

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

MARCELO VITOR OLIVEIRA ARAUJO

**TEORIA DE VOLUMES FINITOS APLICADA À OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE
ESTRUTURAS ELÁSTICAS CONTÍNUAS**

MACEIÓ
2018

MARCELO VITOR OLIVEIRA ARAUJO

**TEORIA DE VOLUMES FINITOS APLICADA À OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE
ESTRUTURAS ELÁSTICAS CONTÍNUAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: *Estruturas*.

Orientador: Prof. Dr. Márcio André Araújo
Cavalcante

Coorientador: Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages

MACEIÓ

2018

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

A663t Araujo, Marcelo Vitor Oliveira.
Teoria de volumes finitos aplicada à otimização topológica de estruturas elásticas contínuas / Marcelo Vitor Oliveira Araujo. – 2018.
160 f. : il.

Orientador: Márcio André Araújo Cavalcante.
Coorientador: Eduardo Nobre Lages.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil : Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2018.

Bibliografia: f. 146-150.
Apêndices: f. 151-160.

1. Estrutura (Engenharia Civil). 2. Teoria de volumes finitos. 3. Métodos dos elementos finitos. 4. Otimização topológica. 5. Estruturas elásticas contínuas. I. Título.

CDU: 624.01



Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC



TEORIA DE VOLUMES FINITOS APLICADA À OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS CONTÍNUAS

MARCELO VITOR OLIVEIRA ARAUJO

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 13 do mês de agosto do ano de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Márcio André Araújo Cavalcante
Orientador – PPGEC/UFAL

Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages
(Coorientador - PPGEC/UFAL)

Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior
(Avaliador Interno - PPGEC/UFAL)

Prof. Dr. Gláucio Hermogenes Paulino
(Avaliador Externo – Georgia Tech)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus que me auxiliou em todos os momentos, em especial naqueles mais difíceis, para que eu pudesse chegar até aqui e que sempre se revelou ser o meu grande Mestre e Amigo.

Aos meus familiares, em especial meus pais Tereza e Agnaldo e meus irmãos Marcus e Milena, pelo apoio e incentivo ao longo de toda essa longa e difícil jornada.

À minha doce e amada noiva Monique por todo o apoio, amor e compreensão durante esse longo período.

Ao meu orientador Márcio, por todo empenho e dedicação na elaboração desta dissertação, sempre me direcionando da forma mais eficiente e objetiva possível.

Gostaria de agradecer também ao meu coorientador Eduardo, por todo o auxílio prestado ao longo desses dois anos e por ter sido sempre solícito às minhas demandas. Muito obrigado por ter participado de todas as etapas conosco.

A todos os professores do PPGEC/CTEC/UFAL, por todo o conhecimento transmitido com amor, ética e profissionalismo ao longo desses dois anos, contribuindo não apenas para minha formação profissional, mas também para construção do meu caráter e da minha formação como pessoa.

À Universidade Federal de Alagoas, pela oportunidade de ter feito o curso e por toda estrutura disponibilizada.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

E a todos aqueles que direta ou indiretamente fizeram parte dessa jornada, o meu muito obrigado.

RESUMO

Técnicas de otimização buscam obter o melhor projeto possível para um determinado produto, sendo estabelecido um objetivo, assim como restrições ao problema de otimização. No âmbito da otimização topológica de estruturas, visa-se obter a melhor distribuição possível de material dentro de um domínio de análise dada uma função objetivo, que normalmente visa minimizar a flexibilidade ou maximizar a rigidez da estrutura, e restrições mecânicas ao problema. O interesse de um algoritmo de otimização topológica está em definir quais pontos devem ter material e quais devem ser vazios, levando a um problema de programação inteira do tipo “0-1” (binária). Com o intuito de evitar problemas de otimização discreta, empregam-se métodos de homogeneização, tais como a metodologia SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*). Neste caso, as propriedades do material são assumidas como constantes dentro de cada elemento do domínio discretizado da estrutura, e as variáveis de projeto, ou densidades relativas, podem assumir qualquer valor real entre 0 e 1. Além do mais, as propriedades do material são modeladas a partir das densidades relativas do material elevadas a um determinado expoente. Normalmente, nos algoritmos de otimização topológica baseados em técnicas de homogeneização, costumam ocorrer alguns problemas associados a instabilidades numéricas, tais como o efeito do padrão de tabuleiro de xadrez, a dependência de malha e mínimos locais. O efeito do padrão de xadrez está diretamente relacionado às premissas da solução baseada no método dos elementos finitos, como a satisfação do equilíbrio e das condições de compatibilidade entre elementos adjacentes serem estabelecidas somente nos nós. Por outro lado, a teoria de volumes finitos satisfaz as equações de equilíbrio no nível do subvolume, e as compatibilidades estática e cinemática são estabelecidas por intermédio das interfaces de subvolumes adjacentes, como esperado do ponto de vista da Mecânica do Contínuo. Assim, neste trabalho, são propostas diferentes abordagens da otimização topológica de estruturas elásticas contínuas baseadas nas três versões da teoria generalizada de volumes finitos, resultando em modelos computacionalmente eficientes e capazes de produzir topologias ótimas livres do efeito do padrão de xadrez.

Palavras-chaves: teoria de volumes finitos; método dos elementos finitos; otimização topológica; efeito do padrão de xadrez; estruturas elásticas contínuas.

ABSTRACT

Optimization techniques generally search for the best possible design for a given product, being established an objective as also restrictions to the problem. In the scope of topology optimization of structures, the aim is to obtain the best material distribution inside a design domain given an objective function, which normally wishes to minimize the structure compliance or maximize the structure stiffness, and mechanical constraints to the problem. The interest of a topology optimization algorithm is to define which point in the design domain must be void or contain material, which leads to a “0-1” binary integer programming problem. In order to avoid problems of discrete optimization, it's employed homogenization methods, such as the SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) approach. In this case, the material properties are assumed to be constants inside each element of the discretized structure, and the design variables, or relative densities, can take any real value between 0 and 1. In addition, the material properties are modeled from the relative densities raised to a given exponent. Normally, in the gradient based topology optimization algorithms, it's common to happen some problems associated to numerical instabilities, such as checkerboard effect, mesh dependency and local minima. The checkerboard effect is directly related to the solution assumptions based in the finite element method, as the satisfaction of equilibrium equations and the compatibility conditions established by the nodes. On the other hand, the finite volume theory satisfies the equilibrium equations in the subvolume level, and the kinematic and static compatibilities are established through the subvolume adjacent interfaces, as expected from the Continuum Mechanics point of view. Thus, in this thesis, different approaches are proposed for the topology optimization of continuum elastic structures based on the three versions of the generalized finite volumes theory, resulting in computational efficient models and leading to obtaining of checkerboard-free topologies.

Keywords: finite volume theory; finite element method; topology optimization; checkerboard effect; continuum elastic structures.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 - Diferentes tipos de otimização: a) otimização dimensional de uma treliça, b) otimização de forma e c) otimização topológica no contínuo.....	24
Figura 02 - Análise de deformações: a) Configuração indeformada e b) Configuração deformada.....	29
Figura 03 - Corpo seccionado submetido a um carregamento externo.....	33
Figura 04 - Componentes do tensor de tensão.....	34
Figura 05 - Vetor de tensão em um plano oblíquo.....	35
Figura 06 - Forças superficial e de corpo atuando numa porção arbitrária de um contínuo.....	36
Figura 07 - Representação do estado plano de tensão no plano $x_1 - x_2$.....	38
Figura 08 - Representação do estado plano de deformação no plano $x_1 - x_2$.....	40
Figura 09 - Domínio de um corpo arbitrário.....	42
Figura 10 - Malha de elementos finitos em duas dimensões.....	44
Figura 11 - Malha bidimensional com 3 elementos finitos.....	48
Figura 12 - Elemento retangular bilinear.....	48
Figura 13 - Representação da compatibilidade cinemática.....	50
Figura 14 - Representação da influência da terceira lei de Newton na compatibilidade estática.....	51
Figura 15 - Forças atuantes nos nós p e p'.....	51
Figura 16 - Elemento retangular quadrático.....	52
Figura 17 - Discretização do domínio de análise e o sistema de coordenadas globais (à esquerda) e o subvolume e o sistema de coordenadas locais (à direita).....	57
Figura 18 - Quantidades cinemáticas avaliadas em termos médios nas faces do subvolume q.....	58
Figura 19 - Quantidades estáticas avaliadas em termos médios nas faces do subvolume q.....	63
Figura 20 - Domínio do problema de otimização topológica.....	80
Figura 21 - Microestrutura do material periódico idealizado obtido pelo	

método SIMP com $p = 3$ e para um material base com $\nu = 1/3$	85
Figura 22 - Layout da otimização estrutural.....	87
Figura 23 - Influência do parâmetro η em B_e^η	90
Figura 24 - Região acinzentada de metade de uma viga MBB com topologia ótima.....	92
Figura 25 - Exemplo de resultado ótimo com a instabilidade numérica do padrão de tabuleiro de xadrez.....	93
Figura 26 - Viga MBB: a) solução ótima para uma discretização com 600 elementos, b) solução ótima para uma discretização com 9600 elementos.....	94
Figura 27 - Gráfico da intensidade da força aplicada versus deslocamento..	98
Figura 28 - Deformação causada por tensão uniaxial.....	98
Figura 29 - Deformação causada por tensões de cisalhamento.....	99
Figura 30 - Deslocamento horizontal na face vertical de um subvolume na teoria generalizada de volumes finitos.....	103
Figura 31 - Componente horizontal do vetor de tensões atuante na face vertical de um subvolume na teoria generalizada de volumes finitos.....	104
Figura 32 - Viga engastada na extremidade esquerda com uma carga concentrada aplicada no meio do bordo direito.....	111
Figura 33 - Topologias ótimas obtidas via TVF de ordem zero para viga engastada submetida a uma carga concentrada na direção vertical.....	112
Figura 34 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para a TVF de ordem zero.....	113
Figura 35 - Topologias ótimas obtidas via TVF de primeira ordem para viga engastada submetida a uma carga concentrada na vertical.....	113
Figura 36 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para a TVF de primeira ordem.....	114
Figura 37 - Topologias ótimas obtidas via TVF de segunda ordem para viga engastada submetida a uma carga concentrada na vertical.....	114
Figura 38 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para a TVF de segunda ordem.....	115
Figura 39 - Topologias ótimas obtidas via elemento finito Q4 para viga engastada submetida a uma carga concentrada na vertical.....	115
Figura 40 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações	116

para o método dos elementos finitos empregando o elemento Q4.....	
Figura 41 - Topologias ótimas obtidas via elemento finito Q8 para viga engastada submetida a uma carga concentrada na vertical.....	116
Figura 42 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para o método dos elementos finitos empregando o elemento Q8.....	117
Figura 43 - Efeito do padrão de xadrez na topologia ótima obtida para malha 162x81 aplicando-se o elemento Q8.....	117
Figura 44 - Viga do tipo MBB.....	122
Figura 45 - Topologias ótimas obtidas via TVF de ordem zero para viga do tipo MBB.....	123
Figura 46 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para versão de ordem zero da TVF.....	123
Figura 47 - Topologias ótimas obtidas via TVF de primeira ordem para viga do tipo MBB.....	124
Figura 48 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para versão de primeira ordem da TVF.....	124
Figura 49 - Topologias ótimas obtidas via TVF de segunda ordem para viga do tipo MBB.....	125
Figura 50 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para versão de segunda ordem da TVF.....	125
Figura 51 - Topologias ótimas obtidas via elemento finito Q4 para viga do tipo MBB.....	126
Figura 52 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para o elemento finito Q4.....	126
Figura 53 - Topologias ótimas obtidas via elemento finito Q8 para viga do tipo MBB.....	127
Figura 54 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para o elemento finito Q8.....	127
Figura 55 - Estrutura <i>Michell</i>	131
Figura 56 - Topologias ótimas obtidas via TVF de ordem zero para estrutura <i>Michell</i>	132
Figura 57 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para TVF de ordem zero.....	132

Figura 58 - Topologias ótimas obtidas via TVF de primeira ordem para estrutura <i>Michell</i>.....	133
Figura 59 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para TVF de primeira ordem.....	133
Figura 60 - Topologias ótimas obtidas via TVF de segunda ordem para estrutura <i>Michell</i>.....	134
Figura 61 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para TVF de segunda ordem.....	134
Figura 62 - Topologias ótimas obtidas via elemento Q4 para estrutura <i>Michell</i>.....	135
Figura 63 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para técnica de elementos finitos empregando o elemento Q4.....	135
Figura 64 - Topologias ótimas obtidas via elemento Q8 para estrutura <i>Michell</i>.....	136
Figura 65 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para técnica de elementos finitos empregando o elemento Q8.....	136

LISTA DE QUADROS E TABELAS

Tabela 01 - Coordenadas reais do elemento Q4.....	49
Tabela 02 - Coordenadas reais do elemento Q8.....	53
Quadro 01 - Análise de convergência da viga engastada para versão de ordem zero da TVF.....	119
Quadro 02 - Análise de convergência da viga engastada para versão de primeira ordem da TVF.....	119
Quadro 03 - Análise de convergência da viga engastada para versão de segunda ordem da TVF.....	120
Quadro 04 - Análise de convergência da viga engastada para o elemento Q4	120
Quadro 05 - Análise de convergência da viga engastada para o elemento Q8	121
Quadro 06 - Análise de convergência da viga do tipo MBB para versão de ordem zero da TVF.....	129
Quadro 07 - Análise de convergência da viga do tipo MBB para versão de primeira ordem da TVF.....	129
Quadro 08 - Análise de convergência da viga do tipo MBB para versão de segunda ordem da TVF.....	130
Quadro 09 - Análise de convergência da viga do tipo MBB para o elemento Q4.....	130
Quadro 10 - Análise de convergência da viga do tipo MBB para o elemento Q8.....	130
Quadro 11 - Análise de convergência da estrutura <i>Michell</i> para versão de ordem zero da TVF.....	138
Quadro 12 - Análise de convergência da estrutura <i>Michell</i> para versão de primeira ordem da TVF.....	138
Quadro 13 - Análise de convergência da estrutura <i>Michell</i> para versão de segunda ordem da TVF.....	139
Quadro 14 - Análise de convergência da estrutura <i>Michell</i> para o elemento Q4.....	139
Quadro 15 - Análise de convergência da estrutura <i>Michell</i> para o elemento Q8.....	140

LISTA DE ABREVIATURAS

CONLIN	<i>Convex Linearization</i>
FVDAM	<i>Finite-Volume Direct Averaging Micromechanics</i>
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
MBB	Messerschmitt-Bölkow-Blom
MEF	Método dos Elementos Finitos
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes</i>
NGL	Número de Graus de Liberdade
OC	<i>Optimality Criteria</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
SLP	<i>Sequential Linear Programming</i>
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming</i>
TVF	Teoria de Volumes Finitos

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1

\mathbf{x}	Vetor contendo as variáveis de projeto
g_0	Função objetivo
g_i	Restrições de desigualdade
h_j	Restrições de igualdade
l	Quantidade de restrições de desigualdade
m	Quantidade de restrições de igualdade
q, r, s	Valores escalares que definem o número de variáveis de projeto
\mathbf{x}^*	Ponto ótimo de projeto

CAPÍTULO 2

\mathbf{u}	Vetor deslocamento
u_i	Componentes do vetor deslocamento
X_j	Componentes do vetor posição na configuração indeformada
x_j	Componentes do vetor posição na configuração deformada
$d\mathbf{X}^{(i)}$	Vetores posição de um elemento infinitesimal na configuração indeformada
dL_i	Componentes não nulos dos vetores infinitesimais na configuração indeformada
$d\mathbf{x}^{(i)}$	Vetores posição de um elemento infinitesimal na configuração deformada
\mathbf{F}	Tensor gradiente de deformação
$d\mathbf{u}$	Varição infinitesimal do vetor deslocamento
\mathbf{H}	Tensor gradiente de deslocamento
δ_{ij}	Operador delta de Kronecker
ε_{ij}	Componentes do tensor de deformação
γ_{ij}	Deformações angulares
P_i	Cargas concentradas
\mathbf{P}	Carregamento distribuído
ΔA	Área infinitesimal
\mathbf{n}	Vetor normal a um plano
n_j	Componentes do vetor normal a um plano
$\Delta \mathbf{F}$	Força resultante atuante em ΔA

\mathbf{t}	Vetor de tensão
\mathbf{e}_i	Vetores canônicos
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensão
σ_{ij}	Componentes do tensor de tensão
σ_{ji}	Componentes do tensor de tensão transposto
t_i	Componentes do vetor de tensão
V	Volume de uma região genérica
S	Superfície de contorno de uma região genérica
\mathbf{b}	Vetor formado pelas forças de corpo
b_i	Componentes do vetor formado pelas forças de corpo
C_{ijkl}	Componentes do tensor constitutivo do material
E	Módulo de elasticidade
ν	Coefficiente de Poisson
μ	Módulo cisalhante do material

CAPÍTULO 3

S_σ	Superfície externa ao corpo em que as tensões são prescritas
S_u	Superfície externa ao corpo em que os deslocamentos são prescritos
S	Superfície de contorno de um corpo genérico
V	Volume ocupado por um corpo arbitrário
\bar{t}_i	Condições naturais de contorno atuantes na superfície S_σ
\bar{u}_i	Condições essenciais de contorno prescritos na superfície S_u
δ	Expressa a característica virtual de um campo de deslocamento
ω_{ij}	Tensor de rotação
\mathbf{d}	Vetor de deslocamento nodal global
$\mathbf{d}^{(p)}$	Vetor contendo os valores nodais do campo de deslocamentos
$d_i^{(p)}$	Componentes nodais do campo de deslocamentos
n	Número de elementos de uma malha estruturada em elementos finitos
N_p	Funções de forma
\mathbf{N}	Vetor contendo as funções de forma de um elemento
∂	Operador gradiente
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor deformação

B	Matriz cinemática
C	Matriz constitutiva de rigidez
$\bar{\mathbf{b}}$	Vetor contendo as forças de corpo prescritas
$\bar{\mathbf{t}}$	Vetor contendo as tensões superficiais prescritas
K	Matriz de rigidez local
f	Vetor de forças local
$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{b}})$	Vetor de forças local referente às forças corpo
$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{t}})$	Vetor de forças local referente às tensões superficiais
K_g	Matriz de rigidez global
K_{ij}	Coefficientes da matriz de rigidez global
x_i^0	Coordenadas nodais iniciais do elemento Q4
l	Dimensão horizontal de um elemento finito
h	Dimensão vertical de um elemento finito
A_e	Área de um elemento finito
q e q'	Elementos adjacentes
$F_i^{(p)}$	Componentes do vetor global de forças
r e s	Variáveis auxiliares

CAPÍTULO 4

β	Posição na horizontal de um subvolume genérico
γ	Posição na vertical de um subvolume genérico
N_β	Número de subvolumes na horizontal
N_γ	Número de subvolumes na vertical
L	Dimensão horizontal da estrutura discretizada
H	Dimensão vertical da estrutura discretizada
l_β	Dimensão horizontal dos subvolumes
h_γ	Dimensão vertical dos subvolumes
q	Número identificador do subvolume
N_q	Número total de subvolumes
$W_{i(mn)}^{(p)}$	Coefficientes desconhecidos do campo de deslocamentos
$x_i^{(\beta)}$	Componentes do vetor posição local

$\bar{u}_i^{(\beta,\gamma)}$	Componentes em termos médios do campo de deslocamento associado ao subvolume (β, γ)
$\theta_{ij}^{(\beta,\gamma)}$	Rotações médias superficiais associadas ao subvolume (β, γ)
$\kappa_{ij}^{(\beta,\gamma)}$	Curvaturas médias superficiais associadas ao subvolume (β, γ)
$\bar{\mathbf{u}}^{(q)}$	Vetor contendo os deslocamentos médios nas faces de um subvolume q
$\bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}$	Vetor contendo as rotações médias nas faces de um subvolume q
$\bar{\boldsymbol{\kappa}}^{(q)}$	Vetor contendo as curvaturas médias nas faces de um subvolume q
$\mathbf{W}^{(q)}$	Vetor formado pelos coeficientes de primeira e segunda ordem associados à versão de ordem zero da teoria de volumes finitos
$\mathbf{W}_{\nabla}^{(q)}$	Vetor formado pelos coeficientes cruzados de primeira e segunda ordem associados à versão de primeira ordem da teoria de volumes finitos
$\mathbf{W}_{\nabla^2}^{(q)}$	Vetor formado pelos coeficientes cruzados de primeira e segunda ordem associados à versão de segunda ordem da teoria de volumes finitos
$\mathbf{W}_{(00)}^{(q)}$	Vetor formado pelos coeficientes de ordem zero
$\bar{t}_i^{(\beta,\gamma)}$	Tensões médias atuantes nas faces de um subvolume (β, γ)
$\bar{t}_{i/j}^{(\beta,\gamma)}$	Derivada primeira das tensões médias atuantes nas faces de um subvolume (β, γ)
$\bar{t}_{i/jj}^{(\beta,\gamma)}$	Derivada segunda das tensões médias atuantes nas faces de um subvolume (β, γ)
$\bar{\mathbf{t}}^{(q)}$	Vetor composto pelas tensões médias atuantes nas faces de um subvolume
$\bar{\mathbf{t}}_{\nabla}^{(q)}$	Vetor composto pelas derivadas primeiras das tensões médias atuantes nas faces de um subvolume
$\bar{\mathbf{t}}_{\nabla^2}^{(q)}$	Vetor composto pelas derivadas segundas das tensões médias atuantes nas faces de um subvolume
$L_p^{(q)}$	Comprimentos das faces de um subvolume
$\mathbf{K}_{(m \times m)}^{(q)}$	Matriz de rigidez local
N_{gl}	Número total de graus de liberdade
$\mathbf{U}_{(N_{gl} \times 1)}$	Vetor cinemático global
$\mathbf{T}_{(N_{gl} \times 1)}$	Vetor estático global
$\mathbf{L}_{(m \times N_{gl})}^{(q)}$	Matriz de incidência

$\mathbf{K}_{(N_{gl} \times N_{gl})}$	Matriz de rigidez global
\mathbf{T}_c	Vetor com as variáveis estáticas conhecidas
\mathbf{T}_d	Vetor com as variáveis estáticas desconhecidas
\mathbf{U}_c	Vetor com as variáveis cinemáticas conhecidas
\mathbf{U}_d	Vetor com as variáveis cinemáticas desconhecidas
\mathbf{K}_{cd}	Submatriz de rigidez associando as variáveis estáticas conhecidas às variáveis cinemáticas desconhecidas
\mathbf{K}_{cc}	Submatriz de rigidez associando as variáveis estáticas conhecidas às variáveis cinemáticas conhecidas
\mathbf{K}_{dd}	Submatriz de rigidez associando as variáveis estáticas desconhecidas às variáveis cinemáticas desconhecidas
\mathbf{K}_{dc}	Submatriz de rigidez associando as variáveis estáticas desconhecidas às variáveis cinemáticas conhecidas

CAPÍTULO 5

ρ	Função de densidade relativa
Ω_d	Subdomínio delimitando a estrutura ótima
Ω	Domínio de referência
\bar{V}	Volume limite para estrutura ótima
N	Número total de elementos de uma malha discretizada
V	Volume final da estrutura ótima
ρ_i	Densidade relativa do elemento
v_i	Volume do elemento
δW_{int}	Trabalho interno virtual de um corpo elástico
δW_{ext}	Trabalho externo virtual de um corpo elástico
U	Energia de deformação
\mathbf{C}	Tensor de rigidez
\mathbf{u}_{ad}	Campo de deslocamento cinematicamente admissível
\mathbf{u}	Campo de deslocamentos da estrutura
\mathbf{d}	Vetor global de deslocamentos
f	Fração volumétrica
ρ_{min}	Densidade relativa mínima

ρ	Vetor formado pelas densidades relativas de cada elemento
p	Fator de penalização
C_{ijkl}^0	Tensor constitutivo do material sólido
\mathbf{f}	Vetor global de forças
\mathbf{d}_e	Vetor local de deslocamentos
q	Variável que controla o nível de penalização
\mathbf{K}_e^0	Matriz de rigidez para um elemento com densidade relativa unitária
\mathcal{L}	Função de Lagrange
λ_i	Multiplicadores de Lagrange
l	Quantidade de restrições de desigualdade
φ	Função dual de Lagrange
χ	Conjunto de soluções admissíveis
λ	Vetor contendo os multiplicadores de Lagrange
c	Função de flexibilidade da estrutura
V_e	Volume do elemento
B_e	Variável auxiliar
η	Fator de amortecimento
k	Iteração
m	Parâmetro move
λ_{inf}	Limite inferior do intervalo de procura do multiplicador de Lagrange
λ_{sup}	Limite superior do intervalo de procura do multiplicador de Lagrange
ρ_{tmp}	Densidades relativas temporárias
λ_{tmp}	Multiplicadores de Lagrange temporários
ϵ	Número real suficientemente próximo a zero

CAPÍTULO 6

dW	Trabalho infinitesimal
\vec{F}	Vetor força
$d\vec{v}$	Vetor deslocamento infinitesimal
P	Valor limite para intensidade de \vec{F}
Δ	Valor limite para o deslocamento da carga \vec{F}
W	Trabalho realizado

Ω	Domínio de uma região de um sólido elástico
U_T	Energia total de deformação
\bar{U}	Energia de deformação específica
$d\bar{U}$	Energia infinitesimal de deformação armazenada
U	Energia de deformação
\mathbf{u}	Vetor contendo os deslocamentos
\mathbf{x}	Vetor contendo os valores para variável de projeto
$\mu_{1(m)}$	Coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos na direção e nas faces verticais de um subvolume
$\tau_{1(m)}$	Coeficientes a serem determinados do campo de tensões na direção x_1 e nas faces verticais
q	Numeração de um subvolume genérico
R_i	Componentes da força resultante atuante na face vertical de um subvolume
M_R	Momento resultante atuante na face vertical de um subvolume
S_R	Momento resultante de segunda ordem atuante na face vertical de um subvolume
$\mathbf{R}^{(q)}$	Vetor local formado pelas forças resultantes atuantes nas faces de um subvolume
$\mathbf{M}_R^{(q)}$	Vetor local formado pelos momentos resultantes atuantes nas faces de um subvolume
$\mathbf{S}_R^{(q)}$	Vetor local formado pelos momentos resultantes de segunda ordem atuantes nas faces de um subvolume
W_q	Trabalho realizado no subvolume q
$L_j^{(q)}$	Comprimentos das faces de um subvolume q
\mathbf{U}	Vetor global de deslocamentos médios nas faces
$\boldsymbol{\theta}$	Vetor global de rotações médias nas faces
$\boldsymbol{\kappa}$	Vetor global de curvaturas médias nas faces
ρ_q	Densidade relativa do subvolume q
$\bar{\beta}$	Índice associado à face horizontal do contorno com carregamento prescrito
$\bar{\gamma}$	Índice associado à face vertical do contorno com carregamento prescrito
$N_{\bar{\beta}}$	Número de faces horizontais do contorno com carregamento prescrito
$N_{\bar{\gamma}}$	Número de faces verticais do contorno com carregamento prescrito

