UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS-UFAL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

RAPHAEL DE OMENA MARINHO

FROBENIUS COM SINGULARIDADES: ÁLGEBRA HOMOLÓGICA NUMA APLICAÇÃO COM FORMAS DIFERENCIAIS

MACEIÓ
2019

RAPHAEL DE OMENA MARINHO

FROBENIUS COM SINGULARIDADES: ÁLGEBRA HOMOLÓGICA NUMA APLICAÇÃO COM FORMAS DIFERENCIAIS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Instituto de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luis Guillermo Martínez Maza

Maceió

2019

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho

M338f Marinho, Raphael de Omena.
Frobenius com singularidades : álgebra homóloga numa aplicação com formas diferenciais / Raphael de Omena Marinho. - 2019.
44 f.

Orientador: Luis Guillermo Martínez Maza.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 44.

1. Formas diferenciais. 2. Singularidades (Matemática). 3. Álgebra homológica. I. Título.

CDU: 517.9

Raphael de Omena Marinho

Frobenius com Singularidades: álgebra homológica numa aplicação com formas diferenciais

Dissertação na área de Dinâmica Complexa, submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Data de Aprovação: 22/02/2019

Banca Examinadora

Luis Guillermo Martínez M.

Prof. Dr. Luis Guillermo Martínez Maza
Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Orientador

Prof. Dr. Arturo Ulises Fernandez Perez
Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Examinador

Prof. Dr. Rogério Santos Mol
Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Examinador

AGRADECIMENTOS

Certo vez um grande amigo disse que “quando um atleta sobe ao pódio ele carrega toda uma equipe consigo". Neste espaço, que é propício, apresentarei minha equipe e deixarei registrada minha gratidão.

Começo, então, pelos integrantes mais antigos da equipe: minha família, a qual sempre esteve disposta em apoiar as decisões que tomei, mesmo que muitas vezes não entendessem a vida acadêmica. Em especial, destaco três nomes que diariamente se fizeram presentes; à minha mãe Joelia de Omena, a meu pai Alberto Marinho e à minha irmã Ingrid Marinho, registro minha gratidão e felicidade em tê-los a meu lado.

São tantos os nomes que gostaria de registrar, tios e tias, avôs e avós, primos e primas. Todos, com carinho, estão presentes e compõem a equipe. Mas, não poderia deixar aqui de agradecer Yasmine Omena e Pedro Marinho, os quais sinto grande afeição e irmandade, por todos bons momentos e conversas que, certamente, facilitaram estes últimos anos.

Outra parte da equipe é composta por amigos. Primeiro, deixo meus agradecimentos aos meus amigos de longa data, por todas risadas e a amizade que se mostra inabalável; sem estes, o final seria ainda mais difícil.

Aos meus amigos da turma do mestrado, Davis Magalhães, Wagner Xavier e Yanderson de Lima, meus sinceros agradecimentos por todos dias de estudo, companheirismo e apoio. Vocês são grandes responsáveis pela chegada ao pódio.

Ainda escrevo sobre amigos de turma, mas agora os que me acompanham desde a graduação. Fui felizardo em começar minha vida acadêmica na mesma turma que Jairo de Melo e Krisleen da Silva; agradeço por tantos dias de aprendizado, boas conversas e toda experiência que adquiri com vocês.

Essa parte da equipe é grande, e escrever sobre todos me renderia tantas linhas quanto a da dissertação. Durante seis anos, encontrei grandes amizades no Instituto de Matemática e, aqui, deixo minha gratidão por tornarem a vida acadêmica mais leve. Registro alguns nomes como forma de enfatizar minha amizade: Alyson Santos, Arthur Wayne, Beatriz Neves, Deiviana Nogueira, Jandir Gomes, José Ranilson e Raquel Paes.

Dentre estes, minhas palavras de gratidão a Maria Ranilze da Silva, a qual tem sido para todos que a conhecem uma grande amiga e conselheira. Mostra-nos como a vida acadêmica pode ser alegre, mesmo com dedicação; sim, isso é possível.

Registro também meus agradecimentos a Gilmar Batista, um grande amigo que sempre disposto, tirou-me dúvidas sobre o LaTeX e, então, foi possível digitar este trabalho.

Mesmo com tantas amizades, só foi possível chegar até aqui devido a formação matemática que tive. Meu respeito e agradecimento aos professores Abraão Mendes, Cícero Tiarlos, Juliana de Lima, Marcos Ranieri e Wagner Ranter, com os quais pude aprender a admirar alguns dos encantos matemáticos.

Agradeço ao meu orientador, professor Luis Guillermo, o qual disse sim quando nenhum outro podia. Por acreditar desde o começo que seria possível, por tantas conversas que me permitiram enxergar a matemática e por todo conhecimento que obtive, deixo minha gratidão registrada aqui.

Aos professores Arturo Fernandez e Rogério Mol, que aceitaram o convite em participar das correções desse trabalho, agradeço pelas sugestões e críticas que acrescentam de maneira singular nesta última etapa.

Ainda na equipe de mestres e doutores que contribuíram, e contribuem, na minha vida acadêmica, agradeço a mais dois que, para mim, tornam-se bons amigos. Ao professor Isnaldo Isaac, agradeço por todas xícaras de café acompanhadas de uma boa conversa. Ao professor André Flores, por todos conselhos que me fizeram aprender a jogar e a ganhar o jogo, minha gratidão.

Porém, em minha formação acadêmica não foram apenas matemáticos que me ensinaram. Aproveito para externar minha gratidão e verdadeira admiração aos servidores do Instituto de Matemática. Em especial, Ana de Mendonça, Fátima Cavalcante e Karenn de Melo, que tenho como amigas.

Uma grande equipe, formada por grandes pessoas. Não esqueço de manifestar meu reconhecimento e agradecer a Marileide da Fonseca e ao Lucinvaldo. Sempre “tia" Marileide, com seu café açucarado e sua melodia afinada, lembra-nos o quanto a vida pode ser doce e agradável; entramos todos no ritmo até chegar ao pódio.

Agradeço também as agências de fomento e desenvolvimento para a pós-graduação brasileira, especialmente a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CNPQ), a qual financiou este trabalho.

De forma clichê, os que creem, começariam agradecendo a Deus por toda essa equipe. Contudo, falta-me palavras para escrever minha gratidão em viver ao lado destes que citei. Ao fim digo que Nele creio, confio e espero.

RESUMO

Apresentamos o Teorema de Frobenius para formas diferenciais, admitindo que o conjunto de singularidades é não vazio. Para tanto precisaremos de ferramentas da álgebra homológica, que será estuda nos capítulos iniciais. Em seguida veremos definições, exemplos e operações no espaço de formas diferenciais. Feito isso, demonstramos o teorema principal, devido a B. Malgrange.

Palavras-chave: formas diferenciais; singularidades; álgebra homológica.

ABSTRACT

We show the Forbenius Theorem for differencial forms, assuming that the set of singularities is non-empty. For this, we will need tools of the homological algebra, which will be studied in the initial chapters. Next, we will see definitions, examples and operations in the space of differential forms. Having done this, we will proof the main theorem, owing to B. Malgrange.

Keywords: differential forms; singularities; homological algebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Já no fim do século XIX, Paul Painlevé (1863-1933) inicia o estudo das Equações Diferenciais Complexas, buscando a classificação de equações do tipo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x,y)}{G(x,y)},$$

a partir do comportamento de suas soluções, onde F e G são polinômios complexos. Atualmente, o estudo desse tipo de equação diferencial tem contribuído para a compreensão e desenvolvimento nas áreas de Matemática e Física-Matemática, como por exemplo, os Circuitos Elétricos que são regidos por equações diferenciais complexas, ou a busca de Funções Transcendentes.

Um importante problema na teoria dessas equações é determinar quais tipos de equações racionais, como a citada acima, pode ser integrada utilizando apenas funções elementares do Cálculo Diferencial e Integral e algumas operações algébricas como obter raízes de polinômios complexos de duas variáveis.

O desenvolvimento deste estudo nos leva a Teoria das Folheações: agora, as Equações Diferenciais Complexas são vistas como Folheações Holomorfas. A Teoria das Folheações abrange diversas áreas da Matemática, como Topologia Diferencial e Algébrica, Geometria Algébrica, Sistemas Dinâmicos e Várias Variáveis Complexas.

Uma boa introdução na Teoria das Folheações é feita em (NETO; SCÁRDUA, 2015). Um dos importantes resultados é que folheações de codimensão um são localmente definidas por 1-formas diferenciais integráveis, diz-se ainda que a folheação é definida pela equação diferencial $\omega = 0$, onde ω é uma 1-forma holomorfa.

Nesta direção, encontramos um resultado bastante conhecido, que dá uma caracterização para integrabilidade de uma forma: ω é integrável se, e somente se, $\omega \wedge d\omega = 0$; este é o Teorema de Frobenius. Esse resultado considera que a forma ω não tem singularidades, a grosso modo isto quer dizer que não se anula em alguns pontos.

Porém, algumas equações complexas da forma $\frac{dz}{dt} = X(z)$ têm seu campo de vetores se anulando em alguns pontos ou, ainda, temos que algumas variedades complexas não admitem folheações por curvas (que são folheações de dimensão um, sem singularidades), mas admitem folheações singulares por curvas, como ocorre no importante caso do espaço projetivo de dimensão 1, $\mathbb{C}P(1)$.

Diante disto, essa dissertação tem como objetivo provar um Teorema devido a Bernard Malgrange (1928-), apresentado pela primeira vez em 1976. O artigo intitulado "*Frobenius avec Singularités, codimension un*" deixa evidente qual o resultado principal.

Como já comentado, essa Teoria intersecta diversas áreas da Matemática. Aqui, precisaremos fortemente da Topologia Algébrica, a qual tem sua origem quando Enrico Betti (1823-1892) e Jules Henri Poincaré (1854-1912) estudavam invariantes topológicos que permitem classificar os espaços de maneira topológica. Por um lado, E. Betti introduz o conceito de grupo fundamental, enquanto J.H Poincaré associa cada espaço com uma sequência de grupos, chamados de grupos de homologia.

A partir da definição de homologia surge mais um ramo da matemática: Álgebra Homológica. Já no primeiro capítulo dessa dissertação apresentamos alguns conceitos e resultados da álgebra homológica que nos auxiliarão na demonstração do Teorema proposto por B. Malgrange.

Na primeira seção do capítulo 1 apresentaremos conceitos da Teoria de Categorias e Functores, que trata da relação entre objetos gerais. Exemplificaremos com functores que serão utilizados em todo trabalho, denotados por $Mor(C, -)$ e $Mor(-, C)$.

Dando continuidade ao capítulo 1, vamos expor definições e argumentos básicos da Teoria de Módulos. Um dos resultados fundamentais é o Lema de Nakayama, que será demonstrado.

Por fim, na seção 3, estudaremos o Complexo de Koszul. Nesta seção apresentaremos as ideias principais para a aplicação do último capítulo, como os conceitos de homologia e co-homologia.

Devido a importância das formas diferenciais nesse contexto, faremos uma breve exposição de conceitos e propriedades de formas no capítulo 2.

A seção 1 do segundo capítulo, será dedicada para as definições e alguns exemplos que complementam a teoria das formas diferenciais. Começaremos com um caso mais simples, até chegarmos nas generalizações.

Operações entre formas é o foco da segunda seção do capítulo 2. Definiremos algumas operações e mostraremos suas principais propriedades. Ao fim da seção, deixaremos uma versão do Teorema de Frobenius.

Já familiarizados com a definição de Complexo, vista no capítulo 1, estudaremos dois complexos particulares no espaço das formas diferenciais na seção 3 do capítulo 2. O Complexo de De Rhan vai ser apresentado apenas para exemplificação, porém o segundo complexo no espaço de formas nos será útil no último capítulo. Ainda nessa seção encontraremos o importante Algorítimo de Godbillon-Vey.

O terceiro e último capítulo da dissertação, será dedicado a demonstração do Teorema de Frobenius com Singularidades, feito pela primeira vez por B. Malgrange. Apresentaremos outros resultados da mesma natureza, que foram primordiais para as ideias de B. Malgrange. A principal aplicação da álgebra homológica se dá numa proposição encontrada em (MALGRANGE, 1976).

Para finalizar a dissertação, deixamos na conclusão alguns comentários a respeito de generalizações feitas também por B. Malgrange em um segundo artigo, publicado logo após (MALGRANGE, 1976).

