

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

GIANCARLO DE GUSMÃO GONÇALVES

**ESTUDO PARAMÉTRICO DA INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA NA ANÁLISE
TERMOMECÂNICA DURANTE A ESCAVAÇÃO EM ROCHAS SALINAS**

**MACEIÓ
2011**

GIANCARLO DE GUSMÃO GONÇALVES

**ESTUDO PARAMÉTRICO DA INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA NA ANÁLISE
TERMOMECÂNICA DURANTE A ESCAVAÇÃO EM ROCHAS SALINAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. William Wagner Matos Lira

Co-orientador: Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos

Júnior

**MACEIÓ
2011**

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

G635e Gonçalves, Giancarlo de Gusmão.
Estudo paramétrico da influência da temperatura na análise termomecânica durante a escavação em rochas salinas / Giancarlo de Gusmão Gonçalves. – 2011. 117 f. : il., tabs., grafs.

Orientador: William Wagner Matos Lira.
Co-Orientador: Adeildo Soares Ramos Júnior.
Dissertação (mestrado em Engenharia Civil : Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2011.

Bibliografia: f. 111-114.
Apêndices: f. 115-117

1. Engenharia civil. 2. Método dos Elementos Finitos. 3. Rochas salinas – Fluência. 4. Análise termomecânica. I. Título.

CDU: 624.12



**ESTUDO PARAMÉTRICO DA INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA NA ANÁLISE
TERMOMECÂNICA DURANTE A ESCAVAÇÃO EM ROCHAS SALINAS**

GIANCARLO DE GUSMÃO GONÇALVES

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 08 do mês de setembro do ano de 2011.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. William Wagner Matos Lira
Orientador – CTEC/UFAL

Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior
Co-orientador - CTEC/UFAL

Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages
CTEC/UFAL

Prof. Dr. Isaias Quaresma Masetti
FAETEC

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus e à minha família que sempre apoiaram todas as minhas decisões.

Ao apoio financeiro da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis - ANP, da financiadora de Estudos e Projetos – FINEP e do Ministério da Ciência e Tecnologia – MCT por meio do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor de Petróleo e Gás - PRH-ANP/MCT.

À CAPES pelo apoio financeiro no início da pesquisa.

Ao Laboratório de Computação Científica e Visualização – LCCV pela infra-estrutura proporcionada para o desenvolvimento do trabalho.

Aos meus orientadores William e Adeildo pela dedicação, apoio, atenção e paciência em todos os momentos durante o mestrado.

Aos professores Eduardo Nobre, Viviane, Eduardo Setton, Luciana, Severino e Patrick pela amizade e dúvidas durante o desenvolvimento de trabalhos no LCCV.

Aos amigos do LCCV Joseanderson, Reberth, David, Ricardo, Catarina, Michele, Diogo, Clayton, Romildo, Camila, Roseane, Raíssa e muitos outros, pela ajuda e descontração durante o mestrado.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo paramétrico para avaliar o efeito da temperatura em problemas de perfuração em rochas salinas. Essas rochas possuem deformação lenta e contínua quando submetidas a tensões constantes, fenômeno conhecido como fluência. Com as recentes descobertas de petróleo em grandes profundidades como, por exemplo, no pré-sal, onde as temperaturas são elevadas, o estudo da influência da temperatura se torna relevante, uma vez que contribui para o aumento do fenômeno de fluência. O objetivo desse estudo é a realização de simulações numéricas, através do Método dos Elementos Finitos, utilizando modelos viscoelásticos não lineares e um fraco acoplamento termomecânico para avaliar, através de análises paramétricas, o efeito da temperatura durante a perfuração das rochas salinas. Exemplos numéricos são realizados para validação dos estudos. Mais especificamente, considera-se o problema de escavação de poços para exploração de petróleo abaixo dessas camadas salinas.

Palavras-Chave: Método dos Elementos Finitos. Análise termomecânica. Rochas salinas. Fluência.

ABSTRACT

This work provides a parametric study to evaluate the effect of temperature in salt rock well drilling problems. These rocks show a slow and continuous strain when subjected to constant stress, a phenomenon known as creep. With recent oil discoveries in deep water, for example, in the pre-salt, where temperatures are high, the study of the influence of temperature becomes relevant, since it contributes to the increase of the creep phenomenon. The aim of this study is to perform numerical simulations by Finite Element Method, using non-linear viscoelastic models and weak thermo-mechanical coupling to evaluate, through parametric analysis, the effect of temperature during salt rock well drilling. Numerical examples are performed to validate the studies. More specifically, it is considered the problem of well drilling for oil exploration below these salt layers.

Keywords: Finite Element Method. Thermo – Mechanical analysis. Salt rocks. Creep.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Cenário do pré-sal: Grandes profundidades e espessas camadas de sal.	18
Figura 1.2 – Metodologia da pesquisa.	22
Figura 2.1 – Cavernas salinas.	25
Figura 2.2 – Acumulação de petróleo propiciada pelas rochas selantes.	27
Figura 2.3 – Problemas durante a perfuração em rochas salinas.	28
Figura 2.4 – Sólido arbitrário para o problema de transferência de calor.	32
Figura 2.5 – Fluxo através de um elemento infinitesimal.	32
Figura 2.6 – Teoria da viscoelasticidade: a) Linear; b) Não linear.	35
Figura 2.7 – Estágios da fluência.	36
Figura 2.8 – Influência da temperatura nas curvas de fluência.	37
Figura 2.9 – Variação da tensão ao longo do tempo devido a uma deformação constante.	37
Figura 2.10 – Modelos básicos: a) Modelo de Hooke; b) Modelo de Newton; c) Modelo de Saint-Venant.	38
Figura 2.11 – Modelo de Maxwell.	40
Figura 2.12 – Modelo de Kelvin.	41
Figura 2.13 – Modelo de Sólido Padrão.	43
Figura 2.14 – Modelo de Kelvin generalizado em série.	44
Figura 2.15 – Modelos reológicos mais complexos: a) Modelo de fluido padrão; b) Modelo de Burgers; c) Modelo de Kelvin generalizado em paralelo; d) Modelo de Maxwell generalizado em série; e) Modelo de Maxwell generalizado em paralelo.	46
Figura 2.16 – Estado de tensão volumétrico e desviador.	53
Figura 3.1 – Elementos finitos: a) triangulares; b) quadrilaterais.	57
Figura 3.2 – Elementos isoparamétricos quadrilaterais: a) Quatro nós; b) Oito nós.	57
Figura 3.3 – Domínio e divisão do contorno.	58
Figura 3.4 – Maciço em equilíbrio.	64
Figura 3.5 – Maciço após a escavação.	66
Figura 3.6 – Aproximação temporal de uma variável.	68
Figura 3.7 – Diagrama dos módulos computacionais.	74
Figura 4.1 – Placa retangular discretizada e suas condições de contorno para o regime permanente.	75
Figura 4.2 – Variação da temperatura ao longo da direção x.	76
Figura 4.3 – Placa retangular discretizada e suas condições de contorno para o regime transiente.	77
Figura 4.4 – Variação da temperatura ao longo da direção x a uma altura $y = 0$ m.	78
Figura 4.5 – Distribuição da temperatura ao longo do tempo em escala de cores.	79
Figura 4.6 – Elemento submetido a uma tensão constante na extremidade.	80
Figura 4.7 – Representação constitutiva do elemento: a) Parcela Volumétrica; b) Parcela Desviadora.	80
Figura 4.8 – Variação do deslocamento em função do tempo.	82

Figura 4.9 – Elemento submetido a um deslocamento prescrito.....	83
Figura 4.10 – Variação da tensão em relação ao tempo.....	84
Figura 4.11 – Bloco viscoelástico confinado.....	85
Figura 4.12 – Variação da tensão horizontal em relação ao tempo.....	86
Figura 4.13 – Cilindro viscoelástico de paredes espessas submetido a uma pressão interna e outra externa.....	87
Figura 4.14 – Discretização do modelo geométrico.....	87
Figura 4.15 – Deslocamento da face interna do cilindro em função do tempo.....	88
Figura 4.16 – Variação da deslocamento ao longo do tempo em escala de cores.....	89
Figura 4.17 – Cilindro de paredes espessas submetido a uma temperatura interna e outra externa.....	90
Figura 4.18 – Discretização do modelo.....	90
Figura 4.19 – Distribuição da temperatura ao longo do tempo no cilindro.....	93
Figura 4.20 – Campo de tensão radial ao longo do tempo no cilindro.....	93
Figura 4.21 – Campo de tensão circunferencial ao longo do tempo no cilindro.....	94
Figura 5.1 – Poço de petróleo: a) Cenário do problema; b) Modelo numérico.....	96
Figura 5.2 – Condições iniciais do problema de perfuração de poço.....	97
Figura 5.3 – Esquema dos grupos de modelos: a) Grupos A e B; b) Grupo C.....	100
Figura 5.4 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo A1 para diversas variações de temperaturas.....	102
Figura 5.5 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo A2 para diversas variações de temperaturas.....	103
Figura 5.6 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo B1 para diversas variações de temperaturas.....	104
Figura 5.7 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo B2 para diversas variações de temperaturas.....	105
Figura 5.8 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo B3 para diversas variações de temperaturas.....	106
Figura 5.9 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo C2 para diversas variações de temperaturas.....	107
Figura 5.10 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo C3 para diversas variações de temperaturas.....	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Minerais Salinos.	26
Tabela 2.2 – Descrição das variáveis da Equação (2.49).	52
Tabela 3.1 – Valores do parâmetro β	69
Tabela 4.1 - Parâmetros do problema para o elemento tracionado.	81
Tabela 4.2 - Parâmetros do problema para o elemento em relaxação.	83
Tabela 4.3 - Parâmetros do problema para o bloco confinado.	85
Tabela 4.4 - Parâmetros do problema para o cilindro.....	88
Tabela 4.5 - Parâmetros do problema.	91
Tabela 5.1 - Propriedades da halita e taquidrita.	99
Tabela 5.2 - Definição dos modelos do grupo A.	101
Tabela 5.3 - Definição dos modelos do grupo B.	104
Tabela 5.4 - Definição dos modelos do grupo C.	107

LISTA DE ABREVIATURAS

MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
EPT	Estado Plano de Tensão
EPD	Estado Plano de Deformação

LISTA DE SÍMBOLOS

q	Fluxo de calor por unidade de área
k	Coefficiente de condutividade térmica
T	Temperatura
h	Coefficiente de transferência de calor convectivo
T_S	Temperatura da superfície
T_f	Temperatura do fluido
σ_{sb}	Constante de Stefan - Boltzmann
ϵ	Emissividade
F_ϵ	Função de emissividade
F_G	Função orientação geométrica de duas superfícies
E^e	Energia que entra no sistema
E^g	Energia gerada pelo sistema
E^a	Energia armazenada pelo sistema
E^s	Energia que sai do sistema
Q	Fonte interna de calor gerado
c	Calor específico
ρ	Densidade de massa
σ	Tensão
ϵ	Deformação
E	Módulo de elasticidade longitudinal
$\dot{\epsilon}$	Taxa de deformação
η	Coefficiente de viscosidade
σ^e	Tensão elástica
σ^v	Tensão viscosa

ε^e	Deformação elástica
ε^v	Deformação viscosa
σ_0	Tensão inicial
t	Tempo
ε_0	Deformação inicial
$A, B, D, M, N, \lambda_c, a, b, d$	Constantes empíricas
f_σ	Função empírica da tensão
f_t	Função empírica do tempo
f_T	Função empírica da temperatura
Q_a	Energia de ativação
R	Constante dos gases
$\dot{\varepsilon}_0$	Taxa de deformação de referência
σ_{ef}	Tensão efetiva de fluência
T_0	Temperatura de referência
n	Coefficiente da equação constitutiva de fluência
σ_{ij}	Tensor de tensões
s_{ij}	Tensor de tensão desviador
δ_{ij}	Delta de Kronecker
σ_v	Tensão volumétrica
$(\sigma v)_{ij}$	Tensor de tensão volumétrica
ε_{ij}	Tensor de deformação
ε_v	Deformação volumétrica
e_{ij}	Tensor de deformação desviador
$(\varepsilon v)_{ij}$	Tensor de deformação volumétrica
σ_d	Tensão equivalente de von Mises
ε_d	Deformação equivalente

ε_{ij}^v	Tensor de taxa de deformação viscosa
ε_v^v	Taxa de deformação viscosa volumétrica
ε_d^v	Taxa de deformação viscosa desviadora
Ω	Domínio do problema
Γ	Contorno do problema
W	Função ponderadora
\mathbf{u}	Vetor campo de deslocamentos
\mathbf{u}_N	Vetor de deslocamentos nodais
\mathbf{N}	Matriz das funções de forma
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor de deformações
\mathbf{B}	Matriz das derivadas das funções de forma
δW_{int}	Trabalho virtual interno
δW_{ext}	Trabalho virtual externo
$\delta \boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor de deformações virtuais
$\boldsymbol{\sigma}$	Vetor de tensões
$\delta \mathbf{u}_N$	Vetor de deslocamentos nodais virtuais
\mathbf{f}_v	Forças de volume
\mathbf{f}_s	Forças de superfícies
\mathbf{f}_c	Forças concentradas
\mathbf{f}	Vetor de forças externas
\mathbf{T}	Vetor campo de temperatura
\mathbf{N}_T	Funções de forma do problema térmico
\mathbf{T}_N	Vetor de temperatura nodal
$\partial \mathbf{T}$	Vetor gradiente de temperatura
\mathbf{B}_T	Matriz das derivadas das funções de forma para o problema térmico
\mathbf{K}_T	Matriz de condutividade térmica

C	Matriz capacitância
R	Vetor constituído de calor interno e de fluxo de calor
ε^e	Vetor de deformações elásticas
ε^v	Vetor de deformações viscosas
ε^T	Vetor de deformações térmicas
D	Matriz constitutiva
σ_0	Vetor de tensões iniciais
K	Matriz de rigidez
σ_g	Vetor de tensões geostáticas
f_g	Vetor de forças equivalentes as tensões geostáticas
K_0	Coefficiente de empuxo de terra
γ	Peso específico
H	Altura do topo da camada ao ponto analisado
V	Variável qualquer
Δt	Incremento de tempo
β	Variável correspondente ao método de aproximação temporal
Δt_{cr}	Incremento de tempo crítico
α	Vetor do coeficiente de expansão térmica
ΔT	Vetor variação do campo de temperatura
$\Delta \varepsilon^v$	Vetor variação da deformação viscosa
K	Módulo volumétrico
G	Módulo transversal
ν	Coefficiente de Poisson
γ_a	Peso específico da água
LDA	Espessura da lâmina d'água
γ_{sot}	Peso específico do soterramento

H_{sot}	Espessura do soterramento
γ_{sal}	Peso específico do sal
T_{FM}	Temperatura no fundo do mar
GT_{sot}	Gradiente geotérmico do soterramento
GT_{sal}	Gradiente geotérmico do sal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Justificativa do Trabalho	20
1.2	Objetivos.....	21
1.3	Estrutura do Trabalho	22
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	24
2.1	Evaporitos	24
2.1.1	Características do Sal	24
2.1.2	Deposição dos Minerais	25
2.1.3	Os Evaporitos e a sua relação com o Petróleo.....	26
2.2	Problema Térmico Bidimensional	28
2.2.1	Leis da Transferência de Calor.....	29
2.2.1.1	Transferência de Calor por Condução.....	29
2.2.1.2	Transferência de Calor por Convecção	30
2.2.1.3	Transferência de Calor por Radiação	31
2.2.2	Equação Governante.....	32
2.3	Viscoelasticidade.....	34
2.3.1	Fluência	35
2.3.2	Relaxação	37
2.3.3	Modelos Reológicos	37
2.3.3.1	Modelos Básicos.....	38
2.3.3.2	Modelo de Maxwell.....	39
2.3.3.3	Modelos de Kelvin	41
2.3.3.4	Modelo de Sólido Padrão	42
2.3.3.5	Modelo de Kelvin Generalizado em Série	44
2.3.3.6	Outros modelos complexos	45
2.3.4	Leis Empíricas.....	46
2.3.4.1	Lei de Norton.....	47
2.3.4.2	Lei de Ludwik	47
2.3.4.3	Lei de Prandtl–Nadai.....	48
2.3.4.4	Lei Potencial.....	48

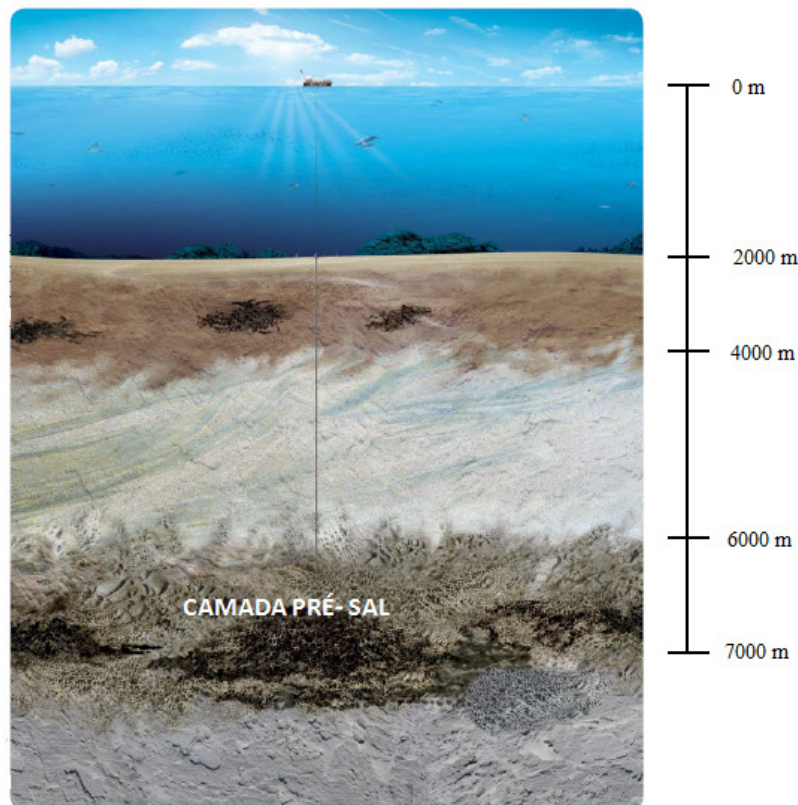
2.3.4.5	Lei Logarítmica	49
2.3.4.6	Lei Exponencial.....	50
2.3.4.7	Outras leis.....	50
2.3.5	Leis de Fluência Associadas a Processos Físicos.....	51
2.3.6	Viscoelasticidade para o Estado Multiaxial de Tensões	53
3	FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS E ASPECTOS COMPUTACIONAIS	56
3.1	Método dos Elementos Finitos	56
3.2	Formulação do Problema Térmico por Resíduos Ponderados	57
3.3	Discretização do Problema de Condução de Calor em Elementos Finitos	59
3.4	Discretização do Problema Mecânico em Elementos Finitos	61
3.5	Acoplamento Termomecânico Fraco e Consideração da Viscoelasticidade	63
3.6	Estado Inicial de Tensões e Consideração da Escavação.....	64
3.7	Integração no Tempo	67
3.7.1	Integração no Tempo para o Problema Térmico	69
3.7.2	Integração no Tempo para o Problema Viscoso.....	71
3.8	Estado Plano de Tensão, Estado Plano de Deformação e Estado Axissimétrico	71
3.9	Aspectos Computacionais	72
4	TESTES DE VERIFICAÇÃO.....	75
4.1	Placa Retangular – Regime Permanente.....	75
4.2	Placa Retangular - Regime Transiente.....	77
4.3	Teste de Fluência - Modelo de Maxwell em Dilatação e Sólido Padrão em Cisalhamento	80
4.4	Teste de Relaxação - Modelo de Sólido Padrão	82
4.5	Bloco Confinado - Modelo de Maxwell em Cisalhamento.....	84
4.6	Cilindro de Paredes Espessas – Modelo de Sólido Padrão em Cisalhamento	86
4.7	Cilindro de Paredes Espessas Submetido a Temperaturas Prescritas: Fraco Acoplamento Termomecânico.....	89
5	INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA NA PERFURAÇÃO DE POÇOS EM ROCHAS SALINAS.....	95
5.1	Descrição do Problema	95
5.2	Condições Iniciais	97
5.3	Simulação dos Modelos	98
6	CONCLUSÕES	109

REFERÊNCIAS	111
APÊNDICE A – PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA	115

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos a indústria petrolífera vem descobrindo reservas de petróleo em campos cada vez mais profundos, surgindo novos problemas devido à complexidade dos cenários encontrados. Os desafios são grandes e as pesquisas em áreas afins tendem a crescer para disponibilizar tecnologias e dar soluções para esses problemas. Como exemplo, pode-se citar as descobertas de petróleo abaixo de espessas camadas de sal (pré-sal) localizado em profundidades de até 7000 m, sendo que a espessura dessas camadas salinas pode chegar a 3000 m (Figura 1.1), direcionando as pesquisas para o estudo do comportamento dos evaporitos (rochas e minerais que se depositaram pela evaporação da água).

Figura 1.1 - Cenário do pré-sal: Grandes profundidades e espessas camadas de sal.



Fonte: Christante (2009).

A ocorrência de grandes depósitos de sal acontece em todo o mundo, destacando-se o Golfo do México, as bacias sedimentares nas zonas costeiras do Atlântico Sul no Brasil e na África. No Brasil, a ocorrência de espessas camadas salinas em grandes profundidades se encontra, principalmente, nas Bacias de Santos, Campos e Espírito Santo.

A principal razão para o estudo dos evaporitos está relacionada ao fato de que as estruturas salinas, de um modo geral, estão associadas a reservas de petróleo devido a algumas propriedades peculiares do sal que facilitam o aprisionamento dos hidrocarbonetos. Entretanto, o sal também apresenta características indesejáveis quando se trata de problemas de escavações, pois tende a sofrer uma grande deformação ao longo do tempo, fenômeno conhecido como fluência ou *creep*.

Por causa desses problemas resultantes das escavações de rochas salinas, muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos para estudar o comportamento do sal. Costa (1984), por exemplo, estudou o comportamento das rochas através de leis constitutivas elasto/viscoelástica e elasto/viscoplástica em problemas de escavações, fazendo simulações do comportamento de cavidades subterrâneas e analisando o efeito da deformação com o tempo. Para isso, foram realizados ensaios na mina de Taquari – Vassouras em Sergipe e simulações numéricas através do Método dos Elementos Finitos (MEF). Outros trabalhos, como o de Munson (1997) e Hunshe e Hampell (1999), foram realizados a fim de estudar relações constitutivas para avaliar o fenômeno de fluência nas rochas salinas e entender melhor o seu comportamento.

Os estudos dessas relações constitutivas mostram que as rochas são afetadas por diversas situações físicas que acontecem nas proximidades das escavações. Gravina (1997) apresenta um programa computacional para estimar o fechamento de um poço de petróleo ao longo do tempo analisando algumas dessas situações físicas, tais como a evolução da fluência do sal próximo ao poço, a influência de constantes elásticas empregadas, influência de parâmetros geológicos, influência de parâmetros de perfuração, a influência da equação de fluência utilizada, além do fechamento de poços em zonas de diferentes profundidades. Outra situação importante que não foi estudada diretamente por Gravina e que afeta consideravelmente o fenômeno de fluência é a temperatura. Essa influência da temperatura já foi estudada em alguns trabalhos como, por exemplo, em Carter *et al.* (1993) e nos trabalhos que estudam as leis constitutivas para a fluência, uma vez que as equações utilizadas são funções explícitas da temperatura.

Com a influência da temperatura comprovada nos trabalhos desenvolvidos nessa área e considerando o fato de que o cenário em que se encontram as reservas de petróleo é de grandes profundidades e elevadas temperaturas, é necessário um estudo mais detalhado desse efeito. Nesta linha, o trabalho de Cella (2003) faz estudos das rochas salinas submetidas a altas pressões e temperaturas para avaliar a deformação ao longo do tempo dessas rochas. Outros trabalhos como o de Poiate *et al.* (2006), Botelho (2008) e Borges (2008), apesar de

enfoques diferentes, utilizam métodos numéricos considerando a temperatura nas leis constitutivas de fluência.

Embora a influência da temperatura no fenômeno de fluência já venha sendo abordada nos trabalhos através da sua consideração nas leis constitutivas do fenômeno, um estudo mais detalhado, considerando o acoplamento termomecânico, é relevante. Tal estudo pode mapear de maneira mais consistente essa influência, uma vez que a solução do problema térmico através dos métodos numéricos fornece a distribuição de temperatura no maciço que é utilizada nas leis de fluência, possibilitando um estudo mais adequado ao longo do tempo.

1.1 Justificativa do Trabalho

Como dito acima, nos problemas que envolvem as rochas evaporíticas, a consideração da temperatura é importante, uma vez que elevadas temperaturas contribuem, dentre outros fatores, para o aumento do fenômeno de fluência dessas rochas que pode ocasionar diversos problemas. O estudo dessa influência se torna ainda mais relevante com a descoberta de petróleo em grandes profundidades, como é o caso das descobertas de reservas no pré-sal. Com o aumento da profundidade, há um aumento da temperatura devido ao gradiente térmico das formações.

Nesse cenário de perfuração, encontra-se o sal que possui uma alta condutividade térmica. A halita, por exemplo, possui uma condutividade térmica três vezes maior do que as outras rochas sedimentares (MOHRIAK e SZATMARI, 2008). A sensibilidade do sal à temperatura no fenômeno de fluência já foi discutida em alguns trabalhos como em Carter *et al.* (1993) e Costa (1984).

O estudo da influência da temperatura é realizado considerando basicamente duas situações: (a) gradiente térmico das formações; (b) temperatura do fluido de perfuração. Segundo Fjaer *et al.* (1992), algumas mudanças na temperatura na parede do poço surgirão quando o fluido é circulado, porque a formação entra em contato com o fluido a temperaturas mais baixas do que a da formação. Se a temperatura mudar significativamente, o seu efeito se torna importante. Essas mudanças de temperatura nas formações não alteram somente a distribuição de tensões, mas também as propriedades da rocha.

Nesse sentido, é interessante um estudo da influência da temperatura na fluência das rochas salinas para que se entenda melhor o comportamento do fenômeno. Para isso, são analisadas algumas situações forçando o resfriamento do fluido de perfuração.

1.2 Objetivos

O desenvolvimento deste trabalho está relacionado a uma das linhas de pesquisa do Laboratório de Computação Científica e Visualização (LCCV) que é a perfuração de poços em rochas salinas. Iniciando os trabalhos dessa linha, Araújo (2009) desenvolveu um modelo simplificado, baseado no Método dos Elementos Finitos, para realizar a previsão da velocidade de fechamento, que é importante para definição da estratégia de perfuração de um poço. O presente trabalho segue dando continuidade a essa linha, expandindo a formulação para elementos finitos bidimensionais e a consideração do problema de transferência de calor, através do fraco acoplamento termomecânico, para estudar a influência da temperatura no problema de perfuração.

O termo acoplamento fraco, segundo Dadvand (2007), é também chamado de acoplamento em um único sentido, onde apenas um fenômeno depende do outro. No fraco acoplamento termomecânico, por exemplo, as deformações da estrutura dependem da temperatura enquanto que o campo de temperatura pode ser resolvido independentemente, assumindo que a mudança de temperatura devido à deformação da estrutura é muito pequena.

Neste sentido, o objetivo deste trabalho consiste na realização de um estudo paramétrico para avaliar o efeito da temperatura em problemas de escavações em rochas salinas. A realização dos estudos utiliza o Método dos Elementos Finitos a partir de modelos viscoelásticos não lineares e o fraco acoplamento termomecânico para aplicação em possíveis problemas de escavações em camadas salinas.

Nesta direção, o trabalho possui os seguintes objetivos específicos:

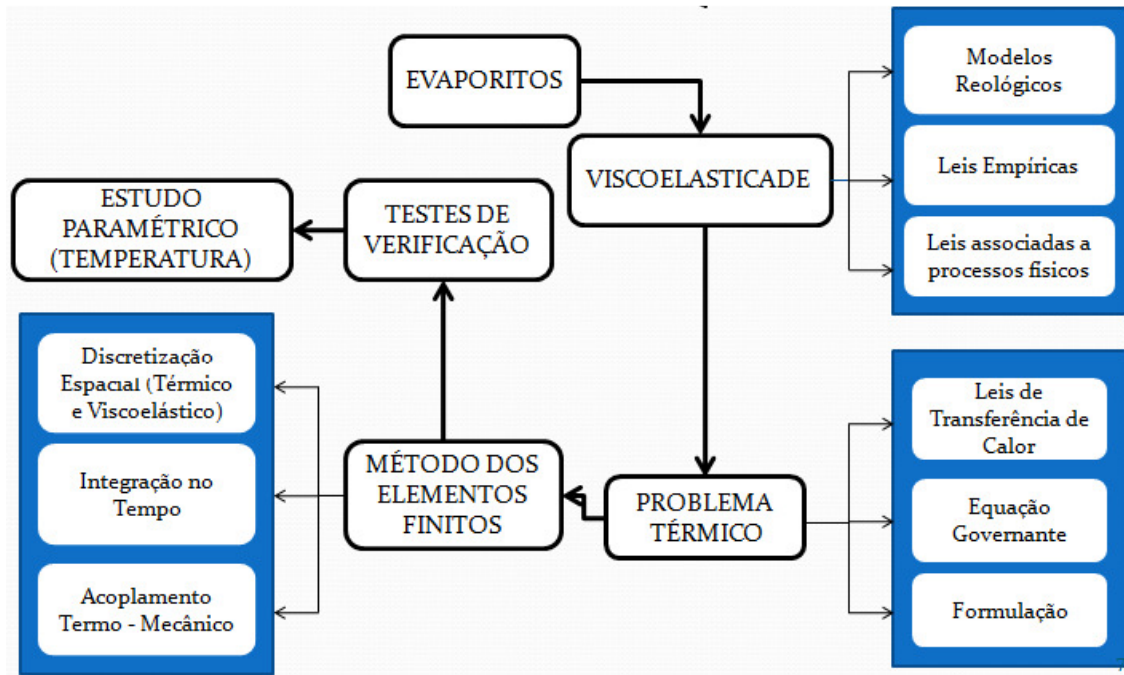
- 1) Estudar rochas salinas, suas principais características e sua relação com o petróleo;
- 2) Estudar uma formulação em elementos finitos, considerando linearidade geométrica e isotropia do material, para resolver problemas viscoelásticos lineares e não lineares e o fraco acoplamento termomecânico;
- 3) Desenvolver um código computacional para a formulação supracitada;
- 4) Analisar o efeito térmico no comportamento viscoso através de um estudo paramétrico em problemas de escavações em rochas salinas.

Desta forma, as principais contribuições do trabalho é avaliar a influência que a temperatura possui no problema de perfuração de poços em rochas salinas. Para isso, é realizada uma análise no tempo para considerar o efeito da temperatura na equação constitutiva de fluência e também a realização de um acoplamento termomecânico fraco. Com

isso, pode-se verificar se é possível minimizar alguns problemas como, por exemplo, o rápido fechamento que pode ocorrer durante a perfuração de poços que atravessam as camadas salinas.

De acordo com os objetivos apresentados, a metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho está apresentada na Figura 1.2.

Figura 1.2 – Metodologia da pesquisa.



Fonte: Autor (2011).

Inicialmente, é apresentado o estudo de algumas características dos evaporitos necessárias para entender o seu comportamento. Uma vez que essas rochas apresentam um comportamento viscoso, também são abordados alguns conceitos da teoria da viscoelasticidade para utilização na relação constitutiva do material. Além disso, como o interesse é avaliar o efeito da temperatura no problema, um estudo das leis de transferência de calor é realizado. Em seguida, é apresentado o Método dos Elementos Finitos que é utilizado para analisar o problema. Alguns testes de verificação são realizados para dar confiabilidade ao código computacional implementado. Por último, é realizado um estudo paramétrico da influência da temperatura no problema de perfuração de poços.

1.3 Estrutura do Trabalho

Esta seção apresenta a estrutura do trabalho através de uma síntese de cada capítulo.

O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica do trabalho. Inicialmente são abordados alguns conceitos relacionados às rochas salinas, características e aspectos relacionados à exploração do petróleo. Em seguida, são apresentados alguns conceitos relacionados aos problemas de transferência de calor, descrevendo as leis de transferência de calor por condução, convecção e radiação e a equação governante do problema térmico. Ao final, são descritos os principais conceitos da teoria da viscoelasticidade, abordando modelos para o estudo de fluência.

No Capítulo 3 é apresentada uma breve descrição sobre o Método dos Elementos Finitos, bem como a discretização da formulação para os problemas térmicos e viscoelásticos. Esse capítulo discute ainda sobre a integração temporal e alguns aspectos computacionais.

O Capítulo 4 trata de alguns testes de verificação, mostrando a comparação das simulações com soluções analíticas de problemas clássicos.

O Capítulo 5 apresenta algumas simulações para avaliar a influência da temperatura na fluência das rochas salinas em problemas de perfuração de poços.