$l_{\bar{\beta}}$ Dimensão horizontal do subvolume do contorno

$h_{\bar{\gamma}}$ Dimensão vertical do subvolume do contorno

CAPÍTULO 7

TOL Tolerância para o critério de convergência

t Espessura

P Intensidade da carga concentrada aplicada

ρ^k Vetor formado pelas densidades relativas do material do passo anterior

ρ^{k+1} Vetor formado pelas densidades relativas do material do passo atual

η Fator de amortecimento

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	23
1.1 Otimização topológica.....	25
1.2 Métodos para análise elástica de tensões.....	27
2 TEORIA DA ELASTICIDADE.....	29
2.1 Relações cinemáticas.....	29
2.2 Análise de tensões.....	33
2.2.1 <i>Equilíbrio.....</i>	35
2.3 Relações constitutivas.....	37
2.3.1 <i>Estado plano de tensão.....</i>	38
2.3.2 <i>Estado plano de deformação.....</i>	39
3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	41
3.1 Princípio dos deslocamentos virtuais.....	41
3.2 Formulação do método dos elementos finitos para análises elásticas	
lineares bidimensionais.....	44
3.2.1 <i>Matriz cinemática.....</i>	45
3.2.2 <i>Princípio dos deslocamentos virtuais em notação matricial.....</i>	46
3.2.3 <i>Montagem do sistema global.....</i>	47
3.2.4 <i>Elemento retangular bilinear.....</i>	48
3.2.4.1 <i>Compatibilidade cinemática.....</i>	50
3.2.4.2 <i>Compatibilidade estática.....</i>	50
3.2.5 <i>Elemento retangular quadrático.....</i>	52
4) TEORIA DE VOLUMES FINITOS.....	55
4.1 Formulação generalizada da teoria de volumes finitos para análise	
mecânica de sólidos.....	57
4.1.1 <i>Variáveis cinemáticas em termos médios nas faces.....</i>	59
4.1.2 <i>Variáveis estáticas em termos médios nas faces.....</i>	61
4.1.3 <i>Equilíbrio local no subvolume.....</i>	65
4.1.4 <i>Montagem da matriz de rigidez local.....</i>	65
4.1.5 <i>Montagem da matriz de rigidez global.....</i>	66
4.2 Formulação de primeira ordem da teoria de volumes finitos para	
análise elástica de sólidos.....	69
4.2.1 <i>Avaliação das variáveis cinemáticas e estáticas.....</i>	70

4.2.2	<i>Equilíbrio local no subvolume.....</i>	71
4.2.3	<i>Montagem do sistema global.....</i>	72
4.3	Formulação de ordem zero da teoria de volumes finitos para análise elástica de sólidos.....	74
4.3.1	<i>Avaliação das variáveis cinemáticas e estáticas.....</i>	74
4.3.2	<i>Equilíbrio local no subvolume.....</i>	75
4.3.3	<i>Montagem do sistema global.....</i>	76
4.4	Solução do sistema global.....	77
5	PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	79
5.1	Problema de minimização da energia de deformação.....	80
5.2	<i>Solid isotropic material with penalization (SIMP)</i>.....	82
5.2.1	<i>Relaxação.....</i>	82
5.2.2	<i>Restrição.....</i>	83
5.2.3	<i>Penalização dos valores intermediários.....</i>	83
5.3	Dualidade de Lagrange.....	86
5.4	Método OC.....	87
5.4.1	<i>Obtenção do passo iterativo da variável de projeto.....</i>	88
5.4.2	<i>Abordagem heurística.....</i>	89
5.5	Instabilidades numéricas.....	92
5.5.1	<i>Regiões acinzentadas.....</i>	92
5.5.2	<i>Padrão do tabuleiro de xadrez.....</i>	92
5.5.3	<i>Dependência de malha.....</i>	93
5.5.4	<i>Fronteira irregular.....</i>	94
5.5.5	<i>Mínimos locais.....</i>	95
5.5.6	<i>Custo computacional.....</i>	95
6	AVALIAÇÃO DA FUNÇÃO DE FLEXIBILIDADE.....	97
6.1	Trabalho externo realizado e energia de deformação.....	97
6.2	Função de flexibilidade.....	100
6.3	Função de flexibilidade aplicada à teoria generalizada de volumes finitos.....	102
6.3.1	<i>Avaliação do trabalho realizado em função das grandezas cinemáticas e estáticas.....</i>	102
6.3.2	<i>Avaliação da função de flexibilidade.....</i>	107

6.4 Forma alternativa para avaliação da função de flexibilidade.....	108
6.5 Método OC e a teoria de volumes finitos.....	109
7 RESULTADOS NUMÉRICOS.....	110
7.1 Estudo de caso 1: viga engastada.....	111
7.2 Estudo de caso 2: viga do tipo <i>Messerschmitt-Bölkow-Blom</i> (MBB).....	121
7.3 Estudo de caso 3: estrutura <i>Michell</i>	131
CONCLUSÕES.....	141
Considerações finais.....	144
Trabalhos futuros.....	145
REFERÊNCIAS.....	146
APÊNDICES.....	151
Apêndice A – Teorema da divergência.....	151
Apêndice B – Matrizes de rigidez para o método dos elementos finitos..	152
<i>Apêndice B.1 – Matriz de rigidez para o elemento Q4.....</i>	<i>152</i>
<i>Apêndice B.2 – Matriz de rigidez para o elemento Q8.....</i>	<i>153</i>
Apêndice C – Matrizes utilizadas na formulação cartesiana bidimensional da teoria de volumes finitos.....	156

1 INTRODUÇÃO

Em uma indústria competitiva, a seleção e o dimensionamento de uma tipologia estrutural revelam-se muito importante. Com o intuito de atender esta nova exigência da indústria, técnicas de otimização vêm sendo inseridas no processo produtivo industrial. Estes projetos estruturais otimizados devem atender, inicialmente, requisitos mínimos de resistência e durabilidade. Apesar dos conceitos matemáticos empregados pela otimização estrutural estarem bem estabelecidos, a aplicação desses na indústria ainda precisa ser melhor estabelecida.

Segundo o dicionário *Oxford English* (WAITE, 2012), a palavra otimização, de maneira geral, pode ser definida como o ato de se fazer o melhor de uma determinada situação ou recurso. Basicamente, a otimização visa obter o melhor projeto de um produto em relação a um dado objetivo, de modo que este produto atenda a determinadas condições que são impostas. Sendo assim, o problema de otimização pode ser definido como

Achar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q$ que minimize ou maximize $g_0(\mathbf{x}) \Rightarrow$ função objetivo

tal que:

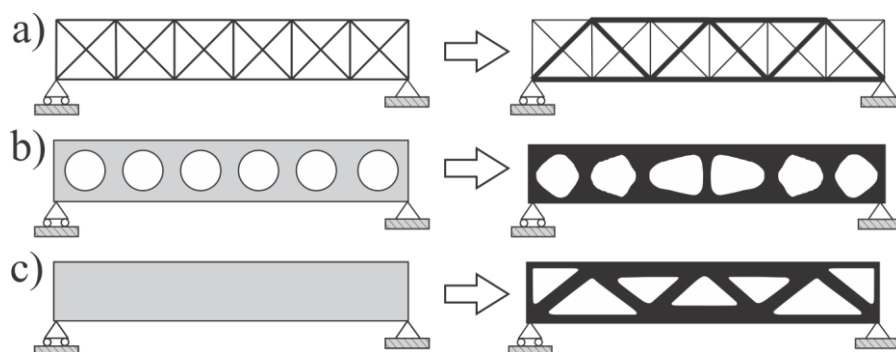
$$\left. \begin{array}{l} \{g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ com } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r\} \\ \{h_j(\mathbf{x}) = 0 \text{ com } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^s\} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{restrições do problema} \quad (1.1)$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q$ é o vetor que representa as variáveis de projeto, g_0 é denominada de função objetivo, g_i e h_j são, respectivamente, as restrições de desigualdade e de igualdade de um problema, com $i = 1, \dots, l$ e $j = 1, \dots, m$, sendo l e m as quantidades de restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente, e q , r e s valores escalares que definem o número de variáveis de projeto consideradas no problema, uma vez que as restrições não precisam ser necessariamente impostas a todas as variáveis de projeto. O ponto ótimo de projeto \mathbf{x}^* para o problema é dado por $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^q$, em que $g_0(\mathbf{x}^*) \leq g_0(\mathbf{x})$, para todo \mathbf{x} pertencente à região viável de projeto.

A otimização estrutural nada mais é do que um processo numérico que tem como finalidade se obter uma configuração estrutural que leve a um desempenho ótimo da estrutura considerando medidas de desempenho pré-estabelecidas, tais como flexibilidade mínima, rigidez máxima, carga máxima de flambagem, dimensões mínimas, etc. Além do mais, algumas restrições devem ser atendidas, tais como tensão de falha, dimensões mínimas, deslocamentos máximos, etc. O principal objetivo da otimização estrutural é encontrar a melhor configuração possível na concepção de uma estrutura desde que os estados limites

sejam atendidos. Atualmente, a concepção de projetos econômicos e eficientes está diretamente ligada à experiência do projetista. Quando do emprego da otimização estrutural, visa-se a criação de um método sistemático com o intuito de obter o melhor projeto independentemente da experiência do projetista.

Figura 01 - Diferentes tipos de otimização: a) otimização dimensional de uma treliça, b) otimização de forma e c) otimização topológica no contínuo.



Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund (2003).

De forma geral, os métodos de otimização em estruturas se dividem em duas categorias principais: otimização material e otimização da distribuição do material. A primeira categoria pretende obter propriedades ótimas para os materiais, enquanto que a segunda visa obter a melhor distribuição do material no domínio de análise da estrutura. Os métodos de otimização da distribuição do material, por sua vez, se subdividem em outras três categorias:

- Otimização dimensional: as variáveis de projeto \boldsymbol{x} representam uma medida de densidade estrutural, tais como as dimensões de uma viga ou a área da seção transversal das barras de uma treliça. A densidade ótima normalmente minimiza algumas quantidades físicas, tais como a energia de deformação ou a deflexão, enquanto que as restrições de equilíbrio devem ser satisfeitas (LARSSON, 2016). A Figura 01(a) ilustra um processo de otimização dimensional de uma treliça, em que se observa uma variação considerável nas áreas transversais das barras.
- Otimização de forma: neste caso, o processo de otimização leva em consideração parâmetros específicos de dimensionamento de um modelo e varia estes até que as respostas obtidas sejam as desejadas e as restrições sejam atendidas. Isto inclui mudar a moldura, os chanfros, o raio, a espessura, etc. Os algoritmos de otimização não acrescentam ou removem furos, apenas ajusta aqueles especificados na análise (JOHNSEN, 2013). A Figura 01(b) mostra um processo de otimização de forma de

uma viga modelada bidimensionalmente, em que foi proposta a abertura de seis furos transversais circulares e o resultado ótimo manteve a quantidade de furos, porém a forma dos furos foi alterada de modo a se obter o melhor resultado para função objetivo do problema.

- Otimização topológica: neste caso, os algoritmos de otimização têm como finalidade estabelecer da melhor forma possível a distribuição de material em um domínio previamente definido, diante de uma determinada função objetivo e de restrições mecânicas ao problema. A variável de projeto, neste caso, é o próprio domínio, no qual se pode inserir ou retirar furos (CORDEIRO, 2007). A Figura 01(c) apresenta um caso típico de otimização topológica no contínuo.

1.1 Otimização topológica

A otimização topológica trata-se de uma metodologia proposta inicialmente por Bendsøe e Kikuchi (1988), e atualmente é um método que podemos considerar devidamente estabelecido para o dimensionamento mecânico de estruturas. Esta metodologia foi desenvolvida para trabalhar de forma eficiente com funções baseadas na minimização da energia de deformação, ou da flexibilidade da estrutura, ou ainda na maximização da rigidez. Segundo Bendsøe e Sigmund (2003), na definição da topologia ótima de uma estrutura, o interesse está na determinação da distribuição ótima de um determinado material isotrópico em um dado domínio. Em outras palavras, o interesse está em definir quais pontos do domínio devem ter material e quais devem ser vazios, gerando, assim, o que se denomina de projeto “preto e branco”. Por esta razão, a distribuição de material da estrutura é obtida a partir do binário “0-1”, o que leva a um problema de programação inteira. A solução ótima, neste caso, é definida como a união de todos os elementos que tiverem o valor 1. Para problemas de otimização do tipo “0-1”, é necessário o emprego de algoritmos de otimização discreta, o que torna essa abordagem praticamente inviável.

Assim, a distribuição de material no domínio costuma ser descrita em termos de uma função contínua, que define a densidade relativa de material e que assume todos os valores possíveis entre dois limites discretos: aproximadamente 0 (que indicam pontos vazios) e 1 (que indicam pontos sólidos). Todavia, agora é necessário definir qual a resposta estrutural para os valores intermediários de densidade relativa de material. Tradicionalmente, esta questão vem sendo resolvida pela aplicação de técnicas de homogeneização, conforme abordagem proposta pelo trabalho pioneiro de Bendsøe e Kikuchi (1988) (PARÍS et al.,

2009). Tal abordagem trata-se de uma representação geométrica de uma estrutura por meio de uma renderização em diferentes escalas de cinza de uma imagem, e na forma discreta por uma representação quadricular da geometria do problema (BENDSØE; SIGMUND, 1999).

Na literatura pode-se encontrar outras abordagens para a solução desse tipo de problema de otimização. Uma abordagem alternativa para o problema de otimização topológica é o método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), adotado por Bendsøe (1989), Zhou e Rozvany (1991) e Mlejnek (1992). Neste caso, as propriedades do material são assumidas como constantes dentro de cada elemento do domínio discretizado de análise, e as variáveis de projeto são as densidades relativas dos elementos. Assim, as propriedades são modeladas a partir da densidade relativa do material elevada a uma determinada potência, com o intuito de penalizar os valores intermediários para as densidades relativas do material. Esta abordagem foi criticada por alguns autores, visto que não existe nenhum material físico com as propriedades determinadas desta forma. Porém, outros autores, tais como Bendsøe e Sigmund (1999), têm mostrado que essa abordagem é fisicamente admissível desde que o expoente adotado seja superior a 3 em materiais cujo coeficiente de Poisson é igual a $1/3$. Na otimização topológica, essa abordagem vem sendo aplicada em problemas com restrições múltiplas, física múltipla e materiais múltiplos (SIGMUND, 2001).

A otimização topológica surgiu como um método poderoso e robusto para o projeto de estruturas, mas ainda existem algumas dificuldades na aplicação do método relacionadas a instabilidades numéricas. Segundo Sigmund e Petersson (1998), os problemas numéricos comuns podem ser divididos em três categorias:

- *Padrão do tabuleiro de xadrez*, que se refere à formação de regiões que alternam elementos sólidos e vazios ordenados como em um tabuleiro de xadrez.
- *Dependência de malha*, que se refere ao problema de não se obter qualitativamente a mesma solução para diferentes discretizações da estrutura.
- *Mínimo local*, que se refere ao problema de se obter diferentes soluções para a mesma discretização do problema quando são adotados diferentes parâmetros de entrada.

Dessa forma, é indesejável ter qualquer uma destas instabilidades numéricas, especialmente quanto à ocorrência do padrão de tabuleiro de xadrez.

A partir da função objetivo e das restrições, o processo de otimização topológica determina a melhor dimensão, forma e topologia da estrutura analisada. As técnicas de otimização topológica mais utilizadas normalmente se baseiam numa análise numérica pelo

MEF, dentre elas, podemos citar: método dos Critérios de Otimização (OC – *Optimality Criteria*), Linearização Convexa (CONLIN – *Convex Linearization*), Método das Assíntotas Móveis (MMA – *Method of Moving Asymptotes*), Algoritmo Genético, Programação Linear Sequenciada (SLP – *Sequential Linear Programming*) e Programação Quadrática Sequenciada (SQP – *Sequential Quadratic Programming*). Nesta dissertação, adota-se o método OC, por conta da sua simplicidade e fácil aplicação.

1.2 Métodos para análise elástica de tensões

Para aplicação das técnicas de otimização estrutural, faz-se necessário primeiro resolver o problema estático de uma estrutura que está sujeita a ações em geral e a condições de contorno específicas. Na análise de tensões e de deslocamentos é considerado o regime elástico linear, ou seja, possíveis efeitos ocasionados por conta da não linearidade geométrica ou do material são desconsiderados. Para solução de um problema estrutural baseado na teoria da elasticidade linear podem ser utilizadas algumas técnicas de análise estrutural, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos de Contorno, o Método dos Volumes Finitos, o Método dos Mínimos Quadrados e, mais recentemente, a Teoria de Volumes Finitos (TVF).

Certamente, o MEF é o método mais empregado entre os citados, existindo diversos softwares consolidados no mercado baseados no mesmo. Consequentemente, as suas vantagens e desvantagens já são bem conhecidas, especialmente, quanto ao emprego deste na otimização topológica. De forma geral, o método subdivide o domínio da estrutura em subdomínios menores que possuem forma geométrica mais simples e bem definida. Dessa forma, as equações diferenciais de equilíbrio da teoria da elasticidade, que eram resolvidas de forma analítica, como parte de um problema de valor de contorno, agora são substituídas por um sistema de equações lineares que descrevem o comportamento linear da estrutura em um domínio discretizado.

Uma técnica alternativa à aplicação do MEF é a TVF, proposta inicialmente por Bansal e Pindera (2003). Segundo Cavalcante (2006), esta técnica utiliza a média volumétrica dos vários campos que definem o comportamento do material, e impõe condições de contorno e continuidade em termos médios, relativas ao fluxo de calor e temperatura ou às tensões e deslocamentos, a depender do tipo de análise, entre os subvolumes (termo equivalente a subdomínios no MEF) usados para caracterizar o sistema discretizado.

A TVF mostrou ser um método bastante adequado para a análise elástica de tensões. Comparação de resultados utilizando esta teoria com soluções analíticas e análises baseadas no MEF forneceram rigorosas verificações da eficiência deste método, conforme abordado em Cavalcante et al. (2007a, 2007b, 2008) e Cavalcante e Pindera (2012a,b). A satisfação das equações de equilíbrio no nível do subvolume, concomitantemente com as continuidades cinemáticas e estáticas, forçadas em termos médios nas faces comuns de subvolumes adjacentes, são características que se destacam em relação ao MEF.

As instabilidades numéricas mostradas na seção anterior, especialmente o padrão do tabuleiro de xadrez, estão intimamente relacionadas às considerações assumidas no MEF, visto que esse força a satisfação do equilíbrio e das condições de compatibilidade cinemática e estática apenas nos nós dos elementos finitos que compõem o domínio discretizado de análise. Além do mais, as equações de equilíbrio não são satisfeitas no nível do elemento, sendo estas satisfeitas somente quando uma malha suficientemente refinada é empregada. Diferentemente, a TVF satisfaz as equações de equilíbrio no nível do subvolume e as condições de compatibilidade cinemática e estática nas interfaces comuns de subvolumes adjacentes. Assim, na TVF as conexões entre subvolumes ocorrem por meio das faces dos subvolumes, como esperado do ponto de vista da mecânica do contínuo. Ao mesmo tempo, isto não é observado na formulação em deslocamentos do MEF, em que as conexões entre elementos vizinhos ocorrem por meio dos nós, levando a obtenção de geometrias ótimas com padrão do tabuleiro de xadrez, as quais não são adequadas para manufatura.

Com a motivação de solucionar essas instabilidades associadas ao algoritmo de otimização topológica baseadas no MEF, este trabalho propõe uma abordagem da otimização topológica baseada na TVF. Assim, faz-se uma adaptação ao método SIMP tradicional, em que o MEF é substituído pela TVF, para otimização topológica de vigas modeladas bidimensionalmente submetidas a carregamentos estáticos. Os resultados obtidos pelo acoplamento entre SIMP e TVF são comparados com aqueles obtidos mediante à aplicação da abordagem SIMP tradicional, mostrando a eficiência da nova técnica numérica em problemas relacionados a otimização topológica de estruturas.

2 TEORIA DA ELASTICIDADE

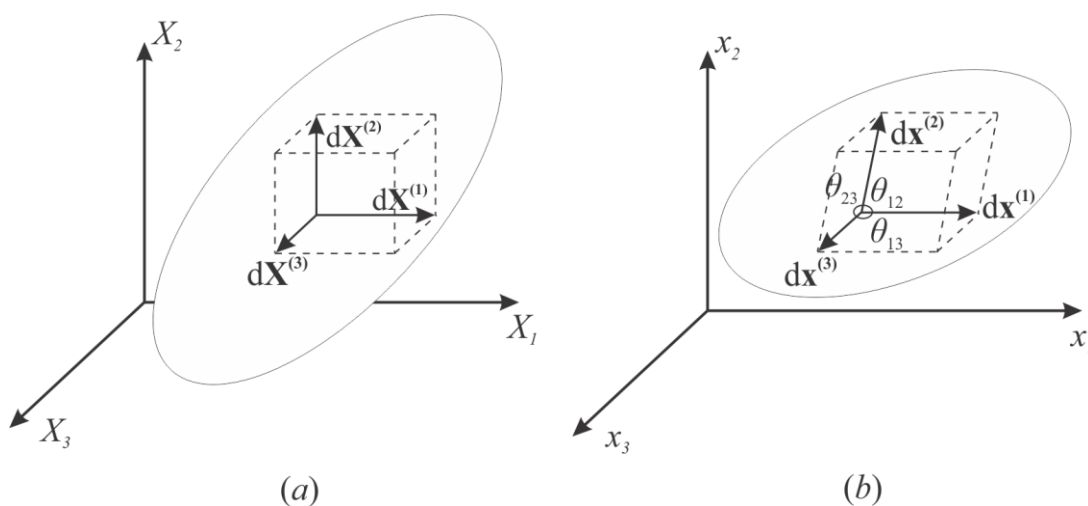
A teoria clássica da elasticidade foi desenvolvida para materiais isotrópicos, linearmente elásticos sujeitos a pequenas deformações. Porém, algumas estruturas possuem grandes dimensões, as quais produzem grandes deslocamentos que podem ser percebidos a olho nu. Na prática, as deformações devem ser da ordem de 10^{-2} em relação às dimensões de um corpo para que a análise linear de tensões possa ser empregada. Geralmente, os termos quadráticos das deformações são da ordem de 10^{-2} , dessa forma, os erros gerados pela consideração da linearidade giram em torno de 1% (FISH; BELYTCHKO, 2007). De modo geral, se a aplicação das cargas não variar de modo significativo a configuração do sólido, então a análise linear elástica de tensões pode ser empregada.

2.1 Relações cinemáticas

Em um sistema de coordenadas cartesianas, o vetor deslocamento tridimensional é definido por três componentes e pode ser escrito como

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

Figura 02 - Análise de deformações: a) Configuração indeformada e b) Configuração deformada.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

A Figura 02 ilustra a deformação de um corpo arbitrário em três dimensões, sendo que o lado esquerdo apresenta o corpo em sua configuração inicial ou indeformada, enquanto que

no lado direito o mesmo é apresentado em sua configuração final ou deformada. Os vetores $d\mathbf{X}^{(1)}$, $d\mathbf{X}^{(2)}$ e $d\mathbf{X}^{(3)}$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}^{(1)} &= [dL_1, 0, 0]^T \\ d\mathbf{X}^{(2)} &= [0, dL_2, 0]^T \\ d\mathbf{X}^{(3)} &= [0, 0, dL_3]^T \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

em que dL_i ($i = 1, 2, 3$) são os componentes não nulos de cada vetor infinitesimal na configuração indeformada, assim como os seus comprimentos. Da mesma forma, os vetores $d\mathbf{x}^{(1)}$, $d\mathbf{x}^{(2)}$ e $d\mathbf{x}^{(3)}$ na configuração deformada são escritos como

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^{(1)} &= [dx_1^{(1)}, dx_2^{(1)}, dx_3^{(1)}]^T \\ d\mathbf{x}^{(2)} &= [dx_1^{(2)}, dx_2^{(2)}, dx_3^{(2)}]^T \\ d\mathbf{x}^{(3)} &= [dx_1^{(3)}, dx_2^{(3)}, dx_3^{(3)}]^T \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

em que $dx_j^{(i)}$ são os valores dos componentes de cada vetor infinitesimal na configuração deformada. O vetor $d\mathbf{x}$ pode ser escrito em função do vetor $d\mathbf{X}$ a partir da seguinte relação matricial:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.1.4)$$

em que \mathbf{F} é o tensor gradiente de deformação, que relaciona o elemento diferencial na configuração deformada com o elemento diferencial na configuração indeformada, sendo $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$.

Em uma descrição lagrangiana do movimento, os componentes do vetor deslocamento \mathbf{u} podem ser avaliados pela seguinte relação:

$$u_i(X_1, X_2, X_3) = x_i(X_1, X_2, X_3) - X_i \quad (2.1.5)$$

Assim, a variação infinitesimal do vetor de deslocamentos $d\mathbf{u}$ pode ser avaliada em função do vetor infinitesimal $d\mathbf{X}$ a partir da seguinte relação matricial:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}(X_1 + dX_1, X_2 + dX_2, X_3 + dX_3) - \mathbf{u}(X_1, X_2, X_3) = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.1.6)$$

em que os componentes da matriz \mathbf{H} são dados por

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} (x_i - X_i) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij} \quad (2.1.7)$$

em que δ_{ij} é o operador delta de Kronecker, sendo definido como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Consequentemente, os elementos da matriz \mathbf{F} podem ser reescritos como $F_{ij} = H_{ij} + \delta_{ij}$ e os vetores $d\mathbf{x}$ são dados por

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^{(1)} &= \left[\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + 1, \frac{\partial u_2}{\partial X_1}, \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right]^T dL_1 \\ d\mathbf{x}^{(2)} &= \left[\frac{\partial u_1}{\partial X_2}, \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + 1, \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right]^T dL_2 \\ d\mathbf{x}^{(3)} &= \left[\frac{\partial u_1}{\partial X_3}, \frac{\partial u_2}{\partial X_3}, \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + 1 \right]^T dL_3 \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Tomando como exemplo o vetor $d\mathbf{x}^{(1)}$, tem-se que a norma desse vetor é dada por

$$\|d\mathbf{x}^{(1)}\| = dl_1 = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2} dL_1 \quad (2.1.10)$$

Considerando-se a teoria de pequenos deslocamentos, rotações e deformações, a Equação (2.1.10) pode ser linearizada e a norma do vetor $d\mathbf{x}^{(1)}$ pode ser expressa como

$$\|d\mathbf{x}^{(1)}\| = dl_1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) dL_1 \quad (2.1.11)$$

A deformação normal em relação à direção do eixo X_i é definida como a mudança no comprimento por unidade de comprimento das fibras orientadas na direção do eixo X_i . Esta deformação é geralmente positiva, caso as fibras se alonguem, e negativa, caso as fibras se encurtem. Assim, a deformação normal na direção do eixo X_1 pode ser definida como

$$\varepsilon_{11} = \frac{dl_1 - dL_1}{dL_1} \quad (2.1.12)$$

Substituindo-se o resultado apresentado na Equação (2.1.11) em (2.1.12), tem-se que a deformação longitudinal na direção do eixo X_1 é dada por

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \quad (2.1.13)$$

Seguindo-se esse mesmo processo para as demais direções, chega-se a

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \quad (2.1.14)$$

Outro tipo de deformação avaliada pela Teoria da Elasticidade Linear é a deformação angular, a qual é definida pela variação angular entre os elementos infinitesimais que definem o paralelepípedo infinitesimal, Figura 02(b). Geralmente, esta deformação é medida em radianos, sendo positiva quando o ângulo entre os elementos infinitesimais diminui. A deformação angular de engenharia no plano $X_1 - X_2$ pode ser definida como

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \theta_{12} \quad (2.1.15)$$

Aplicando as propriedades da geometria analítica, o produto escalar entre os vetores $d\mathbf{x}^{(1)}$ e $d\mathbf{x}^{(2)}$ pode ser expresso como

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = \|d\mathbf{x}^{(1)}\| \|d\mathbf{x}^{(2)}\| \cos \theta_{12} \quad (2.1.16)$$

sendo que as normas dos vetores infinitesimais na configuração deformada podem ser obtidas a partir de expressões semelhantes a apresentada na Equação (2.1.12), logo

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}) dL_1 dL_2 \cos \theta_{12} \quad (2.1.17)$$

Considerando-se o regime de pequenos deslocamentos e deformações, a Equação (2.1.17) pode ser reescrita como

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = dL_1 dL_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{12}\right) = dL_1 dL_2 \sin(\gamma_{12}) = \gamma_{12} dL_1 dL_2 \quad (2.1.18)$$

O produto escalar entre os vetores infinitesimais $d\mathbf{x}^{(1)}$ e $d\mathbf{x}^{(2)}$ pode ser também expresso por

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = \left[\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + 1\right) + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right] dL_1 dL_2 \quad (2.1.19)$$

Desprezando-se os termos quadráticos da Equação (2.1.19), chega-se na seguinte expressão:

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) dL_1 dL_2 \quad (2.1.20)$$

Substituindo-se a Equação (2.1.20) em (2.1.18), observa-se a seguinte relação cinemática para o componente de deformação angular

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \quad (2.1.21)$$

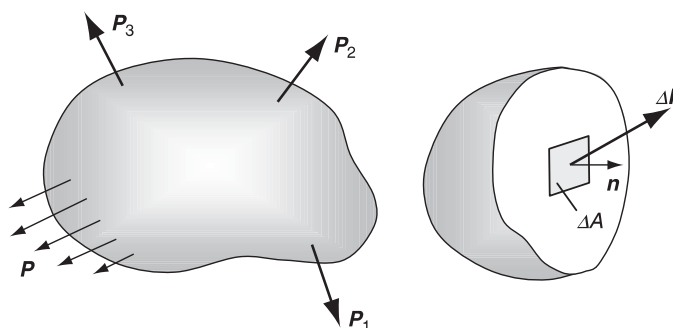
Partindo-se da consideração de um comportamento similar para os demais planos cartesianos, têm-se os seguintes resultados para os componentes de deformação angular:

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \quad \gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \quad \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \quad (2.1.22)$$

No entanto, costuma-se adotar na Teoria da Elasticidade Linear o tensor de deformação ε_{ij} , definido na Equação (2.1.23), em que os métodos de transformação de sistemas de coordenadas e avaliação do problema de valor principal se aplicam. Este tensor apresenta uma pequena alteração em relação aos resultados demonstrados na Equação (2.1.22), em que as deformações angulares ε_{12} , ε_{13} e ε_{23} diferem das deformações angulares γ_{12} , γ_{13} e γ_{23} por um fator igual a 1/2.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1.23)$$

Figura 03 - Corpo seccionado submetido a um carregamento externo.