1 Álgebra Homológica

O ramo da matemática que associa estruturas algébricas com espaços topológicos é conhecido como Topologia Algébrica. Dentre tantos conceitos, encontramos o de homologia e co-homologia, os quais são estudados na álgebra homológica. Começamos esse capítulo definindo Categorias e Functores, que são conceitos mais gerais e que nos dará base para desenvolver a teoria necessária para os demais capítulos. Na seção 2, apresentamos definições, exemplos e alguns importantes resultados da Teoria de Módulos. Ao fim do capítulo, será definido o Complexo de Koszul e algumas proposições que posteriormente serão utilizadas. Podemos encontrar essa teoria em (LANG, 2002).

1.1 CATEGORIAS E FUNCTORES

A Teoria das Categorias trata de quaisquer estruturas matemáticas, as quais são chamadas de objetos, e a relação entre estruturas da mesma natureza. A relação entre esses objetos é conhecido como morfismos, enquanto uma relação entre categorias é chamada de functores. A seguir apresentamos as definições formais, acompanhadas de alguns exemplos que nos ajudam a esclarecer tais definições.

Definição 1.1. Uma **Categoria** $\mathscr{C}$ consiste de uma coleção de **objetos** Ob($\mathscr{C}$), um conjunto de **morfismos** $Mor(A, B)$, para cada par ordenado (A, B) de objetos, e uma aplicação $Mor(A, B) \times Mor(B, C) \longrightarrow Mor(A, C)$, para cada tripla ordenada (A, B, C) de objetos, que satisfazem os seguintes axiomas:

CAT 1. Dois conjuntos $Mor(A, B)$ e $Mor(A', B')$ são disjuntos, a não ser que $A = A'$ e $B = B'$, neste caso eles são iguais.

CAT 2. Para cada objeto A de $\mathscr{C}$ existe um morfismo $id_A \in Mor(A, A)$ o qual atua como a identidade à esquerda para os elementos de $Mor(A, B)$ e à direita em $Mor(B, A)$, para qualquer objeto $B \in Ob(\mathscr{C})$.

CAT 3. A aplicação é associativa, isto é, dados $f \in Mor(A, B)$. $g \in Mor(B, C)$ e $h \in Mor(C, D)$ então

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

para quaisquer objetos A, B, C, D de $\mathscr{C}$.

Exemplo 1.1. A categoria $\mathscr{C}^0$, cujos objetos são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$ e os morfismos são aplicações contínuas e a categoria $\mathscr{C}^\infty$, com mesmos objetos, mas cujos morfismos são aplicações C^∞, são exemplos bastante utilizados e estudados em algumas áreas da matemática.

De maneira análoga, temos a categoria **Hol**, cujos objetos são abertos em $\mathbb{C}^n$ e morfismos são as aplicações holomorfas.

Exemplo 1.2. A categoria que tem como objetos os grupos e morfismos os homomorfismos de grupos será denotada por $\mathscr{G}$. Quando os grupos forem abelianos, denotaremos simplesmente por **Ab**.

Nos exemplos acima, os axiomas **CAT 1, 2, 3** são facilmente verificados. Basta perceber que a composição de morfismos ainda é um morfismo na respectiva categoria, por exemplo, a composição de funções holomorfas ainda é uma função holomorfa, assim como a composição de homomorfismos de grupos é um homomorfismo.

Definição 1.2. Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ categorias. Um **functor covariante** F de $\mathscr{A}$ em $\mathscr{B}$ é uma regra o qual para cada objeto A em $\mathscr{A}$ associa um objeto $F(A)$ em $\mathscr{B}$, e para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ associa um morfismo $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ de modo que

FUN 1. Para todo A em $\mathscr{A}$ temos $F(id_A) = id_{F(A)}$.

FUN 2. Se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ são dois morfismos de $\mathscr{A}$ então

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Podemos definir o **functor contravariante** de $\mathscr{A}$ em $\mathscr{B}$ usando essencialmente a mesma definição, mas revertendo a seta em $F(f)$, isto é, para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ o functor contravariante associa um morfismo

$$F(f) : F(B) \longrightarrow F(A),$$

tal que se

$$f : A \longrightarrow B \text{ e } g : B \longrightarrow C$$

são morfismos em $\mathscr{A}$, então

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Exemplo 1.3. Seja $\mathscr{S}$ a categoria cujos objetos são conjuntos e os morfismos são aplicações entre conjuntos. Para uma categoria $\mathscr{C}$ qualquer, ao fixarmos um objeto C de $\mathscr{C}$, obtemos um functor covariante

$$M_C : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{S}$$

fazendo $M_C(A) = Mor(C, A)$, para qualquer objeto A de $\mathscr{C}$. Se $\varphi : A \longrightarrow A'$ é um morfismo, temos a aplicação

$$M_C(\varphi) : Mor(C, A) \longrightarrow Mor(C, A')$$

dada por

$$g \mapsto \varphi \circ g$$

para qualquer $g \in Mor(C, A)$. Os axiomas **FUN 1** e **FUN 2** são verificados.

Podemos obter também um functor contravariante

$$M^C : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{S}$$

tal que $M^C(B) = Mor(B, C)$. Se $\psi : B' \longrightarrow B$ é um morfismo, então

$$M^C(\psi) : Mor(B, C) \longrightarrow Mor(B', C)$$

é dado pela regra

$$f \mapsto f \circ \psi$$

para qualquer $f \in Mor(B, C)$.

Para entendermos melhor, tome **Ab** a categoria de grupos abelianos. Primeiro sabemos que o conjunto dos homomorfismos, Hom(A,B), que saem de A e chegam em B é também um grupo abeliano, com a operação composição. Assim, fixando um grupo abeliano G, temos que B $\mapsto$ Hom(G,B) é um functor covariante de **Ab** em si mesmo e A $\mapsto$ Hom(A,G) é um functor contravariante também de **Ab** em **Ab**.

Ainda neste capítulo continuaremos estudando categorias e functores específicos, relacionados a estrutura de módulos.

1.2 MÓDULOS: DEFINIÇÕES BÁSICAS

De modo geral, módulo é a generalização de espaço vetorial. Buscando estender os conceitos da Teoria de Vetores, iremos nesta seção definir os que são geradores para um módulo e como se constitui uma base. Ainda nesta seção apresentamos as sequências exatas, que é um conceito fundamental na álgebra homológica.

Definição 1.3. Seja A um anel. Um **módulo à esquerda**, ou um **A-módulo à esquerda**, M é um grupo abeliano, usualmente aditivo, junto com uma operação $\bullet : AxM \longrightarrow M$, tais que, para quaisquer $a, b \in A$ e $x, y \in M$ temos

$$(a + b)x = ax + bx \text{ e } a(x + y) = ax + ay.$$

De maneira similar definimos um **A-módulo à direita**. Quando M é um módulo à esquerda e à direita diremos apenas que é um **A-módulo**.

Se M é um A-módulo, entendemos como **submódulo** N de M um subgrupo aditivo tal que AN $\subset$ N, ou seja, N $\subset$ M é um subgrupo que é fechado para operação de A em M.

Observação 1. A partir da definição acima, pode-se provar que $1x = x$, $0x = 0$ e $a(-x) = -(ax)$.

Exemplo 1.4. Seja I um ideal de um anel A comutativo. O anel quociente A/I com a operação dada por $a(x + I) = ax + I$, para $a \in A$, define uma estrutura de módulo sobre A.

Exemplo 1.5. Se S é um conjunto não vazio e M é um A-módulo, então o conjunto das aplicações $Map(S, M)$ com a operação $(af)(s) = a.f(s)$, $f \in Map(S, M)$ e $a \in$ A, é também um A-módulo.

Exemplo 1.6. Seja $\mathfrak{q}$ um ideal de A e M um A-módulo. Definimos $\mathfrak{q}M$ como o conjunto de todos elementos $q_1m_1 + \cdots + q_nm_n$,com $q_i \in \mathfrak{q}$ e $m_i \in M$. Este é um exemplo de submódulo de M.

Dados n submódulos $M_1, \ldots, M_n$ de um A-módulos, temos que a soma $M = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i$, definida por

$$M = \{m_1 + \cdots + m_n | m_i \in M_i\},$$

é um A-módulo. Em geral, dada uma família $\{M_i\}_{i\in I}$ de A-módulos, definimos $\sum\limits_{i\in I} M_i = \{\sum\limits_{i\in I} m_i | m_i \in M_i,$ com $m_i = 0$ exceto para um número finito de índices$\}$.

Proposição 1.1. *Seja $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de submódulos de um A-módulo M. São equivalentes:*

1. $m \in M$ é escrito de maneira única como $m = \sum\limits_{i\in I} m_i$, com $m_i \in M_i$ e $m_i = 0$, exceto para um número finito de índices.

2. $M = \sum\limits_{i\in I} M_i$ e se $\sum\limits_{i\in I} m_i = 0$, então $m_i = 0$ para todo $i \in I$.

3. $M = \sum\limits_{i\in I} M_i$ e $M_j \cap (\sum\limits_{i\neq j} M_i) = 0$, para todo $j \in I$.

Demonstração.

1. $\Rightarrow$ 2. Por hipótese, para $m \in M$ temos que $m = \sum\limits_{i\in I} m_i$ e, portanto, $M \subset \sum\limits_{i\in I} M_i$. Sendo M_i $(i \in I)$ submódulos de M, segue trivialmente que $\sum\limits_{i\in I} M_i \subset M$. Estas inclusões mostram que $M = \sum\limits_{i\in I} M_i$. Agora, se $\sum\limits_{i\in I} m_i = 0$ então, pela unicidade, $m_i = 0$ para todo $i \in I$, pois podemos escrever $\sum\limits_{i\in I} m_i = 0 = \sum\limits_{i\in I} 0_i$.

2. $\Rightarrow$ 3. Seja $m \in M_j \cap (\sum\limits_{i\neq j} M_i)$, ou seja, $m = m_j \in M_j$ e $m = \sum\limits_{i\neq j} m_i \in \sum\limits_{i\neq j} M_i$. Dessa forma, tem-se $\sum\limits_{i\neq j} m_i - m_j = 0$ e, por hipótese, para cada $i \in I$ temos $m_i = 0$. Logo, $m = m_j = 0$.

3. $\Rightarrow$ 1. Precisamos mostrar apenas a unicidade, já que $M = \sum\limits_{i\in I} M_i$ implica que $m = \sum\limits_{i\in I} m_i$, com $m_i \in M_i$ e $m_i = 0$, exceto para um número finito de índices. Então suponha que $\sum\limits_{i\in I} m_i = m = \sum\limits_{i\in I} m'_i$. Daí, $\sum\limits_{i\in I} m_i - \sum\limits_{i\in I} m'_i = 0$ e isto implica que, para cada $j \in I$, $m_j - m'_j = \sum\limits_{i\neq j} m'_i - \sum\limits_{i\neq j} m_i$. Como $m_j - m'_j \in M_j$ e $\sum\limits_{i\neq j} m'_i - \sum\limits_{i\neq j} m_i \in \sum\limits_{i\neq j} M_i$, a hipótese garante que $m_j - m'_j = 0$. Portanto, m é escrito de forma única. $\square$

Definição 1.4. Dizemos que um A-módulo M é a **soma direta** de uma família de submódulos $\{M_i\}_{i\in I}$ se satisfaz qualquer das condições da proposição 1.1. Denotaremos por $M = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ e no caso em que I é um conjunto finito, podemos escrever simplesmente $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.

Definição 1.5. Seja $X \subset M$ um subconjunto de um A-módulo. Quando $X \neq \emptyset$ o **conjunto gerado** por X é $\langle X \rangle = \{\sum a_i x_i | a_i \in A$ e $x_i \in X\}$, onde $x_i = 0$ exceto para um número finito. Por convenção, se $X = \emptyset$ definimos $\langle X \rangle = 0$. M é um A-módulo **finitamente gerado** se existe um subconjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $\langle X \rangle = M$.

Definição 1.6. Um A-módulo L é dito **livre** se existe um conjunto de índices $B \subset L$ tal que $L = \bigoplus_{b \in B} A_b$, com $A_b = \langle b \rangle \cong A$, para todo $b \in B$. Dizemos ainda que B é **base** de L.

O resultado a seguir é conhecido como Lema de Nakayama e utilizaremos como ferramenta algébrica no decorrer do trabalho. Admitiremos que A é um anel comutativo, com unidade.