Finalmente, o Capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta uma fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento do trabalho. Ele é dividido em três partes principais. A primeira parte aborda os principais conceitos dos evaporitos e alguns aspectos relacionados à exploração do petróleo. A segunda parte apresenta o problema térmico bidimensional através das leis de transferência de calor e a equação governante desse problema. Finalmente, a terceira parte apresenta a teoria da viscoelasticidade e alguns modelos para o estudo da fluência.

2.1 Evaporitos

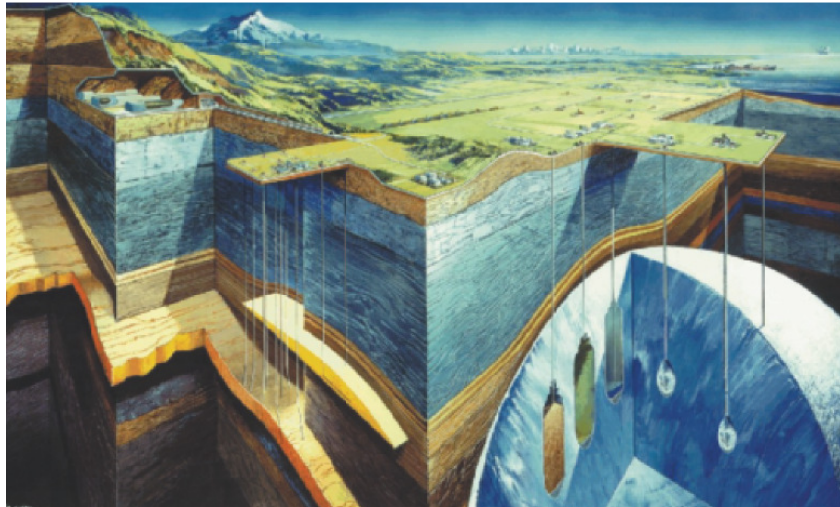
Os evaporitos (ou rochas salinas) são rochas sedimentares formadas pela precipitação dos sais contidos em meio aquoso ocasionadas por intensa evaporação. Segundo Mohriak e Szatmari (2008), o nome evaporito vem da palavra “evapore” e do sufixo grego “litho”, que significa pedra. São materiais diferentes, com características de rochas e de líquidos. Os evaporitos são solúveis, vieram de líquidos e a eles retornam assim que possível, sendo, portanto, rochas temporárias ou móveis. Eles se movimentam com muita facilidade, tanto quimicamente (em solução de água), como fisicamente (em fluxo sólido).

Esta seção apresenta algumas características dos evaporitos importantes no estudo de escavações relacionadas à exploração e estocagem de hidrocarbonetos. Aborda ainda algumas características dos minerais encontrados na sua composição, além da relação desse sal com o petróleo, mostrando alguns problemas que surgem durante a escavação dessas rochas.

2.1.1 Características do Sal

O petróleo está relacionado aos evaporitos devido ao fato de muitas características dessas rochas facilitarem o aprisionamento de hidrocarbonetos em armadilhas geológicas. Ao longo dos anos também foi constatada a possibilidade de estocagem de gás e lixos nucleares em cavernas (Figura 2.1) realizadas nas formações salíferas. Entretanto, algumas características desses evaporitos ocasionam muitos problemas nas diversas etapas dos projetos relacionados a escavações nessas rochas.

Figura 2.1 – Cavernas salinas.



Fonte: Bary *et al.* (2002).

Neste sentido, algumas características dos sais, importantes principalmente na etapa de perfuração dessas rochas, são apresentadas a seguir. Segundo Falcão (2008), os sais possuem propriedades diferenciadas quando comparados com outros sedimentos. Os evaporitos solúveis são praticamente impermeáveis, característica importante para o acúmulo de hidrocarbonetos. Esses sais solúveis em água exigem que o fluido utilizado na etapa de perfuração seja saturado ou sintético. Uma vez que são praticamente incompressíveis, o seu peso específico é praticamente constante, independente da profundidade. Os sais possuem ainda alta condutividade térmica (duas a três vezes maior que outros sedimentos) fazendo com que o gradiente de temperatura em uma seção seja menor do que o das formações acima e abaixo delas.

2.1.2 Deposição dos Minerais

Os depósitos evaporíticos são formados por diversos minerais resultantes de intensa evaporação. Esses minerais são formados por íons que estão presentes na água do mar e que, quando precipitados, formam compostos químicos variados. Segundo Mohriak e Szatmari (2008), a geração de minerais evaporíticos pode ocorrer em ambientes marinhos (como golfo e mares restrito, ligados a um oceano) e não-marinhos, no interior de continentes (como, por exemplo, em lagunas, *sabkhas* (WARREN, 2006) e lagos salgados isolados).

Segundo Silva *et al.* (2001), a água do mar moderna é formada por íons Na^+ e Cl^- e em quantidades menores por SO_4^{2-} , Mg^{+2} , Ca^{+2} , K^{+1} , CO_3^{-2} e HCO_3^{-1} . A sequência de

precipitação desses sais ocorre de uma maneira previsível, do menos solúvel para o mais solúvel. De acordo com Falcão (2008), o primeiro mineral a se precipitar são os carbonatos (por exemplo, calcita), seguido dos sulfatos (gipso ou anidrita). Após esses minerais, se precipitam em ordem a halita, silvita, carnalita, bishofita e taquidrita. Esses últimos são chamados de cloretos ou sais solúveis e apresentam uma grande mobilidade. Um resumo desses minerais e das suas fórmulas químicas está apresentado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Minerais Salinos.

Sais pouco solúveis	Sais solúveis
Calcita (CaCO_3)	Halita (NaCl)
Anidrita (CaSO_4)	Silvita (KCl)
Gipso ($\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$)	Carnalita ($\text{KMgCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$)
	Bischofita ($\text{MgCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$)
	Taquidrita ($\text{CaCl}_2 \cdot 2\text{MgCl}_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$)

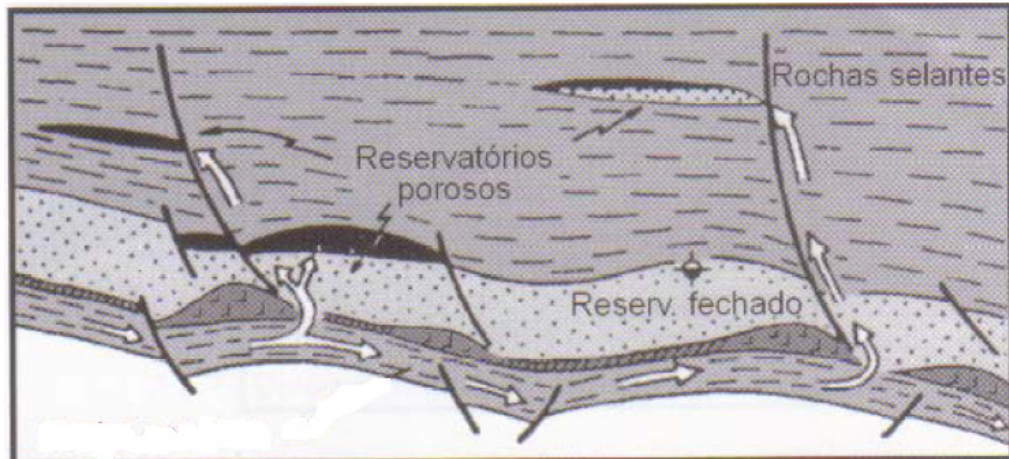
Fonte: Warren (2006).

2.1.3 Os Evaporitos e a sua relação com o Petróleo

No processo de formação das reservas de petróleo, após a sua geração, é necessária alguma barreira que se interponha no seu caminho para que seja possível a acumulação desse petróleo durante a sua migração, como mostra a Figura 2.2. Essa barreira é produzida pela rocha selante, cuja característica principal é sua baixa permeabilidade. Além da sua impermeabilidade, a rocha selante deve ser dotada de plasticidade, característica que a capacita a manter essa sua característica mesmo depois de submetida a esforços determinantes de deformações. Sendo assim, os evaporitos são ditos rochas selantes por excelência (THOMAS *et al.*, 2001).

O fato das rochas evaporíticas apresentarem condições favoráveis para o aprisionamento dos hidrocarbonetos aumenta as chances de prospecção de petróleo, por esse formar armadilhas para o acúmulo dos mesmos. Além do acúmulo de hidrocarbonetos, a característica selante dessas rochas torna seu uso interessante para o estoque de gás e lixos atômicos em cavernas salinas. Essas aplicações, aliadas à descoberta de grandes reservas de petróleo, fizeram com que o estudo do comportamento dessas rochas aumentasse significativamente devido aos altos investimentos das indústrias envolvidas.

Figura 2.2 – Acumulação de petróleo propiciada pelas rochas selantes.



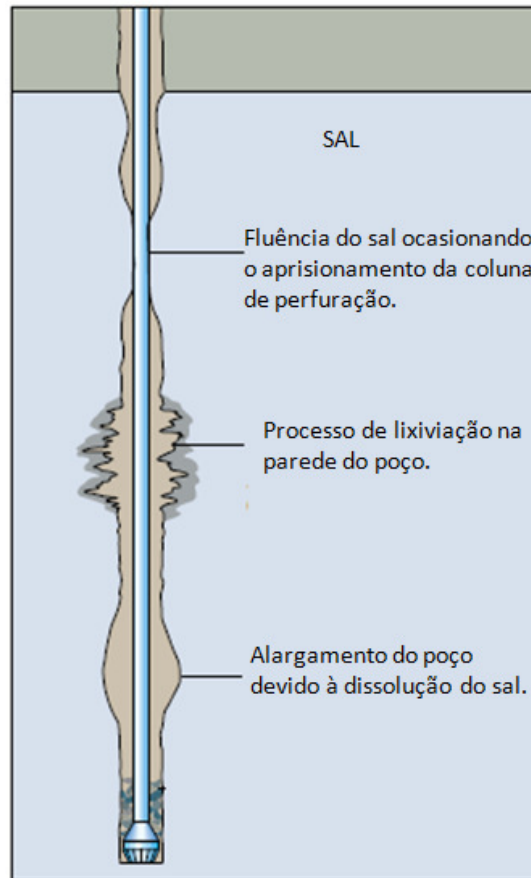
Fonte: Thomas *et al.* (2001).

A ocorrência de evaporitos, apesar de ser um bom indício para encontrar reservas de petróleo e da sua utilidade para estoque de gás e lixo atômico, ocasiona muitos problemas nas etapas de escavações em rochas salinas. Um dos problemas encontrados está relacionado a uma das propriedades do sal que, mesmo submetido a uma tensão desviadora constante, tende a se deformar ao longo do tempo, fenômeno conhecido como fluência ou *creep*. Na etapa de perfuração, esse fenômeno pode ocasionar o rápido fechamento do poço, causando o aprisionamento da coluna de perfuração (Figura 2.3). Essa propriedade do sal pode ocasionar também o colapso do revestimento por causa de esforços adicionais, sendo necessário considerar esses esforços no dimensionamento desse revestimento. Há ainda outros problemas na perfuração de camadas salinas como o alargamento da parede do poço devido ao processo de dissolução do sal e o enfraquecimento da parede do poço proveniente do processo de lixiviação.

Segundo Falcão (2008), quando o sal apresenta baixa mobilidade (por exemplo, a halita), ele passa a ser uma formação ideal para a perfuração, por ser homogêneo, ter baixa porosidade, elevado gradiente de fratura¹ e, em geral, apresentar uma boa taxa de penetração. Entretanto, a perfuração em sais móveis (por exemplo, a carnalita, a bishofita e a taquidrita), os problemas são multiplicados quando comparados com outros tipos de sedimentos. Esses sais apresentam maiores taxas de fluência quando comparados aos de baixa mobilidade. Há ainda os sais que são essencialmente imóveis (carbonatos e sulfatos).

¹ Pressão necessária para induzir fraturas em uma rocha a uma dada profundidade.

Figura 2.3 – Problemas durante a perfuração em rochas salinas.



Fonte: Farmer *et al.* (1996).

2.2 Problema Térmico Bidimensional

Os problemas de transferência de calor são de grande importância em diversas áreas da Engenharia. Essa transferência pode ocorrer entre líquidos, sólidos e gases, sendo que este trabalho foca a troca de calor entre sólidos, onde o estudo dessa transferência é realizado através de algumas leis clássicas que são abordadas nesta seção.

O estudo do problema térmico está relacionado ao fato de que algumas propriedades e fenômenos dos materiais viscoelásticos são afetados pela temperatura (por exemplo, a fluência nas rochas salinas). Portanto, para a realização de uma análise cujo interesse seja medir a influência da temperatura nesses materiais, é interessante a obtenção da distribuição da temperatura ao longo do problema que está sendo analisado. Essa distribuição pode ser obtida por diversos métodos numéricos, sendo o MEF utilizado neste trabalho.

O problema térmico, utilizando o MEF, tem como objetivo a determinação do campo de temperatura a partir de condições de contorno e das propriedades físicas, de forma que esse campo possa ser permanente (independente do tempo) ou transiente (dependente do tempo).

Para a formulação desse problema, é necessário obter a sua equação governante que é utilizada para a aplicação do MEF.

Neste sentido, a presente seção apresenta as leis de transferência e a equação governante considerando um material isotrópico. No Capítulo 3, é aplicada a formulação em Resíduos Ponderados na equação governante do problema, resultando em uma forma fraca que é utilizada para a discretização em elementos finitos.

2.2.1 Leis da Transferência de Calor

A transferência de calor acontece de três maneiras distintas:

- a) Condução;
- b) Convecção;
- c) Radiação.

A seguir são detalhados os três tipos de transferências de calor com base nos trabalhos de Lewis *et al.* (2004) e Holman (1986).

2.2.1.1 Transferência de Calor por Condução

A transferência de calor por condução acontece quando existe um gradiente de temperatura em um corpo. Através de experiências, foi constatado que existe uma transferência de energia da região de maior temperatura para a de menor temperatura. A transferência de calor por condução é, portanto, dada pela lei de Fourier, que estabelece que o fluxo de calor é proporcional ao gradiente de temperatura. Ela expressa a quantidade de energia que atravessa uma determinada superfície por unidade de área, sendo, para uma dimensão, definida por

$$q_x = -k \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

A equação acima pode ser generalizada, em notação indicial, da seguinte forma:

$$q_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

onde q_i é o fluxo de calor por unidade de área na direção i , k é a condutividade térmica do material e $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ é o gradiente de temperatura. O coeficiente de condutividade térmica é uma propriedade do material e está relacionado à facilidade de um material conduzir calor. Quando k apresenta um alto valor, o material é chamado de condutor térmico, caso contrário é chamado de isolante térmico. O coeficiente k ainda pode variar consideravelmente com a temperatura.

O fluxo de calor, no caso mais geral, é uma grandeza vetorial. Portanto, se em um corpo bidimensional forem traçados isotermas (linhas que unem pontos de mesma temperatura), o fluxo se apresenta na direção perpendicular a essas linhas. Em relação ao sentido do fluxo, devido ao sinal negativo, a equação mostra que esse ocorre no sentido decrescente da temperatura, ou seja, no sentido da maior temperatura para a menor.

2.2.1.2 Transferência de Calor por Convecção

A convecção é o processo pelo qual a energia é transferida através de um fluido. O processo de transferência de calor por convecção é descrito pela lei de resfriamento de Newton, dada por

$$q = h(T_s - T_f) \quad (2.3)$$

onde q é o fluxo de calor convectivo, h é o coeficiente de transferência de calor convectivo, T_s é a temperatura da superfície e T_f é a temperatura do fluido. Uma equação analítica pode ser encontrada para o coeficiente h . Entretanto, para situações mais complexas, h deve ser obtido experimentalmente. Esse coeficiente pode ser chamado também de coeficiente de filme devido a sua relação com o processo de condução na fina camada de fluido na parede da superfície.

A transferência de calor por convecção, abordada na Equação (2.3), é na verdade um processo de condução. O que está por trás dessa transferência é a Equação (2.2) que relaciona a condutividade térmica e o gradiente de temperatura. Acontece que esse gradiente de temperatura depende da taxa com que o fluido transporta calor. Por exemplo, altas velocidades produzem amplos gradientes de temperatura. Sendo assim, o gradiente de temperatura na superfície depende do fluxo do fluido. Logo, a viscosidade do fluido é

importante no estudo de convecção porque ela influencia o perfil de velocidade na região próximo à superfície do corpo e consequentemente influencia o gradiente de temperatura.

2.2.1.3 Transferência de Calor por Radiação

A radiação está relacionada com a transferência de calor de uma superfície de maior temperatura para uma superfície de menor temperatura através do espaço. Ao contrário da transferência de calor por condução e convecção, essa lei não depende de um meio material pra transferir energia, podendo ocorrer através do vácuo.

As equações que são apresentadas a seguir resumem-se a radiação térmica que é um tipo de radiação eletromagnética e que se propaga devido a uma diferença de temperatura. A Lei de Stefan-Boltzmann mostra que o máximo fluxo que pode ser emitido através de um corpo negro é dado por

$$q = \sigma_{sb} T^4 \quad (2.4)$$

onde q (W/m^2) é o fluxo de calor por radiação, σ_{sb} é a constante de Stefan-Boltzmann e vale $5,669 \times 10^{-8}$ ($\text{W}/\text{m}^2\text{K}^4$) e T (K) é a temperatura na superfície.

Porém, o fluxo de calor emitido por um corpo que não seja negro é menor e pode ser obtido por

$$q = \epsilon \sigma_{sb} T^4 \quad (2.5)$$

onde ϵ é a emissividade. Assim, a troca de energia por radiação entre duas superfícies quaisquer é dada por

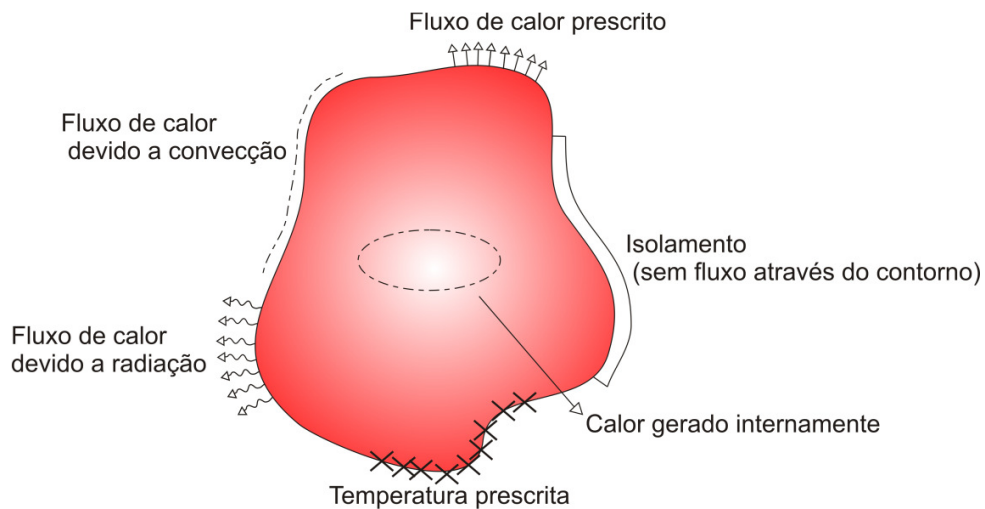
$$q = F_{\epsilon} F_G \sigma_{sb} (T_1^4 - T_2^4) \quad (2.6)$$

onde F_{ϵ} é a função de emissividade que leva em conta a natureza das duas superfícies de radiação, F_G é uma função que leva em consideração a orientação geométrica das duas superfícies, T_1 é a temperatura na superfície 1, T_2 é a temperatura na superfície 2.

2.2.2 Equação Governante

Segundo Cook *et al.* (1989), um sólido arbitrário com seus vários carregamentos térmicos e condições de contorno pode ser representado de acordo com a Figura 2.4. O calor flui nesse corpo por condução e pode ser transferido para outro corpo por convecção ou por radiação. Esse calor pode ainda ser gerado internamente (por exemplo, por resistência à corrente elétrica).

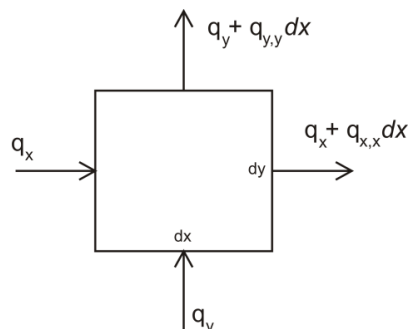
Figura 2.4 – Sólido arbitrário para o problema de transferência de calor.



Fonte: Autor (2011).

Neste trabalho, considera-se apenas a prescrição de temperatura e de fluxo. Desta forma, a equação diferencial governante do problema de transferência de calor é deduzida a partir do balanço de fluxo no interior de um elemento infinitesimal (Figura 2.5). As transferências de calor por convecção e radiação em problemas de condução de calor entram como condições de contorno do problema, porém não são consideradas neste trabalho.

Figura 2.5 – Fluxo através de um elemento infinitesimal.



Fonte: Autor (2011).

O elemento infinitesimal representado na Figura 2.5 possui dimensões d_x e d_y . Considera-se que o fluxo penetra através de uma face, perpendicular a cada uma das direções, e sai pela face oposta. O fluxo de entrada está representado por q_x e q_y e o fluxo de saída por $q_x + q_{x,x}d_x$ e $q_y + q_{y,y}d_y$, respectivamente nas direções x e y . Assumindo uma espessura unitária, as superfícies laterais do corpo isoladas e fazendo o balanço do fluxo de calor através do elemento, tem-se que

$$E^e + E^g = E^a + E^s \quad (2.7)$$

onde

$$\begin{aligned} E^e &= q_x dy + q_y dx && - \text{Energia que entra no sistema.} \\ E^g &= Q dx dy && - \text{Energia gerada pelo sistema.} \\ E^a &= c \rho \dot{T} && - \text{Energia armazenada pelo sistema.} \\ E^s &= (q_x + q_{x,x} dx) dy + (q_y + q_{y,y} dy) dx && - \text{Energia que sai do sistema.} \end{aligned}$$

Escrevendo o balanço energético no elemento infinitesimal:

$$Q dx dy + q_x dy + q_y dx = (q_x + q_{x,x} dx) dy + (q_y + q_{y,y} dy) dx + c \rho \dot{T} \quad (2.8)$$

onde c é o calor específico, ρ é a densidade de massa e Q é o calor gerado no volume de controle.

Rearranjando a Equação (2.8), chega-se em

$$Q dx dy - (q_{x,x} dx) dy - (q_{y,y} dy) dx = c \rho \dot{T} dx dy \quad (2.9)$$

e dividindo os termos da equação por $dx dy$ resulta em

$$Q - q_{x,x} - q_{y,y} = c \rho \dot{T} \quad (2.10)$$

Aplicando a lei de Fourier nessa equação tem-se que

$$Q + \frac{\partial}{\partial x} (k_x T_{,x} + k_{xy} T_{,y}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_{xy} T_{,x} + k_y T_{,y}) = c \rho \dot{T} \quad (2.11)$$

Considerando o material isotrópico ($k_x = k_y = k$) e homogêneo (k é constante) e que as direções principais do material coincidem com as direções cartesianas ($k_{xy} = 0$), a equação governante é expressa como

$$Q + k(T_{,xx} + T_{,yy}) = c\rho\dot{T} \quad (2.12)$$

A equação governante (Equação (2.12)) do problema térmico considera o regime transiente, uma vez que a equação diferencial possui parcelas dependentes do tempo na sua composição. O problema estacionário, que independe do tempo, é constituído da mesma equação desprezando apenas a parcela à direita da igualdade da Equação (2.12), o que leva a

$$Q + k(T_{,xx} + T_{,yy}) = 0 \quad (2.13)$$

Se a equação acima, para o regime estacionário, não possuir fonte interna de calor ($Q = 0$), recai na seguinte equação diferencial de Laplace:

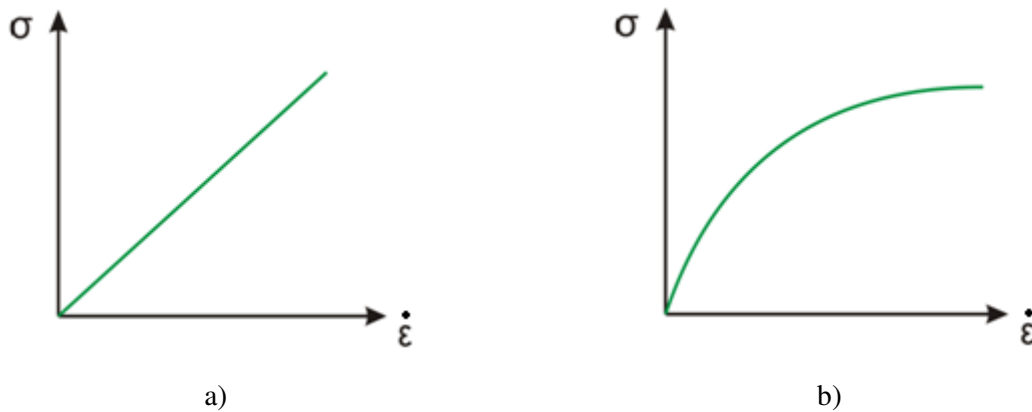
$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.14)$$

Neste trabalho é considerado o regime transiente para a obtenção da distribuição de temperatura ao longo do tempo. Essa distribuição, como dito anteriormente, é obtida através do MEF e é utilizada na equação constitutiva de fluência no decorrer da análise e também para a obtenção de uma deformação térmica causada pela variação da temperatura.

2.3 Viscoelasticidade

Os materiais viscoelásticos são aqueles que apresentam uma forte dependência do fator tempo em seu comportamento, combinando o efeito da elasticidade e da viscosidade. Muitos materiais apresentam esse tipo de comportamento, tais como os betuminosos, os poliméricos, as rochas salinas, os plásticos, os metais e os concretos submetidos a altas temperaturas. Esse comportamento dependente do tempo é estudado por alguns tipos de ensaios como, por exemplo, o de fluência e o de relaxação. Em relação às equações constitutivas, o estudo da teoria da viscoelasticidade pode ser separado em viscoelasticidade linear e viscoelasticidade não linear (Figura 2.6).

Figura 2.6 – Teoria da viscoelasticidade: a) Linear; b) Não linear.



Fonte: Autor (2011).

A viscoelasticidade linear é caracterizada por uma relação linear entre tensão e taxa de deformação. A teoria da viscoelasticidade linear permite um tratamento da representação matemática para a relação de tensão-deformação-tempo que possibilita soluções razoavelmente simples para muitos problemas de análise de tensões (FINDLEY *et al.*, 1976). Entretanto, essa relação linear nem sempre consegue representar adequadamente o comportamento de alguns materiais, como, por exemplo, as rochas salinas. Neste caso, o comportamento desses materiais é estudado através da viscoelasticidade não linear, cuja relação entre tensão e taxa de deformação é não linear.

Nesta seção são apresentados alguns conceitos importantes para o estudo da viscoelasticidade, além de alguns modelos e leis unidimensionais que são utilizados para representar o comportamento de materiais viscoelásticos lineares e não lineares.

2.3.1 Fluência

A fluência é uma deformação dependente do tempo quando um material é submetido a uma tensão constante.

Os modelos de estudo de fluência para finalidades práticas incluem leis empíricas, leis fundamentadas em modelos reológicos e leis baseadas nos mecanismos físicos de deformação da matriz rochosa (CELLA, 2003).

A fluência, em geral, pode ser dividida em três fases (Figura 2.7): a) Primária; b) Secundária; c) Terciária. De acordo com Shames e Cozzarelli (1997) e Ramos (1999):

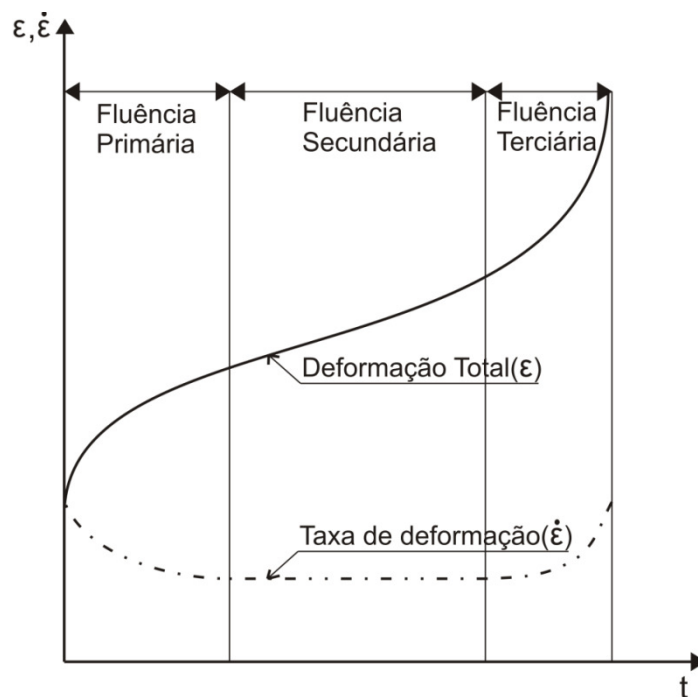
a) Fluência Primária (ou transiente): Primeiramente após a aplicação de um carregamento, ocorre uma deformação elástica instantânea. Após essa deformação

inicial, encontra-se a primeira fase (fluência primária) que ocorre quando a taxa de deformação decresce continuamente. Se nessa fase a tensão é reduzida repentinamente a zero, ocorre uma recuperação da deformação elástica instantânea, seguida de uma deformação lenta que tende assintoticamente a zero, não restando deformação permanente. A fluência primária é importante se a duração do carregamento é curta;

b) Fluência Secundária (ou estacionária): Neste estágio, a taxa de deformação é constante com o tempo. Se nesta fase a tensão é reduzida repentinamente a zero, ocorre uma recuperação da deformação elástica, seguida de uma recuperação lenta com o tempo, evoluindo para uma deformação permanente. Este estágio geralmente é o dominante em uma curva de fluência. Entretanto, em alguns materiais sob altas tensões e altas temperaturas este intervalo pode quase desaparecer e a fluência primária se transforma logo em fluência terciária;

c) Fluência terciária: Neste estágio a taxa de deformação aumenta até atingir a ruptura.

Figura 2.7 – Estágios da fluência.

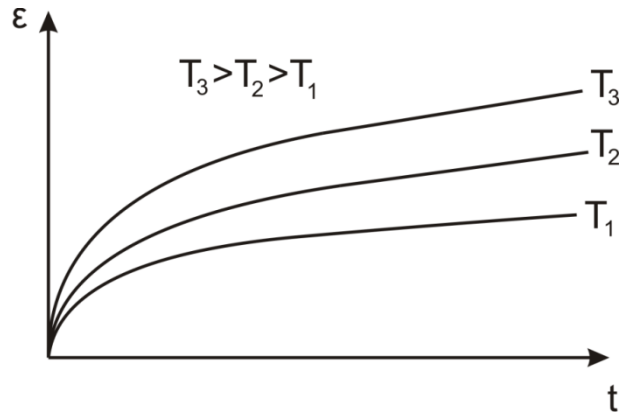


Fonte: Autor (2011).

Outro ponto importante no estudo deste fenômeno é a influência da temperatura. Segundo Costa (1984), a velocidade de deformação por fluência é fortemente dependente da

temperatura. A Figura 2.8 ilustra essa dependência, considerando três curvas de fluência com temperaturas distintas, porém constantes em cada curva.

Figura 2.8 – Influência da temperatura nas curvas de fluência.

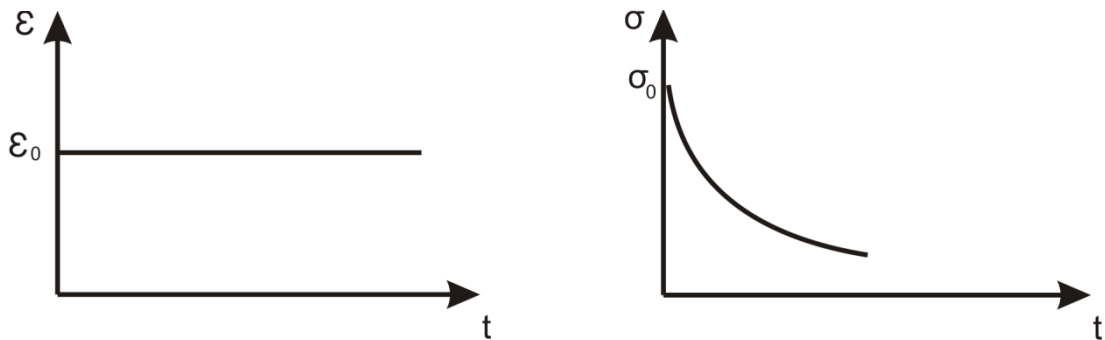


Fonte: Autor (2011).

2.3.2 Relaxação

É a variação das tensões quando alguns materiais são submetidos a uma deformação constante ao longo do tempo (Figura 2.9). A tensão vai diminuindo ao longo do tempo, como se o material estivesse se ajustando a essa nova configuração.

Figura 2.9 – Variação da tensão ao longo do tempo devido a uma deformação constante.



Fonte: Autor (2011).

