 0$, pois $\overline{R_\varepsilon}$ é compacto. Logo

$$\begin{aligned} \psi_{C_b([0,\infty))}(B) &\leq \psi_{C_b([0,\infty))}(R_\varepsilon) + \psi_{C_b([0,\infty))}(D_\varepsilon) \\ &= \psi_{C_b([0,\infty))}(D_\varepsilon) < \varepsilon. \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\psi_{C_b([0,\infty))}(B_\alpha) = 0$. Assim, B_α é um operador completamente contínuo. Segue da Teoria espectral para Operadores Compactos que $0 \in \sigma(B_\alpha)$ e que $\sigma(B_\alpha) - \{0\} = \sigma_p(B_\alpha) - \{0\}$, onde $\sigma(B_\alpha)$ e $\sigma_p(B_\alpha)$ são o espectro de B_α e o espectro pontual de B_α, respectivamente. Observe que se $\lambda \neq 0$ é autovalor de B_α, associado ao autovetor g, por definição temos que

$$\mid g(t) \mid = \frac{\mid (B_\alpha g)(t) \mid}{\mid \lambda \mid} \leq \frac{C_\alpha}{\mid \lambda \mid} \int_0^t \mid L(s) \mid\mid g(s) \mid ds, \qquad t \geq 0.$$

Pela Desigualdade de Gronwall, segue que $\mid g(t) \mid = 0$, para todo $t \geq 0$, ou seja, $g = 0$. Logo, $\lambda \neq 0$ não pode ser autovalor de B_α. Assim, $\sigma(B_\alpha) = \{0\}$ e o raio espectral de B_α, $r(B_\alpha) = \sup_{\lambda \in \sigma(B_\alpha)} \mid \lambda \mid = 0 < 1$. Considere $C_b([0,\infty), \mathbb{R})$ com a relação de ordem pontual e defina uma aplicação m, como no Exemplo **??**, a saber, $m : C_b([0,\infty), X) \to C_b([0,\infty), \mathbb{R})$ onde

$$(mu)(t) = \sup_{s \in [0,t]} \|u(s)\|, \qquad t \geq 0.$$

Dados $t \geq 0$, $\theta \in [0,t]$ e $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$, temos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_\alpha u_1(\theta) - \Gamma_\alpha u_2(\theta)\| &\leq C_\alpha \int_0^\theta L(s)\|u_1 - u_2\| ds \\ &\leq C_\alpha \int_0^\theta \mid L(s) \mid \sup_{\tilde\theta} \|u_1(\tilde\theta) - u_2(\tilde\theta)\| ds \\ &\leq C_\alpha \int_0^\theta \mid L(s) \mid \sup_{\tilde\theta} \|u_1(\tilde\theta) - u_2(\tilde\theta)\| ds \\ &= B_\alpha m(u_1 - u_2)(t). \end{aligned}$$

Com isso,

$$m(\Gamma_\alpha u_1 - \Gamma_\alpha u_2)(t) = \sup_{\theta \in [0,t]} \|\Gamma_\alpha u_1(\theta) - \Gamma_\alpha u_2(\theta)\| \leq B_\alpha m(u_1 - u_2)(t), \quad t \geq 0,$$

o que mostra que $m(\Gamma_\alpha u_1 - \Gamma_\alpha u_2) \leq B_\alpha m(u_1 - u_2)$. Daí, segue que Γ_α, B_α e m verificam as condições do Teorema **??**, portanto Γ_α tem um único fixo $u \in SAP_\omega(X)$. Ainda temos que

$$\begin{aligned}
(1+|\mu|t^\alpha)\|u(t)\| &= (1+|\mu|t^\alpha)\left\|S_\alpha(t)u_0+\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds\right\| \\
&\leq (1+|\mu|t^\alpha)\frac{CM}{1+|\mu|t^\alpha}\|u_0\|+(1+|\mu|t^\alpha)\int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|\|f(s,u(s))\|ds \\
&\leq CM\|u_0\|+CM\int_0^t \frac{(1+|\mu|t^\alpha)}{(1+|\mu|(t-s)^\alpha)}\|f(s,u(s))\|ds \\
&\leq CM\|u_0\|+CM\int_0^t \frac{(1+|\mu|t^\alpha)}{(1+|\mu|(t-s)^\alpha)}L(s)\|u(s)\|ds \\
&\quad +CM\int_0^t \frac{(1+|\mu|t^\alpha)}{(1+|\mu|(t-s)^\alpha)}\|f(s,0)\|ds.
\end{aligned}$$