Lema 1.1 (Lema de Nakayama)**.** *Sejam M um A-módulo finitamente gerado e $\mathfrak{q}$ um ideal de A contido em cada ideal maximal de A. Se $\mathfrak{q}M = M$, então $M = \{0\}$.*

A interseção de todos ideais maximais de A é denotado por **rad(A)** e chamamos de o **Radical de Jacobson**. Uma caracterização para o radical de Jacobson é: $x \in rad(A)$ se, e somente se, $1 - xy$ é uma unidade em A, para todo $y \in A$. É simples verificar essa equivalência, porém requer conhecimentos na teoria de ideais, a qual não será desenvolvida nesse trabalho. No Lema de Nakayama temos que $\mathfrak{q} \subset rad(A)$.

Demonstração (Lema de Nakayama). Suponha que $M \neq \{0\}$ e seja $\{m_1, \ldots, m_l\}$ um conjunto minimal de geradores de M. Por hipótese, $m_1 \in \mathfrak{q}M$, isto é, existem $q_1, \ldots, q_l$ tais que

$$m_1 = q_1 m_1 + \cdots + q_l m_l.$$

Assim, $(1 - q_1)m_1 = q_2 m_2 + \cdots + q_l m_l$. Como $q_1 \in \mathfrak{q}$, a caracterização do radical de Jacobson de A implica em $1 - q_1$ ser uma unidade em A.

Mas, isso contradiz a minimalidade dos geradores de M, já que m_1 será escrito como combinação dos demais geradores. $\square$

Sejam M um A-módulo e N um submódulo. Podemos definir uma estrutura de módulo no grupo quociente M/N fazendo $a(x + N) = ax + N$, para qualquer $a \in A$. Com esta operação de A em M/N, verifica-se que M/N é um A-módulo, chamado de **módulo quociente**.

Em algumas literaturas o Lema de Nakayama é encontrado como o corolário a seguir. Sua demonstração é uma aplicação do Lema 1.1 para o módulo quociente M/N.

Corolário 1.1. *Se N é um submódulo de M tal que $M = N + \mathfrak{q}M$, então M = N.*

Definição 1.7. Um **A-homomorfismo** é uma aplicação $f : M \longrightarrow M'$ entre dois módulos do mesmo anel A, tal que é um homomorfismo de grupos e vale $f(ax) = af(x)$, para qualquer $a \in A$ e $x \in M$. Denotamos por $Hom_A(M, M')$ o conjuntos dos A-homomorfismo de M em M'.

A coleção dos A-módulos formam uma categoria, denotada por Mod_A, onde os morfismos são os A-homomorfismos. Quando A é um anel comutativo, $Hom_A(M, M')$ é um A-módulo e, portanto, ao fixar um A-módulo M, temos também que N $\mapsto Hom_A(M, N)$ é um functor covariante e N $\mapsto Hom_A(N, M)$ é um functor contravariante da categoria Mod_A em Mod_A.

Sendo $f : M \longrightarrow N$ um A-homomorfismo, temos que o **núcleo**

$$ker(f) = \{m \in M | f(m) = 0\}$$

é um submódulo de M e que a **imagem**

$$im(f) = \{f(m) | \forall m \in M\}$$

é submódulo de N. Definimos também o **co-núcleo** de f como o quociente $coker(f) = N/im(f)$.

Definição 1.8. Uma sequência de A-homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

é dita uma **sequência exata** quando $im(f_{n+1}) = ker(f_n)$, para todo n. Chamamos de **complexo** quando vale apenas a inclusão $im(f_{n+1}) \subset ker(f_n)$

Uma **sequência exata curta** é uma sequência exata do tipo

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0.$$

Exemplo 1.7. Temos uma sequência exata curta associada com um submódulo N de um módulo M, dada por

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0,$$

onde a aplicação de N em M é a inclusão e a próxima é a aplicação canônica.

Dizemos ainda que um functor F é exato se preserva a exatidão da sequência, isto é, dada uma sequência $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ exata, então

$$0 \longrightarrow F(M') \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(M'') \longrightarrow 0$$

ainda é exata. Aqui, consideramos F covariante, mas a definição é a mesma para quando F for contravariante.

Um A-módulo Q é dito ser **injetivo** se o functor $M \mapsto Hom_A(M, Q)$ é exato. Um fato interessante, que pode ser encontrado na página 784 de (LANG, 2002), é que cada módulo é um submódulo de um módulo injetivo.

Por uma **resolução injetiva** de M, entendemos como uma sequência exata

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow,$$

tal que cada I^n $(n \geq 0)$ é injetivo.

Passamos então para uma operação entre módulos que será útil para a próxima seção.

Definição 1.9. Sejam M e N dois A-módulos. Por **produto tensorial** de M e N, entendemos como sendo o único A-módulo $M \otimes_A N$ e aplicação A-bilinear $h : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$ tais que para qualquer A-módulo P e qualquer aplicação A-bilinear $f : M \times N \longrightarrow P$, existe um único A-homomorfismo $g : M \otimes_A N \longrightarrow P$ que o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & M \otimes_A N \arrow[dl, "g"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja, $g \circ h = f$.

Escrevemos os elementos de $M \otimes_A N$ como $x \otimes_A y$. Omitiremos o índice A em $\otimes$ quando estiver claro que são A-módulos. Algumas propriedades do produto tensorial podem ser verificadas. Se M, N e P são A-módulos e I é ideal de A, então

a. $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$;

b. $(M \otimes_A N) \otimes_A P = M \otimes_A (N \otimes_A P)$;

c. $(M \oplus N) \otimes_A P = (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P)$;

d. $A \otimes_A M \cong M$;

e. $M \otimes_A A/I \cong M/IM$.

1.3 COMPLEXO DE KOSZUL

Um dos complexos mais importantes para álgebra comutativa foi apresentado por Jean-Louis Koszul. Nesta dissertação, sua importância se dá na estreita relação com a álgebra exterior. Procuramos nesta seção definir de forma simples e comentar resultados úteis para o trabalho. Mas, primeiro definimos um complexo de maneira geral, apresentando dois tipos: complexos de cadeias e de co-cadeias. Associados a esses complexos, definimos também suas homologias ou co-homologias.

Definição 1.10. Um **módulo graduado** é uma família $M = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de A-módulos. Uma **aplicação graduada** $f : M \longrightarrow N$, de grau r ($gr(f) = r$), entre dois módulos graduados M e N, é uma família de A-homomorfismos $f = (f_n : M_n \longrightarrow N_{n+r})_{n\in\mathbb{Z}}$. Dizemos que M' é um **submódulo graduado** de M se, para cada $n \in \mathbb{Z}$, M'_n é submódulo de M_n.

Se $f : M \longrightarrow N$ é uma aplicação graduada, com $gr(f) = r$, então o núcleo e a imagem de f são, respectivamente, submódulos graduados de M e N:

$$ker(f) = (ker(f_n))_{n\in\mathbb{Z}} \text{ e } im(f) = (im(f_{n-r}))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Definição 1.11. Um **complexo de cadeias** é um par (C, ∂), onde $C = (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é um módulo graduado e $\partial = (\partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma aplicação graduada, de C em C, com $gr(\partial) = -1$ tal que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Chamamos a aplicação ∂ de **operador bordo** e denotamos $(C, \partial) = C_\bullet$:

$$C_\bullet : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

Note que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ implica em $im(\partial_{n+1}) \subset ker(\partial_n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como esses conjuntos são subgrupos de C_n, temos a seguinte definição:

Definição 1.12. Seja (C, ∂) um complexo de cadeias. A **n-ésima homologia** de $C_\bullet$ é o grupo

$$H_n(C_\bullet) = \frac{ker(\partial_n)}{im(\partial_{n+1})}.$$

Também damos um nome especial quando a aplicação graduada tem grau 1:

Definição 1.13. Um **complexo de co-cadeias** é um par (C, δ), onde $C = (C^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é um módulo graduado e $\delta = (\delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma aplicação graduada, de C em C, com $gr(\delta) = 1$ tal que $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$. Chamamos a aplicação δ de **co-bordo** e denotamos $(C, \delta) = C^\bullet$:

$$C^\bullet : \cdots \xrightarrow{\delta_{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} \cdots$$

A **n-ésima co-homologia** de $C^\bullet$ é o grupo

$$H^n(C^\bullet) = \frac{ker(\delta_n)}{im(\delta_{n-1})}.$$

De modo geral, quando a aplicação graduada d de um módulo graduado C é tal que $d \circ d = 0$, chamamos o par (C, d) de **complexo** e a aplicação d de **diferencial**.

Sejam $C_\bullet = (C, \partial)$ e $D_\bullet = (D, \delta)$ dois complexos de cadeia. Dizemos que $f : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$, $f = \{f_i : C_i \longrightarrow D_i\}$, é uma **aplicação entre complexos** se o seguinte diagrama comuta para todo $i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{i+1}"] & C_i \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "f_i"] & C_{i-1} \arrow[r, "\partial_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta_{i+1}"] & D_i \arrow[r, "\delta_i"'] & D_{i-1} \arrow[r, "\delta_{i-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

A partir disso, podemos definir uma aplicação entre os grupos de homologia desses complexos. Se $f : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ é uma aplicação entre complexos, então para cada $i \in \mathbb{Z}$ temos $H_i(f) : H_i(C_\bullet) \longrightarrow H_i(D_\bullet)$ definida por

$$H_i(f)(x + im(\partial_{i+1})) = f_i(x) + im(\delta_{i+1}).$$

Uma sequência $L_\bullet \xrightarrow{f} M_\bullet \xrightarrow{g} N_\bullet$ de complexos é exata se $L_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} N_i$ é exata para cada $i \in \mathbb{Z}$. Encontra-se de forma detalhada na literatura a propriedade de "sequência exata longa de homologia", que afirma: para cada sequência exata curta $0 \longrightarrow L_\bullet \xrightarrow{f} M_\bullet \xrightarrow{g} N_\bullet \longrightarrow 0$ de complexos de cadeias, existe uma sequência exata longa de homologia

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(N_\bullet) \xrightarrow{\varphi_{i+1}} H_i(L_\bullet) \xrightarrow{H_i(f)} H_i(M_\bullet) \xrightarrow{H_i(g)} H_i(N_\bullet) \xrightarrow{\varphi_i} H_{i-1}(L_\bullet) \longrightarrow \cdots,$$

onde os A-homomorfismos φ_i são conhecidos por conectantes. Para mais detalhes sugerimos (SOUZA, 2017).

Definição 1.14. Sejam $M = (M_m)$ e $N = (N_n)$ dois complexos, com diferenciais d_M e d_N respectivamente. Denotaremos apenas por d para indicar a diferencial de cada complexo. Definimos $M \otimes N$ o **produto tensorial de complexos** por

$$(M \otimes N)_p = \bigoplus_{m+n=p} M_m \otimes N_n,$$

com a diferencial

$$d(x \otimes y) = d_m(x) \otimes y + (-1)^m x \otimes d_n(y).$$

Sejam A um anel comutativo e $x \in A$. Definimos um complexo $K(x)$ sendo $K_0(x) = A$, $K_1(x) = A$ e $K_i(x) = 0$ $(i \neq 0, 1)$. A diferencial $d : K_1(x) \longrightarrow K_0(x)$ é a multiplicação por x. Escolhendo e_x tal que $d(e_x) = x$, temos que $K_1(x) = A_{e_x}$ é um A-módulo livre, com base $\{e_x\}$. Para $x_1, \ldots, x_n \in A$ escolheremos $e_1, \ldots, e_n$ como acima e temos uma definição mais geral:

Definição 1.15. Sejam A um anel comutativo e $x = (x_1, \ldots, x_n)$, com $x_i \in A$. O **Complexo de Koszul** $K_\bullet(x)$ é definido como:

1. $K_0(x) = A$;
2. Para $1 \leq p \leq n$, $K_p(x) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} A_{e_{i_1 \ldots i_p}}$, onde $A_{e_{i_1 \ldots i_p}}$ é o A-módulo livre gerado por $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}\} = \{e_{i_1 \cdots i_p}\}$;
3. $K_p(x) = 0$, para $p \notin \{1, \ldots, n\}$;
4. A diferencial $d : K_p(x) \longrightarrow K_{p-1}(x)$ é dada por

   $d_1(e_i) = x_i$;

   $d_p(e_{i_1 \cdots i_p}) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} x_{i_j} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{i_j} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$, para $2 \leq p \leq n$;

   $d_p = 0$ se $p \notin \{1, \ldots, n\}$.