2.3.3 Modelos Reológicos

Os modelos reológicos são utilizados para representar de forma unidimensional os diversos comportamentos dos materiais (elástico, viscoso e plástico) em termos de tensão–deformação–tempo.

Segundo Gravina (1997), um grande inconveniente dos modelos reológicos é que o efeito da temperatura não aparece explicitamente em suas equações constitutivas. Como já mencionado, a fluência de um material viscoelástico é afetada pela temperatura ao qual o mesmo está submetido. Sendo assim, uma alternativa para resolver essa restrição é considerar a influência da temperatura na fluência dos materiais incorporando esses efeitos nos parâmetros dos modelos (constantes de mola e de amortecimento).

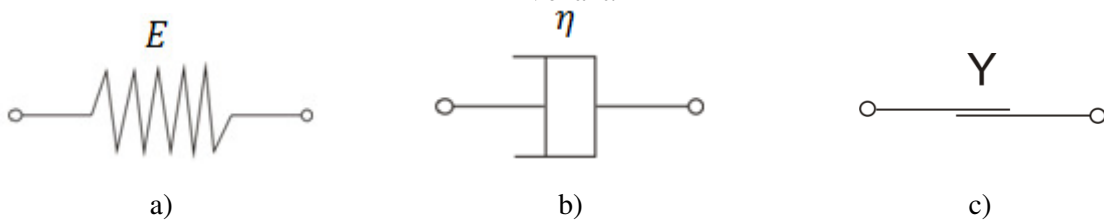
Outro inconveniente é que os modelos reológicos não fornecem estimativas diretas de valores de calibração experimental. Entretanto, uma característica que sobressai nos modelos reológicos em relação aos empíricos é que, enquanto os modelos empíricos simulam o comportamento dos materiais viscoelásticos apenas no ensaio de fluência, os modelos reológicos conseguem representá-los, também, nos ensaios de relaxação das tensões e nos ensaios de recuperação das deformações.

As seções a seguir apresentam diversos modelos reológicos que podem ser encontrados na literatura em trabalhos que utilizam variadas formulações a partir desses modelos (ESCARPINI FILHO, 2010; FONSECA, 1986; MARQUES, 1994; SANTOS, 2008).

2.3.3.1 Modelos Básicos

Os modelos constitutivos são utilizados como idealizações dos comportamentos dos materiais. A idealização da relação tensão-deformação é realizada de maneira que o modelo proposto apresente resultados próximos dos ensaios. Alguns modelos básicos são utilizados para representar o comportamento unidimensional dos materiais, tais como o modelo de Hooke, de Newton e de Saint-Venant (Figura 2.10).

Figura 2.10 – Modelos básicos: a) Modelo de Hooke; b) Modelo de Newton; c) Modelo de Saint-Venant.



Fonte: Autor (2011).

O modelo de Hooke, representado por uma mola (Figura 2.10a), é a idealização do material elástico linear, e sua relação constitutiva é dada por

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.15)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal do material (módulo de Young) que corresponde à constante da mola. Um material elástico, quando sujeito a uma tensão, sofre uma deformação que é totalmente restaurada ao término da mesma.

O material viscoso linear é representado por um elemento amortecedor (Figura 2.10b) e é chamado de Newtoniano. Nesse tipo de material a taxa de deformação ($\dot{\varepsilon}$) é função da tensão (σ) e pode ser escrita como:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.16)$$

onde η é o coeficiente de viscosidade ou constante de amortecimento do material.

O modelo de Saint-Venant (Figura 2.10c), representado por um elemento de atrito, é a idealização de um material perfeitamente plástico. A deformação ocorre quando a tensão no material atinge a tensão de escoamento ($\sigma = \sigma_Y$).

A combinação desses modelos básicos permite representar com maior precisão materiais mais complexos, com características de ambos os modelos (materiais viscoelásticos, elastoplásticos, viscoelastoplásticos, entre outros). Alguns dos modelos viscoelásticos mais usuais são descritos a seguir.

2.3.3.2 Modelo de Maxwell

O modelo de Maxwell (Figura 2.11) é formado pela associação em série de um elemento amortecedor e um elemento de mola. Nesse tipo de arranjo, as tensões dos elementos são iguais (equação de equilíbrio) enquanto que a deformação total corresponde à soma das deformações de cada elemento (equação de compatibilidade). As equações constitutivas de cada elemento separadamente foram apresentadas na Seção 2.3.3.1.

Figura 2.11 – Modelo de Maxwell.



Fonte: Autor (2011).

As equações de equilíbrio e compatibilidade são mostradas abaixo:

1) Equação de equilíbrio: a tensão é igual em ambos os elementos:

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^v \quad (2.17)$$

onde σ^e é a tensão do elemento de mola, σ^v é a tensão no elemento amortecedor e σ é a tensão total do modelo.

2) Equação de compatibilidade: a deformação total é a soma da deformação do elemento de mola (ε^e) com a deformação do elemento amortecedor (ε^v):

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \quad (2.18)$$

onde ε é a deformação total do modelo.

Para explicitar a Equação (2.18) em termos das tensões, é necessário derivar a equação em relação ao tempo, porque a tensão do elemento amortecedor está relacionada com a taxa de deformação viscosa (amortecedor). Logo:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.19)$$

É importante observar que se $E \rightarrow \infty$, então o modelo apresenta o comportamento de um material viscoso. Da mesma forma, se $\eta \rightarrow \infty$, o modelo reproduz o comportamento de um material elástico.

Resolvendo a Equação (2.19) para o teste de fluência ($\sigma(t) = \sigma_0$), cuja condição inicial é dada por $\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E}$, chega-se à seguinte solução:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t \quad (2.20)$$

Agora resolvendo a Equação (2.19) para o teste de relaxação ($\varepsilon(t) = \varepsilon_0$), cuja condição inicial é dada por $\sigma(0) = E\varepsilon_0$, chega-se em

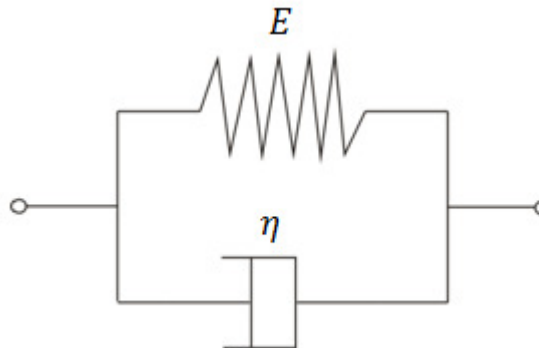
$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (2.21)$$

O modelo de Maxwell apresenta algumas restrições para representar situações reais. Por exemplo, esse modelo não possui deformação recuperável dependente do tempo e também não apresenta a taxa decrescente de deformação sob tensão constante que representa a fluência primária (FINDLEY *et al.*, 1976).

2.3.3.3 Modelos de Kelvin

O modelo de Kelvin (ou Voigt) (Figura 2.12) é formado pela associação em paralelo dos elementos de mola e amortecedor.

Figura 2.12 – Modelo de Kelvin.



Fonte: Autor (2011).

As equações de equilíbrio de compatibilidade são apresentadas abaixo:

1) Equação de compatibilidade: a deformação é igual em ambos os elementos:

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^v \quad (2.22)$$

2) Equação de equilíbrio: a tensão total é igual a soma da tensão no elemento de mola (σ^e) com a tensão no elemento de amortecedor (σ^v):

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v = E\varepsilon + \dot{\varepsilon}\eta \quad (2.23)$$

É importante observar que se $E \rightarrow 0$, então o modelo reproduz o comportamento de um material viscoso. Da mesma forma, se $\eta \rightarrow 0$, o modelo apresenta o comportamento de um material elástico.

Resolvendo a Equação (2.23) para o teste de fluência ($\sigma(t) = \sigma_0$), cuja condição inicial é dada por $\varepsilon(0) = 0$, chega-se à seguinte solução:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right) \quad (2.24)$$

O modelo de Kelvin para o teste de relaxação ($\varepsilon(t) = \varepsilon_0$) apresenta a seguinte solução:

$$\begin{aligned} \sigma &= \infty, & \text{para } t = 0 \\ \sigma &= E\varepsilon_0, & \text{para } t > 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

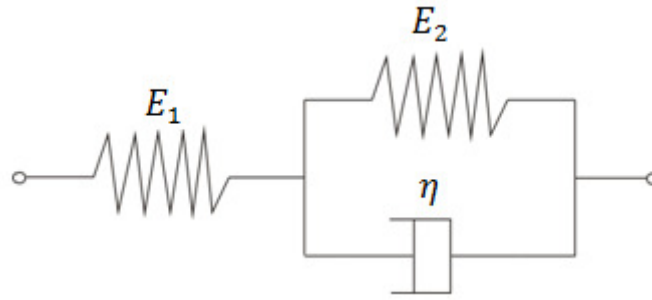
Segundo Findley *et al.* (1976), por causa do elemento viscoso, uma mudança abrupta na deformação só poderia ser realizada por uma tensão infinita.

O modelo de Kelvin ainda apresenta outras limitações como o fato de não exibir uma relaxação dependente do tempo, nem descreve a deformação permanente depois do descarregamento, assim como também não consegue representar uma deformação elástica inicial.

2.3.3.4 Modelo de Sólido Padrão

O modelo de sólido padrão é composto pela associação em série de um modelo de Hooke e um modelo de Kelvin (Figura 2.13).

Figura 2.13 – Modelo de Sólido Padrão.



Fonte: Autor (2011).

As equações desse modelo são:

1) Equação de compatibilidade: a deformação total é a soma da deformação no elemento de mola 1 (ε^{e1}) mais a deformação do elemento de Kelvin (ε^v):

$$\varepsilon = \varepsilon^{e1} + \varepsilon^v \quad (2.26)$$

2) Equação de equilíbrio: a tensão total (σ) é igual no elemento de mola 1 e no elemento Kelvin que por sua vez é a soma da tensão no elemento amortecedor (σ^v) mais a tensão no elemento de mola 2 (σ^{e2}):

$$\sigma = \sigma^{e1} = \sigma^{e2} + \sigma^v = E_2 \varepsilon^v + \dot{\varepsilon}^v \eta \quad (2.27)$$

Isolando o valor de ε^v da Equação (2.26) e inserindo na Equação (2.27), chega-se em:

$$(E_1 + E_2)\sigma + \eta\dot{\sigma} = \eta E_1 \dot{\varepsilon} + E_1 E_2 \varepsilon \quad (2.28)$$

Resolvendo a Equação (2.28) para o teste de fluência ($\sigma(t) = \sigma_0$), cuja condição inicial é dada por $\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_1}$, chega-se à seguinte solução:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\eta}} \right) \quad (2.29)$$

Resolvendo a Equação (2.28) para o teste de relaxação ($\varepsilon(t) = \varepsilon_0$), cuja condição inicial é dada por $\sigma(0) = E_1 \varepsilon_0$, chega-se em

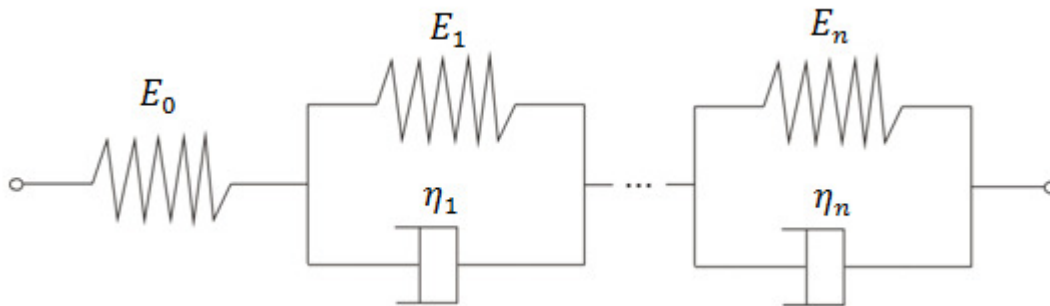
$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E_1 e^{-\frac{(E_1+E_2)}{\eta}t} + \varepsilon_0 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \left(1 - e^{-\frac{(E_1+E_2)}{\eta}t}\right) \quad (2.30)$$

O modelo de sólido padrão é um pouco mais completo que os modelos de Maxwell e de Kelvin. Esse modelo consegue representar uma deformação elástica inicial assim como a fluência primária. Entretanto, não é capaz de representar a fase de fluência secundária (GRAVINA, 1997).

2.3.3.5 Modelo de Kelvin Generalizado em Série

O modelo de Kelvin generalizado em série é composto pela associação de vários elementos Kelvin conectados em série (Figura 2.14).

Figura 2.14 – Modelo de Kelvin generalizado em série.



Fonte: Autor (2011).

As equações de equilíbrio e compatibilidade desse modelo são:

1) Equação de compatibilidade para cada elemento kelvin: a deformação de cada elemento Kelvin é igual no elemento de mola (ε_i^e) e de amortecedor (ε_i^v):

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e = \varepsilon_i^v \quad (2.31)$$

2) Equação de equilíbrio para cada elemento kelvin: a tensão em cada elemento Kelvin é a soma da tensão no elemento de mola (σ_i^e) mais a do elemento amortecedor (σ_i^v):

$$\sigma_i = \sigma_i^e + \sigma_i^v = E_i \varepsilon_i + \dot{\varepsilon}_i \eta_i \quad (2.32)$$

3) Equação de compatibilidade global: a deformação total é a soma das deformações em cada elemento Kelvin:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \quad (2.33)$$

4) Equação de equilíbrio global: as tensões são iguais em todos os elementos Kelvin:

$$\sigma = E_0 \varepsilon_0 = E_1 \varepsilon_1 + \dot{\varepsilon}_1 \eta_1 = \dots = E_n \varepsilon_n + \dot{\varepsilon}_n \eta_n \quad (2.34)$$

onde n é o número de elementos Kelvin.

O valor de ε_i vem da Equação (2.32) e, juntamente com a Equação (2.33), para o teste de fluência ($\sigma(t) = \sigma_0$), cujas condições iniciais são $\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_0}$ e $\dot{\varepsilon}(0) = \frac{\sigma_0}{\eta_1} + \frac{\sigma_0}{\eta_2}$, chega-se à seguinte solução:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_0}{E_i} \left(1 - e^{-\frac{E_i t}{\eta_i}} \right) \quad (2.35)$$

Nesse modelo de Kelvin generalizado foi adicionado um elemento de mola para conseguir representar a deformação elástica inicial. A equação para o teste de relaxação não é realizada por não ser de fácil solução como a equação para o teste de fluência.

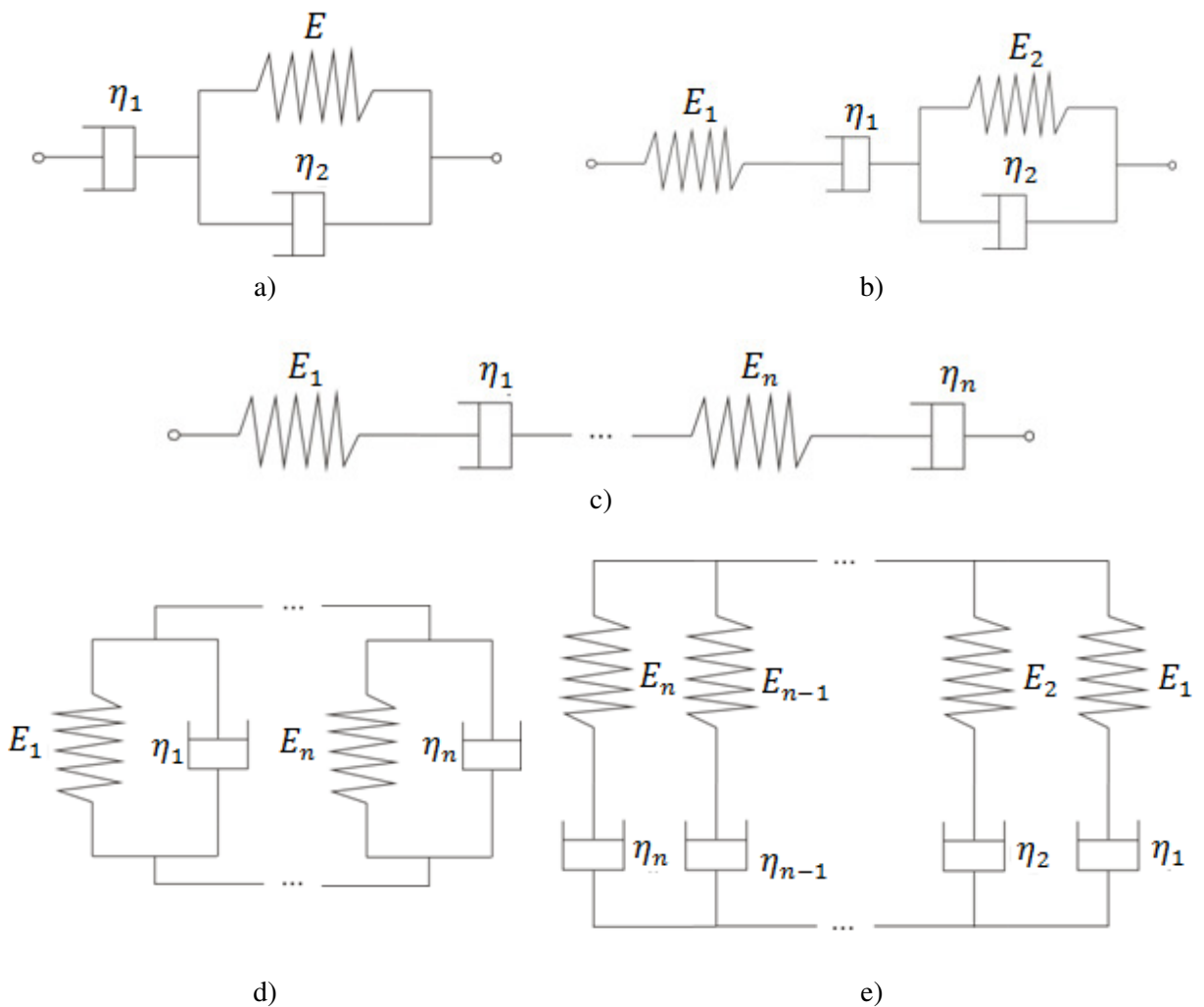
2.3.3.6 Outros modelos complexos

Os modelos de Maxwell e de Kelvin não representam com precisão o comportamento da maioria dos materiais viscoelásticos, conforme dito anteriormente. Por isso, esses modelos são combinados entre si e também com os modelos básicos para a construção de modelos mais complexos que permitam melhores resultados. Entre esses modelos estão o modelo de Sólido Padrão e Kelvin generalizado em série, ambos mostrados anteriormente, e os modelos Fluido Padrão, Burgers, Kelvin generalizado em paralelo e Maxwell generalizado em série e em paralelo.

O modelo de Fluido Padrão corresponde à associação em série de um modelo de Newton com um modelo de Kelvin (Figura 2.15a). O modelo de Burgers consiste na

associação em série de um modelo de Maxwell e de Kelvin (Figura 2.15b). O modelo de Maxwell generalizado em série consiste na associação em série de diversos modelos de Maxwell (Figura 2.15c). O modelo de Kelvin generalizado em paralelo consiste na associação em paralelo de vários modelos Kelvin (Figura 2.15d). Por fim, o modelo de Maxwell generalizado em paralelo consiste na associação de vários modelos de Maxwell em paralelo (Figura 2.15e).

Figura 2.15 – Modelos reológicos mais complexos: a) Modelo de fluido padrão; b) Modelo de Burgers; c) Modelo de Kelvin generalizado em paralelo; d) Modelo de Maxwell generalizado em série; e) Modelo de Maxwell generalizado em paralelo.



Fonte: Autor (2011).

2.3.4 Leis Empíricas

Os modelos empíricos consistem em equações matemáticas ajustadas para atender o comportamento de um determinado material. A característica que mais se destaca na grande

maioria das formulações empíricas em relação aos modelos reológicos é a dependência explícita da relação tensão-deformação com a temperatura.

A seguir são apresentadas algumas leis que são utilizadas para representar a fluência sob tensão uniaxial como a lei de Norton, Ludwik e Prandtl que podem ser encontradas em Shames e Cozzarelli (1997) e Findley *et al.* (1976). Outras leis (potencial, logarítmica e exponencial) com enfoque nos evaporitos também são apresentadas e são baseadas nos trabalhos de Costa (1984), Gravina (1997), Botelho (2008) e Costa e Poiate (2008).

2.3.4.1 Lei de Norton

A lei de Norton tem sido empregada na análise da fluência em metais e é usada para descrever a fluência secundária. Essa lei pode ser escrita como

$$\varepsilon(t) = A\sigma^N t \quad (2.36)$$

onde A e N são constantes empíricas. Se o valor de N for par, essa lei não permite deformações negativas. Para contornar essa situação, a equação é reescrita de forma alternativa como

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{|\sigma|}{\lambda_c}\right)^N \text{sign}(\sigma)t \quad (2.37)$$

onde λ_c e N são parâmetros empíricos e $\text{sign}(\sigma)$ corresponde ao sinal da tensão.

2.3.4.2 Lei de Ludwik

A lei de Ludwik é uma equação exponencial também utilizada para modelar a fluência secundária sob tensão constante e pode ser escrita por:

$$\varepsilon(t) = B e^{a\sigma t} \quad (2.38)$$

onde B e a são constantes empíricas.

2.3.4.3 Lei de Prandtl–Nadai

A lei de Prandtl-Nadai utiliza a função seno hiperbólico para descrever a fluência secundária. Ela é dada pela seguinte equação:

$$\varepsilon(t) = D \sinh(A\sigma)t \quad (2.39)$$

onde D e A são constantes empíricas. Essa equação representa um comportamento próximo ao linear para pequenas tensões e não linear para tensões elevadas. Ela é adequada para descrever a fluência secundária de metais sob tensões constantes e temperaturas onde a taxa de deformação é bem pequena.

2.3.4.4 Lei Potencial

A equação que representa a lei empírica potencial, que é utilizada usualmente para representar a fluência primária dos metais, pode ser escrita como

$$\varepsilon(t) = Bt^M \quad , 0 < M < 1, \quad (2.40)$$

onde B e M são constantes empíricas determinadas experimentalmente.

A constante B depende de algumas condições particulares do ensaio, como tensão e temperatura. Assim, a Equação (2.40) pode ser escrita de forma diferente, utilizada para representar o comportamento de fluência das rochas evaporíticas, na forma

$$\varepsilon(t) = A\sigma^a T^b t^d \quad (2.41)$$

onde

- σ - Tensão equivalente;
- t - Tempo;
- T - Temperatura;
- A, a, b, d - Constantes empíricas determinadas experimentalmente.

A Equação (2.41), apesar de apresentar explicitamente a temperatura e a tensão, admite apenas tensões e temperaturas constantes. Essa lei potencial ainda apresenta dois inconvenientes: a) a velocidade de deformação torna-se infinita quando a variável tempo t tende a zero; b) quando t é muito grande, a velocidade de deformação tende a zero, ou seja, a curva de fluência é assíntota com a horizontal. Esses dois inconvenientes acontecem porque o valor da constante c varia entre os valores de 0,3 e 0,5.

2.3.4.5 Lei Logarítmica

A lei empírica logarítmica também é utilizada usualmente para representar a fluência primária dos metais. Sua equação é dada por

$$\varepsilon(t) = B \ln(t) \quad (2.42)$$

onde B é uma constante empírica determinada experimentalmente. Da mesma forma que a lei potencial, a constante B depende de algumas condições particulares do ensaio, como tensão e temperatura

A Equação (2.42) pode ser escrita apresentando a temperatura e tensão de forma explícita, representando a fluência primária das rochas, no formato

$$\varepsilon(t) = A\sigma^b \ln(t) T^a \quad (2.43)$$

onde

- σ - Tensão equivalente;
- t - Tempo;
- T - Temperatura;
- A, a, b - Constantes empíricas determinadas experimentalmente.

A Equação (2.43) também admite apenas tensões e temperaturas constantes. Da mesma forma que a lei potencial, essa lei tem como inconveniente o fato da velocidade de deformação tornar-se infinita quando a variável tempo t tende a zero. Para contornar esse problema, algumas modificações podem ser realizadas na Equação (2.42), a exemplo de

$$\varepsilon(t) = A \ln(1 + bt) \quad (2.44)$$

ou ainda

$$\varepsilon(t) = A \ln((1 + bt)^d - 1) \quad (2.45)$$

sendo b e d outras constantes obtidas experimentalmente.

Essa lei apresenta bons resultados a baixas temperaturas e curtos períodos de tempo.

2.3.4.6 Lei Exponencial

A equação que representa a lei empírica exponencial, que também é função da tensão e da temperatura, pode ser escrita como

$$\varepsilon(t) = A \sigma^a t^d e^{-\frac{b}{T}} \quad (2.46)$$

onde

- σ - Tensão equivalente;
- t - Tempo;
- T - Temperatura;
- A, a, b, d - Constantes empíricas determinadas experimentalmente.

Essa lei geralmente é utilizada para modelar o comportamento de fluência dos evaporitos em altas temperaturas.

2.3.4.7 Outras leis

Souza Neto *et al.* (2008) apresentam em seu trabalho uma forma geral de descrever as funções utilizadas para representar a fluência. Assume-se que a taxa de deformação por fluência é função da tensão, tempo e temperatura, podendo ser expressa por

$$\dot{\varepsilon}(\sigma, t, T) = f_{\sigma}(\sigma) f_t(t) f_T(T) \quad (2.47)$$

onde f_σ , f_t e f_T são funções determinadas experimentalmente. A função f_T , por exemplo, poderia ser a função de Arrhenius, definida por

$$f_T(T) = D e^{-\frac{Q_a}{RT}} \quad (2.48)$$

onde D é uma constante empírica, Q_a é a energia de ativação, T é a temperatura e R é a constante dos gases.

As funções f_σ e f_t podem ser, por exemplo, as equações das leis de Norton, Ludwik, Prandtl, potencial, logarítmica e exponencial, apresentadas nesta seção.

2.3.5 Leis de Fluência Associadas a Processos Físicos

As rochas salinas apresentam características peculiares em sua microestrutura que afetam o fenômeno de fluência. Segundo Costa e Poiate (2008), no processo de formação dessas rochas, frequentemente desenvolvem-se defeitos e imperfeições nos retículos cristalinos, resultando em zonas de fraquezas que controlam o mecanismo de deformação através de deslocamentos nesses defeitos cristalinos. Esse mecanismo consiste, em essência, na redistribuição de átomos nas estruturas cristalinas, em busca de equilíbrio ótimo das forças interatômicas, perturbadas originalmente pela presença dos defeitos, imperfeições ou assimetrias no retículo cristalino. A migração dos átomos provoca uma reorganização na estrutura cristalina que envolve a mudança da forma dos cristais e progressivamente dos agregados granulares da rocha salina. A fluência, portanto, é causada por diferentes mecanismos físicos correlacionados a estrutura interna dos agregados policristalinos e às variáveis de estado como a pressão e temperatura.

A partir do início da década de 90, leis constitutivas de fluência, baseadas em mecanismos de deformação, passaram a ser recomendadas pela literatura técnica internacional, por representarem o comportamento intrínseco do material (MUNSON *et al.*, 1989 *apud* COSTA e POIATE, 2008, p. 366).

Um estudo mais detalhado sobre as leis de fluência associadas a processos físicos pode ser encontrado em Costa e Poiate (2008), Cella (2003) e em Botelho (2008).

Leis que incorporam as parcelas referentes aos mecanismos de deformação foram estudadas por Munson e Devries (1991 *apud* COSTA e POIATE, 2008, p. 366), incorporando alguns mecanismos (COSTA e POIATE, 2008) na equação de fluência que são baseados na

microestrutura cristalina do sal. Esses mecanismos são influenciados quando submetidos a diferentes níveis de tensão e temperatura.

Poiate *et al.* (2006) analisaram rochas salinas de acordo com o comportamento elástico/viscoelástico através de uma lei constitutiva formada por um duplo mecanismo de deformação, dada por

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 \left(\frac{\sigma_{ef}}{\sigma_0} \right)^n e^{\left(\frac{Q_a}{RT_0} - \frac{Q_a}{RT} \right)} \quad (2.49)$$

As variáveis da Equação (2.49) são apresentadas na Tabela 2.2. O valor do coeficiente n é definido por:

$$n = \begin{cases} n_1, \sigma_{ef} \leq \sigma_0 \\ n_2, \sigma_{ef} > \sigma_0 \end{cases} \quad (2.50)$$

O termo exponencial da Equação (2.49) é conhecido como fator de ativação térmica e é um fator multiplicativo da velocidade de deformação de referência. Os valores de ε_0 , σ_0 , n_1 e n_2 são obtidos em ensaios de laboratório.

Tabela 2.2 – Descrição das variáveis da Equação (2.49).

Variável	Descrição da variável
$\dot{\varepsilon}$	Taxa de deformação de fluência na condição de regime permanente
$\dot{\varepsilon}_0$	Taxa de deformação de referência de fluência no estado permanente
σ_{ef}	Tensão efetiva de fluência
σ_0	Tensão efetiva de referência
Q_a	Energia de ativação (kcal/mol): $Q_a = 12 \text{ kcal/mol}$
R	Constante universal dos gases (kcal/mol.K): $R = 1,9858 \times 10^{-3} \text{ kcal/mol.K}$
T_0	Temperatura de referência (K)
T	Temperatura da rocha (K)
n	Coeficiente que depende do nível de tensões aplicadas

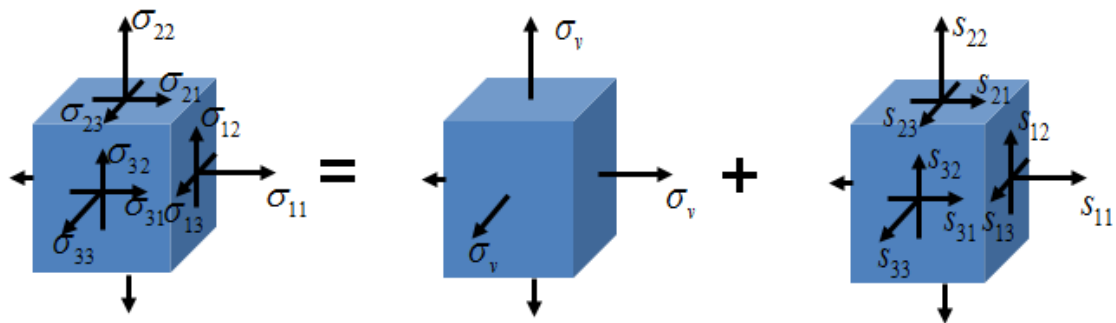
Fonte: Poiate *et al.* (2006).

2.3.6 Viscoelasticidade para o Estado Multiaxial de Tensões

As seções anteriores apresentaram diversas leis e modelos matemáticos uniaxiais para o estudo da viscoelasticidade. Para expandir o uso dessas equações para o estado tridimensional de tensões, algumas definições são apresentadas para que seja possível a utilização dessas equações na formulação em elementos finitos.

Muitas vezes é comum separar o estado de tensão em um estado desviador e outro volumétrico (Figura 2.16). Essa separação é importante porque muitos materiais podem apresentar um comportamento viscoelástico na parcela desviadora e um comportamento elástico na parcela volumétrica. As rochas salinas, por exemplo, mesmo quando submetidas a uma tensão desviadora constante, tende a se deformar ao longo do tempo, o que torna necessária essa separação.

Figura 2.16 – Estado de tensão volumétrico e desviador.



Fonte: Autor (2011).

Assim, em notação indicial, tem-se que

$$\sigma_{ij} = \sigma_v \delta_{ij} + s_{ij} \quad (2.51)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões, σ_v é a tensão volumétrica e s_{ij} é o tensor desviador.

Portanto, os tensores volumétrico e desviador são

$$(\sigma_v)_{ij} = \sigma_v \delta_{ij} \quad (2.52)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - (\sigma_v)_{ij} \quad (2.53)$$

onde

$$\sigma_v = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad (2.54)$$

Da mesma forma que o tensor de tensões, o tensor de deformação também pode ser dividido em um tensor desviador e outro volumétrico. Essa divisão é representada, em notação indicial, por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_v \delta_{ij} + e_{ij} \quad (2.55)$$

onde ε_{ij} é o tensor de deformações, ε_v é a deformação volumétrica e e_{ij} é o tensor desviador de deformação.

Portanto, os tensores volumétrico e desviador de deformações são

$$(\varepsilon_v)_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_v \delta_{ij} \quad (2.56)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (\varepsilon_v)_{ij} \quad (2.57)$$

onde:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{kk} \quad (2.58)$$

A tensão equivalente de von Mises é definida por

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (2.59)$$

onde s_{ij} é o tensor das tensões desviadoras.

A deformação equivalente ou deformação efetiva de fluência é definida por

$$\varepsilon_d = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}} \quad (2.60)$$

onde e_{ij} é a parcela desviadora do tensor de deformação. Para um ensaio triaxial não drenado, onde a deformação volumétrica é nula, a Equação (2.60) resulta na deformação axial do corpo de prova.