Mas, para $s \leq t$, temos

$$\frac{(1+|\mu|t^\alpha)}{(1+|\mu|(t-s)^\alpha)} \leq 2^\alpha(1+|\mu|s^\alpha).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(1+|\mu|t^\alpha)\|u(t)\| &\leq CM\|u_0\|+2^\alpha CM\int_0^t (1+|\mu|s^\alpha)L(s)\|u(s)\|ds \\
&\quad +2^\alpha CM\int_0^t (1+|\mu|s^\alpha)\|f(s,0)\|ds \\
&\leq CM\|u_0\|+2^\alpha CM(1+|\mu|t^\alpha)\|f(\cdot,0)\|_1 \\
&\quad +2^\alpha CM\int_0^t (1+|\mu|s^\alpha)L(s)\|u(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Gronwall, concluímos

$$\|u(t)\|_\infty \leq \overline{C}(\|u_0\|+\|f(\cdot,0)\|_1)\exp(\overline{C}\|L\|_1)$$

onde $\overline{C}=2^\alpha CM$.

□

Teorema 4.3. *Sejam A um operador setorial tipo $\mu < 0$ e $f:[0,\infty)\times X \to X$ uma função uniformemente S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados que satisfaz a condição de Lipschitz*

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| \leq L\|x-y\| \qquad \forall x,y \in X, t \geq 0. \tag{4.6}$$

*Se $CM \mid \mu \mid^{-\frac{1}{2}} \pi L < \alpha \operatorname{sen}(\frac{\pi}{\alpha})$, onde C e M são constantes dadas por (**??**), então o problema (**??**) e (**??**) tem uma solução branda S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. Como no Teorema (**??**), defina a aplicação Γ_α no espaço $SAP_\omega(X)$ por

$$(\Gamma_\alpha u)(t) := S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds = S_\alpha(t)u_0 + v_\alpha(t).$$

Mostraremos que Γ_α está bem definida e em seguida mostraremos que $\Gamma(\alpha)$ é uma contração. De fato, seja $u \in SAP_\omega(X)$. Sabemos que $S_\alpha(t)u_0 \to 0$, quando $t \to \infty$, logo $S_\alpha(\cdot)u_0 \in SAP_\omega(X)$. Além disso, $v_\alpha \in C_b([0,\infty),X)$, pois $f(\cdot,u(\cdot))$ é limitada e temos

$$\|v_\alpha\|_\infty \leq \frac{CM \mid \mu \mid^{-\frac{1}{\alpha}} \pi \|f(\cdot,u(\cdot))\|_\infty}{\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.$$

Do Teorema **??**, segue que para todo $\varepsilon > 0$, existe $L_\varepsilon > 0$ tal que $\|f(t+\omega, u(t+\omega)) - f(t,u(t))\| \leq \varepsilon$, para todo $t \geq L_\varepsilon$. Portanto, para todo $t \geq L_\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned}
\|v_\alpha(t+\omega) - v_\alpha(t)\| &\leq \int_0^\omega \|S_\alpha(t+\omega-s)f(s,u(s))\|ds \\
&+ \int_0^{L_\varepsilon} \Big\|S_\alpha(t-s)[f(s+\omega,u(s+\omega)) - f(s,u(s))]\Big\|ds \\
&+ \int_{L_\varepsilon}^t \Big\|S_\alpha(t-s)[f(s+\omega,u(s+\omega)) - f(s,u(s))]\Big\|ds \\
&\leq CM\|f(\cdot,u(\cdot))\|_\infty \Big(\int_t^\infty \frac{1}{1+\mid \mu \mid^\alpha}ds + 2\int_{t-L_\varepsilon}^\infty \frac{1}{1+\mid \mu \mid^\alpha}ds\Big) \\
&+ \frac{CM \mid \mu \mid^{-\frac{1}{\alpha}} \pi\varepsilon}{\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.
\end{aligned}$$

Logo $v_\alpha(t+\omega) - v_\alpha(t) \to 0$, quando $t \to \infty$ e portanto $\Gamma_\alpha u \in SAP_\omega(X)$. Por outro lado, para $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$, pois

$$\|(\Gamma_\alpha u_1)(t) - (\Gamma_\alpha u_2)(t)\| \leq \frac{CM \mid \mu \mid^{-\frac{1}{\alpha}} \pi L}{\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}\|u_1 - u_2\|_\infty.$$

Portanto, Γ_α é uma contração.