Além disso, se M é um A-módulo também definimos

5 $K_\bullet(x, M) = K_\bullet(x) \otimes_A M$, com diferencial

$$d_p(e_{i_1 \cdots i_p} \otimes m) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} (x_{i_j} m) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{i_j} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}.$$

O i-ésimo grupo de homologia do complexo de Koszul é dado por

$$H_i(x, M) = \frac{ker(d_i \otimes id_M)}{im(d_{i+1} \otimes id_M)}.$$

Quando estamos estudando apenas o complexo de Koszul $K_\bullet(x)$, denotamos apenas por $H_i(x)$ seu i-ésimo grupo de homologia. Destacamos dois desses grupos: $H_0(x, M) = M/xM$ (lembramos que $d_0 = 0$ e, portanto, ker($d_0 \otimes id_M$) = $A \otimes M = M$) e $H_n(x, M) = \{m \in M | m x_i = 0, 1 \leq i \leq n\}$.

Apresentaremos alguns resultados que podem ser encontrados em (GREUEL; PFISTER, 2012) e (SERRE, 2012).

Proposição 1.2 ((GREUEL; PFISTER, 2012), pg 414). *Sejam A um anel, $C_\bullet$ um complexo e $x \in A$. Então,*

1. *A sequência de complexos*

$$0 \longrightarrow C_\bullet \longrightarrow K_\bullet(x) \otimes C_\bullet \longrightarrow C_\bullet(-1) \longrightarrow 0,$$

é exata (onde $C_\bullet(-1)_p = C_{p-1}$);

2. *A sequência de homologia induzida*

$$\cdots \longrightarrow H_p(C_\bullet) \longrightarrow H_p(K_\bullet(x) \otimes C_\bullet) \longrightarrow H_{p-1}(C_\bullet)$$
$$\xrightarrow{(-1)^{p-1}x} H_{p-1}(C_\bullet) \longrightarrow H_{p-1}(K_\bullet(x) \otimes C_\bullet) \longrightarrow \cdots,$$

é exata.

3. *$x \cdot H_p(K_\bullet(x) \otimes C_\bullet) = 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$.*

O item 1. desta proposição resulta do diagrama abaixo e o 2. da propriedade de sequência exata longa de homologia.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_p \arrow[r, "id\oplus d_p"] \arrow[d, "d_p"] & (K_\bullet(x) \otimes C_\bullet)_p \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "d'_p"] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_{p-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{p-1} \arrow[r, "id\oplus d_{p-1}"'] & (K_\bullet(x) \otimes C_\bullet)_p \arrow[r, "\pi"'] & C_{p-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Perceba que a aplicação $id \oplus d_p$ e a projeção π fazem sentido pois vale que $(K_\bullet(x) \otimes C_\bullet)_p = (K_0(x) \otimes C_p) \oplus (K_1(x) \otimes C_{p-1}) = C_p \oplus C_{p-1}$, já que $K_0(x) = K_1(x) = A$ e $A \oplus C_p = C_p$. A diferencial d' é tal que $d'_p(a, b) = (d_p(a) + (-1)^{p-1}xb, d_{p-1}(b))$.

Dessa sequência longa de homologia, chega-se na seguinte proposição:

Corolário 1.2 ((SERRE, 2012), pg 52). *Para cada $p \geq 0$, temos uma sequência exata:*

$$0 \longrightarrow H_0(x, H_p(C_\bullet)) \longrightarrow H_p(K_\bullet(x) \otimes C_\bullet) \longrightarrow H_1(x, H_{p-1}(C_\bullet)).$$

Aqui, o argumento principal é que a partir da sequência longa de homologia conseguimos sequências curtas do tipo

$$0 \longrightarrow coker(x_p) \longrightarrow H_p(K_\bullet(x) \otimes C_\bullet) \longrightarrow ker(x_{p-1}),$$

onde $x_r : H_r(C) \longrightarrow H_r(C)$ é dada por $x_r(m) = xm$. Percebendo que

$$coker(x_p) = \frac{H_p(C)}{xH_p(C)} = H_0(x, H_p(C)) \text{ e}$$
$$ker(x_{p-1}) = \{m \in H_{p-1}(C) | xm = 0\} = H_1(x, H_{p-1}(C)),$$

temos o resultado desejado.

A partir do complexo de Koszul, podemos obter um complexo formado de A-homomorfismos da seguinte maneira. Considere $(K_\bullet(x), d)$ um complexo de Koszul, com $K_0(x) = A$ e $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Tomando o functor contravariante $Hom_A(-, A)$, temos o seguinte complexo:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow Hom(K_0(x),A) \xrightarrow{h_0} Hom(K_1(x),A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Hom(K_{n-1}(x),A)$$
$$\xrightarrow{h_{n-1}} Hom(K_n(x),A) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

onde $h_p : Hom(K_p(x),A) \longrightarrow Hom(K_{p+1}(x),A)$ é dada por $h_p(f) = f \circ d_{p+1}$. Aqui, omitimos o índice A de Hom_A.

Sabemos que em cada $K_p(x)$ existem $l = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ elementos na base, a qual denotaremos por $B = \{u_1, \ldots, u_l\}$.

Percebendo que $\begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = l$ e tomando $B' = \{v_1, \ldots, v_l\}$ base de $K_{n-p}(x)$, temos um isomorfismo

$$\varphi : Hom(K_p(x),A) \longrightarrow K_{n-p}(x)$$
$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{l} f(u_i)v_i.$$

Reorganizando os elementos da base, caso precise, verifica-se que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Hom(K_{p-1}(x),A) \arrow[r, "h_{p-1}"] \arrow[d, "\varphi"] & Hom(K_p(x),A) \arrow[r, "h_p"] \arrow[d, "\varphi"] & Hom(K_{p+1}(x),A) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & K_{n-p+1}(x) \arrow[r, "d_{n-p+1}"'] & K_{n-p}(x) \arrow[r, "d_{n-p}"'] & K_{n-p-1}(x) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

E, a partir disso, temos que $H^p(Hom(K(x),A)) \cong H_{n-p}(x)$. Encontramos na literatura apenas $H^p(x)$ quando se trata da co-homologia de $Hom(K(x),A)$ e também adotaremos essa notação.

Finalizamos a seção e o capítulo com a definição e um importante exemplo de functor derivado.

Primeiro, mais algumas definições úteis. Um functor $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ é dito **aditivo** se a aplicação $Hom(A,A') \longrightarrow Hom(F(A'),F(A))$ é aditiva. Dizemos também que F é **exato à esquerda** se para uma sequência $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ exata, então

$$0 \longrightarrow F(M') \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(M'')$$

é também exata.

Assumiremos que F é exato a esquerda e aditivo, a menos que especifique no texto.

Dado um módulo M, seja

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots$$

uma resolução injetiva, onde

$$I^\bullet : 0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots$$

é um complexo.

Definimos um **functor derivado à direita** R^nF por

$$R^nF(M) = H^n(F(I^\bullet)),$$

ou seja, é a n-ésima co-homologia do complexo

$$0 \longrightarrow F(I^0) \longrightarrow F(I^1) \longrightarrow F(I^2) \longrightarrow \cdots$$

Observação 2. Revertendo as setas e com definições bastante semelhantes, podemos definir o **functor derivado à esquerda**, que nada mais é do que a homologia de um complexo, aplicado a um functor.

Exemplo 1.8. Sejam A um anel e um A-módulo fixo Q. O functor $M \mapsto Hom_A(Q, M)$ é exato à esquerda. O functor derivado à direita de $Hom(Q, -)$ é denotado por $Ext^n(Q, M)$, para M variável.

Existem técnicas de se calcular functores derivados, como no caso de Ext. Uma das maneiras é utilizando Teoria da Profundidade, que apesar de ser um estudo atraente, não apresentaremos aqui. Em seu artigo, B. Malgrange nos sugere (NORTHCOTT, 1968), mas por ser uma referência clássica, ainda utiliza de notações mais antigas; preferimos então deixar o capítulo 18 de (EISENBUD, 2013) como sugestão para o leitor interessado nessa teoria.

Um resultado interessante que podemos obter, a partir da teoria de profundidade, é a seguinte proposição, citada por (MALGRANGE, 1976).

Proposição 1.3. *Se M é um A-módulo, finito sobre o anel A, então vale a igualdade:*

$$n - dim(M) = inf\{k | Ext^k(M, A) \neq 0\},$$

onde n é visto como a dimensão de A.

Com notação adequada e resultados prévios, esta proposição é provada em (EISENBUD, 2013), na página 450. Em capítulos posteriores utilizaremos este resultado sem mais comentários.

2 Formas Diferenciais

As Formas Diferenciais surgem do cálculo vetorial e são aplicadas em diversas áreas: análise, geometria, EDO, eletromagnetismo, termodinâmica, relatividade. Na seção 1, começaremos definindo as formas no caso $\mathbb{R}^3$, com alguns importantes exemplos; em seguida passaremos para o $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$. Seguindo o capítulo, mostraremos algumas operações que serão constantemente utilizadas; as demonstrações das propriedades dessas operações seguem das definições e não apresentam dificuldades, podendo ser encontradas em (CARMO, 2012). Por fim, definiremos alguns importantes complexos no espaço de formas, os quais utilizaremos no capítulo 3.

2.1 DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Tome $p \in U \subset \mathbb{R}^3$, U é um aberto do $\mathbb{R}^3$, e considere $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^3$. O *espaço tangente* de U em p será denotado por $T_pU \cong T_p\mathbb{R}^3$ e identificaremos os vetores e_1, e_2, e_3 com seus transladados, $(e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p$, ao ponto p.

Em cada espaço tangente $T_p\mathbb{R}^3$, consideramos o espaço dual:

$$(T_p\mathbb{R}^3)^* = \{f : T_p\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} |\ f \text{ é funcional linear}\}$$

Os funcionais lineares $(dx_i)_p : T_p\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, definidos por $dx_i(v) = v_i$ ($v = v_1(e_1)_p + v_2(e_2)_p + v_3(e_3)_p$), formam uma base do espaço dual. De fato,

$$dx_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \text{, e isto define a base dual.}$$

Definição 2.1. Uma **1-forma** em $U \subset \mathbb{R}^3$ é uma aplicação que associa cada $p \in U$ um elemento $\omega(p) \in (T_p\mathbb{R}^3)^*$. Então $\omega : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow (T_p\mathbb{R}^3)^*$ pode ser escrito como

$$\omega(p) = a_1(p)(dx_1)_p + a_2(p)(dx_2)_p + a_3(p)(dx_3)_p.$$

Caso as funções $a_i : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ (i = 1, 2, 3) sejam diferencias, diremos que ω é uma **1-forma diferencial**.

Aqui, consideramos diferenciável como sendo de classe C^∞. Podemos também definir formas contínuas, ou diferenciável de classe C^r, mas estes casos não serão estudados nesse trabalho.

Exemplo 2.1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável (0-forma). Sua derivada, num ponto $p \in \mathbb{R}^3$, é uma transformação linear $f'(p) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ (e, portanto, um funcional linear) que associa cada vetor $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ao número

$$f'(p).v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p).v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p).v_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(p).v_3 = \langle \nabla f(p), v \rangle.$$

Se escreve $df(p)$ e chama-se **diferencial** de f à derivada $f'(p)$. Usando a notação tradicional, se $x_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ indica a função que associa cada ponto $p \in \mathbb{R}^3$ sua i-ésima coordenada p_i, então a diferencial dx_i desta função é o funcional linear tal que $dx_i(v) = v_i$. Assim,

$df(p).v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p).v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p).v_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(p).v_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p).dx_1(v) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p).dx_2(v) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(p).dx_3(v).$

Isto atribui significado à expressão clássica $df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. A diferencial de f é exemplo de uma 1-forma.

Agora, seja $\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$ o conjunto das aplicações $\varphi : T_p\mathbb{R}^3 \times T_p\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineares e alternadas ($\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)$). Sabemos que com as operações usuais, $\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$ é um espaço vetorial real.

Exemplo 2.2. Seja a aplicação $\varphi : T_p\mathbb{R}^3 \times T_p\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi((u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Usando as propriedades de determinante, é fácil verificar que φ é bilinear e alternada, ou seja, $\varphi \in \Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$.