Fonte: Saad (2009).

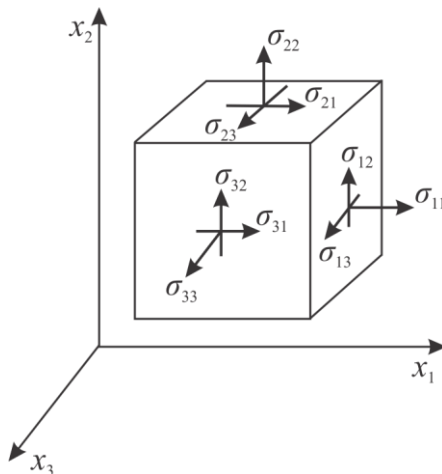
2.2) Análise de tensões

A Figura 03 mostra um corpo sujeito a carregamentos externos, expressos pelas cargas concentradas P_1 , P_2 e P_3 e pelo carregamento distribuído P . Para se investigar a distribuição interna das forças, realiza-se um seccionamento no corpo, cuja seção de corte é mostrada à direita na Figura 03. Esta seção possui uma área infinitesimal dada por ΔA , cujo vetor normal unitário é representado por \mathbf{n} . A força resultante atuante em ΔA é $\Delta \mathbf{F}$ e o vetor de tensão associado à mesma pode ser definido como

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} \quad (2.2.1)$$

Deve-se notar que o vetor de tensão depende tanto da localização espacial como do vetor unitário normal à superfície em análise (SAAD, 2009).

Figura 04 - Componentes do tensor de tensão.



Fonte: Adaptado de Saad (2009).

Considerando-se os casos especiais em que a superfície ΔA pertence a cada um dos três planos cartesianos, com os vetores normais unitários sendo os vetores canônicos associados aos eixos cartesianos, como mostrado na Figura 04, tem-se que o vetor de tensão pode ser avaliado como

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) = \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 \quad (2.2.2)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3$$

em que \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 são os vetores canônicos, que apresentam a mesma direção e sentido dos eixos coordenados, e σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{12} , σ_{21} , σ_{23} , σ_{32} , σ_{13} , σ_{31} são os nove componentes do tensor de tensão. Estes nove componentes são classificados em tensões normais (σ_{11} , σ_{22} , σ_{33}) e tensões cisalhantes (σ_{12} , σ_{21} , σ_{23} , σ_{32} , σ_{13} , σ_{31}) (SAAD, 2009). Os componentes de tensão σ_{ij} são normalmente escritos em notação matricial da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

A Figura 05 mostra um vetor de tensão atuante em um plano oblíquo com orientação arbitrária. Neste caso, o vetor normal a este plano pode ser escrito como

$$\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3 \quad (2.2.4)$$

em que n_1, n_2, n_3 são os cossenos diretores do vetor unitário \mathbf{n} relativo ao sistema de coordenadas adotado. Realizando-se o equilíbrio de forças das trações atuantes no plano oblíquo e nas faces orientadas segundo os planos coordenados, tem-se

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = n_1 \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) + n_2 \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) + n_3 \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) \quad (2.2.5)$$

e utilizando-se as relações apresentadas em (2.2.2), pode-se escrever que

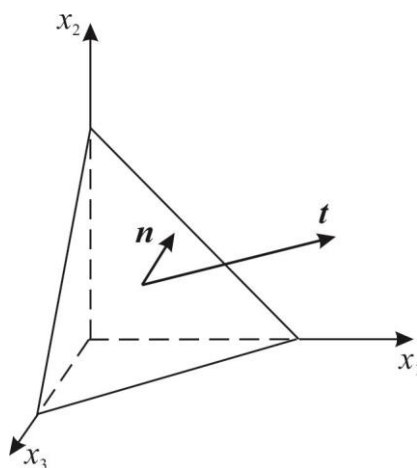
$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = & (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3)\mathbf{e}_1 \\ & + (\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3)\mathbf{e}_2 \\ & + (\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3)\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

ou, em notação indicial

$$t_i = \sigma_{ji}n_j \quad (2.2.7)$$

Estas relações estabelecem um método simples e direto para o cálculo de forças em planos oblíquos e em superfícies (SAAD, 2009). Esta técnica mostra-se bastante útil na determinação de condições de contorno durante o processo de formulação dos métodos numéricos e solução de problemas lineares elásticos.

Figura 05 - Vetor de tensão em um plano oblíquo.



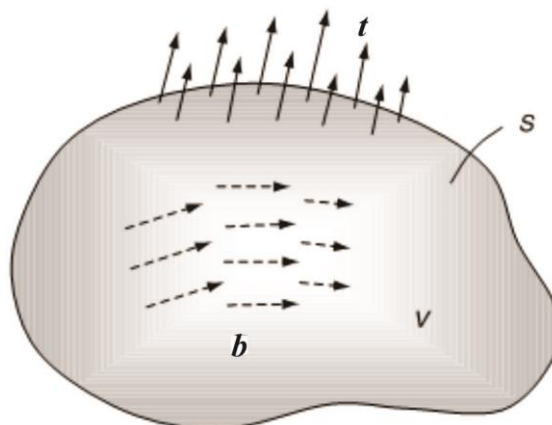
Fonte: Adaptado de Saad (2009).

2.2.1 Equilíbrio

O campo de tensões em um sólido elástico é distribuído continuamente dentro do corpo e definido pelo carregamento aplicado. Se todo o corpo está em equilíbrio, então toda e qualquer parte do mesmo também deve estar em equilíbrio. Partindo-se desse princípio da

Mecânica dos Sólidos, podem ser desenvolvidas as equações de equilíbrio em termos de forças e de momentos em um ponto contínuo do material (SAAD, 2009).

Figura 06 - Forças superficial e de corpo atuando numa porção arbitrária de um contínuo.



Fonte: Adaptado de Saad (2009).

Considerando-se um subdomínio com volume V e contorno S dentro de um corpo em equilíbrio, além das forças superficiais \mathbf{t} e de corpo \mathbf{b} , como mostrado na Figura 06, a conservação de momento linear, desprezando-se as forças iniciais, ou seja, considerando-se um carregamento quase estático, implica que as forças agindo nesta porção do corpo são balanceadas e, conseqüentemente, a força resultante deve ser nula (SAAD, 2009). Este conceito pode ser escrito da seguinte forma:

$$\iint_S t_i dS + \iiint_V b_i dV = 0 \quad (2.2.8)$$

Utilizando-se a Equação (2.2.7) para o vetor de tensão, tem-se

$$\iint_S \sigma_{ji} n_j dS + \iiint_V b_i dV = 0 \quad (2.2.9)$$

Aplicando-se o teorema da divergência, apresentado no Apêndice A, tem-se

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i \right) dV = 0 \quad (2.2.10)$$

Como o volume V é arbitrário e o integrando é contínuo, logo o integrando da Equação (2.2.10) deve ser nulo

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (2.2.11)$$

Por fim, todos os campos de tensões numa análise linear geométrica devem satisfazer a Equação (2.2.11), de modo a garantir o equilíbrio estático do corpo.

2.3 Relações constitutivas

Até o presente momento, as tensões foram definidas como grandezas que quantificam a transmissão dos esforços em cada ponto de um sólido sujeito a ações externas, enquanto que as deformações foram estudadas como quantificadoras das mudanças de geometria que podem ocorrer durante o processo de deformação de um elemento paralelepípedo infinitesimal. Por conseguinte, deve-se salientar que estas grandezas se relacionam por meio de leis naturais, chamadas de leis constitutivas. Além do mais, o modo como estas grandezas se relacionam depende do material estudado. De forma geral, pode-se agrupar o comportamento dos materiais em modelos constitutivos, oriundos de diferentes teorias, tais como: Elasticidade, Plasticidade, Viscoelasticidade e Viscoplasticidade. Para materiais elásticos lineares, utiliza-se a lei de Hooke generalizada, dada por

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.3.1)$$

Para o caso de materiais elásticos lineares isotrópicos, observa-se a seguinte relação matricial compacta entre os vetores de tensões e de deformações:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.3.2)$$

em que

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, C_{12} = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, C_{44} = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.3.3)$$

sendo E o módulo de elasticidade, ν o coeficiente de Poisson e μ o módulo cisalhante do material.

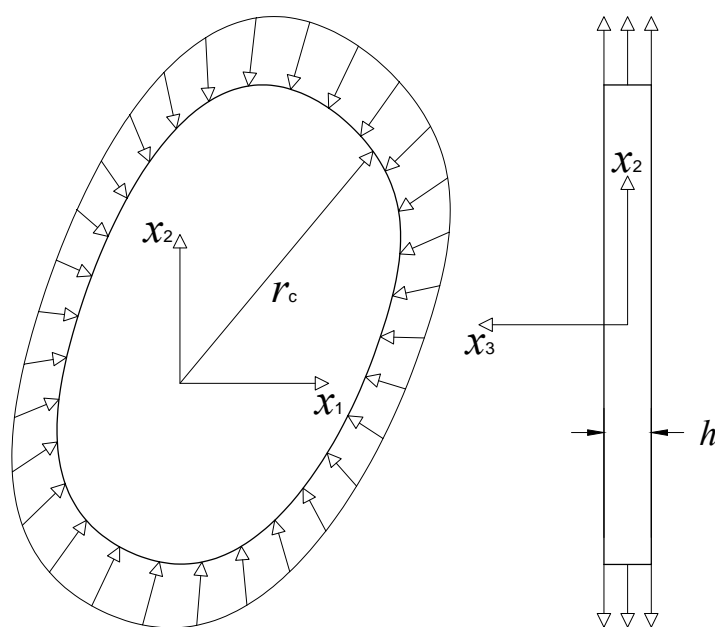
Em problemas bidimensionais, a matriz constitutiva \mathbf{C} depende se o problema em análise assume um estado plano de tensões ou de deformações. Para o caso do estado plano de deformações, assume-se que o corpo é espesso em relação ao plano $x_1 - x_2$ no qual o modelo é construído. Dessa forma, as deformações que acontecem fora do plano de análise (ε_{33} , ε_{13} e ε_{23}) são assumidas como nulas. No caso do estado plano de tensões, o objeto apresenta uma

espessura muito pequena quando comparada às dimensões no plano $x_1 - x_2$. Neste caso, assume-se que nenhum carregamento é aplicado perpendicularmente ao plano de análise $x_1 - x_2$, assim, as tensões fora do plano (σ_{33} , σ_{13} e σ_{23}) são assumidas como nulas (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

2.3.1 Estado plano de tensão

Se uma chapa é carregada por forças aplicadas em suas bordas, paralelas ao plano da chapa e distribuída uniformemente ao longo da sua espessura, como mostrado na Figura 07, tem-se que os componentes de tensão são nulos em ambas as faces da chapa e, conseqüentemente, pode-se assumir que eles também são nulos no interior da chapa. Dessa forma, o estado de tensão é definido pelos componentes σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} , que são independentes do eixo x_3 , variando apenas com x_1 e x_2 (TIMOSHENKO; GOODIER, 1951). Conseqüentemente, os componentes de deformação ε_{23} e ε_{31} também são nulos. Na Figura 07, h indica a espessura da chapa e r_c é uma dimensão representativa da seção transversal.

Figura 07 - Representação do estado plano de tensão no plano $x_1 - x_2$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Para o caso de estado plano de tensões, a relação constitutiva pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.3.4)$$

Partindo-se do pressuposto que as tensões σ_{33} , σ_{23} e σ_{31} são nulas, podem ser encontradas as seguintes expressões:

$$\sigma_{33} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{11}\varepsilon_{33} = 0 \quad (2.3.5)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{C_{12}}{C_{11}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (2.3.6)$$

Por conseguinte, a relação constitutiva pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & 0 \\ C'_{12} & C'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

em que

$$C'_{11} = \frac{C_{11}^2 - C_{12}^2}{C_{11}} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad C'_{12} = \frac{C_{11}C_{12} - C_{12}^2}{C_{11}} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (2.3.8)$$

Porém, deve-se salientar que a hipótese de estado plano de tensão viola algumas condições de compatibilidade cinemática, tornando-se uma boa aproximação apenas quando da análise de chapas finas submetidas a carregamentos com componentes apenas no plano da chapa.

2.3.2 Estado plano de deformação

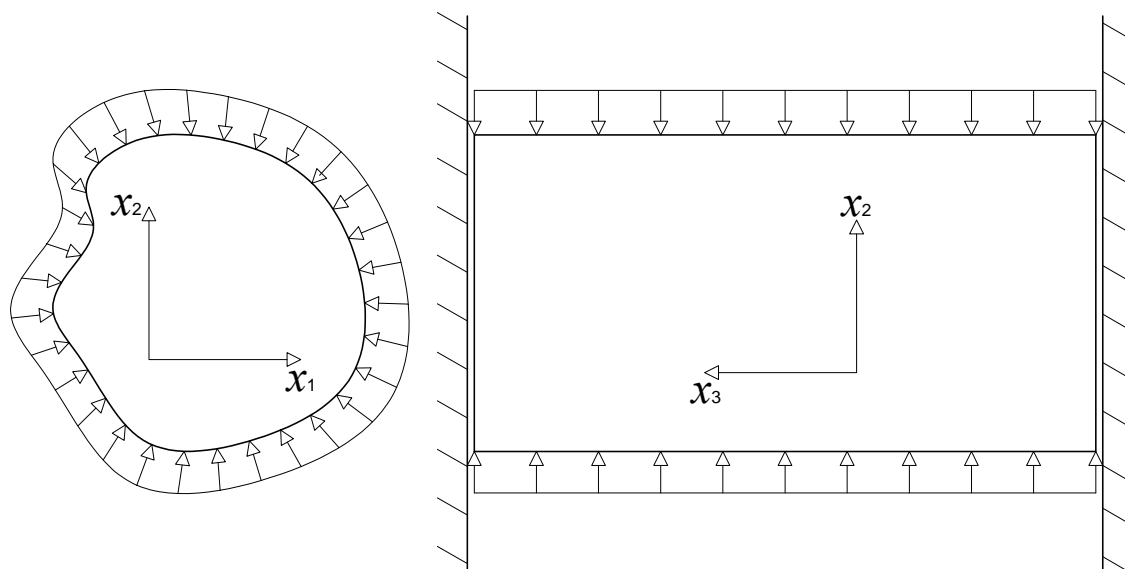
Se um corpo prismático é carregado por forças que são perpendiculares ao eixo longitudinal e não varia ao longo do mesmo, como mostrado na Figura 08, assim, pode-se assumir que todas as seções transversais estão sob as mesmas condições. As seções finais estão confinadas entre planos rígidos fixos e lisos, logo, o deslocamento na direção axial é impedido. Uma vez que não existe deslocamento axial nos extremos e, por simetria, na seção do meio, pode-se assumir que o mesmo acontece para todas as seções transversais (TIMOSHENKO; GOODIER, 1951).

Neste caso, os componentes de tensão σ_{23} e σ_{31} são nulos, e os componentes de deformação ε_{33} , ε_{23} e ε_{31} também são nulos. Dessa forma, a relação constitutiva para um estado plano de deformações pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ C_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

Existem vários problemas importantes que podem ser analisados a partir de um estado plano de deformações, tais como um muro de contenção submetido a uma pressão lateral, um bueiro ou um túnel, um tubo submetido a pressão interna, um cilindro comprimido por forças no plano diametral, como em um rolamento cilíndrico. Em todos estes casos, o carregamento não pode variar ao longo do comprimento (TIMOSHENKO; GOODIER, 1951).

Figura 08 - Representação do estado plano de deformação no plano $x_1 - x_2$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 Princípio dos deslocamentos virtuais

Para formulação do sistema linear elástico, está prevista a existência de dois tipos de condições de contorno: natural e essencial. A primeira se refere à porção do contorno na qual a tração superficial é prevista e a segunda refere-se à porção do contorno em que o deslocamento é prescrito. Considerando-se o corpo arbitrário apresentado na Figura 09, em que S_σ e S_u são superfícies externas do corpo e V é o volume ocupado pelo corpo na configuração indeformada, têm-se as seguintes condições de contorno:

Condições Naturais de Contorno:

$$\sigma_{ji}n_j = \bar{t}_i \text{ na superfície } S_\sigma \quad (3.1.1)$$

Condições Essenciais de Contorno:

$$u_i = \bar{u}_i \text{ na superfície } S_u \quad (3.1.2)$$

Deve-se observar que as condições naturais e essenciais não podem ser prescritas ao mesmo tempo na mesma porção do contorno, logo

$$S_u \cap S_\sigma = 0 \quad (3.1.3)$$

Outra observação importante é que em qualquer porção do contorno, ou a condição essencial ou a condição natural deve estar prescrita, sendo assim, observa-se a seguinte relação:

$$S_u \cup S_\sigma = S \quad (3.1.4)$$

Deslocamento virtual corresponde a qualquer deslocamento não real, que pode não existir e não é provocado pelo carregamento aplicado. A principal propriedade deste é que ele é cinematicamente admissível, ou seja, ele é compatível com as restrições impostas pelos apoios externos e pelas ligações internas. Os deslocamentos virtuais podem ter valores finitos (grandes) ou infinitesimais (elementares) (DIMITROVOVÁ, 2016). Agora, considerando-se deslocamentos virtuais contínuos e arbitrários que satisfazem a seguinte condição:

$$\delta u_i = 0 \text{ na superfície } S_u \quad (3.1.5)$$

em que δ representa uma variação qualquer e expressa a característica virtual do deslocamento. Multiplicando-se essa parcela de deslocamento em ambos os lados das equações diferenciais de equilíbrio, obtém-se

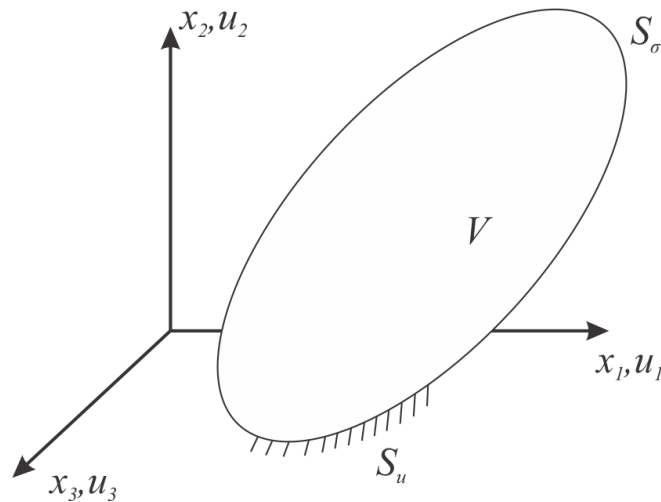
$$\left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i \right) \delta u_i = 0 \quad (3.1.6)$$

Integrando-se no volume

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i \right) \delta u_i dV = 0 \quad (3.1.7)$$

como δu_i assume valores arbitrários, então as equações integrais em (3.1.7) são satisfeitas se e somente se as expressões entre parênteses forem nulas. Consequentemente, as equações integrais (3.1.7) são equivalentes às equações diferenciais de equilíbrio.

Figura 09 - Domínio de um corpo arbitrário.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Sabendo-se que a derivada espacial do produto entre o tensor de tensão e os deslocamentos virtuais é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} \delta u_i) = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \delta u_i + \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \quad (3.1.8)$$

logo, o primeiro termo da Equação (3.1.6) pode ser escrito como

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \delta u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} \delta u_i) - \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \quad (3.1.9)$$

Dessa forma, a Equação (3.1.7) pode ser reescrita como

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} \delta u_i) - \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + b_i \delta u_i \right] dV = 0 \quad (3.1.10)$$

Aplicando-se o teorema da divergência, apresentado no Apêndice A, no primeiro termo da Equação (3.1.10), encontra-se

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} \delta u_i) dV = \int_S (\sigma_{ji} \delta u_i) n_j dS \quad (3.1.11)$$

Uma vez que $\bar{t}_i = \sigma_{ji} n_j$ em S_σ e $\delta u_i = 0$ em S_u , então a Equação (3.1.11) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_S (\sigma_{ji} \delta u_i) n_j dS = \int_{S_\sigma} \bar{t}_i \delta u_i dS \quad (3.1.12)$$

O segundo termo do integrando da Equação (3.1.10) pode ser expresso da seguinte forma:

$$\sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \sigma_{ji} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.1.13)$$

em que o primeiro termo da expressão entre colchetes pode ser interpretado como

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.1.14)$$

e o segundo como

$$\delta \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.1.15)$$

sendo $\delta \varepsilon_{ij}$ e $\delta \omega_{ij}$ os tensores de deformação e de rotação, respectivamente, definidos em termos dos componentes dos deslocamentos virtuais. O primeiro é um tensor simétrico, ou seja, $\delta \varepsilon_{ij} = \delta \varepsilon_{ji}$, enquanto o segundo é antissimétrico, ou seja, $\delta \omega_{ij} = -\delta \omega_{ji}$. Assim,

$$\sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ji} \delta \omega_{ij} \quad (3.1.16)$$

Sabendo-se que o tensor de tensão é simétrico, ou seja, $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$, logo, $\sigma_{ji} \delta \omega_{ij} = 0$ e a Equação (3.1.16) pode ser reescrita como

$$\sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} \quad (3.1.17)$$

Por fim, substituindo-se as Equações (3.1.12) e (3.1.17) na Equação (3.1.10), chega-se à equação associada ao princípio dos deslocamentos virtuais

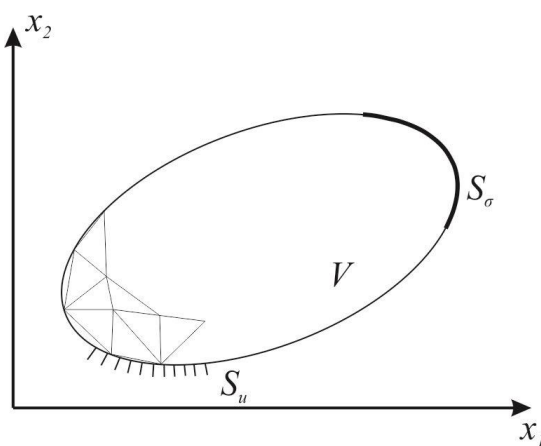
$$\int_V \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V b_i \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} \bar{t}_i \delta u_i dS \quad (3.1.18)$$

na qual o lado esquerdo representa o trabalho virtual interno, enquanto que o lado direito da mesma apresenta o trabalho virtual externo. Este princípio pode ser enunciado da seguinte forma: se um deslocamento virtual é aplicado a um corpo sujeito a um sistema de forças em equilíbrio, o trabalho virtual realizado pelas forças externas é igual ao trabalho virtual realizado pelas forças internas ao corpo.

3.2 Formulação do método dos elementos finitos para análises elásticas lineares bidimensionais

Considerando-se um problema com domínio V e contorno S , cuja malha em elementos finitos bidimensionais está ilustrada na Figura 10, com um número total de elementos igual a n_{el} , tem-se que os componentes u_1 e u_2 do campo de deslocamentos $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$ são geralmente aproximados por funções de forma, porém, a priori, diferentes funções de forma podem ser utilizadas para cada um dos componentes.

