



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Tópicos em teorias de gauge com violação de  
simetria de Lorentz e CPT**

JOSÉ FÁBIO DOS SANTOS DE ASSUNÇÃO

MACEIÓ-AL, MARÇO DE 2018

Tese de Doutorado

Tópicos em teorias de gauge com violação de simetria de  
Lorentz e CPT

JOSÉ FÁBIO DOS SANTOS DE ASSUNÇÃO

Tese de Doutorado apresentada ao  
Programa de Pós-graduação em Física  
do Instituto de Física da Universidade  
Federal de Alagoas, como parte dos  
requisitos necessários para a obtenção  
do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Mariz

Maceió-AL, Maio de 2017

*Instituto de Física - UFAL*

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

A851t Assunção, José Fábio dos Santos de.  
Tópicos em teorias de Gauge com violação de simetria de Lorentz e CPT /  
José Fábio dos Santos de Assunção. – 2018.  
133 f.

Orientador: Tiago Homero Mariz do Nascimento.  
Tese (doutorado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal  
de Alagoas. Instituto de Física, Maceió, 2018.

Bibliografia: f. 125-133.

1. Gauge – Teorias de. 2. Violação de simetria de Lorentz. 3. Termo de Chern-Simons. 4. Simetria – Quebra espontânea. 5. Temperatura finita. I. Título.

CDU: 530.145:537.8



## Universidade Federal de Alagoas Instituto de Física

Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14, Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL, Brasil  
Fone : (082) 3214-1423/FAX (82) 3214-1645

### ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DO PÓS-GRADUANDO JOSÉ FÁBIO DOS SANTOS ASSUNÇÃO REALIZADA NO DIA DOIS DE MARÇO DE DOIS MIL E DEZOITO.

Aos dois dias do mês de março de dois mil e dezoito, às catorze horas, em sessão pública realizada no Auditório do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, o professor Marcelo Leite Lyra, na qualidade de coordenador do Programa de Pós-Graduação em Física, instalou os trabalhos para defesa de Tese de Doutorado do Pós-Graduando **José Fábio dos Santos Assunção**. O coordenador apresentou a Banca Examinadora constituída pelos seguintes professores: Tiago Homero Mariz do Nascimento, como presidente da banca e orientador, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Alexandre Manoel de Moraes Carvalho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Wellington Romero Serafim Freire, da Universidade Federal Rural de Pernambuco e Francisco de Assis de Brito, da Universidade Federal de Campina Grande, e como suplentes: Albert Yu Petrov, da Universidade Federal da Paraíba e André Carlos Lehum, da Universidade Federal do Pará. Em seguida o presidente da banca convocou o candidato a expor seu trabalho de tese, intitulado: "**Tópicos em teorias de gauge com violação de simetria de Lorentz e CPT**". Após a exposição do candidato, teve início a arguição por parte da banca examinadora. O presidente da banca examinadora, após solicitar perguntas ou comentários do público presente, suspendeu os trabalhos para que fosse realizado o julgamento. A banca examinadora decidiu **aprovar o candidato com grau "A"**. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão, da qual eu, Victor Xavier Brito, secretário da Pós-Graduação, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e que depois de lida e aprovada, será assinada pelo presidente da banca examinadora e demais membros, pelo candidato e por testemunhas que quiserem. Maceió, dois de março dois mil e dezoito.

Victor Xavier Brito  
Sec. de Pós-Graduação

Wellington R. S. Freire

Tiago Homero Mariz

Francisco de Assis de Brito  
Coord. de Física

José Fábio dos Santos Assunção

# DEDICATÓRIA

À minha mãe (Maria da Penha) e em memória de meu pai (Severino Leopoldino).

## AGRADECIMENTOS

- À Deus, princípio e fim de tudo.
- Aos meus pais, pelo que representam para mim;
- à todos os professores do IF que me ensinaram no mestrado e/ou doutorado, em especial aos professores Wandearley, Socorro, Elton Malta, Fidelis, Marcelo, Kléber, Maria Tereza, Vinícius;
- ao meu orientador Prof. Tiago Mariz, professor com muitas virtudes;
- aos professores do IFAL Itamar Rodrigues e Luiz Galdino;
- aos colegas e amigos do IF, em especial, Leandro, Jonathas, Wellington, Messias, Job, Leônade, Tainã, Jéssica, Juarez, Aléssio;
- ao meu amigo de longas noites de estudo, Ademir;
- a minha comunidade e a todos meus familiares em geral.

## RESUMO

Nesta tese tratamos sobre um assunto bastante estudado na literatura, a violação das simetrias de Lorentz e de CPT na eletrodinâmica quântica, contudo, sob um enfoque diferente do usual. Apresentamos o mecanismo de quebra espontânea de simetria utilizando o modelo Thirring quirral 4D para férmions sem massa, que a princípio não apresenta violação dessas simetrias, mas que a induz espontaneamente. Em seguida, através das flutuações quânticas neste modelo puramente fermiônico, geramos um setor bosônico no qual os fótons emergem como bósons de Goldstone. O modelo composto pela junção destes dois setores é denominado eletrodinâmica de bumblebee com o termo de Carrol-Field-Jackiw (CFJ). A partir deste ponto, tratamos da indução radiativa do termo CFJ com o objetivo de elucidar algumas questões presentes na literatura. Realizamos essa indução considerando o acoplamento de férmions com o campo de calibre e também com o campo gravitacional no cenário de temperatura finita. Discutimos também a não-analiticidade presente na indução quando férmions massivos são usados. Por fim, reanalisamos a eletrodinâmica de bumblebee com respeito ao seu conteúdo de energia livre, onde a relacionamos com a eletrodinâmica do modelo padrão.

**Palavras Chave:** Violação de simetria de Lorentz, Quebra dinâmica, Modelo de Bumblebee, Termo de Chern-Simons, Temperatura finita.

# Sumário

Capa . . . . .	i
Folha de rosto . . . . .	i
Dedicatória . . . . .	ii
Agradecimentos . . . . .	iii
Resumo . . . . .	iv
<b>1 Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2 Quebra dinâmica de simetria de Lorentz e CPT</b>	<b>13</b>
2.1 Introdução . . . . .	14
2.2 Equação de Gap . . . . .	18
2.3 Restauração de Simetria . . . . .	27
2.4 Correções em um loop . . . . .	30
<b>3 Indução do termo CFJ com prescrição 't Hooft-Veltman</b>	<b>39</b>
3.1 Introdução . . . . .	40
3.2 O termo CFJ induzido . . . . .	43
3.3 Efeitos de temperatura finita . . . . .	51
3.4 Inconsistência na Regularização Dimensional com a matriz $\gamma_5$ . . . . .	55



---

<b>4</b>	<b>Indução do termo CFJ gravitacional</b>	<b>59</b>
4.1	Introdução . . . . .	60
4.2	O termo CFJ gravitacional . . . . .	62
4.3	Efeitos de temperatura finita sobre a indução . . . . .	72
4.4	Avaliação dos Coeficientes . . . . .	81
4.5	O termo CS gravitacional em temperatura finita . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Não analiticidade do termo CFJ em <math>T \neq 0</math></b>	<b>88</b>
5.1	Introdução . . . . .	88
5.2	O tensor de polarização do vácuo em um loop . . . . .	91
5.3	Não-analiticidade do termo CFJ . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Energia Livre do Modelo Bumblebee</b>	<b>106</b>
6.1	Introdução . . . . .	107
6.2	O propagador livre do Modelo de Bumblebee . . . . .	108
6.3	Contribuição em um-loop para a energia livre . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Considerações finais e perspectivas</b>	<b>116</b>
<b>8</b>	<b>Anomalia Axial</b>	<b>120</b>
	<b>Referências</b>	<b>126</b>

# Lista de Figuras

4.1	a) Semimetal de Weyl formado por camadas sobrepostas IT-NI. b) Efeito em temperatura finita: Rotação. . . . .	61
4.2	Contribuições em um laço . . . . .	64
5.1	Gráfico das funções $F(\xi)$ e $G(\xi)$ . . . . .	102
5.2	Gráfico das funções $H(\eta)$ e $J(\eta)$ . . . . .	105

## ABSTRACT

In this thesis we deal with a subject very studied in the literature, a violation of the Lorentz and CPT symmetries in quantum electrodynamics, however, under a different approach than usual. We present the spontaneous symmetry breaking mechanism using the Thirring 4D chiral model for massless fermions, which a principle does not violate these symmetries but induces spontaneously. Then, through the quantum fluctuations in this purely fermionic model, we generate a bosonic sector in which the photons emerge as Goldstone bosons. The joint composite model of these two sectors is called the Bumblebee electrodynamics with the term Carroll-Field-Jackiw (CFJ). From this point, we deal with the radiative induction of the CFJ term with the purpose of elucidating some questions present in the literature. Finally, we reanalyzed Bumblebee electrodynamics with respect to its free energy content, where we relate it to the electrodynamics of the standard model.

**Key Words:** Lorentz Symmetry Violation, Dynamic Breaking, Bumblebee Model, Chern-Simons Term, Finite Temperature.

# Capítulo 1

## Introdução

A invariância de Lorentz é uma das simetrias mais bem estabelecidas e testadas na física [1, 2], sendo por isso considerada uma simetria válida no atual estágio do universo. Por outro lado, é de se esperar que numa escala de altas energias, tal qual aquela do universo pré-inflacionário<sup>1</sup>, violações dessa simetria sejam possíveis [3], de tal forma que a simetria de Lorentz não corresponderia mais a uma simetria absoluta. Esta possibilidade abre portas para a investigação de teorias efetivas que contemplem esses efeitos [4], como também para a busca por evidências experimentais, i.e., efeitos de violações em escalas de energia atualmente acessíveis experimentalmente e/ou fenomenologicamente [2, 5, 6]. Tais teorias efetivas seriam vistas como o limite de baixas energias de teorias fundamentais, por exemplo, de teorias de cordas, que possuem em seu arcabouço a possibilidade de quebras espontâneas das simetrias de Lorentz e de CPT<sup>2</sup>, a saber, aquela apresentada por

---

<sup>1</sup>É assumido que na escala de Planck os efeitos quânticos da gravidade se manifestam.

<sup>2</sup>A conexão entre a simetria de Lorentz e a simetria CPT é dada pelo teorema CPT.

---

Kostelecký em [7].

Em tais teorias fundamentais a violação dessas simetrias ganha existência através de um procedimento análogo ao mecanismo de Higgs [8], no qual um campo escalar que possui dois ou mais estados fundamentais, i.e., vácuo degenerado, seleciona espontaneamente um destes estados para ocupar, assumindo nesse estado um valor esperado no vácuo não-nulo (não-trivial), que contribui como massa para as partículas do modelo padrão, violando assim alguma simetria pré-existente. Resumidamente, quando ocupa um vácuo não-trivial, o campo ganha um valor esperado não-nulo em um processo conhecido como quebra espontânea de simetria. De modo equivalente, para um campo fundamental que seja vetorial ou tensorial, e inicialmente invariante por transformações de Lorentz, o decaimento num vácuo não-trivial implicará num valor esperado não-nulo (também vetorial ou tensorial) que aponta numa direção fixa do espaço-tempo, quebrando assim espontaneamente a invariância de Lorentz da teoria [7].

A quebra dinâmica de simetria é a quebra espontânea de simetria obtida por intermédio de correções quânticas. Esta forma constitui o mecanismo de Coleman-Weinberg proposto em 1973 e bastante explorado na literatura desde então [9]. Por exemplo, na Ref. [10], o mecanismo foi empregado como um modo de gerar a eletrodinâmica quântica através de correções radiativas, sem invocar a invariância de gauge local, partindo de uma teoria que inicialmente era apenas fermiônica [11, 12, 13]. Nessa construção, os bósons (fótons) que emergem são resultantes da presença de um condensado vetorial, o qual corresponde ao valor esperado de uma corrente vetorial previamente observada no modelo. Como uma quebra espontânea da simetria de Lorentz é promovida por esse condensado, a teoria obtida foi posteriormente

---

reinterpretada como um modelo com quebra dinâmica de simetria de Lorentz e CPT [14, 15]. Recentemente, esta idéia foi estendida para o caso de correntes vetoriais axiais [16] e para o campo gravitacional [17].

Trataremos desta temática já no capítulo 2 desta tese, considerando como teoria de partida o modelo de Thirring quirral 4D (um modelo para férmions axiais auto-interagentes), utilizado na Ref. [16], contudo para férmions sem massa. Esta possibilidade é interessante pois, embora o Modelo Padrão (MP) não contemple férmions sem massa, teorias em escalas de altas energias prevêem a existências de férmions sem massa, como é o caso do fotino (o superparceiro do fóton) presente na supersimetria. O modelo de Thirring quirral 4D inicialmente não apresenta a violação das simetrias de Lorentz e CPT, mas a induz dinamicamente pelos mecanismos acima apresentados. Além disso, como previsto pelo teorema de Goldstone [18], no processo de quebra espontânea de uma simetria contínua, um campo bosônico de longo alcance será também criado, i.e., uma excitação não massiva formando um setor bosônico antes não existente. Discutiremos também os efeitos térmicos sobre essa quebra dinâmica de simetria, i.e., o processo de restauração espontânea de simetria, onde calcularemos a temperatura crítica do sistema.

A seguir, ao efetuarmos flutuações em torno do vácuo quântico deste campo, será induzido dinamicamente o modelo bumblebee [19], acrescido de um termo de Chern-Simons 4D, aqui chamado de termo Carroll-Field-Jackiw (CFJ) [20], como uma correção quântica para o recém criado setor bosônico desta teoria.

O modelo bumblebee constitui a teoria de campos mais simples envolvendo a violação espontânea da simetria de Lorentz e CPT [65]. A lagrangiana da eletro-

dinâmica quântica bumblebee utilizada em nosso estudo é dada por

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m - e\not{B}\gamma_5)\psi - \frac{\lambda}{4}(B_\mu B^\mu - \beta^2)^2, \quad (1.1)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$  e  $\lambda$  é um acoplamento positivo adimensional. Este modelo é caracterizado por conter um potencial quadrático suave, o terceiro termo na Eq. (1.1), cujo mínimo não trivial faz surgir um valor esperado no vácuo não nulo e constante,  $\langle B_\mu \rangle = \beta_\mu$ , que conduz à violação da simetria de Lorentz e CPT. De fato, o termo axial,  $e\bar{\psi}\not{B}\gamma_5\psi$ , presente no setor fermiônico da lagrangiana acima, viola a simetria CPT quando o campo assume um valor constante,  $\langle B_\mu \rangle = \beta_\mu$ .

O termo CFJ é um termo topológico e que também viola as simetrias de Lorentz e CPT, enquanto que a simetria de calibre é preservada. Para a sua lagrangiana, podemos escrever

$$\mathcal{L}_{CFJ} = \frac{1}{2}(k_{AF})^\kappa \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

A violação de simetria de Lorentz resulta do fato do quadrivetor  $(k_{AF})_\mu$  ser constante, quebrando assim as transformações de Lorentz de partícula, enquanto que as transformações de observador são mantidas, como em todas as teorias que possuem violação da simetria Lorentz [21]. O termo CFJ (1.2) pode ser gerado dinamicamente a partir da lagrangiana (1.1), quando o campo bumblebee é deslocado ao redor de seu valor esperado não trivial ( $B_\mu \rightarrow B_\mu + \beta_\mu$ ). Neste processo, o termo axial,  $e\bar{\psi}\not{B}\gamma_5\psi$ , presente no setor fermiônico dessa lagrangiana, ao ser deslocado contribui com o termo  $e\bar{\psi}\not{\beta}\gamma_5\psi$ , que é o responsável pela geração dinâmica da lagrangiana CFJ, de modo que  $(k_{AF})_\mu \propto \beta_\mu$  [22].



---

Tem sido argumentado na literatura [23, 24] que quando são utilizados férmions sem massa<sup>3</sup> na geração radiativa do termo CFJ, neste caso o resultado é finito e livre de ambiguidades, pelo menos em três tipos de cenários de regularização: corte (cutoff), dimensional e de temperatura [25]. Contudo, recentemente, um novo e diferente resultado foi obtido, usando-se o método da integral de trajetória (método de Fujikawa) [26] e também pela fórmula de Kubo [27], ambos no contexto da física da matéria condensada. A motivação para esses trabalhos recentes [26, 27] origina-se do fato que certos materiais conhecidos como semimetais de Weyl [28] possuem uma condutividade que é obtida pela ação do termo CFJ [29]. O objetivo do capítulo 3 é realizar esta indução levando em conta as regras de 't Hooft-Veltman para o cálculo do traço das matrizes de Dirac [30, 31]. No capítulo 3 veremos que, ao utilizarmos essa prescrição, o resultado encontrado será idêntico àquele no contexto de matéria condensada e apresentaremos a inconsistência existente quando não é utilizada a prescrição 't Hooft-Veltman. Os efeitos térmicos sobre essa indução serão também avaliados.

Ainda no contexto dos semimetais de Weyl, a ref. [32] mostra a existência de contribuição extra para a condutividade do semimetal quando é permitida a interação do mesmo com o campo gravitacional. Esta contribuição deve ser puramente dependente da temperatura e está associada com a anomalia axial gravitacional [33]. No contexto das teorias quânticas de campos, esta anomalia nunca antes observada na natureza a partir de campos fundamentais seria a responsável pelo decaimento do pión neutro em dois grávitons. Assim, a conexão entre a anomalia axial gravitacional com semimetais de Weyl constitui-se numa maneira de detectar a anomalia

---

<sup>3</sup>O caso massivo será visto no capítulo 4.

gravitacional experimentalmente, a partir de sua dependência com a temperatura. No capítulo 4 reinvestigaremos a geração radiativa do termo CFJ considerando dessa vez o acoplamento de férmions com o campo gravitacional, incluindo efeitos de temperatura.

Para completar o estudo sobre a indução radiativa do termo CFJ, no capítulo 5 estamos interessados em seu comportamento quando férmions massivos são considerados na indução e este sistema físico é colocado em contato com um banho térmico [34, 35, 36, 37]. Sabe-se que no regime de temperatura finita, a auto-energia é, em muitos casos, uma função não analítica do momento externo  $k_\mu$  no limite  $k_\mu \rightarrow 0$ . Devido à seleção de um referencial específico feita pelo banho térmico, a auto-energia, em geral, depende de  $k_0$  e  $\vec{k}$  de maneiras diferentes, de modo que o limite estático ( $k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0$ ) e o limite de grande comprimento de onda ( $k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0$ ) nesses casos não comutam [38, 39, 40, 41, 42, 43]. Mostraremos também as diferenças existentes quando usamos a regularização dimensional, a regularização de corte e quando o cálculo é realizado explicitamente em 4 dimensões. Em especial, o resultado que é obtido no cenário de regularização dimensional está em acordo com aquele obtido no capítulo 3, quando o limite de massa nula é considerado, mesmo sendo esse perturbativo e o outro não perturbativo em  $b_\mu$ .

Por fim, no capítulo 6 investigaremos a teoria dinamicamente induzida no capítulo 2, i.e., a eletrodinâmica bumblebee, com respeito ao conteúdo de energia livre desta. Focaremos nos efeitos de violação sobre o setor bosônico induzido. Como se sabe a energia livre fornece uma informação importante sobre diferentes questões físicas, indo do comportamento de plasmas ultra-quentes à nucleosíntese do Big Bang [44, 45]. Neste contexto, alguns aspectos das correções para a energia livre em

teorias com violação das simetrias já discutidas são apresentados nas referências [46, 47, 48, 49, 50]. Realizaremos nosso estudo obtendo inicialmente o propagador livre da teoria, o qual é semelhante ao da EDQ em um gauge axial não linear sem violação, a seguir calcularemos a energia livre em ordem de um laço. Este resultado é a seguir discutido embasado na Ref. [51] que trata da equivalência entre a eletrodinâmica bumblebee e a QED do modelo padrão da física de partículas em um gauge não linear.

Finalmente, apresentaremos as nossas considerações finais e possíveis perspectivas do presente trabalho.

Usaremos durante todo o trabalho as unidades naturais, ou seja, consideraremos  $\hbar = c = 1$ , onde  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$  e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

## Capítulo 2

# Quebra dinâmica de simetria de Lorentz e CPT

Neste capítulo, analisamos a possibilidade da ocorrência de quebra espontânea da simetria de Lorentz e CPT em um modelo Thirring quirral 4D sem massa, a partir de suas correções quânticas. Estudando o potencial efetivo, verificamos que a corrente axial  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$  pode assumir um valor esperado no vácuo não-trivial, que desencadeia a violação espontânea. Além disso, considerando flutuações quânticas sobre o mínimo do potencial, induzimos dinamicamente uma eletrodinâmica quântica tipo-Bumblebee contendo o termo CFJ. Os efeitos térmicos sobre o sistema são também considerados. Verificamos a existência, em altas temperaturas, de uma nova fase em que a simetria de paridade (P) é restaurada e avaliamos sua temperatura de transição.

## 2.1 Introdução

Em teoria quântica de campos há três modos de implementar a quebra de uma simetria: o explícito, o anômalo<sup>1</sup> e o espontâneo. No nível de energia permitido pelo Modelo Padrão (MP), a violação explícita da simetria de Lorentz é estudada a partir de pequenas correções adicionadas à lagrangiana do MP [4, 52]. O modelo assim obtido é chamado de Modelo Padrão Estendido (MPE) e é conhecido por conter todos os termos que trazem em si violações explícitas das simetrias de Lorentz e de CPT. Nesse modelo, os novos termos (termos corretivos) são compostos pela contração entre coeficientes tensoriais constantes e operadores. Os coeficientes constantes com índices de Lorentz quebram a equivalência entre as transformações de Lorentz de observador e de partícula<sup>2</sup>, ao passo que alguns desses operadores podem violar ainda a simetria de CPT.

A origem dinâmica para esses coeficientes tensoriais é explicada a partir do mecanismo de quebra espontânea de simetria. A violação espontânea da simetria de Lorentz, conforme mencionado na introdução desta tese, é a situação onde campos tensoriais dinâmicos sujeitos à potenciais especiais adquirem valores esperados no vácuo não-triviais. Esses valores esperados, por sua vez, são os coeficientes tensoriais presentes no MPE e responsáveis pela violação da simetria de Lorentz.

As teorias de campos mais simples envolvendo um campo vetorial que adquire um valor esperado no vácuo (vev) não-trivial são os modelos de bumblebee, i.e.,

---

<sup>1</sup>A quebra anômala da simetria de Lorentz, em cuja origem pode-se considerar como explícita, é de importância especial se o espaço-tempo exibir uma topologia não trivial, como uma dimensão espaço-temporal compacta ou quando há um defeito linear no espaço-tempo [53].

<sup>2</sup>Nesse contexto, a violação da simetria de Lorentz pode ser entendida como uma redução no grupo de suas transformações.

estes são os modelos mais simples a incorporar a violação espontânea da simetria de Lorentz e de CPT [54]. A lagrangiana da eletrodinâmica quântica de bumblebee utilizada em nosso estudo é

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m - e\not{B}\gamma_5)\psi - \frac{\lambda}{4}(B_\mu B^\mu - \beta^2)^2, \quad (2.1)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$  e  $\lambda$  é um acoplamento positivo adimensional. Esta é uma classe muito específica do modelo de bumblebee proposta por Kostelecký [19], caracterizada por conter um termo cinético tipo Maxwell, o primeiro termo na Eq. (2.1) que é justificado por considerações de energia, e um potencial quadrático suave, o terceiro termo na Eq. (2.1). O setor fermiônico, o segundo termo na Eq. (2.1), exibe um acoplamento quiral com o campo de bumblebee  $B_\mu$ . Além disso, a auto-interação presente no potencial quadrático impede que o modelo seja invariante por transformações de calibre, como pode ser facilmente verificado.

Nestes modelos, a violação da simetria de Lorentz e CPT é despertada quando o campo de bumblebee  $B_\mu$  alcança um mínimo de seu potencial, i.e., decai no vácuo. Perceba ao analisar o terceiro termo na Eq. (2.1) que este vácuo é degenerado, uma vez que há um contínuo de configurações possíveis para o campo que minimizam o potencial, i.e., todos satisfazendo  $B_\mu B^\mu = \beta^2$ . Dessa forma, o vev assumido pelo campo  $\langle B_\mu \rangle = \beta_\mu$  possui direção indefinida, exigindo ao campo que viole espontaneamente a simetria de Lorentz ao fixar (selecionar) uma direção.

Deslocando-se o campo de bumblebee  $B_\mu$  ao redor de seu vev não-trivial

$\langle B_\mu \rangle = \beta_\mu$ , a lagrangiana (2.1) torna-se

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m - e\cancel{A}\gamma_5 - \cancel{b}\gamma_5)\psi - \frac{\lambda}{4}\left(A_\mu A^\mu + \frac{2}{e}A \cdot b\right)^2, \quad (2.2)$$

com  $b_\mu = e\beta_\mu$ . Nesta lagrangiana, o termo  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$  viola a simetria CPT enquanto que seu quadrivetor constante  $b_\mu$  viola a simetria de Lorentz. Neste caso, é natural nos questionarmos sobre a possibilidade da indução do potencial de bumblebee através de correções radiativas originadas no setor fermiônico.

Neste capítulo estamos interessados em analisar a possibilidade da ocorrência de quebra dinâmica da simetria de Lorentz e de CPT através do mecanismo de Coleman-Weinberg [9], i.e., a partir das correções quânticas de um modelo de Thirring quiral 4D sem massa. Seguiremos a proposta desenvolvida na Ref. [16] da geração da eletrodinâmica quântica de bumblebee, contudo a partir de férmions sem massa.

Na literatura, alguns estudos apontam para o uso desta metodologia. Dirac, por exemplo, considerou um potencial tipo multiplicador de Lagrange, a saber,  $\frac{\lambda}{2}(A_\mu A^\mu - k^2)$ , em uma teoria vetorial como um modelo teórico para explicar o surgimento da carga do elétron [55]. Posteriormente foi reconhecido que esta teoria é uma teoria com violação espontânea da simetria de Lorentz.

Outro modelo teórico foi apresentado por Bjorken como proposta para a geração da eletrodinâmica quântica, partindo de um modelo com excitações coletivas de um campo fermiônico,  $\frac{G}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2$ , no qual o fóton emerge naturalmente como um bóson de Goldstone, mas sem invocar a invariância de calibre local [10]. Como consequência deste modelo, foi observado uma quebra espontânea da simetria de

Lorentz, promovida pelo vev da corrente vetorial  $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ . A teoria obtida foi posteriormente reinterpretada como um modelo com quebra dinâmica da simetria de Lorentz e de CPT [14, 15]. Recentemente, esta ideia foi estendida para o caso de correntes vetoriais axiais  $j_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$  [16] e também usada como proposta para o surgimento do gráviton como um bóson de Goldstone [17].

Aqui consideramos como modelo de partida o modelo de Thirring quirral 4D sem massa, cuja lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \frac{G}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2. \quad (2.3)$$

Este é um modelo puramente fermiônico, quirral e não renormalizável (note que  $[G] = -2$ ), que deve ser entendido como uma teoria efetiva de baixas energias que emerge de alguma teoria mais fundamental, contudo desconhecida, no mesmo sentido como aquele proposto por Nambu e Jona-Lasinio [56] para a Cromodinâmica Quântica (CDQ). E por consequência, os resultados aqui extraídos devem apresentar um corte ultravioleta  $\Lambda$ , ou seja, uma escala de energia acima do qual a teoria é falha.

Este capítulo está organizado como segue. Na seção 2, mostraremos que as excitações coletivas do campo fermiônico promovem um potencial tipo-Higgs. Este potencial é induzido através das correções radiativas, ao invés de ser adicionado explicitamente na lagrangiana como ocorre no modelo de bumblebee (2.1). Mostraremos, a seguir, que este potencial conduz ao surgimento de um vev não trivial ou condensado vetorial  $\langle\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\rangle \neq 0$  que quebra espontaneamente as simetrias de Lorentz e de CPT. Como consequência, há o surgimento do setor bosônico  $B_\mu$  na teoria. Na próxima seção, mostramos a existência em altas temperaturas de uma fase



com restauração da simetria de paridade (P), mas que mantém a violação CPT e avaliamos a temperatura de transição. Na última seção, consideramos as flutuações quânticas sobre o mínimo do potencial e induzimos dinamicamente a eletrodinâmica quântica de bumblebee contendo também o termo CFJ. Finalizamos, discutindo o limite assintótico da constante de acoplamento renormalizada que corresponde a uma teoria trivial, i.e., com liberdade assintótica.

## 2.2 Equação de Gap

Nosso modelo de partida é o modelo de Thirring quirral 4D sem massa, cuja lagrangiana é dada pela seguinte forma:

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \frac{G}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2. \quad (2.4)$$

Para verificar a possibilidade que um potencial de bumblebee possa ser dinamicamente induzido através de correções radiativas é necessário primeiro verificar a existência de mínimos não triviais para o potencial efetivo que conduzam a vev's não nulos. Tais vácuos não triviais dão origem a campos vetoriais de fundo que violam as simetrias de Lorentz e de CPT.

A fim de eliminar o termo de auto-interação, a saber,  $(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)^2$ , na lagrangiana de partida (2.4) é conveniente introduzir um campo auxiliar  $B_\mu$ , tal que seja

é reescrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \frac{g^2}{2} \left( B_\mu - \frac{e}{g^2} \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \right)^2 \\ &= \frac{g^2}{2} B_\mu B^\mu + \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - e\cancel{B}\gamma_5) \psi,\end{aligned}\quad (2.5)$$

onde  $G = \frac{e^2}{g^2}$ . Perceba que o campo  $B_\mu$  é classicamente equivalente à corrente axial, ou seja,  $B_\mu = \frac{e}{g^2} \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$ .

Vamos introduzir o funcional gerador da teoria incluindo também a integração sobre o campo auxiliar  $B_\mu$ , dado por

$$\begin{aligned}Z(\bar{\eta}, \eta) &= \int DB_\mu D\psi D\bar{\psi} e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)} \\ &= \int DB_\mu e^{i \int d^4x \frac{g^2}{2} B_\mu B^\mu} \int D\psi D\bar{\psi} e^{i \int d^4x (\bar{\psi} S^{-1} \psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)},\end{aligned}\quad (2.6)$$

onde  $S^{-1} = i\cancel{\partial} - e\cancel{B}\gamma_5$ , no qual estamos assumindo que o operador é inversível. Além disso, executando o seguinte deslocamento no campo fermiônico,  $\psi \rightarrow \psi' = \psi - S\eta$  e  $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} - \bar{\eta}S$ , tal que

$$\bar{\psi} S^{-1} \psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \rightarrow \bar{\psi}' S^{-1} \psi' - \bar{\eta}S\eta,\quad (2.7)$$

podemos agora realizar a integração funcional sobre o campo fermiônico. Assim, obtemos

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \int DB_\mu \exp \left( i S_{\text{eff}}[B] + i \int d^4x \bar{\eta} S \eta \right),\quad (2.8)$$

de modo que a ação efetiva e o potencial efetivo da teoria,  $S_{\text{eff}}[B] = - \int d^4x V_{\text{eff}}$ , são

dados respectivamente por

$$S_{\text{eff}}[B] = \frac{g^2}{2} \int d^4x B_\mu B^\mu - i \text{Tr} \ln(i\not{\partial} - e\not{B}\gamma_5), \quad (2.9)$$

e

$$V_{\text{eff}} = -\frac{g^2}{2} B_\mu B^\mu + i \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(\not{p} - e\not{B}\gamma_5). \quad (2.10)$$

Nessas expressões, Tr representa o traço tr sobre as matrizes de Dirac, bem como o traço sobre o espaço das coordenadas.