A partir dessas definições, pode-se fazer a extensão das equações unidimensionais para o estado tridimensional, através da seguinte equação (RAMOS, 1999):

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^v = \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_v^v \delta_{ij} + \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\varepsilon}_d^v \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ij}s_{ij}}} \quad (2.61)$$

onde $\dot{\varepsilon}_v^v$ é a taxa de deformação viscosa volumétrica e $\dot{\varepsilon}_d^v$ é a taxa de deformação viscosa desviadora para as condições unidimensionais.

A Equação (2.61) pode ser usada para avaliar a taxa de deformação de fluência das rochas salinas. Nessas rochas, a deformação volumétrica é considerada nula e a deformação viscosa é dada apenas pela parcela desviadora. A taxa da deformação desviadora ($\dot{\varepsilon}_d^v$), por exemplo, pode se calculada pela Equação (2.60).

No caso dos modelos reológicos, para o calculo da taxa de deformação viscosa, são utilizadas as Equações (2.33) e (2.34) do modelo de Kelvin generalizado em série, que resulta na seguinte equação:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^v = \sum_{p=1}^n \frac{\sigma_{ij} - E_p(\varepsilon_{ij}^v)_p}{\eta_p} \quad (2.62)$$

A taxa de deformação viscosa da Equação (2.62) é utilizada para verificar a implementação realizada em elementos finitos, uma vez que para os modelos reológicos é possível fazer uma comparação entre a solução numérica e a solução analítica, o que não acontece quando se utiliza a Equação (2.61) que pode envolver leis que caracterizam um problema de viscoelasticidade não linear.

3 FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS E ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Como citado anteriormente, os problemas que envolvem o fenômeno da viscoelasticidade podem sofrer grande influência da temperatura. Neste sentido, as análises desses problemas devem combinar as duas teorias (viscoelasticidade e transferência de calor) para produzir resultados coerentes. O Método dos Elementos Finitos (MEF) (BATHE, 1996) é um método numérico consagrado entre os pesquisadores porque vem apresentando resultados satisfatórios ao longo dos anos nas duas teorias supracitadas, sendo, portanto, adotado neste trabalho.

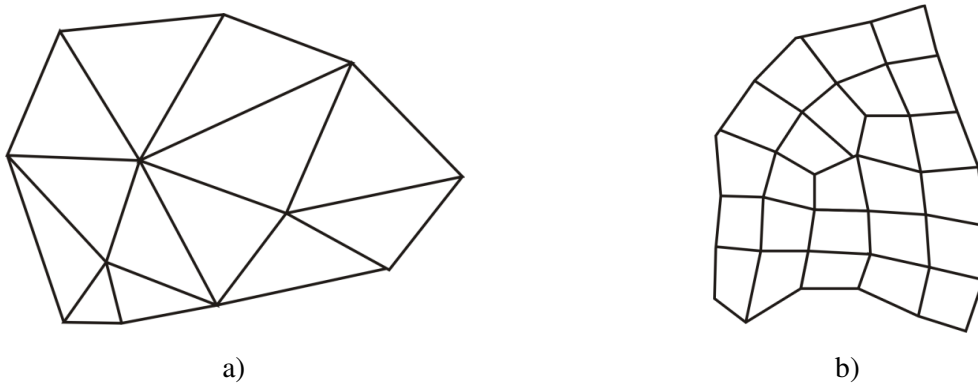
Este capítulo apresenta a discretização do problema mecânico em elementos finitos, bem como a discretização dos problemas de transferência de calor e a consideração da viscoelasticidade. É apresentada uma breve descrição do método, a integração no tempo desses dois fenômenos e alguns aspectos computacionais.

3.1 Método dos Elementos Finitos

A maioria dos problemas encontrados em diversas áreas, incluindo a Engenharia, é regida por equações diferenciais que em geral são praticamente impossíveis de serem resolvidas por métodos analíticos clássicos. O MEF consiste na discretização de um meio contínuo em pequenos subdomínios (elementos), mantendo as mesmas propriedades do meio original, de forma que o comportamento do campo em cada elemento (deslocamentos, temperatura etc.) seja aproximado por uma função de interpolação. A solução da equação diferencial do problema é, então, resolvida de forma aproximada através de uma simulação numérica.

Os domínios bidimensionais podem ser divididos, por exemplo, em triângulos ou em quadriláteros (Figura 3.1). Neste trabalho são utilizados elementos quadriláteros. A solução do problema através do MEF é aproximada. O erro dessa resposta pode ser reduzido através de um aumento do grau do polinômio utilizado para aproximar o campo em questão ou através do refinamento da malha utilizada para analisar o problema, o que ocasiona um aumento no processamento. Cabe ao usuário/analista observar o erro e verificar se a resposta é satisfatória, verificando a viabilidade de um aumento de processamento para a redução desse erro.

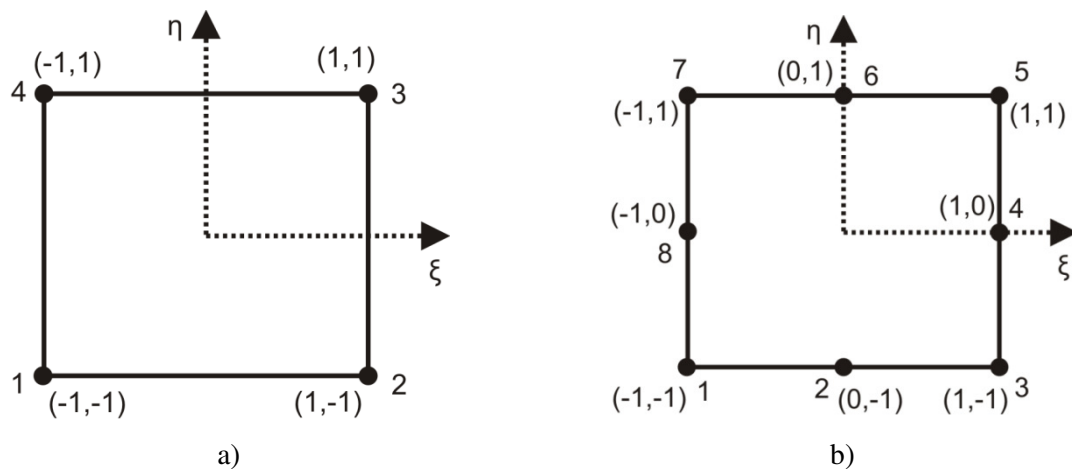
Figura 3.1 – Elementos finitos: a) triangulares; b) quadrilaterais.



Fonte: Autor (2011).

Os elementos utilizados neste trabalho são os isoparamétricos quadrilaterais de quatro (Q4) e oito (Q8) nós para interpolação da geometria e da grandeza (deslocamento ou temperatura) (Figura 3.2). Para os elementos Q4 são utilizadas funções de interpolação lineares e para os elementos Q8 são utilizadas funções quadráticas.

Figura 3.2 – Elementos isoparamétricos quadrilaterais: a) Quatro nós; b) Oito nós.



Fonte: Autor (2011).

3.2 Formulação do Problema Térmico por Resíduos Ponderados

Na formulação do problema térmico, considera-se que a equação governante seja atendida em todo o domínio Ω :

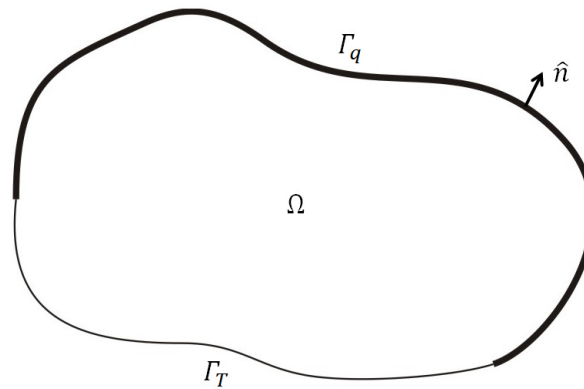
$$Q + k(T_{,xx} + T_{,yy}) = c\rho\dot{T} \text{ em } \Omega \quad (3.1)$$

A formulação do problema térmico é realizada utilizando o Método dos Resíduos Ponderados, que pode ser encontrado, por exemplo, em Zienkiewicz e Taylor (2000). As seguintes condições de contorno são consideradas para o problema térmico, mas cada uma em porções distintas do contorno (Figura 3.3):

- $T = \bar{T}$ em Γ_T (prescrição de temperatura)
- $-q_x \hat{n}_x - q_y \hat{n}_y = \bar{q}_c$ em Γ_q (prescrição de fluxo de calor)

onde $\Gamma = \Gamma_T + \Gamma_q$ e $\Gamma_T \cap \Gamma_q = \emptyset$.

Figura 3.3 – Domínio e divisão do contorno.



Fonte: Autor (2011).

Garantindo as condições de contorno em Γ_T e atendendo o resíduo da Equação (3.1) e da prescrição de fluxo de calor de forma ponderada, utilizando notação indicial, tem-se

$$\int_{\Omega} W(q_{i,i} - Q + c\rho\dot{T}) d\Omega + \int_{\Gamma_q} W(-q_i \hat{n}_i - \bar{q}_c) d\Gamma = 0 \quad (3.2)$$

sendo W a função ponderadora.

Utilizando a regra da cadeia na primeira parcela da primeira integral, tem-se

$$\int_{\Omega} W q_{i,i} d\Omega = \int_{\Omega} (W q_i)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} W_{,i} q_i d\Omega \quad (3.3)$$

Aplicando o teorema de Gauss na primeira integral do lado direito da Equação (3.3):

$$\int_{\Omega} (W q_i)_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} W q_i \hat{n}_i d\Gamma = \int_{\Gamma_T} W q_i \hat{n}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_q} W q_i \hat{n}_i d\Gamma \quad (3.4)$$

Logo a Equação (3.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} W q_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma_T} W q_i \hat{n}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_q} W q_i \hat{n}_i d\Gamma - \int_{\Omega} W_{,i} q_i d\Omega \quad (3.5)$$

Substituindo a equação Equação (3.5) na Equação (3.2):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_T} W q_i \hat{n}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_q} W q_i \hat{n}_i d\Gamma - \int_{\Omega} W_{,i} q_i d\Omega - \int_{\Omega} W Q d\Omega + \int_{\Omega} W c \rho \dot{T} d\Omega \\ - \int_{\Gamma_q} W q_i \hat{n}_i d\Gamma - \int_{\Gamma_q} W \bar{q}_c d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Observa-se que o segundo e o sexto termo da Equação (3.6) se anulam, e como $W = 0$ em Γ_T a primeira integral é igual a zero, resultando em:

$$- \int_{\Omega} W_{,i} q_i d\Omega - \int_{\Omega} W Q d\Omega + \int_{\Omega} W c \rho \dot{T} d\Omega - \int_{\Gamma_q} W \bar{q}_c d\Gamma = 0 \quad (3.7)$$

Ajustando a Equação (3.7):

$$- \int_{\Omega} W_{,i} q_i d\Omega + \int_{\Omega} W c \rho \dot{T} d\Omega = \int_{\Omega} W Q d\Omega + \int_{\Gamma_q} W \bar{q}_c d\Gamma \quad (3.8)$$

A Equação (3.8) é a forma fraca do problema de condução de calor transiente, que é utilizada na discretização do problema em Elementos Finitos.

3.3 Discretização do Problema de Condução de Calor em Elementos Finitos

A formulação em resíduos ponderados utilizados na Seção 3.2 é a forma fraca do método de Galerkin, onde as funções ponderadoras são iguais as funções interpoladoras, que por sua vez são as funções de forma $W = N_T$. Na discretização do problema térmico, o campo de temperatura é aproximado através das funções interpoladoras e das temperaturas nodais da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}_T \mathbf{T}_N \quad (3.9)$$

onde

\mathbf{N}_T - Funções de interpolação ou funções de forma para o problema térmico;

\mathbf{T}_N - Temperatura nodal.

Para o problema de condução de calor é necessário o cálculo do vetor gradiente de temperatura. Esse vetor, calculado através das derivadas do campo de temperatura, é dado por

$$\partial \mathbf{T} = \mathbf{B}_T \mathbf{T}_N \quad (3.10)$$

onde \mathbf{B}_T é matriz das derivadas das funções de forma para o problema térmico.

O vetor gradiente de temperatura é utilizado para calcular o fluxo de calor através da lei de Fourier. O fluxo de calor, portanto, é dado de forma matricial por

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K}_T \partial \mathbf{T} = -\mathbf{K}_T \mathbf{B}_T \mathbf{T}_N \quad (3.11)$$

onde

\mathbf{K}_T - Matriz de condutividade térmica;

\mathbf{T}_N - Temperatura nodal.

A discretização do problema de condução de calor é realizada substituindo as Equações (3.9), (3.10) e (3.11) na Equação (3.8), resultando em

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}_T^T \mathbf{K}_T \mathbf{B}_T \mathbf{T}_N d\Omega + \int_{\Omega} c\rho \mathbf{N}_T^T \mathbf{N}_T \dot{\mathbf{T}}_N d\Omega = \int_{\Omega} Q \mathbf{N}_T^T d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_T^T \bar{q}_c d\Gamma \quad (3.12)$$

Simplificando a equação acima, tem-se

$$\mathbf{K}_T \mathbf{T}_N + \mathbf{C} \dot{\mathbf{T}}_N = \mathbf{R} \quad (3.13)$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_T &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_T^T \mathbf{K}_T \mathbf{B}_T d\Omega && - \text{Matriz de condutividade térmica;} \\
\mathbf{C} &= \int_{\Omega} c\rho \mathbf{N}_T^T \mathbf{N}_T d\Omega && - \text{Matriz capacitância;} \\
\mathbf{R} &= \int_{\Omega} Q \mathbf{N}_T^T d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_T^T \bar{q}_c d\Gamma && - \text{Vetor constituído de calor interno e de fluxo de calor.}
\end{aligned}$$

Para a análise de um problema térmico estacionário, basta eliminar o segundo produto matricial a esquerda da igualdade na Equação (3.13).

3.4 Discretização do Problema Mecânico em Elementos Finitos

Neste trabalho é utilizada a formulação do problema mecânico em deslocamentos através do MEF. Nessa formulação, o campo de deslocamento é aproximado através de funções interpoladoras da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}_N \quad (3.14)$$

onde:

- \mathbf{N} - Funções de interpolação ou funções de forma;
- \mathbf{u}_N - Vetor de deslocamentos nodais.

A partir dos deslocamentos é possível calcular as deformações através da seguinte equação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}_N \quad (3.15)$$

onde \mathbf{B} é a matriz que relaciona os deslocamentos com deformações e é composta das derivadas das funções de forma.

Aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), que considera a igualdade do trabalho virtual das forças internas com o trabalho virtual das forças externas devido a um deslocamento virtual, pode-se dizer que

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (3.16)$$

O trabalho virtual das forças internas é calculado a partir das tensões e das deformações que ocorrem em um corpo ao se dar o deslocamento virtual. Esse trabalho é dado por

$$\delta W_{int} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.17)$$

onde $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ é o vetor de deformações virtuais.

O trabalho virtual das forças externas é obtido através das forças externas com os correspondentes deslocamentos virtuais na forma

$$\delta W_{ext} = \int_V \delta \mathbf{u}_N^T \mathbf{f}_v dV + \int_S \delta \mathbf{u}_N^T \mathbf{f}_S dS + \sum \delta \mathbf{u}_N^T \mathbf{f}_c \quad (3.18)$$

onde

$\delta \mathbf{u}_N$ - Vetor de deslocamentos nodais virtuais;

\mathbf{f}_v - Vetor de forças de volume;

\mathbf{f}_S - Vetor de forças de superfície;

\mathbf{f}_c - Vetor de forças concentradas.

Utilizando a Equação (3.15) em termos dos deslocamentos ($\delta \mathbf{u}_N$) e deformações ($\delta \boldsymbol{\varepsilon}$) virtuais, tem-se

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u}_N \quad (3.19)$$

Resgatando a Equação (3.16) e substituindo as Equações (3.17), (3.18) e (3.19) em nível de elemento, sendo necessária a contribuição de todos esses elementos, tem-se

$$\sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \delta \mathbf{u}_N^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \delta \mathbf{u}_N^T \mathbf{f}_v dV + \sum_{i=1}^{NE} \int_{S_e} \delta \mathbf{u}_N^T \mathbf{f}_S dS + \sum_{i=1}^{NE} \delta \mathbf{u}_N^T \mathbf{f}_c \quad (3.20)$$

onde NE é o número de elementos da estrutura.

Sendo assim, eliminando o deslocamento virtual em ambos os lados da Equação (3.20), pode-se deduzir que

$$\sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{f} \quad (3.21)$$

onde \mathbf{f} é o vetor contendo todas as forças externas que estão ao lado direito da igualdade da Equação (3.20).

3.5 Acoplamento Termomecânico Fraco e Consideração da Viscoelasticidade

Formulações em Elementos Finitos para materiais que consideram o efeito viscoso já vêm sendo abordada ao longo dos anos como se pode ver em Fonseca (1986), Masuero (1992), Ramos (1999) e Oliveira (2004). Nesses trabalhos, a deformação total é calculada através da soma de uma deformação elástica com uma deformação viscosa. Em geral, o cálculo dessa deformação viscosa é realizado através de modelos reológicos e leis empíricas.

A seguir é apresentada a consideração da viscoelasticidade e também da temperatura na formulação do problema mecânico. Como dito anteriormente, o acoplamento é denominado fraco porque a temperatura influencia na deformação da estrutura e o contrário não acontece. Assim, considerando que a deformação total é composta por uma parcela elástica, uma viscosa e uma térmica, pode-se escrever que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^v + \boldsymbol{\varepsilon}^T \quad (3.22)$$

A relação constitutiva de um material elástico é dada por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (3.23)$$

onde \mathbf{D} é a matriz constitutiva elástica do material e $\boldsymbol{\sigma}_0$ são as tensões iniciais.

Adicionando a Equação (3.22) na Equação (3.23), resulta em

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^v - \boldsymbol{\varepsilon}^T) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (3.24)$$

Resgatando a Equação (3.21) e inserindo a Equação (3.24), tem-se que

$$\sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \mathbf{f} + \sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^v dV + \sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^T dV - \sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV \quad (3.25)$$

Substituindo a Equação (3.15) na equação acima, resulta em:

$$\sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}_N dV = \mathbf{f} + \sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^v dV + \sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^T dV - \sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV \quad (3.26)$$

ou

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^v dV + \sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^T dV - \sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV \quad (3.27)$$

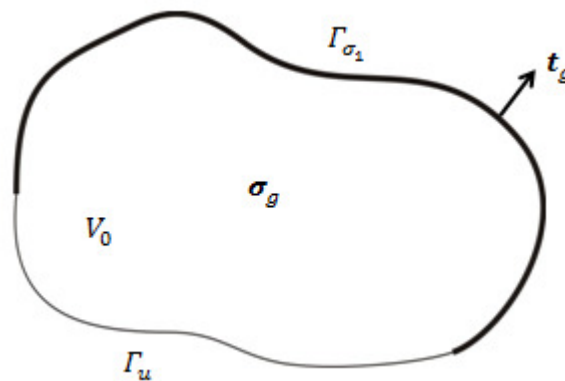
onde

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{NE} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV - \text{matriz de rigidez da estrutura.}$$

3.6 Estado Inicial de Tensões e Consideração da Escavação

Nos problemas que envolvem escavações, como os que são apresentados neste trabalho, considera-se um maciço que está inicialmente em equilíbrio através de uma tensão geostática (Figura 3.4).

Figura 3.4 – Maciço em equilíbrio.



Fonte: Autor (2011).

Nessa figura, as condições de contorno de deslocamento e de tensões são consideradas em porções distintas desse contorno, onde $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_{\sigma_1}$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_{\sigma_1} = 0$. Partindo da Equação (3.21), o equilíbrio desse maciço é representado pela seguinte equação:

$$\int_{V_0} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_g dV = \int_{\Gamma_{\sigma_1}} \mathbf{t}_g d\Gamma \quad (3.28)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_g$ são as tensões geostáticas e \mathbf{t}_g é a tensão no contorno.

As tensões dos problemas de escavação são medidas em relação às tensões iniciais, como já apresentados na Equação (3.24), da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^v - \boldsymbol{\varepsilon}^T) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (3.29)$$

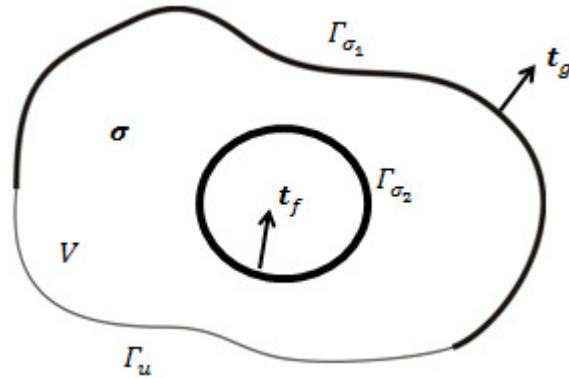
Para os problemas de escavação, consideram-se as tensões iniciais como sendo as tensões geostáticas ($\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}_g$).

O estado inicial de tensão é determinado através do peso próprio do solo e de um coeficiente de empuxo de terra. A tensão horizontal é assumida como sendo a tensão vertical (calculada a partir do peso próprio) multiplicada pelo coeficiente de empuxo de terra em repouso (K_0). A determinação de K_0 é bastante complexa uma vez que depende do tipo de solo e suas características e, sobretudo, da história de carregamento do maciço (FUJII, 1976).

Ainda segundo Fujii (1976), a importância no conhecimento desse estado de tensão inicial deve-se aos seguintes fatos: a) o processo de simulação de escavação adotado se baseia na retirada de cargas aplicadas ao longo do corte, e estas cargas são calculadas a partir do estado inicial de tensões; b) as leis constitutivas dos solos são função do estado de tensões do maciço. Assim, o erro introduzido na determinação das tensões iniciais irá afetar os resultados no restante da análise através de sua propagação em etapas subsequentes.

No momento em que esse maciço é escavado, o estado de tensões é alterado. Neste instante, uma força é aplicada na parede do furo (Figura 3.5). Neste trabalho, essa força é causada pelo fluido de perfuração.

Figura 3.5 – Maciço após a escavação.



Fonte: Autor (2011).

Após a escavação do maciço, para o problema de perfuração de poço, o novo estado de tensões pode ser escrito como:

$$\int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Gamma_{\sigma_1}} \mathbf{t}_g d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma_2}} \mathbf{t}_f d\Gamma \quad (3.30)$$

onde \mathbf{t}_f são as tensões no contorno do furo correspondente ao fluido de perfuração e \mathbf{t}_g são as tensões do contorno externo que estavam aplicadas antes da escavação.

Inserindo a equação das tensões (Equação (3.29)) na Equação (3.30) resulta em

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{\Gamma_{\sigma_1}} \mathbf{t}_g d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma_2}} \mathbf{t}_f d\Gamma + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^v dV + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^T dV - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_g dV \quad (3.31)$$

A última integral da Equação (3.31) considera as tensões geostáticas no novo domínio V . Essa integral pode ser escrita em relação ao contorno do problema (Γ_{σ_1} e Γ_{σ_2}), resultando em

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV = & \int_{\Gamma_{\sigma_1}} \mathbf{t}_g d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma_2}} \mathbf{t}_f d\Gamma + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^v dV + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^T dV \\ & - \left(\int_{\Gamma_{\sigma_1}} \mathbf{t}_g d\Gamma + \int_{\Gamma_{\sigma_2}} \mathbf{t}_{g'} d\Gamma \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde $\mathbf{t}_{g'}$ são tensões no contorno Γ_{σ_2} devido às tensões geostáticas.

A primeira e a quinta integral à direita da Equação (3.32) se anulam. Logo, tem-se que

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{\Gamma_{\sigma_2}} \mathbf{t}_f d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma_2}} \mathbf{t}_{g'} d\Gamma + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^v dV + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^T dV \quad (3.33)$$

onde a segunda integral à direita da equação representa a força de escavação relativa à perturbação no maciço devido à escavação.

Para a simulação desse problema de escavação, aplicam-se forças nodais no local do corte que sejam equivalentes às tensões que ali estavam antes da escavação no sentido da formação para o local escavado. A rigidez dos elementos que foram escavados é considerada nula. Neste trabalho essa rigidez não é anulada porque o maciço já é considerado escavado.

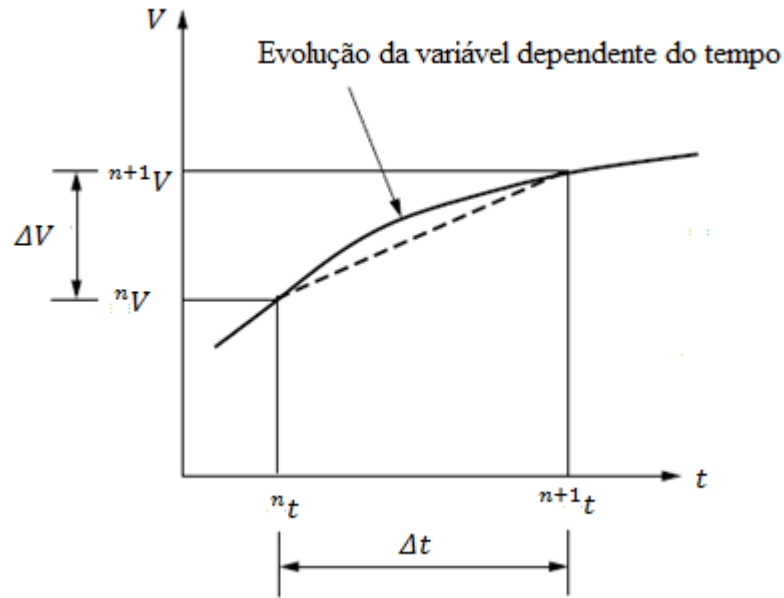
3.7 Integração no Tempo

As equações governantes dos problemas térmicos e viscoelásticos são constituídas de algumas variáveis que possuem dependência do tempo. Para a análise desses problemas através de métodos numéricos é necessário o emprego de alguma técnica de integração temporal.

O objetivo dessa integração é obter o valor da variável em um instante $n + 1$ dado o valor dessa variável no instante n , sendo Δt o intervalo de tempo. Considera-se, da mesma forma que Lewis *et al.* (2004), uma aproximação numérica utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF).

A Figura 3.6 mostra a evolução de uma variável qualquer (V) dependente do tempo entre os instantes n e $n + 1$. Neste trabalho, os instantes de tempo são apresentados sobrescritos e a esquerda da variável.

Figura 3.6 – Aproximação temporal de uma variável.



Fonte: Autor (2011).

Fazendo uma representação da variável no instante $n + 1$ por série de Taylor tem-se

$${}^{n+1}V = {}^nV + \Delta t \frac{d {}^nV}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 {}^nV}{dt^2} + \dots \quad (3.34)$$

Desprezando o termo de segunda ordem e os demais termos de ordem superior, resulta em:

$${}^{n+1}V \approx {}^nV + \Delta t \frac{d {}^nV}{dt} \quad (3.35)$$

Essa equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{{}^{n+1}V - {}^nV}{\Delta t} \approx \frac{d {}^nV}{dt} \quad (3.36)$$

Introduzindo um parâmetro escalar β , escolhido pelo usuário, na equação acima resulta na seguinte equação:

$$\frac{{}^{n+1}V - {}^nV}{\Delta t} \approx (1 - \beta) {}^n\dot{V} + \beta {}^{n+1}\dot{V} \quad (3.37)$$

A Tabela 3.1 apresenta valores de β para alguns métodos existentes.

Tabela 3.1 – Valores do parâmetro β .

β	Método
0	Método de Euler ou Diferenças Finitas Posteriores
1/2	Método de Crank – Nicholson ou Regra do Trapézio
2/3	Método de Galerkin
1	Diferenças Finitas Anteriores

Fonte: Cook *et al.* (1989).

Se $\beta = 0$, por exemplo, não há dependência do passo corrente, caracterizando um algoritmo totalmente explícito, ou seja, só depende do passo anterior. Algoritmos explícitos são condicionalmente estáveis requerendo um Δt menor do que um incremento crítico (Δt_{cr}). Como é realizada uma aproximação através do truncamento da série de Taylor, esse método torna a resposta aproximada, garantido apenas que a resposta seja próxima da resposta exata nas proximidades de t_n . Para que isso seja possível, o incremento no intervalo de tempo (Δt) deve ser pequeno.

Outros exemplos de algoritmos para integração no tempo podem ser encontrados em Zienkiewicz e Taylor (2000).

3.7.1 Integração no Tempo para o Problema Térmico

A seguir é apresentada uma forma de solução para o problema térmico transiente baseado em Cook *et al.* (1989).

Resgatando a Equação (3.13):

$$\mathbf{K}_T \mathbf{T}_N + \mathbf{C} \dot{\mathbf{T}}_N = \mathbf{R} \quad (3.38)$$

Escrevendo a Equação (3.38) para os instantes de tempo n e $n + 1$, e multiplicando a equação do instante n por $(1 - \beta)$ e por β no instante $n + 1$, resulta em

$$(1 - \beta)(\mathbf{K}_T {}^n \mathbf{T}_N + \mathbf{C} {}^n \dot{\mathbf{T}}_N) = (1 - \beta) {}^n \mathbf{R} \quad (3.39)$$

$$\beta(\mathbf{K}_T^{n+1}\mathbf{T}_N + \mathbf{C}^{n+1}\dot{\mathbf{T}}_N) = \beta^{n+1}\mathbf{R} \quad (3.40)$$

Somando os membros correspondentes das Equações (3.39) e (3.40), tem-se que

$$\mathbf{C}[(1 - \beta)^n \dot{\mathbf{T}}_N + \beta^{n+1} \dot{\mathbf{T}}_N] + \mathbf{K}_T[(1 - \beta)^n \mathbf{T}_N + \beta^{n+1} \mathbf{T}_N] = (1 - \beta)^n \mathbf{R} + \beta^{n+1} \mathbf{R} \quad (3.41)$$

Utilizando a Equação (3.37) para a variável temperatura e substituindo na Equação (3.41), tem-se

$$\mathbf{C} \left(\frac{{}^{n+1}\mathbf{T}_N - {}^n\mathbf{T}_N}{\Delta t} \right) + \mathbf{K}_T[(1 - \beta)^n \mathbf{T}_N + \beta^{n+1} \mathbf{T}_N] = (1 - \beta)^n \mathbf{R} + \beta^{n+1} \mathbf{R} \quad (3.42)$$

Rearranjando a Equação (3.42) chega-se em:

$$[\mathbf{C} + \beta \Delta t \mathbf{K}_T] {}^{n+1}\mathbf{T}_N = [\mathbf{C} - \Delta t(1 - \beta)\mathbf{K}_T] {}^n\mathbf{T}_N + \Delta t(1 - \beta)^n \mathbf{R} + \Delta t \beta^{n+1} \mathbf{R} \quad (3.43)$$

Se \mathbf{R} não depender do tempo, então $\mathbf{R} = {}^n\mathbf{R} = {}^{n+1}\mathbf{R}$, logo a Equação (3.43) se resume a:

$$[\mathbf{C} + \beta \Delta t \mathbf{K}_T] {}^{n+1}\mathbf{T}_N = [\mathbf{C} - \Delta t(1 - \beta)\mathbf{K}_T] {}^n\mathbf{T}_N + \Delta t \mathbf{R} \quad (3.44)$$

A partir dessa equação, as temperaturas são calculadas no instante de tempo $n + 1$ e com isso é possível calcular a deformação térmica também nesse instante, onde essa deformação é utilizada na Equação (3.33) para o cálculo dos deslocamentos. A deformação térmica no instante $n + 1$, portanto, é calculada por

$${}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}^T = {}^n\boldsymbol{\varepsilon}^T + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{N}_T^T \Delta T \quad (3.45)$$

onde ${}^n\boldsymbol{\varepsilon}^T$ é a deformação térmica do passo anterior, $\boldsymbol{\alpha}$ é um vetor composto pelo coeficiente de expansão térmica, \mathbf{N}_T^T é um vetor contendo as funções de forma e ΔT é um vetor composto pela diferença de temperatura entre os instantes n e $n + 1$.

3.7.2 Integração no Tempo para o Problema Viscoso

A formulação do problema mecânico, apresentada na Seção 3.5 para incorporar o efeito da viscoelasticidade, necessita do cálculo da deformação viscosa. Para esse cálculo faz-se o uso da Equação (3.37) que, em termos da deformação viscosa, é escrita por:

$$\frac{1}{\Delta t} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^v \approx (1 - \beta) {}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v + \beta {}^{n+1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v \quad (3.46)$$

Utilizando $\beta = 0$ tem-se o método puramente incremental de Euler, onde a variável desejada no instante de tempo $n + 1$ depende apenas do passo anterior. Neste trabalho adota-se esse método para o cálculo do incremento de deformação viscosa, resultando no seguinte incremento de deformação viscosa:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^v \approx \Delta t {}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v \quad (3.47)$$

A deformação viscosa em um determinado instante de tempo $n + 1$, utilizada para o cálculo dos deslocamentos na Equação (3.33), é dada por

$${}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}^v = {}^n \boldsymbol{\varepsilon}^v + \Delta t {}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v \quad (3.48)$$

3.8 Estado Plano de Tensão, Estado Plano de Deformação e Estado Axissimétrico

Devido a algumas características do problema analisado, para o caso de um material linear elástico e isotrópico, a matriz constitutiva é formada por apenas dois parâmetros elásticos (módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson). Dependendo de algumas características do problema, esse pode ser definido como Estado Plano de Tensões (EPT), Estado Plano de Deformações (EPD) ou Axissimétrico.