□

Corolário 4.1. *Seja $f : [0,\infty) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função S-assintoticamente ω-periódica em conjuntos limitados que satisfaz a condições de Lipschitz (**??**). Se $L < \frac{\alpha \operatorname{sen} \frac{\pi}{\alpha}}{\rho\pi}$, então o problema (**??**) e (**??**) tem uma solução branda S-assintoticamente ω-periódica.*

Teorema 4.4. *Seja $f(\cdot,0)$ limitada e $\lim_{t\to\infty}(f(t,x) - f(t+n\omega,x)) = 0$ uniformemente em $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, para todo $K \subset X$ limitado. Suponha que $CM \cdot \mid \mu \mid^{-\frac{1}{\alpha}} \pi L < \alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$ e vale **??**, então o problema (**??**) e (**??**) admite uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica.*

Demonstração. Seja $\mathcal{S}(X)$ das funções $u \in C_b([0,\infty), X)$ tais que

$$\lim_{t\to\infty}(u(t) - u(t+n\omega)) = 0,$$

uniformemente en $n \in \mathbb{N}$. Observe que se $u_k \to u_0$, com $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(X)$, ou seja, para todo k, temos $u_k \in C_b([0,\infty), X)$ e $\lim_{t\to\infty}(u_k(t) - u_k(t+n\omega)) = 0$, então

$$\begin{aligned} \|u_0 - u_0(t+n\omega)\| &\leq \|u_0(t) - u_k(t)\| + \|u_k(t) - u_k(t+n\omega)\| \\ &+ \|u_k(t+n\omega) - u_0(t+nk)\|. \end{aligned}$$

Logo $\lim_{t\to\infty}(u_0 - u_0(t+n\omega)) = 0$, uniformemente em $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\mathcal{S}(X)$ é um subespaço fechado de $C_b([0,\infty), X)$. Assim, se $u \in \mathcal{S}(X)$, então

$$\lim_{t\to\infty}(f(t+n\omega, u(t+n\omega)) - f(t, u(t))) = 0,$$

uniformemente em $n \in \mathbb{N}$. Defina $\Gamma_\alpha : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(X)$ como em (**??**). Como

$$\|v_\alpha\|_\infty \leq \frac{CM \mid \mu \mid^{-\frac{1}{\alpha}} \pi \Big(L\|u\|_\infty + \|f(\cdot,0)\|_\infty\Big)}{\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.$$

E

$$\begin{aligned} \|v_\alpha(t+n\omega) - v_\alpha(t)\| &\leq CM\Big(L\|u\|_\infty + \|f(\cdot,0)\|_\infty\Big)\Big(\int_t^\infty \frac{1}{1+\mid \mu \mid s^\alpha} ds \\ &+ 2\int_{t-L_\varepsilon}^\infty \frac{1}{1+\mid \mu \mid s^\alpha} ds\Big) + \frac{CM \mid \mu \mid^{-\frac{1}{\alpha}} \pi\varepsilon}{\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)} \end{aligned}$$

Portanto, $\Gamma_\alpha \in \mathcal{S}(X)$. Assim, analogamente a demonstração do Teorema (**??**), concluímos que Γ_α tem um único ponto fixo em $\mathcal{S}(X)$, logo o resultado segue do Teorema (**??**).

□

Para concluir este trabalho, analisemos a existência e unicidade de solução branda S-assintoticamente ω-periódica para a seguinte equação fracionária

$$D_t^\alpha u(t,x) = D_x^2 u(t,x) - \mu u(t,x) + D_t^{\alpha-1} a(t) f(u(t,\infty)), \quad t \geq 0, x \in [0,\pi], \tag{4.7}$$
$$u(t,0) = u(t,\pi) \quad t \geq 0, \tag{4.8}$$
$$u(0,x) = u_0(x) \quad x \in [0,\pi], \tag{4.9}$$

onde $u_0 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ e $a, f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ são funções apropiadas.