O mínimo não trivial desse potencial, Eq. (2.10), é obtido quando sua derivada é nula, mas o campo permanece não nulo. Assim, conforme vemos abaixo, esta condição define a equação de intervalo entre os vácuos do sistema:

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dB_\mu} \right|_{B=\beta} = -\frac{g^2}{e} b^\mu - i \Pi^\mu \equiv 0, \quad (2.11)$$

onde  $b^\mu = e\beta^\mu \neq 0$  e a amplitude em um laço (loop) para o tadpole é dada por

$$\Pi^\mu = \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - \not{b}\gamma_5} (-ie\gamma^\mu\gamma_5), \quad (2.12)$$

cujo propagador fermiônico sem massa possui um termo axial  $\not{b}\gamma_5$ ,

$$G_b(p) = \frac{1}{\not{p} - \not{b}\gamma_5}. \quad (2.13)$$

Para obtermos os mínimos não triviais ( $b^\mu \neq 0$ ) do campo, devemos solucionar a equação de gap, Eq. (2.11), e para isto, é necessário avaliar antes o tensor tadpole  $\Pi^\mu$ . Por contagem de potências, constatamos que a integral de laço na Eq. (2.12) exibe

divergência cúbica ultravioleta, a qual deve ser tratada por algum procedimento de regularização adotado.

Na avaliação desse tensor, Eq. (2.12), seguiremos a abordagem não perturbativa usando o cenário de regularização dimensional com a prescrição criada por 't Hooft e Veltmann [57]. Para isto, inicialmente estendemos o espaço-tempo quadridimensional para  $D$ -dimensional, de modo que, a medida  $d^4p/(2\pi)^4$  torne-se  $\mu^{4-D}d^D\bar{p}/(2\pi)^D$ , onde  $\mu$  é um parâmetro arbitrário que identifica a escala de massa. A seguir, considerando a relação geral de anticomutação  $\{\bar{\gamma}^\mu, \bar{\gamma}^\nu\} = 2\bar{g}^{\mu\nu}$ , e a contração  $\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}^{\mu\nu} = D$ , separamos as matrizes de Dirac  $D$ -dimensionais  $\bar{\gamma}^\mu$  e o tensor métrico  $D$ -dimensional  $\bar{g}^{\mu\nu}$  em partes quadridimensionais e em partes  $(D-4)$ -dimensionais, i.e.,  $\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu + \hat{\gamma}^\mu$  e  $\bar{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \hat{g}^{\mu\nu}$ , tal que, agora as matrizes de Dirac satisfazem as seguintes relações de anticomutação:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} = 2\hat{g}^{\mu\nu}, \{\gamma^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} = 0, \quad (2.14a)$$

e conseqüentemente os tensores métricos adquirem as contrações  $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$ ,  $\hat{g}_{\mu\nu}\hat{g}^{\mu\nu} = D - 4$ , e  $g_{\mu\nu}\hat{g}^{\mu\nu} = 0$ . Realmente, a mudança mais significativa encontrada nesta regularização é a introdução da relação de comutação

$$[\hat{\gamma}^\mu, \gamma^5] = 0 \quad (2.14b)$$

e a conservação da relação de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0. \quad (2.14c)$$

Para outras informações sobre este assunto, ver Sec. IV da Ref. [58].

Usando esta abordagem, vamos racionalizar o propagador (2.13), como segue:

$$G_b(p) = \frac{1}{\bar{\not{p}} - \not{b}\gamma_5} \frac{\bar{\not{p}} - \not{b}\gamma_5}{\bar{\not{p}} - \not{b}\gamma_5} \frac{\bar{\not{p}} + \not{b}\gamma_5}{\bar{\not{p}} + \not{b}\gamma_5} \frac{\bar{\not{p}} + \not{b}\gamma_5}{\bar{\not{p}} + \not{b}\gamma_5}, \quad (2.15)$$

onde temos promovido  $\not{p}$  para uma quantidade em  $D$  dimensões,  $\not{p} \rightarrow \bar{\not{p}} = \bar{p}_\mu \bar{\gamma}^\mu$ , ao passo que  $\not{b}$  é mantido em 4 dimensões. Assim, usando as relações de comutação e de anticomutação (2.14), como também a separação  $\bar{p}^\mu = p^\mu + \hat{p}^\mu$  (com  $\hat{p}_\mu \gamma^\mu = 0 = p_\mu \hat{\gamma}^\mu$ ), o propagador racionalizado toma a forma

$$G_b(p) = \frac{\bar{p}^2 + b^2 + 2(p \cdot b)\gamma_5 + [\hat{\not{p}}, \not{b}]\gamma_5}{(\bar{p}^2 - b^2)^2 - 4[(p \cdot b)^2 - p^2 b^2]} (\bar{\not{p}} + \not{b}\gamma_5). \quad (2.16)$$

Note que podemos reescrever a expressão acima fatorando seu denominador como vemos abaixo:

$$G_b(p) = \frac{\bar{p}^2 + b^2 + 2(\bar{p} \cdot b)\gamma_5 + [\hat{\not{p}}, \not{b}]\gamma_5}{(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2 - 4\hat{p}^2 b^2} (\bar{\not{p}} + \not{b}\gamma_5), \quad (2.17)$$

onde, temos considerado  $p \cdot b = \bar{p} \cdot b$  e  $p^2 = \bar{p}^2 - \hat{p}^2$  (i.e.,  $\hat{p} \cdot b = 0 = \hat{p} \cdot p$ ). Contudo, é mais conveniente considerar a expansão da Eq. (2.17) em termos de  $4\hat{p}^2 b^2$ , para escrever

$$G_b(p) = S_b(p) + \frac{4\hat{p}^2 b^2}{(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2} S_b(p) + \dots, \quad (2.18)$$

onde

$$S_b(p) = \frac{\bar{p}^2 + b^2 + 2(\bar{p} \cdot b)\gamma_5 + [\hat{\not{p}}, \not{b}]\gamma_5}{(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2} (\bar{\not{p}} + \not{b}\gamma_5), \quad (2.19)$$

tal que,  $G_b(p) = S_b(p)[1 + O(\hat{p}^2)]$ . Não é difícil ver que os termos de segunda e demais ordem no propagador (2.18), por contagem de potências, contribuem com termos finitos para o tensor (2.12), ao contrário do primeiro termo que é divergente. Por outro lado, após à integração sobre  $\hat{p}_\mu$ , todos os termos em (2.18) tornam-se proporcionais a  $(D - 4)$ . Assim, quando for restaurada a dimensão de  $D \rightarrow 4$ , os termos finitos serão anulados, ao passo que o termo infinito será regularizado. Tendo em vista esse fato, devemos considerar apenas a primeira aproximação no propagador (2.18) em nossos cálculos.

Assim, retornamos à Eq. (2.12) com o propagador já racionalizado, e a fim de executar as integrações, primeiro combinamos os fatores no denominador empregando a técnica da parametrização de Feynman. Como resultado, obtemos

$$\Pi^\mu = e\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{\text{tr}\{[\bar{q}^2 + b^2 + 2(q \cdot b)\gamma_5 + 2\hat{p}\not{b}\gamma_5](\bar{q} + \not{b}\gamma_5)\gamma^\mu\gamma_5\}}{(\bar{p}^2 - M^2)^2}, \quad (2.20)$$

onde  $M^2 = 4x(x-1)b^2$  e  $\bar{p}^\mu \rightarrow \bar{q}^\mu = \bar{p}^\mu + (2x-1)b^\mu = \bar{p}^\mu + t^\mu$ . Então, após o cálculo do traço, temos

$$\Pi^\mu = -4e\mu^{4-D} \int_0^1 dx \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{(\bar{p}^2 - M^2 - 2\hat{p}^2)b^\mu - 2\bar{p}^\mu(\bar{p} \cdot b)}{(\bar{p}^2 - M^2)^2}. \quad (2.21)$$

Assim, após as integrações sobre o momento  $\bar{p}$  e o parâmetro de Feynman  $x$ , a amplitude tadpole em um loop é obtida ser finita em  $D$  dimensões, dada por

$$\Pi^\mu = \frac{i(D-4)\mu^{4-D}\pi^{1-\frac{D}{2}}(b^2)^{\left(\frac{D}{2}-1\right)}\csc\left(\frac{\pi D}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(D)}b^\mu, \quad (2.22)$$

a qual apresenta uma singularidade removível em  $D = 4$ . Agora, considerando que

$\lim_{D \rightarrow 4} (D - 4) \csc\left(\frac{\pi D}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$ , obtemos, no limite de  $D \rightarrow 4$ ,

$$\Pi^\mu = \frac{ieb^2}{3\pi^2} b^\mu, \quad (2.23)$$

tal que a equação de gap (2.11) pode ser reescrita como

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dB_\mu} \right|_{B=\beta} = \left( -\frac{1}{G} + \frac{b^2}{3\pi^2} \right) eb_\mu = 0, \quad (2.24)$$

cuja solução não trivial ( $b_\mu \neq 0$ ) possui norma tal que  $b^2 = \frac{3\pi^2}{G}$  com direção indefinida e, portanto, é infinitamente degenerada e possível para um  $b_\mu$  tipo-tempo (tipo-espaço) com  $G > 0$  ( $G < 0$ ). Assim, confirmamos que o potencial efetivo (2.10) admite mínimos não triviais. E este é o primeiro passo para verificar a possibilidade que um potencial de bumblebee possa ser dinamicamente induzido através de correções radiativas neste modelo.

Em adição, a equação de gap acima (2.24) pode ser integrada, rendendo o potencial

$$V_{\text{eff}} = -\frac{e^2 b^2}{6\pi^2} B^2 + \frac{e^4}{12\pi^2} B^4 + \alpha, \quad (2.25)$$

onde  $\alpha$  é uma constante. Fixando  $\alpha = \frac{b^4}{12\pi^2}$ , geramos exatamente o potencial de bumblebee (2.1), com  $\lambda = \frac{e^4}{3\pi^2}$  e  $\beta_\mu = \frac{1}{e} b_\mu$ , dado por

$$V_{\text{eff}} = \frac{e^4}{12\pi^2} \left( B_\mu B^\mu - \frac{b^2}{e^2} \right)^2. \quad (2.26)$$

Efetivamente, temos mostrado aqui que o potencial bumblebee possuindo mínimos não triviais realmente pode surgir como uma correção quântica no modelo de quatro férmions. Em outras palavras, temos demonstrado explicitamente que em nossa

teoria, a quebra dinâmica da simetria de Lorentz é possível em temperatura zero.

Apresentamos agora uma breve comparação com a equação de gap obtida em modelos semelhantes ao nosso (modelo de Thirring sem massa com prescrição de 't Hooft e Veltman). Perceba que nesses modelos o potencial de bumblebee não é efetivamente obtido.

Para o modelo de Bjorken,  $J_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$  e  $m \neq 0$ , temos

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dB_\mu} \right|_{B=\beta} = \left[ -\frac{1}{G} - \frac{m^2}{\pi^2\epsilon} + \frac{m^2}{2\pi^2} \log\left(\frac{m^2}{\mu'^2}\right) \right] eb_\mu = 0, \quad (2.27)$$

com  $\epsilon = 4 - D$  e  $\mu'^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma}$ .

Agora, para um modelo de Thirring massivo,  $J_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ ,  $m \neq 0$  e sem a prescrição de 't Hooft e Veltman,  $\{\bar{\gamma}^\mu, \gamma_5\} = 0$ , encontramos

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dB_\mu} \right|_{B=\beta} = \left[ -\frac{1}{G} - \frac{m^2}{\pi^2\epsilon} + \frac{m^2}{2\pi^2} \log\left(\frac{m^2}{\mu'^2}\right) - \frac{b^2}{3\pi^2} \right] eb_\mu = 0. \quad (2.28)$$

Assim, vamos ter  $-\frac{\epsilon^4}{12\pi^2}B^4$  no potencial efetivo e, por isso, o potencial de bumblebee não é gerado.

Finalmente, para um modelo de Thirring massivo,  $J_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ ,  $m \neq 0$  e com a prescrição de 't Hooft e Veltman,

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dB_\mu} \right|_{B=\beta} = \left[ -\frac{1}{G} - \frac{m^2}{\pi^2\epsilon} + \frac{m^2}{2\pi^2} \log\left(\frac{m^2}{\mu'^2}\right) \right] eb_\mu = 0. \quad (2.29)$$

Retornando à análise de nosso modelo. Devido à sua natureza vetorial, o vácuo não trivial  $b_\mu$  assumido pelo campo  $B_\mu$  pode ser visto como um campo de fundo (não dinâmico) que aponta em uma direção específica no espaço-tempo indu-



zindo a quebra espontânea da simetria de Lorentz na teoria, semelhantemente ao que ocorre com os termos corretivos do MPE explicados na introdução desse capítulo. Outro efeito da existência desse vácuo não trivial é o desencadeamento da quebra espontânea da simetria de CPT. A fim de verificar isto, retornamos à lagrangiana (2.5) para analisar o termo axial presente em seu setor fermiônico,  $e\bar{\psi}\not{B}\gamma_5\psi = B^\mu J_{5\mu}$ , onde  $J_{5\mu} = e\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$  é a corrente axial já apresentada nessa lagrangiana.

Sob a transformação de CPT, inicialmente esse termo é invariante, conforme podemos ver abaixo:

$$\begin{aligned} \text{CPT}^{-1}e\bar{\psi}\not{B}\gamma_5\psi\text{CPT} &= (\text{CPT}^{-1}eB^\mu\text{CPT}) (\text{CPT}^{-1}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi\text{CPT}) \\ &= (-eB^\mu) (-\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi) \\ &= eB^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Perceba que ambos, o campo  $B_\mu$  e a corrente  $j_{5\mu}$ , são ímpares sob a transformação. Contudo, uma vez que o campo assume seu mínimo não trivial,  $B_\mu = \beta_\mu = \frac{1}{e}b_\mu$  constante, não participa na transformação de CPT, desencadeando assim sua violação, pois agora apenas a corrente axial é ímpar sob essa transformação. Dessa forma, o quadrivetor  $b_\mu$  é responsável pela violação da simetria de Lorentz, ao passo que o operador  $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$  é responsável pela violação de CPT. Nesta análise, a violação das simetrias de paridade (P) e reversão temporal (T) são causadas, respectivamente, pelas componentes temporal e espacial desse operador acoplado a  $b_\mu$ .

Além disso, esse campo de fundo  $b_\mu$  constante pode ser identificado com o quadrivetor axial do MPE, o qual é responsável pela violação das simetrias de Lorentz e de CPT e, também, pela geração radiativa do termo CFJ. Antes, porém,

vamos estudar os efeitos térmicos produzidos sobre o mínimo não trivial desta teoria.

## 2.3 Restauração de Simetria

De trabalhos recente [34, 59, 60, 61], sabemos que em teorias com violação explícita da simetria de Lorentz, efeitos térmicos rendem a supressão da componente temporal de  $b_\mu$  levando à restauração da simetria de paridade. Em nosso caso, esperamos surgir uma transição bem definida de uma fase com quebra da simetria de paridade para outra fase em que esta simetria é restaurada. A fim de obter a temperatura crítica para a restauração da simetria de paridade, vamos assumir, de agora em diante, que este sistema está em equilíbrio com um banho térmico a uma temperatura  $T = \beta^{-1}$ . Utilizaremos o formalismo do tempo imaginário para podermos estudar os efeitos de temperatura finita em nosso sistema.

Neste formalismo, passamos o tensor tadpole, a Eq. (2.20), do espaço-tempo de Minkowski para o Euclidiano, explicitando, a seguir, as componentes espacial e temporal do momento interno  $p$  mediante o uso do seguinte procedimento:  $\bar{g}^{\mu\nu} \rightarrow -\bar{\delta}^{\mu\nu}$ , i.e.,  $\bar{p}^2 \rightarrow -\bar{\delta}^{\mu\nu}\bar{p}^\mu\bar{p}^\nu = -\bar{p}^2$ ,  $b^2 \rightarrow -b^2$ ,  $p \cdot b \rightarrow -p \cdot b$ , e assim por diante, bem como,

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \rightarrow \mu^{3-d} \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} i \int \frac{dp_0}{2\pi} \quad (2.31)$$

e  $\bar{p}^\mu = \vec{p}^\mu + p_0 u^\mu$ , onde  $\vec{p}^\mu = (0, \vec{p})$  e  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , com  $D = d + 1$ .

Em adição, no regime termal as condições de contorno antiperiódicas (periódicas) para férmions (bósons) conduzem a valores discretos de  $p_0 = (2n + 1)\frac{\pi}{\beta}$  e  $k_0 = \frac{2\pi l}{\beta}$ , com  $n$  e  $l$  inteiros, e a substituição  $\int \frac{dp_0}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n$  que exige a remoção do des-

locamento feito sobre a componente temporal do momento interno presente na Eq. (2.20), através da seguinte substituição,  $p^0 \rightarrow p^0 - (2x - 1)b^0$ . Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &= \frac{ie}{\beta} \mu^{3-d} \sum_n \int_0^1 dx \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\vec{p}^2 + (p_0 + t_0)^2 - M^2]^2} \\ &\quad \times \text{tr}\{[\vec{q}^2 + p_0^2 + b^2 + 2(\vec{q} \cdot \vec{b} + p_0 b_0)\gamma_5 + 2\hat{p} \not{b} \gamma_5](\vec{q} + \not{p}_0 + \not{b} \gamma_5)\gamma^\mu \gamma_5\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Assim, depois de integrar sobre o momento espacial de loop obtemos contribuições covariantes,  $b^\mu$ , e não covariantes,  $b_0 u^\mu$ , para a amplitude tadpole no regime termal dada abaixo:

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &= \frac{4ie\mu^{3-d}}{\beta(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \sum_n \int_0^1 dx \frac{1}{[(p_0 + t_0)^2 - M^2]^{2-\frac{d}{2}}} \\ &\quad \times \{b^2(d-2)b_0 u^\mu + [(d-3)b^\mu - (d-1)b_0 u^\mu][(p_0 + t_0)^2 - M^2]\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

A soma sobre os autovalores de energia é executada levando em conta, por simplicidade, que  $t_0 = 0$  (limite estático), e a seguir usando a seguinte expressão [62]:

$$\sum_n [(n+b)^2 + a^2]^{-\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda - 1/2)}{\Gamma(\lambda)(a^2)^{\lambda-1/2}} + 4 \sin(\pi\lambda) f_\lambda(a, b) \quad (2.34)$$

com

$$f_\lambda(a, b) = \int_{|a|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - a^2)^\lambda} \text{Re} \left( \frac{1}{e^{2\pi(z+ib)} - 1} \right). \quad (2.35)$$

A solução acima é válida apenas para  $\lambda < 1$ , longe dos polos em  $\lambda = 1/2, -1/2, -3/2, \dots$ . Contudo, analisando o tensor acima, Eq. (2.33), temos os valores  $\lambda = 2 - d/2$  e  $\lambda = 1 - d/2$ , os quais convergem exatamente para os polos  $\pm 1/2$  quando restauramos a dimensão  $d \rightarrow 3$ . Assim, devemos realizar esse somatório sem explicitar o valor de  $d$ , a fim de que essas contribuições polares sejam canceladas.

Usando as considerações acima, observamos que a contribuição covariante,  $b^\mu$ , torna-se independente da temperatura, ao passo que a contribuição não covariante,  $b_0 u^\mu$ , anula-se em temperatura zero. A expressão obtida após ser restaurada a dimensão é dada por

$$\Pi^\mu = -\frac{ie}{2\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ M^2 b^\mu + \frac{2M^2}{\xi^2} \int_{|\xi|}^\infty d\zeta \frac{2\zeta^2 - \xi^2}{\sqrt{\zeta^2 - \xi^2}} [\tanh(\pi\zeta) - 1] b_0 u^\mu \right\}, \quad (2.36)$$

onde  $\xi = \frac{\beta M}{2\pi}$ . A seguir, avaliamos também as integrais sobre os parâmetros em primeira aproximação para  $b_\mu$ , de modo que, amplitude tadpole no regime termal é

$$\Pi^\mu = \frac{ieb^2}{3\pi^2} b^\mu + \frac{ieT^2}{3} b_0 u^\mu. \quad (2.37)$$

Assim, a equação de gap (2.11) pode ser reescrita, uma vez mais, como

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dB_\mu} \right|_{eB_\mu=b_\mu} = \left( -\frac{1}{G} + \frac{b^2}{3\pi^2} \right) e\vec{b}_\mu + \left( -\frac{1}{G} + \frac{T^2}{3} + \frac{b^2}{3\pi^2} \right) eb_0 u_\mu = 0. \quad (2.38)$$

Como podemos ver, uma vez que o quadrivetor  $u^\mu$  possui parte espacial nula, a mudança na equação de gap induzida pelo efeito da temperatura finita, recai apenas na componente temporal ( $\mu = 0$ ) dessa equação,

$$\left( -\frac{1}{G} + \frac{T^2}{3} + \frac{b^2}{3\pi^2} \right) eb_0 = 0. \quad (2.39)$$

A temperatura crítica do sistema  $T_c$  é definida, tal que, acima dela o potencial efetivo não exibi mínimos não triviais, i.e., em  $\left( -\frac{1}{G} + \frac{T^2}{3} + \frac{b^2}{3\pi^2} \right) = 0$  (para um  $b_0 \neq 0$  puramente tipo-tempo), ou seja,  $\frac{b^2}{3\pi^2} = \frac{1}{G} - \frac{T^2}{3}$ , temos  $\frac{1}{G} - \frac{T^2}{3} \leq 0$ , de

modo que  $b_0$  deve ser zero. Portanto, há restauração espontânea da simetria de paridade do sistema em  $T_c = \sqrt{\frac{3}{G}}$ , com  $G > 0$  (deve-se lembrar que o caso consistente corresponde à  $G$  positivo, ver a definição de  $G$  usada em [53]), i.e., acima da temperatura crítica,  $b_0$  deve ser imaginário e, assim, não-físico. Notamos também que se  $b_\mu$  é tipo-espaço, com  $b_0 = 0$ , a dependência com a temperatura desaparece completamente e não há transição de fase.

## 2.4 Correções em um loop

Uma vez que nosso objetivo principal é induzir o potencial de bumblebee através de correções radiativas, via o mecanismo de Coleman-Weinberg, vamos agora estudar a dinâmica do campo  $B_\mu$  ao redor de seu vácuo não trivial  $\beta_\mu$ , o qual já calculamos na seção anterior. Para isto, adotamos a seguinte decomposição para o campo  $B_\mu = A_\mu + \beta_\mu$ , tal que  $\langle B_\mu \rangle = \langle A_\mu \rangle + \beta_\mu = \beta_\mu$ , onde  $\langle A_\mu \rangle = 0$ . Conforme discutimos acima, tais vácuos não triviais dão origem a campos vetoriais de fundo que violam as simetrias de Lorentz e de CPT. Dessa forma, essa decomposição equivale a analisar a dinâmica de um campo vetorial com vácuo trivial, na presença de um campo de fundo constante. Empregaremos esta ideia longo desta seção.

Levando em conta as pequenas flutuações quânticas sobre o campo  $A_\mu$  em presença do campo de fundo  $b_\mu = e\beta_\mu$ , examinaremos agora as correções radiativas em um loop dessa teoria. Para isto o funcional gerador (2.8) será expressado em

termos do campo deslocado  $A_\mu$ ,

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \int DA_\mu \exp \left[ iS_{\text{eff}}[A, b] + i \int d^4x \left( \bar{\eta} \frac{1}{i\bar{\not{D}} - \not{b}\gamma_5 - e\not{A}\gamma_5} \eta \right) \right], \quad (2.40)$$

onde a ação efetiva é dada por

$$S_{\text{eff}}[A, b] = \int d^4x \left( \frac{g^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{g^2}{e} A_\mu b^\mu + \frac{g^2}{2e^2} b_\mu b^\mu \right) - i\text{Tr} \ln(i\bar{\not{D}} - \not{b}\gamma_5 - e\not{A}\gamma_5). \quad (2.41)$$

A seguir, a fim de estudar a dinâmica não trivial do sistema (termos dependentes do campo  $A_\mu$ ), expandimos o funcional logaritmo. Assim, descartando fatores independente do campo, os quais podem ser absorvidos na normalização do funcional gerador, obtemos,

$$S'_{\text{eff}}[A, b] = \int d^4x \left( \frac{g^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{g^2}{e} A_\mu b^\mu \right) + \sum_{n=1}^{\infty} S_{\text{eff}}^{(n)}[A, b], \quad (2.42)$$

onde

$$S_{\text{eff}}^{(n)}[A, b] = i\text{Tr} \frac{1}{n} \left[ \frac{i}{i\bar{\not{D}} - \not{b}\gamma_5} (-ie)\not{A}\gamma_5 \right]^n. \quad (2.43)$$

Conforme vemos na Eq. (2.2), o potencial de bumblebee, que objetivamos obter, é de quarta ordem no campo, desse modo, em nosso estudo, as contribuições que avaliaremos são o tadpole, a auto-energia e as funções vértices de três e quatro pontos do campo  $A_\mu$ . Essas contribuições apresentam divergências superficiais, mas apenas a auto-energia é realmente divergente, conforme veremos. Iniciamos com o

tensor tadpole, apresentado por (2.43) para  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}^{(1)}[A, b] &= i \text{Tr} \frac{i}{i\cancel{\partial} - \cancel{b}\gamma_5} (-ie) \cancel{A}\gamma_5 \\ &= i \int d^4x \Pi^\mu A_\mu, \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde  $\Pi^\mu$  foi apresentado em (2.23) devido a (2.11).

O termo de auto-energia, que corresponde a  $n = 2$ , é dado por

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}^{(2)}[A, b] &= \frac{i}{2} \text{Tr} \frac{i}{i\cancel{\partial} - \cancel{b}\gamma_5} (-ie) \cancel{A}\gamma_5 \frac{i}{i\cancel{\partial} - \cancel{b}\gamma_5} (-ie) \cancel{A}\gamma_5 \\ &= \frac{i}{2} \int d^4x \Pi^{\mu\nu} A_\mu A_\nu, \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde

$$\Pi^{\mu\nu} = \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\cancel{p} - \cancel{b}\gamma_5} (-ie) \gamma^\mu \gamma_5 \frac{i}{\cancel{p} - i\cancel{\partial} - \cancel{b}\gamma_5} (-ie) \gamma^\nu \gamma_5. \quad (2.46)$$

Seguiremos a mesma rotina escolhida na manipulação do primeiro tensor (2.23), contudo, dessa vez esperamos que surjam contribuições divergentes de  $g^{\mu\nu}$  e  $\partial^\mu \partial^\nu$  similares à da eletrodinâmica quântica (EDQ) padrão, pois essas são independentes da massa e de  $b_\mu$ . Também esperamos obter contribuições finitas que podem ser exatas (como  $b^\mu b^\nu$ ) ou ambíguas (o termo CFJ), uma vez que há também quebra das simetrias de Lorentz e de CPT. Todas essas contribuições são mostradas abaixo,

$$\Pi^{\mu\nu} = A \partial^\mu \partial^\nu + B \square g^{\mu\nu} + C \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} b_\lambda \partial_\rho + E b^\mu b^\nu + F b^2 g^{\mu\nu}, \quad (2.47)$$

onde as topologias  $\partial^\mu b^\nu$  e  $\partial^\nu b^\mu$  não foram exibidas, pois desaparecem durante o cálculo. As contribuições divergentes,  $A$  e  $B$ , exibem um pólo simples em  $D = 4$ ,

dadas por

$$A = \frac{(D-2)(D^2-20D+24) \csc\left(\frac{\pi D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{96i\pi^{(D-2)/2}\Gamma(D)} \left(\frac{b^2}{\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} - f(D) \quad (2.48)$$

e

$$B = \frac{(5D^4-71D^3+338D^2-680D+480) \csc\left(\frac{\pi D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{192i\pi^{(D-2)/2}\Gamma(D)} \left(\frac{b^2}{\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} - f(D). \quad (2.49)$$

A função  $f(D)$  é uma parcela da contribuição divergente que está fora da validade do Teorema de Fubini e anula-se ao redor de  $D = 4$  para a ordem específica de integração, dada abaixo:

$$\begin{aligned} f(D) &= \frac{\Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right)}{48i^{D+1}\pi^{\frac{D}{2}}} \left(\frac{b^2}{\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz (x+z-1)^{\frac{D}{2}-4} (x+z)^{\frac{D}{2}-4} \\ &\times \{2(x+z-1)(x+z)[2(D-1)(x+y-1)(x+y)+1] \\ &+(D-6)(x+y-1)(x+y)\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Por sua vez, as contribuições finitas são

$$C = \frac{i(D^2-7D+8)(D-4) \csc\left(\frac{\pi D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{8\pi^{(D-2)/2}\Gamma(D)} \left(\frac{b^2}{\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-2}, \quad (2.51)$$

$$E = \frac{(D-8)(D-4)(D-2) \csc\left(\frac{\pi D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{4i\pi^{(D-2)/2}\Gamma(D)} \left(\frac{b^2}{\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-2} \quad (2.52)$$



e

$$F = \frac{i(D^2 - 5D + 8)(D - 4) \csc\left(\frac{\pi D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{4\pi^{(D-2)/2} \Gamma(D)} \left(\frac{b^2}{\mu^2}\right)^{\frac{D}{2}-2}. \quad (2.53)$$

Assim, reunindo todas as contribuições expandidas em torno de  $D = 4$ , o tensor completo toma a forma

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = & -\frac{ie^2}{6\pi^2\epsilon}(g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu) - \frac{ie^2}{6\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}b_\lambda\partial_\rho - \frac{ie^2}{24\pi^2}\partial^\mu\partial^\nu + \frac{ie^2b^2}{3\pi^2}g^{\mu\nu} + \frac{2ie^2}{3\pi^2}b^\mu b^\nu \\ & + \frac{ie^2}{24\pi^2}\left[2\ln\left(\frac{b^2}{\mu^2}\right) - 1\right](g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu), \end{aligned} \quad (2.54)$$

válido para  $\square \ll 1$ , com  $\epsilon = 4 - D$ ,  $\mu'^2 = 4\pi\mu^2e^{-\gamma}$  e  $\mu$  sendo o ponto de renormalização. É imediato que a parte divergente corresponde aquela presente na EDQ padrão, uma vez que é independente do quadrivetor axial  $b^\mu$ . No contexto de semimetais de Weyl (que é similar à EDQ sem massa) e usando a prescrição 't Hooft-Veltman, a Ref. [59] avalia a contribuição do termo CFJ com coeficiente três vezes maior que nosso resultado na Eq. (2.54). Contudo, adiantamos que esta diferença é devido a presença de um  $\gamma_5$  no vértice trilinear de nosso modelo, que modifica a estrutura da teoria.