Figura 10 - Malha de elementos finitos em duas dimensões.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Existem dois graus de liberdade por nó, que correspondem aos dois componentes globais de deslocamento, então, o vetor de deslocamento nodal global pode ser escrito como

$$\mathbf{d} = \{\mathbf{d}^{(1)} \ \mathbf{d}^{(2)} \ \mathbf{d}^{(3)} \ \dots \ \mathbf{d}^{(n)}\}^T \quad (3.2.1)$$

em que $\mathbf{d}^{(p)}$ são os valores nodais dos componentes de deslocamento e podem ser expressos por

$$\mathbf{d}^{(p)} = \{d_1^{(p)} \quad d_2^{(p)}\}^T \quad (3.2.2)$$

e n é o número de nós da malha discretizada de elementos finitos. O campo de deslocamento do método dos elementos finitos pode ser expresso da seguinte forma:

$$u_i(x_1, x_2) = \sum_{p=1}^n N_p(x_1, x_2) d_i^{(p)} \quad (3.2.3)$$

em que $N_p(x_1, x_2)$ são as funções de forma. Empregando-se notação matricial, segue:

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \mathbf{N}(x_1, x_2) \mathbf{d} \quad (3.2.4)$$

em que

$$\mathbf{N}(x_1, x_2) = [\mathbf{N}^{(1)}(x_1, x_2) \quad \mathbf{N}^{(2)}(x_1, x_2) \quad \dots \quad \mathbf{N}^{(n)}(x_1, x_2)] \quad (3.2.5)$$

sendo que $\mathbf{N}^{(p)}(x_1, x_2)$ é dado por

$$\mathbf{N}^{(p)}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} N_p(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & N_p(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

3.2.1 Matriz cinemática

As deformações também podem ser expressas em termos das funções de forma e dos deslocamentos nodais. Dessa forma, a relação apresentada na Equação (2.1.23) pode ser reescrita empregando-se o operador gradiente $\boldsymbol{\partial}$, que resulta em

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12}\}^T = \boldsymbol{\partial} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (3.2.7)$$

em que a matriz cinemática \mathbf{B} é definida como

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{N} = [\boldsymbol{\partial} \mathbf{N}^{(1)} \quad \boldsymbol{\partial} \mathbf{N}^{(2)} \quad \boldsymbol{\partial} \mathbf{N}^{(3)} \quad \dots \quad \boldsymbol{\partial} \mathbf{N}^{(n)}] \quad (3.2.8)$$

sendo

$$\boldsymbol{\partial} \mathbf{N}^{(p)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_p}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_p}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_p}{\partial x_2} & \frac{\partial N_p}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

e

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

3.2.2 Princípio dos deslocamentos virtuais em notação matricial

Substituindo-se o termo à esquerda da Equação (3.1.18) pela relação constitutiva apresentada em (2.3.1), obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_V C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \bar{b}_i \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} \bar{t}_i \delta u_i dS \quad (3.2.11)$$

Empregando-se notação matricial e a matriz constitutiva de rigidez \mathbf{C} para análises elásticas lineares bidimensionais, seja para Estado Plano de Tensões ou de Deformações, tem-se

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_\sigma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad (3.2.12)$$

O vetor de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ pode ser substituído pela expressão apresentada na Equação (3.2.7), enquanto que o vetor dos deslocamentos \mathbf{u} pode ser tratado como apresentado na Equação (3.2.4), sendo assim

$$\int_V \delta \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{d} dV = \int_V \delta [\mathbf{N} \mathbf{d}]^T \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_\sigma} \delta [\mathbf{N} \mathbf{d}]^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad (3.2.13)$$

Podendo-se reescrever a Equação (3.2.13) da seguinte forma

$$\delta \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV + \delta \mathbf{d}^T \int_{S_\sigma} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad (3.2.14)$$

A Equação (3.2.14) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} \quad (3.2.15)$$

em que \mathbf{K} é conhecida como a matriz de rigidez e é dada por

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (3.2.16)$$

e \mathbf{f} é o vetor de forças expresso por

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad (3.2.17)$$

Neste caso, o primeiro termo desta soma refere-se às forças de corpo do problema analisado e pode ser denotado por $\mathbf{f}_{(\bar{\mathbf{b}})}$, enquanto que o segundo termo refere-se às forças de superfície que atuam no sistema estudado, podendo ser denotado por $\mathbf{f}_{(\bar{\mathbf{t}})}$. Por fim, como $\delta \mathbf{d}$ pode assumir qualquer valor admissível, assim, a Equação (3.2.15) resulta na seguinte expressão:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} = \mathbf{f}_{(\bar{\mathbf{b}})} + \mathbf{f}_{(\bar{\mathbf{t}})} \quad (3.2.18)$$

3.2.3 Montagem do sistema global

Para um domínio de análise discretizado em vários elementos finitos, o sistema global é definido pela matriz de rigidez global, pelos deslocamentos globais e pelas forças globais da estrutura. A matriz de rigidez global estabelece a relação entre forças e deslocamentos definidos em coordenadas globais. Estas relações podem ser expressas como um produto de matrizes

$$\mathbf{K}_g \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (3.2.19)$$

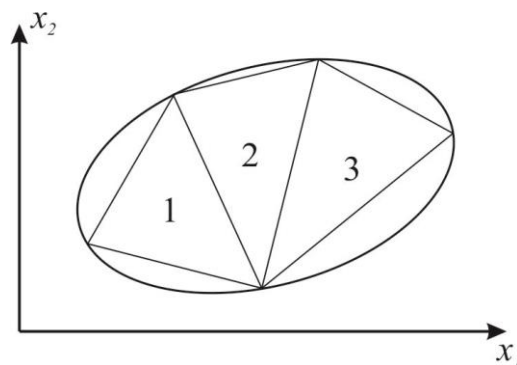
em que \mathbf{K}_g é a matriz de rigidez global. Na obtenção dos elementos da matriz de rigidez global, emprega-se o método da rigidez direta. Dessa forma, a obtenção dos coeficientes K_{ij} da matriz de rigidez global se dá pela soma das contribuições de rigidez de cada elemento que compõem o domínio de análise, levando-se em consideração as incidências cinemáticas e estáticas.

A Figura 11 apresenta um domínio discretizado em três elementos finitos bidimensionais triangulares. A matriz de rigidez global do sistema proposto pode ser expressa como

$$\mathbf{K}_g = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV = \int_{V_1} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV + \int_{V_2} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV + \int_{V_3} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (3.2.20)$$

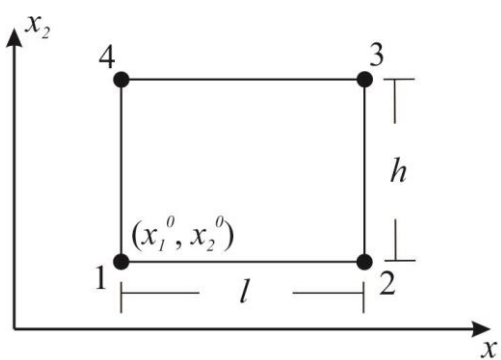
em que são somadas as contribuições de cada um dos três elementos, nos quais a estrutura é discretizada, empregando-se a propriedade da aditividade da integral. Esta propriedade também se aplica na montagem dos vetores globais de força $\mathbf{f}_{(\bar{b})}$ e $\mathbf{f}_{(\bar{t})}$. São estes vetores e a matriz resultante do método da rigidez direta que compõem o sistema global, junto com o vetor global \mathbf{d} , formado pelos deslocamentos nodais globais.

Figura 11 - Malha bidimensional com 3 elementos finitos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 12 - Elemento retangular bilinear.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

3.2.4 Elemento retangular bilinear

O elemento retangular bilinear (Q4) é composto por quatro linhas retas e quatro nós, sendo um nó em cada canto que compõem o retângulo, como mostrado na Figura 12. Esta simplificação da geometria do elemento finito é introduzida com a finalidade de facilitar a discretização do domínio de análise, a definição das condições de contorno, a avaliação da matriz de rigidez e dos vetores de força locais e a montagem do sistema global. Assim, o domínio de projeto adotado é retangular e este é discretizado em elementos retangulares, gerando uma malha estruturada. Por conseguinte, a numeração dos elementos é feita linha por

linha, iniciando-se no canto inferior esquerdo, o mesmo acontecendo para os nós da estrutura, enquanto que a numeração dos nós nos elementos é no sentido anti-horário, iniciando-se pelo canto inferior esquerdo cujas coordenadas nodais são (x_1^0, x_2^0) . As coordenadas dos demais nós podem ser obtidas a partir das coordenadas do nó 1, adicionando-se a altura e/ou a largura do elemento, conforme ilustrado na Figura 12. A Tabela 1 apresenta as coordenadas cartesianas de cada um dos quatro nós que compõem o elemento Q4.

Tabela 01 - Coordenadas reais do elemento Q4.

Nó	x_1	x_2
1	x_1^0	x_2^0
2	$x_1^0 + l$	x_2^0
3	$x_1^0 + l$	$x_2^0 + h$
4	x_1^0	$x_2^0 + h$

Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

As funções de forma para este elemento foram construídas com base no método do produto tensor. Esta abordagem baseia-se nos produtos de funções de forma inferiores e na exploração da propriedade do delta de Kronecker das funções de forma (FISH; BELYTSCHKO, 2007). Em outras palavras, as funções de forma bidimensionais foram obtidas pelo produto de funções de forma unidimensionais, levando-se em consideração o fato deste produto ser igual a um em seu respectivo nó e nula para os demais nós do elemento. As funções de forma para o elemento Q4 encontram-se na Equação (3.2.21), em que A_e é a respectiva área do elemento.

$$\begin{aligned}
 N_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{A_e} (x_1^0 + l - x_1)(x_2^0 + h - x_2) \\
 N_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{A_e} (x_1 - x_1^0)(x_2^0 + h - x_2) \\
 N_3(x_1, x_2) &= \frac{1}{A_e} (x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) \\
 N_4(x_1, x_2) &= \frac{1}{A_e} (x_1^0 + l - x_1)(x_2 - x_2^0)
 \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

A partir das funções de forma, o campo de deslocamento pode ser escrito como

$$u_1(x_1, x_2) = N_1(x_1, x_2)d_1^{(1)} + N_2(x_1, x_2)d_1^{(2)} + N_3(x_1, x_2)d_1^{(3)} + N_4(x_1, x_2)d_1^{(4)} \tag{3.2.22}$$

$$u_2(x_1, x_2) = N_1(x_1, x_2)d_2^{(1)} + N_2(x_1, x_2)d_2^{(2)} + N_3(x_1, x_2)d_2^{(3)} + N_4(x_1, x_2)d_2^{(4)}$$

Empregando-se a Equação (3.2.16) e a relação constitutiva para um Estado Plano de Tensões, Equação (2.3.7), chega-se na matriz de rigidez deste elemento, apresentada no Apêndice B.1.

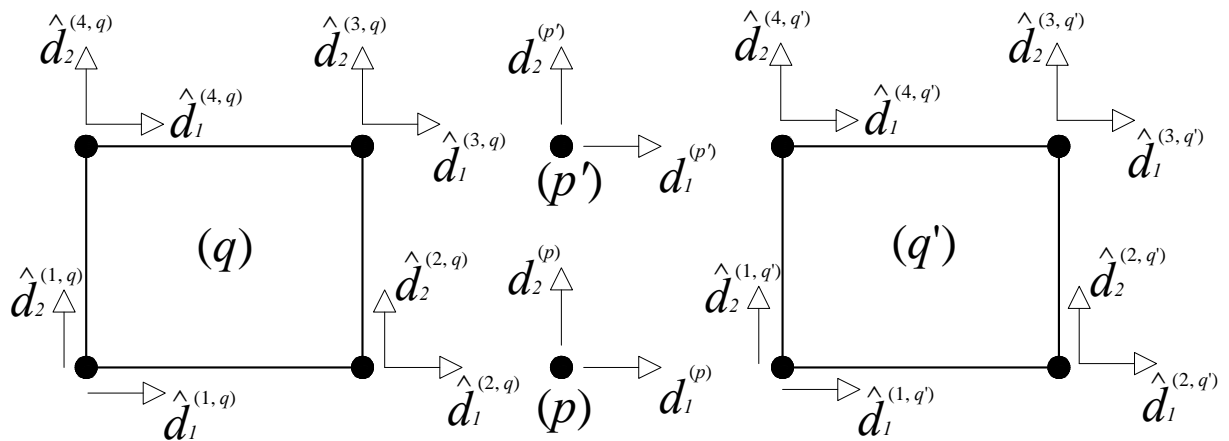
3.2.4.1 Compatibilidade cinemática

A compatibilização cinemática nada mais é do que garantir que os deslocamentos nos nós que conectam dois ou mais elementos sejam iguais. Uma vez que o campo de deslocamento para o elemento Q4 é bilinear, a conectividade por meio dos cantos de cada elemento garante que haja compatibilidade também em toda a aresta que conecta dois elementos adjacentes. A Figura 13 mostra uma representação de como a compatibilidade cinemática se dá para este tipo de elemento. Partindo da análise da Figura 13 têm-se as seguintes relações entre os elementos adjacentes q e q' :

$$\hat{d}_i^{(2,q)} = \hat{d}_i^{(1,q')} = d_i^{(p)} \quad \text{e} \quad \hat{d}_i^{(3,q)} = \hat{d}_i^{(4,q')} = d_i^{(p')} \quad (3.2.23)$$

em que $\hat{d}_i^{(\hat{p},q)}$ e $d_i^{(p)}$ são os deslocamentos associados aos graus de liberdade locais e globais, respectivamente, \hat{p} e p são identificadores local e global do nó, respectivamente, e q é o identificador do elemento finito.

Figura 13 - Representação da compatibilidade cinemática.



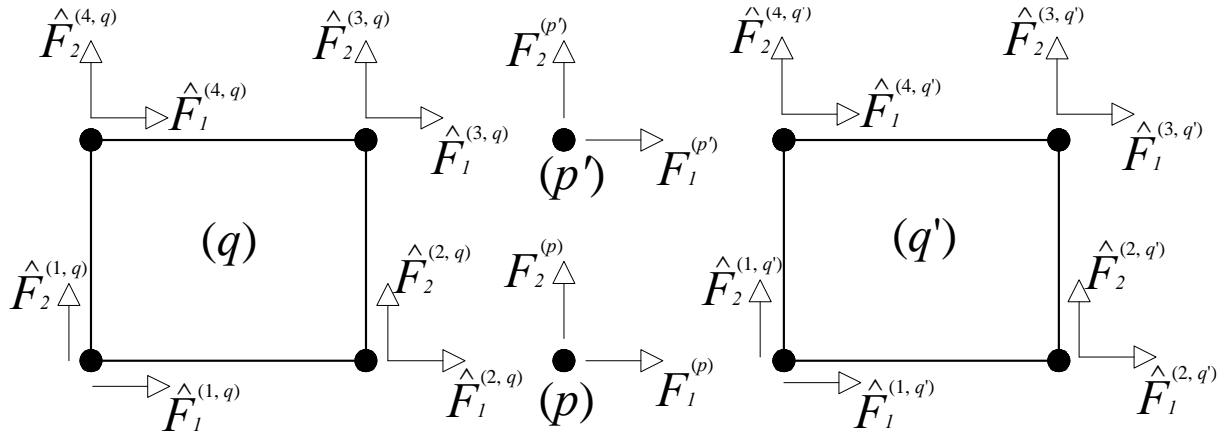
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

3.2.4.2 Compatibilidade estática

No que diz respeito à compatibilidade estática, há o envolvimento da terceira lei de Newton e a imposição do equilíbrio nos nós da malha de elementos finitos. Na

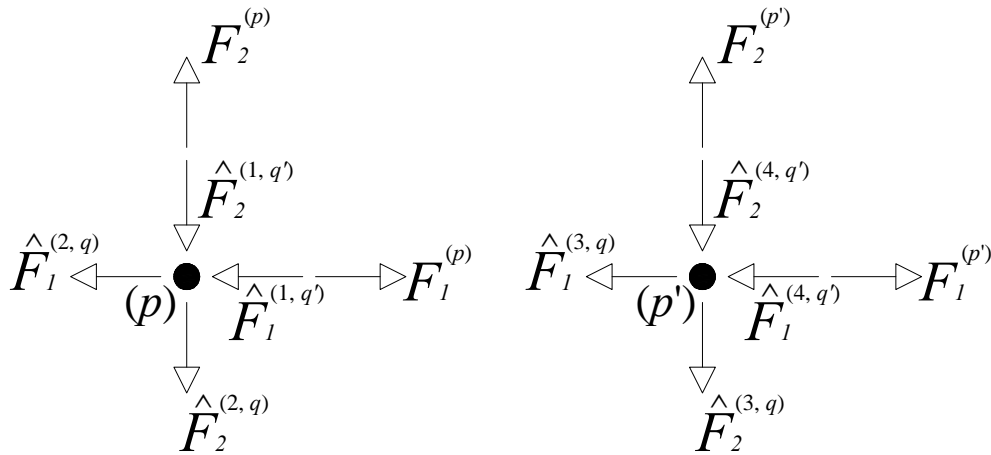
compatibilização estática, a aplicação da terceira lei de Newton e a imposição do equilíbrio estático ocorrem somente nos nós. Na Figura 14, $\hat{F}_i^{(p,q)}$ é a componente do vetor de forças local atuante no elemento e $F_i^{(p)}$ é a componente do vetor de forças global atuante no nó da malha de elementos finitos.

Figura 14 - Representação da influência da terceira lei de Newton na compatibilidade estática.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 15 - Forças atuantes nos nós p e p'.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

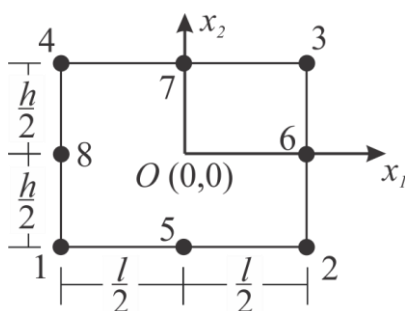
A Figura 15 ilustra as forças atuantes nos nós p e p' , decorrentes da aplicação da terceira lei de Newton e utilizadas na avaliação do equilíbrio estático de cada nó da malha de elementos finitos. Assim, a partir da análise de equilíbrio dos nós p e p' , são obtidas, respectivamente, as seguintes expressões:

$$F_i^{(2,q)} + F_i^{(1,q')} = F_i^{(p)} \tag{3.2.24}$$

$$F_i^{(3,q)} + F_i^{(4,q')} = F_i^{(p')} \tag{3.2.25}$$

Por fim, vale ressaltar que as compatibilidades cinemática e estática da formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos ocorrem exclusivamente nos nós e isto pode levar a obtenção de topologias ótimas que apresentam o padrão de tabuleiro de xadrez, instabilidade numérica que será melhor estudada no Capítulo 5 desta dissertação. Em outras palavras, estas duas compatibilizações garantidas apenas nos nós da malha de elementos finitos, quando do emprego de elementos quadrilaterais com quatro nós, levam a configurações com manufatura inviável.

Figura 16 - Elemento retangular quadrático.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

3.2.5 Elemento retangular quadrático

O elemento retangular quadrático (Q8) é também composto por quatro linhas retas, mas neste caso, as funções de forma são interpoladas por meio de oito nós, sendo quatro em cada canto e outros quatro no meio das arestas do retângulo, como mostrado na Figura 16. Neste caso, a numeração dos nós é feita no sentido anti-horário, sendo enumerados primeiro os nós dos cantos e em seguida os nós dos meios das arestas. As coordenadas dos nós podem ser escritas a partir das coordenadas do ponto de origem $O(0,0)$, e das dimensões do elemento. A Tabela 02 apresenta as coordenadas de cada nó do elemento Q8.

As funções de forma para o elemento Q8 foram obtidas por meio do método do produto tensor, assim como feito para o elemento Q4. A Equação (3.2.26) apresenta as funções de forma obtidas para cada um dos oito nós do elemento analisado, sendo $s = 2x_1/l$ e $r = 2x_2/h$.

Tabela 02 - Coordenadas reais do elemento Q8.

Nó	x_1	x_2
1	$-\frac{l}{2}$	$-\frac{h}{2}$
2	$\frac{l}{2}$	$-\frac{h}{2}$
3	$\frac{l}{2}$	$\frac{h}{2}$
4	$-\frac{l}{2}$	$\frac{h}{2}$
5	0	$-\frac{h}{2}$
6	$\frac{l}{2}$	0
7	0	$\frac{h}{2}$
8	$-\frac{l}{2}$	0

Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

$$N_1(x_1, x_2) = -\frac{1}{4}(1-s)(1-r)(1+s+r)$$

$$N_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{4}(1+s)(1-r)(1-s+r)$$

$$N_3(x_1, x_2) = -\frac{1}{4}(1+s)(1+r)(1-s-r)$$

$$N_4(x_1, x_2) = -\frac{1}{4}(1-s)(1+r)(1+s-r)$$

$$N_5(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2)$$

$$N_6(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(1+s)(1-r^2)$$

$$N_7(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r)$$

$$N_8(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(1-s)(1-r^2)$$

(3.2.26)

O campo de deslocamentos pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2) &= N_1(x_1, x_2)d_1^{(1)} + N_2(x_1, x_2)d_1^{(2)} + N_3(x_1, x_2)d_1^{(3)} + N_4(x_1, x_2)d_1^{(4)} \\
&\quad + N_5(x_1, x_2)d_1^{(5)} + N_6(x_1, x_2)d_1^{(6)} + N_7(x_1, x_2)d_1^{(7)} \\
&\quad + N_8(x_1, x_2)d_1^{(8)} \\
u_2 &= N_1(x_1, x_2)d_2^{(1)} + N_2(x_1, x_2)d_2^{(2)} + N_3(x_1, x_2)d_2^{(3)} + N_4(x_1, x_2)d_2^{(4)} \\
&\quad + N_5(x_1, x_2)d_2^{(5)} + N_6(x_1, x_2)d_2^{(6)} + N_7(x_1, x_2)d_2^{(7)} \\
&\quad + N_8(x_1, x_2)d_2^{(8)}
\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Seguindo-se os mesmos passos descritos na seção anterior, chega-se na matriz de rigidez local deste elemento, apresentada no Apêndice B.2.

4 TEORIA DE VOLUMES FINITOS

Uma técnica alternativa ao emprego do método dos elementos finitos é apresentada em Aboudi et al. (1999) e foi originalmente denominada de teoria de alta ordem (*Higher-Order Theory*). Segundo Cavalcante (2006), esta técnica emprega a média volumétrica dos diversos campos que definem o comportamento do material e impõe condições de contorno e de continuidade em termos médios entre os subvolumes (células ou subcélulas) utilizados na discretização da estrutura. Os primeiros trabalhos a tratarem desse método foram publicados no começo da década de 1990 e geralmente apresentam a teoria de alta ordem aplicada à análise de materiais funcionalmente graduados. Por exemplo, Aboudi et al. (1993) apresentaram uma formulação térmica e outra termomecânica da teoria de alta ordem com a finalidade de capturar os efeitos locais da microestrutura de materiais compósitos com matriz metálica gerados por gradientes térmicos, assim, eles empregaram uma expansão quadrática no problema térmico e uma expansão linear para o problema mecânico. Entre os anos de 1993 e 1999, este método continuou a ser desenvolvido. Pindera et al. (1995 e 1998) forneceram resumos dos diferentes estágios de desenvolvimento da teoria durante esse período. Por fim, Aboudi et al. (1999) apresentaram uma generalização para a teoria de alta ordem baseada em coordenadas cartesianas, para análise de materiais compósitos funcionalmente graduados, com o intuito de realizar um acoplamento entre micro e macroestrutura.

A teoria de volumes finitos, denominação sugerida originalmente por Bansal (2005) e Cavalcante (2006), surge a partir de uma simplificação da teoria de alta ordem. Segundo Bansal e Pindera (2002), as principais mudanças envolvem a simplificação da discretização do domínio e a substituição da média volumétrica dos campos de deslocamento e tensão por médias superficiais associadas a cada interface de uma célula. Sendo assim, esta teoria apresenta algumas semelhanças com o Método dos Volumes Finitos aplicado na Mecânica de Flúidos e apresentado em Versteeg e Malalasekera (1995), razão pela qual foi sugerida a denominação Teoria de Volumes Finitos para este método.

A teoria de volumes finitos e o método dos volumes finitos apresentam, basicamente, dois pontos em comum. Um deles refere-se ao fato de ambos partirem de uma abordagem Newtoniana na concepção do modelo. Diferentemente do método dos elementos finitos, que utiliza uma abordagem lagrangiana na elaboração das formulações para análises mecânicas. O segundo ponto refere-se ao fato das condições de contorno em ambos os métodos, teoria de volumes finitos e método dos elementos finitos, serem atribuídas de forma semelhante.

Os primeiros trabalhos que levaram ao desenvolvimento dessa nova técnica datam desde o ano de 2002. O primeiro trabalho a sugerir esta simplificação à teoria de alta ordem foi Bansal e Pindera (2002), seguido por Cavalcante (2006) e Cavalcante et al. (2007a,b) que contribuíram com uma formulação paramétrica bidimensional mais apropriada para a análise termomecânica de estruturas com contorno curvo. Em seguida, Gattu et al. (2008) e Khatam e Pindera (2009 e 2010) seguiram Cavalcante et al. (2007a,b) e introduziram um mapeamento paramétrico à versão homogeneizada da teoria de volumes finitos, conhecida como FVDAM (*finite-volume direct averaging micromechanics*). A generalização para a versão homogeneizada da teoria de volumes finitos para materiais periódicos submetidos a deformações finitas foi apresentada por Cavalcante e Pindera (2014a,b). De forma semelhante, Cavalcante e Pindera (2012a,b) apresentaram a teoria generalizada de volumes finitos, que incorpora, além dos deslocamentos médios, rotações e curvaturas à formulação mecânica para análise elástica de sólidos.

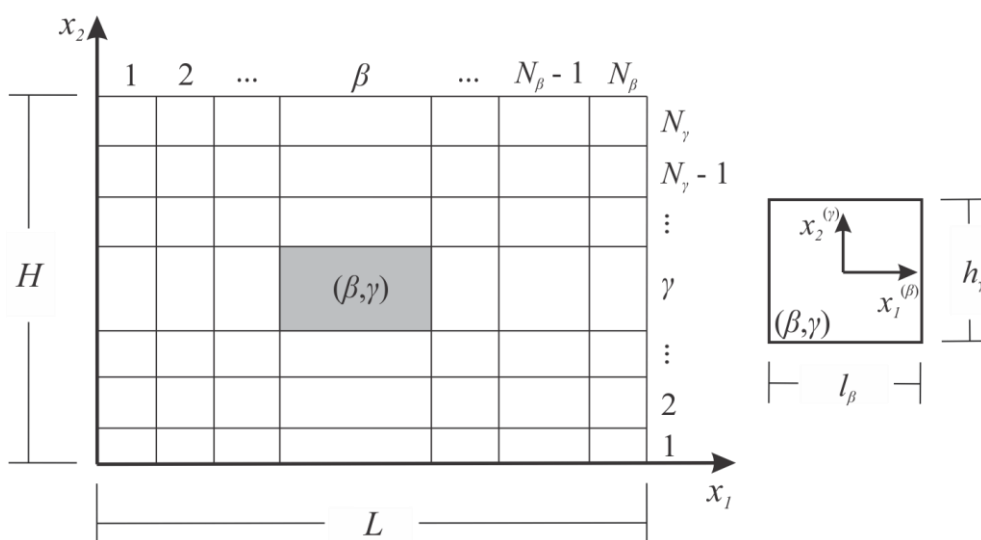
Basicamente, Cavalcante e Pindera (2012a,b) generalizaram a teoria de volumes finitos para materiais funcionalmente graduados baseada em uma discretização do domínio de análise em subvolumes retangulares e em uma representação quadrática incompleta do campo de deslocamentos, originalmente desenvolvida por Bansal e Pindera (2003), pela adição de termos de ordem superior. A generalização da teoria é alcançada de forma sistêmica para diferentes ordens, assim, a teoria de volumes finitos de ordem zero corresponde à versão original, apresentada por Bansal e Pindera (2003). Cada ordem corresponde a um aumento na complexidade do campo de deslocamentos acompanhado pela adição de quantidades cinemáticas avaliadas em termos médios e baseadas em considerações da teoria da elasticidade, as quais introduzem uma significância mecânica ao problema (CAVALCANTE; PINDERA, 2012a). Assim, a teoria de volumes finitos de primeira ordem incorpora à versão original as rotações, enquanto que a teoria de segunda ordem incorpora além das rotações, as curvaturas.

Este trabalho visa contribuir com a aplicação da teoria generalizada cartesiana de volumes finitos na otimização topológica de estruturas contínuas. Tradicionalmente, o método para análise mecânica elástica empregado na otimização topológica é o método dos elementos finitos. Geralmente, a aplicação deste método leva ao surgimento de problemas numéricos indesejáveis na estrutura otimizada, entre eles podem ser destacados: o efeito do padrão xadrez e a dependência de malha. Além do mais, muitas soluções alternativas, que veem sendo propostas por diferentes autores para superar estes problemas, têm levado a um maior

custo computacional ou modificado o problema de otimização de tal maneira que a solução obtida muitas vezes não corresponde à solução ótima do problema, ver Jang et al. (2003), Pereira et al. (2010), Araujo et al. (2017) e Balogh e Lógó (2017).

Grande parte dos problemas numéricos na otimização topológica surge em virtude das condições de continuidade cinemática e estática serem estabelecidas nos nós que conectam dois ou mais elementos finitos. Em certos casos, após o processo de otimização, os elementos, que formam a estrutura ótima, podem estar conectados entre si de uma maneira semelhante a um tabuleiro de xadrez, resultando numa estrutura com uma rigidez artificial, além de inviabilizar a manufatura da mesma. Por outro lado, a teoria de volumes finitos apresenta algumas vantagens em relação ao método dos elementos finitos, entre elas, há o fato das condições de continuidade serem estabelecidas nas interfaces dos subvolumes adjacentes. Sendo assim, topologias ótimas obtidas pela aplicação desta teoria não apresentam o efeito do padrão xadrez, viabilizando a manufatura das topologias obtidas, ver Araujo et al. (2017).

Figura 17 - Discretização do domínio de análise e o sistema de coordenadas globais (à esquerda) e o subvolume e o sistema de coordenadas locais (à direita).