Este exemplo nos leva a definir o **produto exterior** entre funcionais lineares $\phi_1, \phi_2 \in (T_p\mathbb{R}^3)^*$ da seguinte maneira:

$$\phi_1 \wedge_p \phi_2(v_1, v_2) := det(\phi_i(v_j)) = \begin{vmatrix} \phi_1(v_1) & \phi_1(v_2) \\ \phi_2(v_1) & \phi_2(v_2) \end{vmatrix}$$

Dessa forma, $\phi_1 \wedge_p \phi_2 \in \Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$.

Exemplo 2.3. Sejam dx_1, dx_2, dx_3 os funcionais lineares que formam a base do espaço dual. A aplicação bilinear definida no Exemplo 2.2 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= (dx_1 \wedge_p dx_2 + dx_1 \wedge_p dx_3 + dx_2 \wedge_p dx_3)(u, v) \\ &= dx_1 \wedge_p dx_2(u, v) + dx_1 \wedge_p dx_3(u, v) + dx_2 \wedge_p dx_3(u, v), \end{aligned}$$

pois

$$dx_1 \wedge_p dx_2(u, v) + dx_1 \wedge_p dx_3(u, v) + dx_2 \wedge_p dx_3(u, v) =$$
$$\begin{vmatrix} dx_1(u) & dx_1(v) \\ dx_2(u) & dx_2(v) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_1(u) & dx_1(v) \\ dx_3(u) & dx_3(v) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx_2(u) & dx_2(v) \\ dx_3(u) & dx_3(v) \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Pela definição de produto exterior, temos que

$$dx_i \wedge_p dx_j = -dx_j \wedge_p dx_i \text{ e}$$
$$dx_i \wedge_p dx_i = 0, \forall i = 1, 2, 3.$$

Observação 3. Posteriormente, verificaremos que o conjunto $\{(dx_i)_p \wedge_p (dx_j)_p | i < j\}$ forma uma base para o espaço $\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$.

Definição 2.2. Uma **2-forma** em $U \subset \mathbb{R}^3$ é aplicação $\omega : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \Lambda^2(T\mathbb{R}^3)^*$. Podemos escrever

$$\omega(p) = a_{12}(p)(dx_1 \wedge_p dx_2) + a_{13}(p)(dx_1 \wedge_p dx_3) + a_{23}(p)(dx_2 \wedge_p dx_3).$$

Quando as funções $a_{i,j} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ são diferenciais, diremos que w é uma **2-forma diferencial**.

Vamos a generalização dessas definições. Sejam $p \in \mathbb{R}^n$, $T_p\mathbb{R}^n$ o espaço tangente de $\mathbb{R}^n$ em p e $(T_p\mathbb{R}^n)^*$ seu espaço dual. Denotaremos por $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ o conjunto das aplicações k-lineares alternadas (o qual é um espaço vetorial real, com as operações usuais).

Sendo $\phi_1, ..., \phi_k$ funcionais lineares, $\phi_i : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, então definimos

$$(\phi_1 \wedge_p ... \wedge_p \phi_k)(v_1, ..., v_k) := det(\phi_i(v_j)) = \begin{vmatrix} \phi_1(v_1) & \phi_1(v_2) & \cdots & \phi_1(v_k) \\ \phi_2(v_1) & \phi_2(v_2) & \cdots & \phi_2(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_k(v_1) & \phi_k(v_2) & \cdots & \phi_k(v_k) \end{vmatrix}$$

E, pelas propriedades de determinantes temos que $(\phi_1 \wedge_p ... \wedge_p \phi_k)(v_1, ..., v_k) \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$. Sendo $(dx_{i_1})_p, ..., (dx_{i_n})_p$ os elementos da base de $(T_p\mathbb{R}^n)^*$, definidos analogamente ao caso $\mathbb{R}^3$, temos que $dx_{i_1} \wedge_p dx_{i_2} \wedge_p \cdots \wedge_p dx_{i_k} \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$, $i_j \in \{1, ..., n\}$. Denotaremos apenas por dx_i quando estiver claro qual ponto tomamos.

Proposição 2.1. *O conjunto* $B = \{dx_{i_1} \wedge_p dx_{i_2} \wedge_p \cdots \wedge_p dx_{i_k} | i_1 < i_2 < \cdots < i_k, i_j \in \{1, ..., n\}\}$ *é uma base para* $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$.

Demonstração. Primeiro verificaremos que os elementos do conjunto são linearmente independentes. Tome uma combinação linear nula:

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge_p \cdots \wedge_p dx_{i_k} = 0$$

Aplicando $(e_{j_1}, ..., e_{j_k})$, $j_1 < \cdots < j_k$, $j_l \in \{1, ..., n\}$, tem-se

$$a_{j_1 \cdots j_k} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge_p \cdots \wedge_p dx_{i_k}(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = 0,$$

pois

$$dx_{i_1} \wedge_p \cdots \wedge_p dx_{i_k}(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = det(dx_{i_m}(e_{j_l})) = \begin{cases} 0, I \neq J \\ 1, I = J \end{cases},$$

onde $I = (i_1, ..., i_k)$ e $J = (j_1, ..., j_k)$.

Agora, mostraremos que se $f \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ então é uma combinação da forma

$$f = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge_p \cdots \wedge_p dx_{i_k}.$$

Considere

$$g = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f(e_{i_1}, ..., e_{i_k}) dx_{i_1} \wedge_p \cdots \wedge_p dx_{i_k},$$

o qual pertence a $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$.

Perceba que

$$\begin{aligned} g(e_{j_1},...,e_{j_k}) &= \sum_{i_1<\cdots<i_k} f(e_{i_1},...,e_{i_k})dx_{i_1}\wedge_p\cdots\wedge_p dx_{i_k}(e_{j_1},...,e_{j_k}) \\ &= f(e_{j_1},...,e_{j_k}), \forall j_1,...,j_k. \end{aligned}$$

Isto mostra que $f = g$ e, portanto, $a_{i_1\cdots i_k} = f(e_{i_1},...,e_{i_k})$ na expressão de f. □

Definição 2.3. Uma **k-forma** em $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\omega : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$. Podemos escrever ω da seguinte maneira:

$$\omega(p) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}(p)dx_{i_1}\wedge_p\cdots\wedge_p dx_{i_k}.$$

Caso $a_{i_1\cdots i_k} : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sejam aplicações diferenciáveis, diremos que ω é uma **k-forma diferenciável**.

De maneira análoga, podemos definir uma k-forma num aberto de $\mathbb{C}^n$, $\omega : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \Lambda^k(T_p\mathbb{C}^n)^*$. Quando as funções $a_{i_1\cdots i_k} : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ são holomorfas, diremos que ω é uma **k-forma diferenciável holomorfa**.

Quando não quisermos especificar se ω é uma k-forma diferenciável em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, diremos simplesmente que é uma k-forma.

2.2 OPERAÇÕES ENTRE FORMAS

Nesta seção definiremos algumas operações para k-formas e apresentamos importantes propriedades.

Se ω e φ são k-formas do tipo

$$\omega = \sum_I a_I dx_I \text{ e } \varphi = \sum_I b_I dx_I,$$

onde $I = (i_1,...,i_k), i_1 < \cdots < i_k, i_m \in \{1,...,n\}$, podemos definir a **soma**

$$\omega + \varphi := \sum_I (a_I + b_I)dx_I.$$

Denotando por $\mathbb{K}$ o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, chamaremos de $\Omega^k(\mathbb{K}^n)$ o conjunto das k-formas diferenciáveis sobre $\mathbb{K}^n$. Na verdade, $\Omega^k(\mathbb{K}^n)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Pode-se encontrar denotado apenas por Ω^k quando é claro qual espaço as formas foram definidas.

Se ω é uma k-forma e φ é uma s-forma, definimos o **produto exterior** $\omega \wedge \varphi$ como uma (k+s)-forma dada por

$$\omega \wedge \varphi := \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J,$$

onde $I = (i_1,...,i_k), i_1 < \cdots < i_k, i_m \in \{1,...,n\}$ e $J = (j_1,...,j_s), j_1 < \cdots < j_s$, $j_l \in \{1,...,n\}$.

Proposição 2.2. *Sejam ω uma k-forma, φ uma s-forma e θ uma r-forma. Então*

a. $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$

b. $\omega \wedge \varphi = (-1)^{ks}(\varphi \wedge w)$

c. $\omega + (\varphi \wedge \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$*, se* $r = s$.

A demonstração dessa proposição segue diretamente das definições e omitiremos, pois não há dificuldades. Para o leitor interessado, a demonstração dessa proposição pode ser encontrada em (CARMO, 2012).

Agora, definiremos uma operação que generaliza o conceito de diferencial de uma função, que vimos no exemplo 2.1.

Definição 2.4. Seja $\omega = \sum a_I dx_I$ uma k-forma. A **diferencial exterior** de ω, denotada por $d\omega$, é definida como

$$d\omega = \sum da_I \wedge dx_I.$$

Perceba que se ω é uma k-forma, então sua diferencial $d\omega$ é uma (k+1)-forma. Abaixo algumas importantes propriedades da diferencial exterior de formas.

Proposição 2.3. *Sejam ω e φ duas k-formas e θ uma r-forma. Temos*

a. $d(\omega + \varphi) = d\omega + d\varphi$*;*

b. $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta$*;*

c. $d(d\omega) = d^2\omega = 0$.

Alguns autores consideram a última propriedade como uma das mais importantes no estudo das formas, por isso demonstraremos o item c. Os demais itens não são de difícil verificação.

Demonstração c. Considere que $\omega = \sum_I a_I dx_I$. Assim, pelo item b, tem-se:

$$d^2\omega = \sum_I (d^2 a_I \wedge dx_I + a_I d^2 x_I).$$

Mostraremos que cada parcela dessa soma é nula. No exemplo 2.1, vimos que $da_I = \sum_i \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx_i$ e, portanto,

$$d^2 a_I = \sum_I d(\tfrac{\partial a_I}{\partial x_i}) \wedge dx_i = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i.$$

Contudo, sabemos que

$$\frac{\partial^2 a_I}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_j \partial x_j} \text{ e } dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i.$$

Assim,

$$d^2 a_I = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 a_I}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_i = 0.$$

Além disso, $d(dx_i) = d(1) \wedge dx_i = 0$. Logo, cada parcela $d^2 a_I \wedge dx_I + a_I d^2 x_I$ é nula. □

Quando a diferencial exterior de uma forma ω é nula, $d\omega = 0$, diremos que ω é uma forma **fechada**. Por outro lado, se φ é uma k-forma tal que existe uma (k-1)-forma ω com $\varphi = d\omega$, diremos que φ é **exata**. Pela propriedade c, temos que toda forma exata é uma forma fechada.

Definição 2.5. Seja U um aberto de $\mathbb{K}^n$. Dada a orientação usual de $\mathbb{K}^n$, tome em U a restrição dessa orientação.A **integral** sobre U de uma n-forma ω, do tipo $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, é definida como

$$\int_U \omega = \int_U f dx_1 \dots dx_n,$$

onde a integral do lado direito é a integral múltipla em $\mathbb{K}^n$.

De um modo geral, se queremos integrar um k-forma de $\mathbb{K}^n$, a integral é feita sobre um aberto de dimensão $k < n$.

Dizemos ainda que uma 1-forma ω admite uma **integral primeira** se existem f e g, funções diferenciáveis, com $\omega = f dg$. E que ω é integrável se $\omega \wedge d\omega = 0$. Utilizando as propriedades de produto exterior e da diferencial exterior, verifica-se que se ω admite uma integral primeira então é integrável. Um resultado surpreendente é que a recíproca também é verdadeira; essa equivalência é conhecida como Teorema de Frobenius, que passamos a enunciar agora:

Teorema 2.1 (Teorema de Forbenius)**.** *Sejam $\omega_1, \dots, \omega_k$ 1-formas linearmente independentes num aberto $U \subset \mathbb{K}^n$, com $k < n$. Faça $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$. Existem funções f_i^j e g_j tais que*

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{k} f_i^j dg_j, \; (i = 1, \dots, k),$$

em U, se e somente se

$$d\omega_i \wedge \omega = 0, \; para \; i = 1, \dots, k.$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrado na seção 7.3 de (FLANDERS, 1989). Aqui, Frobenius considera que o **lugar singular** de ω, denotador por $S(\omega)$, é vazio. Se escrevemos $\omega = \sum_i a_i dx_i$, o lugar singular é definido pelas equações $a_i(x) = 0$. No próximo capítulo apresentamos um resultado devido a Bernard Malgrange, o qual considera que $S(\omega) \neq \emptyset$.

2.3 COMPLEXOS DE FORMAS

A diferencial exterior nos permite estudar um complexo entre os espaços de formas, conhecido como **Complexo de De Rham**.