Outra mudança introduzida pela presença deste vértice trilinear é invalidar o teorema de Furry, de modo que, os termos de ordem ímpar na série da Eq. (2.43) não necessitam anular-se. Assim, para  $n = 3$  a expressão (2.43) pode também exibir

divergências ultravioleta, tal que temos

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}^{(3)}[A, b] &= \frac{i}{3} \text{Tr} \frac{i}{i\cancel{\partial} - \cancel{b}\gamma_5} (-ie) \cancel{A}\gamma_5 \frac{i}{i\cancel{\partial} - \cancel{b}\gamma_5} (-ie) \cancel{A}\gamma_5 \frac{i}{i\cancel{\partial} - \cancel{b}\gamma_5} (-ie) \cancel{A}\gamma_5 \\ &= \frac{i}{3} \int d^4x \Pi^{\mu\nu\rho} A_\mu A_\nu A_\rho, \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu\lambda} &= \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\cancel{p} - \cancel{b}\gamma_5} (-ie) \gamma^\mu \gamma_5 \frac{i}{\cancel{p} - i\cancel{\partial} - \cancel{b}\gamma_5} (-ie) \gamma^\nu \gamma_5 \\ &\quad \times \frac{i}{\cancel{p} - i\cancel{\partial} - i\cancel{\partial}' - \cancel{b}\gamma_5} (-ie) \gamma^\lambda \gamma_5, \end{aligned} \quad (2.56)$$

Neste tensor as derivadas  $\cancel{\partial}$  e  $\cancel{\partial}'$  atuam sobre  $A_\mu$  e  $A_\nu$  respectivamente, contudo vamos computar a parcela independente delas, i.e.  $\cancel{\partial} = \cancel{\partial}' = 0$ . Deste modo, há apenas três estruturas topológicas a serem consideradas:  $b^\mu b^\nu b^\lambda$ ,  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} b_\rho$  e  $b^\mu g^{\nu\lambda}$ , com suas permutações dos índices de Lorentz. Devido às propriedades do traço das matrizes de Dirac, a contribuição CPT-ímpar anulam-se em  $D > 2$  dimensões, tal que

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu\lambda} &= \frac{i(D-4)\pi^{1-\frac{D}{2}} (b^2)^{\frac{D}{2}-3} \csc\left(\frac{\pi D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)}{64\Gamma(D+1)} \{2(D-14)(D-6)(D-4)(D-2) \\ &\quad \times b^\mu b^\nu b^\lambda - b^2 \{D[D(D^2 - 17D + 104) - 324] + 336\} (b^\mu g^{\nu\lambda} + b^\nu g^{\lambda\mu} + b^\lambda g^{\mu\nu})\}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Em quatro dimensões, a contribuição  $b_\mu b_\nu b_\lambda$  também desaparece e obtemos apenas

$$\Pi^{\mu\nu\rho} = \frac{ie^3}{3\pi^2} (b^\mu g^{\nu\lambda} + b^\nu g^{\lambda\mu} + b^\lambda g^{\mu\nu}). \quad (2.58)$$

Em princípio, o quarto termo da série em (2.43) pode ser logaritmicamente divergente, contudo resulta em ser finito, uma vez que o termo principal ( $b_\mu$ -independente) é similar àquele na EDQ, onde, como se sabe, também é finito. Assim, escrevemos

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}^{(4)}[A, b] &= \frac{i}{4} \text{Tr} \frac{i}{i\partial - \not{b}\gamma_5} (-ie) \not{A} \gamma_5 \frac{i}{i\partial - \not{b}\gamma_5} (-ie) \not{A} \gamma_5 \frac{i}{i\partial - \not{b}\gamma_5} (-ie) \not{A} \gamma_5 \frac{i}{i\partial - \not{b}\gamma_5} (-ie) \not{A} \gamma_5 \\ &= \frac{i}{4} \int d^4x \Pi^{\mu\nu\lambda\rho} A_\mu A_\nu A_\lambda A_\rho. \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu\lambda\rho} &= \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - \not{b}\gamma_5} (-ie) \gamma^\mu \gamma_5 \frac{i}{\not{p} - i\partial - \not{b}\gamma_5} (-ie) \gamma^\nu \gamma_5 \\ &\times \frac{i}{\not{p} - i\partial - i\partial' - \not{b}\gamma_5} (-ie) \gamma^\lambda \gamma_5 \frac{i}{\not{p} - i\partial - i\partial' - i\partial'' - \not{b}\gamma_5} (-ie) \gamma^\rho \gamma_5. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Para indução do modelo de bumblebee, é suficiente isolar a contribuição  $g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho}$  com suas permutações dos índices de Lorentz. Assim, obtemos

$$\Pi^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{i(D-4)\pi^{1-\frac{D}{2}} (b^2)^{\frac{D}{2}-2} \csc\left(\frac{\pi D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2} + 6\right)}{288(D^2-1)(D+3)\Gamma(D-2)} (g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda}), \quad (2.61)$$

de modo que existe uma singularidade removível em  $D = 4$ , avaliada como

$$\Pi^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{ie^4}{3\pi^2} (g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda}). \quad (2.62)$$

Os resultados obtidos até agora permite-nos escrever a lagrangiana efetiva

como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4Z_3} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{e^2}{24\pi^2} b^\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A^\nu F^{\lambda\rho} - \frac{e^2}{48\pi^2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{e^4}{12\pi^2} \left( A_\mu A^\mu + \frac{2}{e} A \cdot b \right)^2 \\ & + \frac{e}{2b^2} A_\mu A^\mu \langle A_\nu \rangle b^\nu + \langle A_\mu \rangle A^\mu, \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde

$$\frac{1}{Z_3} = \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon} - \frac{e^2}{24\pi^2} \left[ 2 \ln \left( \frac{b^2}{\mu^2} \right) - 1 \right], \quad (2.64)$$

e identificamos

$$\langle A_\mu \rangle = \left( \frac{1}{G} - \frac{b^2}{3\pi^2} \right) e b_\mu. \quad (2.65)$$

A exigência que  $\langle A_\mu \rangle = 0$ , tal que  $B_\mu$  adquire um VEV  $\langle B_\mu \rangle \neq 0$ , já foi estudada nas Eqs. (2.11)-(2.24), com a única solução não trivial  $b^2 = \frac{3\pi^2}{G}$ . Por definição, introduzindo um campo renormalizado  $A_R^\mu = Z_3^{-1/2} A^\mu$  e uma constante de acoplamento renormalizada  $e_R = Z_3^{1/2} e$ , obtemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{R\mu\nu} F_R^{\mu\nu} + \frac{e_R^2}{24\pi^2} b^\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A_R^\nu F_R^{\lambda\rho} - \frac{e_R^2}{48\pi^2} (\partial_\mu A_R^\mu)^2 - \frac{e_R^4}{12\pi^2} \left( A_{R\mu} A_R^\mu + \frac{2}{e_R} A_R \cdot b \right)^2. \quad (2.66)$$

Esta lagrangiana é exatamente o setor bosônico da EDQ estendida pelo termo de Chern-Simons, por um termo de fixação de calibre e de um potencial que não promove (desperta) a violação de simetria de Lorentz e CPT.

Por fim, há algumas similaridades entre esse modelo e outros. Ao substituir a expressão (2.64) ( $Z_3 \cong 6\pi^2\epsilon/e^2$ ) na constante de acoplamento renormalizada, obtemos o resultado  $e_R^2 \cong 6\pi^2\epsilon$ , que é o mesmo para a EDQ induzida em outros

modelos ([10, 11, 14, 63, 64]). Por outro lado, no limite  $\epsilon \rightarrow 0$  teríamos uma teoria assintoticamente livre com constante de acoplamento nula. No entanto, como afirmado na introdução, devemos manter  $\epsilon$  pequeno, porém não nulo, de modo que a EDQ induzida, Eq. (2.66), seja interpretada como uma teoria efetiva válida numa escala de energia. Modelos de bumblebee desse tipo também tem sido discutidos em espaço-tempos planos e curvados [65, 66].

## Capítulo 3

# Indução do termo CFJ com prescrição 't Hooft-Veltman

Neste capítulo, estudamos a geração radiativa do termo CFJ originado a partir de férmions sem massa. Partimos calculando o tensor de polarização do vácuo utilizando o cenário de regularização de 't Hooft-Veltman, no qual o resultado obtido para o coeficiente deste termo foi  $(k_{AF})_\mu = -\frac{e^2}{4\pi^2} b_\mu$ . Este resultado conduz precisamente à mesma condutividade encontrada nos materiais denominados semimetais de Weyl, i.e., o cenário de regularização 't Hooft-Veltman empregado é o correto a ser utilizado neste contexto. Também discutimos a dependência de temperatura do coeficiente  $(k_{AF})_\mu$ , no qual em altíssimas temperaturas,  $(k_{AF})_0 \rightarrow 0$  e  $(k_{AF})_i \rightarrow -\frac{e^2}{4\pi^2} b_i$ . No contexto dos semimetais de Weyl, esse resultados estão em comum acordo com o fato que a corrente magnética quiral  $j^\alpha = (k_{AF})_0 \epsilon^{0\alpha\lambda\rho} \partial_\lambda A_\rho$  desaparece em altíssimas temperaturas, enquanto que a corrente Hall anômala  $j^\alpha = (k_{AF})_i \epsilon^{i\alpha\lambda\rho} \partial_\lambda A_\rho$  permanece não alterada pela temperatura.

### 3.1 Introdução

Estudos sobre violação da simetria de Lorentz e de CPT no modelo padrão [4, 52] tem sido extensivamente considerados na literatura nos últimos anos [67]. A teoria de campos efetiva usada para essas investigações é uma extensão do modelo padrão, cuja eletrodinâmica quântica com violação [68] é dada pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{AF})_{\mu}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}A_{\nu}F_{\lambda\rho} + \bar{\psi}(i\not{D} + \frac{1}{2}g^{\lambda\rho\mu}\sigma_{\lambda\rho}D_{\mu} - m - \not{b}\gamma_5)\psi, \quad (3.1)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$  e  $D_{\mu} = \partial_{\mu} + ieA_{\mu}$ . Temos omitido os termos CPT-ímpar que são governados pelos coeficientes  $a_{\mu}$ ,  $e_{\mu}$ , e  $f_{\mu}$ , que podem ser removidos da lagrangiana usando uma redefinição apropriada do spinor [69], bem como os termos CPT-pares contraídos com os coeficientes  $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$ ,  $c_{\mu\nu}$ ,  $d_{\mu\nu}$ , e  $H_{\mu\nu}$ .

Devemos mencionar que o termo  $\bar{\psi}\not{b}\gamma_5\psi$ , o último termo da Eq. (3.1), é aquele responsável pela geração radiativa do termo CFJ [22], o segundo termo da Eq. (3.1), de modo que  $(k_{AF})_{\mu} \propto b_{\mu}$ . Desse modo, podemos escrever  $(k_{AF})_{\mu} = C b_{\mu}$ , onde  $C$  é a constante de proporcionalidade a ser determinada. Portanto, esses termos devem ter propriedades de transformação de carga (C), paridade (P) e reversão temporal (T), como listadas na tabela 1. Note que o termo governado pelo coeficiente  $g_{\lambda\rho\mu}$ , o quarto termo da Eq. (3.1), tem também as mesmas transformações discretas. De fato, este termo gera um termo CFJ de altas derivadas no qual  $(k_{AF})_{\mu} \rightarrow (k_{AF})_{\mu}^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta} \propto \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\mathcal{G}^{\nu\lambda\rho\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}$ , onde  $\mathcal{G}^{\nu\lambda\rho\alpha\beta} = g^{\nu\lambda\alpha}g^{\beta\rho} + g^{\lambda\rho\alpha}g^{\beta\nu} + g^{\rho\nu\alpha}g^{\beta\lambda}$ . Para mais detalhes, ver Ref. [70].

	C	P	T	CPT
$b_j, g_{j0l}, g_{jk0}, (k_{AF})_j$	+	+	-	-
$b_0, g_{j00}, g_{jkl}, (k_{AF})_0$	+	-	+	-

Table 1: Propriedades de simetrias discreta.

O objetivo deste capítulo é investigar a geração radiativa do termo CFJ a partir de férmions sem massa. Este estudo já foi abordado na literatura [23, 24], onde tem sido argumentado em [24] que o resultado  $C_1 = -\frac{e^2}{16\pi^2}$  é finito e determinado, pelo menos em três tipos de cenários de regularização: cutoff, dimensional, e temperature regularization. Contudo, recentemente, um novo resultado foi obtido, a saber,  $C_2 = -\frac{e^2}{4\pi^2}$ , que foi calculado usando o método da integral de trajetória (método de Fujikawa) [26] e também pela fórmula de Kubo [27], ambos no contexto da física da matéria condensada. É interessante comentar a seguinte questão levantada na Ref. [27]: por que os cálculos disponíveis do tensor de polarização do vácuo [22, 23, 24] falham em obter o coeficiente  $C_2$ ? Veremos que quando usamos o cenário de regularização dimensional de 't Hooft-Veltman [30], o resultado  $C_2$  é facilmente obtido.

A motivação para esses trabalhos recentes [26, 27] origina-se do fato que certos materiais conhecidos como semimetais de Weyl [28] são perfeitamente descritos pelo seguinte hamiltoniano fermiônico com violação de Lorentz e CPT [29],

$$\mathcal{H}_\psi = \bar{\psi}(-i\partial_i\gamma^i + \not{b}\gamma_5)\psi, \quad (3.2)$$



i.e. pela lagrangiana fermiônica com violação de Lorentz e CPT,

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - \cancel{b}\gamma_5)\psi, \quad (3.3)$$

e conseqüentemente pela lagrangiana do termo CFJ radiativamente induzido. Por exemplo, em presença do campo eletromagnético, a condutividade encontrada nos semimetais de Weyl proposto em [28], que está baseada em um arranjo periódico de camadas alternadas de isolantes topológicos<sup>1</sup> e isolantes comuns, é a mesma que obtemos a partir da ação CFJ, com o resultado  $C_2$  (ver também discussões em [60]). A fim de observar isto, primeiro calculamos a densidade de corrente,

$$j^\alpha = \frac{\delta S_{CFJ}}{\delta A_\alpha} = -\frac{e^2}{2\pi^2} b_\mu \epsilon^{\mu\alpha\lambda\rho} \partial_\lambda A_\rho, \quad (3.4a)$$

que, para um coeficiente puramente tipo-espaço  $b^\mu = (0, 0, 0, b_z)$  podemos escrever  $j^1 = \frac{e^2}{2\pi^2} b^3 \epsilon^{3102} E^2$  (i.e.,  $j_x = \sigma_{xy} E_y$ ), de modo que, finalmente para a condutividade, temos

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi^2} b_z. \quad (3.4b)$$

Note que com  $C_1$  a condutividade resultante é quatro vezes menor que a resposta esperada (3.4b), como apontado na Ref. [27].

A estrutura deste capítulo é a seguinte. Na próxima seção, calculamos o tensor de polarização do vácuo, e conseqüentemente a geração do termo CFJ, usando o cenário de regularização de 't hooft-Veltman a fim de obter o coeficiente cor-

<sup>1</sup>Para uma revisão sobre isolantes topológicos, indicamos ao leitor a Ref. [71].

reto  $C_2$ . Para isto, levaremos em conta a abordagem não-perturbativa no coeficiente  $b_\mu$ . Na terceira seção, discutimos a dependência de temperatura do coeficiente  $(k_{AF})_\mu$ . Veremos que, com  $(k_{AF})_\mu = C_2 b_\mu$ , em altíssimas temperaturas,  $(k_{AF})_0 \rightarrow 0$  e  $(k_{AF})_i \rightarrow -\frac{e^2}{4\pi^2} b_i$ , i.e. a simetria de paridade (P) é restaurada. No contexto dos semimetais de Weyl, isto confirma o fato que a corrente magnética quiral gerada  $j_5^\alpha = (k_{AF})_0 \epsilon^{0\alpha\lambda\rho} \partial_\lambda A_\rho$  desaparece em altíssimas temperaturas [60], ao passo que a corrente Hall anômala  $j_H^\alpha = (k_{AF})_i \epsilon^{i\alpha\lambda\rho} \partial_\lambda A_\rho$  permanece inafetada pela temperatura [27]. Por fim, elucidamos a questão levantada na Ref. [27] mostrando a inconsistência existente nos cálculos com resultado  $C_1$  presentes na literatura, i.e., sem a prescrição de 't Hooft-Veltman.

## 3.2 O termo CFJ induzido

Nesta seção, estamos interessados em estudar a geração radiativa do termo CFJ originado através de férmions sem massa. Para isto, vamos considerar a lagrangiana fermiônica (3.3), acoplada minimamente ao campo eletromagnético  $A_\mu$  (mediante a substituição  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ ), reescrita como

$$\mathcal{L}'_\psi = \bar{\psi}(i\cancel{D} - \cancel{b}\gamma_5 - e\cancel{A})\psi. \quad (3.5)$$

Assim, o funcional gerador correspondente é,

$$Z[A_\mu] = \int D\bar{\psi} D\psi e^{i \int d^4x \mathcal{L}'_\psi} = e^{iS_{\text{eff}}}, \quad (3.6)$$

de modo que, após a integração grassmaniana sobre os férmions, obtemos a ação efetiva da teoria em ordem de um-loop,

$$S_{\text{eff}} = -i\text{Tr} \ln(\not{p} - \not{b}\gamma_5 - e\mathcal{A}). \quad (3.7)$$

Aqui,  $\text{Tr}$  representa o traço sobre as matrizes de Dirac, bem como o traço sobre a integração nos espaços das coordenadas e dos momentos. Além disso, não podemos avaliar diretamente as integrais nos respectivos espaços, pois há funções dos operadores posição e momento (que não comutam), i.e., não podemos escrever diretamente  $S_{\text{eff}}[b, A] = \int d^4x \mathcal{L}$ .

A fim de isolar os termos quadráticos em  $A_\mu$  da ação efetiva, separamos a ação efetiva em duas partes, uma que carrega a dinâmica trivial  $S_{\text{eff}}^{(0)}$  e outra com a dinâmica não trivial, sendo esta última a parcela a ser expandida. Reescrevemos esta expressão (3.7) como

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{\text{eff}}^{(n)}, \quad (3.8)$$

onde  $S_{\text{eff}}^{(0)} = -i\text{Tr} \ln(\not{p} - \not{b}\gamma_5)$  e

$$S_{\text{eff}}^{(n)} = \frac{i}{n} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} - \not{b}\gamma_5} e\mathcal{A} \right)^n. \quad (3.9)$$

Então, depois da avaliação do traço sobre o espaço das coordenadas, usando a relação de comutação  $A_\mu(x)G_b(p) = G_b(p - i\partial)A_\mu(x)$  e a relação de completeza do espaço

dos momentos, para a ação quadrática  $S_{\text{eff}}^{(2)}$ , temos

$$S_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x \Pi^{\mu\nu} A_\mu A_\nu, \quad (3.10)$$

onde

$$\Pi^{\mu\nu} = ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} G_b(p) \gamma^\mu G_b(p - i\partial) \gamma^\nu, \quad (3.11)$$

com

$$G_b(p) = \frac{1}{\not{p} - \not{b}\gamma_5} \quad (3.12)$$

sendo o mesmo propagador de Feynman obtido no capítulo anterior. Note que a derivada contida em  $\Pi^{\mu\nu}$  atua apenas no primeiro campo de gauge  $A_\mu$ , in Eq. (3.10). Por contagem de potências, constatamos que a integral de laço Eq. (3.11) exhibe divergência quadrática ultravioleta. Dentre os tratamentos existentes na remoção desta divergência superficial, optamos pela regularização dimensional, além da prescrição de 't Hooft-Veltman, Eq. (2.14), para calcular o traço das matrizes de Dirac, assim como feito no último capítulo.

Para a racionalização do propagador, partimos da Eq. (2.18) já expandida em termos de  $4\hat{p}^2 b^2$ , conforme vemos abaixo,

$$G_b(p) = S_b(p) + \frac{4\hat{p}^2 b^2}{(\bar{p} - b)^2 (\bar{p} + b)^2} S_b(p) + \dots, \quad (3.13)$$

onde,  $S_b(p) = S_{b1}(p) + S_{b2}(p)$ , com

$$S_{b1}(p) = \frac{\bar{p}^2 + b^2 + 2(\bar{p} \cdot b)\gamma_5}{(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2}(\bar{\not{p}} + \not{b}\gamma_5), \quad (3.14a)$$

$$S_{b2}(p) = \frac{[\hat{\not{p}}, \not{b}]\gamma_5}{(\bar{p} - b)^2(\bar{p} + b)^2}(\bar{\not{p}} + \not{b}\gamma_5). \quad (3.14b)$$

Não é difícil ver que os termos de segunda e demais ordem no propagador (3.13), por contagem de potências, contribuem com termos finitos para o tensor (3.11). Assim, eles serão nulos, quando ocorrer a contração  $\bar{g}_{\mu\nu}\hat{g}^{\mu\nu} = D - 4$ , no limite de  $D \rightarrow 4$ .

Portanto, considerando que  $i\partial \rightarrow k$ , a Eq. (3.11) pode ser reescrita apenas em termos dos propagadores (3.14), i.e.,  $\Pi^{\mu\nu} = \Pi_{11}^{\mu\nu} + \Pi_{12}^{\mu\nu} + \Pi_{21}^{\mu\nu} + \Pi_{22}^{\mu\nu}$ , com

$$\Pi_{ij}^{\mu\nu} = ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \text{tr} S_{bi}(p)\gamma^\mu S_{bj}(p-k)\gamma^\nu. \quad (3.15)$$

A fim de executar as integrações acima, primeiro combinamos os denominadores empregando a parametrização de Feynman. Assim, para a primeira contribuição,  $\Pi_{11}^{\mu\nu}$ , temos

$$\begin{aligned} \Pi_{11}^{\mu\nu} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{6ie^2}{(\bar{p}^2 - M^2)^4} \\ &\times \text{tr}\{[\bar{q}^2 + b^2 + 2(\bar{q} \cdot b)\gamma_5](\bar{\not{q}} + \not{b}\gamma_5)\bar{\gamma}^\mu[\bar{q}_1^2 + b^2 + 2(\bar{q}_1 \cdot b)\gamma_5](\bar{\not{q}}_1 + \not{b}\gamma_5)\bar{\gamma}^\nu\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} M^2 &= -4(1-x-z)(x+z)b^2 + 4[(1-x-y)x \\ &\quad -(x+y)z]b \cdot k - (1-x-y)(x+y)k^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$\bar{q}^\mu = \bar{p}^\mu + t^\mu$ , e  $\bar{q}_1^\mu = \bar{p}^\mu + t_1^\mu$ , com

$$t^\mu = -b^\mu(1 - 2x - 2y) + k^\mu(1 - x - y) \quad (3.18)$$

$$t_1^\mu = -b^\mu(1 - 2x - 2y) + k^\mu(1 - x - y) - k^\mu. \quad (3.19)$$

Focaremos na parte CPT-ímpar da Eq. (3.16), que é aquela responsável pela geração do termo CFJ, escrevendo  $\Pi_{11}^{\mu\nu} = \Pi_{11|even}^{\mu\nu} + \Pi_{11|odd}^{\mu\nu}$ . Neste modo, depois do cálculo do traço, usando as Eqs. (2.14), obtemos

$$\Pi_{11|odd}^{\mu\nu} = 24e^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz (I_1^{\mu\nu} + I_2^{\mu\nu}), \quad (3.20)$$

com

$$I_1^{\mu\nu} = 2\mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} k_\kappa \bar{q}_\lambda}{(\bar{p}^2 - M^2)^4} [b^2(b \cdot \bar{q}) + b^2(b \cdot \bar{q}_1) + (b \cdot \bar{q}_1)q^2 + (b \cdot \bar{q})\bar{q}_1^2] \quad (3.21)$$

e

$$I_2^{\mu\nu} = \mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} b_\kappa k_\lambda}{(\bar{p}^2 - M^2)^4} [4(b \cdot \bar{q})(b \cdot \bar{q}_1) + (b^2 + \bar{q}^2)(b^2 + \bar{q}_1^2)], \quad (3.22)$$

onde temos considerado um  $\gamma_5$  Hermitiano, de modo que  $\text{tr} \gamma^\kappa \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 = 4i\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ .

Agora, depois de integrar sobre o momento  $\bar{p}$ , expandimos o resultado ao redor de

$D = 4$ , e consideramos  $k^2 = 0 = b \cdot k$ ,  $\Pi_{11|odd}^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_{11|CFJ}^{\mu\nu}$ , i.e., obtemos

$$\Pi_{11|CFJ}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4i\pi^2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} b_\kappa k_\lambda \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{1 - 6z + 6[z^2 + 2xz - (1-x)x]}{(1-x-z)(x+z)}. \quad (3.23)$$

Finalmente, quando as integrais sobre os parâmetros de Feynman são avaliadas, temos

$$\Pi_{11|CFJ}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.24)$$

Na sequência, levamos em conta as contribuições  $\Pi_{12}^{\mu\nu}$  e  $\Pi_{21}^{\mu\nu}$ . Note que, dada a expressão

$$\Pi_{12}^{\mu\nu}(k) = ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \text{tr} S_{b1}(p) \gamma^\mu S_{b2}(p-k) \gamma^\nu, \quad (3.25)$$

podemos facilmente observar que  $\Pi_{21}^{\nu\mu}(k) = \Pi_{12}^{\mu\nu}(-k)$ . Portanto, simplesmente calculamos, e.g.,  $\Pi_{12}^{\mu\nu}$ , que pode ser reescrita

$$\begin{aligned} \Pi_{12}^{\mu\nu} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{6ie^2}{(\bar{p}^2 - M^2)^4} \\ &\quad \times \text{tr} \{ [\bar{q}^2 + b^2 + 2(\bar{q} \cdot b) \gamma_5] (\bar{q} + \not{b} \gamma_5) \bar{\gamma}^\mu [\hat{p}, \not{b}] \gamma_5 (\bar{q}_1 + \not{b} \gamma_5) \bar{\gamma}^\nu \}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde temos considerado que  $\hat{q}_1 = \hat{p}$  (i.e.,  $\hat{t}_1 = 0$ ). Portanto, sua parte CPT-ímpar, depois do cálculo do traço, toma a forma

$$\Pi_{12|odd}^{\mu\nu} = -48e^2 \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} b_\kappa k_\lambda}{(\bar{p}^2 - M^2)^4} (b^2 + \bar{q}^2) \hat{p}^2. \quad (3.27)$$

Agora, quando a integração sobre o momento  $\bar{p}$  é realizada, bem como a expansão ao redor de  $D = 4$ , obtemos  $\Pi_{b12|odd}^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_{b12|CFJ}^{\mu\nu}$ , com

$$\begin{aligned} \Pi_{12|CFJ}^{\mu\nu} &= \frac{ie^2}{4\pi^2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} b_\kappa k_\lambda \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\ &\quad \times \bar{g}^{\alpha\beta} \hat{g}^{\alpha\beta} \left[ -\frac{6}{\epsilon} + 3 \ln \left( \frac{M^2}{\mu'^2} \right) + \frac{b^2 + t^2}{M^2} + 1 \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde  $\epsilon = 4 - D$  e  $\mu'^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma-i\pi}$ . Finalmente, considerando a contração  $\bar{g}^{\alpha\beta} \hat{g}_{\alpha\beta} = D - 4$  (i.e.,  $\bar{g}^{\alpha\beta} \hat{g}_{\alpha\beta} = -\epsilon$ ) e calculando as integrais sobre os parâmetros de Feynman, do primeiro termo de (3.28), obtemos

$$\Pi_{12|CFJ}^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{4\pi^2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} b_\kappa k_\lambda, \quad (3.29)$$

no limite de  $D \rightarrow 4$ . Note que os outros termos desaparecem neste limite.

Vamos, agora, considerar a última contribuição  $\Pi_{22}^{\mu\nu}$ , a qual, por meio da parametrização de Feynman é escrita como

$$\begin{aligned} \Pi_{22}^{\mu\nu} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \\ &\quad \times \frac{6ie^2 \text{tr}\{[\hat{p}, \hat{b}](\bar{q} + \hat{b}\gamma_5)\bar{\gamma}^\mu[\hat{p}, \hat{b}]\gamma_5(\bar{q}_1 + \hat{b}\gamma_5)\bar{\gamma}^\nu\}}{(\bar{p}^2 - M^2)^4}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Depois do cálculo do traço, apenas sua parte CPT sobrevive, a mesma é dada por

$$\Pi_{22|odd}^{\mu\nu} = -96e^2 \mu^{4-D} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} \frac{\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} b_\kappa k_\lambda}{(\bar{p}^2 - M^2)^4} b^2 \hat{p}^2, \quad (3.31)$$

de modo que, seguindo a mesma sequência realizada, após o cálculo da integral sobre



o momento,  $\Pi_{22|odd}^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_{22|CFJ}^{\mu\nu}$ , obtemos

$$\Pi_{22|CFJ}^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{2\pi^2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} b_\kappa k_\lambda \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \bar{g}^{\alpha\beta} \hat{g}^{\alpha\beta} \frac{b^2}{M^2}. \quad (3.32)$$

Note que, uma vez que  $\bar{g}^{\alpha\beta} \hat{g}^{\alpha\beta} = D - 4$ , no limite  $D \rightarrow 4$ , trivialmente temos

$$\Pi_{22|CFJ}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.33)$$

Isto é também o que acontece com as contribuições oriundas dos termos de segunda e demais ordens do propagador (3.13), assim como discutimos acima.

Portanto, o resultado final é dado por

$$\begin{aligned} \Pi_{CFJ}^{\mu\nu} &= \Pi_{11|CFJ}^{\mu\nu} + \Pi_{12|CFJ}^{\mu\nu} + \Pi_{21|CFJ}^{\mu\nu} + \Pi_{22|CFJ}^{\mu\nu} \\ &= \frac{ie^2}{2\pi^2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} b_\kappa k_\lambda, \end{aligned} \quad (3.34)$$

de modo que, considerando  $S_{eff}^{(2)} \rightarrow S_{CFJ}$  in Eq. (3.10), a ação do termo CFJ torna-se

$$\begin{aligned} S_{CFJ} &= \frac{1}{2} \int d^4x \Pi_{CFJ}^{\mu\nu}(k \rightarrow i\partial) A_\mu A_\nu \\ &= -\frac{e^2}{4\pi^2} b_\mu \int d^4x \epsilon^{\mu\alpha\lambda\rho} A_\alpha \partial_\lambda A_\rho, \end{aligned} \quad (3.35)$$

com  $(k_{AF})_\mu = -\frac{e^2}{4\pi^2} b_\mu$ . Esse resultado está em acordo com aquele esperado para a corrente  $j^\alpha$  e a condutividade  $\sigma_{xy}$ , encontrada em uma particular realização de um semimetal de Weyl, conforme já analisado na seção 1, ver Eqs.(3.4). Portanto, como temos antecipado, o resultado  $C_2 = -\frac{e^2}{4\pi^2}$  é facilmente obtido quando usamos o cenário de regularização 't Hooft-Veltman, em particular, quando levamos em conta

as novas definições das relações de anticomutação e comutação (2.14) das matrizes de Dirac. Postergaremos para o fim do capítulo a inconsistência existente quando esses cálculos são efetuados sem a prescrição de 't Hooft-Veltman. Por ora, vamos analisar os efeitos de temperatura sobre a indução.

### 3.3 Efeitos de temperatura finita

Nosso objetivo aqui é discutir os efeitos de temperatura finita sobre o coeficiente  $C$  como uma extensão natural do estudo feito na seção anterior. A fim de implementar esse estudo, primeiro mudamos o espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano (através da rotação de Wick) e separamos as componentes do espaço e tempo do momento  $\bar{p}$ . Isto pode ser feito executando o seguinte procedimento:  $p_0 \rightarrow ip_0$  (ou  $\bar{g}^{\mu\nu} \rightarrow -\bar{\delta}^{\mu\nu}$ ), i.e.,  $\bar{p}^2 \rightarrow -\bar{\delta}^{\mu\nu}\bar{p}_\mu\bar{p}_\nu = -\bar{p}^2$ ,  $\bar{p} \cdot b \rightarrow -\bar{p} \cdot b$ ,  $b^2 \rightarrow -b^2$ , e assim por diante, bem como

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^D \bar{p}}{(2\pi)^D} = \mu^{3-d} \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} i \int \frac{dp_0}{2\pi} \quad (3.36)$$

e  $\bar{p}^\mu = \vec{p}^\mu + p_0 u^\mu$ , onde  $\vec{p}^\mu = (0, \vec{p})$ ,  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , e  $D = d + 1$ , com  $\vec{p}^\mu$  sendo uma quantidade no espaço em  $d$  dimensões.

O próximo passo, devido a simetria da integral em  $\vec{p}$  sobre rotações espaciais,

é considerar as seguintes substituições:

$$\vec{p}^\alpha \vec{p}^\beta \rightarrow \frac{\vec{p}^2}{d} (\bar{\delta}^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta), \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}^\alpha \vec{p}^\beta \vec{p}^\gamma \vec{p}^\delta &\rightarrow \frac{\vec{p}^4}{d(d+2)} [(\bar{\delta}^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)(\bar{\delta}^{\gamma\delta} - u^\gamma u^\delta) \\ &\quad + (\bar{\delta}^{\alpha\gamma} - u^\alpha u^\gamma)(\bar{\delta}^{\beta\delta} - u^\beta u^\delta) \\ &\quad + (\bar{\delta}^{\alpha\delta} - u^\alpha u^\delta)(\bar{\delta}^{\beta\gamma} - u^\beta u^\gamma)]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Com essas decomposições, obtemos contribuições covariantes e não covariantes para o tensor polarização (5.7). Obviamente, quando assumimos que o sistema está em equilíbrio térmico com uma temperatura  $T = \beta^{-1}$ , as contribuições não covariantes podem eventualmente ser não nulas. Além disso, em nosso caso, apenas contribuições não covariantes terão uma dependência explícita sobre a temperatura. Nosso principal objetivo aqui é estudar o comportamento do coeficiente  $C$  no limite de altas temperaturas,  $T \rightarrow \infty$ .