O estado plano de tensões ocorre em sólidos cujas dimensões em uma direção são muito pequenas. Nesse problema, a tensão é nula ao longo dessa direção. Um exemplo desse estado é uma chapa solicitada em seu plano médio, sem carregamento atuando perpendicularmente a ele (ASSAN, 2003).

Ainda segundo Assan (2003), o estado plano de deformação envolve problemas de corpos longos cuja geometria e estado de carregamento não mudam muito ao longo de seu

eixo longitudinal. Nesse caso, as variáveis dependem apenas das coordenadas das outras direções, admitindo-se que os deslocamentos na direção longitudinal são nulos. Alguns exemplos são os muros de contenção, barragem e tubos enterrados.

O problema axissimétrico é representado por uma seção transversal que, ao ser rotacionada em torno de um eixo, gera um sólido de revolução. Além disso, as condições de contorno e as forças externas também devem ser simétricas em relação ao eixo de rotação.

Para EPT a matriz constitutiva pode ser definida por

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Para EPD e problemas axissimétricos a matriz constitutiva pode ser definida por

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

As matrizes das Equações (3.49) e (3.50) estão escritas para uma convenção dos vetores de tensão, deformação e do vetor de expansão térmica da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \gamma_{12} \quad \varepsilon_{33}\} \quad (3.51)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \tau_{12} \quad \sigma_{33}\} \quad (3.52)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha \quad \alpha \quad 0 \quad \alpha\} \quad (3.53)$$

Maiores detalhes sobre o MEF podem ser encontrados em Cook *et al.* (1989), Zienkiewicz e Taylor (2000) e Bathe (1996).

3.9 Aspectos Computacionais

A implementação computacional foi desenvolvida no ambiente MATLAB (HANSELMAN e LITTLEFIELD, 2002). Esse ambiente foi escolhido devido à simplicidade a ao conjunto de bibliotecas matemáticas que possui.

A Figura 3.7 apresenta um diagrama com os módulos computacionais implementados. A entrada de dados é feita através de um arquivo de dados. Esse arquivo contém a descrição do problema necessária para a aplicação do MEF. Algumas características do problema são discutidas com mais detalhes no Capítulo 5.

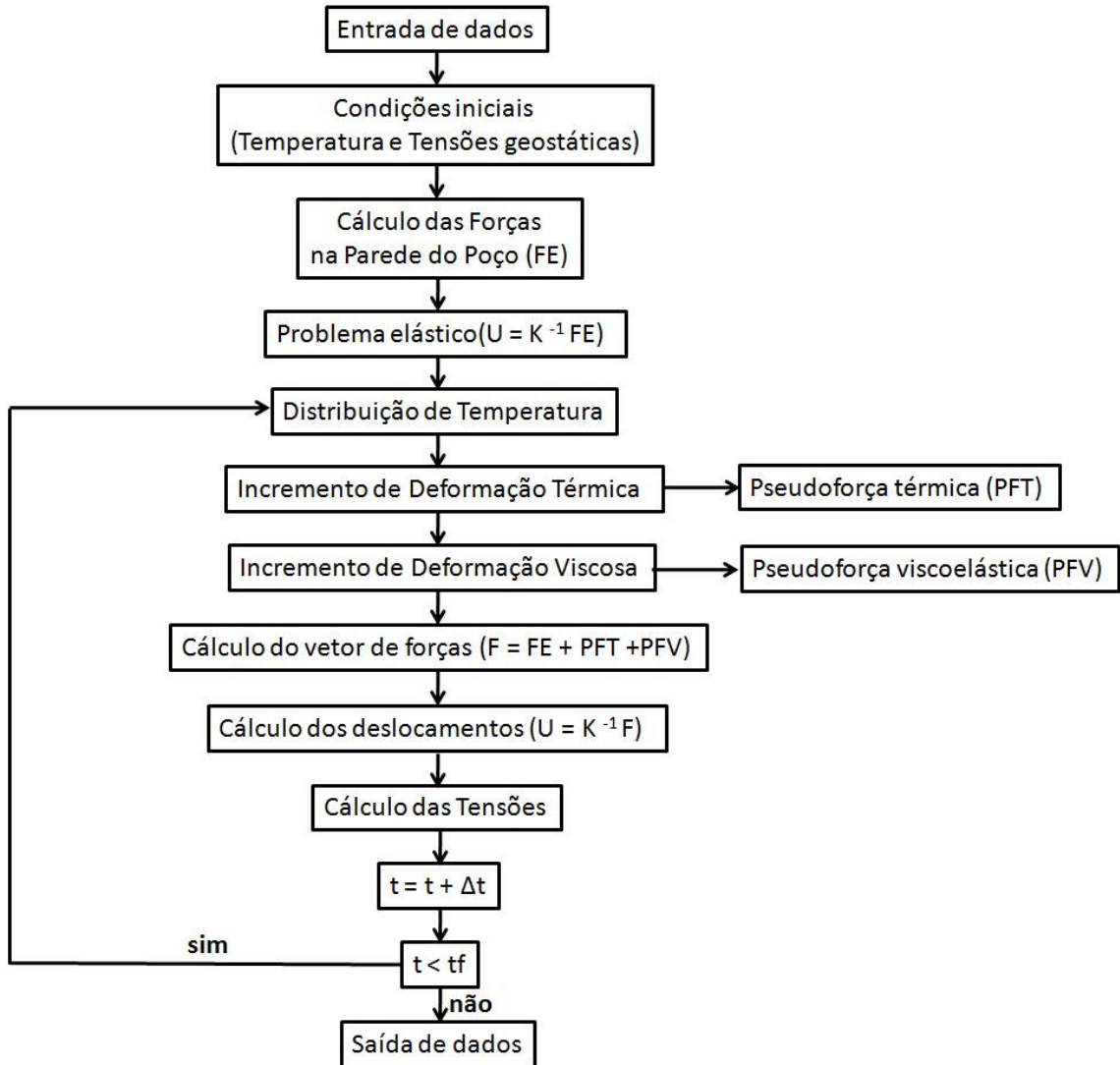
Após a leitura do arquivo de entrada, são calculadas a temperatura inicial do maciço e as tensões geostáticas que estão relacionadas com os pesos específicos das formações. Em seguida, são calculadas as forças atuantes na parede do poço que são compostas pela força devido ao fluido de perfuração e a força devido à escavação do maciço. Com essa força, resolve-se o problema elástico.

A solução do problema elástico define os deslocamentos e as tensões iniciais. Nesse instante, definem-se as deformações viscosas e térmicas iguais a zero. Com isso, inicia-se o processo incremental. Primeiramente, calcula-se a distribuição de temperatura no maciço no passo corrente para estimar o incremento de deformação térmica a partir da variação de temperatura desse passo com o passo anterior. A partir dessa deformação térmica, calcula-se uma pseudoforça térmica. Com a distribuição de temperatura, estima-se também a deformação viscosa, pois na equação constitutiva do sal utilizada (Equação (2.49)) há uma parcela dependente da temperatura. A partir dessa deformação viscosa, é calculada uma pseudoforça viscosa.

Com essas pseudoforças e as forças externas, calculam-se os deslocamentos e as tensões no passo corrente da análise. Nesse instante é que se dá o fraco acoplamento termomecânico, uma vez que as deformações da estrutura dependem da temperatura. O termo fraco acoplamento, como dito anteriormente, é usado porque apenas a temperatura influencia na parte mecânica, enquanto que o campo de temperatura é resolvido independentemente em cada passo da análise.

No final de cada passo da análise, se o tempo for maior ou igual ao tempo final fornecido nos dados de entrada pelo usuário, encerra-se o processo incremental. Ao final do programa, um arquivo de saída é criado contendo os valores dos deslocamentos e os instantes de tempo correspondentes no meio da camada salina e na parede do poço.

Figura 3.7 – Diagrama dos módulos computacionais.



Fonte: Autor (2011).

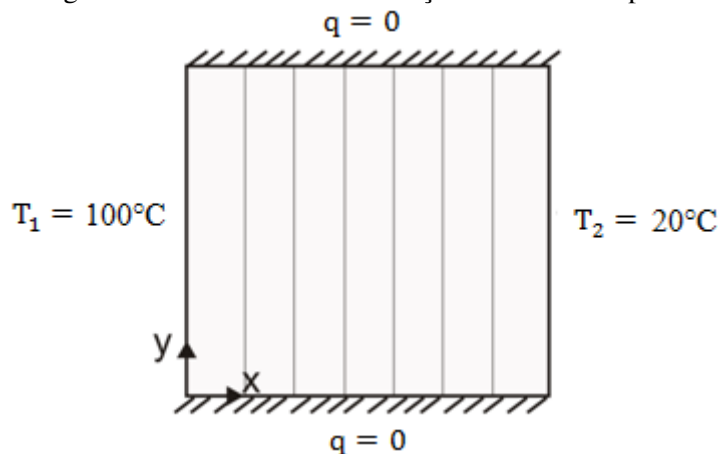
4 TESTES DE VERIFICAÇÃO

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos para verificação das implementações realizadas tomando como base de comparação as respectivas soluções analíticas. Nos problemas puramente térmicos, são comparados alguns exemplos com soluções encontradas na literatura. As soluções analíticas para os problemas viscoelásticos são obtidas através do princípio da correspondência (Apêndice A).

4.1 Placa Retangular – Regime Permanente

Este exemplo é um problema clássico utilizado para verificar a transferência de calor através de um meio (uma parede sólida, por exemplo) submetido a uma diferença de temperatura entre suas faces. Para verificar a implementação computacional realizada do problema térmico em regime permanente, considera-se uma placa retangular de dimensões 7m x 7m, com temperatura de 100°C prescrita na face esquerda e 20°C prescrita na face direita, além de um fluxo nulo prescrito nas faces superior e inferior. O coeficiente de condutividade térmica (k) utilizado neste exemplo é igual a 1 W/m°C. Embora seja necessário apenas um elemento quadrilateral de quatro nós (Q4) para obter a solução através do problema numérico, a discretização utilizada é de 7 elementos (Figura 4.1) apenas para apresentar a temperatura em nós intermediários.

Figura 4.1 – Placa retangular discretizada e suas condições de contorno para o regime permanente.



Fonte: Autor (2011).

A solução analítica pode ser facilmente encontrada resolvendo a equação governante do problema:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \rightarrow T(x) = C_1x + C_2 \quad (4.1)$$

As condições de contorno são:

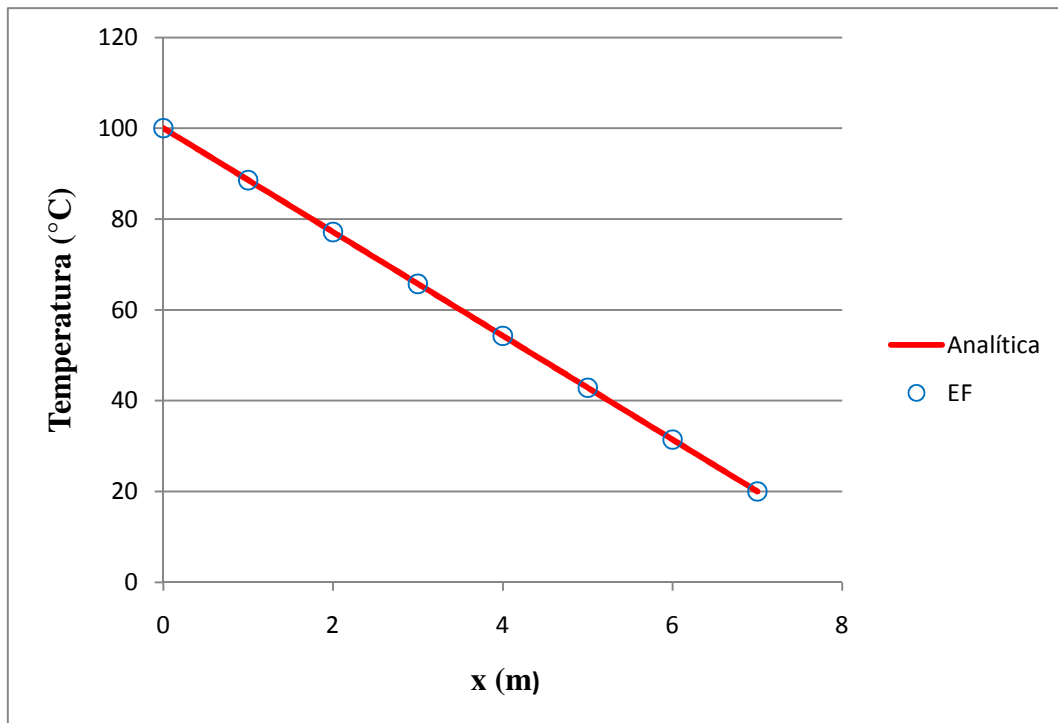
- $x = 0, T_1 = 100^\circ\text{C}$
- $x = 7 \text{ m}, T_2 = 20^\circ\text{C}$

Da primeira condição calcula-se o valor de $C_2 = 100 \text{ K}$. Da segunda condição calcula-se $C_1 = -80/7 \text{ K/m}$. Logo:

$$T(x) = -\frac{80}{7}x + 100 \quad (4.2)$$

Comparando-se a resposta analítica com a resposta numérica da temperatura em função da coordenada x da placa, observa-se a concordância entre as duas respostas (Figura 4.2).

Figura 4.2 – Variação da temperatura ao longo da direção x .



Fonte: Autor (2011).

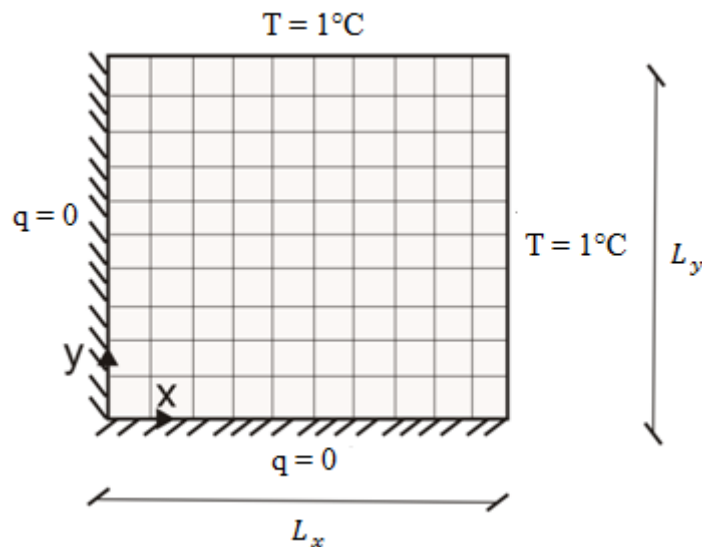
Nessa figura, observa-se ainda a variação linear da temperatura conforme a Equação (4.2). O fluxo se dá de maneira unidimensional, uma vez que as faces superior e inferior têm o

fluxo prescrito igual a zero. Esse fluxo ocorre do ponto de maior temperatura (face esquerda) para o de menor temperatura (face direita), na direção de x .

4.2 Placa Retangular - Regime Transiente

O exemplo apresentado a seguir é utilizado para verificar a transferência de calor através de um material sólido ao longo do tempo. Para validar a implementação computacional realizada do problema térmico em regime transiente, o problema a seguir trata-se de uma placa retangular de dimensões $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ com a temperatura de 1°C prescrita nas faces superior e direita, além do fluxo nulo prescrito nas faces esquerda e inferior. Inicialmente a temperatura é 0°C em toda a placa e o coeficiente de condução térmica (k) é igual a $1\text{ W/m}^\circ\text{C}$. Discretiza-se o domínio em 100 elementos quadrilaterais de quatro nós (Q4), como mostra a Figura 4.3.

Figura 4.3 – Placa retangular discretizada e suas condições de contorno para o regime transiente.



Fonte: Autor (2011).

A solução analítica pode ser encontrada em Sutradhar *et al.* (2002) e é dada por:

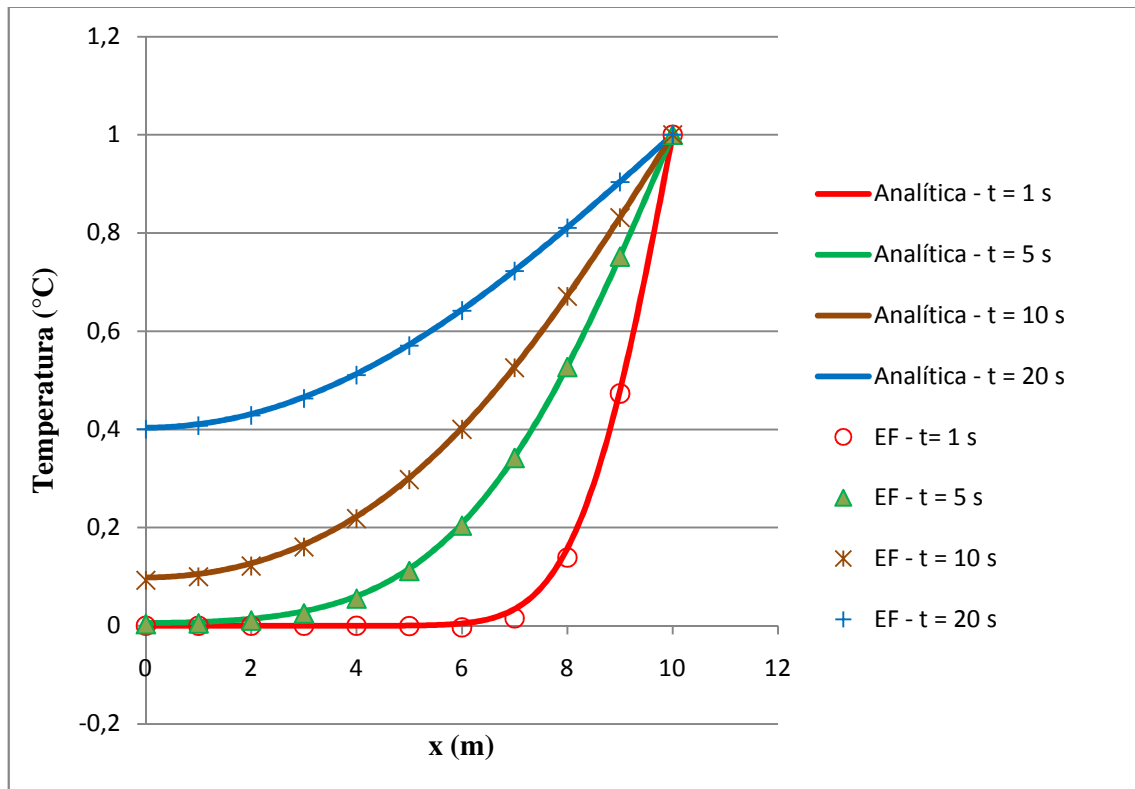
$$T(x, y, t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \cos \left[\frac{(2i-1)\pi x}{2L_x} \right] \cos \left[\frac{(2j-1)\pi y}{2L_y} \right] e^{-\left(\frac{k_x(2i-1)^2\pi^2}{4L_x^2} + \frac{k_y(2j-1)^2\pi^2}{4L_y^2} \right) t} \quad (4.3)$$

onde

$$C_{ij} = -\frac{16(-1)^{i+1}(-1)^{j+1}}{\pi^2(2i-1)(2j-1)} \quad (4.4)$$

Nesse exemplo é utilizado um incremento de tempo de $\Delta t = 0,01$ s e realizada uma comparação da solução analítica com a solução numérica na direção x da placa e a uma altura $y = 0$ m para os instantes de tempo $t = 1$ s, $t = 5$ s, $t = 10$ s e $t = 20$ s, conforme mostra a Figura 4.4. Esse gráfico mostra que a solução numérica está de acordo com a solução analítica para os diferentes instantes de tempo.

Figura 4.4 – Variação da temperatura ao longo da direção x a uma altura $y = 0$ m.

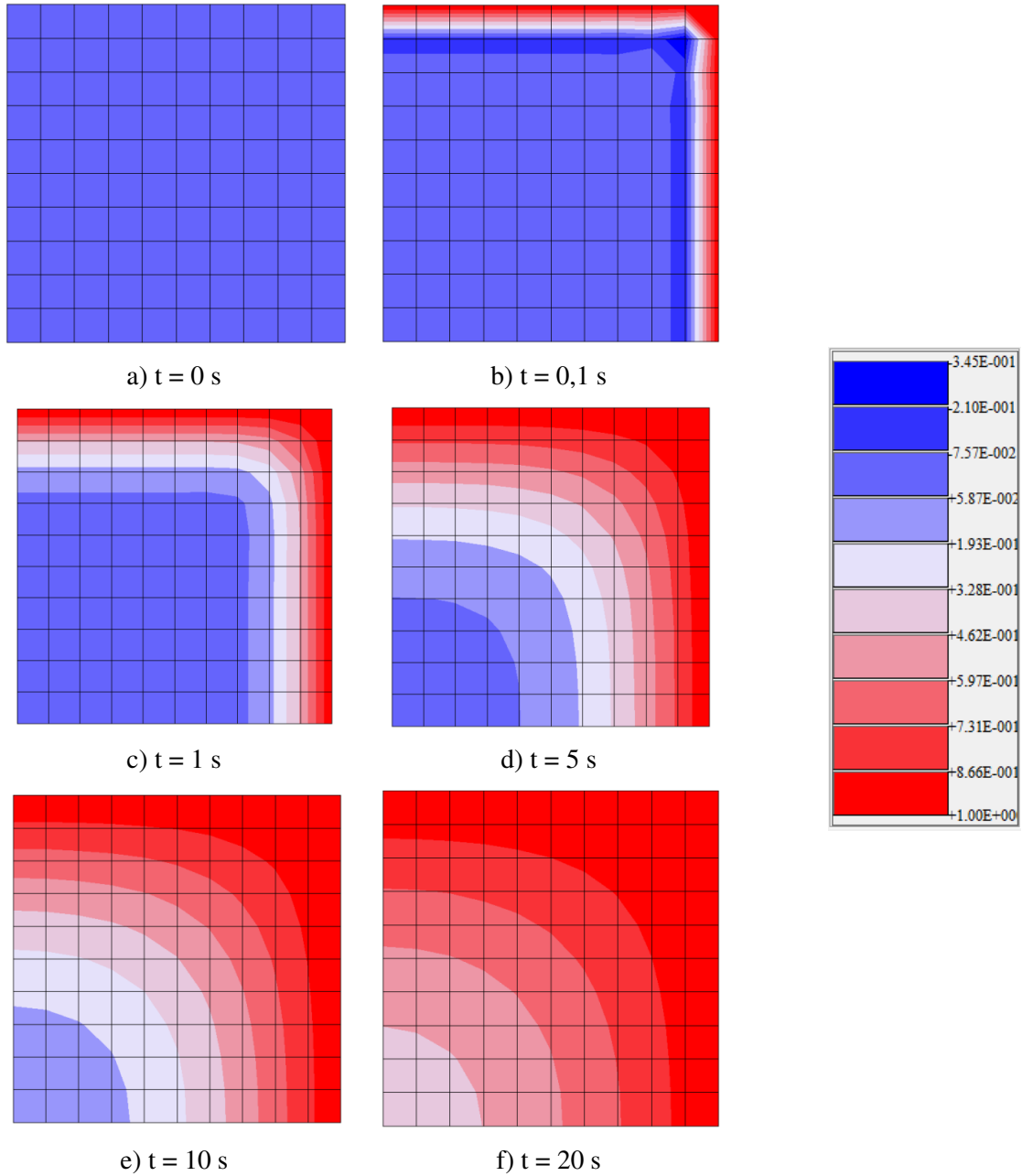


Fonte: Autor (2011).

A Figura 4.5 mostra a variação da temperatura na placa em uma escala de cores ao longo do tempo. É possível observar o aumento da temperatura ao longo do tempo nos pontos onde não existe temperatura prescrita. Isso é consequência da lei de Fourier, onde o fluxo de calor ocorre dos pontos de maior temperatura para os pontos de menor temperatura. Através da escala de cores da distribuição de temperatura é possível observar que o fluxo de calor através da placa, que se dá em duas direções e perpendicularmente às linhas de mesma

temperatura que aparecem na Figura 4.5c, na Figura 4.5d, na Figura 4.5e e Figura 4.5f, por exemplo.

Figura 4.5 – Distribuição da temperatura ao longo do tempo em escala de cores.

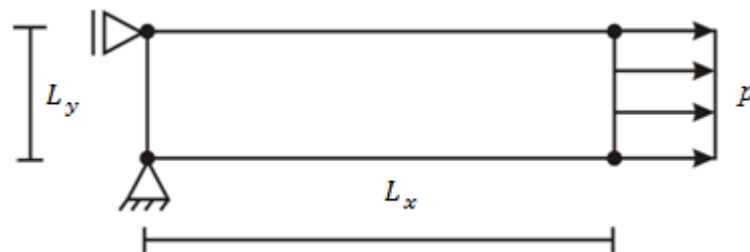


Fonte: Autor (2011).

4.3 Teste de Fluência - Modelo de Maxwell em Dilatação e Sólido Padrão em Cisalhamento

Este exemplo é realizado para verificar a implementação em Estado Plano de Tensões (EPT) de problemas viscoelásticos lineares considerando uma carga constante, caracterizando um teste de fluência. Para isso, considera-se uma barra submetida a uma tensão p , constante durante toda a análise, aplicada na extremidade direita, conforme a Figura 4.6. A discretização do modelo é de apenas um elemento quadrilateral de quatro nós (Q4).

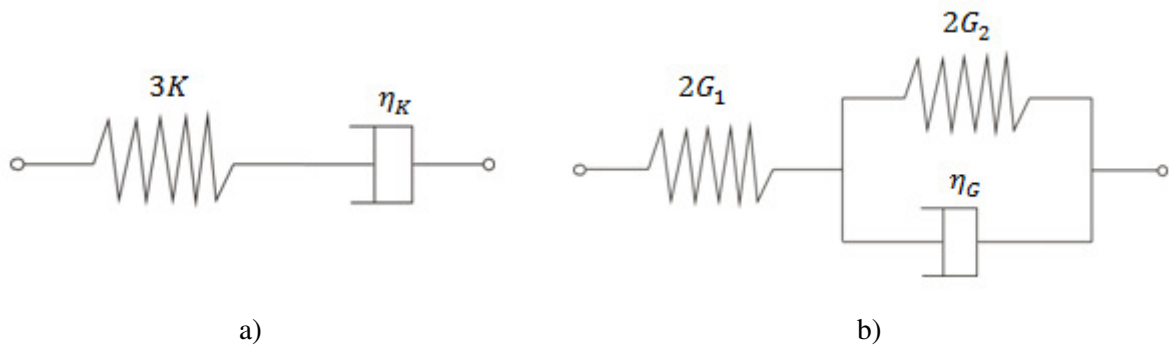
Figura 4.6 – Elemento submetido a uma tensão constante na extremidade.



Fonte: Autor (2011).

A relação constitutiva desse elemento é representada por um modelo de Maxwell em dilatação e sólido padrão em cisalhamento, conforme ilustrado na Figura 4.7.

Figura 4.7 – Representação constitutiva do elemento: a) Parcela Volumétrica; b) Parcela Desviadora.



Fonte: Autor (2011).

Os dados referentes ao problema são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Parâmetros do problema para o elemento tracionado.

Parâmetros	Valores
L_x	8 m
L_y	1 m
p	10 MPa
η_k	600 MPa.s
η_G	100 MPa.s
G_2	300 MPa
G_1	3846,154 MPa
K	8333,333 MPa
Δt	0,01 s

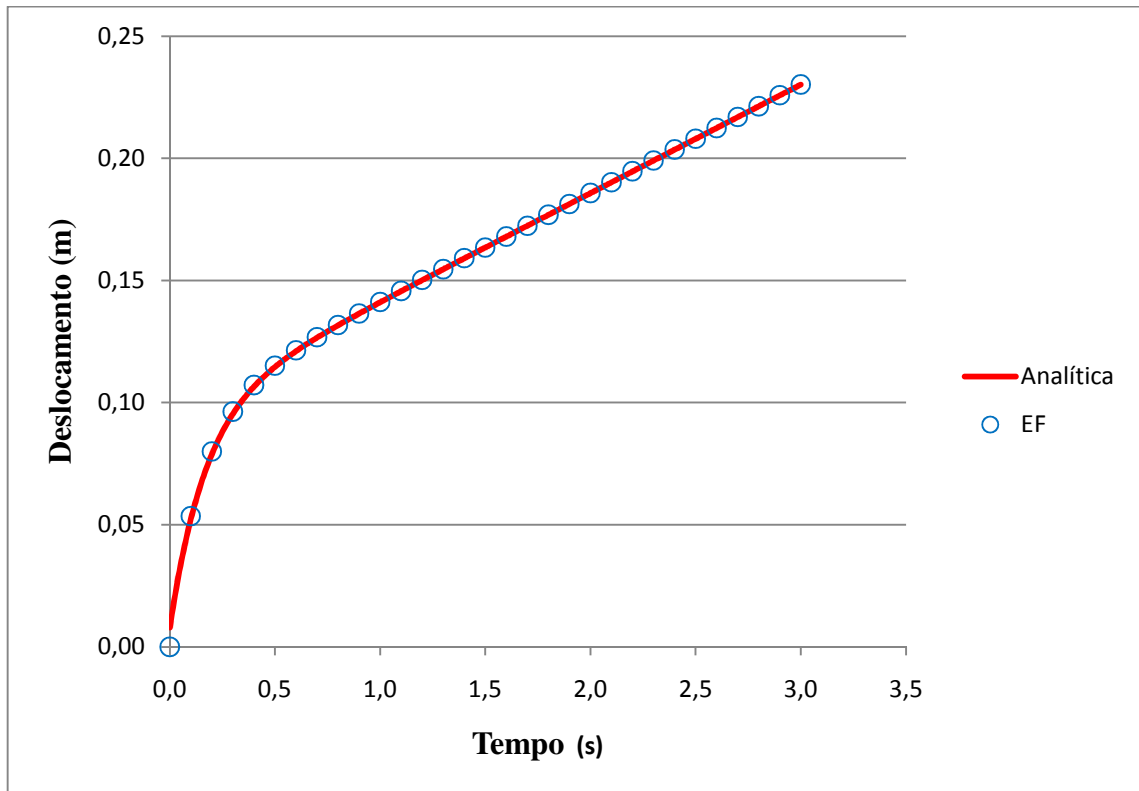
Fonte: Autor (2011).

A solução analítica, obtida através do princípio da correspondência, é dada por

$$u(t) = L_x p \left(\frac{1}{3G_1} + \frac{1}{9K} + \frac{t}{3\eta_K} + \frac{1 - e^{-\frac{2G_2 t}{\eta_G}}}{3G_2} \right) \quad (4.5)$$

A variação do deslocamento em função do tempo é mostrada na Figura 4.8, onde é mapeado o deslocamento na extremidade do elemento. Para o tempo inicial ($t = 0$ s), tem-se a resposta do problema elástico considerando um módulo de elasticidade formado pelos módulos transversal e volumétrico (G_1 e K). Para um tempo infinito, predomina ainda o modelo de Maxwell e o deslocamento cresce indefinidamente. Nota-se, através do gráfico, que a solução numérica está de acordo com a solução analítica.

Figura 4.8 – Variação do deslocamento em função do tempo.

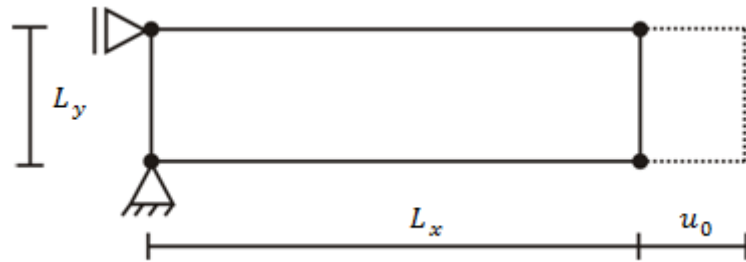


Fonte: Autor (2011).

4.4 Teste de Relaxação - Modelo de Sólido Padrão

O exemplo apresentado a seguir é utilizado para verificar a implementação considerando Estado Plano de Tensões (EPT) de problemas viscoelásticos lineares considerando um deslocamento prescrito, caracterizando um teste de relaxação. Para este exemplo, considera-se uma barra submetida a um deslocamento prescrito u_0 na extremidade direita, mantido constante durante toda a análise, conforme a Figura 4.9. A discretização é de apenas um elemento quadrilateral de quatro nós (Q4) e a relação constitutiva desse elemento é representada por um modelo de sólido padrão.

Figura 4.9 – Elemento submetido a um deslocamento prescrito.



Fonte: Autor (2011).

Os dados utilizados nesse exemplo são apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Parâmetros do problema para o elemento em relaxação.