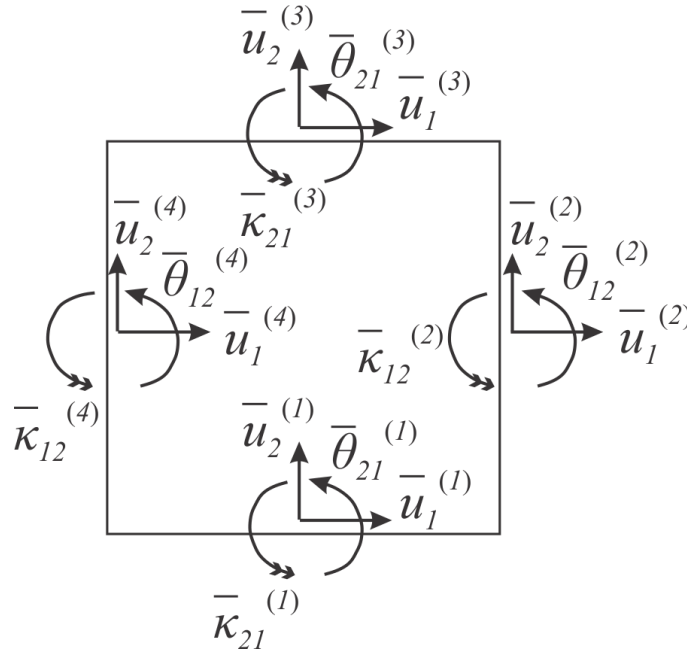
Fonte: Adaptado de Cavalcante e Pindera (2012a).

4.1 Formulação generalizada da teoria de volumes finitos para análise mecânica de sólidos

A formulação apresentada aqui tem como base a formulação generalizada cartesiana bidimensional da teoria de volumes finitos apresentada em Cavalcante e Pindera (2012a). A Figura 17 apresenta o domínio de referência adotado, neste caso, é considerado um domínio retangular ocupando o plano $x_1 - x_2$ com $0 \leq x_1 \leq L$ e $0 \leq x_2 \leq H$. Este domínio é

discretizado em N_β subvolumes na horizontal e N_γ subvolumes na vertical designados pelos pares ordenados (β, γ) , como mostrado na Figura 17. As dimensões dos subvolumes são expressas por l_β e h_γ (para $\beta = 1, \dots, N_\beta$ e $\gamma = 1, \dots, N_\gamma$) ao longo dos eixos x_1 e x_2 , respectivamente. Cada subvolume pode também ser denotado por um único número inteiro $q = \beta + (\gamma - 1)N_\beta$, sendo que o número total de subvolumes na estrutura discretizada é dado por $N_q = N_\beta N_\gamma$.

Figura 18 - Quantidades cinemáticas avaliadas em termos médios nas faces do subvolume q .



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

O campo de deslocamentos de um subvolume (β, γ) no plano $x_1 - x_2$ é aproximado por polinômios de segundo de grau, expresso em função das coordenadas locais de cada subvolume (CAVALCANTE; PINDER, 2012a). Estes polinômios podem ser expressos por

$$\begin{aligned}
 u_i^{(\beta, \gamma)} = & W_{i(00)}^{(\beta, \gamma)} + x_1^{(\beta)} W_{i(10)}^{(\beta, \gamma)} + x_2^{(\gamma)} W_{i(01)}^{(\beta, \gamma)} + x_1^{(\beta)} x_2^{(\gamma)} W_{i(11)}^{(\beta, \gamma)} + \frac{1}{2} \left(3x_1^{(\beta)^2} - \frac{l_\beta^2}{4} \right) W_{i(20)}^{(\beta, \gamma)} \\
 & + \frac{1}{2} \left(3x_2^{(\gamma)^2} - \frac{h_\gamma^2}{4} \right) W_{i(02)}^{(\beta, \gamma)} + \frac{1}{2} \left(3x_1^{(\beta)^2} - \frac{l_\beta^2}{4} \right) x_2^{(\gamma)} W_{i(21)}^{(\beta, \gamma)} \\
 & + \frac{1}{2} \left(3x_2^{(\gamma)^2} - \frac{h_\gamma^2}{4} \right) x_1^{(\beta)} W_{i(12)}^{(\beta, \gamma)} + \frac{1}{4} \left(3x_1^{(\beta)^2} - \frac{l_\beta^2}{4} \right) \left(3x_2^{(\gamma)^2} - \frac{h_\gamma^2}{4} \right) W_{i(22)}^{(\beta, \gamma)}
 \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

em que $i = 1, 2$ e $W_{i(mn)}^{(\beta, \gamma)}$ são os coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos. Em cada subvolume existem um total de 18 coeficientes a serem determinados. Estes coeficientes são expressos em função das seguintes quantidades físicas: deslocamentos, rotações e

curvaturas avaliadas em termos médios nas faces dos subvolumes. Assim, são determinadas as matrizes de rigidez generalizadas (CAVALCANTE; PINDERA, 2012a). A Figura 18 ilustra essas quantidades associadas a cada face do subvolume (β, γ) , em que a convenção adotada para indexação se inicia na face inferior e prossegue no sentido anti-horário.

4.1.1 Variáveis cinemáticas em termos médios nas faces

Assim como apresentado na formulação de Bansal e Pindera (2003), os valores médios dos componentes do campo de deslocamentos nas faces são avaliados pelas seguintes expressões:

$$\bar{u}_i^{(1,3)} = \frac{1}{l_\beta} \int_{-l_\beta/2}^{l_\beta/2} u_i \left(x_1^{(\beta)}, \mp \frac{h_\gamma}{2} \right) dx_1^{(\beta)}$$

$$\bar{u}_i^{(2,4)} = \frac{1}{h_\gamma} \int_{-h_\gamma/2}^{h_\gamma/2} u_i \left(\pm \frac{l_\beta}{2}, x_2^{(\gamma)} \right) dx_2^{(\gamma)}$$
(4.1.2)

em que o sobrescrito indica o número da face do subvolume, conforme ilustrado na Figura 18. O próximo passo refere-se à compatibilização das variáveis cinemáticas em termos médios, a qual é motivada pelas condições de continuidade pontual nas faces entre subvolumes adjacentes (CAVALCANTE; PINDERA, 2012a). Assim, o deslocamento $u_2 \left(x_1^{(\beta)}, x_2^{(\gamma)} \right)$ na terceira face do subvolume (β, γ) deve ser equivalente ao deslocamento na primeira face do subvolume $(\beta, \gamma + 1)$ para que haja continuidade pontual. Além do mais, as derivadas de primeira e segunda ordem também devem ser iguais nessas faces, garantindo, assim, a continuidade pontual nas interfaces comuns entre os subvolumes. A compatibilização cinemática na terceira e primeira face de cada subvolume na estrutura discretizada se traduz em

$$\bar{u}_2^{(3)} \left(x_1^{(\beta)}, \frac{h_\gamma}{2} \right) = \bar{u}_2^{(1)} \left(x_1^{(\beta)}, -\frac{h_{\gamma+1}}{2} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2^{(3)} \left(x_1^{(\beta)}, \frac{h_\gamma}{2} \right)}{\partial x_1^{(\beta)}} = \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)} \left(x_1^{(\beta)}, -\frac{h_{\gamma+1}}{2} \right)}{\partial x_1^{(\beta)}}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_2^{(3)} \left(x_1^{(\beta)}, \frac{h_\gamma}{2} \right)}{\partial x_1^{2(\beta, \gamma)}} = \frac{\partial^2 \bar{u}_2^{(1)} \left(x_1^{(\beta)}, -\frac{h_{\gamma+1}}{2} \right)}{\partial x_1^{2(\beta)}}$$
(4.1.3)

Da mesma forma, o deslocamento $u_1(x_1^{(\beta)}, x_2^{(\gamma)})$ também deve ser compatibilizado entre a segunda e a quarta face de subvolumes adjacentes para que haja continuidade pontual. A seguir, são definidos os componentes de rotação em termos médios

$$\bar{\theta}_{21}^{(1,3)} = \frac{1}{l_\beta} \int_{-l_\beta/2}^{l_\beta/2} \frac{\partial u_2(x_1^{(\beta)}, \mp \frac{h_\gamma}{2})}{\partial x_1^{(\beta)}} dx_1^{(\beta)} \quad (4.1.4)$$

$$\bar{\theta}_{12}^{(2,4)} = \frac{1}{h_\gamma} \int_{-h_\gamma/2}^{h_\gamma/2} \frac{\partial u_1(\pm \frac{l_\beta}{2}, x_2^{(\gamma)})}{\partial x_2^{(\gamma)}} dx_2^{(\gamma)}$$

e, finalmente, os componentes de curvatura em termos médios podem ser definidos como

$$\bar{\kappa}_{21}^{(1,3)} = \frac{1}{l_\beta} \int_{-l_\beta/2}^{l_\beta/2} \frac{\partial^2 u_2(x_1^{(\beta)}, \mp \frac{h_\gamma}{2})}{\partial x_1^{2(\beta)}} dx_1^{(\beta)} \quad (4.1.5)$$

$$\bar{\kappa}_{12}^{(2,4)} = \frac{1}{h_\gamma} \int_{-h_\gamma/2}^{h_\gamma/2} \frac{\partial^2 u_1(\pm \frac{l_\beta}{2}, x_2^{(\gamma)})}{\partial x_2^{2(\gamma)}} dx_2^{(\gamma)}$$

Substituindo-se os componentes do campo de deslocamentos, apresentados na Equação (4.1.1), nas Equações (4.1.2), (4.1.4) e (4.1.5) são obtidas 16 expressões para os deslocamentos, rotações e curvaturas médias nas faces de um subvolume. Por sua vez, essas expressões são dadas em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos. As expressões podem ser organizadas em notação matricial da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\kappa}}^{(q)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)} \begin{bmatrix} \mathbf{W}^{(q)} \\ \mathbf{W}_{\nabla}^{(q)} \\ \mathbf{W}_{\nabla^2}^{(q)} \end{bmatrix} + \mathbf{a}_{(16 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \quad (4.1.6)$$

em que $\bar{\mathbf{u}}^{(q)} = [\bar{u}_1^{(q,1)}, \bar{u}_2^{(q,1)}, \bar{u}_1^{(q,2)}, \bar{u}_2^{(q,2)}, \bar{u}_1^{(q,3)}, \bar{u}_2^{(q,3)}, \bar{u}_1^{(q,4)}, \bar{u}_2^{(q,4)}]^T$ é o vetor local formado pelos deslocamentos médios nas faces de um subvolume genérico q , $\bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} = [\bar{\theta}_{21}^{(q,1)}, \bar{\theta}_{12}^{(q,2)}, \bar{\theta}_{21}^{(q,3)}, \bar{\theta}_{12}^{(q,4)}]^T$ é o vetor local formado pelas rotações médias nas faces do subvolume genérico q , $\bar{\boldsymbol{\kappa}}^{(q)} = [\bar{\kappa}_{21}^{(q,1)}, \bar{\kappa}_{12}^{(q,2)}, \bar{\kappa}_{21}^{(q,3)}, \bar{\kappa}_{12}^{(q,4)}]^T$ é vetor formado pelas curvaturas médias nas faces do subvolume genérico q , $\mathbf{W}^{(q)} =$

$\left[W_{1(10)}^{(q)}, W_{1(01)}^{(q)}, W_{1(20)}^{(q)}, W_{1(02)}^{(q)}, W_{2(10)}^{(q)}, W_{2(01)}^{(q)}, W_{2(20)}^{(q)}, W_{2(02)}^{(q)} \right]^T$ é o vetor composto pelos coeficientes de primeira e segunda ordem e que estão diretamente relacionados à versão de ordem zero da formulação generalizada da teoria de volumes finitos, $\mathbf{W}_{\nabla}^{(q)} = \left[W_{1(11)}^{(q)}, W_{2(11)}^{(q)}, W_{1(21)}^{(q)}, W_{2(12)}^{(q)} \right]^T$ é o vetor formado pelos coeficientes cruzados de primeira e segunda ordem e que são incorporados para obtenção da versão de primeira ordem da formulação generalizada da teoria de volumes finitos, $\mathbf{W}_{\nabla^2}^{(q)} = \left[W_{1(12)}^{(q)}, W_{2(21)}^{(q)}, W_{1(22)}^{(q)}, W_{2(22)}^{(q)} \right]^T$ é o vetor composto pelos coeficientes cruzados de primeira e segunda ordem e são incorporados na obtenção da formulação de segunda ordem da teoria de volumes finitos e $\mathbf{W}_{(00)}^{(q)} = \left[W_{1(00)}^{(q)}, W_{2(00)}^{(q)} \right]^T$ é o vetor composto pelos coeficientes de ordem zero. As matrizes $\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)}$ e $\mathbf{a}_{(16 \times 2)}^{(q)}$ encontram-se definidas no Apêndice C.

O vetor composto pelos coeficientes de ordem superior pode ser escrito em função do vetor composto pelas variáveis cinemáticas e do vetor formado pelos coeficientes de ordem zero da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^{(q)} \\ \mathbf{W}_{\nabla}^{(q)} \\ \mathbf{W}_{\nabla^2}^{(q)} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{k}}^{(q)} \end{bmatrix} - \left(\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(16 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \quad (4.1.7)$$

4.1.2 Variáveis estáticas em termos médios nas faces

Agora, é necessário avaliar os valores dos componentes do vetor formado pelas variáveis estáticas, que atuam em termos médios nas faces do subvolume. Seguindo Cavalcante e Pindera (2012a), inicialmente, definem-se os componentes de tração em termos médios em cada uma das quatro faces do subvolume, os quais podem ser expressos como

$$\begin{aligned} \bar{t}_i^{(1,3)} &= \frac{1}{l_\beta} \int_{-l_\beta/2}^{l_\beta/2} t_i \left(x_1^{(\beta)}, \mp \frac{h_\gamma}{2} \right) dx_1^{(\beta)} \\ \bar{t}_i^{(2,4)} &= \frac{1}{h_\gamma} \int_{-h_\gamma/2}^{h_\gamma/2} t_i \left(\pm \frac{l_\beta}{2}, x_2^{(\gamma)} \right) dx_2^{(\gamma)} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

As trações médias nas faces estão relacionadas com as tensões atuantes nos subvolumes, que podem ser determinadas pela relação de Cauchy, apresentada na Equação

(2.2.7). Como se trata de uma discretização retangular do domínio de análise, os vetores unitários normais para cada face de um subvolumen são expressos por $\mathbf{n} = [\pm 1, 0]$ ou $\mathbf{n} = [0, \pm 1]$ (CAVALCANTE; PINDER, 2012a). Assim, os componentes de tração em termos médios nas faces são dados por

$$\begin{aligned}\bar{t}_1^{(1,3)}(x_1^{(\beta)}) &= \mp \sigma_{12} \left(x_1^{(\beta)}, \mp \frac{h_\gamma}{2} \right) \\ \bar{t}_2^{(1,3)}(x_1^{(\beta)}) &= \mp \sigma_{22} \left(x_1^{(\beta)}, \mp \frac{h_\gamma}{2} \right) \\ \bar{t}_1^{(2,4)}(x_2^{(\gamma)}) &= \pm \sigma_{11} \left(\pm \frac{l_\beta}{2}, x_2^{(\gamma)} \right) \\ \bar{t}_2^{(2,4)}(x_2^{(\gamma)}) &= \pm \sigma_{12} \left(\pm \frac{l_\beta}{2}, x_2^{(\gamma)} \right)\end{aligned}\tag{4.1.9}$$

O próximo passo surge da necessidade de se garantir que os componentes de tração devem ser contínuos em faces comuns entre dois subvolumes adjacentes. Como no caso das variáveis cinemáticas, as derivadas de primeira e segunda ordem devem ser equivalentes para que as condições de continuidade pontual sejam atendidas. Sendo assim, para trações normais atuando na terceira face do subvolumen (β, γ) e na primeira face do subvolumen $(\beta, \gamma + 1)$, deve-se observar $\bar{t}_2^{(3)}(x_1^{(\beta)})|^{(\beta, \gamma)} + \bar{t}_2^{(1)}(x_1^{(\beta)})|^{(\beta, \gamma + 1)} = 0$, ou

$$\begin{aligned}\sigma_{22} \left(x_1^{(\beta)}, \frac{h_\gamma}{2} \right) &= \sigma_{22} \left(x_1^{(\beta)}, -\frac{h_{\gamma+1}}{2} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{22} \left(x_1^{(\beta)}, \frac{h_\gamma}{2} \right)}{\partial x_1^{(\beta)}} &= \frac{\partial \sigma_{22} \left(x_1^{(\beta)}, -\frac{h_{\gamma+1}}{2} \right)}{\partial x_1^{(\beta)}} \\ \frac{\partial^2 \sigma_{22} \left(x_1^{(\beta)}, \frac{h_\gamma}{2} \right)}{\partial x_1^{2(\beta)}} &= \frac{\partial^2 \sigma_{22} \left(x_1^{(\beta)}, -\frac{h_{\gamma+1}}{2} \right)}{\partial x_1^{2(\beta)}}\end{aligned}\tag{4.1.10}$$

Além do mais, deve-se também garantir a continuidade pontual entre os componentes normais de tração entre a segunda e a quarta face.

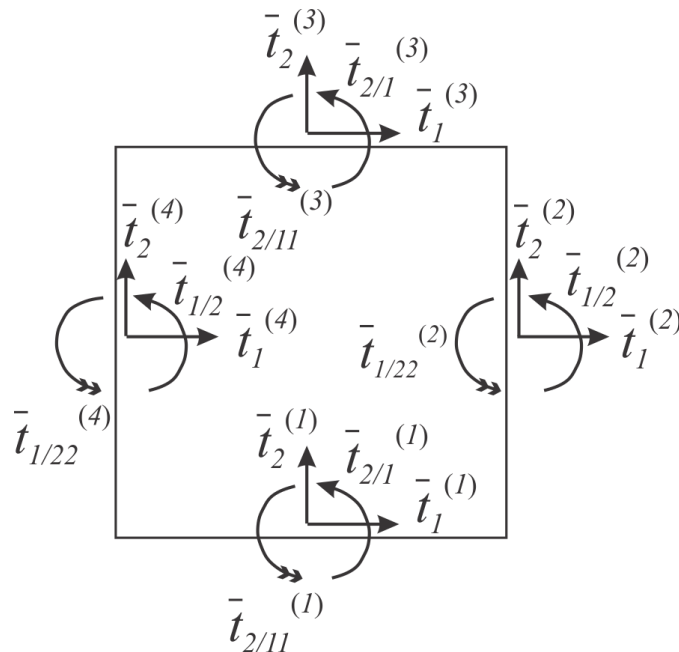
Uma vez que a representação do campo de deslocamentos utiliza coeficientes de ordem superior, existe também a necessidade de garantir a continuidade interfacial das derivadas primeira e segunda dos componentes de tração entre subvolumes adjacentes,

conforme apresentado na Equação (4.1.10). Devido a representação do campo de deslocamentos escolhida, somente a continuidade das derivadas em termos médios dos componentes de tração normal é satisfeita (CAVALCANTE; PINDERA, 2012a). As derivadas dos componentes de tração normal em termos médios são definidas por

$$\begin{aligned} \bar{t}_{2/1}^{(1,3)} &= \frac{1}{l_\beta} \int_{-l_\beta/2}^{l_\beta/2} \frac{\partial t_2 \left(x_1^{(\beta)}, \mp \frac{h_\gamma}{2} \right)}{\partial x_1^{(\beta)}} dx_1^{(\beta)} \\ \bar{t}_{1/2}^{(2,4)} &= \frac{1}{h_\gamma} \int_{-h_\gamma/2}^{h_\gamma/2} \frac{\partial t_1 \left(\pm \frac{l_\beta}{2}, x_2^{(\gamma)} \right)}{\partial x_2^{(\gamma)}} dx_2^{(\gamma)} \\ \bar{t}_{2/11}^{(1,3)} &= \frac{1}{l_\beta} \int_{-l_\beta/2}^{l_\beta/2} \frac{\partial^2 t_2 \left(x_1^{(\beta)}, \mp \frac{h_\gamma}{2} \right)}{\partial x_1^{2(\beta)}} dx_1^{(\beta)} \\ \bar{t}_{1/22}^{(2,4)} &= \frac{1}{h_\gamma} \int_{-h_\gamma/2}^{h_\gamma/2} \frac{\partial^2 t_1 \left(\pm \frac{l_\beta}{2}, x_2^{(\gamma)} \right)}{\partial x_2^{2(\gamma)}} dx_2^{(\gamma)} \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

A Figura 19 ilustra as variáveis estáticas avaliadas em termos médios nas faces do subvolume e que são empregadas na presente formulação.

Figura 19 - Quantidades estáticas avaliadas em termos médios nas faces do subvolume q .



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Considerando-se um material elástico linear, tem-se a lei Hooke generalizada, apresentada na Equação (2.3.1). Assim, o tensor de tensões do subvolume (β, γ) pode ser obtido pela seguinte relação:

$$\sigma_{ij}^{(\beta, \gamma)} = C_{ijkl}^{(\beta, \gamma)} \varepsilon_{kl}^{(\beta, \gamma)} \quad (4.1.12)$$

em que $C_{ijkl}^{(\beta, \gamma)}$ são os elementos do tensor de rigidez do material que preenche o subvolume e $\varepsilon_{kl}^{(\beta, \gamma)}$ são os componentes do tensor de deformação, que podem ser obtidos substituindo-se o campo de deslocamentos, apresentado na Equação (4.1.1), nas relações cinemáticas, apresentadas na Equação (2.1.23). Dessa forma, os componentes de tensão podem ser escritos em função dos coeficientes desconhecidos $W_{i(mn)}^{(\beta, \gamma)}$ a partir da Equação (4.1.12) e, por sua vez, as variáveis estáticas podem ser obtidas mediante a substituição dos componentes de tensão nas Equações (4.1.9) e (4.1.11). Conseqüentemente, chega-se em 16 expressões em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos. Estas expressões podem ser organizadas matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla^2}^{(q)} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{(16 \times 16)}^{(q)} \begin{bmatrix} \mathbf{W}^{(q)} \\ \mathbf{W}_{\nabla}^{(q)} \\ \mathbf{W}_{\nabla^2}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (4.1.13)$$

em que $\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = [\bar{t}_1^{(q,1)}, \bar{t}_2^{(q,1)}, \bar{t}_1^{(q,2)}, \bar{t}_2^{(q,2)}, \bar{t}_1^{(q,3)}, \bar{t}_2^{(q,3)}, \bar{t}_1^{(q,4)}, \bar{t}_2^{(q,4)}]^T$ é o vetor local formado pelas trações médias atuantes nas faces de um subvolume, $\bar{\mathbf{t}}_{\nabla}^{(q)} = [\bar{t}_{2/1}^{(q,1)}, \bar{t}_{1/2}^{(q,2)}, \bar{t}_{2/1}^{(q,3)}, \bar{t}_{1/2}^{(q,4)}]^T$ é o vetor local formado pelas derivadas primeiras dos componentes normais das trações médias atuantes nas faces de um subvolume e $\bar{\mathbf{t}}_{\nabla^2}^{(q)} = [\bar{t}_{2/11}^{(q,1)}, \bar{t}_{1/22}^{(q,2)}, \bar{t}_{2/11}^{(q,3)}, \bar{t}_{1/22}^{(q,4)}]^T$ é o vetor local formado pelas derivadas segundas dos componentes normais das trações médias atuantes nas faces do subvolume. A matriz $\mathbf{B}_{(16 \times 16)}^{(q)}$ encontra-se definida no apêndice C.

Substituindo-se a Equação (4.1.7) na Equação (4.1.13), os coeficientes de ordem superior são descartados, deixando-se o vetor local de variáveis estáticas em função do vetor local de variáveis cinemáticas e do vetor composto pelos coeficientes de ordem zero, conforme mostrado na Equação (4.1.14).

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla^2}^{(q)} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{(16 \times 16)}^{(q)} \left(\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\kappa}}^{(q)} \end{bmatrix} - \mathbf{B}_{(16 \times 16)}^{(q)} \left(\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(16 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \quad (4.1.14)$$

4.1.3 Equilíbrio local no subvolume

Na ausência de forças de corpo atuando em um subvolume, a satisfação das condições de equilíbrio é alcançada a partir da seguinte expressão:

$$\int_{S_q} \sigma_{ji} n_j dS - \int_{S_q} t_i dS - \int_{-l_\beta/2}^{l_\beta/2} t_i^{(1)} dx_1^{(\beta)} + \int_{-h_\gamma/2}^{h_\gamma/2} t_i^{(2)} dx_2^{(\gamma)} + \int_{-l_\beta/2}^{l_\beta/2} t_i^{(3)} dx_1^{(\beta)} + \int_{-h_\gamma/2}^{h_\gamma/2} t_i^{(4)} dx_2^{(\gamma)} = 0 \quad (4.1.15)$$

ou, partindo-se da definição adotada para trações avaliadas em termos médios nas faces do subvolume, a Equação (4.1.15) pode ser reescrita como

$$l_\beta \bar{t}_i^{(1)} + h_\gamma \bar{t}_i^{(2)} + l_\beta \bar{t}_i^{(3)} + h_\gamma \bar{t}_i^{(4)} = 0 \quad (4.1.16)$$

Esta expressão pode ainda ser reescrita da seguinte forma em notação matricial:

$$\sum_{p=1}^4 \bar{\mathbf{t}}^{(q,p)} L_p^{(q)} = \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \quad (4.1.17)$$

em que $L_1^{(q)} = l_\beta$, $L_2^{(q)} = h_\gamma$, $L_3^{(q)} = l_\beta$ e $L_4^{(q)} = h_\gamma$ são os comprimentos das faces de um subvolume genérico q , enquanto $\bar{\mathbf{t}}^{(q,p)}$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q,p)} = \mathbf{B}_{(2 \times 16)}^{(q,p)} \left(\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} - \mathbf{B}_{(2 \times 16)}^{(q,p)} \left(\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(16 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \quad (4.1.18)$$

em que $\mathbf{B}_{(2 \times 16)}^{(q,p)}$ são submatrizes da matriz $\mathbf{B}_{(16 \times 16)}^{(q)}$, que seleciona os elementos da matriz que estão relacionados as trações médias atuantes na face p do subvolume q .

Substituindo-se os vetores médios de trações atuantes nas faces, apresentado na Equação (4.1.18), na equação de equilíbrio local de um subvolume, Equação (4.1.17), resulta a seguinte expressão:

$$\left(\sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 16)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) \left(\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{k}}^{(q)} \end{bmatrix} = \left(\sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 16)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) \left(\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(16 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \quad (4.1.19)$$

4.1.4) Montagem da matriz de rigidez local

A partir da Equação (4.1.19), pode-se isolar o vetor formado pelos coeficientes de ordem zero. Dessa forma, o vetor $\mathbf{W}_{(00)}^{(q)}$ pode ser escrito em função do vetor local formado pelas variáveis cinemáticas, gerando:

$$\mathbf{W}_{(00)}^{(q)} = \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 16)}^{(q)} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\kappa}}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (4.1.20)$$

em que

$$\bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 16)}^{(q)} = \left[\left(\sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 16)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) (\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)})^{-1} \mathbf{a}_{(16 \times 2)}^{(q)} \right]^{-1} \left(\sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 16)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) (\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)})^{-1} \quad (4.1.21)$$

Inserindo a Equação (4.1.20) na Equação (4.1.7), pode-se chegar ao seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^{(q)} \\ \mathbf{W}_{\nabla}^{(q)} \\ \mathbf{W}_{\nabla^2}^{(q)} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}_{(16 \times 16)}^{(q)} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\kappa}}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (4.1.22)$$

em que

$$\bar{\mathbf{A}}_{(16 \times 16)}^{(q)} = (\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)})^{-1} - (\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)})^{-1} \mathbf{a}_{(16 \times 2)}^{(q)} \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 16)}^{(q)} \quad (4.1.23)$$

Assim, os valores dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos podem ser obtidos, desde que os valores numéricos para o vetor formado pelas variáveis cinemáticas avaliadas em termos médios nas faces de um subvolume sejam conhecidos. Substituindo-se as Equações (4.1.20) e (4.1.22) na Equação (4.1.14), obtém-se um sistema de equações lineares que relacionam as variáveis estáticas com as variáveis cinemáticas dentro de um subvolume. Esse sistema de equações pode ser escrito da seguinte forma em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla^2}^{(q)} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{(16 \times 16)}^{(q)} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\kappa}}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (4.1.24)$$

em que $\mathbf{K}_{(16 \times 16)}^{(q)} = \mathbf{B}_{(16 \times 16)}^{(q)} \bar{\mathbf{A}}_{(16 \times 16)}^{(q)}$ é a matriz de rigidez local de um subvolume genérico q .