Para este fim, vamos usar o formalismo de Matsubara, que consiste em tomar  $p_0 = (n+1/2)2\pi/\beta$  e alterar  $1/(2\pi) \int dp_0 \rightarrow 1/\beta \sum$ , onde a soma é executada usando a seguinte expressão [62]:

$$\sum_n [(n+b)^2 + a^2]^{-\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda - 1/2)}{\Gamma(\lambda)(a^2)^{\lambda-1/2}} + 4 \sin(\pi\lambda) f_\lambda(a, b) \quad (3.39)$$

com

$$f_\lambda(a, b) = \int_{|a|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - a^2)^\lambda} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{e^{2\pi(z+ib)} - 1} \right). \quad (3.40)$$

A solução acima é válida apenas para  $\lambda < 1$ , longe dos pólos em  $\lambda = 1/2, -1/2, -3/2, \dots$ .

No entanto, esta restrição pode ser contornada quando usamos a seguinte relação

$$f_\lambda(a, b) = -\frac{1}{2a^2} \frac{2\lambda - 3}{\lambda - 1} f_{\lambda-1}(a, b) - \frac{1}{4a^2} \frac{1}{(\lambda - 2)(\lambda - 1)} \frac{\partial^2}{\partial b^2} f_{\lambda-2}(a, b) \quad (3.41)$$

por uma vez, duas vezes, assim por diante, até  $\lambda$  ser colocado no intervalo de validade.

Usando as considerações acima na primeira contribuição  $\Pi_{11|odd}^{\mu\nu}$ , Eq. (3.20), e também levando em conta, por simplicidade, que  $k^2 = 0 = b \cdot k$ , bem como  $k_0 = 0 = b_0$ ,  $\Pi_{11|odd}^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_{11|CS}^{\mu\nu}$ , onde

$$\Pi_{11|CFJ}^{\mu\nu} = 24e^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz (\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} b_\kappa k_\lambda \tilde{I}_1 + \epsilon^{0\lambda\mu\nu} b_0 k_\lambda \tilde{I}_2), \quad (3.42)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 = & \frac{4ib^2\mu^{3-d}}{3\beta(4\pi)^{d/2}} \Gamma(3-d/2) \sum_n (p_0^2 + M^2)^{\frac{d-8}{2}} \{-p_0^2[1-5z-5((1-x)x-2xz-z^2)] \\ & + b^2(1-x-z)(x+z)[2-4x-4z+4(x+z)^2-d(1-2x-2z)^2]\}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 = & \frac{i\mu^{3-d}}{3\beta(4\pi)^{d/2}} \sum_n (p_0^2 + M^2)^{\frac{d-8}{2}} \{[6p_0^2 - 4b^2(1-2x-2z)^2] \Gamma(3-d/2) (p_0^2 + M^2) \\ & + 8b^2 p_0^2 (1-2x-2z)^2 \Gamma(4-d/2) - 3 \Gamma(2-d/2) (p_0^2 + M^2)^2\}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Nas expressões acima temos executado apenas a integral em  $\vec{p}$ . Se retornarmos à integral em  $p_0$ , i.e.,  $1/\beta \sum \rightarrow 1/(2\pi) \int dp_0$ , depois do cálculo obtemos  $\tilde{I}_1 = 0 = \tilde{I}_2$ , como esperado.

Retornando às Eqs. (3.43) e (3.44), podemos verificar que após o cálculo das integrais sobre os parâmetros de Feynman,  $\tilde{I}_1 = 0^2$ , ao passo que  $\tilde{I}_2 \neq 0$ . Portanto, a dependência sobre a temperatura surge apenas na contribuição não covariante da Eq. (3.42), em que avaliando o somatório, na Eq. (3.44) (usando a Eq. (3.39)), obtemos

$$\tilde{I}_2 = \frac{i}{24} \int_{|\xi|}^{\infty} d\zeta \frac{[\xi^2 + 2(1-x-z)(x+z)(3\zeta^2 - 5\xi^2)]}{(1-x-z)(x+z)(\zeta^2 - \xi^2)^{1/2}} \tanh(\pi\zeta) \operatorname{sech}^2(\pi\zeta), \quad (3.45)$$

onde  $\xi = \beta M/2\pi$ .

Com respeito às outras contribuições,  $\Pi_{12|odd}^{\mu\nu}$  e  $\Pi_{22|odd}^{\mu\nu}$  (Eqs. (3.27) e (3.31), respectivamente), podemos facilmente observar que os termos não covariantes não contribuem, uma vez que  $\hat{\delta}^{\alpha\beta} u_\alpha = 0$ . Além do mais, os termos dependentes da temperatura na contribuição covariante restante anulam-se, quando levamos em conta  $d = 3$  na contração  $\bar{\delta}^{\alpha\beta} \hat{\delta}_{\alpha\beta} = d - 3$ . Portanto, apenas os termos covariante e independente da temperatura sobrevivem, rendendo os mesmos resultados (3.29) e (3.33), respectivamente.

O resultado final (3.34) é então reescrito como

$$\Pi_{CFJ}^{\mu\nu} = \frac{ie^2}{2\pi^2} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} b_\kappa k_\lambda + 24e^2 \epsilon^{0\lambda\mu\nu} b_0 k_\lambda \tilde{I}_2. \quad (3.46)$$

<sup>2</sup>Este cancelamento ocorre apenas no cenário de regularização dimensional, conforme veremos no capítulo 4 desta tese.

Assim, no limite de altas temperaturas,  $\xi \rightarrow 0$ , depois da avaliação das integrais,

$$\begin{aligned}\Pi_{CFJ}^{\mu\nu} &\rightarrow \frac{ie^2}{2\pi^2}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}b_\kappa k_\lambda - \frac{ie^2}{2\pi^2}\epsilon^{0\lambda\mu\nu}b_0 k_\lambda \\ &= \frac{ie^2}{2\pi^2}\epsilon^{i\lambda\mu\nu}b_i k_\lambda.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Portanto, em altas temperaturas,  $(k_{AF})_0 \rightarrow 0$  e  $(k_{AF})_i \rightarrow -\frac{e^2}{4\pi^2}b_i$ , implica que a simetria de paridade (P) é restaurada neste regime. No contexto dos semimetais de Weyl, esses resultados estão em acordo com o fato que a corrente magnética quiral  $j^\alpha = (k_{AF})_0\epsilon^{0\alpha\lambda\rho}\partial_\lambda A_\rho$  desaparece em altas temperaturas [60], ao passo que a corrente Hall anômala  $j^\alpha = (k_{AF})_i\epsilon^{i\alpha\lambda\rho}\partial_\lambda A_\rho$  segue inafetada pela temperatura [27].

### 3.4 Inconsistência na Regularização Dimensional com a matriz $\gamma_5$

Nosso objetivo nesta seção é definir claramente a inconsistência existente quando se calcula o traço entre matrizes de Dirac  $\bar{\gamma}_\mu$  e a matriz  $\gamma_5$  no cenário de regularização dimensional, mas sem utilizar a prescrição 't Hooft-Veltman. Esta observação é importante, pois como vimos, na indução radiativa do termo CFJ é necessário avaliar traços dessa natureza, i.e.,  $\text{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho)$ .

Para isso, vamos mostrar que numa generalização em  $D$  dimensões, como aquela exigida em no cenário de regularização dimensional, as relações

$$\{\gamma_5, \bar{\gamma}_\mu\} = 0,\tag{3.48a}$$

$$\text{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho) \neq 0,\tag{3.48b}$$

não podem ser simultaneamente satisfeitas [72, 73]. Afim de mostrar isto, partiremos do primeiro membro da Exp. (3.48b), efetuando as seguintes manipulações,

$$\begin{aligned}
D \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho) &= \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho D) \\
&= \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho \bar{\gamma}^\alpha \bar{\gamma}_\alpha) \\
&= -\operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\alpha \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho \bar{\gamma}^\alpha),
\end{aligned} \tag{3.49}$$

onde, temos utilizado a propriedade cíclica do traço juntamente com a aplicação da Eq. (3.48a), i.e., estamos assumindo a validade da relação de anticomutação em dimensões arbitrárias. A seguir, utilizamos a relação geral de anticomutação entre as matrizes de Dirac,  $\{\bar{\gamma}_\mu, \bar{\gamma}_\nu\} = 2\bar{g}_{\mu\nu}$ , deslocando a matriz  $\bar{\gamma}_\alpha$  novamente para junto da matriz  $\bar{\gamma}^\alpha$ ,

$$\begin{aligned}
D \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho) &= -2\bar{g}_{\alpha\mu} \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho \bar{\gamma}^\alpha) + 2\bar{g}_{\alpha\nu} \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho \bar{\gamma}^\alpha) \\
&\quad -2\bar{g}_{\alpha\lambda} \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\rho \bar{\gamma}^\alpha) + 2\bar{g}_{\alpha\rho} \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}^\alpha) \\
&\quad -\operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho \bar{\gamma}_\alpha \bar{\gamma}^\alpha).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Após a contração dos traços com o tensor métrico  $D$ dimensional, obtemos

$$\begin{aligned}
D \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho) &= -2 \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho \bar{\gamma}_\mu) + 2 \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho \bar{\gamma}_\nu) \\
&\quad -2 \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\rho \bar{\gamma}_\lambda) + 2 \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho) \\
&\quad -D \operatorname{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

De modo que, reordenando as matrizes na configuração inicial, usando a expressão

$\text{tr}\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu = 0$ , obtemos

$$D \text{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho) = (8 - D) \text{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho),$$

ou ainda,

$$(4 - D) \text{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho) = 0. \quad (3.52)$$

Isto implica que  $\text{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho) = 0$  em qualquer dimensão, com exceção de  $D = 4$ , e, portanto o uso da relação  $\text{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho) = 4i\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$  não é permitida no cenário de regularização dimensional. Em outras palavras, há um conflito entre a anticomutatividade da matriz  $\gamma_5$ , Eq. (3.48a), e a propriedade cíclica do traço quando envolve um número ímpar de matrizes  $\gamma_5$ .

De fato, há uma família de traços com uma quantidade par de matrizes de Dirac e uma matriz  $\gamma_5$  que não podem ser analiticamente continuados pelo cenário de regularização dimensional de 4 para  $D \neq 4$  dimensões, conforme vemos abaixo,

$$\begin{aligned} D \text{tr}(\gamma_5) &= D(D - 2) \text{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu) \\ &= D(D - 2)(4 - D) \text{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho) = \dots \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Portanto, para computar traços com um número ímpar de matrizes  $\gamma_5$  sem ambiguidades, necessitamos de uma prescrição extra, como por exemplo a prescrição de Kreimer, a prescrição de Larin-Gorishny-Akyeampog-Delburgo ou a prescrição 't Hooft-Veltman. Nesta tese, fazemos uso dessa última prescrição, assumimos que a matriz  $\gamma_5$  é um objeto puramente quadridimensional e, assim, não anticomuta com



matrizes em  $D$  dimensões, conforme as relações (2.14b) e (2.14c).

É importante comentar que em diversos trabalhos apresentados na literatura esta inconsistência não é considerada e o uso descuidado da relação  $\text{tr}(\gamma_5 \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\lambda \bar{\gamma}_\rho) = 4i\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$  é feito, contribuindo para aumentar o número de resultados ambíguos na indução radiativa do termo CFJ. É certo que este cálculo é ambíguo, conforme mostraremos no capítulo 5 desta tese, sendo dependente do cenário de regularização empregado, contudo uma vez fixado consistentemente tal cenário o resultado obtido é único.

# Capítulo 4

## Indução do termo CFJ gravitacional

Neste capítulo, reinvestigamos a geração radiativa do termo CFJ considerando dessa vez o acoplamento de férmions com o campo gravitacional. Partimos calculando o tensor de polarização do vácuo utilizando uma abordagem perturbativa no cenário de regularização de 't Hooft-Veltman. Mostramos que o resultado do cálculo é finito no espaço-tempo quadridimensional apenas se férmions sem massa forem utilizados na indução, apresentando em seguida este resultado. Também discutimos a dependência de temperatura sobre este termo identificando-o como uma contribuição extra para a condutividade dos semimetais, discutidos no capítulo passado. Esta contribuição é originada na anomalia axial gravitacional.

## 4.1 Introdução

Recentemente, o estudo das anomalias presentes em algumas teorias quânticas de campos tem reatraído uma significativa atenção na literatura, contudo no cenário de matéria condensada [33, 32, 74, 75]. Neste cenário, manifestações macroscópicas dessas anomalias são observadas, em geral, na forma de novos fenômenos de transporte exóticos não dissipativos, i.e., há geração de correntes topologicamente protegidas. Entre essas, o caso mais intensamente investigado é o da anomalia axial.

Sabe-se que esta anomalia promove a violação da lei de conservação clássica da corrente axial,  $J_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ , na presença de campos eletromagnéticos (anomalia ABJ) (8) e/ou gravitacionais (anomalia axial gravitacional) [44]. Por outro lado, os semimetais de Weyl, que foram apresentados no capítulo 3 desta tese, são materiais que em baixas (médias) energias são perfeitamente descritos por férmions de Weyl (Dirac) 4D e que naturalmente mantêm um campo eletromagnético axial em seu interior [32]. Assim, esses materiais formam um sistema alternativo para a investigação tanto teórica quanto experimental da anomalia axial fora do contexto das teorias quânticas de campos.

No capítulo 3 desta tese realizamos a indução radiativa do termo CFJ em temperatura finita e mostramos sua relação com a condutividade encontrada nos semimetais de Weyl, ver Eqs. (3.4), (3.35) e (3.47). Da ref. [32] segue, contudo, que essa mesma condutividade possui outra contribuição puramente dependente da temperatura associada com a anomalia axial gravitacional. No contexto das teorias quânticas de campos, esta anomalia nunca antes observada na natureza a partir de campos fundamentais, seria a responsável pelo decaimento do pión neutro em dois

grávitons ( $\pi^0 \rightarrow g + g$ ) [44]. Interessantemente, em materia condensada há uma idealização para a sua constatação [32] com base no mesmo arranjo periódico de camadas alternadas entre isolantes topológicos e isolantes comuns considerado no capítulo 3, i.e., o semimetal de Weyl, conforme Fig.(4.1a). Por ela, um semimetal de Weyl de forma cilíndrica quando suspenso por um fio manifestaria um movimento de rotação cujo momento angular se oporia àquele induzido na corrente gerada pela anomalia. Isto, afim de conservar o momento angular inicial no sistema, ao passo que a velocidade angular dependeria da temperatura e de sua variação Fig.(4.1b).

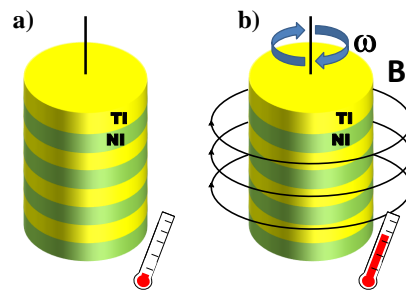


Figura 4.1: a) Semimetal de Weyl formado por camadas sobrepostas IT-NI. b) Efeito em temperatura finita: Rotação.

Com esta motivação, nosso objetivo principal neste capítulo é realizar uma nova indução na qual levaremos em conta a interação dos férmions massivos com o campo gravitacional, afim de obter o termo CFJ gravitacional em temperatura finita, no limite de massa nula. Este cálculo já foi realizado na literatura [76] em temperatura zero e, conforme veremos, nosso resultado constitui-se numa generalização deste, incluindo efeitos de temperatura e mostrando a região de convergência nos casos  $m \neq 0$  e  $m = 0$ .

Este capítulo está organizado como segue. Na próxima seção apresentamos

a lagrangiana de partida considerando o acoplamento com o campo de gravitacional e efetuamos sua linearização sob a suposição de campo fraco. Seguimos realizando a indução da ação gravitacional CFJ através de laços (loops) fermiônicos utilizando para isso a abordagem perturbativa no cenário da regularização dimensional e mostramos que o cálculo é finito em  $D = 4$  apenas no limite de massa nula. Na última seção, consideramos os efeitos térmicos sobre esta indução relacionando-o com a contribuição dependente da temperatura da condutividade dos semimetais de Weyl.

## 4.2 O termo CFJ gravitacional

A ação que estamos interessados é a mesma usada no capítulo passado, dada por

$$S = \int d^4x e \bar{\psi} \left( \frac{i}{2} e^\mu{}_a \gamma^a \overleftrightarrow{D}_\mu - m - e^\mu{}_a b_\mu \gamma^a \gamma_5 \right) \psi, \quad (4.1)$$

onde temos incluído o termo de massa fermiônica. Aqui,  $e^\mu{}_a$  é a tetrada (vierbein),  $e \equiv \det e^\mu{}_a$  e  $b_\mu$  é um quadrivetor constante. A derivada covariante é dada por

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} w_{\mu cd} \sigma^{cd} \psi, \quad (4.2)$$

onde  $w_\mu{}^{cd}$  é a conexão de spin e  $\sigma^{cd} = \frac{1}{4} [\gamma^c, \gamma^d]$ , enquanto que a derivada covariante sobre o campo conjugado  $\bar{\psi}$  é

$$D_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{1}{2} w_{\mu cd} \bar{\psi} \sigma^{cd}. \quad (4.3)$$

Usando as expressões acima, podemos reescrever a Eq. (4.1) da seguinte forma,

$$S = \int d^4x e \bar{\psi} \left( \frac{i}{2} e^\mu{}_a \gamma^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu + \frac{i}{4} e^\mu{}_a w_{\mu cd} \Gamma^{acd} - m - e^\mu{}_a b_\mu \gamma^a \gamma_5 \right) \psi, \quad (4.4)$$

onde  $\Gamma^{acd} = \frac{1}{6} (\gamma^a \gamma^c \gamma^d \pm \text{permutações})$ , i.e., o produto antissimetrizado das três matrizes  $\gamma$ . Na aproximação de campo fraco, consideramos  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  ( $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ ), que induz uma expansão para a tetrada (vierbein)  $e_{\mu a} = \eta_{\mu a} + \frac{1}{2} h_{\mu a}$  ( $e^\mu{}_a = \eta^\mu{}_a - \frac{1}{2} h^\mu{}_a$ ). Dessa forma, a ação tipo CFJ gravitacional em temperatura zero toma a forma [77],

$$S_{CFJ} = \frac{1}{4} \int d^4x h^{\mu\nu} v^\lambda \epsilon_{\alpha\mu\lambda\rho} \partial^\rho (\partial_\gamma \partial^\gamma h_\nu^\alpha - \partial_\nu \partial_\gamma h^{\gamma\alpha}). \quad (4.5)$$

O nosso primeiro objetivo neste capítulo é obter a relação entre  $v_\lambda$  e  $b_\mu$  a partir da indução desta ação como correção quântica para o campo fermiônico em virtude de seu acoplamento com o campo gravitacional. Afim de executar este cálculo, consideramos o modelo fermiônico representado pela seguinte ação efetiva,

$$e^{i\Gamma[h]} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iS[h, \bar{\psi}, \psi]}, \quad (4.6)$$

cuja ação efetiva linearizada é dada por,

$$S[h, \bar{\psi}, \psi] = \int d^4x \bar{\psi} \left( \frac{i}{2} \Gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu + h_{\mu\nu} \Gamma^{\mu\nu} \psi - m - b_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \right) \psi, \quad (4.7)$$

com  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \gamma_\nu$  e  $\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} b^\mu \gamma^\nu \gamma_5 - \frac{i}{16} (\partial_\rho h_{\alpha\beta}) \eta^{\beta\nu} \Gamma^{\rho\mu\alpha}$ . Nesta expressão, desprezamos os termos proporcionais a  $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ , pois os mesmo não contribuem

para a geração da ação CFJ.

A correção em ordem de um-loop para a essa ação efetiva é dada pelos gráficos abaixo,

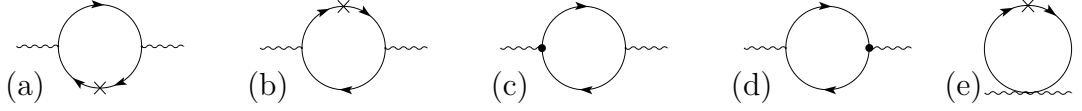


Figura 4.2: Contribuições em um laço

Os gráficos (c), (d) e (e) não contribuem para gerar a ação CFJ. Portanto, as únicas contribuições relevantes em um-loop para o campo gravitacional submetido à um campo de fundo quadrivetorial constante são dados pelos tensores abaixo,

$$i\Pi_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = \frac{\mu^{4-D}}{16} \text{tr} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} [(2p-k)^\rho S(p) \not{b} \gamma_5 S(p) \gamma^\mu (2p-k)^\sigma S(p-k) \gamma^\nu], \quad (4.8)$$

e

$$i\Pi_b^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = \frac{\mu^{4-D}}{16} \text{tr} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} [(2p-k)^\rho S(p) \gamma^\mu (2p-k)^\sigma S(p-k) \not{b} \gamma_5 S(p-k) \gamma^\nu], \quad (4.9)$$

onde  $S(p) = (\not{p} - m)^{-1} = (\not{p} + m)/(p^2 - m^2)$  é o propagador fermiônico usual, já racionalizado,  $\mu$  é o regulador da dimensão de massa no cenário de regularização dimensional e, por conveniência escrevemos,  $p_1^\mu = p^\mu - k^\mu$ . Além disso, é imediato o mapeamento existente entre esses tensores,  $\Pi_b^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = \Pi_a^{\nu\mu\rho\sigma}(-k)$  considerando também o deslocamento na variável de integração  $p^\mu \rightarrow p^\mu + k^\mu$ . Sendo, por isso, suficiente avaliar apenas um único tensor e, em seguida, efetuar este mapeamento em seu resultado final para obter também o resultado do outro tensor. De fato, este mapeamento é possível não somente entre as expressões iniciais (4.8) e (4.9) ou entre os seus resultados finais, mas durante todas as etapas do cálculo.

Adotamos a prescrição de 't hooft-Veltmann que neste caso equivale a mover ciclicamente a matriz  $\gamma_5$  para o final da expressão, antes de avaliar o traço sobre as matrizes. Além disso, para o cálculo desse traço é suficiente considerar a relação de anticomutação geral, i.e.,  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , bem como aquela que relaciona a matriz  $\gamma_5$  hermitiana com o tensor antissimétrico levi-civita, i.e.,  $\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_5) = -4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ , deixando-nos com,

$$\begin{aligned} \Pi_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = & -\frac{\mu^{4-D}}{4} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(2p-k)^\rho (2p-k)^\sigma}{(p^2-m^2)^2 (p_1^2-m^2)} \left[ (p^2-m^2)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa (k_\lambda + p_\lambda) \right. \\ & \left. + 2(p^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda p_\tau - p^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda p_\tau - (p \cdot k)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa p_\lambda) \right], \end{aligned} \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_b^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = & -\frac{\mu^{4-D}}{4} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(2p-k)^\rho (2p-k)^\sigma}{(p^2-m^2)(p_1^2-m^2)^2} \left[ (p_1^2-m^2)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa (2k_\lambda - p_\lambda) \right. \\ & \left. + 2(p_1^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda p_\tau - p_1^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda p_\tau - (p_1 \cdot k)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa p_{1\lambda}) \right]. \end{aligned} \quad (4.10b)$$

Já no nível do integrando é possível ver que estes tensores são altamente divergentes, com divergência máxima a cúbica e mínima a logarítmica. Realmente, os termos cubicamente divergentes em ambas expressões acima, que são,  $(p^2 - m^2)p^\rho p^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa p_\lambda$  e  $(p_1^2 - m^2)p^\rho p^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa p_\lambda$ , respectivamente, prejudicam a transversalidade destes tensores em relação à contração com  $k_\mu$  e  $k_\nu$ , que são condições necessárias para a invariância de calibre dos tensores. Contudo, tais termos divergentes não contribuem ao resultado final  $\Pi^{\mu\nu\rho\sigma} = \Pi_a^{\mu\nu\rho\sigma} + \Pi_b^{\mu\nu\rho\sigma}$ , uma vez que eles se cancelam quando são somados no nível do integrando. Assim, as divergências restantes são na maioria quadrática e a transversalidade dos tensores à  $k_\mu$  e  $k_\nu$  é estabelecida, i.e.,  $k_\mu \Pi_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k, m) = k_\nu \Pi_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k, m) = 0$ .

Por outro lado, o mapeamento  $\Pi_b^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = \Pi_a^{\nu\mu\rho\sigma}(-k)$  é perdido após o can-



cancelamento destes termos cubicamente divergentes. Contudo, considerando

$$\frac{(p^2 - m^2)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda}{(p^2 - m^2)^2(p_1^2 - m^2)} = \frac{3}{2} \frac{(p^2 - m^2)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda}{(p^2 - m^2)^2(p_1^2 - m^2)} - \frac{1}{2} \frac{(p_1^2 - m^2)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda}{(p^2 - m^2)(p_1^2 - m^2)^2},$$

em  $\Pi_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k)$ , podemos reescrever as expressões (4.10), de modo que agora temos

$$\Pi^{\mu\nu\rho\sigma} = \tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma} + \tilde{\Pi}_b^{\mu\nu\rho\sigma}, \text{ com}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = & -\frac{\mu^{4-D}}{4} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(2p-k)^\rho(2p-k)^\sigma}{(p^2 - m^2)^2(p_1^2 - m^2)} \left[ \frac{3}{2}(p^2 - m^2)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda \right. \\ & \left. + 2(p^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda p_\tau - p^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda p_\tau - (p \cdot k)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa p_\lambda) \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

e  $\tilde{\Pi}_b^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = \tilde{\Pi}_a^{\nu\mu\rho\sigma}(-k)$ . Portanto, é suficiente calcular apenas  $\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k)$  uma vez que esses tensores contribuem igualmente para o resultado  $\Pi^{\mu\nu\rho\sigma}(k)$ . É interessante destacar que reduções ou cancelamento de divergências são sempre delicadas, pois são operações naturalmente indeterminadas do tipo  $(\infty - \infty)$ , e que necessitam, por isso, de um rigor matemático (ou algum argumento físico) que impeça que termos (contribuições de superfície) sejam criados, alterando (comprometendo) o resultado.

A seguir, empregamos a técnica da parametrização de Feynman, segundo

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + xk^\mu = q^\mu, \quad (4.12a)$$

$$p_1^\mu \rightarrow p^\mu + (1-x)k^\mu = q_1^\mu, \quad (4.12b)$$

$$M^2 = m^2 + x(x-1)k^2, \quad (4.12c)$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \rightarrow 2 \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}, \quad (4.12d)$$

para podermos iniciar a avaliação desse tensor,

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma} = & \frac{\mu^{4-D}}{4} \int_0^1 dx (x-1) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{[2p^\rho + (2x-1)k^\rho][2p^\sigma + (2x-1)k^\sigma]}{[p^2 - m^2 - x(x-1)k^2]^3} \\ & \times \left\{ 3[(p+xk)^2 - m^2] \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda + 4 [(p^\mu + xk^\mu) \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda p_\tau \right. \\ & \left. - (p^\nu + xk^\nu) \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda p_\tau - (p \cdot k + xk^2) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa (p_\lambda + xk_\lambda)] \right\}. \quad (4.13) \end{aligned}$$

Nesta nova representação a relação entre os tensores  $\tilde{\Pi}_b^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = \tilde{\Pi}_a^{\nu\mu\rho\sigma}(-k)$ , é obtida substituindo-se o deslocamento no momento interno  $p^\mu$  pelo seguinte deslocamento no parâmetro de Feynman  $x \rightarrow 1-x$ . Como consequência, há termos com paridade definida por esse deslocamento, como por exemplo a massa  $M^2 = m^2 + x(x-1)k^2 \rightarrow m^2 + (1-x)(-x)k^2 = M^2$  que é invariante, ou seja, é par sob essa transformação, ao passo que outros termos invertem seu sinal, como por exemplo  $(2x-1) \rightarrow -(2x-1)$ , sendo chamados de ímpares sob essa transformação, além daqueles sem uma paridade definida. Em geral, os termos ímpares são espúrios, pois após a integração no parâmetro de Feynman anulam-se. Consideremos um termo ímpar arbitrário,

$$\int_0^1 dx (x-1)x(2x-1)f(M^2) = - \int_0^1 dx (x-1)x(2x-1)f(M^2) \equiv 0, \quad (4.14)$$

sob esse deslocamento o mesmo ganha um sinal negativo global, sendo, portanto identicamente nulo.

É importante lembrar que o mapeamento entre os tensores não é uma hipótese, nem um artifício criado, mas uma premissa que justifica e permite efetuar apenas a seguinte mudança de variável  $x \rightarrow 1-x$  em uma parte arbitrária do inte-

grando sem comprometer o resultado, mesmo sendo este um integrando divergente.

Retornando ao tensor (4.13), é útil expandir (ordenar) o integrando em contribuições da ordem do quadri vetor  $p^\mu$ , já com todos os termos de ordem ímpar em  $p^\mu$  descartados, pois a esses corresponde um integrando ímpar e integral nula, dessa forma,

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = & \frac{\mu^{4-D}}{4} \int_0^1 dx(x-1) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - M^2)^3} [4p^\rho p^\sigma (T_0^{\mu\nu} + T_{pp}^{\mu\nu}) \\ & + 2(2x-1)(p^\rho k^\sigma + p^\sigma k^\rho) T_p^{\mu\nu} + (2x-1)^2 k^\rho k^\sigma (T_0^{\mu\nu} + T_{pp}^{\mu\nu})], \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde,  $T_0^{\mu\nu}$  é independente de  $p^\mu$ , ao passo que  $T_p^{\mu\nu}$  é de ordem 1 em  $p^\mu$  e assim por diante, conforme podemos verificar abaixo,

$$T_0^{\mu\nu} = -(3m^2 + x^2 k^2) \epsilon^{\alpha\mu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda, \quad (4.16a)$$

$$\begin{aligned} T_p^{\mu\nu} = & 4xk^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda p_\tau - 4xk^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda p_\tau - 4xk^2 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa p_\lambda \\ & + 2x(p \cdot k) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda, \end{aligned} \quad (4.16b)$$

$$\begin{aligned} T_{pp}^{\mu\nu} = & 4p^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda p_\tau - 4p^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda p_\tau - 4(p \cdot k) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa p_\lambda \\ & + 3p^2 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda. \end{aligned} \quad (4.16c)$$

Analisando a paridade dos termos no integrando de (4.15) sob o deslocamento  $x \rightarrow 1-x$ , percebemos que o termo  $(x-1)(2x-1)(p^\rho k^\sigma + p^\sigma k^\rho) T_p^{\mu\nu}$  é ímpar e pelo argumento (4.14) é nulo. Assim, retirando este termo, temos,

$$\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\mu^{4-D}}{4} \int_0^1 dx(x-1) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{4p^\rho p^\sigma + (2x-1)^2 k^\rho k^\sigma}{(p^2 - M^2)^3} (T_0^{\mu\nu} + T_{pp}^{\mu\nu}). \quad (4.17)$$

Afim de extrair estruturas topológicas de  $\Pi_a^{\mu\nu\alpha\beta}(k)$  independentes do momento interno  $p^\mu$  e calcularmos os seus respectivos coeficientes, explicitamos os tensores (4.16) presentes em (4.17) fazendo, a seguir, o uso da implementação abaixo,

$$p^\mu p^\nu \rightarrow \frac{p^2}{D} g^{\mu\nu}, \quad (4.18a)$$

$$p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta \rightarrow \frac{p^4}{D(D+2)} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu}), \quad (4.18b)$$

dessa forma, reescrevemos o tensor  $\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k)$  exibindo sua estrutura topológica,

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma} = & A(k, m) g^{\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda + B(k, m) k^\rho k^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda \\ & + C(k, m) [(g^{\mu\rho} \epsilon^{\nu\sigma\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - g^{\nu\rho} \epsilon^{\mu\sigma\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - k^\rho \epsilon^{\mu\sigma\nu\kappa} b_\kappa) \\ & + (g^{\mu\sigma} \epsilon^{\nu\rho\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - g^{\nu\sigma} \epsilon^{\mu\rho\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - k^\sigma \epsilon^{\mu\rho\nu\kappa} b_\kappa)], \end{aligned} \quad (4.19)$$

com os respectivos coeficientes,

$$A(k, m) = \frac{\mu^{4-D}}{D} \int_0^1 dx (x-1) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{(p^2 - M^2)^3} \left[ \frac{-12p^2}{D+2} + 3(p^2 - m^2) - x^2 k^2 \right], \quad (4.20a)$$

$$B(k, m) = \frac{\mu^{4-D}}{4} \int_0^1 dx (x-1) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(2x-1)^2}{(p^2 - M^2)^3} \left[ \frac{3(D-4)p^2}{D} - 3m^2 - x^2 k^2 \right], \quad (4.20b)$$

$$C(k, m) = \frac{4\mu^{4-D}}{D(D+2)} \int_0^1 dx (x-1) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^4}{(p^2 - M^2)^3}. \quad (4.20c)$$

Podemos ainda, simplificar o tensor  $\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k, m)$ , na Eq. (4.19), empregando

a seguinte identidade,

$$g^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\sigma\alpha\lambda} - g^{\nu\rho}\epsilon^{\mu\sigma\alpha\lambda} - g^{\lambda\rho}\epsilon^{\mu\sigma\nu\alpha} + g^{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\alpha\lambda} - g^{\alpha\rho}\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} \equiv 0, \quad (4.21)$$

na estrutura topológica que acompanha o coeficiente  $C(k, m)$ . Para isso, contraímos a identidade acima (4.21) com  $b_\kappa k_\lambda$ . De modo que,

$$g^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\sigma\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - g^{\nu\rho}\epsilon^{\mu\sigma\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - k^\rho\epsilon^{\mu\sigma\nu\kappa}b_\kappa \equiv -g^{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda + b^\rho\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}k_\lambda. \quad (4.22)$$

Agora, procedemos à simplificação das topologias que acompanham o coeficiente  $C(k, m)$  na Eq. (4.19), conforme vemos abaixo,

$$\begin{aligned} & [(g^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\sigma\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - g^{\nu\rho}\epsilon^{\mu\sigma\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - k^\rho\epsilon^{\mu\sigma\nu\kappa}b_\kappa) + (g^{\mu\sigma}\epsilon^{\nu\rho\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - g^{\nu\sigma}\epsilon^{\mu\rho\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - k^\sigma\epsilon^{\mu\rho\nu\kappa}b_\kappa)] \\ &= (-g^{\sigma\rho}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda + b^\rho\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}k_\lambda) + (-g^{\sigma\rho}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda + b^\sigma\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}k_\lambda) \\ &= b^\rho\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}k_\lambda + b^\sigma\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}k_\lambda - 2g^{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Retornando ao tensor  $\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k, m)$ , na Eq. (4.19), com o resultado acima, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma} &= [A(k, m) - 2C(k, m)]g^{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda + B(k, m)k^\rho k^\sigma\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda \\ &\quad + C(k, m)(b^\rho\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}k_\lambda + b^\sigma\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}k_\lambda), \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde os coeficientes  $A(k, m)$ ,  $B(k, m)$  e  $C(k, m)$  já foram apresentados em (4.20).