Consideremos o problema (**??**) e (**??**) com $X = L^2[0,\pi]$ e A definido em $D(A) \subset X$ por $Au = u'' - \nu u$, $\nu > 0$, com

$$D(A) = \{u \in L^2[0,\pi]; u'' \in L^2[0,\pi], u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Sabemos que $\Delta u = u''$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico limitado de ângulo $\frac{\pi}{2}$ em $L^2[0,\pi]$, a saber, o semigrupo gaussiano, estudado no Exemplo **??**. Do Teorema 3.7.11 de [**?**], temos que $\Sigma_\pi \subset \rho(\Delta)$ e

$$\sup_{\lambda\in\Sigma_{\pi-\varepsilon}} \|\lambda(\lambda I - \Delta)^{-1}\| < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Seja $S_{\frac{\pi}{2}} := \{\lambda \in \mathbb{C}; |\arg(-\lambda)| < \frac{\pi}{2}\}$, então

$$\mathbb{C} - S_{\frac{\pi}{2}} = \Sigma_{\frac{\pi}{2}} \subset \Sigma_{\pi} \subset \rho(\Delta).$$

Deste modo, se $\lambda \in \mathbb{C} - S_{\frac{\pi}{2}}$, então $\lambda + \nu \in \rho(\Delta)$. Logo, $(\lambda - A)^{-1} = ((\lambda+\nu)I - \Delta)^{-1}$ existe, para todo λ no exterior do setor $S_{\frac{\pi}{2}}$. Além disso, temos que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| = \|((\lambda+\nu)I - \Delta)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda + \nu|}.$$

Portanto, A é setorial tipo $-\nu < 0$. Assim, assuma que $a(\cdot)$ é uma função S-assintoticamente ω-periódica e que existe uma constante $L > 0$ tal que

$$| f(x) - f(y) | \leq L \mid x - y \mid, \qquad \forall x, y \in [0, \infty).$$

Se $\|a\|_\infty < \frac{\alpha \operatorname{sen}(\frac{\pi}{\alpha})}{CM|\nu|^{-\frac{1}{\alpha}}\pi L}$, então pelo teorema (**??**), existe uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica de (**??**) e (**??**). Se além disso, $\lim_{t\to\infty}(a(t+n\omega) - a(t)) = 0$, uniformemente em $n \in \mathbb{N}$, então a solução é assintoticamente ω-periódica.

REFERÊNCIAS

[1] ARENDT, W. et al. **Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems**. 2.ed. Berlin: Springer Basel AG, 2011.

[2] ENGEL, K.; NAGEL, R. **One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations**. New York: Springer-Verlag, 2000.

[3] CUESTA, E. Asymptotic behaviour of the solutions of fractional integro-differential equations and some time discretizations. **Discrete Continuous Dynamical Systems**. p. 277-285, Jan. 2007.

[4] BRANDANI, E. **Medidas de Não Compacidade e Teoria de Interpolação**. 1992. 64f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, São Paulo, 1992.

[5] FOLLAND, G. **Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications**. 2.ed. Canada: John Wiley e Sons, 1999.

[6] HENRÌQUEZ, H.; PIERRI, M.; TÀBOAS, P. On S-asymptotically ω-periodic functions on Banach spaces and applications. **J. Math. Anal. Appl.** n.343, p. 1119-1130, 2008.

[7] REED, M.; SIMOM, B. **Methods of Modern Mathematical Physics, Functional Analysis** London: Academic Press, INC, 1980.

[8] HENRÌQUEZ, H. Approximation of abstract functional differential equations with unbounded delay. **Indian J. Pure Appl. Math.** n. 27, p. 357-386, 1997.

[9] KREYSZIG, E. **Introductory Funcional Analysis with Applications**. Canada: John Wiley e Sons, 1989.

[10] DIETHELM, K. **The Analysis of Fractional Differential Equations**. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.

[11] VIEIRA, E. Funções Holomorfas de uma variável. In: I COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO NORDESTE, 1., 2011, Sergipe. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[12] IÓRIO, R.; IÓRIO, V. **Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução**. Rio de Janeiro: Coleção Projeto Euclides, 1988.

[13] LIZAMA, C. Regularized solutions for abstract Volterra equations. **J. Math. Anal. Appl.** n. 243, p. 278-292, 2000.

[14] CUEVAS, C.; SOUZA, J.C. S-asymptotically ω-periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations. **Applied Mathematics Letters**. n. 22, p. 865-870, 2009.

[15] PIERRI, M. **Funções S-assintoticamente periódicas em espaços de Banach e aplicações à equações diferenciais funcionais**. Tese (doutorado) - ICMC-USP, 2009.

[16] ZAIDMAN, S. **Almost-Periodic Functions in Abstract Space**. Boston: Res. Notes in Math. 126. , 1985.