4.1.5 Montagem da matriz de rigidez global

Assim como no método dos elementos finitos, a montagem da matriz de rigidez global se dá pela soma das contribuições de todas as partes nas quais a estrutura é discretizada. Este procedimento é tratado na literatura como método da rigidez direta. Dessa forma, a montagem

do sistema global é o mecanismo responsável por estabelecer a conectividade entre os diversos subvolumes que compõem a estrutura como um todo, por meio da imposição das condições de continuidade cinemática e estática nas interfaces compartilhadas por dois subvolumes adjacentes. Segundo Cavalcante e Pindera (2012a), as condições de continuidade em termos médios das variáveis cinemáticas, que compreendem os deslocamentos, as rotações e as curvaturas, são dadas por

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_i^{(3)} \Big|^{(\beta,\gamma)} &= \bar{u}_i^{(1)} \Big|^{(\beta,\gamma+1)} & \text{e} & \quad \bar{u}_i^{(2)} \Big|^{(\beta,\gamma)} = \bar{u}_i^{(4)} \Big|^{(\beta+1,\gamma)} \\
 \bar{\theta}_{21}^{(3)} \Big|^{(\beta,\gamma)} &= \bar{\theta}_{21}^{(1)} \Big|^{(\beta,\gamma+1)} & \text{e} & \quad \bar{\theta}_{12}^{(2)} \Big|^{(\beta,\gamma)} = \bar{\theta}_{12}^{(4)} \Big|^{(\beta+1,\gamma)} \\
 \bar{\kappa}_{21}^{(3)} \Big|^{(\beta,\gamma)} &= \bar{\kappa}_{21}^{(1)} \Big|^{(\beta,\gamma+1)} & \text{e} & \quad \bar{\kappa}_{12}^{(2)} \Big|^{(\beta,\gamma)} = \bar{\kappa}_{12}^{(4)} \Big|^{(\beta+1,\gamma)}
 \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

Da mesma forma, as condições de continuidade das variáveis estáticas em termos médios são estabelecidas como

$$\begin{aligned}
 \bar{t}_i^{(3)} \Big|^{(\beta,\gamma)} + \bar{t}_i^{(1)} \Big|^{(\beta,\gamma+1)} &= 0 & \text{e} & \quad \bar{t}_i^{(2)} \Big|^{(\beta,\gamma)} + \bar{t}_i^{(4)} \Big|^{(\beta+1,\gamma)} = 0 \\
 \bar{t}_{2/1}^{(3)} \Big|^{(\beta,\gamma)} + \bar{t}_{2/1}^{(1)} \Big|^{(\beta,\gamma+1)} &= 0 & \text{e} & \quad \bar{t}_{1/2}^{(2)} \Big|^{(\beta,\gamma)} + \bar{t}_{1/2}^{(4)} \Big|^{(\beta+1,\gamma)} = 0 \\
 \bar{t}_{2/11}^{(3)} \Big|^{(\beta,\gamma)} + \bar{t}_{2/11}^{(1)} \Big|^{(\beta,\gamma+1)} &= 0 & \text{e} & \quad \bar{t}_{1/22}^{(2)} \Big|^{(\beta,\gamma)} + \bar{t}_{1/22}^{(4)} \Big|^{(\beta+1,\gamma)} = 0
 \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

tratando-se da aplicação da terceira lei de Newton.

Outra etapa importante no processo de montagem do sistema global de equações refere-se à definição das condições de contorno. Neste caso, qualquer quantidade em termos médios de variável cinemática ou estática pode ser prescrita nas faces externas de um subvolume localizado no contorno (CAVALCANTE; PINDERA, 2012a). Por exemplo, na borda esquerda do domínio retangular de análise, ilustrado na Figura 16, pode-se especificar qualquer uma das seguintes variáveis em cada face externa do subvolume do contorno:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_i^{(4)} \Big|^{(1,\gamma)} &\text{ ou } \bar{t}_i^{(4)} \Big|^{(1,\gamma)} & \text{para } \gamma &= 1, \dots, N_\gamma \\
 \bar{\theta}_{12}^{(4)} \Big|^{(1,\gamma)} &\text{ ou } \bar{t}_{1/2}^{(4)} \Big|^{(1,\gamma)} & \text{para } \gamma &= 1, \dots, N_\gamma \\
 \bar{\kappa}_{12}^{(4)} \Big|^{(1,\gamma)} &\text{ ou } \bar{t}_{1/22}^{(4)} \Big|^{(1,\gamma)} & \text{para } \gamma &= 1, \dots, N_\gamma
 \end{aligned} \tag{4.1.27}$$

De forma similar, são também especificadas condições de contorno nos bordos inferior, direito e superior do domínio de análise.

Após a aplicação das condições de continuidade e de contorno em termos médios, tem-se o sistema global de equações para as variáveis cinemáticas desconhecidas (CAVALCANTE; PINDERA, 2012a). Considerando-se uma estrutura discretizada em $N_q = N_\beta N_\gamma$ células, com quatro graus de liberdade por face, tem-se que o número de graus de liberdade da estrutura é dado por $N_{gl} = 4N_\beta(N_\gamma + 1) + 4(N_\beta + 1)N_\gamma$. Assim, os vetores formados pelas variáveis cinemáticas e pelas variáveis estáticas globais nas faces podem ser expressos como

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{(N_{gl} \times 1)} &= \left[\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)}, \dots, \bar{u}_2^{(4)}, \bar{\theta}_{21}^{(1)}, \dots, \bar{\theta}_{12}^{(4)}, \bar{\kappa}_{21}^{(1)}, \dots, \bar{\kappa}_{12}^{(4)}, \dots, \bar{\kappa}_{12}^{(N_{faces})} \right]^T \\ \mathbf{T}_{(N_{gl} \times 1)} &= \left[\bar{t}_1^{(1)}, \bar{t}_2^{(1)}, \dots, \bar{t}_2^{(4)}, \bar{t}_{2/1}^{(1)}, \dots, \bar{t}_{1/2}^{(4)}, \bar{t}_{2/11}^{(1)}, \dots, \bar{t}_{1/22}^{(4)}, \dots, \bar{t}_{1/22}^{(N_{faces})} \right]^T \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

em que $N_{faces} = N_\beta(N_\gamma + 1) + (N_\beta + 1)N_\gamma$ é o número de faces globais da estrutura. O vetor local composto pelas variáveis cinemáticas em termos médios de cada subvolume pode ser descrito em função do vetor global formado pelas variáveis cinemáticas da estrutura da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{k}}^{(q)} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{(16 \times N_{gl})}^{(q)} \mathbf{U}_{(N_{gl} \times 1)} \quad (4.1.29)$$

em que $\mathbf{L}_{(16 \times N_{gl})}^{(q)}$ é a matriz de incidência cinemática de um subvolume genérico q , sendo composta essencialmente por zeros e por valores unitários que indicam a posição geométrica do subvolume dentro da estrutura discretizada. Da mesma forma, o vetor composto pelas variáveis estáticas locais pode também ser obtido em função do vetor global formado pelas variáveis estáticas da estrutura, como apresentado na Equação (4.1.30).

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla^2}^{(q)} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{(16 \times N_{gl})}^{(q)} \mathbf{T}_{(N_{gl} \times 1)} \quad (4.1.30)$$

Aplicando-se propriedades da álgebra linear, a Equação (4.1.30) pode ser reescrita como

$$\mathbf{T}_{(N_{gl} \times 1)} = \sum_{q=1}^{N_q} \left[\left(\mathbf{L}_{(16 \times N_{gl})}^{(q)} \right)^T \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla^2}^{(q)} \end{bmatrix} \right] \quad (4.1.31)$$

Substituindo-se as Equações (4.1.24) e (4.1.29) em (4.1.31), é possível expressar o vetor das variáveis estáticas globais em função do vetor das variáveis cinemáticas globais da seguinte forma:

$$\mathbf{T}_{(N_{gl} \times 1)} = \mathbf{K}_{(N_{gl} \times N_{gl})} \mathbf{U}_{(N_{gl} \times 1)} \quad (4.1.32)$$

em que $\mathbf{K}_{(N_{gl} \times N_{gl})} = \sum_{q=1}^{N_q} \left[\left(\mathbf{L}_{(16 \times N_{gl})}^{(q)} \right)^T \mathbf{K}_{(16 \times 16)}^{(q)} \mathbf{L}_{(16 \times N_{gl})}^{(q)} \right]$ é a matriz de rigidez global da estrutura. A partir da solução do sistema de equações apresentado em (4.1.32), os coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos podem ser determinados por meio das seguintes equações matriciais:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^{(q)} \\ \mathbf{W}_{\nabla}^{(q)} \\ \mathbf{W}_{\nabla^2}^{(q)} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}_{(16 \times 16)}^{(q)} \mathbf{L}_{(16 \times N_{gl})}^{(q)} \mathbf{U}_{(N_{gl} \times 1)} \quad (4.1.33)$$

$$\mathbf{W}_{(00)}^{(q)} = \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 16)}^{(q)} \mathbf{L}_{(16 \times N_{gl})}^{(q)} \mathbf{U}_{(N_{gl} \times 1)}$$

4.2 Formulação de primeira ordem da teoria de volumes finitos para análise elástica de sólidos

Na versão de primeira ordem da formulação generalizada da teoria de volumes finitos não são contempladas as curvaturas no conjunto de variáveis cinemáticas, como ocorre para a versão de segunda ordem. Da mesma forma, as derivadas segundas das trações normais médias nas faces também não são contempladas nesta formulação. Assim, o campo de deslocamentos pode ser obtido retirando-se os termos associados aos coeficientes $W_{1(12)}^{(\beta, \gamma)}$, $W_{2(21)}^{(\beta, \gamma)}$, $W_{1(22)}^{(\beta, \gamma)}$ e $W_{2(22)}^{(\beta, \gamma)}$, ou seja, o campo de deslocamentos apresentado na Equação (4.1.1) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} u_1^{(\beta, \gamma)} &= W_{1(00)}^{(\beta, \gamma)} + x_1^{(\beta)} W_{1(10)}^{(\beta, \gamma)} + x_2^{(\gamma)} W_{1(01)}^{(\beta, \gamma)} + x_1^{(\beta)} x_2^{(\gamma)} W_{1(11)}^{(\beta, \gamma)} + \frac{1}{2} \left(3x_1^{(\beta)^2} - \frac{l_\beta^2}{4} \right) W_{1(20)}^{(\beta, \gamma)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(3x_2^{(\gamma)^2} - \frac{h_\gamma^2}{4} \right) W_{1(02)}^{(\beta, \gamma)} + \frac{1}{2} \left(3x_1^{(\beta)^2} - \frac{l_\beta^2}{4} \right) x_2^{(\gamma)} W_{1(21)}^{(\beta, \gamma)} \\ u_2^{(\beta, \gamma)} &= W_{2(00)}^{(\beta, \gamma)} + x_1^{(\beta)} W_{2(10)}^{(\beta, \gamma)} + x_2^{(\gamma)} W_{2(01)}^{(\beta, \gamma)} + x_1^{(\beta)} x_2^{(\gamma)} W_{2(11)}^{(\beta, \gamma)} + \frac{1}{2} \left(3x_1^{(\beta)^2} - \frac{l_\beta^2}{4} \right) W_{2(20)}^{(\beta, \gamma)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(3x_2^{(\gamma)^2} - \frac{h_\gamma^2}{4} \right) W_{2(02)}^{(\beta, \gamma)} + \frac{1}{2} \left(3x_2^{(\gamma)^2} - \frac{h_\gamma^2}{4} \right) x_1^{(\beta)} W_{2(12)}^{(\beta, \gamma)} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

O campo de deslocamentos apresentado na Equação (4.2.1) possui ao todo 14 coeficientes a serem determinados, sendo dois coeficientes de ordem zero ($W_{1(00)}^{(\beta,\gamma)}$ e $W_{2(00)}^{(\beta,\gamma)}$), seis coeficientes de primeira ordem ($W_{1(10)}^{(\beta,\gamma)}$, $W_{2(10)}^{(\beta,\gamma)}$, $W_{1(01)}^{(\beta,\gamma)}$, $W_{2(01)}^{(\beta,\gamma)}$, $W_{1(11)}^{(\beta,\gamma)}$ e $W_{2(11)}^{(\beta,\gamma)}$), quatro coeficientes de segunda ordem ($W_{1(20)}^{(\beta,\gamma)}$, $W_{2(20)}^{(\beta,\gamma)}$, $W_{1(02)}^{(\beta,\gamma)}$ e $W_{2(02)}^{(\beta,\gamma)}$) e dois coeficientes cruzados de segunda ordem ($W_{1(21)}^{(\beta,\gamma)}$ e $W_{2(12)}^{(\beta,\gamma)}$).

4.2.1 Avaliação das variáveis cinemáticas e estáticas

Na formulação de primeira ordem da teoria de volumes são contempladas apenas duas variáveis cinemáticas avaliadas em termos médios nas faces do subvolume: os deslocamentos e as rotações. Neste caso, a continuidade cinemática se dá pela compatibilização dos deslocamentos e das derivadas primeiras de suas componentes normais entre subvolumes adjacentes:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^{(3)} \left(x_1^{(\beta)}, \frac{h_\gamma}{2} \right) &= \bar{u}_i^{(1)} \left(x_1^{(\beta)}, -\frac{h_{\gamma+1}}{2} \right) \\ \frac{\partial \bar{u}_2^{(3)} \left(x_1^{(\beta)}, \frac{h_\gamma}{2} \right)}{\partial x_1^{(\beta)}} &= \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)} \left(x_1^{(\beta)}, -\frac{h_{\gamma+1}}{2} \right)}{\partial x_1^{(\beta)}} \\ \bar{u}_i^{(4)} \left(\frac{l_\beta}{2}, x_2^{(\gamma)} \right) &= \bar{u}_i^{(2)} \left(-\frac{l_{\beta+1}}{2}, x_2^{(\gamma)} \right) \\ \frac{\partial \bar{u}_1^{(4)} \left(\frac{l_\beta}{2}, x_2^{(\gamma)} \right)}{\partial x_2^{(\gamma)}} &= \frac{\partial \bar{u}_1^{(2)} \left(-\frac{l_{\beta+1}}{2}, x_2^{(\gamma)} \right)}{\partial x_2^{(\gamma)}} \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Dessa forma, reorganizando as expressões para o campo de deslocamentos apresentadas na Equação (4.2.1) em notação matricial, tem-se a seguinte relação para os componentes cinemáticos:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)} \begin{bmatrix} \mathbf{W}^{(q)} \\ \mathbf{W}_\nabla^{(q)} \end{bmatrix} + \mathbf{a}_{(12 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \tag{4.2.3}$$

em que $\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)}$ e $\mathbf{a}_{(12 \times 2)}^{(q)}$ são matrizes que se encontram definidas no Apêndice C.

Conseqüentemente, a Equação (4.2.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^{(q)} \\ \mathbf{W}_\nabla^{(q)} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \end{bmatrix} - \left(\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(12 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \tag{4.2.4}$$

No que concerne à continuidade estática entre subvolumes adjacentes, exige-se que as trações atuando na terceira face do subvolume (β, γ) e na primeira do subvolume $(\beta, \gamma + 1)$ satisfaçam $\bar{t}_i^{(3)}(x_1^{(\beta)})|^{(\beta, \gamma)} + \bar{t}_i^{(1)}(x_1^{(\beta)})|^{(\beta, \gamma+1)} = 0$, ou que as seguintes relações sejam satisfeitas:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(3)}\left(x_1^{(\beta)}, \frac{h_\gamma}{2}\right) &= \sigma_{22}^{(1)}\left(x_1^{(\beta)}, -\frac{h_{\gamma+1}}{2}\right) \\ \frac{\partial \sigma_{22}^{(3)}\left(x_1^{(\beta)}, \frac{h_\gamma}{2}\right)}{\partial x_1^{(\beta)}} &= \frac{\partial \sigma_{22}^{(1)}\left(x_1^{(\beta)}, -\frac{h_{\gamma+1}}{2}\right)}{\partial x_1^{(\beta)}} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Condições semelhantes devem ser atendidas para os componentes de tensão atuantes nas segunda e quarta faces. Na presente formulação, são consideradas apenas duas variáveis estáticas avaliadas em termos médios nas faces do subvolume: as trações e as derivadas primeiras de suas componentes normais. Assim, considerando um material elástico linear, conforme demonstrado na Seção 4.1.2, o vetor local estático para formulação de primeira ordem da teoria de volumes finitos pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla}^{(q)} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{(12 \times 12)}^{(q)} \begin{bmatrix} \mathbf{W}^{(q)} \\ \mathbf{W}_{\nabla}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

em que $\mathbf{B}_{(12 \times 12)}^{(q)}$ é a matriz que relaciona os componentes estáticos de um subvolume com os coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos, e encontra-se definida no Apêndice C. Substituindo-se a Equação (4.2.4) na Equação (4.2.6), obtém-se a seguinte expressão matricial para o vetor local estático:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla}^{(q)} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{(12 \times 12)}^{(q)} \left(\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \end{bmatrix} - \mathbf{B}_{(12 \times 12)}^{(q)} \left(\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(12 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \quad (4.2.7)$$

4.2.2 Equilíbrio local no subvolume

Assim como apresentado na Seção 4.1.3, na ausência de forças de corpo, o equilíbrio local pode ser estabelecido pela Equação (4.1.17), sendo $\bar{\mathbf{t}}^{(q,p)}$ avaliado como

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q,p)} = \mathbf{B}_{(2 \times 12)}^{(q,p)} \left(\mathbf{A}_{12 \times 12}^{(q)} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \end{bmatrix} - \mathbf{B}_{(2 \times 12)}^{(q,p)} \left(\mathbf{A}_{12 \times 12}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(12 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \quad (4.2.8)$$

em que $\mathbf{B}_{(2 \times 12)}^{(q,p)}$ são submatrizes que subdivide as oito primeiras linhas da matriz $\mathbf{B}_{(12 \times 12)}^{(q)}$ em quatro matrizes com duas linhas e doze colunas. Substituindo-se a Equação (4.2.8) na equação de equilíbrio local de um subvolume, Equação (4.1.17), chega-se na seguinte expressão:

$$\left(\sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 12)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) (\mathbf{A}_{12 \times 12}^{(q)})^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \end{bmatrix} = \left(\sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 12)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) (\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)})^{-1} \mathbf{a}_{(12 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \quad (4.2.9)$$

Isolando o vetor $\mathbf{W}_{(00)}^{(q)}$ na Equação (4.2.9), encontra-se:

$$\mathbf{W}_{(00)}^{(q)} = \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 12)}^{(q)} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (4.2.10)$$

em que

$$\bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 12)}^{(q)} = \left[\left(\sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 12)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) (\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)})^{-1} \mathbf{a}_{(12 \times 2)}^{(q)} \right]^{-1} \left(\sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 12)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) (\mathbf{A}_{12 \times 12}^{(q)})^{-1} \quad (4.2.11)$$

Substituindo-se a Equação (4.2.10) na Equação (4.2.4), tem-se a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^{(q)} \\ \mathbf{W}_{\nabla}^{(q)} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}_{(12 \times 12)}^{(q)} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (4.2.12)$$

em que

$$\bar{\mathbf{A}}_{(12 \times 12)}^{(q)} = (\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)})^{-1} - (\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)})^{-1} \mathbf{a}_{(12 \times 2)}^{(q)} \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 12)}^{(q)} \quad (4.2.13)$$

Finalmente, substituindo-se as Equações (4.2.12) e (4.2.10) na Equação (4.2.7), pode-se obter o sistema local de equações, que relacionam as variáveis estáticas e cinemáticas, ou seja, este sistema pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla}^{(q)} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{(12 \times 12)}^{(q)} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (4.2.14)$$

em que $\mathbf{K}_{(12 \times 12)}^{(q)} = \mathbf{B}_{(12 \times 12)}^{(q)} \bar{\mathbf{A}}_{(12 \times 12)}^{(q)}$ é chamada de matriz de rigidez local para formulação de primeira ordem da teoria de volumes finitos.

4.2.3 Montagem do sistema global

Na formulação de primeira ordem da teoria de volumes finitos, as condições de continuidade cinemática e estática são dadas por

$$\begin{aligned}
\bar{u}_i^{(3)} \Big|^{(\beta,\gamma)} &= \bar{u}_i^{(1)} \Big|^{(\beta,\gamma+1)} \quad \text{e} \quad \bar{u}_i^{(2)} \Big|^{(\beta,\gamma)} = \bar{u}_i^{(4)} \Big|^{(\beta+1,\gamma)} \\
\bar{\theta}_{21}^{(3)} \Big|^{(\beta,\gamma)} &= \bar{\theta}_{21}^{(1)} \Big|^{(\beta,\gamma+1)} \quad \text{e} \quad \bar{\theta}_{12}^{(2)} \Big|^{(\beta,\gamma)} = \bar{\theta}_{12}^{(4)} \Big|^{(\beta+1,\gamma)} \\
\bar{t}_i^{(3)} \Big|^{(\beta,\gamma)} + \bar{t}_i^{(1)} \Big|^{(\beta,\gamma+1)} &= 0 \quad \text{e} \quad \bar{t}_i^{(2)} \Big|^{(\beta,\gamma)} + \bar{t}_i^{(4)} \Big|^{(\beta+1,\gamma)} = 0 \\
\bar{t}_{2/1}^{(3)} \Big|^{(\beta,\gamma)} + \bar{t}_{2/1}^{(1)} \Big|^{(\beta,\gamma+1)} &= 0 \quad \text{e} \quad \bar{t}_{1/2}^{(2)} \Big|^{(\beta,\gamma)} + \bar{t}_{1/2}^{(4)} \Big|^{(\beta+1,\gamma)} = 0
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Ao mesmo tempo, a título de ilustração, as condições de contorno que podem ser impostas nas faces externas de cada subvolumen localizadas no bordo esquerdo do contorno são

$$\begin{aligned}
\bar{u}_i^{(4)} \Big|^{(1,\gamma)} \quad \text{ou} \quad \bar{t}_i^{(4)} \Big|^{(1,\gamma)} \quad \text{para } \gamma = 1, \dots, N_\gamma \\
\bar{\theta}_{12}^{(4)} \Big|^{(1,\gamma)} \quad \text{ou} \quad \bar{t}_{1/2}^{(4)} \Big|^{(1,\gamma)} \quad \text{para } \gamma = 1, \dots, N_\gamma
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Assim, o sistema global de equações para teoria de volumes finitos de primeira ordem pode ser produzido considerando-se uma discretização da estrutura em $N_q = N_\beta N_\gamma$ subvolumes, em que existem três graus de liberdade para cada face de um subvolumen, ou seja, o número total de graus de liberdade da estrutura pode ser avaliado por $N_{gl} = 3N_\beta(N_\gamma + 1) + 3(N_\beta + 1)N_\gamma$. Os vetores globais formados pelos deslocamentos e rotações e pelas trações e as derivadas primeiras de suas componentes normais podem ser expressos por

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{(N_{gl} \times 1)} &= \left[\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)}, \dots, \bar{u}_2^{(4)}, \bar{\theta}_{21}^{(1)}, \dots, \bar{\theta}_{12}^{(4)}, \bar{u}_1^{(5)}, \dots, \bar{u}_2^{(8)}, \bar{\theta}_{21}^{(5)}, \dots, \bar{\theta}_{12}^{(N_{faces})} \right]^T \\
\mathbf{T}_{(N_{gl} \times 1)} &= \left[\bar{t}_1^{(1)}, \bar{t}_2^{(1)}, \dots, \bar{t}_2^{(4)}, \bar{t}_{2/1}^{(1)}, \dots, \bar{t}_{1/2}^{(4)}, \bar{t}_1^{(5)}, \dots, \bar{t}_2^{(8)}, \bar{t}_{2/1}^{(5)}, \dots, \bar{t}_{1/2}^{(N_{faces})} \right]^T
\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Os vetores locais cinemático e estático podem ser escritos, respectivamente, como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} \end{bmatrix} &= \mathbf{L}_{(12 \times N_{gl})}^{(q)} \mathbf{U}_{(N_{gl} \times 1)} \\
\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}^{(q)} \\ \bar{\mathbf{t}}_{\nabla}^{(q)} \end{bmatrix} &= \mathbf{L}_{(12 \times N_{gl})}^{(q)} \mathbf{T}_{(N_{gl} \times 1)}
\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

em que $\mathbf{L}_{(12 \times N_{gl})}^{(q)}$ é a matriz de incidência cinemática do subvolumen q . Por fim, o sistema global da estrutura pode então ser escrito como

$$\mathbf{T}_{(N_{gl} \times 1)} = \mathbf{K}_{(N_{gl} \times N_{gl})} \mathbf{U}_{(N_{gl} \times 1)} \tag{4.2.19}$$

em que $\mathbf{K}_{(N_{gl} \times N_{gl})} = \sum_{q=1}^{N_q} \left[\left(\mathbf{L}_{(12 \times N_{gl})}^{(q)} \right)^T \mathbf{K}_{(12 \times 12)}^{(q)} \mathbf{L}_{(12 \times N_{gl})}^{(q)} \right]$ é a matriz de rigidez global para versão de primeira ordem da teoria de volumes finitos da estrutura discretizada.

4.3 Formulação de ordem zero da teoria de volumes finitos para análise elástica de sólidos

Na formulação de ordem zero da teoria de volumes finitos são contemplados apenas os deslocamentos e as trações avaliados em termos médios nas faces do subvolume. O campo de deslocamentos nesta formulação pode ser obtido pela retirada dos coeficientes $W_{1(21)}^{(\beta,\gamma)}$, $W_{2(12)}^{(\beta,\gamma)}$, $W_{1(11)}^{(\beta,\gamma)}$ e $W_{2(11)}^{(\beta,\gamma)}$ das expressões apresentadas na Equação (4.2.1), assim, tem-se

$$u_i^{(\beta,\gamma)} = W_{i(00)}^{(\beta,\gamma)} + x_1^{(\beta)} W_{i(10)}^{(\beta,\gamma)} + x_2^{(\gamma)} W_{i(01)}^{(\beta,\gamma)} + \frac{1}{2} \left(3x_1^{(\beta)^2} - \frac{l_\beta^2}{4} \right) W_{i(20)}^{(\beta,\gamma)} + \frac{1}{2} \left(3x_2^{(\gamma)^2} - \frac{h_\gamma^2}{4} \right) W_{i(02)}^{(\beta,\gamma)} \quad (4.3.1)$$

em que $i = 1, 2$. Ao todo, tem-se 10 coeficientes a serem determinados, sendo dois de ordem zero ($W_{1(00)}^{(\beta,\gamma)}$ e $W_{2(00)}^{(\beta,\gamma)}$), quatro de primeira ordem ($W_{1(10)}^{(\beta,\gamma)}$, $W_{2(10)}^{(\beta,\gamma)}$, $W_{1(01)}^{(\beta,\gamma)}$ e $W_{2(01)}^{(\beta,\gamma)}$) e quatro de segunda ordem ($W_{1(20)}^{(\beta,\gamma)}$, $W_{2(20)}^{(\beta,\gamma)}$, $W_{1(02)}^{(\beta,\gamma)}$ e $W_{2(02)}^{(\beta,\gamma)}$).