Definição 2.6. O **Complexo de De Rham**,$(\Omega(U), d) = \Omega^\bullet(U)$, é um complexo de co-cadeias do espaço de formas sobre um aberto $U \subset \mathbb{K}^n$, com a diferencial exterior sendo a aplicação co-bordo:

$$\Omega^\bullet(U) : 0 \longrightarrow \Omega^0(U) \longrightarrow \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \longrightarrow 0,$$

onde Ω^0 denota o espaço das funções diferenciáveis em $U \subset \mathbb{K}$.

De fato é um complexo, pois além de Ω^k ser espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ (e então se encaixa na definição de módulo graduado), temos que $d \circ d = 0$ como já vimos.

Note também que se $d : \Omega^k \longrightarrow \Omega^{k+1}$ então $im(d)$ é o conjunto de formas exatas em Ω^{k+1} e $ker(d)$ é o conjunto das formas fechadas em Ω^k. Assim, a co-homologia do complexo de De Rham, ou apenas co-homologia de De Rham, é dada por:

$$H^k(\Omega^\bullet) \text{:} \ \frac{\{\text{k-formas fechadas}\}}{\{\text{k-formas exatas}\}}.$$

Para mais detalhes do Complexo de De Rham, sugerimos o livro (BOTT; TU, 2013).

Agora, apresentaremos um outro complexo entre espaços de formas que nos será útil no próximo capítulo. Seja $\omega \in \Omega^1(\mathbb{K}^n)$ não identicamente nula, isto é, uma 1-forma em $\mathbb{K}^n$ com $\omega \neq 0$. Então temos o seguinte complexo de co-cadeia:

$$K(\omega) : 0 \longrightarrow \Omega^0 \longrightarrow \Omega^1 \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \Omega^n \longrightarrow 0,$$

onde o operador co-bordo δ é tal que $\delta(\alpha) = \omega \wedge \alpha$.

Certamente que $im(\delta_k) \subset ker(\delta_{k+1})$, pois pelas propriedades de produto exterior temos que $\omega \wedge \delta(\alpha) = \omega \wedge \omega \wedge \alpha = 0$.

Definição 2.7. Um elemento $\omega \in \Omega^1(\mathbb{K}^n)$ possui a **propriedade de divisão** se para qualquer $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{K}^n)$, 1 $\leq$ k $\leq$ n-1, tal que $\omega \wedge \alpha = 0$, existe $\beta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{K}^n)$ tal que $\alpha = \omega \wedge \beta$.

Perceba que $\omega \in \Omega^1$ possui a propriedade de divisão se, e somente se, a co-homologia do complexo acima é nula, ou seja, $H^k(K(\omega)) = 0$ para $1 \leq k \leq n-1$.

Exemplo 2.4. Suponha que ω tenha a propriedade de divisão e que $\omega \wedge d\omega = 0$, isto é, existe $\omega_1 \in \Omega^1$ tal que $d\omega = \omega \wedge \omega_1$.

Usando a diferencial exterior em $d\omega$ temos que $0 = d\omega \wedge \omega_1 - \omega \wedge d\omega_1$, e como $d\omega \wedge \omega_1 = \omega \wedge \omega_1 \wedge \omega_1 = 0$, segue que $\omega \wedge d\omega_1 = 0$. Mais uma vez encontramos um $\omega_2 \in \Omega^1$ tal que $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$.

Faremos o processo mais uma vez.

$$0 = d^2\omega_1 = d\omega \wedge \omega_2 - \omega \wedge d\omega_2 = \omega \wedge (\omega_1 \wedge \omega_2 - d\omega_2),$$

e assim existe um $\omega_3 \in \Omega^1$ tal que $\omega_1 \wedge \omega_2 - d\omega_2 = -\omega \wedge \omega_3$, ou ainda $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega \wedge \omega_3$.

Recorrendo ao mesmo processo, encontramos uma sequência de $\omega_p \in \Omega^1$, $p \geq 0, \omega_0 = \omega$, que satisfazem

$$d\omega_p = \omega_0 \wedge \omega_{p+1} + \sum_{q=1}^{p} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \omega_q \wedge \omega_{p-q+1} \tag{2.1}$$

A equação 2.1 é conhecida como **Algorítimo de Godbillon-Vey**, e foi sugerido pela primeira vez em (GODBILLON, 1971).

Tomando $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i$ e fazendo $a = (a_1, \ldots, a_n)$, temos que a cardinalidade da base de $K_k(a)$, k-ésimo elemento do complexo de Koszul $K_\bullet(a)$, é a mesma da base de $\Omega^k(\mathbb{K}^n)$, a saber, $l = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. Similarmente ao mostrado na seção 1.3, podemos concluir que os grupos de co-homologia são isomorfos: $H^k(a) \cong H^k(K(\omega))$.

3 Frobenius com Singularidades

Segundo (RAMIS, 1978) durante muitas décadas as singularidades de formas diferenciais holomorfas não tiveram sua devida atenção e dedicação. Porém, o estudo dessas singularidades começa a mudar quando é apresentado o problema de existência de integrais primeiras para formas.

Neste capítulo, ω será um germe em $0 \in \mathbb{C}^n$ de uma 1-forma diferenciável holomorfa, escrita como $\omega = \sum a_i dx_i$. Além disso, $S(\omega)$ denotará o germe em 0 do lugar singular de ω. Denotaremos também por $\mathscr{O}_n$ (resp. $\hat{\mathscr{O}}_n$) o anel das séries convergentes (resp. formais) de n variáveis complexas; quando estiver claro, denotaremos apenas por $\mathscr{O}$. Diremos então que ω admite uma integral primeira holomorfa (resp. formal) se existem $f, g \in \mathscr{O}_n$ (resp. $\hat{\mathscr{O}}_n$), com $f(0) \neq 0$ e $\omega = f dg$. Localmente, uma 1-forma é integrável se, e somente se, admite integral primeira.

Na literatura encontramos o primeiro resultado para quando $S(\omega) \neq \emptyset$ devido a G. Reeb, em 1952. Supondo que $n \geq 3$, $S(\omega) = \{0\}$, o posto da matriz $\left(\dfrac{\partial a_i}{\partial x_j}(0)\right)$ é independente das coordenadas e que se este posto é superior ou igual a 3 então essa matriz é simétrica, temos o resultado:

Teorema 3.1. *(REEB, 1952) Se o posto é máximo, ω admite uma integral primeira holomorfa.*

Já em 1976, R. Moussu demonstra o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *(MOUSSU, 1976) Seja ω uma 1-forma diferencial holomorfa tal que $\omega \wedge d\omega = 0$. Se $codim S(\omega) \geq 3$ então ω admite uma integral primeira formal.*

Finalmente, Bernard Malgrange publica também em 1976 o resultado:

Teorema 3.3. *(MALGRANGE, 1976) Seja ω uma 1-forma diferencial holomorfa tal que $\omega \wedge d\omega = 0$. Se $codim S(\omega) \geq 3$, então ω admite uma integral primeira holomorfa.*

Neste capítulo apresentaremos as ideias de B. Malgrange para demonstrar o Teorema acima. Agora, utilizaremos os resultados do capítulo 1 para demonstrar um resultado de B. Malgrange e que é o principal para demonstrar o Teorema 3.3.

Proposição 3.1. *(MALGRANGE, 1976) Para $1 \leq k \leq n$ as afirmações são equivalentes:*

1. $codim S(\omega) \geq k$
2. $H^i(K(\omega)) = 0$, *para* $i = 0, \ldots, k-1$
3. $H^{k-1}(K(\omega)) = 0$

Lembrando que $S(\omega)$ é o germe em 0 do lugar singular de ω, assumiremos que todos os a_i se anulam na origem. Faremos então um resultado mais geral.

Seja $a = (a_1, \ldots, a_r)$, onde suas entradas são elementos do rad($\mathscr{O}_n$). Apenas para lembrar a notação, se M é um $\mathscr{O}$-módulo então $K(a, M)$ é o complexo de Koszul fabricado com a e M e $H_k(a, M)$ são seus grupos de homologia; quando $M = \mathscr{O}$ escrevemos apenas $K(a)$ e $H_k(a)$. Usaremos também os isomorfismos $H^k(a, M) \cong H_{r-k}(a, M)$ e, quando $r = n$, $H^k(a) \cong H^k(K(\omega))$.

A equivalência entre 2. e 3. da proposição 3.1 segue do Lema a seguir.

Lema 3.1. *Se M é finito sobre $\mathscr{O}$ e para algum $k \geq 0$ se tem $H_k(a, M) = 0$, então para $l \geq k$ temos $H_l(a, M) = 0$.*

Demonstração. Como já vimos na Seção 1.3, se $r = 1$ então $H_l(a_1, M) = 0$ para todo $l \geq 2$. Verificaremos então se para $k = 0$, tem-se $H_0(a_1, M) = 0$ implicando em $H_1(a_1, M) = 0$. De fato, sabemos que

$$H_0(a_1, M) = \frac{M}{a_1 M}$$

e, portanto, quando $H_0(a_1, M) = 0$ então $M = a_1 M$. Como $a_1 \in rad(\mathscr{O})$, o Lema de Nakayma 1.1 garante que $M = 0$, donde

$$Ker(a_{1M} : M \longrightarrow M, m \mapsto a_1 m) = \{0\},$$

isto é, $H_1(a_1, M) = 0$.

Suponha agora que o resultado é válido para algum $r - 1$. Pelo Corolário 1.2, usando $C_\bullet = K_\bullet(a') \otimes_{\mathscr{O}} M$, onde $a' = (a_1, \ldots, a_{r-1})$, tem-se a sequência exata

$$0 \longrightarrow H_0(a_r, H_k(K_\bullet(a') \otimes_{\mathscr{O}} M)) \longrightarrow H_k(K_\bullet(a_r) \otimes_{\mathscr{O}} K_\bullet(a') \otimes_{\mathscr{O}} M) \longrightarrow$$
$$H_1(a_r, H_{k-1}(K_\bullet(a') \otimes_{\mathscr{O}} M)) \longrightarrow 0$$

Reescrevendo, temos que essa sequência é

$$0 \longrightarrow H_0(K_\bullet(a_r) \otimes_{\mathscr{O}} H_k(a', M)) \longrightarrow H_k(a, M) \longrightarrow H_1(K_\bullet(a_r) \otimes_{\mathscr{O}} H_{k-1}(a', M)) \longrightarrow 0$$

Se $H_k(a, M) = 0$ então

$$0 \longrightarrow H_0(K_\bullet(a_r) \otimes_{\mathscr{O}} H_k(a', M)) \longrightarrow 0$$

e isto implica que $H_0(K_\bullet(a_r) \otimes_{\mathscr{O}} H_k(a', M)) = \dfrac{H_k(a', M)}{a_r H_k(a', M)} = 0$. Consequentemente, $H_k(a', M) = a_r H_k(a', M)$ e o Lema de Nakayama 1.1 garante que $H_k(a', M) = 0$.

Usando a hipótese de indução, temos que $H_l(a', M) = 0$ para $l \geq k$. Novamente pela sequência exata

$$0 \longrightarrow H_0(K_\bullet(a_r) \otimes_{\mathscr{O}} H_l(a', M)) \longrightarrow H_l(a, M) \longrightarrow H_1(K_\bullet(a_r) \otimes_{\mathscr{O}} H_{l-1}(a', M)) \longrightarrow 0$$

com o fato de $H_l(a', M) = 0$ e $H_{l-1}(a', M) = 0$, tem-se que $H_l(a, M) = 0$ para $l > k$. □

Isso resolve 3. $\Rightarrow$ 2., pois quando $n = r$ utilizamos o isomorfismo entre os grupos de co-homologia dos complexos de Koszul e $K(\omega)$, com o isomorfismo entre o grupo de homologia e de co-homologia do complexo de Koszul. Para exemplificar, teremos que:

$$H^{k-1}(K(\omega)) = 0 \Rightarrow H_{n-(k-1)}(a) = 0$$

e pelo Lema, para $l = n - (k-1) + 1, \dots, n - (k-1) + (k-1)$, tem-se que $H^{k-2}(K(\omega)) \cong H_{n-(k-1)+1}(a) = 0, \dots, H^0(K(\omega)) \cong H_{n-(k-1)+(k-1)}(a) = 0$.