Parâmetros	Valores
L_x	8 m
L_y	1 m
E_1	200 MPa
E_2	300 MPa
η	800 MPa.s
u_0	1,5 m
Δt	0,01 s

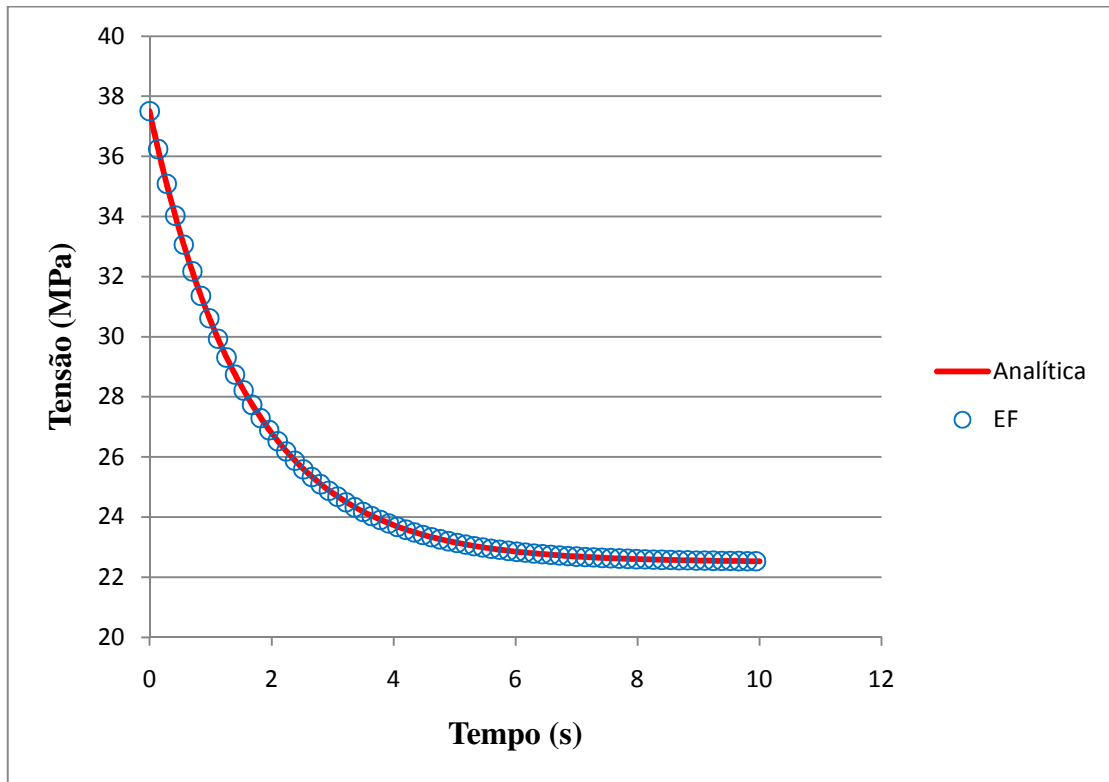
Fonte: Autor (2011).

A solução analítica de um problema uniaxial de relaxação para um modelo de sólido padrão, conforme mostrado na Equação (2.30), é dada por:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E_1 e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t} + \varepsilon_0 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t} \right) \quad (4.6)$$

A variação da tensão horizontal em função do tempo é apresentada na Figura 4.10. Analisando o gráfico, percebe-se que a solução numérica apresenta boa concordância com a solução analítica. Logo após a prescrição do deslocamento, o valor da tensão corresponde a um valor de $\sigma_x(0) = 37,5$ MPa. Ao longo do tempo, a tensão no elemento vai diminuindo até se estabilizar no valor de $\sigma_x(\infty) = 22,5$ MPa.

Figura 4.10 – Variação da tensão em relação ao tempo.

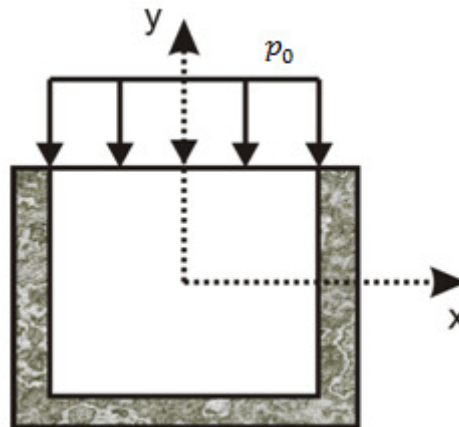


Fonte: Autor (2011).

4.5 Bloco Confinado - Modelo de Maxwell em Cisalhamento

Este exemplo é utilizado com o objetivo de validar a implementação de um problema viscoelástico linear considerando Estado Plano de Deformação (EPD). O problema analisado é um bloco constituído de um material viscoelástico inserido em um container rígido e submetido a um carregamento distribuído p em seu topo, que é mantido constante durante a análise (Figura 4.11). Trata-se de um exemplo de EDP, onde a relação constitutiva desse bloco é representada por um modelo de Maxwell em cisalhamento e elástico em dilatação. A discretização utilizada é de apenas um elemento quadrilateral de quatro nós (Q4).

Figura 4.11 – Bloco viscoelástico confinado.



Fonte: Autor (2011).

A solução analítica desse problema pode ser encontrada em Mase e Mase (1999), deduzida pelo princípio da correspondência:

$$\sigma_x(t) = -p_0 \left(1 - \frac{6G}{3K + 4G} e^{-\frac{6KG}{\eta(3K+4G)}t} \right) \quad (4.7)$$

Os dados considerados neste exemplo são apresentados na Tabela 4.3.

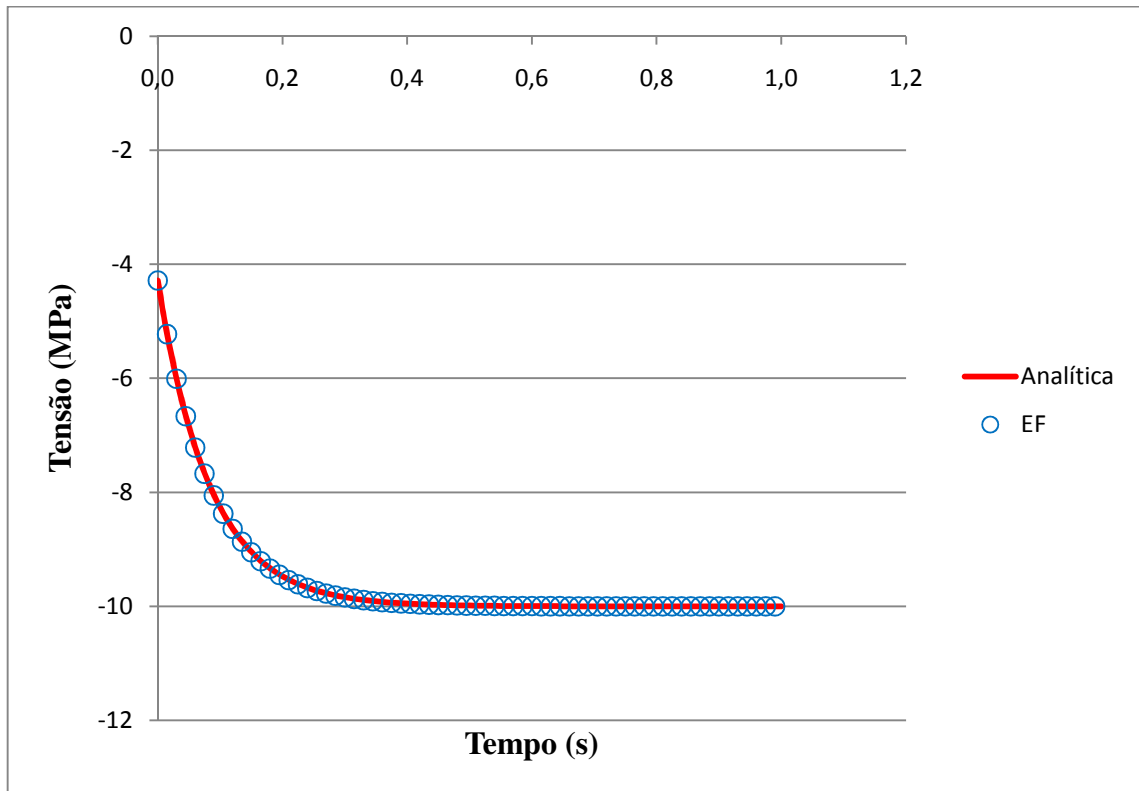
Tabela 4.3 - Parâmetros do problema para o bloco confinado.

Parâmetros	Valores
<i>K</i>	8333,333 MPa
<i>G</i>	3846,154 MPa
η	400 MPa.s
p_0	10 MPa
Δt	0,001 s

Fonte: Autor (2011).

A variação da tensão na direção x em relação ao tempo é visualizada na Figura 4.12. Essa tensão tende ao valor de p_0 à medida que o tempo aumenta, como pode ser observado na Equação (4.7). Esse resultado é observado na Figura 4.12 onde é realizada a comparação entre a solução analítica e a solução numérica via elementos finitos.

Figura 4.12 – Variação da tensão horizontal em relação ao tempo.

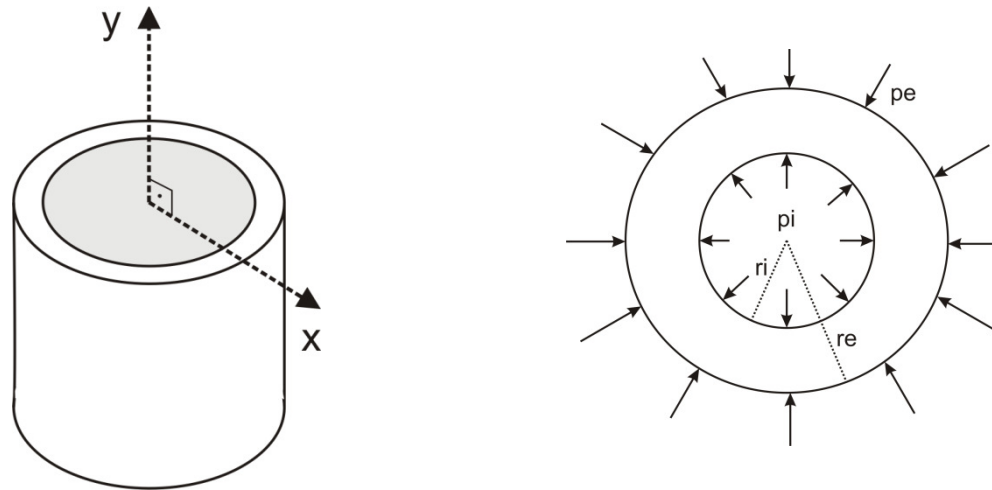


Fonte: Autor (2011).

4.6 Cilindro de Paredes Espessas – Modelo de Sólido Padrão em Cisalhamento

O exemplo apresentado nesta seção tem como objetivo verificar a implementação computacional de problemas viscoelásticos lineares considerando a axissimetria. Neste exemplo considera-se um cilindro viscoelástico de paredes espessas submetidos a pressões tanto externa quanto interna. As pressões são mantidas constantes durante toda a análise e a relação constitutiva desse cilindro é representada por um modelo de sólido padrão em cisalhamento e elástico em dilatação. O problema está ilustrado na Figura 4.13.

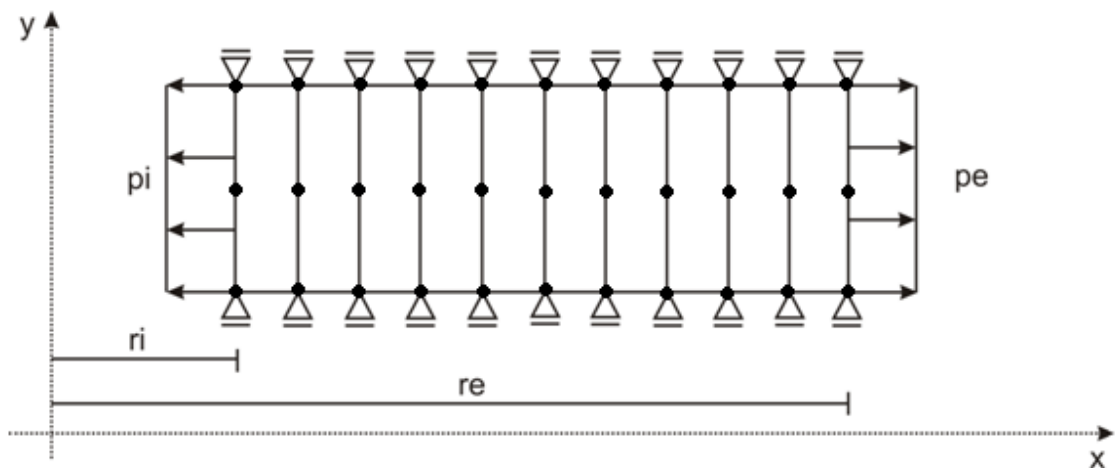
Figura 4.13 – Cilindro viscoelástico de paredes espessas submetido a uma pressão interna e outra externa.



Fonte: Autor (2011).

O problema é tratado como axissimétrico devido a sua geometria e condições e carregamento. A discretização do problema é apresentada na Figura 4.14, onde são utilizados 10 elementos quadrilaterais de oito nós (Q8).

Figura 4.14 – Discretização do modelo geométrico.



Fonte: Autor (2011).

Os dados considerados nesse exemplo são apresentados na Tabela 4.4. A Figura 4.15 apresenta o deslocamento da face interna desse cilindro em função do tempo. Mais uma vez pode se observar que as soluções analítica e numérica estão muito próximas. Para um tempo infinito o deslocamento tende a um valor constante de 0,0989 m. Isso acontece devido ao modelo adotado ter sido o sólido padrão.

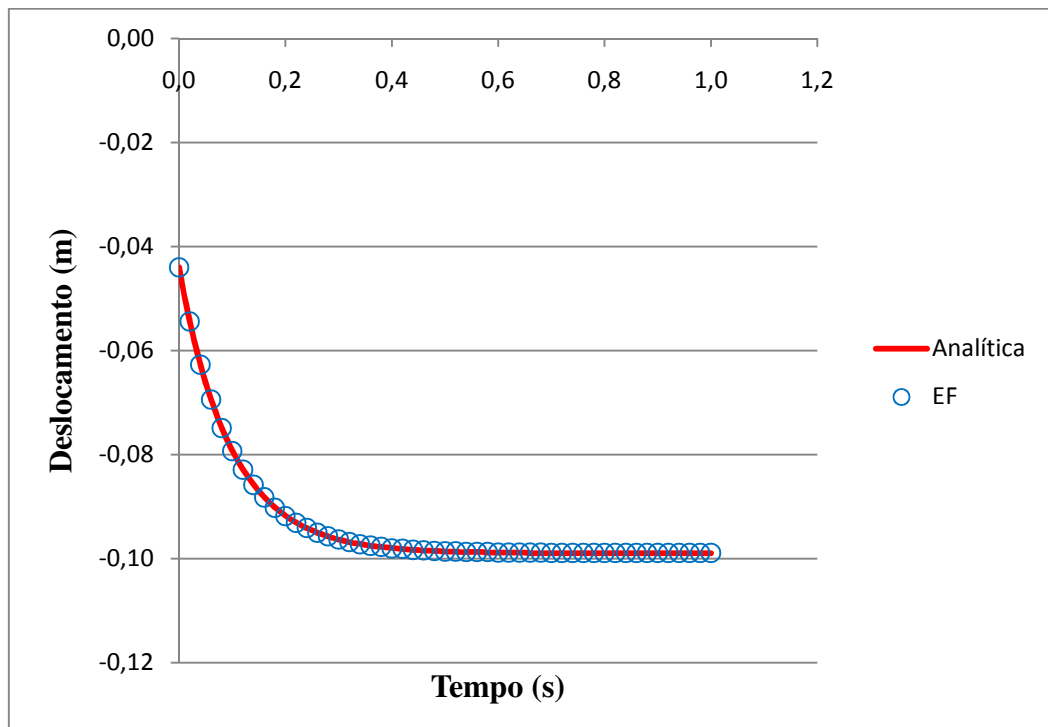
A Figura 4.16 mostra a variação do deslocamento em uma escala de cores ao longo do tempo. É possível observar que os deslocamentos são maiores nas faces interna e externa onde são aplicadas as pressões e que o deslocamento vai se mantendo constante ao longo do tempo, como é possível visualizar na, Figura 4.16d e na Figura 4.16e.

Tabela 4.4 - Parâmetros do problema para o cilindro.

Parâmetros	Valores
K	8333,333 MPa
G_1	3846,154 MPa
G_2	2000 MPa
η	400 MPa.s
re	4 m
ri	1 m
pi	100 MPa
pe	300 MPa
Δt	0,001s

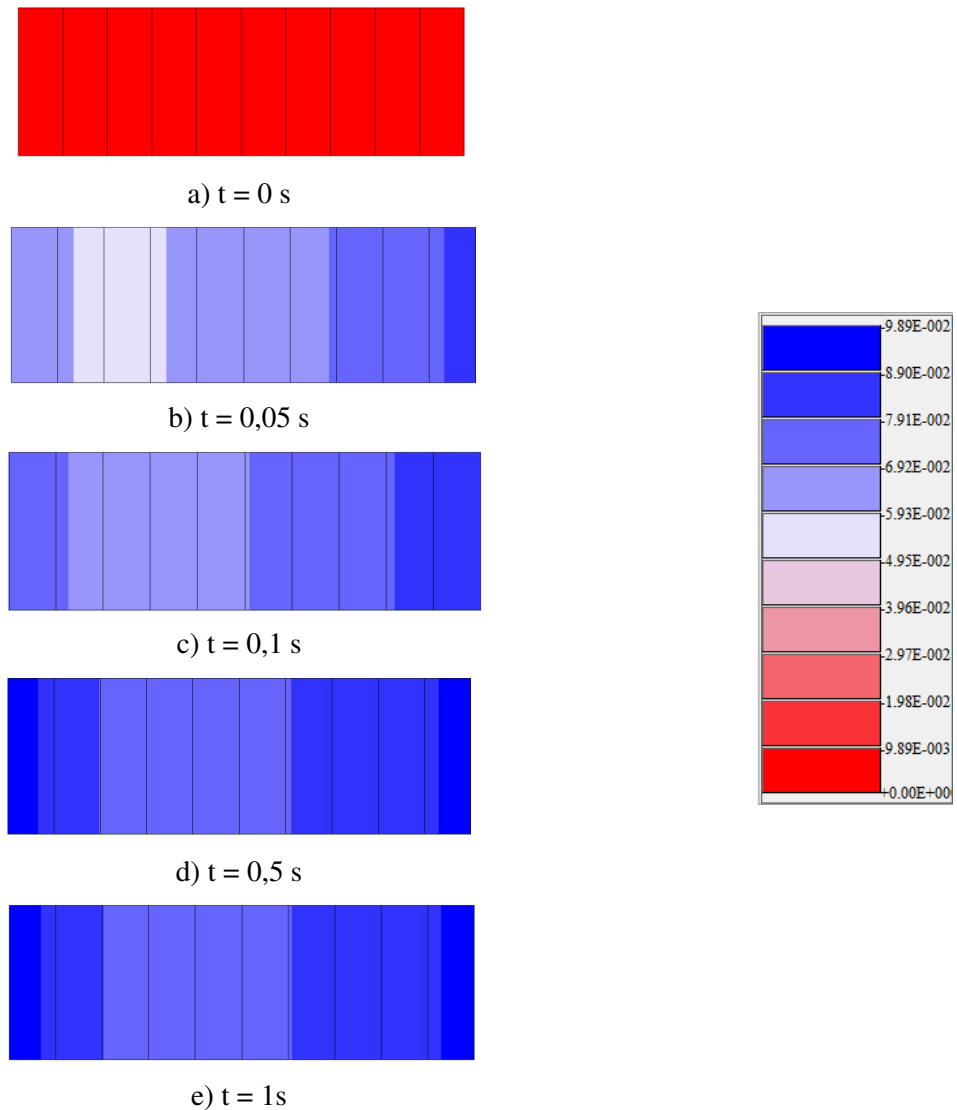
Fonte: Autor (2011).

Figura 4.15 – Deslocamento da face interna do cilindro em função do tempo.



Fonte: Autor (2011).

Figura 4.16 – Variação da deslocamento ao longo do tempo em escala de cores.

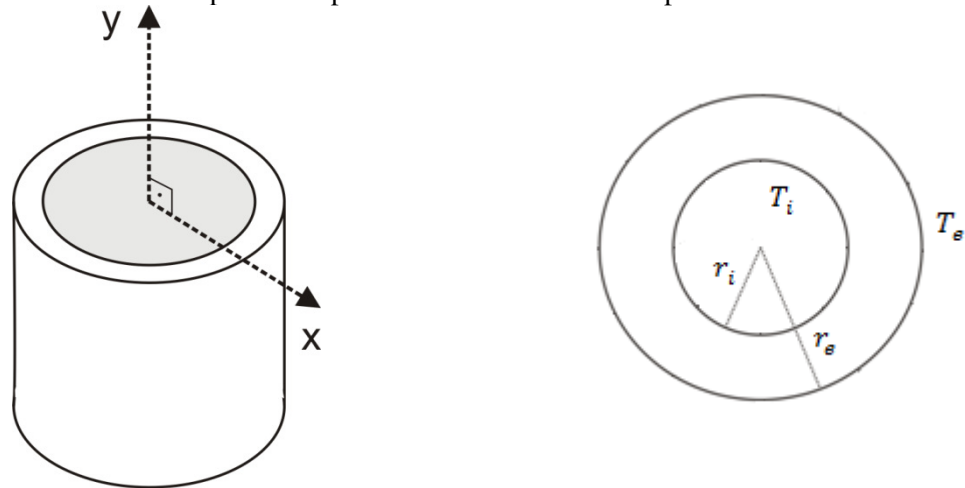


Fonte: Autor (2011).

4.7 Cilindro de Paredes Espessas Submetido a Temperaturas Prescritas: Fraco Acoplamento Termomecânico

Este exemplo tem como objetivo verificar a implementação do fraco acoplamento termomecânico. Considera-se um cilindro de paredes espessas, que se encontra em um campo de temperatura uniforme e igual a zero, submetidos a temperaturas prescritas nas paredes externa e interna. O problema está ilustrado na Figura 4.17.

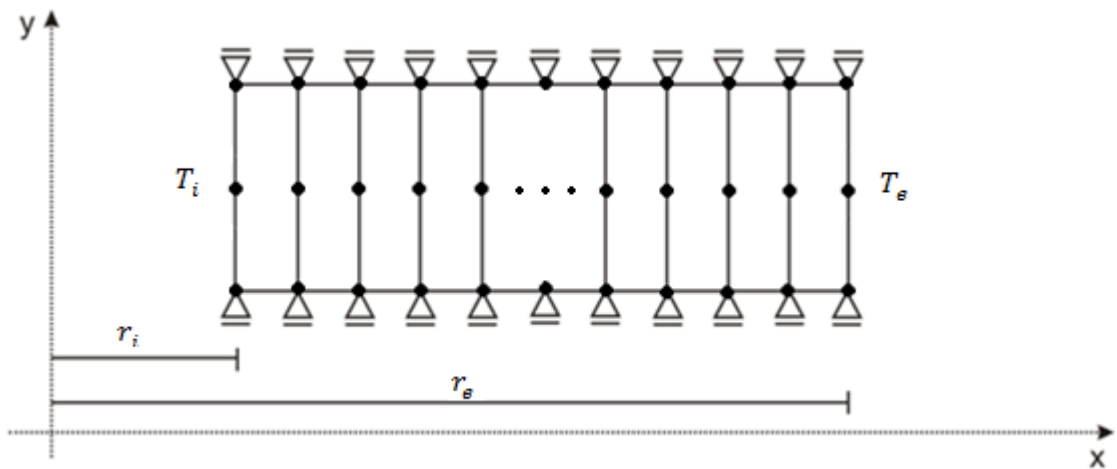
Figura 4.17 – Cilindro de paredes espessas submetido a uma temperatura interna e outra externa.



Fonte: Autor (2011).

O problema é tratado como axissimétrico e sua discretização está representada na Figura 4.18, onde são utilizados 50 elementos quadrilaterais de oito nós (Q8).

Figura 4.18 – Discretização do modelo.



Fonte: Autor (2011).

Os dados considerados nesse exemplo são apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 - Parâmetros do problema.

Parâmetros	Valores
α	$0,02^{\circ}\text{C}^{-1}$
ρ	1 Kg/m^3
c	$1 \text{ J/Kg}^{\circ}\text{C}$
k	$1 \text{ W/Kg}^{\circ}\text{C}$
E	10000 MPa
ν	$0,3$
T_i	1°C
T_e	0°C
r_i	$0,65 \text{ m}$
r_e	$2,5 \text{ m}$

Fonte: Autor (2011).

As soluções analíticas para o campo de temperatura e tensões desse problema podem ser encontradas em Cavalcante (2006) e são apresentadas a seguir. O campo de temperatura é dado por

$$T(r, t) = \frac{\ln\left(\frac{r_e}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} T_i + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r_e \alpha_n) J_0(r_i \alpha_n)}{J_0^2(r_i \alpha_n) - J_0^2(r_e \alpha_n)} [J_0(r \alpha_n) Y_0(r_e \alpha_n) - J_0(r_e \alpha_n) Y_0(r \alpha_n)] e^{-\alpha_n^2 \frac{t}{\kappa}} \quad (4.8)$$

onde J_0 e Y_0 são as funções de Bessel do primeiro e do segundo tipo, respectivamente, $\kappa = \frac{\rho c}{k}$ e α_n são as raízes da seguinte equação característica:

$$J_0(r_i \alpha_n) Y_0(r_e \alpha_n) - J_0(r_e \alpha_n) Y_0(r_i \alpha_n) = 0 \quad (4.9)$$

As raízes α_n , para os raios internos e externos adotados, foram extraídas do trabalho de Mushref (2010). Os campos de tensões são calculados através das seguintes equações:

$$\sigma_r(r, t) = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r T(r, t) r dr + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (4.10)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r T(r, t) r dr - \frac{\alpha E T(r, t)}{1-\nu} + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1-2\nu} + \frac{C_2}{r^2} \right) \quad (4.11)$$

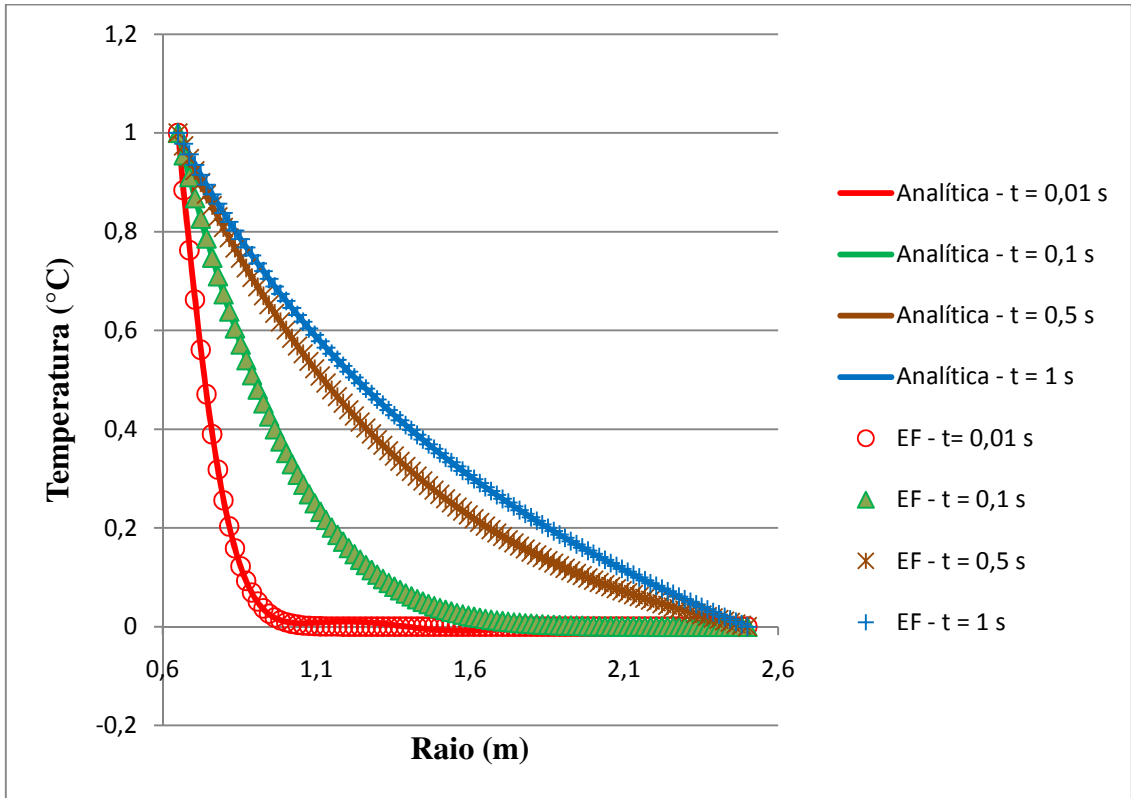
onde σ_r e σ_θ são as tensões na direção radial e circunferencial, respectivamente, e C_1 e C_2 são dados pelas seguintes equações:

$$C_1 = \frac{(1-2\nu)\alpha(1+\nu)}{1-\nu} \frac{1}{r_e^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_e} T(r, t) r dr \quad (4.12)$$

$$C_2 = \frac{(1-2\nu)\alpha(1+\nu)}{1-\nu} \frac{1}{r_e^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_e} T(r, t) r dr \quad (4.13)$$

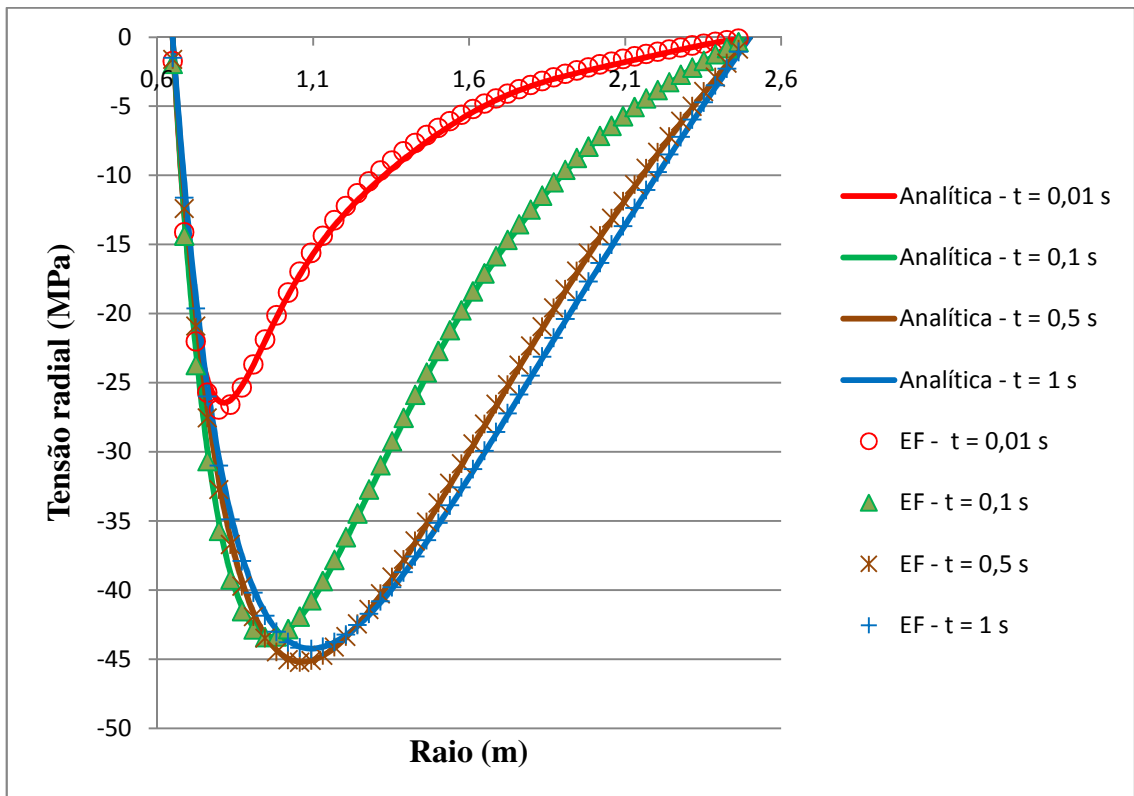
A seguir são apresentadas as comparações entre as soluções analíticas e numérica via elementos finitos para um incremento de tempo de 0,001 s. A Figura 4.19 mostra que os resultados numéricos e analíticos para a distribuição de temperatura apresentam uma boa concordância, bem como os resultados para o campo de tensão radial e circunferencial apresentados nas Figura 4.20 e Figura 4.21, respectivamente. As curvas das soluções analíticas das três figuras foram realizadas considerando apenas as 20 primeiras raízes da Equação (4.9), por isso, para o instante $t = 0,01$ s, as curvas apresentam algumas oscilações.

Figura 4.19 – Distribuição da temperatura ao longo do tempo no cilindro.