4.3.1 Avaliação das variáveis cinemáticas e estáticas

Na formulação de ordem zero da teoria de volumes finitos, são contemplados apenas os deslocamentos médios nas faces do subvolume como variáveis cinemáticas. Assim, a continuidade cinemática ocorre pela compatibilização dos deslocamentos entre subvolumes adjacentes:

$$\bar{u}_i^{(3)} \left(x_1^{(\beta)}, \frac{h_\gamma}{2} \right) = \bar{u}_i^{(1)} \left(x_1^{(\beta)}, -\frac{h_{\gamma+1}}{2} \right) \quad (4.3.2)$$

$$\bar{u}_i^{(4)} \left(\frac{l_\beta}{2}, x_2^{(\gamma)} \right) = \bar{u}_i^{(2)} \left(-\frac{l_{\beta+1}}{2}, x_2^{(\gamma)} \right)$$

Os deslocamentos médios nas faces de um subvolume q , conforme apresentado na Equação (4.1.2), podem ser escritos em função dos coeficientes desconhecidos do campo de deslocamentos

$$\bar{\mathbf{u}}^{(q)} = \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{W}^{(q)} + \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \quad (4.3.3)$$

em que $\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)}$ e $\mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)}$ são matrizes definidas no Apêndice C. A Equação (4.3.3) pode ser reescrita como

$$\mathbf{W}^{(q)} = \left(\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} - \left(\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \quad (4.3.4)$$

Quanto à continuidade estática entre subvolumes adjacentes, deve-se observar se as trações atuantes na terceira face do subvolume (β, γ) e na primeira face do subvolume $(\beta, \gamma + 1)$ estão obedecendo a relação $\bar{t}_i^{(3)} \left(x_1^{(\beta)} \right) \Big|^{(\beta, \gamma)} + \bar{t}_i^{(1)} \left(x_1^{(\beta)} \right) \Big|^{(\beta, \gamma + 1)} = 0$, ou

$$\sigma_{2i}^{(3)} \left(x_1^{(\beta)}, \frac{h_\gamma}{2} \right) = \sigma_{2i}^{(1)} \left(x_1^{(\beta)}, -\frac{h_{\gamma+1}}{2} \right) \quad (4.3.5)$$

Também devem ser satisfeitas estas condições para os componentes de tração atuantes nas segunda e quarta faces de subvolumes adjacentes.

Nesta formulação, as variáveis estáticas contempladas no problema são as trações médias atuantes nas faces dos subvolumes. Dessa forma, considerando-se um material elástico linear, o vetor local formado pelas trações médias nas faces pode ser expresso como

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = \mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{W}^{(q)} \quad (4.3.6)$$

em que $\mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)}$ encontra-se definida no Apêndice C. Substituindo-se a Equação (4.3.4) na Equação (4.3.6), chega-se na seguinte expressão:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = \mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} \left(\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} - \mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} \left(\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \quad (4.3.7)$$

4.3.2 Equilíbrio local no subvolume

Na formulação de ordem zero da teoria de volumes finitos, o vetor local $\bar{\mathbf{t}}^{(q,p)}$ pode ser avaliado como

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q,p)} = \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,p)} \left(\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} - \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,p)} \left(\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \quad (4.3.8)$$

em que $\mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,p)}$ são submatrizes que dividem a matriz $\mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)}$ em quatro matrizes com duas linhas e oito colunas. Assim, substituindo-se a Equação (4.3.8) na Equação (4.1.17), que define o equilíbrio local em um subvolume, tem-se a seguinte expressão:

$$\left(\sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) (\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)})^{-1} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} = \left(\sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 8)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) (\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)})^{-1} \mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} \mathbf{W}_{(00)}^{(q)} \quad (4.3.9)$$

A partir da Equação (4.3.9), o vetor $\mathbf{W}_{(00)}^{(q)}$ pode ser escrito como

$$\mathbf{W}_{(00)}^{(q)} = \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \quad (4.3.10)$$

em que

$$\bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 8)}^{(q)} = \left[\left(\sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 12)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) (\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)})^{-1} \mathbf{a}_{(12 \times 2)}^{(q)} \right]^{-1} \left(\sum_{p=1}^4 \mathbf{B}_{(2 \times 12)}^{(q,p)} L_p^{(q)} \right) (\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)})^{-1} \quad (4.3.11)$$

Substituindo-se a Equação (4.3.10) na Equação (4.3.4), tem-se:

$$\mathbf{W}^{(q)} = \bar{\mathbf{A}}_{(12 \times 12)}^{(q)} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \quad (4.3.12)$$

em que

$$\bar{\mathbf{A}}_{(12 \times 12)}^{(q)} = \left(\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)} \right)^{-1} - \left(\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)} \right)^{-1} \mathbf{a}_{(12 \times 2)}^{(q)} \bar{\mathbf{a}}_{(2 \times 12)}^{(q)} \quad (4.3.13)$$

Por fim, o vetor formado pelas trações médias nas faces pode ser expresso em função do vetor formado pelos deslocamentos médios nas faces da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(q)} = \mathbf{K}_{(8 \times 8)}^{(q)} \bar{\mathbf{u}}^{(q)} \quad (4.3.14)$$

em que $\mathbf{K}_{(8 \times 8)}^{(q)} = \mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} \bar{\mathbf{A}}_{(8 \times 8)}^{(q)}$ é a matriz de rigidez local empregada na formulação cartesiana de ordem zero da teoria de volumes finitos.

4.3.3 Montagem do sistema global

As condições de continuidade cinemática e estática, nesta formulação, são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^{(3)} \Big|^{(\beta, \gamma)} &= \bar{u}_i^{(1)} \Big|^{(\beta, \gamma+1)} & \text{e} & \quad \bar{u}_i^{(2)} \Big|^{(\beta, \gamma)} = \bar{u}_i^{(4)} \Big|^{(\beta+1, \gamma)} \\ \bar{t}_i^{(3)} \Big|^{(\beta, \gamma)} + \bar{t}_i^{(1)} \Big|^{(\beta, \gamma+1)} &= 0 & \text{e} & \quad \bar{t}_i^{(2)} \Big|^{(\beta, \gamma)} + \bar{t}_i^{(4)} \Big|^{(\beta+1, \gamma)} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Enquanto que as condições de contorno podem ser prescritas da seguinte forma:

$$\bar{u}_i^{(1)} \Big|^{(\beta, 1)} \quad \text{ou} \quad \bar{t}_i^{(1)} \Big|^{(\beta, 1)} \quad \text{para } \beta = 1, \dots, N_\beta \quad (4.3.16)$$

$$\bar{u}_i^{(2)} \Big|^{(N_\beta, \gamma)} \quad \text{ou} \quad \bar{t}_i^{(2)} \Big|^{(N_\beta, \gamma)} \quad \text{para } \gamma = 1, \dots, N_\gamma$$

$$\bar{u}_i^{(3)} \Big|^{(\beta, N_\gamma)} \quad \text{ou} \quad \bar{t}_i^{(3)} \Big|^{(\beta, N_\gamma)} \quad \text{para } \beta = 1, \dots, N_\beta$$

$$\bar{u}_i^{(4)} \Big|^{(1, \gamma)} \quad \text{ou} \quad \bar{t}_i^{(4)} \Big|^{(1, \gamma)} \quad \text{para } \gamma = 1, \dots, N_\gamma$$

O sistema global de equações para uma estrutura discretizada em $N_q = N_\beta N_\gamma$ subvolumes e com $N_{gl} = 2N_\beta(N_\gamma + 1) + 2(N_\beta + 1)N_\gamma$ graus de liberdade é obtido a partir da seguinte expressão:

$$\mathbf{T}_{(N_{gl} \times 1)} = \mathbf{K}_{(N_{gl} \times N_{gl})} \mathbf{U}_{(N_{gl} \times 1)} \quad (4.3.17)$$

em que $\mathbf{T}_{(N_{gl} \times 1)} = \left[\bar{t}_1^{(1)}, \bar{t}_2^{(1)}, \bar{t}_1^{(2)}, \bar{t}_2^{(2)}, \dots, \bar{t}_1^{(N_{faces}-1)}, \bar{t}_2^{(N_{faces}-1)}, \bar{t}_1^{(N_{faces})}, \bar{t}_2^{(N_{faces})} \right]^T$ é vetor global formado pelas trações médias atuantes nas faces de cada subvolume, $\mathbf{U}_{(N_{gl} \times 1)} = \left[\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)}, \bar{u}_1^{(2)}, \bar{u}_2^{(2)}, \dots, \bar{u}_1^{(N_{faces}-1)}, \bar{u}_2^{(N_{faces}-1)}, \bar{u}_1^{(N_{faces})}, \bar{u}_2^{(N_{faces})} \right]^T$ é o vetor global formado pelos deslocamentos médios avaliados nas faces de cada subvolume, $\mathbf{K}_{(N_{gl} \times N_{gl})} = \sum_{q=1}^{N_q} \left[\left(\mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)} \right)^T \mathbf{K}_{(8 \times 8)}^{(q)} \mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)} \right]$ é a matriz de rigidez global da estrutura discretizada e $\mathbf{L}_{(8 \times N_{gl})}^{(q)}$ é a matriz de incidência cinemática do subvolume q .

4.4 Solução do sistema global

Os sistemas globais de equações apresentados em (4.1.32), (4.2.19) e (4.3.17) podem ser reescritos conforme apresentado na Equação (4.4.1), após a inserção das condições de contorno e continuidade no problema. Para solução dos sistemas globais, as Equações (4.1.32), (4.2.19) e (4.3.17) podem ser divididas em submatrizes e subvetores da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T}_c \\ \mathbf{T}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cd} & \mathbf{K}_{cc} \\ \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{dc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_d \\ \mathbf{U}_c \end{Bmatrix} \quad (4.4.1)$$

em que \mathbf{T}_c e \mathbf{T}_d são os vetores com as variáveis estáticas conhecidas (especificadas pelas condições naturais de contorno) e desconhecidas, respectivamente, \mathbf{U}_c e \mathbf{U}_d são os vetores composto pelas variáveis cinemáticas conhecidas (prescritas pelas condições essenciais de contorno) e desconhecidas, respectivamente, \mathbf{K}_{cd} é a submatriz de rigidez que associa as variáveis cinemáticas desconhecidas às variáveis estáticas conhecidas, \mathbf{K}_{cc} é a submatriz de

rigidez que associa as variáveis cinemáticas conhecidas às variáveis estáticas conhecidas, \mathbf{K}_{dd} é a submatriz de rigidez que associa as variáveis cinemáticas desconhecidas às variáveis estáticas desconhecidas e \mathbf{K}_{dc} é a submatriz de rigidez que associa as variáveis cinemáticas conhecidas às variáveis estáticas desconhecidas. Finalmente, o interesse está na determinação das variáveis estáticas e cinemáticas não conhecidas de cada subvolume, assim, os vetores formados pelas variáveis cinemáticas e estáticas desconhecidas podem ser determinados a partir das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_d &= (\mathbf{K}_{cd})^{-1}\mathbf{T}_c - (\mathbf{K}_{cd})^{-1}\mathbf{K}_{cc}\mathbf{U}_c \\ \mathbf{T}_d &= \mathbf{K}_{dd}\mathbf{U}_d + \mathbf{K}_{dc}\mathbf{U}_c\end{aligned}\tag{4.4.2}$$

5 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Esta seção da dissertação divide-se em três partes principais. A primeira parte refere-se ao modelo SIMP com uma abordagem que objetiva a minimização da energia de deformação de uma estrutura carregada estaticamente. Esta abordagem baseia-se no modelo apresentado em Sigmund (2001). Na segunda parte é apresentado o método OC, que nada mais é do que um esquema heurístico utilizado na atualização das variáveis de projeto durante o processo de otimização topológica. Finalmente, a terceira parte é constituída por uma seção que apresenta as instabilidades numéricas normalmente presentes em problemas de otimização topológica, sendo dado um enfoque especial ao problema do tabuleiro de xadrez.

O problema de otimização topológica consiste em encontrar o subdomínio Ω_d com um volume limite de \bar{V} incluído em um domínio de dimensionamento pré-estabelecido Ω , que otimiza uma determinada função objetivo g_0 (por exemplo, a energia de deformação), conforme ilustração apresentada na Figura 20. Encontrar a topologia ótima do problema significa achar as conectividades, a forma e o número de furos que leva a função objetivo ao valor extremo (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Introduzindo uma função de densidade ρ , definida em Ω , que deverá assumir o valor 1 em Ω_d e 0 nos demais pontos do domínio, assim, o problema de otimização topológica pode ser definido da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \min_{\rho} g_0(\rho) \\ & \text{sujeito a} \\ & \int_{\Omega} \rho d\Omega \leq \bar{V}, \\ & \rho(\mathbf{x}) = 0 \text{ ou } 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \tag{5.1}$$

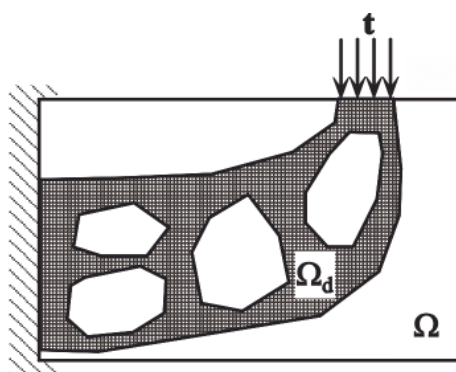
Geralmente, o problema de otimização topológica é tratado pela discretização do problema apresentado em (5.1), dividindo-se o domínio Ω em N elementos finitos. Tomando-se ρ como uma função constante no elemento finito, o problema de otimização topológica discretizado pode ser definido como

$$\begin{aligned} & \min_{\rho} g_0(\rho) \\ & \text{sujeito a} \\ & V = \sum_{i=1}^N \rho_i v_i \leq \bar{V}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\rho_i = 0 \text{ ou } 1, \quad i = 1, \dots, N$$

em que, ρ_i e v_i são as densidades relativas e os volumes dos elementos finitos, respectivamente, e V é o volume final da estrutura otimizada (SIGMUND; PETERSSON, 1998).

Figura 20 - Domínios do problema de otimização topológica.



Fonte: Silva (2003).

5.1 Problema de minimização da energia de deformação

Para formulação do problema de otimização topológica bidimensional, cuja função objetivo é a energia de deformação da estrutura, que deve ser minimizada, considera-se um corpo sólido que ocupa um domínio Ω_d , o qual faz parte de um domínio de referência maior Ω em \mathbb{R}^2 . A partir do domínio de referência Ω , pode-se definir o problema de dimensionamento ótimo da estrutura como o problema que busca a melhor escolha para o tensor de rigidez $C_{ijkl}(\mathbf{x})$, o qual é variável ao longo do domínio de análise. Dessa forma, introduzindo-se o trabalho interno virtual de um corpo elástico em equilíbrio para um deslocamento \mathbf{u} e para um deslocamento virtual arbitrário $\delta\mathbf{u}$:

$$\delta W_{int}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} C_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{kl}(\delta\mathbf{u}) d\Omega \quad (5.1.1)$$

com o trabalho externo virtual avaliado por

$$\delta W_{ext}(\delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{S_{\sigma}} t_i u_i dS \quad (5.1.2)$$

Assim, o problema da mínima energia de deformação pode ser expresso como

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{u}_{ad}, C_{ijkl}(\mathbf{x})} U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{kl}(\delta \mathbf{u}) d\Omega \quad (5.1.3)$$

sujeito a

$$\delta W_{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta W_{ext}(\delta \mathbf{u}), \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{u}_{ad}$$

Neste caso, as equações de equilíbrio são escritas na sua forma variacional fraca, com \mathbf{u}_{ad} denotando os campos de deslocamento cineticamente admissíveis, \mathbf{b} as forças de corpo e \mathbf{t} as trações superficiais na região tensionada $S_{\sigma} \subset S$ da superfície do corpo (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Na solução de problemas da forma apresentada em (5.1.3), utiliza-se normalmente uma abordagem mecânica computacional, em que o problema é discretizado em elementos finitos. Além do mais, a variável de projeto do problema é considerada como sendo a densidade artificial do material em cada elemento, que define a fração volumétrica de um material poroso e afeta diretamente o tensor constitutivo do material, segundo o modelo de Voigt, $C_{ijkl}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) C_{ijkl}^0(\mathbf{x})$, que superestima a rigidez efetiva do material, uma vez que assume a uniformidade do tensor de deformações, (DVORAK, 2013). Assim, o modelo de Voigt define o limite superior para o tensor de rigidez de um material compósito. Por fim, levando em consideração uma abordagem baseada na micromecânica de materiais compósitos, o problema (5.1.3) pode ser então atualizado da seguinte forma:

$$\min c(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{d}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{d}$$

sujeito a

$$\frac{V(\boldsymbol{\rho})}{\bar{V}} = f \quad (5.1.4)$$

$$0 < \rho_{min} \leq \rho_i \leq 1$$

em que $c(\boldsymbol{\rho})$ é a função de flexibilidade da estrutura, \mathbf{d} é o vetor global de deslocamentos da estrutura, $V(\boldsymbol{\rho})$ e \bar{V} são o volume de material e o volume do domínio de referência, respectivamente, f é a fração de volume prescrita, ρ_{min} é a densidade relativa mínima (basicamente não nula para evitar singularidade) e $\boldsymbol{\rho}$ é o vetor com as densidades de todos os elementos. A formulação apresentada em (5.1.4) possui como desvantagem o fato de os resultados obtidos apresentarem elementos com valores intermediários de densidade.

Numa modelagem mecânica baseada no Método dos Elementos Finitos, a função de flexibilidade representa o dobro da energia de deformação, tal como demonstrado a seguir

$$c(\boldsymbol{\rho}) = 2U(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{B}\mathbf{d})^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{B}\mathbf{d} d\Omega = \mathbf{d}^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{B} d\Omega \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{d} \quad (5.1.5)$$

5.2 Solid isotropic material with penalization (SIMP)

Visto que o problema apresentado em (5.1) apresenta uma elevada complexidade, existem duas possibilidades para encontrar uma solução para o mesmo. A primeira consiste em modificar o problema e a segunda em realizar uma discretização do mesmo. A primeira se subdivide em dois caminhos: relaxação ou restrição ao dimensionamento (SIGMUND; PETERSSON, 1998).

5.2.1 Relaxação

A relaxação consiste no aumento do conjunto de dimensionamento, assim, a densidade relativa, que no problema de otimização topológica original só pode assumir os valores inteiros 0 e 1, de acordo com a presença ou não de material, passa a assumir qualquer valor real entre 0 e 1 ($0 < \rho \leq 1$), resultando em um projeto com diferentes escalas de cinza.

Alguns autores questionam o fato de não ser possível obter materiais com as densidades intermediárias sugeridas pela relaxação do problema de otimização topológica. Porém, alguns estudos têm apontado para aplicação de materiais porosos, com o auxílio de impressoras 3D, o que possibilitaria a fabricação dessas peças estruturais. Os últimos avanços nessas tecnologias têm possibilitado a aplicação de estruturas com topologias ótimas porosas, especialmente na indústria mecânica e aeroespacial.

Outra possibilidade para obter um problema melhor comportado, por meio da relaxação do conjunto admissível, é tratar o problema de otimização topológica bidimensional como o problema de uma chapa com espessura variável, conforme modelo sugerido em Christensen e Klarbring (2009). Neste caso, o problema de minimização da flexibilidade da estrutura é tomado como um problema que envolve a variabilidade da espessura de uma chapa. Aqui, a variável de projeto ρ pode ter qualquer valor real entre 0 e 1, e define a espessura final relativa à espessura inicial do domínio de referência, $t(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})t_0$. Este procedimento converte o problema de otimização topológica num outro problema em que a energia de deformação específica avaliada no plano depende linearmente de ρ (SIGMUND; PETERSSON, 1998).

5.2.2 Restrição

Os métodos de restrição propõem que seja feita algum tipo de restrição ou modificação no problema de otimização topológica original, de forma que o conjunto de soluções se torne mais compacto. Isto pode ser alcançado pela introdução de restrições extras ao problema, com a finalidade de delimitar as oscilações da variável de projeto ρ (SIGMUND; PETERSSON, 1998). De acordo com Sigmund (2001), devem ser inseridas algumas restrições aos resultados do dimensionamento, por meio do emprego de técnicas de filtragem, como, por exemplo, uma restrição ao perímetro da estrutura.

5.2.3 Penalização dos valores intermediários

Segundo Sigmund e Petersson (1998), existem duas razões para penalizar os valores intermediários de densidade relativa. A primeira razão refere-se ao pós-processamento dos resultados oriundos de problemas com relaxação, e a segunda é para evitar a aplicação de técnicas de programação inteira para solução do problema de otimização. Várias técnicas de penalização foram sugeridas por diversos autores. Por exemplo, Haber et al. (1996) sugeriram substituir $g_0(\rho)$ por $g_0(\rho) + p \cdot \int \rho \cdot (1 - \rho) dx$, em que p é o parâmetro que define o nível de penalização. Christensen e Klarbring (2009) sugeriram também a substituição de ρ por uma função definida como $\xi(\rho) = \rho / [1 + (q - 1) \cdot (1 - \rho)]$, em que q deve ser maior que um, e é uma variável que controla o nível de penalização.

O método mais popular de penalização é o SIMP, introduzido por Zhou e Rozvany (1991), que se baseia na penalização das densidades intermediárias, a fim de que estas não apareçam no projeto final otimizado (OLINQUEVICZ, 2015). Neste método, as propriedades do material são assumidas constantes em cada elemento da estrutura discretizada, e as variáveis de projeto são as densidades relativas artificiais dos elementos, podendo ser interpretadas como as frações volumétricas dos materiais porosos que preenchem os elementos. No entanto, o tensor de rigidez efetivo de cada elemento é avaliado pela densidade relativa elevada a uma determinada potência e multiplicada pelo tensor de rigidez do material sólido. Assim, diferentemente do problema originalmente proposto em (5.1.4), que utiliza o modelo de Voigt na avaliação do tensor de rigidez efetivo do material (DVORAK, 2013), no método SIMP o tensor constitutivo efetivo do material é avaliado por

$$C_{ijkl}(\rho) = \rho^p \cdot C_{ijkl}^0 \quad (5.2.1)$$

em que C_{ijkl}^0 é o tensor constitutivo do material sólido e p é o fator de penalização.

Para a interpolação apresentada na Equação (5.2.1), observa-se que $C_{ijkl}(0) = 0$ e $C_{ijkl}(1) = C_{ijkl}^0$, o que significa que a solução final tende a apresentar densidades zero ou um em todos os elementos, dentro de um contexto de penalização dos valores intermediários da densidade relativa, resultando num projeto “preto e branco”. De acordo com Bendsøe e Sigmund (1999), para problemas de otimização topológica com restrição de volume, o valor para p deve ser suficientemente grande, normalmente se requer $p \geq 3$, para que se tenha um projeto 0-1. A razão para isto é que o volume é proporcional a ρ , ao mesmo tempo em que a rigidez não cresce proporcionalmente em relação a ρ com a mesma velocidade do volume, conseqüentemente, a penalização das densidades intermediárias produz resultados melhores sem que haja a singularidade da matriz de rigidez.

Mesmo com emprego do SIMP podem aparecer densidades relativas intermediárias no projeto final. Segundo Bendsøe e Sigmund (1999), os valores de densidade intermediários podem ser idealizados como um material compósito constituído por vazios (material poroso). Assim, partindo-se dessa idealização os autores chegaram a seguinte inequação para estruturas bidimensionais

$$p \geq p^*(\nu) = \max \left\{ \frac{2}{1-\nu}, \frac{4}{1+\nu} \right\} \quad (5.2.2)$$

a qual implica em $p \geq 3$. Na Equação (5.2.3) foram aplicados diferentes valores para o coeficiente de Poisson ν , constatando-se que o fator de penalização encontra-se geralmente dentro do intervalo [3,4].

$$p^*(\nu = 0) = 4 \quad p^*\left(\nu = \frac{1}{3}\right) = 3 \quad p^*\left(\nu = \frac{1}{2}\right) = 4 \quad (5.2.3)$$

A Figura 21 mostra a curva que representa a parametrização do módulo de elasticidade E pelo método SIMP, para um fator de penalização $p = 3$ e um coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$. Além do mais, a figura também mostra a geometria de um meio periódico que idealiza o módulo de elasticidade correspondente do material compósito.

Independentemente do valor adotado para o coeficiente de Poisson, vários trabalhos adotaram e vem adotando um fator de penalização $p = 3$, tais como Sigmund (2001), Sigmund (2007), Bruggi e Venini (2008), Torii (2007) e Andreassen et al. (2011).

Finalmente, o problema de otimização topológica pode ser definido como

$$\min c(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{d}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{d} = \sum_{e=1}^N (\rho_e)^p \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{d}_e$$

sujeito a

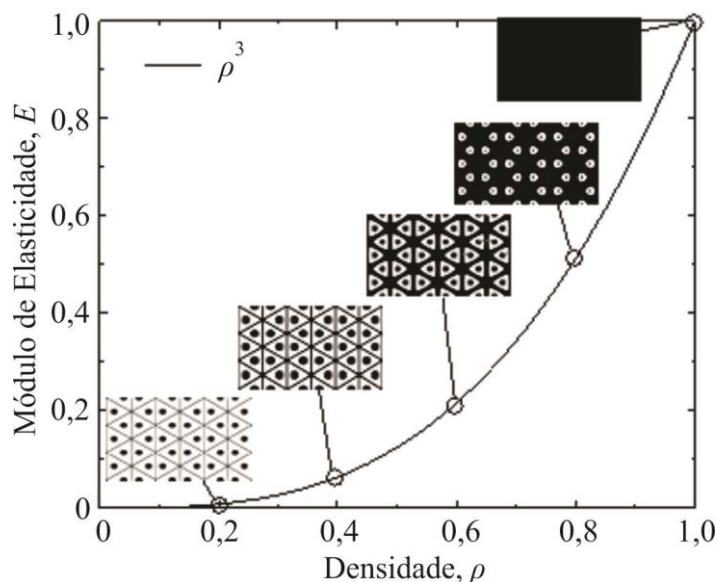
$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f} \tag{5.2.4}$$

$$\frac{V(\boldsymbol{\rho})}{\bar{V}} = f(\boldsymbol{\rho})$$

$$0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1$$

em que \mathbf{d} e \mathbf{f} são os vetores globais de deslocamento e de força, respectivamente, ρ_e é a densidade relativa associada a cada elemento, p é o fator de penalização adotado, \mathbf{d}_e é o vetor de deslocamentos do elemento, \mathbf{K}_e^0 é a matriz de rigidez para um elemento com densidade relativa unitária e N é o número de elementos utilizados na discretização do domínio de análise.

Figura 21 - Microestrutura do material periódico idealizado obtido pelo método SIMP com $p = 3$ e para um material base com $\nu = 1/3$.



Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund (1999).

Tradicionalmente, existem duas formas diferentes de buscar uma solução ótima para o problema de otimização topológica apresentado na Equação (5.2.4). A primeira são as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), que nada mais é do que as condições necessárias para que um determinado ponto do conjunto solução seja realmente um mínimo global de um problema. Em outras palavras, todas as soluções ótimas devem satisfazer essas

condições. Dessa forma, é possível encontrar a topologia ótima de uma estrutura a partir do emprego dessas condições.

Porém, segundo Christensen e Klarbring (2009), o emprego das condições de KKT pode ser muito complicado, devido a necessidade de resolver as equações não lineares e as desigualdades que compõem as condições de KKT. Dessa forma, o autor propõe o emprego da dualidade lagrangiana para a obtenção da solução ótima, uma vez que este método se apresenta mais amigável, especialmente para problemas de otimização estrutural.