Na forma apresentada pela equação (4.24) o tensor  $\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\alpha\beta}$  não apresenta invariância por transformação de calibre,  $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + k_\mu\Lambda_\nu + k_\nu\Lambda_\mu$ , contudo mostraremos abaixo que trata-se de um resultado aparente (superficial) no limite de férmions

sem massa. De fato, sem a imposição da invariância por transformação de calibre, manipularemos os coeficientes em (4.20) obtendo, por fim, um resultado invariante por tal transformação.

Devido ao grau de divergência e da complexidade da avaliação dos coeficientes  $A(k, m)$  e  $C(k, m)$  é interessante obter uma relação entre estes coeficientes restantes,

$$A(k, m) + k^2 B(k, m) - 2C(k, m) = \frac{i(-m^2)^{D/2-1}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right), \quad (4.25)$$

cujo lado direito é independente do valor assumido pelo momento externo, de modo que podemos ter uma idéia da região de convergência destes coeficientes dentro do cenário da regularização dimensional, i.e,  $D < 2$  para  $m \neq 0$  ou  $D > 2$  para  $m = 0$ . Essa expressão é obtida ao ser verificada a transversalidades do tensor  $\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k)$  ao tensor  $k_\rho k_\sigma$ . Sabe-se que, mesmo em três dimensões, há a falha da transversalidade, fato relacionado com a chamada anomalia axial gravitacional para férmions massivos, i.e., há quebra da simetria axial através da massa [78]. Discutimos sobre a anomalia axial no apêndice (8), para a anomalia axial gravitacionais também sugerimos ao leitor a ref. [79].

Sem entrar em detalhes, consideraremos o limite ultravioleta ( $\frac{m^2}{k^2} \rightarrow 0$ ), assim o lado direito da relação acima (4.25) entre os coeficientes torna-se nulo. Além disso, após a integração no momento interno e no parâmetro de Feynman, o coeficiente  $C(k, m)$  tem limite nulo para todo valor do momento externo (inclusive zero,  $k^2 = 0$ ), ou seja,  $C(k, m \rightarrow 0) = C(k = 0, m \rightarrow 0) = 0$ , daí,  $A(k, m \rightarrow 0) = -k^2 B(k, m \rightarrow 0)$

e como,

$$B(k, m \rightarrow 0) = \frac{-i}{128\pi^2} \int_0^1 dx (1-2x)^2 (2x-3) = \frac{i}{192\pi^2}, \quad (4.26)$$

então, dessa forma,

$$\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k, m \rightarrow 0) = \frac{i}{192\pi^2} (k^2 g^{\rho\sigma} - k^\rho k^\sigma) \epsilon^{\mu\nu b k}. \quad (4.27)$$

Desse modo, a ação gravitacional CFJ induzida por correções radiativas é dada por,

$$S_{CFJ} = \frac{1}{192\pi^2} \int d^4x h^{\mu\nu} b^\lambda \epsilon_{\alpha\mu\lambda\rho} \partial^\rho (\partial_\gamma \partial^\gamma h_\nu^\alpha - \partial_\nu \partial_\gamma h^{\gamma\alpha}), \quad (4.28)$$

cujos coeficiente  $v_\lambda$  presente na ação (4.5) é dado por,

$$v_\lambda = \frac{1}{192\pi^2} b_\lambda. \quad (4.29)$$

Assim, a ação gravitacional CFJ obtida é invariante por transformação de calibre, ao passo que, o seu coeficiente está em acordo com o resultado obtido por Alvarez-Gaumé e Witten no contexto das anomalias axiais gravitacionais [79].

### 4.3 Efeitos de temperatura finita sobre a indução

A seguir, vamos efetuar este cálculo em temperatura finita. Com efeito, passaremos a expressão (4.13) para o espaço euclideo ( $m \rightarrow im, dp_0 \rightarrow idp_0$ ), explicitando as partes espacial e temporal do quadrivetor  $p_\mu = \vec{p}_\mu + p_0 u_\mu$ , onde  $\vec{p}_\mu =$

$(0, \vec{p})$  e o quadrivetor  $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$  faz referência a velocidade do banho térmico onde este processo (auto-energia do gráviton) ocorre. A seguir, desfazendo, a seguir, o deslocamento na parte temporal do momento interno  $p_0$  através da substituição  $(p_0 \rightarrow p_0 - xk_0)$  no tensor (4.13), dessa forma  $p_0$  deixa de ser uma variável contínua, tornando-se uma variável discreta  $p_0 = (n + \frac{1}{2})\frac{2\pi}{\beta}$ , com  $n$  inteiro (frequência de Matsubara para férmions) e  $\int \frac{dp_0}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = & \frac{i\mu^{3-d}}{4} \int_0^1 dx(x-1) \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d\vec{p}}{(2\pi)^d} \left\{ 3[(\vec{p} + x\vec{k})^2 + p_0^2 + m^2] \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda \right. \\ & + 4[\vec{p}^\mu + (p_0 - xk_0)u^\mu + xk^\mu] \epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda [\vec{p}_\rho + (p_0 - xk_0)u_\rho] \\ & - 4[\vec{p}^\nu + (p_0 - xk_0)u^\nu + xk^\nu] \epsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda [\vec{p}_\rho + (p_0 - xk_0)u_\rho] \\ & \left. - 4[\vec{p} \cdot \vec{k} + (p_0 - xk_0)k_0 + xk^2] \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa [\vec{p}_\lambda + (p_0 - xk_0)u_\lambda + xk_\lambda] \right\} \\ & \times \frac{[2\vec{p}^\rho + (2x-1)k^\rho + 2(p_0 - xk_0)u^\rho][2\vec{p}^\sigma + (2x-1)k^\sigma + 2(p_0 - xk_0)u^\sigma]}{[\vec{p}^2 + (p_0 - xk_0)^2 + m^2 + x(1-x)k^2]^3}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Com a discretização das frequências fermiônicas e bosônicas segue-se que no mapeamento entre os tensores,  $\tilde{\Pi}_b^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = \tilde{\Pi}_a^{\nu\mu\rho\sigma}(-k)$  devemos considerar, além do deslocamento no parâmetro de Feynman  $x \rightarrow 1 - x$ , também outro na frequência,  $p_0 \rightarrow -p_0 + k_0$ . Assim, por essa transformação, termos como  $(p_0 - xk_0)^2$ ,  $M^2$ , ou  $(2x-1)(p_0 - xk_0)$  são ditos pares, enquanto que termos como  $(2x-1)$  ou  $(p_0 - xk_0)$  são ditos ímpares.

Prosseguiremos a avaliação deste tensor, conforme fizemos em temperatura nula. Ordenamos o integrando em potências do momento de integração  $\vec{p}_\mu$  da se-



guinte forma,

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma}(k) = & \frac{i\mu^{3-d}}{4\beta} \int_0^1 dx(x-1) \sum_n \int \frac{d^d\vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\vec{p}^2 + (p_0 - xk_0)^2 + M^2]^3} \\ & \times \left\{ [4\vec{p}^\rho \vec{p}^\sigma + (2x-1)^2 k^\rho k^\sigma + 2(2x-1)(p_0 - xk_0)(k^\rho u^\sigma + u^\rho k^\sigma) \right. \\ & + 4(p_0 - xk_0)^2 u^\rho u^\sigma] (T_0^{\mu\nu} + T_{pp}^{\mu\nu}) + 2[(2x-1)(\vec{p}^\rho k^\sigma + \vec{p}^\sigma k^\rho) \\ & \left. + 2(p_0 - xk_0)(\vec{p}^\rho u^\sigma + \vec{p}^\sigma u^\rho)] T_p^{\mu\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde,  $T_0^{\mu\nu}$  é independente de  $p^\mu$ , ao passo que  $T_p^{\mu\nu}$  é de ordem 1 em  $p^\mu$  e assim por diante, conforme podemos verificar abaixo,

$$\begin{aligned} T_0^{\mu\nu} = & 3(x^2 \vec{k}^2 + p_0^2 + m^2) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda \\ & + 4[(p_0 - xk_0)u^\mu + xk^\mu](p_0 - xk_0) \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda u_\tau \\ & - 4[(p_0 - xk_0)u^\nu + xk^\nu](p_0 - xk_0) \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda u_\tau \\ & - 4[(p_0 - xk_0)u_\lambda + xk_\lambda][(p_0 - xk_0)k_0 + xk^2] \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa, \end{aligned} \quad (4.32a)$$

$$\begin{aligned} T_p^{\mu\nu} = & 6x(\vec{p} \cdot \vec{k}) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda \\ & + 4\{(p_0 - xk_0)\vec{p}^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda u_\tau + [(p_0 - xk_0)u^\mu + xk^\mu] \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda \vec{p}_\tau\} \\ & - 4\{(p_0 - xk_0)\vec{p}^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda u_\tau + [(p_0 - xk_0)u^\nu + xk^\nu] \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda \vec{p}_\tau\} \\ & - 4\{[(p_0 - xk_0)k_0 + xk^2] \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa \vec{p}_\lambda + (\vec{p} \cdot \vec{k})[(p_0 - xk_0)u_\lambda + xk_\lambda] \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa\}, \end{aligned} \quad (4.32b)$$

$$T_{pp}^{\mu\nu} = 3\vec{p}^2 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda + 4\vec{p}^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda \vec{p}_\tau - 4\vec{p}^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda \vec{p}_\tau - 4(\vec{p} \cdot \vec{k}) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa \vec{p}_\lambda. \quad (4.32c)$$

Levando-se em conta a paridade dos termos, reescrevemos as contribuições acima descartando contribuições espúrias dos tipos:  $(x-1)x(2x-1)^2(p_0 - xk_0)$ ,  $(x-1)x(2x-1)(p_0 - xk_0)^2$ ,  $(x-1)x(p_0 - xk_0)^3$  e  $(x-1)x(p_0 - xk_0)$ . Desse modo,

as expressões tornam-se mais compactas,

$$T_0^{\mu\nu} = (-x^2 k^2 + 3p_0^2 + 3m^2 - 3x^2 k_0^2) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda \quad (4.33a)$$

$$+ 4(p_0 - xk_0)^2 (u^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda u_\tau - u^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda u_\tau - k_0 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa u_\lambda)$$

$$T_p^{\mu\nu} = 4(p_0 - xk_0) (\vec{p}^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda u_\tau - \vec{p}^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda u_\tau - k_0 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa \vec{p}_\lambda) \quad (4.33b)$$

$$+ 4(p_0 - xk_0) (u^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda \vec{p}_\tau - u^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda \vec{p}_\tau - (\vec{p} \cdot \vec{k}) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa u_\lambda),$$

$$T_{pp}^{\mu\nu} = 3\vec{p}^2 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda + 4\vec{p}^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda \vec{p}_\tau - 4\vec{p}^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda \vec{p}_\tau - 4(\vec{p} \cdot \vec{k}) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa \vec{p}_\lambda. \quad (4.33c)$$

Afim de extrair estruturas topológicas de  $\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\alpha\beta}(k)$  independentes do momento interno  $p^\mu$  e calcularmos os seus respectivos coeficientes, explicitamos os tensores (4.33) presentes em (4.31) fazendo, a seguir, o uso da implementação abaixo,

$$\vec{p}^\mu \vec{p}^\nu \rightarrow \frac{\vec{p}^2}{d} (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu), \quad (4.34a)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}^\mu \vec{p}^\nu \vec{p}^\alpha \vec{p}^\beta &\rightarrow \frac{\vec{p}^4}{d(d+2)} [(g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \\ &+ (g^{\mu\alpha} - u^\mu u^\alpha)(g^{\nu\beta} - u^\nu u^\beta) + (g^{\mu\beta} - u^\mu u^\beta)(g^{\alpha\nu} - u^\alpha u^\nu)]. \end{aligned} \quad (4.34b)$$

Dessa forma, reescrevemos o tensor  $\Pi_a^{\mu\nu\alpha\beta}(k)$  exibindo sua estrutura to-

pológica,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma} = & A(k, m)g^{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda + B(k, m)g^{\rho\sigma} (u^\mu\epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau}k_\lambda - u^\nu\epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau}k_\lambda - k_0\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}) b_\kappa u_\tau \\
& + C(k, m)k^\rho k^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda + D(k, m)k^\rho k^\sigma (u^\mu\epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau}k_\lambda - u^\nu\epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau}k_\lambda - k_0\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}) b_\kappa u_\tau \\
& + E(k, m)(k^\rho u^\sigma + u^\rho k^\sigma)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda + F(k, m)u^\rho u^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda \\
& + G(k, m)(k^\rho u^\sigma + u^\rho k^\sigma) (u^\mu\epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau}k_\lambda - u^\nu\epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau}k_\lambda - k_0\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}) b_\kappa u_\tau \quad (4.35) \\
& + H(k, m)u^\rho u^\sigma (u^\mu\epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau}b_\kappa k_\lambda u_\tau - u^\nu\epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau}b_\kappa k_\lambda u_\tau - k_0\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}b_\kappa u_\tau) \\
& + I(k, m) [(g^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\sigma\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - g^{\nu\rho}\epsilon^{\mu\sigma\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - k^\rho\epsilon^{\mu\sigma\nu\kappa}b_\kappa) \\
& + (g^{\mu\sigma}\epsilon^{\nu\rho\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - g^{\nu\sigma}\epsilon^{\mu\rho\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - k^\sigma\epsilon^{\mu\rho\nu\kappa}b_\kappa)] \\
& + B(k, m) [u^\sigma(g^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau}b_\kappa k_\lambda u_\tau - g^{\nu\rho}\epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau}b_\kappa k_\lambda u_\tau - k^\rho\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}b_\kappa u_\tau) \\
& + u^\sigma(u^\mu\epsilon^{\nu\rho\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - u^\nu\epsilon^{\mu\rho\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - k_0\epsilon^{\mu\rho\nu\kappa}b_\kappa) \\
& + u^\rho(g^{\mu\sigma}\epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau}b_\kappa k_\lambda u_\tau - g^{\nu\sigma}\epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau}b_\kappa k_\lambda u_\tau - k^\sigma\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}b_\kappa u_\tau) \\
& + u^\rho(u^\mu\epsilon^{\nu\sigma\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - u^\nu\epsilon^{\mu\sigma\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - k_0\epsilon^{\mu\sigma\nu\kappa}b_\kappa)] \\
& + J(k, m) [k^\rho(g^{\mu\sigma}\epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau}b_\kappa k_\lambda u_\tau - g^{\nu\sigma}\epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau}b_\kappa k_\lambda u_\tau - k^\sigma\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}b_\kappa u_\tau) \\
& + k^\rho(u^\mu\epsilon^{\nu\sigma\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - u^\nu\epsilon^{\mu\sigma\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - k_0\epsilon^{\mu\sigma\nu\kappa}b_\kappa) \\
& + k^\sigma(g^{\mu\rho}\epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau}b_\kappa k_\lambda u_\tau - g^{\nu\rho}\epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau}b_\kappa k_\lambda u_\tau - k^\rho\epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}b_\kappa u_\tau) \\
& + k^\sigma(u^\mu\epsilon^{\nu\rho\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - u^\nu\epsilon^{\mu\rho\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda - k_0\epsilon^{\mu\rho\nu\kappa}b_\kappa)] ,
\end{aligned}$$

com os respectivos coeficientes,

$$\begin{aligned}
A(k, m) = & \frac{i\mu^{3-d}}{4\beta} \int_0^1 dx(x-1) \sum_n \int \frac{d^d\vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\vec{p}^2 + (p_0 - xk_0)^2 + M^2]^3} \\
& \times \left\{ \frac{12\vec{p}^4}{d(d+2)}(d-2) + \frac{4\vec{p}^2}{d} [3(-x^2k_0^2 + p_0^2 + m^2) - x^2k^2] \right\}, \quad (4.36a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(k, m) &= \frac{i\mu^{3-d}}{4\beta} \int_0^1 dx(x-1) \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\vec{p}^2 + (p_0 - xk_0)^2 + M^2]^3} \\
&\times \left\{ \frac{16\vec{p}^2}{d} (p_0 - xk_0)^2 - \frac{16\vec{p}^4}{d(d+2)} \right\}, \tag{4.36b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(k, m) &= \frac{i\mu^{3-d}}{4\beta} \int_0^1 dx(x-1) \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{(2x-1)^2}{[\vec{p}^2 + (p_0 - xk_0)^2 + M^2]^3} \\
&\times \left[ \frac{3(d-4)\vec{p}^2}{d} - x^2 k^2 + 3p_0^2 + 3m^2 - 3x^2 k_0^2 \right], \tag{4.36c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(k, m) &= \frac{i\mu^{3-d}}{4\beta} \int_0^1 dx(x-1) \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\vec{p}^2 + (p_0 - xk_0)^2 + M^2]^3} \\
&\times \left\{ 4(2x-1)^2 \left[ (p_0 - xk_0)^2 - \frac{\vec{p}^2}{d} \right] \right\}, \tag{4.36d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(k, m) &= \frac{i\mu^{3-d}}{4\beta} \int_0^1 dx(x-1) \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{2(2x-1)(p_0 - xk_0)}{[\vec{p}^2 + (p_0 - xk_0)^2 + M^2]^3} \\
&\times \left[ \frac{3(d-4)\vec{p}^2}{d} - x^2 k^2 + 3p_0^2 + 3m^2 - 3x^2 k_0^2 \right], \tag{4.36e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(k, m) &= \frac{i\mu^{3-d}}{4\beta} \int_0^1 dx(x-1) \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\vec{p}^2 + (p_0 - xk_0)^2 + M^2]^3} \\
&\times \left\{ -\frac{12\vec{p}^4}{d(d+2)} (d-2) + \left[ 4(p_0 - xk_0)^2 - \frac{4\vec{p}^2}{d} \right] [3(-x^2 k_0^2 + p_0^2 + m^2) - x^2 k^2] \right. \\
&\quad \left. + 4(p_0 - xk_0)^2 \left[ \frac{3(d-4)\vec{p}^2}{d} \right] \right\}, \tag{4.36f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(k, m) &= \frac{i\mu^{3-d}}{4\beta} \int_0^1 dx(x-1) \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{8(2x-1)(p_0 - xk_0)}{[\vec{p}^2 + (p_0 - xk_0)^2 + M^2]^3} \\
&\times \left[ (p_0 - xk_0)^2 - 3\frac{\vec{p}^2}{d} \right], \tag{4.36g}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(k, m) &= \frac{i\mu^{3-d}}{4\beta} \int_0^1 dx(x-1) \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\vec{p}^2 + (p_0 - xk_0)^2 + M^2]^3} \\
&\times \left\{ \frac{48\vec{p}^4}{d(d+2)} - \frac{80\vec{p}^2(p_0 - xk_0)^2}{d} + 16(p_0 - xk_0)^2 \left[ (p_0 - xk_0)^2 - \frac{\vec{p}^2}{d} \right] \right\} \tag{4.36h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(k, m) &= \frac{i\mu^{3-d}}{4\beta} \int_0^1 dx(x-1) \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\vec{p}^2 + (p_0 - xk_0)^2 + M^2]^3} \\
&\times \frac{16\vec{p}^4}{d(d+2)}, \tag{4.36i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(k, m) &= \frac{i\mu^{3-d}}{4\beta} \int_0^1 dx (x-1) \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\vec{p}^2 + (p_0 - xk_0)^2 + M^2]^3} \\
&\times 8(2x-1) \frac{\vec{p}^2 (p_0 - xk_0)}{d}. \tag{4.36j}
\end{aligned}$$

Realizamos a simplificação do tensor (4.35) a partir da seguinte identidade,

$$g^{\mu\rho} \epsilon^{\nu\sigma\alpha\lambda} - g^{\nu\rho} \epsilon^{\mu\sigma\alpha\lambda} - g^{\lambda\rho} \epsilon^{\mu\sigma\nu\alpha} + g^{\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\alpha\lambda} - g^{\alpha\rho} \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} \equiv 0. \tag{4.37}$$

Obtemos quatro novas identidades ao contrair a expressão acima (4.37), respectivamente, com  $b_\alpha k_\lambda$ , com  $b_\alpha k_\lambda u_\sigma$ , com  $b_\alpha k_\lambda u_\rho$  ou com  $b_\alpha k_\lambda u_\rho u_\sigma$ . Conforme vemos abaixo,

$$g^{\mu\rho} \epsilon^{\nu\sigma\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - g^{\nu\rho} \epsilon^{\mu\sigma\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - k^\rho \epsilon^{\mu\sigma\nu\kappa} b_\kappa \equiv -g^{\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda + b^\rho \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} k_\lambda, \tag{4.38a}$$

$$g^{\mu\rho} \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda u_\tau - g^{\nu\rho} \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda u_\tau - k^\rho \epsilon^{\mu\nu\kappa\tau} b_\kappa u_\tau \equiv -u^\rho \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - b^\rho \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} k_\lambda u_\tau, \tag{4.38b}$$

$$u^\mu \epsilon^{\nu\sigma\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - u^\nu \epsilon^{\mu\sigma\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - k_0 \epsilon^{\mu\sigma\nu\kappa} b_\kappa \equiv -u^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda + b_0 \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} k_\lambda, \tag{4.38c}$$

$$u^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda u_\tau - u^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} b_\kappa k_\lambda u_\tau - k_0 \epsilon^{\mu\nu\kappa\tau} b_\kappa u_\tau \equiv -b_i \epsilon^{\mu\nu i\lambda} k_\lambda. \tag{4.38d}$$

Agora, procedemos à simplificação da expressão (4.35). Por exemplo, para o coeficiente  $I(k, m)$ , aplicamos duas vezes a relação (4.38a),

$$\begin{aligned}
&[(g^{\mu\rho} \epsilon^{\nu\sigma\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - g^{\nu\rho} \epsilon^{\mu\sigma\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - k^\rho \epsilon^{\mu\sigma\nu\kappa} b_\kappa) + (g^{\mu\sigma} \epsilon^{\nu\rho\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - g^{\nu\sigma} \epsilon^{\mu\rho\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - k^\sigma \epsilon^{\mu\rho\nu\kappa} b_\kappa)] \\
&= (-g^{\sigma\rho} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda + b^\rho \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} k_\lambda) + (-g^{\sigma\rho} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda + b^\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} k_\lambda) \\
&= b^\rho \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} k_\lambda + b^\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} k_\lambda - 2g^{\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda. \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Para o coeficiente  $B(k, m)$ , aplicamos duas vezes a relação (4.38b) e duas vezes a relação (4.38c),

$$\begin{aligned}
& [u^\sigma u_\tau b_\kappa (g^{\mu\rho} \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} k_\lambda - g^{\nu\rho} \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} k_\lambda - k^\rho \epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}) + u^\sigma b_\kappa (u^\mu \epsilon^{\nu\rho\kappa\lambda} k_\lambda - u^\nu \epsilon^{\mu\rho\kappa\lambda} k_\lambda - k_0 \epsilon^{\mu\rho\nu\kappa}) \\
& + u^\rho u_\tau b_\kappa (g^{\mu\sigma} \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} k_\lambda - g^{\nu\sigma} \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} k_\lambda - k^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}) + u^\rho b_\kappa (u^\mu \epsilon^{\nu\sigma\kappa\lambda} k_\lambda - u^\nu \epsilon^{\mu\sigma\kappa\lambda} k_\lambda - k_0 \epsilon^{\mu\sigma\nu\kappa})] \\
= & u^\sigma (-u^\rho \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - b^\rho \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} k_\lambda u_\tau) + u^\sigma (-u^\rho \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda + b_0 \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} k_\lambda) \\
& + u^\rho (-u^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - b^\sigma \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} k_\lambda u_\tau) + u^\rho (-u^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda + b_0 \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} k_\lambda) \\
= & -4u^\rho u^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - (u^\rho b^\sigma + u^\sigma b^\rho) \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} k_\lambda u_\tau + b_0 (u^\rho \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} k_\lambda + u^\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} k_\lambda).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Por fim, para o coeficiente  $J(k, m)$ , aplicamos duas vezes a relação (4.38b) e duas vezes a relação (4.38c),

$$\begin{aligned}
& [k^\rho b_\kappa u_\tau (g^{\mu\sigma} \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} k_\lambda - g^{\nu\sigma} \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} k_\lambda - k^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}) + k^\rho b_\kappa (u^\mu \epsilon^{\nu\sigma\kappa\lambda} k_\lambda - u^\nu \epsilon^{\mu\sigma\kappa\lambda} k_\lambda - k_0 \epsilon^{\mu\sigma\nu\kappa}) \\
& + k^\sigma b_\kappa u_\tau (g^{\mu\rho} \epsilon^{\nu\kappa\lambda\tau} k_\lambda - g^{\nu\rho} \epsilon^{\mu\kappa\lambda\tau} k_\lambda - k^\rho \epsilon^{\mu\nu\kappa\tau}) + k^\sigma b_\kappa (u^\mu \epsilon^{\nu\rho\kappa\lambda} k_\lambda - u^\nu \epsilon^{\mu\rho\kappa\lambda} k_\lambda - k_0 \epsilon^{\mu\rho\nu\kappa})] \\
= & k^\rho (-u^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - b^\sigma \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} k_\lambda u_\tau) + k^\rho (-u^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda + b_0 \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} k_\lambda) \\
& + k^\sigma (-u^\rho \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - b^\rho \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} k_\lambda u_\tau) + k^\sigma (-u^\rho \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda + b_0 \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} k_\lambda) \\
= & -2(k^\rho u^\sigma + k^\sigma u^\rho) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - (k^\rho b^\sigma + k^\sigma b^\rho) \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} k_\lambda u_\tau + b_0 (k^\rho \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} k_\lambda + k^\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} k_\lambda) \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Assim, ao utilizar essas identidades podemos simplificar nossa expressão ini-

cial (4.35),

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma} = & [A(k, m) - 2I(k, m)] g^{\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - B(k, m) g^{\rho\sigma} b_i \epsilon^{\mu\nu i\lambda} k_\lambda + C(k, m) k^\rho k^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda \\
& - D(k, m) k^\rho k^\sigma b_i \epsilon^{\mu\nu i\lambda} k_\lambda + [E(k, m) - 2J(k, m)] (k^\rho u^\sigma + k^\sigma u^\rho) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda \\
& + [F(k, m) - 4B(k, m)] u^\rho u^\sigma \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - G(k, m) (k^\rho u^\sigma + u^\rho k^\sigma) b_i \epsilon^{\mu\nu i\lambda} k_\lambda \\
& - H(k, m) u^\rho u^\sigma b_i \epsilon^{\mu\nu i\lambda} k_\lambda + I(k, m) [b^\rho \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} k_\lambda + b^\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} k_\lambda] \\
& + B(k, m) [-(u^\rho b^\sigma + u^\sigma b^\rho) \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} k_\lambda u_\tau + b_0 (u^\rho \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} k_\lambda + u^\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} k_\lambda)] \\
& + J(k, m) [-(k^\rho b^\sigma + k^\sigma b^\rho) \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} k_\lambda u_\tau + b_0 (k^\rho \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} k_\lambda + k^\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} k_\lambda)].
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Devido ao grau de divergência e da complexidade da avaliação nos coeficientes  $E(k, m)$ ,  $G(k, m)$  e  $J(k, m)$  é interessante obter uma relação entre estes coeficientes restantes,

$$k^2 E(k, m) + k_0 F(k, m) = 2k_0 B(k, m), \tag{4.43a}$$

$$k^2 G(k, m) + k_0 H(k, m) = 0, \tag{4.43b}$$

$$k^2 J(k, m) + k_0 B(k, m) = 0, \tag{4.43c}$$

$$k^2 D(k, m) + k_0 G(k, m) = -B(k, m), \tag{4.43d}$$

$$A(k, m) - 2I(k, m) + k^2 C(k, m) + k_0 E(k, m) = 2k_0 J(k, m) + f(m), \tag{4.43e}$$

$$\text{onde } f(m) = -\frac{(m^2)^{\frac{d-1}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{d+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{1-d}{2}\right).$$

Com essas identidades, o tensor (4.35) é reescrito conforme vemos abaixo,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma} = & [A(k, m) - 2I(k, m)] \left( g^{\rho\sigma} - \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2} \right) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - B(k, m) \left( g^{\rho\sigma} - \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2} \right) b_i \epsilon^{\mu\nu i\lambda} k_\lambda \\
& + [F(k, m) - 4B(k, m)] \left( \frac{k_0}{k^2} k^\rho - u^\rho \right) \left( \frac{k_0}{k^2} k^\sigma - u^\sigma \right) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda + f(m) \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda \\
& - H(k, m) \left( \frac{k_0}{k^2} k^\rho - u^\rho \right) \left( \frac{k_0}{k^2} k^\sigma - u^\sigma \right) b_i \epsilon^{\mu\nu i\lambda} k_\lambda + I(k, m) (b^\rho \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} k_\lambda + b^\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} k_\lambda) \\
& + B(k, m) \left( \frac{k_0}{k^2} k^\rho - u^\rho \right) (b^\sigma \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} k_\lambda u_\tau - b_0 \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} k_\lambda) \\
& + B(k, m) \left( \frac{k_0}{k^2} k^\sigma - u^\sigma \right) (b^\rho \epsilon^{\mu\nu\lambda\tau} k_\lambda u_\tau - b_0 \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} k_\lambda),
\end{aligned} \tag{4.44}$$

onde as estruturas  $(g^{\rho\sigma} - \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2})$  e  $(\frac{k_0}{k^2} k^\rho - u^\rho)$  já são invariantes por transformação de calibre. Além disso, perceba que o termo dependente da massa  $f(m) \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2}$  prejudica a invariância do tensor, ou seja, é necessário tomar o limite  $m \rightarrow 0$ .