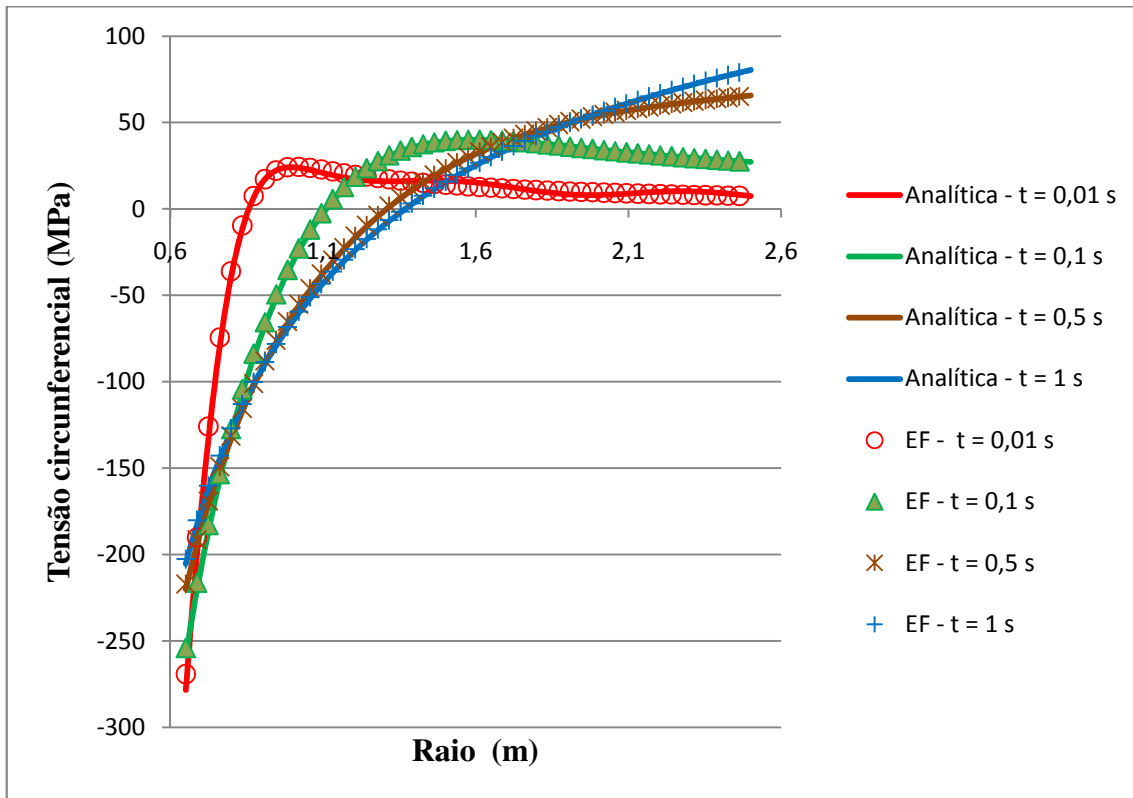
Fonte: Autor (2011).

Figura 4.20 – Campo de tensão radial ao longo do tempo no cilindro.



Fonte: Autor (2011).

Figura 4.21 – Campo de tensão circunferencial ao longo do tempo no cilindro.



Fonte: Autor (2011).

5 INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA NA PERFURAÇÃO DE POÇOS EM ROCHAS SALINAS

Este capítulo apresenta alguns exemplos para ilustrar problemas relacionados à perfuração de poços *offshore* em camadas salinas. Inicialmente, é apresentada a descrição do problema e as condições iniciais necessárias para a análise da influência da temperatura no fechamento desses poços.

5.1 Descrição do Problema

O cenário deste problema está ilustrado na Figura 5.1a. As cotas mostradas nessa figura representam a lâmina d'água (LDA), o topo do evaporito (TE), a base do evaporito (BE), o diâmetro do poço (D) e a espessura de uma possível intercalação (INT). As intercalações são camadas de sais intermediárias e, neste trabalho, estão sendo consideradas apenas no meio da camada salina.

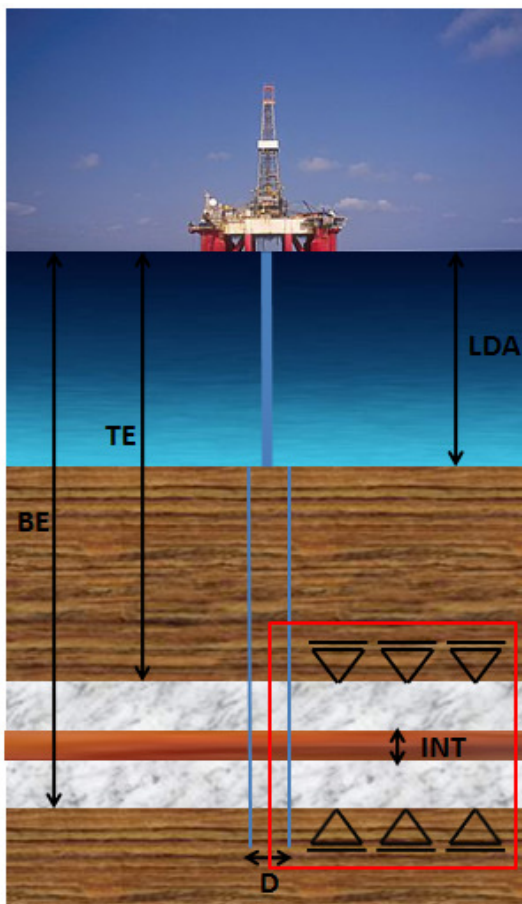
A Figura 5.1b ilustra o modelo numérico adotado, obtido da região em destaque na Figura 5.1a. O modelo adotado é axissimétrico devido à simetria de carregamento e geometria em torno do eixo central do poço, sendo possível representar o problema tridimensional de perfuração.

O modelo mecânico possui restrição ao movimento na vertical (eixo y) na face superior e inferior e restrição ao movimento na horizontal (eixo x) na face externa (direita) do modelo. O modelo térmico possui o fluxo de calor nulo na face superior, inferior e externa e uma temperatura prescrita na face interna que corresponde à temperatura do fluido de perfuração. Essas condições de contorno do problema térmico foram adotadas porque, para as espessuras das camadas salinas simuladas neste trabalho, a temperatura na camada de sal devido ao gradiente geotérmico é quase constante, logo o fluxo térmico é quase que unidimensional na direção horizontal. Além disso, a influência da temperatura na fluência ocorre, principalmente, por causa da variação sofrida na parede do poço.

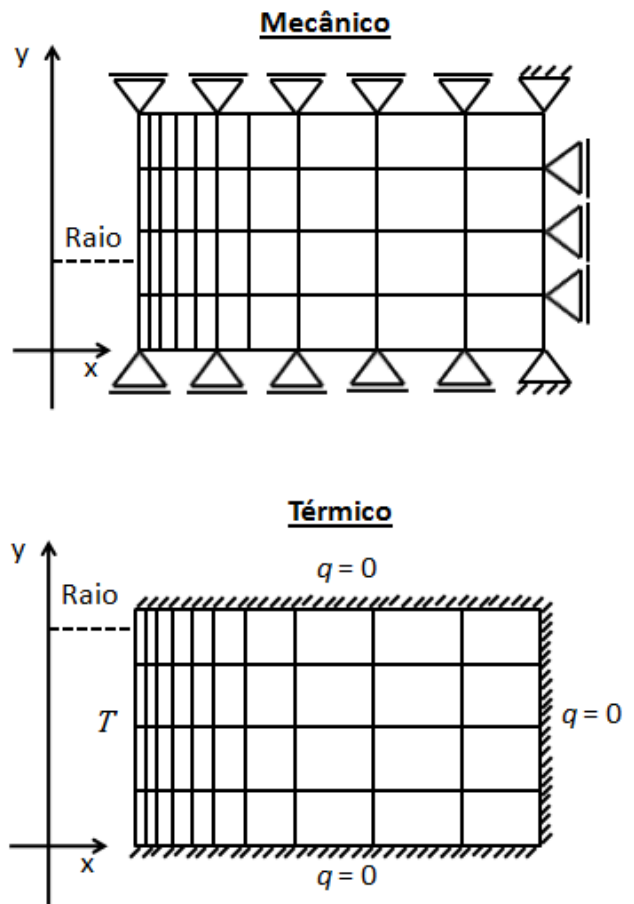
Para a simulação dos problemas apresentados a seguir, o modelo é constituído de elementos quadrilaterais de oito nós com uma integração reduzida 2×2 para evitar o efeito de *locking* (COOK *et al.*, 1989). Esse efeito está associado a uma rigidez excessiva, ocasionando um deslocamento menor do que o valor real. O modelo também é mais refinado próximo ao poço porque nesse local as tensões atuantes são maiores e apresentam as maiores variações, fornecendo melhores resultados.

Em relação ao limite externo do modelo, Gravina (1997) comparou, através das soluções analíticas, os deslocamentos de uma placa infinita com o deslocamento de uma placa finita, ambas com furo no centro, sob influência de uma pressão interna e uma pressão externa e em estado plano de deformação. Para um diâmetro externo de 50 vezes o diâmetro interno, ele constatou um erro inferior a 0,5%. Portanto, para representar um modelo semi-infinito, é adotado neste trabalho um raio externo igual a mil vezes o raio interno (raio do poço), de forma que a consideração do modelo finito não cause diferenças significantes nos deslocamentos na parede do poço em relação ao modelo infinito.

Figura 5.1 – Poço de petróleo: a) Cenário do problema; b) Modelo numérico.



a)



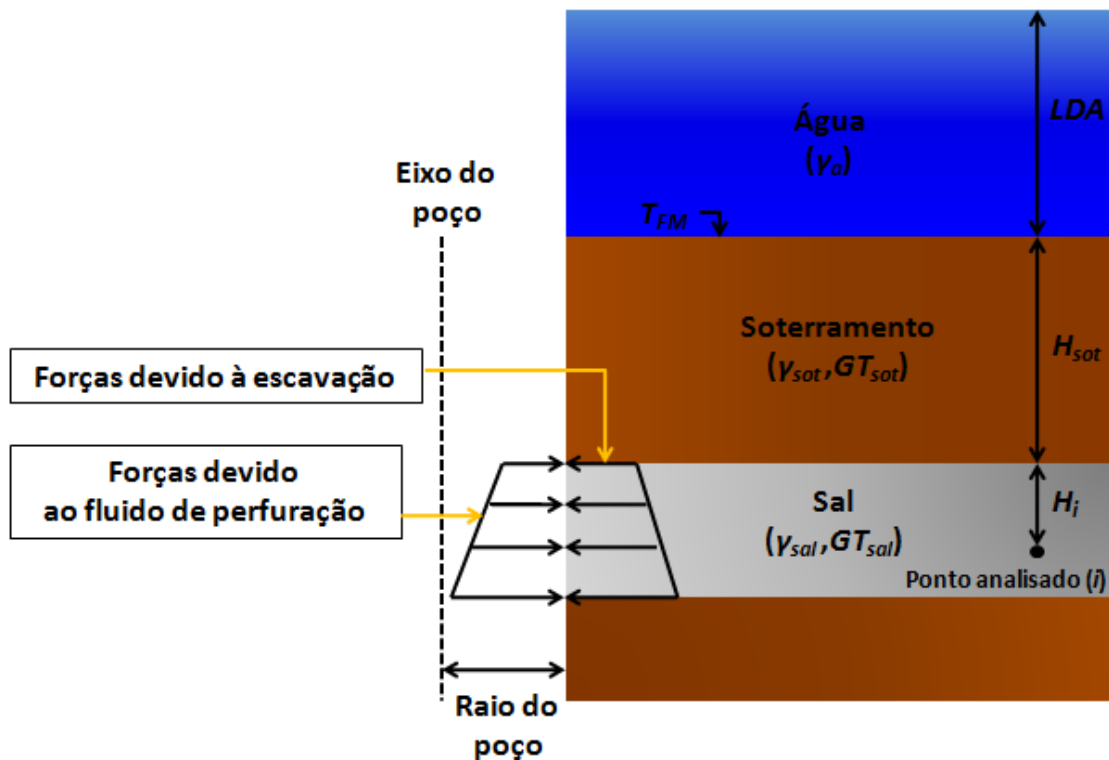
b)

Fonte: Autor (2011).

5.2 Condições Iniciais

As condições iniciais do problema estudado são obtidas a partir do problema elástico que é resolvido considerando a pressão do fluido de perfuração e também a tensão na parede do poço devido à escavação do maciço (Figura 5.2). É calculado um deslocamento inicial, obtendo-se com isso um estado de deformação inicial que é utilizado no cálculo das tensões no instante $t = 0$ s.

Figura 5.2 – Condições iniciais do problema de perfuração de poço.



Fonte: Autor (2011).

As deformações viscosas e térmicas no instante inicial são assumidas como zero. As tensões iniciais, que correspondem à geostática, são calculadas de acordo com os pesos específicos de cada camada. Assim, a tensão vertical (direção y) é dada por:

$$\sigma_{yy} = -\gamma_a LDA - \gamma_{sot} H_{sot} - \gamma_{sal} H_i \quad (5.1)$$

onde i corresponde ao ponto analisado, γ_a é o peso específico da água, γ_{sot} é o peso específico da camada de sedimento acima do sal (soterramento), H_{sot} a espessura do

soterramento, γ_{sal} é o peso específico do sal e H_i é a altura que vai do topo da camada salina até o ponto analisado.

Como dito anteriormente, as tensões horizontais são calculadas através da multiplicação da tensão vertical pelo coeficiente de empuxo de terra (K_0). Logo, para um determinado ponto do maciço, a tensão geostática é dada por

$$\sigma_g^T = \{-K_0\sigma_{yy} \quad -\sigma_{yy} \quad 0 \quad -K_0\sigma_{yy}\} \quad (5.2)$$

Nas simulações realizadas neste trabalho é utilizado, em todos os modelos, um coeficiente de empuxo de terra unitário ($K_0 = 1$).

Para considerar a força relacionada ao fluido de perfuração, é aplicada uma força distribuída que vai do topo ao final da camada salina considerando o peso específico desse fluido. Para o problema térmico, a temperatura inicial em cada ponto é calculada com base no gradiente geotérmico de cada formação, como mostra a seguinte equação:

$$T_i = T_{FM} + GT_{sot}H_{sot} + GT_{sal}H_i \quad (5.3)$$

onde T_{FM} é a temperatura no fundo do mar, GT_{sot} é o gradiente geotérmico do soterramento, GT_{sal} é o gradiente geotérmico do sal.

5.3 Simulação dos Modelos

Esta seção apresenta alguns modelos utilizados para avaliar o efeito da temperatura no problema de perfuração de poço em camadas salinas. Mais especificamente, o interesse é a verificação da influência da temperatura no deslocamento na parede do poço. Assim, são analisados modelos com diferentes profundidades e diferentes litologias levando em consideração diferentes temperaturas para o fluido de perfuração. Apesar desses modelos não representarem um poço real específico, os parâmetros das equações utilizados nas simulações são realistas e retirados de diversos trabalhos encontrados na literatura (BÉREST *et al.*, 2007; BORGES, 2008; POIATE *et al.*, 2006; PUDEWILLS e DROSTE, 2003), sendo possível verificar o grau de influência da temperatura através de um estudo paramétrico correspondente.

Para considerar a temperatura nas formações, é adotada uma variação linear com a profundidade, onde o gradiente do soterramento (GT_{sot}) é assumido como sendo $30^{\circ}\text{C}/\text{km}$ e o do sal (GT_{sal}) como $10^{\circ}\text{C}/\text{km}$. Considera-se também uma temperatura no fundo do mar (T_{FM}) de 4°C . Esses valores foram extraídos do trabalho de Borges (2008).

Os dados das rochas salinas (halita e taquidrita) foram obtidos do trabalho de Borges (2008) e Poiate *et al.* (2006) e estão apresentados na Tabela 5.1. Além disso, o peso específico do soterramento (γ_{sot}) é assumido como $22,56 \text{ kN}/\text{m}^3$ (POIATE *et al.*, 2006) e o peso específico da água (γ_a) é adotado como sendo $10 \text{ kN}/\text{m}^3$.

Tabela 5.1 - Propriedades da halita e taquidrita.

Rocha	γ_{sal} (kg/m^3)	E (MPa)	ν	σ_0 (kPa)	$\dot{\epsilon}_0$ (h^{-1})	T_0 ($^{\circ}\text{C}$)	n_1	n_2
Halita	2160	20400	0,36	9910	$1,808 \times 10^{-6}$	86	3,23	7,55
Taquidrita	1700	4920	0,33	8144,3	$2,99 \times 10^{-4}$	86	2,589	7,448

Fonte: Borges (2008); Poiate *et al.* (2006).

Em relação às propriedades térmicas das rochas salinas é considerado um coeficiente de expansão térmica (α) de $0,000042 \text{ K}^{-1}$ e o produto da massa específica pelo calor específico (ρc) como sendo $1,9 \times 10^{-6} \text{ J}/\text{m}^3\text{K}$ (PUDEWILLS e DROSTE, 2003). Para a condutividade térmica do sal é assumido um valor típico de $6 \text{ W}/\text{mK}$, segundo Bérest *et al.* (2007).

O estudo é realizado através de 9 modelos geométricos e cada um desses modelos é avaliado para 6 temperaturas de fluido de perfuração prescritas na borda do poço, o que resulta em 54 simulações. Desses 9 modelos, 3 consideram apenas o sal halita (grupo A), 3 apenas a taquidrita (grupo B) e 3 consideram a halita com uma intercalação de taquidrita (grupo C). Os três modelos de uma mesma litologia são diferenciados pela profundidade em que se encontram em relação ao nível do mar. Para o estudo, é avaliado o deslocamento na parede do poço e no meio da camada salina.

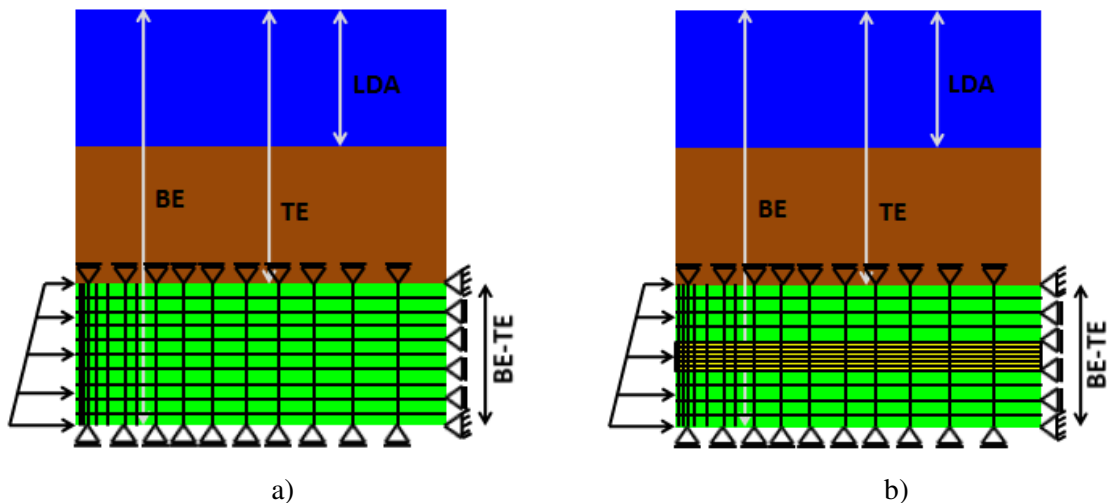
Para avaliar o efeito térmico, é aplicada uma temperatura prescrita na parede do poço, representando a temperatura do fluido de perfuração, sendo esta menor que a temperatura da formação. A temperatura de cada simulação é representada por um ΔT que corresponde a diferença entre a temperatura do fluido prescrita na borda do poço e a temperatura inicial que

se encontrava no topo da camada salina devido ao gradiente geotérmico. No caso do $\Delta T = 0^\circ\text{C}$, não é considerado nenhuma prescrição na parede do poço.

Em cada modelo são utilizadas seis temperaturas prescritas variando 5°C de uma para outra. Nos modelos menos profundo de cada grupo, o topo da camada salina se encontra a uma temperatura inicial de 34°C . Nesses modelos, as prescrições de temperaturas foram de 30°C , 25°C , 20°C , 15°C , 10°C e 5°C . Logo, a variação em relação à temperatura inicial (34°C) é de 4°C , 9°C , 14°C , 19°C , 24°C e 29°C . As outras duas profundidades apresentam as mesmas variações de temperatura, entretanto as temperaturas prescritas são diferentes. Nos modelos de profundidade intermediária, a temperatura inicial no topo da camada salina é de $56,5^\circ\text{C}$ e as prescrições de temperatura são de $52,5^\circ\text{C}$, $47,5^\circ\text{C}$, $42,5^\circ\text{C}$, $37,5^\circ\text{C}$, $32,5^\circ\text{C}$ e $27,5^\circ\text{C}$. Enfim, nos modelos mais profundos a temperatura inicial no topo da camada salina é de 79°C e as prescrições de temperatura são de 75°C , 70°C , 65°C , 60°C , 55°C e 50°C .

A Figura 5.3 apresenta um esquema dos grupos de modelos analisados. Nesses grupos, as variáveis lâmina d'água (LDA), topo do evaporito (TE) e base do evaporito (BE) variam para cada modelo. Entretanto, a espessura da camada salina (BE-TE) é mantida constante em cada grupo. Como dito anteriormente, em cada modelo é aplicado uma força na parede do poço resultante do peso do fluido de perfuração e das forças devido à escavação. A Figura 5.3a apresenta o um esquema dos grupos A e B, que são modelos que não apresentam intercalações. Para ambos esse modelos, são utilizados 2000 elementos quadrilaterais de oito nós, com uma integração reduzida 2×2 . A Figura 5.3b apresenta um esquema do modelo C que possui intercalação. Para esses modelos são utilizados 6000 elementos quadrilaterais de oito nós com integração reduzida 2×2 .

Figura 5.3 – Esquema dos grupos de modelos: a) Grupos A e B; b) Grupo C.



Fonte: Autor (2011).

Em todos os modelos são realizadas 200 subdivisões na direção radial do poço (eixo x). Os tamanhos dessas subdivisões aumentam à medida que se afastam da parede do poço em uma progressão geométrica. A razão entre a última e a primeira subdivisão, denominada de *ratio*, é igual a 20. Para a direção longitudinal do poço (eixo y), nos modelos dos grupos A e B são realizadas 10 subdivisões uniformes, enquanto que nos modelos do grupo C são realizadas 10 subdivisões uniformes em cada camada, resultando em 30 subdivisões verticais.

As simulações dos modelos do grupo A são realizadas considerando um incremento de tempo (Δt) de 0,1 s durante toda a análise. Nesses modelos, com esse Δt , o algoritmo converge porque estes apresentam poucas variações nos deslocamentos. Nos modelos do grupo B, cujo sal é a taquidrita, é considerado um incremento de 0,001 s no início da análise e posteriormente o incremento utilizado é de 0,1 s. Isso é realizado porque, no início, há maiores variações nas tensões e nos deslocamentos e se for utilizado um Δt maior, o algoritmo não converge. No grupo C, apesar de também apresentar taquidrita, as variações são menores do que o grupo B, pois as camadas de halita tendem a reduzir o deslocamento da taquidrita, por isso é adotado um incremento um pouco maior no início da análise ($\Delta t = 0,01$ s) e posteriormente o incremento utilizado é também de 0,1 s.

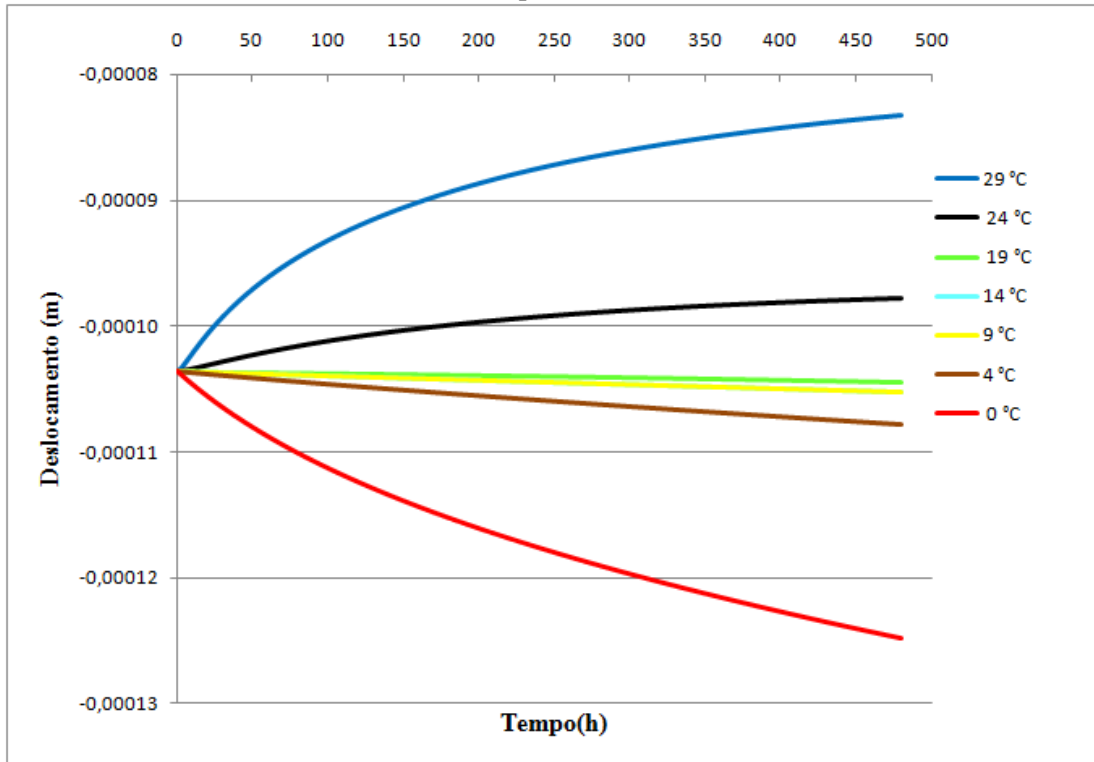
A Tabela 5.2 apresenta os modelos do grupo A e a definição dos seus parâmetros. Esses modelos consideram apenas a halita, que é um sal pouco móvel, e o mesmo diâmetro, peso do fluido de perfuração e coeficiente de empuxo de terra. A Figura 5.4 apresenta o deslocamento no meio da camada em função do tempo no modelo A1, para diversas variações de temperatura.

Tabela 5.2 - Definição dos modelos do grupo A.

	Modelo A1	Modelo A2	Modelo A3
Lâmina d'água	750 m	1125 m	1500 m
Topo do evaporito	1750 m	2875 m	4000 m
Base do evaporito	1850 m	2975 m	4100 m
Intercalação	-	-	-
Diâmetro	12,25 pol	12,25 pol	12,25 pol
Fluido de perfuração	10 lb/gal	10 lb/gal	10 lb/gal
Litologia	Halita	Halita	Halita

Fonte: Autor (2011).

Figura 5.4 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo A1 para diversas variações de temperaturas.

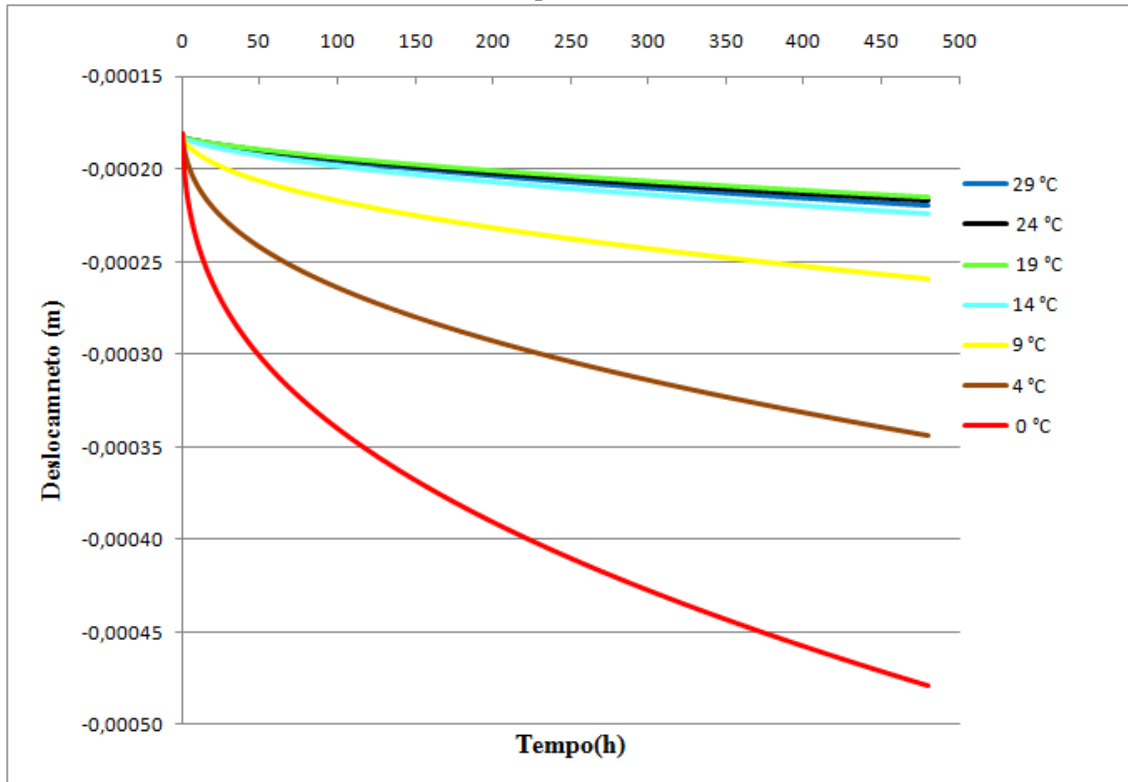


Fonte: Autor (2011).

Observa-se na Figura 5.4 que a redução da temperatura (ΔT maior) também reduz o deslocamento. Um $\Delta T = 4^\circ\text{C}$ apresentou uma redução no deslocamento de 13,6% ao final da análise. Para um $\Delta T = 29^\circ\text{C}$, a redução foi de 33,37%. Neste caso, para as variações de temperatura de 29°C e 24°C , a análise apresenta um deslocamento no sentido da formação, ou seja, forçando a “abertura” do poço. Isso ocorre porque, para esse poço, as taxas de deformação por fluência são muito baixas e a deformação devido à diferença de temperatura consegue superar essa deformação. Essas variações de temperatura são muito grandes para essa situação, servindo apenas para mapear a influência da temperatura.

O resultado para o modelo A2, que apresenta uma maior profundidade em relação ao modelo A1, é apresentado na Figura 5.5. As curvas apresentadas na Figura 5.5 mostram que para um $\Delta T = 4^\circ\text{C}$ a redução no deslocamento é de 28,23% ao final da análise. As curvas para a variação de temperatura de 29°C , 24°C e 19°C apresentaram, intuitivamente, resultados incoerentes porque, para um ΔT maior, esperava-se uma maior redução e isso não ocorreu. Entretanto, o resultado para esses três ΔT não devem ser considerados porque, nos instantes iniciais, as tensões de von Mises nas proximidades da parede do poço extrapolam as faixas de tensões para o qual os parâmetros da equação constitutiva de fluência foram validados que é de 6 – 20 MPa (BORGES, 2008).

Figura 5.5 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo A2 para diversas variações de temperaturas.



Fonte: Autor (2011).

Para essas três variações de temperatura, no início da análise e na proximidade da parede do poço, os valores das tensões de von Mises foram da ordem de 22 MPa. Como é um valor próximo ao limite de 20 MPa, pode-se cogitar que o incremento utilizado neste modelo ($\Delta t = 0,1$ s) foi grande e que a sua redução forneceria resultados diferentes, com tensões dentro do intervalo de validação. Entretanto, foi realizado um teste reduzindo, no início da análise, o Δt para 0,01 s e posteriormente mantido o mesmo incremento de 0,1 s e constatou que os deslocamentos, para as duas situações, apresentam valores muito próximos, com erros relativos na ordem de 0,4%. As tensões para a simulação com o Δt reduzido apresentou a mesma ordem de grandeza (22 MPa) de tensões no mesmo instante da simulação anterior. Com o Δt reduzido, é possível ainda analisar as tensões em instantes menores do que as simulações com o Δt maior, ou seja, em instantes inferiores a 0,1 s. Nesses instantes inferiores a 0,1 s, as tensões apresentaram valores ainda maiores, na ordem de 25 MPa.

O modelo A3 é o que apresenta a maior profundidade do grupo A. Nesse modelo, em todas as variações de temperatura, as tensões no início da análise se apresentam fora da faixa de validação das tensões. Por isso, esses resultados não são apresentados.