Para a equivalência entre 1. e 2., B. Malgrange usa a proposição 1.3 para demonstrar que

Lema 3.2. *Para $M = \mathscr{O}/\langle a_1, \dots, a_r\rangle$, onde $\langle a_1, \dots, a_r\rangle$ é o ideal gerado por $a_1, \dots, a_r$, temos que*

$$n - dim(M) = inf\{k | H^k(a) \neq 0\}.$$

A demonstração desse lema será omitida, pois utiliza da teoria de functores derivados, como sequência espectral, a qual não apresentamos no presente trabalho.

Contudo, perceba que isso resolve a equivalência, basta ver $n - dim(M)$ como a codimensão da proposição 3.1.

Agora, apresentaremos algumas definições e resultados que nos auxiliam na demonstração do Teorema 3.3. Dado $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, com $\rho_i > 0$, denotaremos por $P(\rho)$ o polidisco de raio ρ, isto é, se $x \in P(\rho)$ então $|x_i| \leq \rho_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Para $f = \sum\limits_{\alpha} a_\alpha x^\alpha \in \mathscr{O}_n$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$, definimos a seminorma $|f|_\rho = \sum\limits_{\alpha} |a_\alpha| \rho^\alpha$. Quando essa seminorma for finita diremos que $f \in \mathscr{O}_n(\rho)$ e neste caso, entendemos que ρ é um raio menor ou igual do que o raio de convergência de f. Para $f = (f_1, \dots, f_r) \in \mathscr{O}_n^r$, faremos $|f|_\rho = \sum\limits_{i} |f_i|_\rho$ e, por fim, para $\omega = \sum\limits_{i} a_i dx_i$ colocamos $|\omega|_\rho = \sum\limits_{i} |a_i|_\rho$.

Seja $u : \mathscr{O}^s \longrightarrow \mathscr{O}^r$ uma aplicação $\mathscr{O}$-linear, que podemos identificar com uma matriz de coeficientes em $\mathscr{O}$.

Observação 4. Para ρ suficientemente pequeno, cada u induz uma aplicação $u' : \mathscr{O}^s(\rho) \longrightarrow \mathscr{O}^r(\rho)$ contínua, que nada mais é do que uma restrição de u ao subespaço $\mathscr{O}^s$, $f \mapsto u(f)$ com $f \in \mathscr{O}^s$.

De fato, um operador $u'(f)$ é contínuo se, e somente se, $|u(f)|_\rho \leq c|f|_\rho$ para algum $c > 0$. E, além disso, tem-se

$$|u(f)|_\rho = \left| \sum_i f_i u(e_i) \right|_\rho \leq \sum_i |f_i|_\rho . |u(e_i)|_\rho \leq c \sum_i |f_i|_\rho = c|f|_\rho,$$

onde $\{e_i\}$ é uma base em $\mathscr{O}^s$.

Diremos que uma aplicação $\mathbb{C}$-linear $\lambda : \mathscr{O}^r \longrightarrow \mathscr{O}^s$ é uma **cisão** de u se $u\lambda u = u$. Diremos ainda que λ é **adaptado** a $P(\rho)$, ou a ρ, se existe $c > 0$ tal que para $f \in \mathscr{O}^r$ e $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, tenha-se $|\lambda f|_{t\rho} \leq c|f|_{t\rho}$.

O próximo resultado é uma variação do método utilizado na teoria de equações elípticas e conhecido por "Método de Gevrey"ou "Contornos Sucessivos".

Lema 3.3. *Existe $c_1 > 0$ tal que, para $\omega \in \Omega^1$ e $\frac{1}{2} \leq t < s < 1$,*

$$|d\omega|_{t\rho} \leq \frac{c_1}{s-t} |\omega|_{s\rho}.$$

Demonstração. Sabemos que se $\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$ então

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f_n}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_n.$$

Assim, para provar o Lema, é suficiente encontrar $c_2 > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{t\rho} \leq \frac{c_2}{s-t} |f|_{s\rho}, \text{ para } f \in \mathscr{O} \text{ e } \tfrac{1}{2} \leq t < s < 1.$$

Tome então

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x_1^{\alpha_1}. \cdots .x_n^{\alpha_n}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{\alpha} \alpha_i a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_i^{\alpha_{i-1}} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{t\rho} &= \sum_{\alpha} \alpha_i |a_\alpha| t^{|\alpha|-1} \rho^{\alpha - e_i}, \text{onde } \begin{cases} e_i = (0, \ldots, \underset{\text{i-ésimo}}{1}, \ldots, 0), \\ \rho^{e_i} = \rho_i, \\ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \end{cases} \\
&= \sum_{\alpha} \frac{\alpha_i}{\rho_i} t^{\alpha_i} |a_\alpha| t^{\alpha_1 + \cdots + \hat{\alpha_i} + \cdots + \alpha_n - 1} \rho^\alpha \\
&\leq \sum_{\alpha} \frac{\alpha_i}{\rho_i} t^{\alpha_i} |a_\alpha| s^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_i + \cdots + \alpha_n - \alpha_i - 1} \rho^\alpha \\
&= \sum_{\alpha} \frac{\alpha_i}{\rho_i} \left(\frac{t}{s} \right)^{\alpha_i} |a_\alpha| s^{|\alpha|-1} \rho^\alpha \\
&\leq \sum_{\alpha} \frac{\alpha_i}{\rho_i} \left(\frac{t}{s} \right)^{\alpha_i} |a_\alpha| s^{|\alpha|} \rho^\alpha \\
&\leq k \sum_{\alpha} |a_\alpha| s^{|\alpha|} \rho^\alpha \\
&= k |f|_{s\rho}, \text{com } k = 2 \sup_i \frac{\alpha_i}{\rho_i} \left(\frac{t}{s} \right)^{\alpha_i}
\end{aligned}$$

Mas, definindo uma função $h(x) = xb^x$, com $0 < b < 1$, temos que a função h tem um máximo em $x = -\frac{1}{logb}$ e seu valor máximo será $h\left(-\frac{1}{logb}\right) = -\frac{1}{e.logb}$. Isso implica em

$$k \leq \frac{2}{\rho_i e.log(\frac{t}{s})} = \frac{2}{\rho_i e(logs - logt)}.$$

Agora, definindo $g(t) = t - log(t)$, verifica-se que para $t \leq 1$, g é decrescente:

$$g'(t) = 1 - \tfrac{1}{t} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \tfrac{1}{t} \Leftrightarrow t \leq 1. \text{ Logo, se } t < s < 1 \text{ então}$$

$$\begin{aligned}
g(s) \leq g(t) &\Rightarrow s - log(s) \leq t - log(t) \\
&\Rightarrow s - t \leq log(s) - log(t) \\
&\Rightarrow \frac{1}{s-t} \geq \frac{1}{log(s) - log(t)}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$k \leq \frac{2}{\rho_i e(logs - logt)} \leq \frac{2}{\rho_i e.(s-t)}.$$

Por fim, temos as seguintes desigualdades:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{t\rho} \leq k|f|_{s\rho} \leq \frac{c_2}{s-t}|f|_{s\rho}.$$

□

Passamos então para demonstração do Teorema 3.3.

Demonstração (Teorema 3.3.) Quando $codimS(\omega) \geq 3$, temos pela Proposição 3.1 que $H^2(K(\omega)) = 0$ e, portanto, a hipótese de $\omega \wedge d\omega = 0$ implica na existência de $\omega_1 \in \Omega^1$ verificando $d\omega = \omega \wedge \omega_1$. Como já vimos no final da Seção 2.3, podemos prosseguir por diferenciação até obter uma sequência $\omega_p \in \Omega^1$ ($p \geq 0$), $\omega_0 = \omega$, que satisfaz o Algoritmo de Godbillon-Vey 2.1:

$$d\omega_p = \omega_0 \wedge \omega_{p+1} + \sum_{q=1}^{p} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \omega_q \wedge \omega_{p-q+1}$$

Agora considere a forma com coeficientes em $\hat{\mathscr{O}}_{n+1}$, dada por

$$\alpha = dt + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}\omega_p.$$

Afirmamos que

$$d\alpha = \alpha \wedge \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\omega_p\right).$$

De fato, derivando α e utilizando o algorítimo de Godbillon-Vey 2.1 teremos que vale

$$\begin{aligned}
d\alpha &= dt \wedge \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\omega_p\right) + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} d\omega_p \\
&= dt \wedge \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\omega_p\right) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \left(\omega_0 \wedge \omega_{p+1} + \sum_{q=1}^{p} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \omega_q \wedge \omega_{p-q+1}\right) \\
&= dt \wedge \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\omega_p\right) + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=p}^{\infty} \frac{t^q}{p!(q-p)!}\omega_p \wedge \omega_{q-p+1} \\
&= dt \wedge \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\omega_p\right) + \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}\omega_p\right) \wedge \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\omega_p\right) \\
&= \left(dt + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}\omega_p\right) \wedge \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\omega_p\right) \\
&= \alpha \wedge \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\omega_p\right).
\end{aligned}$$

Assim, $\alpha \wedge d\alpha = 0$. Como α é não singular em 0, o Teorema de Frobenius 2.1 Formal garante que existem $F, G \in \hat{\mathscr{O}}_{n+1}$, com $F(0) \neq 0$, tais que $\alpha = FdG$. Fazendo $t = 0$, encontramos uma integral primeira formal para ω_0. A seguir, escolheremos ω_p de maneira que a série $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}\omega_p$ seja convergente, ou seja, α será uma 1-forma holomorfa e, portanto, poderemos aplicar o Teorema de Frobenius (para 1-formas holomorfa) para obter a integral primeira holomorfa de ω_0, como queremos.

Para escolha dos ω_p tomaremos $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ de forma que a aplicação $\omega_0 \wedge : \Omega^1 \longrightarrow \Omega^2$ seja adaptado a ρ e $|\omega_0|_\rho < +\infty$. Agora, para que a série $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}\omega_p$ seja convergente, os ω_p devem verificar

$$|\omega_{p+1}|_{t\rho} \leq c \left(|d\omega_p|_{t\rho} + \sum_{q=1}^{p} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} |\omega_q|_{t\rho} \cdot |\omega_{p-q+1}|_{t\rho} \right) \tag{3.1}$$

para $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ e algum $c > 0$ conveniente.

Assumindo o Lema 3.3 e a desigualdade 3.1, podemos encontrar um $c' > 0$ tal que para $p \geq 0$ e $\frac{1}{2} \leq t < s < 1$ vale o seguinte:

$$|\omega_{p+1}|_{t\rho} \leq \frac{c'}{s-t} |\omega_p|_{s\rho} + c \sum_{q=1}^{p} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} |\omega_q|_{t\rho} \cdot |\omega_{p-q+1}|_{t\rho} \tag{3.2}$$

Definimos uma sequência v_p de números positivos dada por

$$v_0 = |\omega_0|_\rho \quad \text{e} \quad v_{p+1} = c' e v_p + \sum_{q=1}^{p} v_q v_{p-q+1}$$

Para estabelecer o Teorema 3.3, é necessário que para $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, valem as afirmações

$$|\omega_p|_{t\rho} \leq \frac{p! v_p}{(1-t)^p}, \tag{3.3}$$

e

$$\sum_p v_p t^p \text{ é convergente.} \tag{3.4}$$

Pois, se vale (3) então

$$\begin{aligned} \sum_p \frac{t^p}{p!} |\omega_p|_{t\rho} &\leq \sum_p \frac{t^p p!}{p!(1-t)^p} v_p \\ &= \sum_p \left(\frac{t}{1-t} \right)^p v_p \\ &= \sum_p s^p v_p \end{aligned}$$

e, pelo critério da comparação com (4), temos que a série converge absolutamente e, portanto, é convergente como queremos.

Passamos a provar 3.3 por indução sobre $p \geq 0$.

Para $p = 0$ é válido, pois $|\omega_0|_{t\rho} \leq |\omega_0|_\rho = v_0$.