## 4.4 Avaliação dos Coeficientes

Agora, vamos realizar a avaliação dos coeficientes acima. O procedimento utilizado para isso será inicialmente a avaliação da integral de laço em  $\vec{p}$ . A seguir, tomaremos o limite de massa fermiônica nula junto com o limite estático sobre o momento externo, que é caracterizado por  $(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0)$ . Por fim, empregamos o método de soma desenvolvido na Ref. [62], para efetuar o somatório sobre as frequências de Matsubara  $p_0 = (n + \frac{1}{2}) \frac{2\pi}{\beta}$  em dimensões arbitrárias e, ao final do cálculo, reestabelecemos a dimensão  $d \rightarrow 3$ . Dessa forma, o primeiro coeficiente toma a forma,

$$\begin{aligned}
A(k, m) - 2I(k, m) &= \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{2(4\pi)^{d/2}} \sum_{p_0} \int_0^1 dx (1-x) [(p_0 - xk_0)^2 + M^2]^{\frac{d-4}{2}} \\
&\times \{ 8 [(p_0 - xk_0)^2 + M^2] + (d-2)x [6k_0(p_0 - xk_0) + (2x-3)k^2] \},
\end{aligned} \tag{4.45}$$



ao retirar os termos ímpares  $(1-x)xk_0(p_0-xk_0) \rightarrow 0$  e  $(1-x)x(d-2)(2x-3)k^2 \rightarrow 2(1-x)x(2-d)k^2$ , o coeficiente é simplificado para

$$A(k, m) - 2I(k, m) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{p_0} \int_0^1 dx (1-x) [(p_0 - xk_0)^2 + M^2]^{\frac{d-4}{2}} \quad (4.46)$$

$$\times \left\{ 4 [(p_0 - xk_0)^2 + M^2] + (2-d)xk^2 \right\}.$$

No limite de massa nula,  $M^2 = m^2 + x(1-x)k^2 \rightarrow x(1-x)k^2 = M^2$ , e considerando agora o limite estático,  $k_0 \rightarrow 0$ , temos

$$A - 2I = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{p_0} \int_0^1 dx \left\{ 4(1-x) (p_0^2 + M^2)^{\frac{d-2}{2}} + (2-d)M^2 (p_0^2 + M^2)^{\frac{d-4}{2}} \right\}. \quad (4.47)$$

A seguir realizamos o somatório utilizando a fórmula de Larry Ford,

$$A - 2I = \frac{\beta^{1-d}\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{2\pi^{(4-d)/2}} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \int_0^1 dx \int_{|\xi|}^{\infty} d\zeta [\xi^2(d+4x-6) + 4(1-x)\zeta^2]$$

$$\times [\tanh(\pi\zeta) - 1] (\zeta^2 - \xi^2)^{\frac{d}{2}-2} + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \int_0^1 dx (5-4x-d) (M^2)^{\frac{d-1}{2}}, \quad (4.48)$$

onde  $\xi = \frac{\beta M}{2\pi}$ . No limite de altas temperaturas, quando  $\xi \rightarrow 0$ , as integrais são facilmente feitas,

$$A - 2I = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \int_0^1 dx (5-4x-d) (M^2)^{\frac{d-1}{2}} \quad (4.49)$$

$$+ \frac{2\beta^{1-d}\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{\pi^{(4-d)/2}} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \int_0^1 dx \int_0^{\infty} d\zeta [\tanh(\pi\zeta) - 1] (\zeta^2)^{\frac{d}{2}-1}$$

$$= \frac{(3-d)(k^2)^{\frac{d-1}{2}} \sec\left(\frac{\pi d}{2}\right)}{2^{2d+3}\pi^{\frac{d}{2}-1}\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} - \frac{2\beta^{1-d}\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{2^{2d+1}\pi^{\frac{d}{2}+1}} (2^d - 4)\zeta(d-1)\Gamma(d-1) \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right),$$

restabelecendo a dimensão  $d \rightarrow 3$ , obtemos

$$A - 2I = -\frac{k^2}{192\pi^2} - \frac{T^2}{48}. \quad (4.50)$$

Coeficiente  $B(k, m)$ :

$$B(k, m) = \frac{2\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \sum_{p_0} \int_0^1 dx (1-x) [(p_0 - xk_0)^2 + M^2]^{\frac{d-4}{2}} [(d-1)(p_0 - xk_0)^2 + M^2]. \quad (4.51)$$

No limite de massa nula,  $M^2 = m^2 + x(1-x)k^2 \rightarrow x(1-x)k^2 = M^2$ , e considerando agora o limite estático,  $k_0 \rightarrow 0$ , temos

$$B(k, m) = \frac{2\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \sum_{p_0} \int_0^1 dx (1-x) (p_0^2 + M^2)^{\frac{d-4}{2}} [(d-1)p_0^2 + M^2]. \quad (4.52)$$

A seguir realizamos o somatório utilizando a fórmula de Larry Ford,

$$B(k, 0) = \frac{\beta^{1-d}\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{\pi^{2-\frac{d}{2}}} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \int_0^1 dx (1-x) \int_{|\xi|}^{\infty} d\zeta (\tanh(\pi\zeta) - 1) \quad (4.53)$$

$$\times (\zeta^2 - \xi^2)^{\frac{d}{2}-2} [(d-1)\zeta^2 - \xi^2],$$

onde  $\xi = \frac{\beta M}{2\pi}$ . No limite de altas temperaturas, quando  $\xi \rightarrow 0$ , as integrais são facilmente feitas,

$$B = \frac{\beta^{1-d}\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{\pi^{2-\frac{d}{2}}} (d-1) \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \int_0^1 dx (1-x) \int_0^{\infty} d\zeta (\tanh(\pi\zeta) - 1) (\zeta^2)^{\frac{d}{2}-1}$$

$$= \frac{\beta^{1-d}\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{2^{2d+1}\pi^{1+\frac{d}{2}}} (4 - 2^d) \Gamma(d)\zeta(d-1) \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right), \quad (4.54)$$

restabelecendo a dimensão  $d \rightarrow 3$ , obtemos

$$B = -\frac{T^2}{48}. \quad (4.55)$$

Coeficiente  $F(k, m)$ :

$$\begin{aligned} F(k, m) &= \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{p_0} \int_0^1 dx (1-x)x [6k_0(p_0 - xk_0) + k^2(2x - 3)] \\ &\times [(p_0 - xk_0)^2 + M^2]^{\frac{d-6}{2}} [(d-3)(p_0 - xk_0)^2 + M^2], \end{aligned} \quad (4.56)$$

ao retirar os termos ímpares  $(1-x)xk_0(p_0 - xk_0) \rightarrow 0$  e  $(1-x)x(2x-3)k^2 \rightarrow -2(1-x)xk^2$ , o coeficiente é simplificado para

$$\begin{aligned} F(k, m) &= \frac{-2\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} k^2 \sum_{p_0} \int_0^1 dx (1-x)x \left\{ (d-3) [(p_0 - xk_0)^2 + M^2]^{\frac{d-4}{2}} \right. \\ &\left. + (4-d)M^2 [(p_0 - xk_0)^2 + M^2]^{\frac{d-6}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

No limite de massa nula,  $M^2 = m^2 + x(1-x)k^2 \rightarrow x(1-x)k^2 = M^2$ , e considerando agora o limite estático,  $k_0 \rightarrow 0$ , temos

$$F(k, m) = \frac{-2\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} k^2 \sum_{p_0} \int_0^1 dx (1-x)x \left[ (d-3) (p_0^2 + M^2)^{\frac{d-4}{2}} + (4-d)M^2 (p_0^2 + M^2)^{\frac{d-6}{2}} \right], \quad (4.58)$$

A seguir realizamos o somatório utilizando a fórmula de Larry Ford,

$$\begin{aligned}
F(k, 0) &= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}-1}} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \int_0^1 dx \int_{\xi}^{\infty} d\zeta \tanh(\pi\zeta) \operatorname{sech}^2(\pi\zeta) M \xi \left(\frac{\xi^2}{M^2}\right)^{1-\frac{d}{2}} (\zeta^2 - \xi^2)^{\frac{d}{2}-1} \\
&= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}-1}} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \int_0^1 dx \int_{\xi}^{\infty} d\zeta \tanh(\pi\zeta) \operatorname{sech}^2(\pi\zeta) \xi^2 \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{1-d} (\zeta^2 - \xi^2)^{\frac{d}{2}-1} \\
&= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{2(4\pi)^{\frac{d}{2}-1}} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{1-d} \int_0^1 dx \int_{\xi}^{\infty} d\zeta \xi^2 \tanh(\pi\zeta) \operatorname{sech}^2(\pi\zeta) (\zeta^2 - \xi^2)^{\frac{d}{2}-1}, \quad (4.59)
\end{aligned}$$

onde  $\xi = \frac{\beta M}{2\pi}$ . No limite de altas temperaturas, quando  $\xi \rightarrow 0$ , as integrais se anulam, independente da dimensão,

$$F = 0. \quad (4.60)$$

Coeficiente  $H(k, m)$ :

$$\begin{aligned}
H(k, m) &= \frac{2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \sum_{p_0} \int_0^1 (x-1) \left\{ 3\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) [(p_0 - xk_0)^2 + M^2]^{\frac{d}{2}-1} \right. \\
&\quad - 12\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) (p_0 - xk_0)^2 [(p_0 - xk_0)^2 + M^2]^{\frac{d}{2}-2} \\
&\quad \left. + 4\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) (p_0 - xk_0)^4 [(p_0 - xk_0)^2 + M^2]^{\frac{d}{2}-3} \right\}. \quad (4.61)
\end{aligned}$$

No limite de massa nula,  $M^2 = m^2 + x(1-x)k^2 \rightarrow x(1-x)k^2 = M^2$ , e considerando agora o limite estático,  $k_0 \rightarrow 0$ , temos

$$\begin{aligned}
H(k, m) &= \frac{2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \sum_{p_0} \int_0^1 (x-1) \left[ 3\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) (p_0^2 + M^2)^{\frac{d}{2}-1} \right. \\
&\quad \left. - 12\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) p_0^2 (p_0^2 + M^2)^{\frac{d}{2}-2} + 4\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) p_0^4 (p_0^2 + M^2)^{\frac{d}{2}-3} \right], \quad (4.62)
\end{aligned}$$

A seguir realizamos o somatório utilizando a fórmula de Larry Ford,

$$\begin{aligned}
H(k, 0) = & \frac{2\beta^{1-d}\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{\pi^{-\frac{d}{2}}} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \int_0^1 dx (1-x) \int_{\xi}^{\infty} d\zeta \xi^2 \tanh(\pi\zeta) \operatorname{sech}^2(\pi\zeta) (\zeta^2 - \xi^2)^{\frac{d}{2}-1} \\
& - \frac{(d+1)\beta^{1-d}\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{\pi^{2-\frac{d}{2}}} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \int_0^1 dx (1-x) \int_{\xi}^{\infty} d\zeta (\tanh(\pi\zeta) - 1) (\zeta^2 - \xi^2)^{\frac{d}{2}-2} \\
& \times [(d-1)\zeta^2 - \xi^2], \tag{4.63}
\end{aligned}$$

onde  $\xi = \frac{\beta M}{2\pi}$ . No limite de altas temperaturas, quando  $\xi \rightarrow 0$ , as integrais são facilmente feitas,

$$H(k, 0) = \frac{(1-d^2)\beta^{1-d}\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{\pi^{2-\frac{d}{2}}} \sin\left(\frac{\pi d}{2}\right) \int_0^1 dx (1-x) \int_0^{\infty} d\zeta (\tanh(\pi\zeta) - 1) \zeta^{d-2}, \tag{4.64}$$

restabelecendo a dimensão  $d \rightarrow 3$ , obtemos

$$H = \frac{T^2}{12}. \tag{4.65}$$

## 4.5 O termo CS gravitacional em temperatura finita

Reescrevemos abaixo o tensor  $\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma}$ , i.e., Eq. (4.35), apresentando apenas os coeficientes não nulos para o limite de massa zero e que contribuem para o termo de

Chern-Simons gravitacional,  $\tilde{\Pi}_a^{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow \tilde{\Pi}_{aCS}^{\mu\nu\rho\sigma}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{aCS}^{\mu\nu\rho\sigma} = & [A(k, m) - 2I(k, m)] \left( g^{\rho\sigma} - \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2} \right) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - B(k, m) \left( g^{\rho\sigma} - \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2} \right) b_i \epsilon^{\mu\nu i\lambda} k_\lambda \\ & + [F(k, m) - 4B(k, m)] \left( \frac{k_0}{k^2} k^\rho - u^\rho \right) \left( \frac{k_0}{k^2} k^\sigma - u^\sigma \right) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda \\ & - H(k, m) \left( \frac{k_0}{k^2} k^\rho - u^\rho \right) \left( \frac{k_0}{k^2} k^\sigma - u^\sigma \right) b_i \epsilon^{\mu\nu i\lambda} k_\lambda. \end{aligned}$$

Perceba que a estrutura acima é invariante por transformação de calibre. Explicando os coeficientes não nulos, avaliados segundo o procedimento descrito acima, nosso resultado torna-se,

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{aCS}^{\mu\nu\rho\sigma} = & -\frac{k^2}{192\pi^2} \left( g^{\rho\sigma} - \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2} \right) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda - \frac{T^2}{48} \left( g^{\rho\sigma} - \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2} \right) b_0 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} u_\kappa k_\lambda \\ & + \frac{T^2}{12} \left( \frac{k_0}{k^2} k^\rho - u^\rho \right) \left( \frac{k_0}{k^2} k^\sigma - u^\sigma \right) b_0 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} u_\kappa k_\lambda. \end{aligned}$$

Note que o segundo termo acima,  $g^{\nu\sigma} b_0 \epsilon^{\mu\rho\kappa\lambda} u_\kappa k_\lambda$ , com o coeficiente  $\frac{T^2}{48}$ , é de fato aquele que contribui para a condutividade da corrente magnética quiral [32]. De modo que, como era esperado o resultado é puramente dependente do quadrado da temperatura, concordando com aquele apresentado na literatura, Ref. [32], como sendo a contribuição gravitacional para a condutividade dos semimetais de Weyl.

# Capítulo 5

## Não analiticidade do termo CFJ

em  $T \neq 0$

Nesta seção, discutimos o comportamento do coeficiente  $k_{AF}^\mu$  do termo Carroll-Field-Jackiw (CFJ) que surge devido a integração sobre férmions massivos, e a modificação sofrida por sua estrutura topológica no caso de temperatura finita. Nosso estudo é baseado no formalismo do tempo imaginário e sobre a soma das frequências de Matsubara. Nós demonstramos que a auto-energia do fóton é não analítica no limite de pequeno  $k^\mu$ , i.e., o limite estático ( $k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0$ ) e o limite de grande comprimento de onda ( $k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0$ ) não comutam, enquanto que a estrutura tensorial do termo CFJ mantêm-se em ambos os limites.

### 5.1 Introdução

A quebra da simetria de Lorentz e, em alguns casos, da simetria CPT é agora tratada como um ingrediente importante para a extensão do MP [52, 4]. Tipicamente, a simetria de Lorentz é quebrada através de alguns termos aditivos que são proporcionais a pequenos vetores ou tensores constantes (coeficientes) introduzindo direções privilegiadas no espaço-tempo. Suas aplicações potenciais estendem-se de teoria quântica de campo à física da matéria condensada, como ocorre, por exemplo, como o famoso termo Carroll-Field-Jackiw (CFJ) term [80] (ver [81] por suas aplicações no estudo dos semi-metais de Weyl). Este termo representa uma extensão quadridimensional do termo Chern-Simons (CS), que tem ganhado considerável atenção em três dimensões devido a sua relação com fenômenos planares, tais como o efeito Hall quântico fracionário e supercondutividades [82, 83].

O termo CFJ é um termo topológico que viola as simetrias de Lorentz e CPT, enquanto que a simetria de calibre é preservada. Ele é responsável por fornecer uma massa topológica para o campo de calibre, portanto alterando a relação de dispersão do fóton no vácuo [84]. É importante notar que o termo CFJ pode ser gerado dinamicamente através da integração funcional sobre os campos fermiônicos de Dirac em uma ação clássica envolvendo um acoplamento de férmions com o campo de calibre e/ou com um vetor axial constante [22]. Portanto, podemos falar sobre a dinâmica efetiva do campo de calibre com quebra da simetria de Lorentz em quatro dimensões.

Uma característica importante do termo CFJ consiste em sua ambiguidade [25]. Do ponto de vista formal, esta ambiguidade está relacionada ao fato que a contribuição para o termo CFJ é superficialmente divergente, contudo, suas partes polares são mutuamente canceladas, de modo que nós temos algum tipo de singu-



laridade  $\infty - \infty$  removível. Alguns valores para o termo CFJ são apresentados em [22, 23, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92], que diferem pelos métodos de regularização empregados na remoção desta singularidade, ao passo que a estrutura topológica deste termo continua ser a mesma em todos os casos.

Neste capítulo, estamos interessados no comportamento do coeficiente do termo CFJ induzido, quando o sistema físico é colocado em contato com um banho térmico [34, 35, 36, 37], a fim de estudar sua não analiticidade. Sabe-se que no regime de temperatura finita, a auto-energia é, em muitos casos, uma função não analítica dos momentos externos  $k_\mu$ , no limite  $k_\mu \rightarrow 0$ . Devido a seleção de um referencial específico feita pelo banho térmico, a auto-energia, em geral, depende de  $k_0$  e  $\vec{k}$  de maneiras diferentes, de modo que o limite estático ( $k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0$ ) e o limite de grande comprimento de onda ( $k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0$ ) nesses casos não comutam, assim como foi demonstrado nos casos de escalares auto-interagentes [38], Modelo Maxwell-Chern-Simons-Higgs [39], QED tridimensional [40] e QCD quente [41, 42, 43]. Como o comportamento ultravioleta da teoria (e portanto, a estrutura das possíveis divergências) é independente da temperatura, esperamos que ambiguidades de regularização não modifiquem a dependência da temperatura para o termo CFJ.

A estrutura desse capítulo está organizada da seguinte forma. Na próxima seção, reconsideramos a lagrangiana de partida utilizada no capítulo 3 desta tese, Eq. (3.5), onde adicionamos o termo de massa fermiônica,  $m\bar{\psi}\psi$ . A seguir, isolamos a contribuição  $b_\mu$ -linear presente no tensor de polarização do vácuo. Para isso, optamos pela abordagem perturbativa, contudo mantemos o mesmo cenário de regularização empregado no capítulo 3, i.e., regularização dimensional com a prescrição de 't Hooft-Veltman. Ainda nesta seção, manipulamos o tensor de polarização afim

de reduzir seu grau de divergência e restaurar sua invariância por transformações de calibre. Na seção 3, executamos o cálculo em temperatura finita, no formalismo do tempo imaginário, avaliando a soma sobre as frequências de Matsubara antes do cálculo da integral sobre a parte espacial do momento, este cálculo nunca foi considerado antes na literatura. E verificamos a não analiticidade do termo CFJ avaliando o seu coeficiente por dois limites que não comutam, i.e.,  $(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0)$  e  $(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0)$ , mostrando as diferenças existentes quando se usa a regularização dimensional, um cutoff e quando o cálculo explicitamente em 4 dimensões. Finalmente, na última seção discutimos os três resultados obtidos, mostrando, em especial, que o resultado obtido no cenário de regularização dimensional esta em acordo com aquele obtido no capítulo 3, mesmo um sendo perturbativo e o outro não perturbativo em  $b_\mu$ .

## 5.2 O tensor de polarização do vácuo em um loop

Nesta seção estamos interessado no estudo da geração radiativa do termo CFJ CPT-ímpar a partir do acoplamento do campo de calibre com férmions massivos, em temperatura finita. Para isto, vamos considerar o setor fermiônico da EDQ com violação de Lorentz, dado por

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m - \cancel{b}\gamma_5 - e\cancel{A})\psi. \quad (5.1)$$

Assim, o funcional gerador correspondente pode ser escrito como,

$$Z[A_\mu, \bar{\psi}, \psi] = \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi e^{i\int d^4x \mathcal{L}_\psi} = \int DA_\mu e^{iS_{\text{eff}}}, \quad (5.2)$$

onde a ação efetiva em um loop, obtida integrando sobre os férmions, toma a forma

$$S_{\text{eff}} = -i\text{Tr} \ln(\not{p} - m - \not{b}\gamma_5 - e\mathcal{A}). \quad (5.3)$$

Aqui,  $\text{Tr}$  representa o traço sobre as matrizes de Dirac, bem como o traço sobre o espaço das coordenadas.

Agora, a fim de isolar os termos quadráticos em  $A_\mu$  da ação efetiva, reescrevemos a expressão (5.3) como

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{\text{eff}}^{(n)}, \quad (5.4)$$

onde  $S_{\text{eff}}^{(0)} = -i\text{Tr} \ln(\not{p} - m - \not{b}\gamma_5)$  and

$$S_{\text{eff}}^{(n)} = \frac{i}{n} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5} e\mathcal{A} \right)^n. \quad (5.5)$$

Então, depois da avaliação do traço sobre o espaço das coordenadas, usando a relação básica  $A_\mu(x)G(p) = G(p - i\partial)A_\mu(x)$  do método da expansão derivativa [93, 94, 95], e a relação de completeza do espaço dos momentos, a ação quadrática  $S_{\text{eff}}^{(2)}$  é reescrita como

$$S_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x \Pi^{\mu\nu} A_\mu A_\nu. \quad (5.6)$$

Na expressão acima  $\Pi^{\mu\nu}$  é o tensor polarização do vácuo, ou em nosso caso, o tensor auto-energia do fóton em um loop,

$$\Pi^{\mu\nu} = ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} G(p)\gamma^\mu G(p - i\partial)\gamma^\nu, \quad (5.7)$$

onde o propagador depende do vetor axial  $b_\mu$  responsável pela violação da simetria de Lorentz e é dado por

$$G(p) = \frac{1}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5}. \quad (5.8)$$

A fim de avaliar a auto-energia do fóton em um loop (5.7), na abordagem perturbativa, devemos expandir o propagador (5.8) até primeira ordem em  $\not{b}$ , como segue

$$G(p) = S(p) + S(p)\not{b}\gamma_5 S(p) + \dots, \quad (5.9)$$

com  $S(p) = (\not{p} - m)^{-1}$ . Então, expandimos a polarização do vácuo em série de potências em  $b^\mu$  como  $\Pi^{\mu\nu} = \Pi_0^{\mu\nu} + \Pi_b^{\mu\nu} + \dots$ , onde  $\Pi_b^{\mu\nu} = \Pi_{b12|odd}^{\mu\nu} + \Pi_{b21|odd}^{\mu\nu}$ , com

$$\Pi_{b12|odd}^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p)\not{b}\gamma_5 S(p)\gamma^\mu S(p_1)\gamma^\nu, \quad (5.10a)$$

$$\Pi_{b21|odd}^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S(p)\gamma^\mu S(p_1)\not{b}\gamma_5 S(p_1)\gamma^\nu. \quad (5.10b)$$

Nessas expressões  $p_1^\mu = p^\mu - k^\mu$  e  $k^\mu$  é o momento externo. É imediato que  $\Pi_{b21|odd}^{\mu\nu}(k) = \Pi_{b12|odd}^{\nu\mu}(-k)$ , considerando o deslocamento  $p \rightarrow p + k$ .

Vamos calcular  $\Pi_{b12|odd}^{\mu\nu}(k)$  e  $\Pi_{b21|odd}^{\mu\nu}(k)$ , no cenário da regularização dimensional, movendo a matriz  $\gamma_5$  para o fim da expressão, de modo que, após a racionalização do propagador e do cálculo do traço, obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{b12|odd}^{\mu\nu} &= 4e^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2 (p_1^2 - m^2)} \left[ (p^2 - m^2) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa (k_\lambda + p_\lambda) \right. \\ &\quad \left. + 2 (p^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda p_\rho - p^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda p_\rho - (p \cdot k) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa p_\lambda) \right], \end{aligned} \quad (5.11a)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{b21|odd}^{\mu\nu} &= 4e^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2) (p_1^2 - m^2)^2} \left[ (p_1^2 - m^2) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa (2k_\lambda - p_\lambda) \right. \\ &\quad \left. + 2 (p_1^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda p_\rho - p_1^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda p_\rho - (p_1 \cdot k) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa p_{1\lambda}) \right]. \end{aligned} \quad (5.11b)$$

É fácil ver que essas expressões não são explicitamente invariantes por transformações de calibre. Realmente, termos linearmente divergentes em ambas expressões acima, que são,  $(p^2 - m^2)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa p_\lambda$  e  $(p_1^2 - m^2)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa p_\lambda$ , respectivamente, não são transversais. Contudo, tais termos divergentes não contribuem ao resultado final  $\Pi_b^{\mu\nu}$ , uma vez que eles se cancelam já no nível do integrando. Assim, as divergências restantes são na maioria logarítmicas e a invariância de calibre é restaurada.

Além disso, a relação  $\Pi_{b21|odd}^{\mu\nu}(k) = \Pi_{b12|odd}^{\nu\mu}(-k)$  é perdido após o cancelamento destes termos linearmente divergentes. Contudo, considerando

$$\frac{(p^2 - m^2)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda}{(p^2 - m^2)^2(p_1^2 - m^2)} = \frac{3}{2} \frac{(p^2 - m^2)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda}{(p^2 - m^2)^2(p_1^2 - m^2)} - \frac{1}{2} \frac{(p_1^2 - m^2)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda}{(p^2 - m^2)(p_1^2 - m^2)^2},$$

em  $\Pi_{b12|odd}^{\mu\nu}(k)$ , podemos reescrever as expressões (5.11), de modo que agora temos  $\Pi_b^{\mu\nu} = \tilde{\Pi}_{b12|odd}^{\mu\nu} + \tilde{\Pi}_{b21|odd}^{\mu\nu}$ , com

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{b12|odd}^{\mu\nu} = & 4e^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2(p_1^2 - m^2)} \left[ \frac{3}{2}(p^2 - m^2)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa k_\lambda \right. \\ & \left. + 2(p^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda p_\rho - p^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda p_\rho - (p \cdot k)\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}b_\kappa p_\lambda) \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

e  $\tilde{\Pi}_{b21|odd}^{\mu\nu}(k) = \tilde{\Pi}_{b12|odd}^{\nu\mu}(-k)$ . Portanto, é suficiente calcular apenas  $\Pi_{b12|odd}^{\mu\nu}$  uma vez que esses tensores contribuem igualmente para o resultado  $\Pi_b^{\mu\nu}$ . Notamos que esta expressão tem uma estrutura bastante típica aos integrandos que surgem dentro do cálculo do termo CFJ, ver por exemplo, [96]. Também, é claro que sob a substituição  $p^\kappa p_\rho \rightarrow \frac{1}{D} g^\kappa_\rho p^2$ , para ou  $D = 4$  ou  $D = 4 + 2\epsilon$ , com  $\epsilon \rightarrow 0$ , a divergência logarítmica desaparece, e a integral verifica-se ser finita, mas indeterminada para essas duas escolhas de  $D$ , assim como ocorre, por exemplo, em [96]. Portanto, o resultado

é finito e ambíguo fornecendo  $\Pi_{b_{12}|odd}^{\mu\nu} = 3C \frac{e^2}{8\pi^2} \mu^{4-D} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda$ , com  $C$  sendo um número dependente da regularização rendendo 1 para  $D = 4$  e 0 for  $D = 4 + 2\epsilon$ .

O próximo passo no cálculo em temperatura finita é a introdução das frequências de Matsubara, seguida pela extração da estrutura tensorial não-covariante, a qual executamos na próxima seção, e, como veremos, o resultado representa a não-analiticidade.

### 5.3 Não-analiticidade do termo CFJ

Vamos, agora, generalizar nossos resultados para temperatura finita. Para implementar os efeitos de temperatura finita, uma vez executado a rotação de Wick, dividimos o momento interno  $p$  em suas componentes espaciais e temporais. Para isto, devemos executar as seguintes substituições:  $g^{\mu\nu} \rightarrow -\delta^{\mu\nu}$ , i.e.,  $p^2 \rightarrow -\delta^{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -p^2$ ,  $b^2 \rightarrow -b^2$ ,  $p \cdot b \rightarrow -p \cdot b$ , e assim por diante, bem como

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \rightarrow \mu^{3-d} \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} i \int \frac{dp_0}{2\pi} \quad (5.13)$$

e  $p^\mu \rightarrow \vec{p}^\mu + p_0 u^\mu$ , a fim de separar nossas variáveis de integração, com  $\vec{p}^\mu = (0, \vec{p})$ ,  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , sendo um vetor tipo-tempo, e  $d = D - 1$ . Em adição, vamos assumir, a partir de agora, que o sistema está em equilíbrio térmico com uma temperatura  $T = \beta^{-1}$ , de modo que as condições de contorno antiperiódicas (periódicas) para férmions (bósons) conduzem a valores discretos de  $p_0 = (2n + 1) \frac{\pi}{\beta}$  ( $k_0 = \frac{2\pi l}{\beta}$ ), onde  $n$  (respectivamente  $l$ ) é um inteiro. Dessa forma, a substituição da integração sobre

$p_0$  pela soma sobre  $n$  em (5.12), pela regra  $\int \frac{dp_0}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n$ , nos dá

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{b_{12}|odd}^{\mu\nu} &= \frac{6ie^2}{\beta} \mu^{3-d} \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda}{(p^2 + m^2)(p_1^2 + m^2)} \\ &+ \frac{8ie^2}{\beta} \mu^{3-d} \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda p_\rho - p^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda p_\rho - (p \cdot k) \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa p_\lambda}{(p^2 + m^2)^2 (p_1^2 + m^2)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

A seguir, usando a decomposição  $p^\mu = \vec{p}^\mu + p_0 u^\mu$ , a fim de extrair a estrutura tensorial independente do momento interno, chegamos em

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{b_{12}|odd}^{\mu\nu} &= 6ie^2 \mu^{3-d} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda S_1 + 8ie^2 \mu^{3-d} \\ &\times \left[ \left( \delta^{\alpha\mu} \epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda \delta_\rho^\beta - \delta^{\alpha\nu} \epsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda \delta_\rho^\beta - \vec{k}^\alpha \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa \delta_\lambda^\beta \right) S_{2\alpha\beta} \right. \\ &+ \left( u^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda u_\rho - u^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda u_\rho - k_0 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa u_\lambda \right) S_3 \\ &+ \left( \delta^{\alpha\mu} \epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda u_\rho - \delta^{\alpha\nu} \epsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda u_\rho - \vec{k}^\alpha \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa u_\lambda \right) S_{4\alpha} \\ &\left. + \left( u^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda \delta_\rho^\alpha - u^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda \delta_\rho^\alpha - k_0 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa \delta_\lambda^\alpha \right) S_{4\alpha} \right], \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde

$$S_1 = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 + m^2)(p_1^2 + m^2)}, \quad (5.16a)$$

$$S_{2\alpha\beta} = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{\vec{p}_\alpha \vec{p}_\beta}{(p^2 + m^2)^2 (p_1^2 + m^2)}, \quad (5.16b)$$

$$S_3 = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{p_0^2}{(p^2 + m^2)^2 (p_1^2 + m^2)}, \quad (5.16c)$$

$$S_{4\alpha} = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{p_0 \vec{p}_\alpha}{(p^2 + m^2)^2 (p_1^2 + m^2)}. \quad (5.16d)$$

Por análise da Eq. (5.15), vemos que ela envolve o termo CFJ covariante proporcional a  $S_1$  presente em temperatura zero, bem como estruturas não-covariantes que surgem

apenas em temperatura finita.