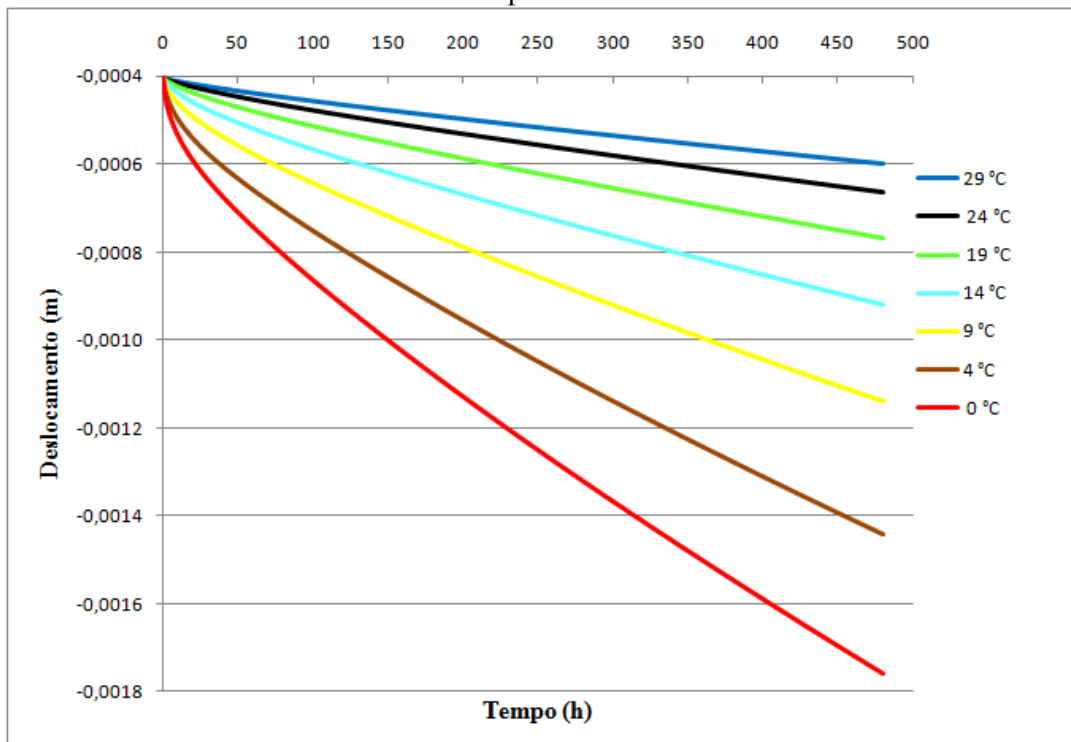
Os parâmetros para o segundo grupo de modelos (grupo B) estão apresentados na Tabela 5.3. Esse grupo de modelos é simulado considerando apenas a taquidrita, que é um sal bastante móvel, ao contrário da halita, e também considera o mesmo diâmetro, peso do fluido de perfuração e coeficiente de empuxo de terra. A Figura 5.6 apresenta o deslocamento em função do tempo para o modelo B1.

Tabela 5.3 - Definição dos modelos do grupo B.

	Modelo B1	Modelo B2	Modelo B3
Lâmina d'água	750 m	1125 m	1500 m
Topo do evaporito	1750 m	2875 m	4000 m
Base do evaporito	1760 m	2885 m	4010 m
Intercalação	-	-	-
Diâmetro	12,25 pol	12,25 pol	12,25 pol
Fluido de perfuração	10 lb/gal	10 lb/gal	10 lb/gal
Litologia	Taquidrita	Taquidrita	Taquidrita

Fonte: Autor (2011).

Figura 5.6 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo B1 para diversas variações de temperaturas.

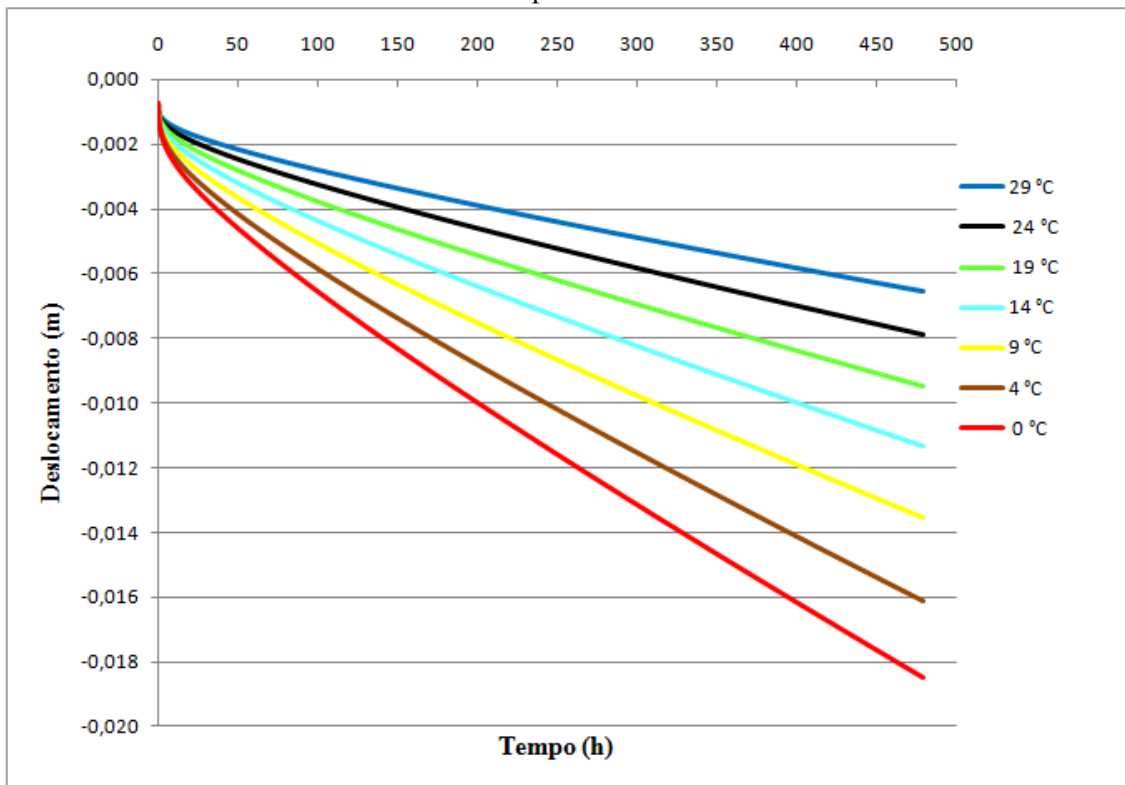


Fonte: Autor (2011).

A Figura 5.6 apresenta consideráveis reduções no deslocamento final e para um $\Delta T = 4^\circ\text{C}$ a redução foi de 18%, enquanto que para um $\Delta T = 29^\circ\text{C}$, a redução foi de 66%.

O resultado do modelo B2 é apresentado na Figura 5.7.

Figura 5.7 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo B2 para diversas variações de temperaturas.

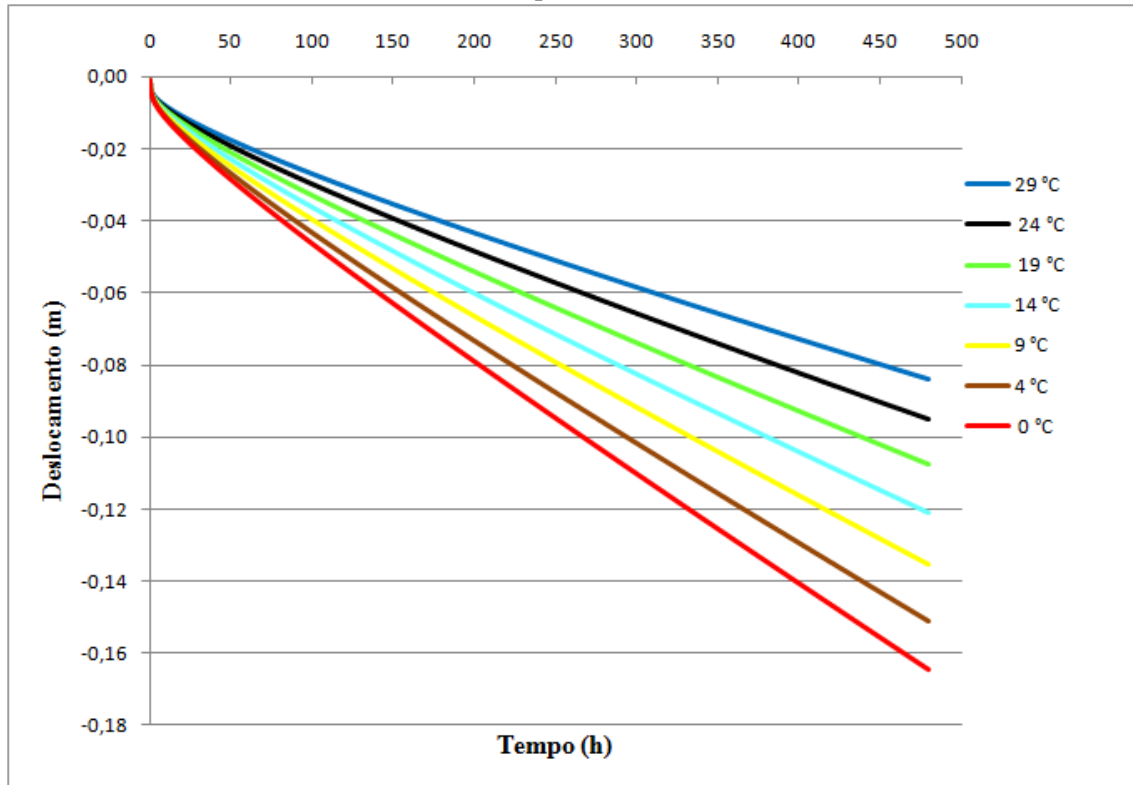


Fonte: Autor (2011).

Na Figura 5.7 observam-se também reduções de deslocamento que chegam a 12,78% e 64,56% para uma redução de temperatura de $\Delta T = 4^\circ\text{C}$ e $\Delta T = 29^\circ\text{C}$, respectivamente.

O resultado do modelo B3 está ilustrado na Figura 5.8. Esse modelo é o mais crítico, pois considera o sal mais móvel (taquidrita) e a profundidade mais alta que resulta em uma maior temperatura.

Figura 5.8 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo B3 para diversas variações de temperaturas.



Fonte: Autor (2011).

Nesse modelo, a menor variação de temperatura (4°C) resulta ao final da análise em uma redução no deslocamento de 8,26%. Essa redução, em termos relativos, é menor do que o modelo A2 que considera apenas halita. Entretanto, a redução de 4°C nesse modelo corresponde a um valor absoluto de 1,358 cm enquanto que no modelo A2 a redução absoluta é de 0,0135 cm. Portanto, esse caso é mais crítico porque o deslocamento final é maior, sendo mais suscetível a apresentação de maiores problemas durante o processo de perfuração do poço.

É importante destacar que os valores de deslocamentos nas curvas da Figura 5.8 são altos, ultrapassando 16 cm em alguns casos. Como o raio do poço para esse modelo é de 6,125 pol (15,55 cm), o valor crítico para prender a coluna de perfuração já teria sido atingido em um instante de tempo bem inferior do que às 480 horas.

A Tabela 5.4 apresenta os modelos do grupo C e a definição dos seus parâmetros. Esses modelos são constituídos do sal halita com uma intercalação de taquidrita e também mantêm constantes o peso do fluido de perfuração, o diâmetro do poço e o coeficiente de empuxo de terra.

Tabela 5.4 - Definição dos modelos do grupo C.

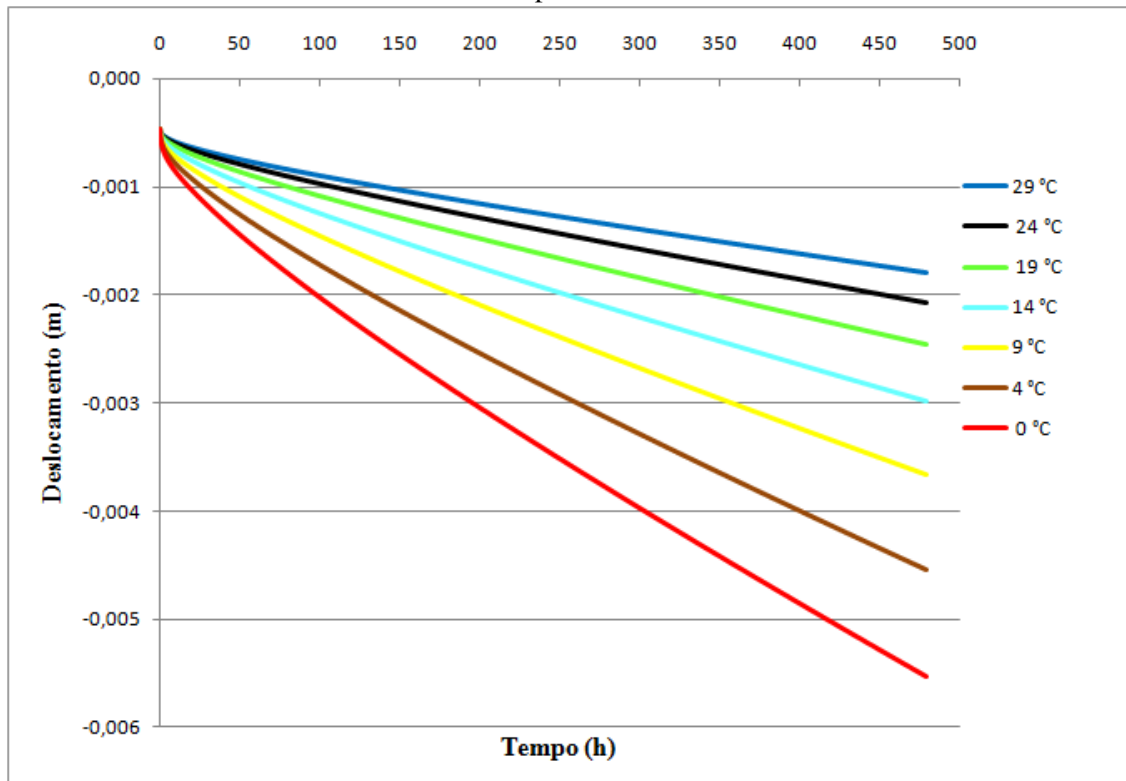
	Modelo C1	Modelo C2	Modelo C3
Lâmina d'água	750 m	1125 m	1500 m
Topo do evaporito	1750 m	2875 m	4000 m
Base do evaporito	1850 m	2975 m	4100 m
Intercalação	20 m	20 m	20 m
Diâmetro	14,75 pol	14,75 pol	14,75 pol
Fluido de perfuração	12 lb/gal	12 lb/gal	12 lb/gal
Litologia	H/T/H	H/T/H	H/T/H

Fonte: Autor (2011).

O modelo menos profundo (C1) resultou em resultados inconsistentes. As faixas de tensões para todos os modelos são baixas e também extrapolam o intervalo de validação da halita mostrado anteriormente.

O resultado do modelo C2, mais profundo que o C1, está ilustrado na Figura 5.9.

Figura 5.9 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo C2 para diversas variações de temperaturas.

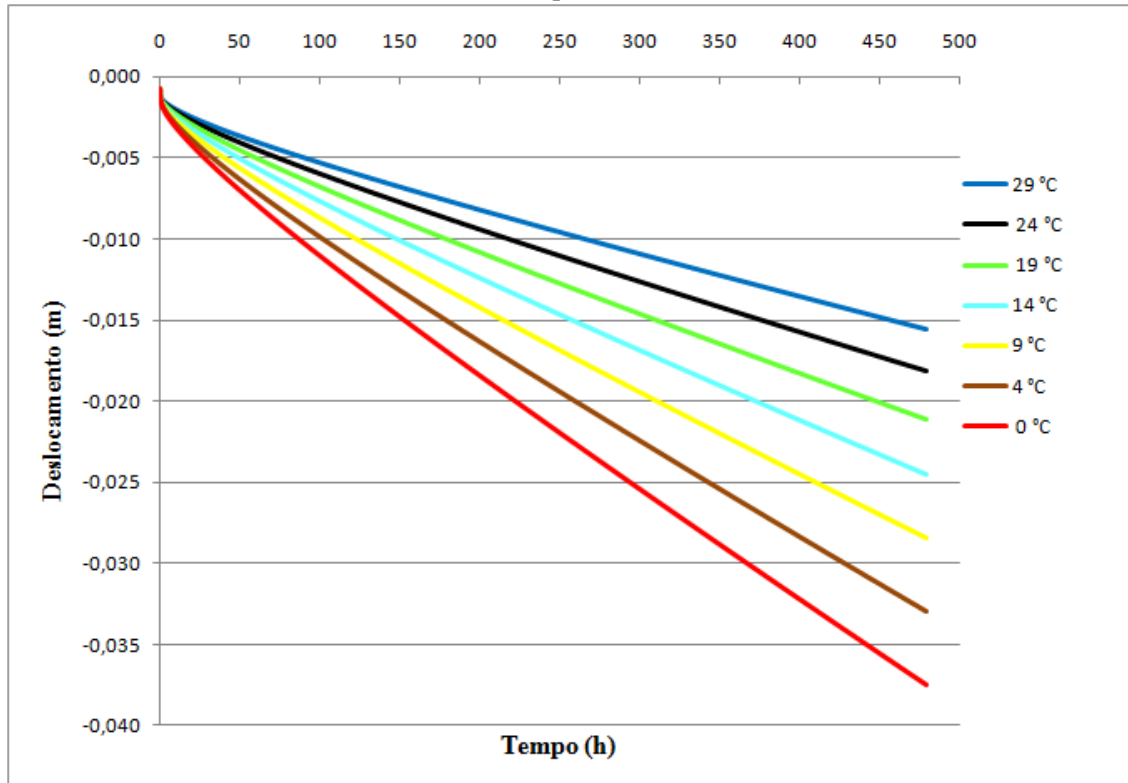


Fonte: Autor (2011).

Nesse modelo, as tensões iniciais na parede do poço se encontram no intervalo de validação. Uma variação de 4°C e 29°C na temperatura resulta em uma redução no deslocamento de 17,86% e 67,44%, respectivamente.

A Figura 5.10 apresenta o deslocamento em função do tempo para o modelo C3.

Figura 5.10 – Variação do deslocamento em função do tempo no modelo C3 para diversas variações de temperaturas.



Fonte: Autor (2011).

Para uma variação de 4°C e 29°C, a redução relativa foi de 12% e 58,38%, respectivamente, enquanto que a redução absoluta foi de 0,45 cm e de 2,188 cm. Esses valores podem se tornar mais expressivos se as profundidades analisadas forem maiores. Nesses modelos simulados, a base da camada salina mais baixa considerada é de 4100 m. Para simular com profundidades mais elevadas é necessário um maior intervalo de validação de tensões para a equação constitutiva de fluência. Mesmo a essas profundidades consideradas, apesar dos valores não parecerem expressivos, qualquer redução considerada no fechamento do poço pode fornecer algumas horas a mais para realizar as operações necessárias na etapa de perfuração.

6 CONCLUSÕES

Na etapa de perfuração de poços, a presença de camadas salinas pode ser um fator complicador, uma vez que pode ocasionar o fechamento do poço e resultar alguns problemas como o aprisionamento da coluna de perfuração. A taxa de fechamento dessas rochas salinas é sensível à variação de temperatura, fazendo com que essa variação acelere o fechamento. Verificar a influência da temperatura nessas rochas é fundamental para entender o comportamento e apresentar soluções para o problema.

A contribuição deste trabalho está relacionada à realização de um estudo paramétrico, considerando um problema térmico transiente, para verificar o efeito causado na fluência das rochas salinas devido a variações de temperatura sofridas na parede do poço. Fluidos com temperaturas mais baixas que a temperatura da formação provocam alterações consideráveis na taxa de fechamento dos poços, reduzindo o fechamento.

A partir das simulações realizadas, percebe-se que para uma variação de temperatura (ΔT) maior, ou seja, uma temperatura menor na parede do poço em relação à temperatura inicial do maciço, há uma maior redução da fluência do sal. Isso acontece por dois fatores: (a) redução da própria taxa de deformação viscosa da equação constitutiva de fluência; (b) pela deformação térmica contrária ao movimento de fluência causada por essa diferença de temperatura. A deformação térmica, além de apresentar contribuições para a redução da deformação total do problema, ocasiona alterações nas tensões, influenciando na equação constitutiva de fluência.

Neste trabalho foram considerados 3 grupos de modelos (A, B e C). Cada um desses grupos contém 3 modelos geométricos diferenciados apenas pela profundidade que se encontra a rocha salina em relação ao nível do mar. O grupo A é composto de modelos com apenas o sal halita, o B apenas a taquidrita e o C considera a halita com uma intercalação de taquidrita. Foram avaliadas 6 temperaturas de fluido de perfuração para cada modelo o que resultou em 54 simulações. Os resultados mostraram que a temperatura influencia bastante nos resultados e para uma variação de temperatura de 4°C a redução no deslocamento chegou a 18%, enquanto que para uma variação de 29°C a redução chegou a valores de aproximadamente 68%.

Um dos problemas e que pode ser tema para um estudo futuro é a parte operacional para manter o fluido de perfuração a baixas temperaturas. Isso implica em manter a temperatura mais baixa na borda do poço, sendo necessária além de um resfriamento adequado no fluido de perfuração, uma velocidade tal que retardasse o seu aquecimento

devido à temperatura da formação. Outra problemática é o aquecimento desse fluido quando estivessem sendo elaboradas operações de manobra.

Contudo, com a perfuração de poços no pré-sal onde a fluência das rochas salinas seja um fator importante, novos estudos e ensaios voltados para área operacional é interessante visto que as simulações apresentadas neste trabalho mostram que a redução na fluência pode ser considerável.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, C. N. **Um modelo simplificado para a simulação do comportamento de poços em rochas salinas**. 72f. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2009.
- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: primeiros passos**. Editora Unicamp, São Paulo, Brasil, 2003.
- BARY, A. et al. **Storing natural gas underground**. Oilfield Review, v. 14, n. 2, p. 2-17, 2002.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- BÉREST, P. et al. **Transient behavior of salt caverns - interpretation of mechanical intergity tests**. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol 44, no. 5, pp. 767 - 786, 2007.
- BORGES, R. G. **Avaliação numérica de perturbações de tensões associadas a estruturas salíferas e suas influências na estabilidade de poços**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008. 135p. Dissertação de Mestrado.
- BOTELHO, F. V. C. **Análise numérica do comportamento mecânico do sal em poços de petróleo**. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008. Dissertação de Mestrado.
- CARTER, N. L. et al. **Rheology of rock salt**. Journal of Structural Geology, 1993, **15**, pp. 1257 - 1271.
- CAVALCANTE, M. A. A. **Modelagem do comportamento termo - mecânico transiente de estruturas de materiais compósitos pela teoria dos volumes finitos**. Maceió: Universidade Federal de Alagoas, 2006. 164p. Dissertação de Mestrado.
- CELLA, P. R. C. **Desenvolvimento e execução de ensaios triaxiais de fluência estacionária em rocha salina sob altas pressões e temperaturas**. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003. 203p. Tese de Doutorado.
- CHRISTANTE, L. **Pré - sal: desafios científicos e ambientais**. Unesp Ciência. São Paulo. Disponível em: http://www.unesp.br/aci_ses/revista_unespciencia/acervo/03/pre-sal-desafios-cientificos-e-ambientais. Acesso em : 6 de julho de 2011.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and applications of finite element analysis**. 3a Edição. ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

COSTA, A. M. **Uma aplicação de métodos computacionais e princípios de mecânica das rochas no projeto e análise de escavações destinadas à mineração subterrânea.** Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, 1984. 1488p. Tese de Doutorado.

COSTA, A. M.; POIATE, E. **Rocha salina na indústria do petróleo: aspectos relacionados à reologia e à perfuração de rochas salinas.** In: MOHRIAK, W.; SZATMAN, P.; ANJOS, S. M. C. **Sal: geologia e tectônica: exemplos de bacias sedimentares.** 1a Edição. ed. São Paulo: Beca Edições, 2008. Cap. 17.

DADVAND, P. **A framework for developing Finite Element codes for multi-disciplinary applications.** Tese (Doutorado) - Universidade Politécnic de Catalunya Barcelona, 2007.

ESCARPINI FILHO, R. S. **Análise de estruturas de materiais compósitos viscoelásticos lineares através da teoria de volumes finitos.** Maceió: Universidade Federal de Alagoas, 2010. 106p. Dissertação do Mestrado.

FALCÃO, J. L. **Perfuração de formações salíferas.** In: MOHRIAK, W.; SZATMARI, P.; ANJOS, S. M. C. **Sal: geologia e tectônica: exemplos nas bacias brasileiras.** 1a Edição. ed. São Paulo: Beca edições, 2008. Cap. 18.

FARMER, P. et al. **Exploring the subsalt.** Oilfield Review v. 8, no. 1, p. 50-64, 1996.

FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAN, K. **Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials.** North - Holland Publishing, 1976.

FJAER, E. et al. **Petroleum related rock mechanics.** Amsterdam: Elsevier, 1992.

FONSECA, J. A. S. P. **Análise viscoelasto - plástica de Estados Planos de Tensão e Estados Planos de Deformação.** Porto: Universidade do Porto, 1986. 262 p. Dissertação de Mestrado.

FUJII, J. **Método dos Elementos Finitos aplicado ao problema de escavação.** COPPE-UFRJ. Rio de Janeiro, 1976. 323 p. Dissertação de Mestrado.

GRAVINA, C. C. **Simulação numérica do comportamento mecânico do sal em poços de petróleo.** São Paulo: Universidade Estadual de Campinas, 1997. 168p. Dissertação de Mestrado.

HANSELMAN, D.; LITTLEFIELD, B. **MATLAB 6 - Curso completo.** Prentice Hall , São Paulo, Brasil, 2002.

HOLMAN, J. P. **Heat transfer.** 6a Edição. New York: McGraw - Hill, 1986.

HUNSCHE, U.; HAMPEL, A. **Rock salt - the mechanical properties of the host rock material for a radioactive waste repository.** Engineering Geology, Amsterdam, v.52, n.3/4, p. 271-291, 1999.

LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. **Fundamentals of the Finite Element Method for heat and fluid flow**. Chichester: John Wiley & Sons, 2004.

MARQUES, S. P. C. **Um modelo numérico para análise de estruturas de materiais compostos considerando efeitos viscoelásticos e falhas progressivas**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994. 193 p. Tese de Doutorado.

MASE, G. T.; MASE, G. E. **Continuum mechanics for engineers**. 2a Edição. CRC Press, 1999.

MASUERO, J. R. **Análise de problemas de fratura em materiais viscoelásticos via Elementos Finitos**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992. 105 p. Dissertação de Mestrado.

MOHRIAK, W.; SZATMARI, P. **Introdução às propriedades químicas e físicas dos evaporitos**. In: MOHRIAK, W.; SZATMARI, P.; ANJOS, S. M. C. **Sal: geologia e tectônica: exemplos nas bacias sedimentares**. 1a Edição. ed. São Paulo: Beca Edições, 2008. Cap. 1.

MUNSON, D. E. **Constitutive model of creep in rock salt applied to underground room closure**. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, vol. 34, no. 2, p. 233 - 247, 1997.

MUSHREF, M. A. **Fourier - Bessel expansions with arbitrary radial boundaries**. Applied Mathematics, vol. 1, p. 18 - 23, 2010.

OLIVEIRA, P. R. L. **Análise não - linear de deformação lenta utilizando o Método dos Elementos Finitos**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2004. 106p. Dissertação de Mestrado.

POIATE, E.; COSTA, A. M.; FALCÃO, J. L. **Well design for drilling through thick evaporite layers in Santos basin - Brazil**. In: Society of Petroleum Engineers. International Association of Drilling Contractors. Drilling Conference, 2006, Miami. Proceedings... Richardson; Society of Petroleum Engineers, 2006. Paper SPE 99161.

PUDEWILLS, A. e DROSTE, J. **Numerical modeling of the thermomechanical behavior of a large - scale underground experiment**. Computers & Structures, 81, pp. 911 - 918, 2003.

RAMOS, V. C. L. **Modelagem numérica do comportamento mecânico dos solos**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1999. Tese de Doutorado.

SANTOS, J. P. L. **Análise de modelos reológicos viscoelásticos através de formulações mistas em Elementos Finitos**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008. 135p. Dissertação de Mestrado.

SHAMES, I. H.; COZZARELLI, F. A. **Elastic and inelastic stress analysis**. Prentice - Hall International, 1997.

SILVA, M. A. M.; SCHREIBER, C.; SANTOS, C. L. **Evaporitos como recursos minerais.** Brazilian Journal of Geophysics, vol 18(3), 2001.

SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational methods for plasticity - theory and applications.** Wiley, 2008.

SUTRADHAR, A.; PAULINO, G. H.; GRAY, L. J. **Transient heat conduction in homogeneous and non - homogeneous materials by the Laplace transform Galerkin Boundary Element Method.** Engineering Analysis with Boundary Elements, 2002. 119-1132.

THOMAS, J. E. et al. **Fundamentos de engenharia de petróleo.** Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

WARREN, J. K. **Evaporites: sediments, resources and hydrocarbons.** Berlin: Springer - Verlag, 2006.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method.** 5a Edição. Butterworth - Heinemann, v. I, 2000.

APÊNDICE A – PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA

Na teoria da viscoelasticidade linear é possível fazer uma analogia entre as relações constitutivas do problema elástico com as do problema viscoelástico, que diferem entre si pela dependência explícita do tempo nas variáveis deste último. Entretanto, as equações de equilíbrio e cinemáticas, em geral, são as mesmas para as análises elásticas e viscoelásticas.

A relação constitutiva entre tensão e deformação para um material elástico e isotrópico pode ser dividida em uma equação desviadora e outra volumétrica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2Ge_{ij} \\ \sigma_{ii} &= 3K\varepsilon_{ii} \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde G e K são, respectivamente, os módulos de elasticidade transversal e volumétrico.

Segundo Findley *et al.* (1976), a equação constitutiva de materiais lineares sensíveis à variação temporal, para um estado de tensão simples, pode ser escrita, de maneira geral, da seguinte forma:

$$P\sigma = Q\varepsilon \tag{A.2}$$

onde P e Q são operadores diferenciais lineares em função do tempo. Assim, essa relação também pode ser utilizada para descrever o comportamento de materiais viscoelásticos, principalmente quando se utiliza alguns modelos mecânicos como os mostrados na seção 2.3.3.1.

Para o caso viscoelástico, segundo Shames e Cozzarelli (1997), considerando um teste simples de tensão ou compressão, é possível encontrar um par de operadores que relaciona tensão com deformação definidos por P^E e Q^E . Da mesma forma, para um teste de cisalhamento simples, o par de operadores que considerara a relação entre tensão e deformação cisalhante é definido por P^G e Q^G . Por último, para um teste de pressão simples o par de operadores é P^K e Q^K .

Aplicando a transformada de Laplace (FINDLEY *et al.*, 1976), esses operadores lineares também podem ser expressos em termos da variável transformada s . A Tabela A.1 mostra, de uma forma geral, esses operadores e o equivalente na variável transformada.

Tabela A.1 – Operadores diferenciais lineares.

Operadores Diferenciais	Operadores Diferenciais Transformados
$P\sigma = Q\varepsilon$	$\bar{P}\sigma = \bar{Q}\varepsilon$
$P = p_0 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + p_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}$	$\bar{P} = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_m s^m$
$Q = q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t} + q_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + q_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}$	$\bar{Q} = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_m s^m$

Os valores de p_0, p_1, \dots, p_m e q_0, q_1, \dots, q_m , apresentados na Tabela A.1, são constantes do material. Portanto, é possível fazer uma analogia entre as equações constitutivas viscoelásticas com as elásticas, como mostra a Tabela A.2.

Tabela A.2 - Correspondência entre o problema elástico e viscoelástico.

Elástico linear		Viscoelástico linear
E	\leftrightarrow	$\frac{Q^E}{P^E}$
$2G$	\leftrightarrow	$\frac{Q^G}{P^G}$
$3K$	\leftrightarrow	$\frac{Q^K}{P^K}$

Considerando o modelo de Maxwell, por exemplo, a sua relação entre a tensão e a deformação (Equação (2.19)) fornece os seguintes operadores:

$$P^E = 1 + \frac{\eta}{E} \frac{\partial}{\partial t} \quad (A.3)$$

$$Q^E = \eta \frac{\partial}{\partial t}$$

Com isso, pelo princípio da correspondência, tem-se que:

$$E = \frac{Q^E}{P^E} = \frac{1 + \frac{\eta}{E} \frac{\partial}{\partial t}}{\eta \frac{\partial}{\partial t}} \quad (A.4)$$

ou ainda em termos da variável transformada de Laplace:

$$E = \frac{\bar{Q}^E}{\bar{P}^E} = \frac{1 + \frac{\eta}{E}s}{\eta s} \quad (\text{A.5})$$

A analogia mostrada para o problema de Maxwell nas Equações A.3, A.4 e A.5 podem ser realizada para qualquer combinação dos modelos reológicos apresentados neste trabalho e permite, por exemplo, encontrar a solução do problema viscoelástico, a partir da solução elástica, substituindo o módulo equivalente. O resultado dessa substituição é uma equação diferencial na variável tempo que pode ser resolvida utilizando as suas condições iniciais. Entretanto, se o módulo equivalente utilizado estiver em termos da variável transformada, é necessário calcular a inversa da transformada de Laplace para obter a solução em termos da variável original, no caso o tempo.