Para $p = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
|\omega_1|_{t\rho} &\overset{3.2}{\leq} \frac{c'}{s-t}|w_0|_{s\rho} \\
&\overset{s\to 1}{=} \frac{c'}{1-t}v_0 \\
&\leq \frac{c'e}{1-t} \\
&= \frac{v_1}{1-t}.
\end{aligned}$$

Então, suponha válido para algum $p > 1$ (H.I). Pela desigualdade 3.2, obtém-se

$$\begin{aligned}
|\omega_{p+1}|_{t\rho} &\leq \frac{c'}{s-t}|\omega_p|_{s\rho} + c\sum_{q=1}^{p}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}|\omega_q|_{t\rho}\cdot|\omega_{p-q+1}|_{t\rho} \\
&\overset{H.I}{\leq} \frac{c'}{s-t}\cdot\frac{p!}{(1-s)^p}v_p + c\sum_{q=1}^{p}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}|\omega_q|_{t\rho}\cdot|\omega_{p-q+1}|_{t\rho}
\end{aligned}$$

e, isto implica em

$$\begin{aligned}
\frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}|\omega_{p+1}|_{t\rho} &\leq \frac{c'p!(1-t)^{p+1}}{(s-t)(1-s)^p(p+1)}v_p + c\frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}\sum_{q=1}^{p}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}|\omega_q|_{t\rho}\cdot|\omega_{p-q+1}|_{t\rho} \\
&\overset{H.I}{\leq} \text{''} + c\frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}\cdot\left(\frac{p!}{(1-t)(p-1)!}v_1\frac{p!}{(1-t)^p}v_p + \cdots + \frac{p!}{(1-t)^p}v_p\frac{1}{1-t}v_1\right) \\
&= \text{''} + c\cdot\left(\frac{p(p-1)p!}{(p+1)p!(p-1)!}v_1v_p + \cdots + \frac{p!}{(p+1)p!}v_pv_1\right) \\
&= \frac{c'p!(1-t)^{p+1}}{(s-t)(1-s)^p(p+1)}v_p + c\sum_{q=1}^{p}\frac{p-q+1}{p+1}v_qv_{p-q+1}
\end{aligned}$$

Analisando a função $q \mapsto \dfrac{p-q+1}{p+1}$, percebemos que é uma função decrescente e, no intervalo $[1, p]$, seu maior valor é quando $q = 1$, isto é, atinge $\dfrac{p}{p+1}$. Mas, para $p > 1$ temos que $\dfrac{p}{p+1} < 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}|\omega_{p+1}|_{t\rho} &\leq \frac{c'p!(1-t)^{p+1}}{(s-t)(1-s)^p(p+1)}v_p + c.\max_{1\leq q\leq p}\left\{\frac{p-q+1}{p+1}\right\}\sum_{q=1}^{p}v_qv_{p-q+1} \\
&\leq \frac{c'p!(1-t)^{p+1}}{(s-t)(1-s)^p(p+1)}v_p + c\sum_{q=1}^{p}v_qv_{p-q+1}
\end{aligned}$$

Fazendo $1 - s = \dfrac{p}{p+1}(1-t) = \dfrac{p}{p+1} - t\dfrac{p}{p+1} - 1$, temos

$$\begin{cases}
s = 1 - \dfrac{p}{p+1} + t\dfrac{p}{p+1} \\
s - t = \dfrac{p+1}{p+1} - \dfrac{p}{p+1} + t\dfrac{p}{p+1} - t\dfrac{p}{p+1} = \dfrac{1-t}{p+1}
\end{cases}$$

Disso,

$$\begin{aligned}(s-t)(1-s)^p(p+1) &= \frac{1-t}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p(1-t)^p(p+1)\\ &= \left(\frac{p}{p+1}\right)^p(1-t)^{p+1} \qquad (3.5)\end{aligned}$$

o que implica em

$$\frac{(1-t)^{p+1}}{(s-t)(1-s)^p(p+1)} = \frac{(1-t)^{p+1}}{\left(\frac{p}{p+1}\right)^p(1-t)^{p+1}} = \left(\frac{p+1}{p}\right)^p = \left(1+\frac{1}{p}\right)^p \leq e$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!}|\omega_{p+1}|_{t\rho} &\leq \frac{c'p!(1-t)^{p+1}}{(s-t)(1-s)^p(p+1)}v_p + c\sum_{q=1}^{p} v_q v_{p-q+1}\\ &\leq c'ev_p + c\sum_{q=1}^{p} v_q v_{p-q+1}\\ &= v_{p+1} \qquad (3.6)\\ \Rightarrow |\omega_{p+1}|_{t\rho} &\leq \frac{(p+1)!}{(1-t)^{p+1}}v_{p+1},\end{aligned}$$

o que completa a indução.

Finalizamos a demonstração do Teorema provando a afirmação 3.4. Antes disso, lembramos que

$$\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_p\right)\left(\sum_{p=1}^{\infty} b_p\right) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p, \text{ onde } c_p = \sum_{q=0}^{p} a_q b_{p-q}.$$

Sendo $F(t) = \sum_{p=1}^{\infty} v_p t^p$, mostraremos que

$$F(t) = c'ev_0 t + c'etF(t) + cF(t)^2. \qquad (3.7)$$

Do modo que definimos a sequência v_p, podemos deduzir que $c'ev_0t = v_1 t$ e $\sum_{q=1}^{\infty} v_q v_{p-q+1} = \frac{1}{c}(v_{p+1} - c'ev_p)$. Disso,

$$\begin{aligned}cF(t)^2 &= \left(\sum_{p=1}^{\infty} v_p t^p\right)\left(\sum_{p=1}^{\infty} v_p t^p\right)\\ &= c\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{p} v_q t^q v_{p-q+1} t^{p-q+1}\\ &= c\sum_{p=1}^{\infty} t^{p+1}\sum_{q=1}^{p} v_q v_{p-q+1}\\ &= c\sum_{p=1}^{\infty} t^{p+1}\frac{1}{c}(v_{p+1} - c'ev_p)\\ &= \sum_{p=1}^{\infty} t^{p+1}v_{p+1} - c'e\sum_{p=1}^{\infty} t^{p+1}v_p\end{aligned}$$

Além disso,

$$c'etF(t) = c'et\sum_{p=1}^{\infty} v_p t^p = c'e\sum_{p=1}^{\infty} v_p t^{p+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} c'ev_0t + c'etF(t) + cF(t)^2 &= v_1t + c'e\sum_{p=1}^{\infty} v_p t^{p+1} + \sum_{p=1}^{\infty} t^{p+1}v_{p+1} - c'e\sum_{p=1}^{\infty} t^{p+1}v_p \\ &= v_1t + \sum_{p=1}^{\infty} t^{p+1}v_{p+1} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} t^p v_p \\ &= F(t) \end{aligned}$$

Para ver que a série $\sum_{p=1}^{\infty} v_p t^p$ converge, defina $H(t,y) = c'ev_0t + c'ety + cy^2 - y$. Fazendo $(t_0, y_0) = (0, \frac{2}{c})$, teremos que $H(t_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial H}{\partial y}(t_0, y_0) = 3 \neq 0$. Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança de 0 tal que y é uma função de t e $H(t, y(t)) = 0$, para t nessa vizinhança. Ainda pelo Teorema da Função Implícita, segue que $y(t) = F(t)$.

Podemos então resolver a equação 3.7, donde a série converge pelo menos numa vizinhança do zero, como queríamos. □

Observe que a hipótese $codimS(\omega) \geq 3$ apenas foi usada para encontrar uma sequência de 1-formas que satisfazem o Algorítimo de Godbillon-Vey 2.1. No restante da demonstração, prova-se na verdade que:

Proposição 3.2 ((MALGRANGE, 1976))**.** *Dado $\omega = \omega_0$, não identicamente nula, suponha que não importa qual escolha de $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega^1$ verificando 2.1, possamos escolher ω_{p+1} também verificando 2.1. Então, ω possui uma integral primeira holomorfa.*

A partir disso, B. Malgrange nos apresenta um outro resultado que diz respeito a existência de integral primeira de uma 1-forma:

Teorema 3.4. *(MALGRANGE, 1976) Seja ω uma 1-forma diferenciável holomorfa e integrável. Se $codimS(\omega) \geq 2$ e ω admite uma integral primeira formal, então ω admite uma integral primeira holomorfa.*

A demonstração desse Teorema é estabelecer o seguinte: sob as hipóteses de 3.4, temos que as hipóteses de 3.2 são satisfeita.

Aqui não será apresentada essa demonstração, pois é uma prova técnica como a do Teorema 3.3 e que já não requer uso de Álgebra Homológica, que é o objetivo desta dissertação. Para demonstrar esse resultado utilizamos, por exemplo, técnicas de forma pullback que não foram apresentadas aqui.

CONCLUSÃO

Inicialmente, o objetivo desta dissertação era detalhar minuciosamente cada argumento apresentado por Bernard Malgrange no artigo (MALGRANGE, 1976). Ao tentar estudar suas ideias, percebemos que não diferentemente da matemática moderna, B. Malgrange utiliza ferramentas de outras áreas para resolver os problemas propostos, principalmente da Álgebra Homológica.

Por ser uma área extensa, decidimos utilizar o principal resultado do artigo como uma aplicação dessa bela teoria. A partir daí, começamos estudar definições e resultados relevantes para construção deste trabalho. Ainda assim, não foi o suficiente para deixar de maneira detalhada todos argumentos propostos por B. Malgrange em 1976. Apesar disso, conseguimos com a teoria aqui exposta resolver o Teorema 3.3, o qual se mostra como o resultado de maior relevância do artigo.

Bernard Malgrange ainda nos surpreende com um segundo artigo, publicado no ano posterior. O artigo "*Frobenius avec singularités 2. le cas general*" generaliza o que foi proposto para codimensão 1. De forma sucinta, enunciaremos a generalização dos Teoremas 3.3 e 3.4 demonstrados em 1977.

Para entender o enunciado, temos a seguinte definição: seja $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_p) \in (\Omega^1)^p$; o sistema ω é dito integrável (resp. formalmente integrável) se existem $f_1, \ldots, f_p \in \mathscr{O}$ (resp. $\hat{\mathscr{O}}$) e $g_{ij} \in \mathscr{O}$ (resp. $\hat{\mathscr{O}}$), $i, j = 1, \ldots, p$, tais que

a) $\omega_i = \sum_j g_{ij} df_j$

b) $det g_{ij}(0) \neq 0$.

Denotando por $S(\omega)$ o germe em zero do lugar singular de $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p$, temos o resultado fundamental que generaliza os Teoremas do artigo (MALGRANGE, 1976).

Teorema 3.5. *(MALGRANGE, 1977)*

1. *Se $codim S(\omega) \geq 3$ e $d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$, para $i = 1, \ldots, p$, então ω é integrável.*

2. *Se $codim S(\omega) \geq 2$ e se ω é formalmente integrável, então ω é integrável.*

Não daremos detalhes técnicos desse resultado, ou qualquer outro do artigo de 1977. Porém, gostaríamos de deixar, ao fim desse trabalho, que é possível a generalização dos resultados vistos. Não só possível, mas já proposto e demonstrado por Bernard Malgrange.

REFERÊNCIAS

BOTT, R.; TU, L. W. **Differential forms in algebraic topology**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 82.

CARMO, M. P. D. **Differential forms and applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

COBRA, T. T. L. **Carlos Benjamin de Lyra e a topologia algébrica no Brasil**. [S.l.]: Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2014.

EISENBUD, D. **Commutative Algebra: with a view toward algebraic geometry**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 150.

FLANDERS, H. **Differential Forms with Applications to the Physical**. [S.l.]: Sciences, Dover Publications, New York, 1989.

GODBILLON, C. Un invariant des feuilletages de codimension 1. **CR Acad. Sci. Paris**, v. 273, p. 92–95, 1971.

GREUEL, G.-M.; PFISTER, G. **A Singular introduction to commutative algebra**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

LANG, S. Algebra (revised third edition). **Graduate Text in Mathematics**, Springer-Verlag, 2002.

MALGRANGE, B. Frobenius avec singularités i. codimension un. **Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques**, Springer, v. 46, n. 1, p. 163–173, 1976.

MALGRANGE, B. Frobenius avec singularités 2. le cas general. **Inv. Math**, v. 39, p. 67–89, 1977.

MOUSSU, R. Sur l'existence d'intégrales premieres pour un germe de forme de pfaff. **Ann. Inst. Fourier**, v. 26, n. 2, p. 171–220, 1976.

NETO, A. L.; SCÁRDUA, B. **Folheações Algébricas Complexas**. [S.l.]: IMPA, 2015.

NORTHCOTT, D. G. **Lessons on rings, modules and multiplicities**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1968.

RAMIS, J.-P. Frobenius avec singularités. **Séminaire Bourbaki**, v. 20, p. 290–299, 1978.

REEB, G. Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. **Act. Sc. et Ind.**, Hermann, 1952.

SERRE, J.-P. **Local algebra**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

SOUZA, W. M. d. **Sequências espectrais e aplicações para módulos**. Tese (Doutorado), 2017.