A rotina que empregaremos na avaliação destes coeficientes diferencia-se daquelas já presentes na literatura. Vamos primeiro executar as somas e tomar os limites estático ( $k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0$ ) e de longo comprimento de onda ( $k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0$ ) com respeito ao momento externo, em cada uma das equações (5.16), e então finalmente avaliamos as integrais espaciais. Para isto, introduzimos novas variáveis, a saber,  $\omega_{p_1} = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2}$ ,  $\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ,  $\xi_{p_1} = \frac{\beta\omega_{p_1}}{2\pi}$ ,  $\xi_p = \frac{\beta\omega_p}{2\pi}$ , e  $\xi = \frac{\beta m}{2\pi}$ . Por simplicidade, também definimos  $G = \xi_p^2 + (l + i\xi_{p_1})^2$  e  $\bar{G} = \xi_p^2 + (l - i\xi_{p_1})^2$ . Assim, após a soma os coeficientes (5.16) tomam a seguinte forma

$$S_1 = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^3 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{2G\bar{G}} \left[ \xi_{p_1}^{-1} \tanh(\pi\xi_{p_1})(l^2 + \xi_p^2 - \xi_{p_1}^2) + \xi_p^{-1} \tanh(\pi\xi_p)(l^2 - \xi_p^2 + \xi_{p_1}^2) \right], \quad (5.17a)$$

$$S_{2\alpha\beta} = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^5 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{\vec{p}_\alpha \vec{p}_\beta}{4G^2 \bar{G}^2} \{\dots\}, \quad (5.17b)$$

$$S_3 = S_1 - \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^5 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{\omega_p^2}{4G^2 \bar{G}^2} \{\dots\}, \quad (5.17c)$$

onde

$$\{\dots\} = \left\{ \xi_p^{-3} \tanh(\pi\xi_p) \left[ (l^2 - 3\xi_p^2 + \xi_{p_1}^2)G\bar{G} + 8l^2\xi_p^2(l^2 + \xi_p^2 + \xi_{p_1}^2) \right] + \xi_{p_1}^{-1} \tanh(\pi\xi_{p_1}) (G^2 + \bar{G}^2) + \pi\xi_p^{-2} \operatorname{sech}^2(\pi\xi_p)(\xi_p^2 - \xi_{p_1}^2 - l^2)G\bar{G} \right\} \quad (5.18)$$

A partir da Eq. (5.16d), podemos ver que o integrando no coeficiente  $S_{4\alpha}$  é ímpar com respeito ao momento externo ( $k_0, \vec{k}$ ). Assim, se escolhermos  $k_0 = 0$  ( $l = 0$ ), temos  $S_{4\alpha}(k_0 = 0, \vec{k}) = 0$ , uma vez que  $S_4$  é proporcional à  $l$ . Alternativamente, se escolhermos  $\vec{k} = 0$ , ele rende um resultado nulo, uma vez que o integrando é



uma função ímpar do momento interno. Assim, não há não-analiticidade nesta contribuição.

Continuando com nossa análise, para o limite estático, temos

$$S_1(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^3 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{4\xi_p^3} [\tanh(\pi\xi_p) - \pi\xi_p \operatorname{sech}^2(\pi\xi_p)], \quad (5.19a)$$

$$S_{2\alpha\beta}(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^5 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{\vec{p}_\alpha \vec{p}_\beta}{16\xi_p^5} [3 \tanh(\pi\xi_p) - 3\pi\xi_p \operatorname{sech}^2(\pi\xi_p) - 2\pi^2 \xi_p^2 \operatorname{sech}^2(\pi\xi_p) \tanh(\pi\xi_p)], \quad (5.19b)$$

$$S_3(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0) = S_1(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0) - \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^5 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{\omega_p^2}{16\xi_p^5} \times [3 \tanh(\pi\xi_p) - 3\pi\xi_p \operatorname{sech}^2(\pi\xi_p) - 2\pi^2 \xi_p^2 \operatorname{sech}^2(\pi\xi_p) \tanh(\pi\xi_p)]. \quad (5.19c)$$

Alternativamente, no limite de longo comprimento de onda, obtemos

$$S_1(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^3 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{\tanh(\pi\xi_p)}{4\xi_p^3}, \quad (5.20a)$$

$$S_{2\alpha\beta}(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^5 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{\vec{p}_\alpha \vec{p}_\beta}{16\xi_p^5} [3 \tanh(\pi\xi_p) - \pi\xi_p \operatorname{sech}^2(\pi\xi_p)], \quad (5.20b)$$

$$S_3(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0) = S_1(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0) - \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^5 \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{\omega_p^2}{16\xi_p^5} \times [3 \tanh(\pi\xi_p) - \pi\xi_p \operatorname{sech}^2(\pi\xi_p)]. \quad (5.20c)$$

Portanto, como esperado, no regime de temperatura finita, as condições  $(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0)$  e  $(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0)$  não comutam, o que significa que o tensor  $\tilde{\Pi}_{b_{12}|odd}^{\mu\nu}$  é uma função não-analítica na origem do espaço dos momentos, pois não é bem definida em  $(k_0 = 0, \vec{k} = 0)$ . É interessante observar que as expressões (5.2), no limite estático, se parecem com a soma daquelas expressões (5.20), no limite de longo comprimento de onda, com algum termo aditivo exponencialmente suprimido para

pequenas temperaturas, i.e., em  $\xi \rightarrow \infty$ , mas crescente quando a temperatura cresce.

Vamos agora reescrever a Eq. (5.15) em uma forma mais conveniente, usando

$$\vec{p}_\alpha \vec{p}_\beta \rightarrow \frac{\vec{p}^2}{d} (\delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta) \quad (5.21)$$

no coeficiente  $S_{2\alpha\beta}$ , a fim de ter uma estrutura tensorial em (5.15) independente do momento de integração. O resultado é

$$\tilde{\Pi}_{b12|odd}^{\mu\nu} = ie^2 \left[ \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa k_\lambda I_1 + (u^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda u_\rho - u^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda u_\rho - k_0 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa u_\lambda) I_2 \right], \quad (5.22)$$

onde temos definido novos coeficientes, dados por

$$I_1 = 6\mu^{3-d} \left( S_1 - \frac{4}{d} g^{\alpha\beta} S_{2\alpha\beta} \right), \quad (5.23a)$$

$$I_2 = 8\mu^{3-d} \left( S_3 - \frac{1}{d} g^{\alpha\beta} S_{2\alpha\beta} \right). \quad (5.23b)$$

É interessantes mencionar que a estrutura tensorial de (5.22) permanece a mesma em ambos limites, estático e longo comprimento de onda, ao contrário de outros resultados encontrados na literatura, ver [97]).

Nosso próximo passo é avaliar as integrais espaciais do coeficiente  $I_1$  e  $I_2$ , usando coordenadas esféricas em  $d$  dimensões. A integral angular rende o ângulo sólido,  $\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ , enquanto que uma mudança de variável na integral radial de  $|\vec{p}|$  para  $\zeta = \frac{\beta}{2\pi} \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$  será executada. Assim, para o primeiro coeficiente, considerando

o limite estático, obtemos

$$I_1(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0) = \frac{3\pi^{d/2-3}(\beta\mu)^{3-d}}{16d\Gamma(d/2)} \int_{|\xi|}^{\infty} d\zeta \frac{(\zeta^2 - \xi^2)^{d/2-1}}{\zeta^4} \operatorname{sech}^2(\pi\zeta) \quad (5.24)$$

$$\times \left\{ [\sinh(2\pi\zeta) - 2\pi\zeta] [(d-3)\zeta^2 + 3\xi^2] + 4\pi^2\zeta^2(\zeta^2 - \xi^2) \tanh(\pi\zeta) \right\},$$

que é identicamente nulo em dimensões arbitrárias. Alternativamente, na ordem inversa dos limites, obtemos

$$I_1(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0) = \frac{3\pi^{d/2-3}(\beta\mu)^{3-d}}{16d\Gamma(d/2)} \int_{|\xi|}^{\infty} d\zeta \frac{(\zeta^2 - \xi^2)^{d/2-1}}{\zeta^4} \operatorname{sech}^2(\pi\zeta)$$

$$\times \left\{ \sinh(2\pi\zeta) [(d-3)\zeta^2 + 3\xi^2] + 2\pi\zeta(\zeta^2 - \xi^2) \right\}, \quad (5.25)$$

que é identicamente zero em dimensões arbitrárias. Portanto, o termo covariante de (5.22) desaparece para ambos os limites.

Para o coeficiente  $I_2$  do termo não-covariante, seguimos do mesmo modo. Então, levando em conta as equações (5.19b) e (5.19c), na primeira condição ( $k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0$ ), obtemos

$$I_2(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0) = \frac{\pi^{d/2-3}(\beta\mu)^{3-d}}{16d\Gamma(d/2)} \int_{|\xi|}^{\infty} d\zeta \frac{(\zeta^2 - \xi^2)^{d/2-1}}{\zeta^4} \operatorname{sech}^2(\pi\zeta) \left\{ [\sinh(2\pi\zeta) - 2\pi\zeta] \right.$$

$$\left. \times [(d-3)\zeta^2 + 3\xi^2] + 4\pi^2\zeta^2[(d+1)\zeta^2 - \xi^2] \tanh(\pi\zeta) \right\}. \quad (5.26)$$

Usando a expressão (5.24), podemos escrever este coeficiente como

$$I_2(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0) = \frac{1}{3} I_1(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0) + \frac{\pi^{d/2-1}(\beta\mu)^{3-d}}{4\Gamma(d/2)} \quad (5.27)$$

$$\times \int_{|\xi|}^{\infty} d\zeta (\zeta^2 - \xi^2)^{d/2-1} \operatorname{sech}^2(\pi\zeta) \tanh(\pi\zeta).$$

Note que o primeiro termo da equação acima é identicamente nulo, ao passo que a integral no segundo termo é convergente, não nula, e livre de ambiguidades na vizinhança de  $d = 3$ . Assim, para  $d = 3$ , temos

$$\begin{aligned} I_2(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0) &= \frac{1}{2} \int_{|\xi|}^{\infty} d\zeta (\zeta^2 - \xi^2)^{1/2} \operatorname{sech}^2(\pi\zeta) \tanh(\pi\zeta) \\ &\equiv \frac{1}{2} F(\xi). \end{aligned} \quad (5.28)$$

No limite oposto, ( $k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0$ ), devemos usar as equações (5.20b) e (5.20c), de modo que, depois de algumas mudanças de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} I_2(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0) &= \frac{\pi^{d/2-3} (\beta\mu)^{3-d}}{16d\Gamma(d/2)} \int_{|\xi|}^{\infty} d\zeta \frac{(\zeta^2 - \xi^2)^{d/2-1}}{\zeta^4} \operatorname{sech}^2(\pi\zeta) \\ &\quad \times \left\{ \sinh(2\pi\zeta) [(d-3)\zeta^2 + 3\xi^2] + 2\pi\zeta [(d+1)\zeta^2 - \xi^2] \right\}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Podemos também reescrever este coeficiente do seguinte modo:

$$I_2(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0) = \frac{1}{3} I_1(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0) + \frac{\pi^{d/2-2} (\beta\mu)^{3-d}}{8\Gamma(d/2)} \int_{|\xi|}^{\infty} d\zeta \frac{(\zeta^2 - \xi^2)^{d/2-1}}{\zeta} \operatorname{sech}^2(\pi\zeta), \quad (5.30)$$

onde temos usado o coeficiente (5.35). Como antes, o primeiro termo é identicamente nulo e o segundo termo é convergente, assim, após ajustar  $d = 3$ , obtemos

$$\begin{aligned} I_2(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0) &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|}^{\infty} d\zeta \frac{(\zeta^2 - \xi^2)^{1/2}}{\zeta} \operatorname{sech}^2(\pi\zeta) \\ &\equiv \frac{1}{2} G(\xi). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Portanto, o termo de CFJ induzido no regime de temperatura finita toma a

forma

$$\begin{aligned}
\Pi_b^{\mu\nu} &= \tilde{\Pi}_{b12|odd}^{\mu\nu} + \tilde{\Pi}_{b21|odd}^{\mu\nu} \\
&= 2ie^2 I_2 (u^\mu \epsilon^{\nu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda u_\rho - u^\nu \epsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} b_\kappa k_\lambda u_\rho - k_0 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} b_\kappa u_\lambda) \\
&= -2ie^2 I_2 \epsilon^{\mu\nu i\lambda} b_i k_\lambda.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Como temos observado, há diferentes limites de  $I_2$ , os quais são descritos nas Equações (5.28) e (5.31). Em adição, a ação CFJ resultante descrita pelo termo  $b_\mu$  linear de (5.6) é escrita como

$$S_{CFJ} = \frac{e^2}{2} I_2 \int d^4x b_i \epsilon^{i\lambda\mu\nu} A_\lambda F_{\mu\nu}. \tag{5.33}$$

Como esperado, a ação CFJ é invariante por transformações de calibre, por transformações de Lorentz e é não-analítica em temperatura finita. Além disso, uma vez que a componente temporal de  $b_\mu$  está ausente na estrutura tensorial, temos apenas violação da reversão temporal, referente a quebra da simetria CPT.

Os comportamentos de  $F(\xi)$  e  $G(\xi)$  estão numericamente plotados na Fig. 5.1. Observamos que em temperatura zero e infinita, os limites coincidem, i.e.,  $\Pi_b^{\mu\nu}$  re-

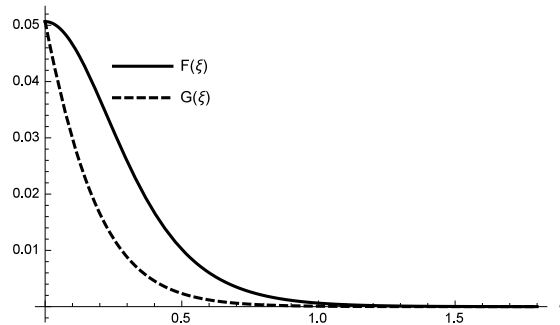


Figura 5.1: Gráfico das funções  $F(\xi)$  e  $G(\xi)$ .

cupera a analiticidade. Quando  $T \rightarrow 0$  ( $\xi \rightarrow \infty$ ), podemos facilmente ver que (5.28) e (5.31) desaparecem. Por outro lado, quando  $T \rightarrow \infty$  ( $\xi \rightarrow 0$ ), ambos  $I_2(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0)$  and  $I_2(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0)$  aproximam-se de  $\frac{1}{4\pi^2}$ , que está em acordo com o resultado encontrado em [34, 59], quando, alternativamente,  $m \rightarrow 0$ . De fato, o resultado do limite estático (5.28) coincide com aquele apresentado em [34], contudo, o resultado do limite de longo comprimento de onda (5.31) não tinha ainda sido obtido.

Agora, vamos reavaliar o coeficiente do termo CFJ a partir de uma consideração cinemática. Realmente, além de uma escala de energia, a relação de dispersão para férmions em uma campo vetorial axial externo está completamente fora do cone de luz, conduzindo a violação da causalidade. Tais férmions interagindo com fótons verificam-se serem intáveis e, por isso, decaem em um férmion de mesma helicidade e em um par de eletrôn-pósitron com helicidades opostas. Este fato introduz um limite superior (majorante) sobre o espaço dos momentos, calculado em [35, 98] como  $\Lambda_c = \frac{2m^2}{b_0}$ . Além disso, uma vez que a quantização desta teoria pode ser executada em um modo consistente apenas para um quadrivetor tipo-tempo  $b_\mu$ , vamos considerar um quadrivetor  $b_\mu = (b_0, 0, 0, 0) = b_0 u_\mu$ , com  $b_0 > 0$  a partir da Eq. (5.22),

$$\tilde{\Pi}_{b_{12}|odd}^{\mu\nu} = ie^2 b_0 \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} u_\kappa k_\lambda I_1, \quad (5.34)$$

onde o mesmo coeficiente,

$$I_1 = 6\mu^{3-d} \left( S_1 - \frac{4}{d} g^{\alpha\beta} S_{2\alpha\beta} \right). \quad (5.35)$$

Pelo mesmo procedimento, onde introduzimos o cut-off,  $\eta = \frac{\beta}{2\pi} \sqrt{\Lambda_c^2 + m^2}$

$$\begin{aligned}
I_1(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0) &= \frac{3\pi^{d/2-3}(\beta\mu)^{3-d}}{16d\Gamma(d/2)} \int_{|\xi|}^{|\eta|} d\zeta \frac{(\zeta^2 - \xi^2)^{d/2-1}}{\zeta^4} \operatorname{sech}^2(\pi\zeta) \\
&\quad \times \left\{ [\sinh(2\pi\zeta) - 2\pi\zeta][(d-3)\zeta^2 + 3\xi^2] \right. \\
&\quad \left. + 4\pi^2\zeta^2(\zeta^2 - \xi^2) \tanh(\pi\zeta) \right\}, \tag{5.36}
\end{aligned}$$

após a integração,

$$\begin{aligned}
I_1(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0) &= \frac{(\eta^2 - \xi^2)^{3/2} (\tanh(\pi\eta) - \pi\eta \operatorname{sech}^2(\pi\eta))}{4\pi^2\eta^3} \\
&\approx \frac{\tanh(\pi\eta) - \pi\eta \operatorname{sech}^2(\pi\eta)}{4\pi^2} \\
&\equiv \frac{1}{2}H(\eta), \tag{5.37}
\end{aligned}$$

onde fazemos a aproximação  $\eta^2 - \xi^2 = \left(\frac{\beta\Lambda_c}{2\pi}\right)^2 \approx \eta^2$ , pois  $\Lambda_c \gg m$ . Inversamente, na ordem inversa dos limites, obtemos

$$\begin{aligned}
I_1(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0) &= \frac{3\pi^{d/2-3}(\beta\mu)^{3-d}}{16d\Gamma(d/2)} \int_{|\xi|}^{|\eta|} d\zeta \frac{(\zeta^2 - \xi^2)^{d/2-1}}{\zeta^4} \operatorname{sech}^2(\pi\zeta) \\
&\quad \times \left\{ \sinh(2\pi\zeta)[(d-3)\zeta^2 + 3\xi^2] + 2\pi\zeta(\zeta^2 - \xi^2) \right\}, \tag{5.38}
\end{aligned}$$

após a integração,

$$\begin{aligned}
I_1(k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0) &= \frac{(\eta^2 - \xi^2)^{3/2} \tanh(\pi\eta)}{4\pi^2\eta^3} \\
&\approx \frac{\tanh(\pi\eta)}{4\pi^2} \\
&\equiv \frac{1}{2}J(\eta). \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Os comportamentos  $H(\eta)$  e  $J(\eta)$  estão numericamente plotados na Fig. (5.2).

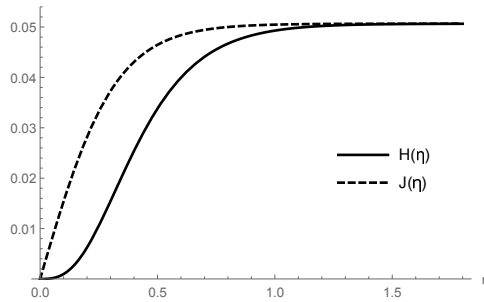


Figura 5.2: Gráfico das funções  $H(\eta)$  e  $J(\eta)$ .

Como antes, nos extremos os limites coincidem e  $\Pi_b^{\mu\nu}$  recupera a analiticidade. Quando  $T \rightarrow \infty$  ( $\eta \rightarrow 0$ ), podemos facilmente ver que (5.37) and (5.39) desaparece. Por outro lado, quando  $T \rightarrow 0$  ( $\eta \rightarrow \infty$ ),  $I_1(k_\mu = 0)$  aproxima-se de  $\frac{1}{4\pi^2}$ , que está em acordo com o resultado apresentado na literatura com o resultado encontrado em [34, 59], quando, alternativamente,  $m \rightarrow 0$ . De fato, o resultado do limite estático (5.28) concorda com aquele apresentado na literatura [34], contudo, o resultado do limite de longo comprimento de onda (5.31) não tinha ainda sido executado.



## Capítulo 6

# Energia Livre do Modelo

## Bumblebee

Neste capítulo, investigamos a teoria dinamicamente induzida nos capítulos anteriores, i.e., a eletrodinâmica de bumblebee, com respeito ao conteúdo de energia livre desta. Focamos nos efeitos de violação sobre o setor bosônico induzido. Realizamos nosso estudo obtendo inicialmente o propagador livre da teoria, o qual é semelhante ao da QED sem violação e num gauge não linear, a seguir calculamos a energia livre em ordem de 1-loop, constatando um resultado não nulo, porém livre dos efeitos de violação. Este resultado é a seguir discutido embassado em outros artigos que tratam da equivalência entre a eletrodinâmica de bumblebee e a eletrodinâmica do modelo padrão da física de partículas num gauge não linear.

## 6.1 Introdução

Como é conhecido, a energia livre fornece informações importantes sobre diferentes questões físicas, indo do comportamento de plasmas ultra-quentes no interior de estrelas [99, 100] à Nucleosíntese do Big Bang (NBB) [45, 47, 49, 50]. Por exemplo, as correções obtidas com a eletrodinâmica quântica padrão para a equação de estado de um plasma em temperatura finita, quando aplicadas às áreas de física solar e cosmologias [48], auxiliam na construção de melhores modelos teórico-computacionais, como também, quando comparado com os dados oriundos de observações astronômicas permitem o refinamento das taxas de elementos presentes no núcleo do Sol. Além disso, considerações feitas com base no mínimo da energia livre da matéria hadrônica permitem a determinação e o estudo de suas fases mais estáveis em condições extremas de pressão e temperatura, como por exemplo, a formação de condensados quirais em colisões de quarks e glúons [45].

Nesse contexto, alguns aspectos das correções para a energia livre da eletrodinâmica quântica com violação da simetria de Lorentz e sem violação da simetria CPT são apresentados na Ref. [46]. Os resultados obtidos em ordem de 1-laço e de 2-laços, i.e., até ordem  $e^2$  na constante de acoplamento, diferenciam-se daqueles obtidos na eletrodinâmica quântica padrão, i.e., sem violação, apenas por um fator constante multiplicativo, o qual parametriza a violação. Estes resultados são utilizados para estimar um valor limite para o parâmetro de violação, baseando-se na estimativa pré-existente da NBB sobre a abundância do Hélio primordial.

Nosso objetivo neste capítulo, é investigar a teoria dinamicamente induzida nos capítulos anteriores, i.e., a eletrodinâmica de bumblebee, com respeito

ao conteúdo de energia livre desta. Focamos nos efeitos de violação sobre o setor bosônico induzido, de modo que, nosso estudo é o primeiro a ser realizado com violação das simetrias de Lorentz e de CPT. Realizamos nosso estudo obtendo inicialmente o propagador livre da teoria, o qual é semelhante ao da eletrodinâmica padrão num calibre axial não linear, a seguir calculamos a energia livre em ordem de 1-loop, constatando um resultado não nulo, porém livre dos efeitos de violação. Este resultado é a seguir discutido embassado na Ref. [51] que trata da equivalência entre a eletrodinâmica de bumblebee e a eletrodinâmica quântica do modelo padrão da física de partículas num calibre não linear.

## 6.2 O propagador livre do Modelo de Bumblebee

Iniciamos apresentando a lagrangiana para o setor bosônico da eletrodinâmica de bumblebee (2.2) com o acoplamento quiral com o campo fermiônico, a qual foi induzida no capítulo 2, dada por,

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - B_\mu J_5^\mu - \frac{\lambda}{4}(B_\mu B^\mu \pm b^2)^2, \quad (6.1)$$

onde  $J_5^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$  é a corrente quiral. Um mínimo local  $V = 0$  para o potencial quadrático é atingido em  $B_\mu B^\mu = \mp b^2$ , de modo que o campo de bumblebee  $B_\mu$  adquire um v.e.v não nulo  $\langle B_\mu \rangle = b_\mu$ , respectivamente tipo-espaco ou tipo-tempo  $b_\mu b^\mu = \mp b^2$ .

Quando o campo vetorial  $B_\mu$  é permitido flutuar ao redor deste v.e.v.  $b_\mu$

(v acu) , i.e.,

$$B_\mu \rightarrow b_\mu + \beta_\mu, \quad (6.2)$$

então, a lagrangiana (6.1) pode ser reescrita, conforme  $\mathcal{L}_B \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_B$ ,

$$\tilde{\mathcal{L}}_B = -\frac{1}{4}\beta_{\mu\nu}\beta^{\mu\nu} - b_\mu J_5^\mu - \beta_\mu J_5^\mu - \frac{\lambda}{4}(4\beta_\mu b^\mu \beta_\nu b^\nu + \beta_\mu \beta^\mu \beta_\nu \beta^\nu + 4\beta_\mu \beta^\mu \beta_\nu b^\nu). \quad (6.3)$$

Um termo massivo surge naturalmente conduzindo a matrix massa  $m_{\mu\nu} = 2\lambda b_\mu b_\nu$ .

Para estudar a energia livre em temperatura finita neste modelo, devemos desligar as intera oes (vértices trilinear, quadrilinear e também a corrente  $J_{5\mu}$ ) e rotacionar o tempo para valores imaginários, segundo a rota ao de Wick ( $\tau = it$ ,  $g^{\mu\nu} \rightarrow -\delta_{\mu\nu}$ ),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{free} &= -\frac{1}{4}\beta_{\mu\nu}\beta^{\mu\nu} - \lambda\beta_\mu b^\mu \beta_\nu b^\nu \\ &= -\frac{1}{4}\beta_{\mu\nu}\beta_{\sigma\rho}g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - \lambda\beta_\mu b_\sigma \beta_\nu b_\rho g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} \\ &\rightarrow -\frac{1}{4}\beta_{\mu\nu}\beta_{\sigma\rho}(-\delta_{\mu\sigma})(-\delta_{\nu\rho}) - \lambda\beta_\mu b_\sigma \beta_\nu b_\rho (-\delta_{\mu\sigma})(-\delta_{\nu\rho}) \\ &= -\frac{1}{4}\beta_{\mu\nu}\beta_{\mu\nu} - \lambda\beta_\mu b_\mu \beta_\nu b_\nu \\ &\equiv \mathcal{L}_{free}^{(Eucl)}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Da mesma forma, para a ação no espaço euclidiano,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{free}^{(Eucl)} &= -i \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{free}^{(Eucl)} \\
&= i \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left( \frac{1}{4} \beta_{\mu\nu} \beta_{\mu\nu} + \lambda \beta_\mu b_\mu \beta_\nu b_\nu \right) \\
&= \frac{i}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x (\partial_\mu \beta_\nu \partial_\mu \beta_\nu - \partial_\mu \beta_\nu \partial_\nu \beta_\mu + 2\lambda \beta_\mu b_\mu \beta_\nu b_\nu), \quad (6.5)
\end{aligned}$$

por meio de uma integração por partes e considerando que o campo desaparece no infinito,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{free}^{(Eucl)} &= -\frac{i}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \beta_\nu \underbrace{(\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu - 2\lambda b_\mu b_\nu)}_{D_{\mu\nu}^{-1}(x,b)} \beta_\mu \quad (6.6) \\
&= -\frac{i\beta^2}{2} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{\beta}_{n\mu}(\vec{p}) \tilde{\beta}_{n\nu}^*(\vec{p}) \underbrace{(-\delta_{\mu\nu}(\vec{p}^2 + \omega_n^2) + p_\mu p_\nu - 2\lambda b_\mu b_\nu)}_{D_{\mu\nu}^{-1}(p,b)}.
\end{aligned}$$

O inverso do operador  $D_{\mu\nu}^{-1}(p, b)$  é o propagador para o campo de bumblebee  $\beta_\mu$ ,

$$(-\delta_{\mu\nu} p^2 + p_\mu p_\nu + 2\lambda b_\mu b_\nu) D_{\nu\sigma}(p, b) = -i\delta_{\mu\sigma}. \quad (6.7)$$

Vamos resolver esta equação através do método tensorial, assumindo que o propagador  $D_{\nu\sigma}$  tem a seguinte forma,

$$D_{\nu\sigma}(p, b) = A\delta_{\nu\sigma} + Bp_\nu p_\sigma + Cp_\nu b_\sigma + Db_\nu p_\sigma + Eb_\nu b_\sigma, \quad (6.8)$$

assim,

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}^{-1}(p, b)D_{\nu\sigma}(p, b) &= A(-\delta_{\mu\sigma}p^2 + p_\mu p_\sigma - 2\lambda b_\mu b_\sigma) \\
&+ B [(-p^2 p_\mu p_\sigma + p^2 p_\mu p_\sigma) - 2\lambda(p \cdot b)b_\mu p_\sigma] \\
&+ C [(-p^2 p_\mu b_\sigma + p^2 p_\mu b_\sigma) - 2\lambda(p \cdot b)b_\mu b_\sigma] \\
&+ D [-p^2 b_\mu p_\sigma + (p \cdot b)p_\mu p_\sigma - 2\lambda b^2 b_\mu p_\sigma] \\
&+ E [-p^2 b_\mu b_\sigma + (p \cdot b)p_\mu b_\sigma - 2\lambda b^2 b_\mu b_\sigma] \equiv i\delta_{\mu\sigma}. \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Considerando a mesma estrutura tensorial, obtemos os coeficientes:  $A = -\frac{i}{p^2}$ ,  $B = -i\frac{p^2 + 2\lambda b^2}{2\lambda p^2(p \cdot b)^2}$ ,  $C = D = \frac{i}{p^2(p \cdot b)}$  e  $E = 0$ . Portanto, o propagador é idêntico no espaço euclidiano e de Minkowski,

$$D_{\mu\nu}(p, b) = \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left[ g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu b_\nu + b_\mu p_\nu}{(p \cdot b)} + \frac{p^2 + 2\lambda b^2}{2\lambda(p \cdot b)^2} p_\mu p_\nu \right]. \quad (6.10)$$

Este propagador tem um polo físico em  $p^2 = 0$ , que representa um excitação sem massa (modo transverso), tratado conforme a prescrição- $i\epsilon$  de Feynman, mas apresenta também um pólo não físico duplo em  $p \cdot b = 0$  induzido pelo vetor de violação  $b_\mu$  e que está associado a uma excitação massiva (modo longitudinal). Este pólo pode ser tratado mediante a prescrição do Valor Principal (PV).

A seguir, vamos avaliar a contribuição em um-loop para a energia livre em temperatura finita.

### 6.3 Contribuição em um-loop para a energia livre

Devemos avaliar a integral funcional sobre  $\beta_\mu$  da exponencial da ação no tempo imaginário e espaço  $(\vec{x}, \tau)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int D\beta_\mu \text{Exp} \left( -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \beta_\nu D_{\mu\nu}^{-1} \beta_\mu \right) \\ &= (\text{Det } D_{\mu\nu}^{-1})^{-1/2}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

passando para o espaço  $(\vec{p}, \omega_n)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\ln \mathcal{Z}}{\beta} &= -\frac{1}{2} \ln (\text{Det } D_{\mu\nu}^{-1}) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ 2\lambda\beta^8 (\omega_n^2 + \vec{p}^2)^2 (\omega_n b_0 + \vec{p} \cdot \vec{b})^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ \beta^4 (\omega_n^2 + \vec{p}^2)^2 \right] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ 2\lambda\beta^4 (\omega_n b_0 + \vec{p} \cdot \vec{b})^2 \right] \\ &= -\text{Tr} \ln \left[ \beta^2 (\omega_n^2 + \vec{p}^2) \right] - \text{Tr} \ln \left[ \sqrt{2\lambda}\beta^2 (\omega_n b_0 + \vec{p} \cdot \vec{b}) \right], \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde,  $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  and  $\text{Tr} = \frac{V}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$ .

Para o primeiro termo em (6.11), usamos

$$A = -\frac{V}{\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \left[ (2\pi n)^2 + \beta^2 \omega^2 \right], \quad (6.13)$$

assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \omega} &= -2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_n \frac{\beta\omega}{(2\pi n)^2 + \beta^2\omega^2} \\ &= -V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \coth \left( \frac{\beta\omega}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Vamos usar também,

$$\begin{aligned}\coth(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1} \\ &= 1 + 2n_B(2x) = 1 + \frac{d}{dx} \ln(1 - e^{-2x}),\end{aligned}\quad (6.15)$$

onde,  $n_B(x)$  é a função de distribuição bosônica, dessa forma segue-se que,

$$\frac{\partial A}{\partial \omega} = -V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [1 + 2n_B(\beta\omega)], \quad (6.16)$$

e

$$A = -V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ \omega + \frac{2}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \right]. \quad (6.17)$$

Para o segundo termo em (6.11), usamos

$$B = -\frac{V}{\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_n \ln \left[ \sqrt{2\lambda} b_0 \beta (2\pi n) + \sqrt{2\lambda} \beta^2 \omega \right], \quad (6.18)$$

assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B}{\partial \omega^2} &= V\beta \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_n \frac{1}{(2\pi n)^2 b_0 + \beta\omega} \\ &= \frac{V\beta}{4b_0^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \operatorname{csc}^2 \left( \frac{\beta\omega}{2b_0} \right),\end{aligned}\quad (6.19)$$



Integrando uma vez,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial \omega} &= -\frac{V}{2b_0} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \cot^2\left(\frac{\beta\omega}{2b_0}\right) \\
&= -\frac{iV}{2b_0} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \coth^2\left(\frac{i\beta\omega}{2b_0}\right) \\
&= -\frac{iV}{2b_0} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[1 + 2n_B\left(\frac{i\beta\omega}{b_0}\right)\right], \tag{6.20}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{iV}{2b_0} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\omega + \frac{2b_0}{i\beta} \ln\left(1 - e^{-i\frac{\beta\omega}{b_0}}\right)\right] \\
&= -V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{i\omega}{2b_0} + \frac{1}{\beta} \ln\left(1 - e^{-i\frac{\beta\omega}{b_0}}\right)\right]. \tag{6.21}
\end{aligned}$$

Portanto, a contribuição em um-loop para a energia livre toma a forma,

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{\beta V} \ln Z \\
&= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ |\vec{p}| + \frac{2}{\beta} \ln\left(1 - e^{-\beta|\vec{p}|}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left[ \frac{i\vec{p} \cdot \vec{b}}{b_0} + \frac{2}{\beta} \ln\left(1 - e^{-i\frac{\beta\vec{p} \cdot \vec{b}}{b_0}}\right) \right] \right\}. \tag{6.22}
\end{aligned}$$

Em adição, vamos agora usar variáveis angulares e considerar, sem perda de generalidade, que  $\vec{b} = b\vec{k}$ , i.e.,  $\vec{p} \cdot \vec{b} = rbcos\theta$ , então

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{i\vec{p} \cdot \vec{b}}{b_0} &= \frac{ib}{(2\pi)^2 b_0} \int_0^\infty dr r^3 \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \cos\theta \\
&= 0, \tag{6.23}
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2}{\beta} \ln \left( 1 - e^{-i\frac{\beta \vec{p} \cdot \vec{b}}{b_0}} \right) &= \frac{1}{2\pi^2 \beta} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^\infty dr r^2 \ln \left( 1 - e^{-i\frac{\beta r b \cos\theta}{b_0}} \right) \\
&= \frac{i\pi^2 b_0^3}{90\beta^4 b^3} \int_{-1}^1 \frac{d(\cos\theta)}{\cos^3\theta} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Dessa forma, não há contribuição para a energia livre dependente do vetor de violação  $b_\mu$ , na ordem de um-loop.

$$P_0 = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ |\vec{p}| + \frac{2}{\beta} \ln (1 - e^{-\beta|\vec{p}|}) \right]. \tag{6.25}$$

A parte de temperatura zero (independente da temperatura) pode ser absorvida pela renormalização da energia do vácuo.

O resultado obtido (6.25) é reforçado pelos artigos que tratam das similaridades entre teorias com violação espontânea da simetria de Lorentz e teorias de calibre em gauges não lineares. A Ref. [51] discute esta equivalência nos níveis clássico e quântico, considerando a eletrodinâmica de bumblebee e a eletrodinâmica do modelo padrão da física de partículas, enquanto que, o nosso resultado (6.25) é semelhante àquele obtido para o campo eletromagnético, i.e., o campo de calibre da eletrodinâmica padrão [45].

Por fim, é interessante perceber que o modelo teórico induzido nesta tese, o modelo de bumblebee, compartilha características com uma das mais bem sucedidas teorias quânticas de campos, a eletrodinâmica quântica.

# Capítulo 7

## Considerações finais e perspectivas

Nesta tese, tratamos sobre um assunto bastante estudado na literatura, a violação das simetrias de Lorentz e CPT na eletrodinâmica quântica, contudo, sob um enfoque diferente. Apresentamos o mecanismo de sua geração, as características principais desse processo e sua utilidade na descrição de sistemas da matéria condensada, especificamente, os semimetais de Weyl.

No capítulo 1 desta tese, mostramos que em alguns modelos que incluem uma descrição quântica da gravitação, como a teoria de cordas, os efeitos de violação da simetria de Lorentz surgem naturalmente. Assim, a compreensão da física na escala de Planck é a motivação primeira para estudar esse processo em baixas energias. Fora desse contexto, a violação da simetria de Lorentz também é empregada para estudar sistemas em matéria condensada, como sendo uma propriedade intrínseca ao sistema e não induzida por campos fundamentais. No corpo restante do capítulo, lançamos também algumas informações introdutórias, a fim de permitir ao leitor uma visão global desta tese e dos seus objetivos.

---

No capítulo 2 dissertamos sobre o mecanismo principal por meio do qual o fenômeno de violação das simetrias de Lorentz e CPT ganha existência, i.e., a quebra dinâmica de simetria, a partir dos mecanismos de Higgs e de Coleman-Weinberg. Consideramos o modelo Thirring quirral 4D apresentado na Ref. [16], contudo para férmions sem massa, o qual é inicialmente puramente férmionico e Lorentz invariante e mostramos a existência de um vácuo não trivial cujo valor esperado traz a tona a violação (mecanismo de Higgs), e a seguir considerando as correções quânticas nesse modelo induzimos a eletrodinâmica quântica Bumblebee com um termo CFJ, na qual os fótons emergem como bósons de Goldstone (mecanismo de Coleman-Weinberg).

Uma atenção especial foi dada ao termo CFJ nos capítulos 3, 4 e 5 visualizando-o como correção quântica para o setor bosônico induzida no setor fermiônico. Vale lembrar que, além do resultado encontrado, alguns métodos empregados também constituem numa novidade.

No capítulo 3, o resultado obtido utilizando férmions sem massa está em acordo com aquele obtido no contexto de matéria condensada para a condutividade dos semimetais de Weyl. Nossos resultados mostraram que a indução do termo CFJ quando realizada na presença de férmions sem massa e no contexto de teoria quântica de campos possui coeficiente igual àquele obtido no contexto de matéria condensada. Isto foi possível ao realizarmos o cálculo do traço de matrizes de Dirac com a matriz  $\gamma_5$ , utilizando a prescrição 't Hooft-Veltman.

No capítulo 4, reinvestigamos a geração radiativa do termo CFJ considerando dessa vez o acoplamento de férmions com o campo gravitacional. Nosso resultado, i.e., o termo CFJ gravitacional, foi identificando com uma contribuição extra para a condutividade dos semimetais, sendo exclusivamente dependente da temperatura

e originada na anomalia axial gravitacional.

Nas análises anteriores não consideramos a não analiticidade manifestada na indução em temperatura finita, uma vez que, esta noção está relacionada com a massa dos férmions. Assim, no capítulo 5 decidimos realizar esta análise. Discutimos o comportamento não analítico do coeficiente do termo CFJ, bem como, a modificação sofrida por sua estrutura topológica devido a influência da temperatura. Para isso, demonstramos que os limites estático ( $k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0$ ) e o limite de grande comprimento de onda ( $k_0 \rightarrow 0, \vec{k} = 0$ ) não comutam. Mostramos também a ambiguidade existente por três métodos de regularização diferentes.

Por fim, um apanhado geral sobre a teoria bosônica dinamicamente induzida foi realizado no capítulo 6. Investigamos a eletrodinâmica de bumblebee, com respeito ao conteúdo de energia livre desta. Constatamos um resultado não nulo, porém livre dos efeitos de violação. Este resultado é interessante, pois reforça os trabalhos que tratam da equivalência entre a eletrodinâmica de bumblebee e a EDQ do modelo padrão da física de partículas num gauge não linear.

As perspectivas deste trabalhos são as seguintes. No contexto do capítulo 2, realizar o cálculo das funções de dois, três e quatro pontos em temperatura finita, com isso, esperamos mostrar que acima de uma temperatura específica, as correções quânticas sejam suprimidas pelos efeitos térmico de tal forma que modelo de bumblebee colapse, i.e., se desfaça. Ainda neste contexto, discutir a possibilidade de geração de um modelo bumblebee para um campo tensorial, o qual poderá ser descrito pelo seu acoplamento com o campo gravitacional. Com relação ao capítulo 4, efetuar de fato a conexão dos resultados obtidos com a possibilidade de detecção da anomalia gravitacional, com contexto dos semimetais de Weyl. Por fim, para o

capítulo 6, obter a correção para a energia livre em ordem de dois laços.

# Capítulo 8

## Anomalia Axial

A ambiguidade na geração do termo de Chern-Simons não é um consequência inerente das teorias com violação de simetria de Lorentz, mas sim um fato recorrente em teoria quântica de campos. Antes de falarmos exatamente sobre o termo de Chern-Simons, vamos inicialmente discutir o cálculo do gráfico do triângulo (da anomalia axial), no qual iremos observar que os seus resultados se apresentam finitos, porém indeterminados [25].

O gráfico de Feynman do triângulo de loop fermiônico, com massa, em 3+1 dimensões, com vértices vetorial axial, vetorial e vetorial pode ser escrito como  $T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = T_1^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) + T_2^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2)$ , onde

$$T_1^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = -\text{tr} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{l} - m} \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{1}{\not{l} - \not{q} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{l} - \not{p}_1 - m} \gamma^\mu \quad (8.1)$$

e  $T_2^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = T_1^{\nu\mu\alpha}(p_2, p_1)$ , com  $q = p_1 + p_2$ . Os momentos vetoriais são  $p_1^\mu$  e  $p_2^\nu$ , ao passo que o momento vetorial axial é  $q^\alpha$ .

A fim de verificarmos a identidade de Ward axial, ou seja, se

$$q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = 2mT^{\mu\nu}(p_1, p_2), \quad (8.2)$$

onde  $T^{\mu\nu}(p_1, p_2) = T_1^{\mu\nu}(p_1, p_2) + T_2^{\mu\nu}(p_1, p_2)$ , com

$$T_1^{\mu\nu}(p_1, p_2) = -\text{tr} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{l} - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{l} - \not{q} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{l} - \not{p}_1 - m} \gamma^\mu \quad (8.3)$$

e  $T_2^{\mu\nu}(p_1, p_2) = T_1^{\nu\mu}(p_2, p_1)$ , ou melhor, se  $q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = 0$ , para  $m = 0$ , inicialmente usamos a identidade  $\not{q}\gamma_5 = \gamma_5(\not{l} - \not{q} - m) + (\not{l} - m)\gamma_5 + 2m\gamma_5$ . Assim, obtemos que  $q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = 2mT^{\mu\nu}(p_1, p_2) + R_1^{\mu\nu} + R_2^{\mu\nu}$ , onde

$$R_1^{\mu\nu} = \text{tr} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{\not{l} - \not{p}_2 - m} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{l} - \not{q} - m} \gamma^\mu - \frac{1}{\not{l} - m} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{l} - \not{p}_1 - m} \gamma^\mu \right] \quad (8.4)$$

e

$$R_2^{\mu\nu} = \text{tr} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{\not{l} - \not{p}_1 - m} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{l} - \not{q} - m} \gamma^\nu - \frac{1}{\not{l} - m} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{l} - \not{p}_2 - m} \gamma^\nu \right], \quad (8.5)$$

no qual, facilmente, também observamos que  $R_2^{\mu\nu}(p_1, p_2) = R_1^{\nu\mu}(p_2, p_1)$ .

Observe que ao considerarmos os deslocamentos

$$l \rightarrow l + p_2 \text{ e } l \rightarrow l + p_1, \quad (8.6)$$

nos primeiros termos das equações (8.4) e (8.5), trivialmente obtemos  $R_1^{\mu\nu} = 0 = R_2^{\mu\nu}$ . Desse modo, a identidade de Ward axial é satisfeita, ou seja,  $q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) =$



$2mT^{\mu\nu}(p_1, p_2)$ .

Contudo, como as integrais em (8.4) e (8.5) são linearmente divergentes, podemos ter também  $R_1^{\mu\nu}$  e  $R_2^{\mu\nu} \neq 0$ , quando consideramos deslocamentos diferentes daqueles que em (8.6). Para observarmos isso, vamos considerar o exemplo genérico, no qual um deslocamento  $a_\mu$  é realizado apenas no primeiro termo do integrando abaixo:

$$\begin{aligned}\Delta(a) &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} [f(l+a) - f(l)] \\ &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} [a^\mu \partial_\mu f(l) + a^\mu a^\nu \partial_\mu \partial_\nu f(l) + \dots].\end{aligned}\quad (8.7)$$

Desde que a integral acima seja linearmente divergente, i.e.,  $f(\pm\infty) \neq 0$  e  $\partial_\mu f(\pm\infty) = \partial_\mu \partial_\nu f(\pm\infty) = \dots = 0$ , apenas o primeiro termo sobrevive. Assim,  $\Delta(a)$  pode gerar um termo de superfície não nulo, dado por

$$\Delta(a) = \frac{2i\pi^2}{(2\pi)^4} a^\mu \lim_{l \rightarrow \infty} l_\mu l^2 f(l),\quad (8.8)$$

no qual usamos o teorema de Gauss e coordenadas esféricas em  $3 + 1$  dimensões. Para maiores detalhes sobre os cálculos, veja o livro-texto [44], seção 4.3.

Retornando agora para as expressões (8.4) e (8.5), que podem ser reescritas na forma de termos de superfície do tipo (8.7), ou seja,

$$R_1^{\mu\nu} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} [f(l-p_2) - f(l)]\quad (8.9)$$

e

$$R_2^{\mu\nu} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} [f(l - p_1) - f(l)], \quad (8.10)$$

ao considerarmos o deslocamento  $a^\lambda = -p_2^\lambda$  em (8.8), obtemos um resultado não nulo para  $R_1^{\mu\nu}$ , dado por

$$\begin{aligned} R_1^{\mu\nu} &= \frac{2i\pi^2}{(2\pi)^4} (-p_2)^\lambda \lim_{l \rightarrow \infty} l_\lambda l^2 \text{tr} \frac{(\not{l} + m)\gamma_5 \gamma^\nu (\not{l} - \not{p}_1 + m)\gamma^\mu}{(l^2 - m^2)[(l - p_1)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\beta\nu\alpha\mu} p_1^\alpha p_2^\lambda \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l_\lambda l^\beta}{l^2} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Alternativamente, para o deslocamento  $a^\lambda = -p_1^\lambda$ , obtemos o mesmo resultado, tal que  $R_2^{\mu\nu}(p_1, p_2) = R_1^{\mu\nu}(p_1, p_2)$ . Assim, desta vez a identidade de Ward axial não é satisfeita, pois temos

$$q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = 2mT^{\mu\nu}(p_1, p_2) - \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta. \quad (8.12)$$

Note, contudo, que não foi necessário efetuar deslocamentos da variável de integração em nenhum momento deste cálculo, pois as expressões  $R_1^{\mu\nu}$  e  $R_2^{\mu\nu}$  já se apresentavam na forma de termos de superfície, como observado em (8.9) e (8.10).

Vamos retornar ao gráfico (8.1) e considerar o deslocamento arbitrário

$$l \rightarrow l + \alpha p_1 + (\alpha - \beta) p_2, \quad (8.13)$$

tal que para o termo de superfície, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_1^{\mu\nu\alpha}(a) &= T_1^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, a) - T_1^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) \\
&= -\text{tr} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{l} + \not{q} - m} \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{1}{\not{l} + \not{q} - \not{q} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{l} + \not{q} - \not{p}_1 - m} \gamma^\mu \\
&\quad + \text{tr} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{l} - m} \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{1}{\not{l} - \not{q} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{l} - \not{p}_1 - m} \gamma^\mu, \tag{8.14}
\end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned}
\Delta_1^{\mu\nu\alpha}(a) &= -\frac{2i\pi^2}{(2\pi)^4} a^\lambda \lim_{l \rightarrow \infty} l_\lambda l^2 \text{tr} \frac{(\not{l} + m) \gamma^\alpha \gamma_5 (\not{l} - \not{q} + m) \gamma^\nu (\not{l} - \not{p}_1 + m) \gamma^\mu}{(l^2 - m^2)[(l - q)^2 - m^2][(l - p_1)^2 - m^2]} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\beta\nu\alpha\mu} a^\lambda \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l_\lambda l^\beta}{l^2} \\
&= -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} a^\beta. \tag{8.15}
\end{aligned}$$

Para o tensor  $\Delta_2^{\mu\nu\alpha}(a)$ , seguimos o mapeamento  $p_1 \rightarrow p_2$  e  $\mu \rightarrow \nu$ , tal que obtemos

$$\Delta^{\mu\nu\alpha}(a) = -\frac{\beta}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (p_1^\beta - p_2^\beta). \tag{8.16}$$

Portanto, levando em conta a expressão geral

$$T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, a) = T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) + \Delta^{\mu\nu\alpha}(a), \tag{8.17}$$

para quaisquer deslocamentos, para a identidade de Ward axial, obtemos que

$$q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, a) = 2m T^{\mu\nu}(p_1, p_2) - \frac{1 - \beta}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}. \tag{8.18}$$

Seguindo os mesmo passos, para a identidade de Ward vetorial, encontramos

$$p_{1\mu}T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, a) = \frac{1 + \beta}{4\pi^2} \epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} p_{1\alpha} p_{2\gamma}. \quad (8.19)$$

Então, nos resultados acima, por exemplo, ao fixarmos que a identidade de Ward vetorial deva ser satisfeita,  $\beta = -1$ , tal que  $p_{1\mu}T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = 0$  e

$$q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, a) = 2mT^{\mu\nu}(p_1, p_2) - \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta. \quad (8.20)$$

Portanto, temos aqui um exemplo no qual as correções radiativas são finitas, porém indeterminadas, contudo, elas podem ser fixadas pelo experimento.

Podemos facilmente reescrever o gráfico  $T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2)$  em termos do tensor de polarização  $\Pi_b^{\mu\nu}(p)$ , Eq. (5.10) do capítulo 5, ao considerarmos  $p_1 \rightarrow p$  e  $p_2 \rightarrow -p$ , tal que  $\Pi_b^{\mu\nu}(p) = b_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p, -p)$ . Dessa forma, a expressão (8.17) pode ser reescrita como

$$\Pi_b^{\mu\nu}(p, a) = \Pi_{b1}^{\mu\nu}(p) - \frac{\beta}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} b_\alpha p_\beta. \quad (8.21)$$

Portanto, observamos que, trivialmente,  $p_\mu \Pi_b^{\mu\nu}(p, a) = p_\mu \Pi_{b1}^{\mu\nu}(p) = 0$ , tal que uma fixação sobre  $\beta$  não é possível, caracterizando assim que agora as correções quânticas são indeterminadas, contudo, elas não podem ser fixadas [25].

# Referências Bibliográficas

- [1] D. Mattingly, *Living Rev. Rel.* **8**, 5 (2005) doi:10.12942/lrr-2005-5 [gr-qc/0502097].
- [2] A. Sytma *et al.*, *Phys. Rev. C* **94**, no. 2, 025503 (2016) doi:10.1103/PhysRevC.94.025503 [arXiv:1608.03870 [nucl-ex]].
- [3] G. Salesi, *Phys. Rev. D* **85**, 063502 (2012) doi:10.1103/PhysRevD.85.063502 [arXiv:1110.2234 [gr-qc]].
- [4] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998) doi:10.1103/PhysRevD.58.116002 [hep-ph/9809521].
- [5] V. A. Kostelecky, In \*Miami Beach 1997, Physics of mass\* 89-94 [hep-ph/9810239].
- [6] J. Collins, A. Perez and D. Sudarsky, In \*Oriti, D. (ed.): Approaches to quantum gravity\* 528-547 [hep-th/0603002].
- [7] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989). doi:10.1103/PhysRevD.39.683
- [8] P. W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508 (1964). doi:10.1103/PhysRevLett.13.508

- [9] S. R. Coleman and E. J. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973).  
doi:10.1103/PhysRevD.7.1888
- [10] J. D. Bjorken, Annals Phys. **24**, 174 (1963). doi:10.1016/0003-4916(63)90069-1
- [11] I. Bialynicki-Birula, Phys. Rev. **130**, 465 (1963). doi:10.1103/PhysRev.130.465
- [12] G. S. Guralnik, Phys. Rev. **136**, B1404 (1964). doi:10.1103/PhysRev.136.B1404
- [13] T. Eguchi, Phys. Rev. D **14**, 2755 (1976). doi:10.1103/PhysRevD.14.2755
- [14] J. Bjorken, hep-th/0111196.
- [15] A. Jenkins, Phys. Rev. D **69**, 105007 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.69.105007  
[hep-th/0311127].
- [16] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. J. da Silva, Phys. Rev. D **77**,  
105002 (2008) doi:10.1103/PhysRevD.77.105002 [arXiv:0709.2904 [hep-th]].
- [17] P. Kraus and E. T. Tomboulis, Phys. Rev. D **66**, 045015 (2002)  
doi:10.1103/PhysRevD.66.045015 [hep-th/0203221].
- [18] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).  
doi:10.1103/PhysRev.127.965
- [19] V. A. Kostelecky and R. Lehnert, Phys. Rev. D **63**, 065008 (2001)  
doi:10.1103/PhysRevD.63.065008 [hep-th/0012060].
- [20] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, “Limits on a Lorentz and Parity  
Violating Modification of Electrodynamics,” Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990)

- [21] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001) doi:10.1103/PhysRevLett.87.141601 [hep-th/0105082].
- [22] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999) doi:10.1103/PhysRevLett.82.3572 [hep-ph/9901358].
- [23] M. Perez-Victoria, Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999) [hep-th/9905061].
- [24] F. A. Brito, L. S. Grigorio, M. S. Guimaraes, E. Passos and C. Wotzasek, Phys. Rev. D **78**, 125023 (2008) [arXiv:0810.3180 [hep-th]].
- [25] R. Jackiw, “When radiative corrections are finite but undetermined,” Int. J. Mod. Phys. B **14**, 2011 (2000) [hep-th/9903044].
- [26] A. A. Zyuzin and A. A. Burkov, Phys. Rev. B **86**, 115133 (2012) [arXiv:1206.1868 [cond-mat.mes-hall]].
- [27] P. Goswami and S. Tewari, Phys. Rev. B **88**, 245107 (2013) [arXiv:1210.6352 [cond-mat.mes-hall]].
- [28] A. A. Burkov and L. Balents Phys. Rev. Lett. **107**, 127205 (2011) [arXiv:1105.5138 [cond-mat.mes-hall]].
- [29] A. G. Grushin, “Consequences of a condensed matter realization of Lorentz violating QED in Weyl semi-metals,” Phys. Rev. D **86**, 045001 (2012) [arXiv:1205.3722 [hep-th]].
- [30] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972).

- [31] P. Breitenlohner and D. Maison, “Dimensional Renormalization and the Action Principle,” *Commun. Math. Phys.* **52**, 11 (1977).
- [32] M. N. Chernodub, A. Cortijo, A. G. Grushin, K. Landsteiner and M. A. H. Vozmediano, *Phys. Rev. B* **89**, no. 8, 081407 (2014) doi:10.1103/PhysRevB.89.081407 [arXiv:1311.0878 [hep-th]].
- [33] K. Landsteiner, E. Megias and F. Pena-Benitez, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 021601 (2011) doi:10.1103/PhysRevLett.107.021601 [arXiv:1103.5006 [hep-ph]].
- [34] L. Cervi, L. Griguolo and D. Seminara, *Phys. Rev. D* **64**, 105003 (2001).
- [35] D. Ebert, V. C. Zhukovsky and A. S. Razumovsky, *Phys. Rev. D* **70**, 025003 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.70.025003 [hep-th/0401241].
- [36] T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos, R. F. Ribeiro and F. A. Brito, *JHEP* **0510**, 019 (2005) [hep-th/0509008].
- [37] J. Leite, T. Mariz and W. Serafim, *J. Phys. G* **40**, 075003 (2013).
- [38] A. K. Das, “Finite Temperature Field Theory,” Singapore, Singapore: World Scientific (1997).
- [39] V. S. Alves, A. K. Das, G. V. Dunne and S. Perez, *Phys. Rev. D* **65**, 085011 (2002) [hep-th/0110160].
- [40] Y. Kao and M. Yang, *Phys. Rev. D* **47**, 730 (1993).
- [41] D. J. Gross, R. D. Pisarski and L. G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 43 (1981).
- [42] H. A. Weldon, *Phys. Rev. D* **26**, 1394 (1982).



- [43] J. Frenkel and J. C. Taylor, Nucl. Phys. B **334**, 199 (1990).
- [44] R. A. Bertlmann, “Anomalies in quantum field theory,” International Series of Monographs on Physics, 91, Oxford University Press, USA (1996)
- [45] J. I. Kapusta and C. Gale, “Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications,” Cambridge University Press, USA (2006)
- [46] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov, A. F. Santos and A. J. da Silva, Phys. Rev. D **81**, 045013 (2010) doi:10.1103/PhysRevD.81.045013 [arXiv:0910.4560 [hep-th]].
- [47] D. A. Dicus, E. W. Kolb, A. M. Gleeson, E. C. G. Sudarshan, V. L. Teplitz, M. S. Turner, Phys. Rev. D **26**, 2694 (1982).
- [48] A. Heckler, Phys. Rev. D **49**, 611 (1994).
- [49] R. E. Lopez and M. S. Turner, Phys. Rev. D **59**, 103502 (1999).
- [50] J. O. Andersen, ”On effective field theories at finite temperature”, arXiv:hep-ph/9709331.
- [51] C. A. Escobar and A. Martín-Ruiz, arXiv:1703.01171 [hep-th].
- [52] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997) [hep-ph/9703464].
- [53] F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. B **578**, 277 (2000) [hep-th/9912169]; [arXiv:hep-ph/0511030].
- [54] R. V. Maluf, J. E. G. Silva and C. A. S. Almeida, Phys. Lett. B **749**, 304 (2015) doi:10.1016/j.physletb.2015.08.004 [arXiv:1506.07232 [hep-th]].

- [55] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A **209**, 291 (1951) doi: 10.1098/rspa.1951.0204.
- [56] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961) 345. doi:10.1103/PhysRev.122.345
- [57] G. 't Hooft and M. Veltman, "Regularization and Renormalization of Gauge Fields," Nuc. Phys. B **44**, pp. 189-213 (1972)
- [58] A. J. Buras, hep-ph/9806471.
- [59] J. F. Assunção and T. Mariz, Europhys. Lett. **110**, no. 4, 41002 (2015) [arXiv:1505.08156 [hep-th]].
- [60] A. A. Zyuzin, S. Wu and A. A. Burkov, Phys. Rev. B **85**, 165110 (2012) [arXiv:1201.3624 [cond-mat.mes-hall]].
- [61] J. F. Assuncao, T. Mariz and A. Y. Petrov, Europhys. Lett. **116**, no. 3, 31003 (2016) doi:10.1209/0295-5075/116/31003 [arXiv:1609.09120 [hep-th]].
- [62] L. H. Ford, Phys. Rev. D **21**, 933 (1980).
- [63] K. Akama and T. Hattori, Phys. Lett. B **392** (1997) 383 doi:10.1016/S0370-2693(96)01580-8 [hep-ph/9607331].
- [64] K. Akama, In \*Shizuoka 1997, Masses and mixings of quarks and leptons\* 295-304 [hep-ph/9706442].
- [65] V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.69.105009 [hep-th/0312310].

- [66] R. Bluhm and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **71** (2005) 065008 doi:10.1103/PhysRevD.71.065008 [hep-th/0412320].
- [67] V. A. Kostelecky and N. Russell, Rev. Mod. Phys. **83**, 11 (2011) [arXiv:0801.0287 [hep-ph]].
- [68] V. A. Kostelecky, C. D. Lane and A. G. M. Pickering, Phys. Rev. D **65**, 056006 (2002) [hep-th/0111123].
- [69] D. Colladay and P. McDonald, J. Math. Phys. **43**, 3554 (2002) [hep-ph/0202066].
- [70] T. Mariz, Phys. Rev. D **83**, 045018 (2011) [arXiv:1010.5013 [hep-th]].
- [71] M. Z. Hasan and C. L. Kane, “Topological Insulators,” Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010) [arXiv:1002.3895 [cond-mat.mes-hall]].
- [72] G. Bonneau, Phys. Lett. **96B**, 147 (1980). doi:10.1016/0370-2693(80)90232-4
- [73] G. Bonneau, Nucl. Phys. B **177**, 523 (1981). doi:10.1016/0550-3213(81)90185-1
- [74] D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, Phys. Rev. D **80**, 034028 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.80.034028 [arXiv:0907.5007 [hep-ph]].
- [75] A. Avkhadiev and A. V. Sadofyev, arXiv:1702.07340 [hep-th].
- [76] T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos and R. F. Ribeiro, Phys. Rev. D **70**, 024014 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.70.024014 [hep-th/0403205].
- [77] R. Jackiw and S. Y. Pi, Phys. Rev. D **68**, 104012 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.68.104012 [gr-qc/0308071].

- [78] L. Bonora, M. Cvitan, P. Dominis Prester, B. Lima de Souza and I. Smolic, JHEP **1605** (2016) 072 doi:10.1007/JHEP05(2016)072 [arXiv:1602.07178 [hep-th]].
- [79] L. Alvarez-Gaume and E. Witten, Nucl. Phys. B **234**, 269 (1984). doi:10.1016/0550-3213(84)90066-X
- [80] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [81] A. G. Grushin, Phys. Rev. D **86**, 045001 (2012) [arXiv:1205.3722 [hep-th]].
- [82] S. Deser, R. Jackiw and Templeton, Ann. Phys. **140**, 372 (1982).
- [83] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982).
- [84] R. Jackiw, Comments Mod. Phys. A **1**, 1 (1999) [hep-ph/9811322].
- [85] J. M. Chung and P. Oh, Phys. Rev. D **60**, 067702 (1999) [hep-th/9812132].
- [86] J. M. Chung, “Lorentz and CPT violating Chern-Simons term in the formulation of functional integral,” Phys. Rev. D **60**, 127901 (1999) [hep-th/9904037].
- [87] W. F. Chen, Phys. Rev. D **60**, 085007 (1999) [hep-th/9903258].
- [88] G. Bonneau, Nucl. Phys. B **593**, 398 (2001) [hep-th/0008210].
- [89] Y. A. Sitenko, Phys. Lett. B **515**, 414 (2001) [hep-th/0103215].
- [90] M. Chaichian, W. F. Chen and R. Gonzalez Felipe, Phys. Lett. B **503**, 215 (2001) [hep-th/0010129].
- [91] A. A. Andrianov, P. Giacconi and R. Soldati, JHEP **0202**, 030 (2002) [hep-th/0110279].

- [92] D. Bazeia, T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos and R. F. Ribeiro, J. Phys. A **36**, 4937 (2003) [hep-th/0303122].
- [93] I. J. R. Aitchison and C. M. Fraser, Phys. Lett. B **146**, 63 (1984).
- [94] I. J. R. Aitchison and C. M. Fraser, Phys. Rev. D **31**, 2605 (1985).
- [95] K. S. Babu, A. K. Das and P. Panigrahi, Phys. Rev. D **36**, 3725 (1987).
- [96] M. Gomes, J. R. Nascimento, E. Passos, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, Phys. Rev. D **76**, 047701 (2007) [arXiv:0704.1104 [hep-th]].
- [97] F. T. Brandt, A. K. Das and J. Frenkel, Phys. Rev. D **62**, 085012 (2000) [hep-ph/0005150].
- [98] J. Alfaro, A. A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi and R. Soldati, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3271 (2010) doi:10.1142/S0217751X10049293 [arXiv:0904.3557 [hep-th]].
- [99] J. N. Bahcall and M. H. Pinsonneault, Rev. Mod. Phys. **64**, 885 (1992). doi:10.1103/RevModPhys.64.885
- [100] J. N. Bahcall and M. H. Pinsonneault, Astrophys. J. **395**, 119 (1992). doi:10.1086/186502