5.3 Dualidade de Lagrange

Iniciando pelo seguinte problema de otimização geral:

$$\begin{aligned} \min g_0(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a } g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

em que foram desprezadas as restrições de igualdade, sendo então um problema que pretende minimizar a função objetivo g_0 sujeito apenas a restrições de desigualdade g_i . Além do mais, o problema (5.3.1) é assumido como convexo e o resultado ótimo é dado por p^* . A função lagrangiana para o problema é definida como

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = g_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i g_i \quad (5.3.2)$$

em que λ_i são os multiplicadores de Lagrange para cada uma das restrições g_i do problema e l é o número de restrições de desigualdade. A função dual de Lagrange é definida como

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x} \in \chi} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \quad (5.3.3)$$

em que χ é o conjunto de soluções admissíveis para o problema. A ideia principal da dualidade lagrangiana origina-se a partir da seguinte observação:

$$\text{para qualquer } \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \varphi(\boldsymbol{\lambda}) \leq p^* \quad (5.3.4)$$

ou seja, para qualquer valor não negativo de $\boldsymbol{\lambda}$, $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ é o limite mínimo para a solução ótima. Assim, se \mathbf{x}^* é um ponto de mínimo para o problema original, então

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x} \in \chi} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) = p^* \quad (5.3.5)$$

Visto que a função dual de Lagrange fornece limites inferiores para $\forall \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$, pode-se rescrever o problema (5.3.1) da seguinte forma:

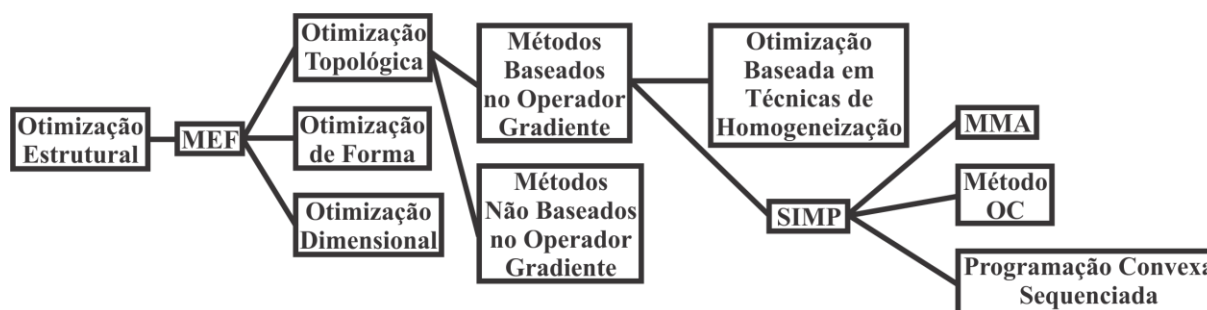
$$\begin{aligned} \max g_0(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a } \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

o qual é chamado de problema dual de Lagrange (DOMKE, 2013).

Para que o problema (5.3.6) seja equivalente ao problema apresentado em (5.3.1) é necessário que o teorema de Slater seja atendido. Segundo Christensen e Klarbring (2009), o teorema de Slater estabelece que se o problema (5.3.1) é convexo e existe um ponto $\hat{\mathbf{x}} \in \chi$ tal que $g_i(\hat{\mathbf{x}}) < 0, i = 1, \dots, l$. Se \mathbf{x}^* é um mínimo local de (5.3.1). Então existe um $\boldsymbol{\lambda}^*$ tal que $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ é um ponto de KKT de (5.3.1).

Ao invés de resolver o problema (5.3.1), pode-se resolver (5.3.6), que no caso possui restrições mais simples: $\mathbf{x} \in \chi$ e $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$. Esta é a maior vantagem da teoria da dualidade, uma vez que em (5.3.1) existem várias restrições que podem ser complicadas de lidar diretamente (CRISTENSEN; KLARBRING, 2009). Além do mais, o problema dual de Lagrange tem a vantagem da função φ ser sempre côncava, evitando-se, assim, o emprego de técnicas de aproximação durante a solução do problema de otimização.

Figura 22 - Layout da otimização estrutural.



Fonte: Adaptado de Shukla e Misra (2013).

5.4 Método OC

Uma abordagem clássica para a solução de um problema de otimização estrutural com domínio discretizado é o método OC. Este tem se tornado uma ferramenta eficiente para a solução de problemas de otimização topológica. A Figura 22 mostra o fluxograma para otimização estrutural, em que o SIMP é um método de distribuição de densidade com base no operador gradiente e o método OC é um dos modelos matemáticos que pode ser empregado para obtenção da solução ótima do SIMP (SHUKLA; MISRA, 2013). Conforme apresentado na Figura 22, outros modelos matemáticos podem ser empregados para solução do SIMP, tais como o Método das Assíntotas Móveis ou MMA e a programação convexa sequenciada.

Porém, segundo Shukla e Misra (2013), o método OC tem provado ser mais eficiente para os casos de otimização de forma e topológica, em que há uma grande quantidade de variáveis de projeto. Além do mais, a velocidade de convergência no modelo OC independe do número de variáveis de projeto.

5.4.1 Obtenção do passo iterativo da variável de projeto

O método OC é um procedimento frequentemente utilizado para atualizar de forma interativa tanto as variáveis de projeto como os multiplicadores de Lagrange. Seguindo o esquema sugerido em Montes (2016), pode-se definir a seguinte função de Lagrange para o problema de otimização apresentado na Equação (5.2.4):

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \lambda) = c(\boldsymbol{\rho}) + \lambda f(\boldsymbol{\rho}) \quad (5.4.1)$$

em que λ é multiplicador de Lagrange associado a restrição de volume do problema. A derivada da função (5.4.1) é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_e} = \frac{\partial c}{\partial \rho_e} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \rho_e} \quad (5.4.2)$$

em que a derivada do primeiro termo da Equação (5.4.2) é estabelecida como

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -p\rho_e^{p-1} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{d}_e \quad (5.4.3)$$

Como \mathbf{K}_e^0 é uma matriz semidefinida positiva, logo, a derivada parcial apresentada em (5.4.3) não pode ser positiva. Sendo assim, o resultado da derivada parcial da energia de deformação $c(\boldsymbol{\rho})$ em relação às variáveis de projeto $\boldsymbol{\rho}$ é multiplicado por -1 .

A derivada do segundo termo da Equação (5.4.2) pode ser estabelecida como

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_e} = \frac{V_e}{\bar{V}} \quad (5.4.4)$$

que advém do fato de $f(\boldsymbol{\rho})$ poder ser expresso como

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\sum_{e=1}^N \rho_e V_e}{\bar{V}} \quad (5.4.5)$$

sendo, V_e o volume de cada elemento e \bar{V} o volume do domínio de referência. Igualando-se a Equação (5.4.2) a zero, chega-se na seguinte equação:

$$p\rho_e^{p-1} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{d}_e = \lambda \frac{V_e}{\bar{V}} \quad (5.4.6)$$

que pode ser simplificada pela seguinte expressão:

$$\rho_e = \rho_e \frac{p\rho_e^{p-1} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{d}_e}{\lambda \frac{V_e}{V}} \quad (5.4.7)$$

Assim, a função de atualização da variável de projeto é dada por

$$\rho_e = \rho_e \frac{-\frac{\partial c}{\partial \rho_e}}{\lambda \frac{\partial f}{\partial \rho_e}} = \rho_e B_e \quad (5.4.8)$$

De acordo com Montes (2016), deve-se fazer as seguintes observações a respeito da função de atualização apresentada na Equação (5.4.8):

- O numerador de B_e $\left(-\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = p\rho_e^{p-1} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{d}_e\right)$ é sempre um número escalar positivo, devido ao fato de $\rho_e \in (\rho_{min}, 1]$ e $\mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{d}_e > 0$ para qualquer $\mathbf{d}_e \neq \mathbf{0}$
- O denominador de B_e $\left(\lambda \frac{V_e}{V}\right)$ é também sempre positivo, visto que λ é um multiplicador positivo de Lagrange e $\frac{\partial f}{\partial \rho_e}$ resulta da divisão entre medidas de volumes.

Dessa forma, a Equação (5.4.8) atualiza valores positivos nas densidades relativas dos elementos, ainda assim, não há garantia de que as restrições limites de ρ_e ($0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1$), prescritas na Equação (5.2.4), sejam atendidas.

5.4.2 Abordagem heurística

Segundo Montes (2016), o próximo ajuste a ser aplicado a relação obtida na Equação (5.4.8) é a parametrização por meio do parâmetro η , normalmente chamado de fator de amortecimento. Este fator é empregado com a finalidade de regularizar possíveis oscilações que venham ocorrer durante o processo de convergência do problema de otimização. Assim, a Equação (5.4.8) pode ser atualizada por meio do seguinte passo iterativo:

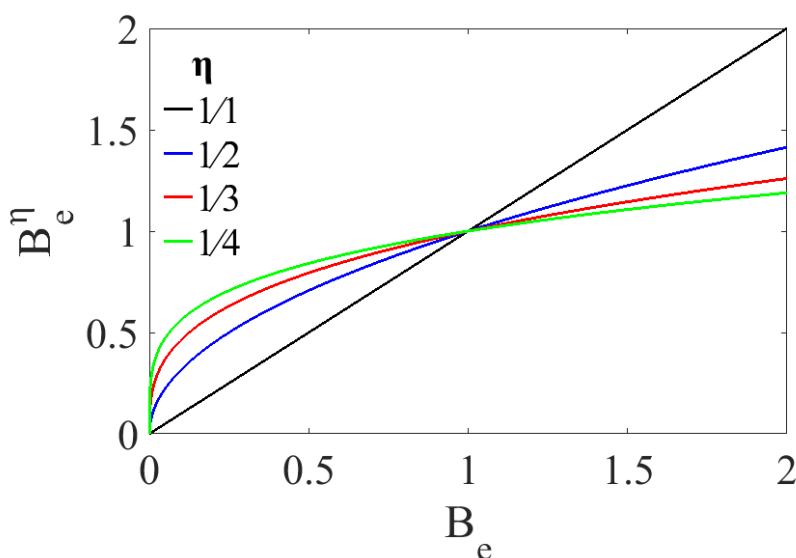
$$\rho_e^{k+1} = \rho_e^k \left(\frac{-\frac{\partial c}{\partial \rho_e}}{\lambda \frac{\partial f}{\partial \rho_e}} \right)^\eta = \rho_e^k B_e^\eta \quad (5.4.9)$$

em que k representa a iteração atual.

O uso do parâmetro η está diretamente relacionado com uma melhora no desempenho do método, uma vez que este torna mais suave os valores obtidos por B_e^η (MONTES, 2016).

A Figura 23 mostra como o fator η muda os valores obtidos para a expressão B_e^η , fazendo com que esta se aproxime de 1.

Figura 23 - Influência do parâmetro η em B_e^η .



Fonte: Adaptado de Montes (2016).

De forma geral, no método OC, o fator de amortecimento desempenha um papel muito importante. Um valor muito alto de η pode acelerar a convergência do problema para a solução final ótima desejada, porém, isto pode causar oscilações no processo iterativo (MA; KIKUCHI; HAGIWARA, 1993). Essas dificuldades no processo de convergência são normalmente causadas por oscilações nos deslocamentos dos nós que se encontram nas regiões menos densas da estrutura no passo iterativo (HE; KANG; WANG, 2014). Segundo Ma et al. (1993), a adoção de valores pequenos de η podem prevenir a divergência do algoritmo de otimização, porém, isto resultará em pequenas mudanças nas variáveis de projeto, o que tornará o processo de convergência mais lento. Ainda, segundo os autores, o método OC não oferece um guia teórico a respeito de qual é o melhor valor para o parâmetro η . Porém, eles sugerem que este seja mantido o mais próximo possível de 1/2.

Ainda como parte do método OC, deve-se definir um parâmetro m , que estabelece um intervalo de variação $[\rho_e - m, \rho_e + m]$ para cada densidade relativa ρ_e . Caso a Equação (5.4.9) gere um valor fora deste intervalo, a variável é então atualizada para o valor limite mais próximo determinado neste intervalo. Segundo Montes (2016), esta abordagem heurística destina-se a:

- Evitar mudanças abruptas durante o processo iterativo.

- Garantir que as densidades relativas não ultrapassem o intervalo $(\rho_{min}, 1]$, estabelecido como restrição na Equação (5.2.4).

Considerando-se então o intervalo de variação, a Equação (5.4.9) pode ser então redefinida como

$$\rho_e^{k+1} = \begin{cases} \max(\rho_{min}, \rho_e - m), & \text{se } \rho_e^k B_e^\eta \leq \max(\rho_{min}, \rho_e - m) \\ \rho_e^k B_e^\eta, & \text{se } \max(\rho_{min}, \rho_e - m) < \rho_e^k B_e^\eta < \min(1, \rho_e + m) \\ \min(1, \rho_e + m), & \text{se } \min(1, \rho_e + m) \leq \rho_e^k B_e^\eta \end{cases} \quad (5.4.10)$$

Segundo a teoria da dualidade de Lagrange, apresentada na Seção 5.3, se o problema de otimização é convexo e existe ao menos um ponto que atende a todas as restrições, então existe também um valor ótimo para o conjunto de multiplicadores de Lagrange λ^* tal que $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$, sendo \mathbf{x}^* um mínimo local, o que resulta num ponto de mínimo global pelas condições de KKT. De acordo com Montes (2016), o parâmetro λ pode ser calculado pelo método da bisseção, o qual procura um valor que atende a restrição de volume, como estabelecido no algoritmo a seguir:

1. Um intervalo de procura é estabelecido como $[\lambda_{inf}, \lambda_{sup}]$.
2. Enquanto $\lambda_{sup} - \lambda_{inf} > \epsilon$ faça.
 - a. $\lambda_{tmp} = \frac{\lambda_{inf} + \lambda_{sup}}{2}$.
 - b. As densidades relativas temporárias ρ_{tmp} são então atualizadas utilizando λ_{tmp} e o volume para esta estrutura é dado por $V(\rho_{tmp})$.
 - c. Se $V(\rho_{tmp}) > \bar{V}$: $\lambda_{inf} = \lambda_{tmp}$.
 - d. Se $V(\rho_{tmp}) \leq \bar{V}$: $\lambda_{sup} = \lambda_{tmp}$.
3. Finaliza a função enquanto.
4. $\lambda = \lambda_{tmp}$.

O problema apresentado em (5.2.4) poderia ter sido resolvido pelo MMA, ou, ainda, por outros métodos amplamente utilizados na otimização estrutural. Porém, neste trabalho, optou-se pelo método OC por conta da sua simplicidade e facilidade de aplicação, possibilitando-se, assim, realizar a comparação de forma mais eficiente entre os métodos numéricos empregados no processo de otimização de estruturas elásticas contínuas (MEF e TVF), que são objeto de estudo dessa pesquisa.

5.5 Instabilidades numéricas

Apesar da otimização topológica ser um método robusto e popular, ainda existem uma variedade de problemas relacionados às instabilidades numéricas. Frequentemente, alguns desses problemas surgem devido à modificação do problema geral de otimização topológica por meio da relaxação e penalização das variáveis de projeto. Além do mais, outra causa bastante apontada advém da discretização do domínio de referência pelo método dos elementos finitos. Segundo Zhang (2014), os fatores que prejudicam a qualidade dos resultados ótimos são: regiões acinzentadas, padrão do tabuleiro de xadrez, dependência de malha, fronteira irregular, mínimos locais e cálculos onerosos.

5.5.1 Regiões acinzentadas

Idealmente, a densidade relativa ρ_e de cada elemento deve assumir os valores 0 ou 1, porém, na prática, este parâmetro assume qualquer valor real dentro do intervalo $[0,1]$. Assim, os valores intermediários entre 0 e 1 podem gerar materiais cujas propriedades não possuem nenhum significado físico. As regiões em que há a presença desses materiais são chamadas de regiões acinzentadas, a qual delimitam de forma imprecisa os limites da estrutura ótima (ZHANG, 2014). A Figura 24 ilustra regiões acinzentadas em resultados ótimos. De acordo com Zhang (2014), várias técnicas podem ser empregadas para eliminar a região acinzentada de uma topologia ótima, entre elas, destacam-se: os métodos de projeção, os filtros morfológicos e os filtros de controle de densidade.

Figura 24 - Região acinzentada de metade de uma viga MBB com topologia ótima.



Fonte: Zhang (2014).

5.5.2 Padrão do tabuleiro de xadrez

Segundo Shukla et al. (2013), a instabilidade numérica do tabuleiro de xadrez é definida como um padrão periódico de valores altos e baixos de densidades artificiais, formando uma região em que esses elementos se dispõem como num tabuleiro de xadrez. A

Figura 25 mostra uma viga MBB (*Messerschmitt-Bölkow-Blom*), na qual foram observadas regiões que apresentam este padrão na solução ótima de problemas de minimização da função de flexibilidade da estrutura. Este é um tipo de instabilidade indesejável no resultado final e não corresponde a uma distribuição ótima do material no domínio de referência. Além do mais, as estruturas em que se observa este tipo de padrão possui uma rigidez artificial e a sua configuração é muito difícil de ser manufaturada (SHUKLA et al., 2013).

Figura 25 - Exemplo de resultado ótimo com a instabilidade numérica do padrão de tabuleiro de xadrez.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Díaz e Sigmund (1995) mostraram que o aparecimento do padrão do tabuleiro de xadrez se deve a aproximações numéricas oriundas do método dos elementos finitos. Estas aproximações podem levar o elemento estrutural, com uma configuração de tabuleiro de xadrez, a apresentar uma rigidez artificial. Quando isto acontece, essas regiões de tabuleiro aparentam ser localmente mais rígidas do que as outras partes da estrutura. Assim, Díaz e Sigmund (1995) sugeriram adotar elementos finitos de ordem superior, de modo a evitar problemas numéricos causados pelo padrão do tabuleiro de xadrez. Os autores observaram que os elementos bidimensionais quadráticos com 9 nós tendem a obter distribuições mais homogêneas, ao passo que os elementos bidimensionais lineares com 4 nós tendem a produzir uma rigidez artificial elevada, levando à formação do tabuleiro de xadrez.

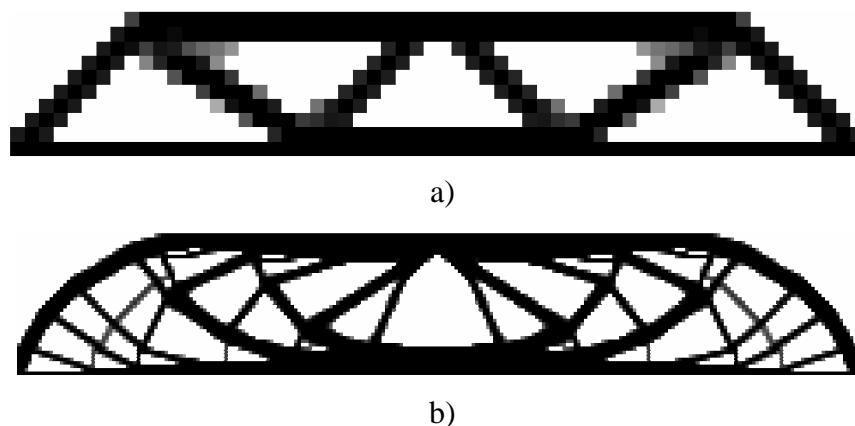
Segundo Sant'ana e Fonseca (2002), a adoção de elementos finitos de ordem superior deixa o problema com um custo computacional ainda maior e, em alguns casos, este não consegue convergir para uma solução ótima, especialmente quando o fator de penalização do SIMP é maior que 3.

5.5.3 Dependência de malha

Segundo Olinquevicz (2015), a dependência de malha consiste na alteração dos resultados do problema de otimização a medida em que a malha do modelo vai sendo refinada, mantendo-se o domínio de referência e as condições de contorno. O problema da

dependência de malha é exemplificado na Figura 26, em que é apresentada a topologia ótima para uma viga MBB discretizada em 600 e 9600 elementos. Assim, percebe-se que o resultado do refinamento da malha leva a uma estrutura diferente e com elementos mais esbeltos.

Figura 26 - Viga MBB: a) solução ótima para uma discretização com 600 elementos, b) solução ótima para uma discretização com 9600 elementos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

De acordo com Sigmund e Petersson (1998), o problema da dependência de malha pode ser dividido em duas categorias: a) o problema de se obter estruturas mais esbeltas com o refinamento da malha, o qual indica a inexistência de solução, e b) problemas com vários pontos ótimos, os quais indicam a não unicidade de solução. Na categoria a) o refinamento em estruturas mais esbeltas gera um valor estritamente melhor da função objetivo, enquanto que na categoria b) uma estrutura mais refinada é sempre possível, mas não é necessária. Geralmente, os engenheiros de projeto estão mais interessados nos resultados mais precisos, desprezando-se, assim, possíveis resultados oriundos de malhas menos refinadas (ZHANG, 2014).

5.5.4 Fronteira irregular

Alguns métodos na otimização topológica, tais como o método *level set* e aqueles que aplicam programação matemática inteira, são capazes de produzir formas geométricas bem delimitadas. Porém, métodos baseados em critérios de relaxação, como o método SIMP, possuem uma maior dificuldade de produzirem topologias ótimas com fronteiras bem delimitadas. Vários métodos gráficos vêm sendo desenvolvidos e empregados para detectar e representar os limites da estrutura ótima. Porém, na maioria dos casos, uma malha bem

refinada e a aplicação do método SIMP mostram-se suficientes para obtenção de formas regulares da estrutura otimizada.

5.5.5 Mínimos locais

Segundo Sigmund e Petersson (1998), o problema dos mínimos locais está associado a característica de se obter diferentes soluções para o mesmo problema discretizado, quando os parâmetros de entrada do algoritmo são alterados. Assim, pequenas variações em parâmetros, como limites móveis, geometria do domínio de referência, número de elementos, valor da primeira iteração, etc. podem resultar em grandes mudanças na solução ótima obtida (SIGMUND; PETERSSON, 1998). Geralmente, estes problemas ocorrem devido a não convexidade do problema de otimização topológica, podendo então possuir inúmeros mínimos locais. Esta variedade de mínimos locais não pode ser negligenciada pelos engenheiros de projeto em função do mínimo global, pois esses pontos também representam soluções que atendem as restrições do problema.

Segundo Sigmund e Petersson (1998), algoritmos, que utilizam processos iterativos, são comuns na solução de problemas convexos, enquanto que para o caso de problemas não-convexos, os algoritmos iterativos normalmente convergem para o ponto estacionário mais próximo, o qual não é necessariamente a solução global do problema. Assim, os autores sugeririam o esquema continuado de penalização, visto que este é construído considerando-se informações globais do processo e, assim, está mais suscetível a garantir uma convergência global para o problema.

A ideia do método continuado de penalização é modificar gradualmente o problema de otimização a partir de um problema convexo “artificial” até um problema não convexo “original” por meio de um determinado número de passos sucessivos. Em cada passo é utilizado um algoritmo baseado no operador gradiente até a convergência global do problema. Em outras palavras, no método SIMP, o método da continuação consiste em aumentar gradualmente o valor do fator de penalização de $p = 1$ no início do problema até o valor final desejado (OLINQUEVICZ, 2015).

5.5.6 Custo computacional

O custo computacional está diretamente ligado ao tempo de processamento de uma determinada simulação no computador. Assim, essa é uma questão primordial no emprego de técnicas computacionais que fazem uso de simulações, como no caso da otimização

topológica de estruturas. Segundo Zhang (2014), nos algoritmos de otimização topológica, a análise iterativa amplia a desvantagem de certos algoritmos, tais como aqueles que empregam algoritmos genéticos, programações matemáticas inteiras e o método continuado de penalização. Além do mais, deve-se observar que o emprego de elementos finitos de ordem superior, tais como elementos bidimensionais quadráticos com 8 e 9 nós, elevam também o custo computacional do problema de otimização.

6 AVALIAÇÃO DA FUNÇÃO DE FLEXIBILIDADE

Neste capítulo, propõe-se avaliar e discutir a função de flexibilidade e seu gradiente em relação à densidade relativa artificial do material, uma vez que se pretende utilizar a minimização da flexibilidade da estrutura como função objetivo para o processo de otimização topológica.

6.1 Trabalho externo realizado e energia de deformação

Na Mecânica dos Sólidos, uma força realiza trabalho quando provoca um deslocamento infinitesimal na direção de aplicação da carga. Logo, o trabalho é uma grandeza escalar e pode ser definido como

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{v} \quad (6.1.1)$$

ou seja, se a intensidade de \vec{F} for aumentada gradualmente a partir de zero até um valor limite de P , se o deslocamento final do sólido na direção de \vec{F} é Δ e se o material apresenta um comportamento elástico linear, então o trabalho realizado pode ser obtido integrando-se a Equação (6.1.1) de 0 a Δ , o que resulta na seguinte expressão:

$$W = \frac{1}{2} P \Delta \quad (6.1.2)$$

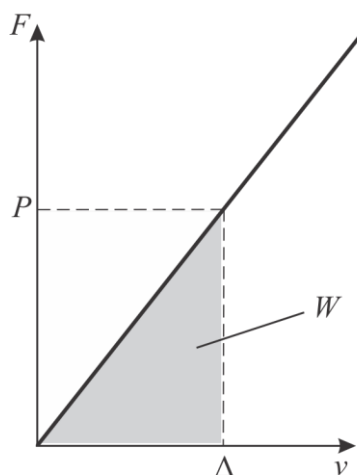
Em resumo, quando uma força com intensidade P é aplicada a um corpo, o trabalho total realizado é representado pela área do gráfico abaixo da curva que relaciona força e deslocamento, conforme ilustrado na Figura 27 (HIBBELER, 2010).

O trabalho realizado pelas forças superficiais e de corpo em um sólido elástico é armazenado no interior do corpo na forma de energia de deformação (SAAD, 2009). Para um corpo idealmente elástico, a energia armazenada pode ser completamente recuperada desde que o sólido retorne à configuração indeformada. De modo a quantificar este comportamento, a energia total de deformação armazenada em um sólido elástico ocupando uma região Ω é dada pela seguinte integral avaliada no domínio:

$$U_T = \iiint_{\Omega} \bar{U} d\Omega \quad (6.1.3)$$

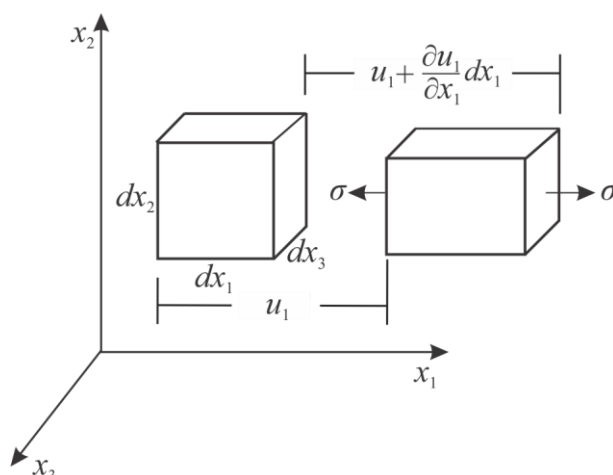
em que \bar{U} é a energia de deformação específica.

Figura 27 - Gráfico da intensidade da força aplicada versus deslocamento.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 28 - Deformação causada por tensão uniaxial.



Fonte: Adaptado de Saad (2009).

Considerando-se, inicialmente, o trabalho realizado por uma tensão uniaxial sem a presença de forças de corpo, conforme mostrado na Figura 28. Durante o processo de deformação, assume-se que a tensão aumenta gradualmente de zero a σ_{11} , de tal forma que os efeitos inerciais possam ser desprezados. Assim, a energia infinitesimal armazenada é igual ao trabalho realizado no elemento e esta pode ser expressa como

$$d\bar{U} = \int_0^{\sigma_{11}} \sigma d\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 - \int_0^{\sigma_{11}} \sigma du_1 dx_2 dx_3 \quad (6.1.4)$$

Aplicando-se as relações de deformação-deslocamento, apresentadas na Equação (2.1.23), e a lei de Hooke para materiais elásticos isotrópicos, apresentada na Equação (2.3.1), a Equação (6.1.4) pode ser reescrita como

$$d\bar{U} = \int_0^{\sigma_{11}} \sigma d\varepsilon_{11} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^{\sigma_{11}} \sigma \frac{d\sigma}{E} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\sigma_{11}^2}{2E} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (6.1.5)$$

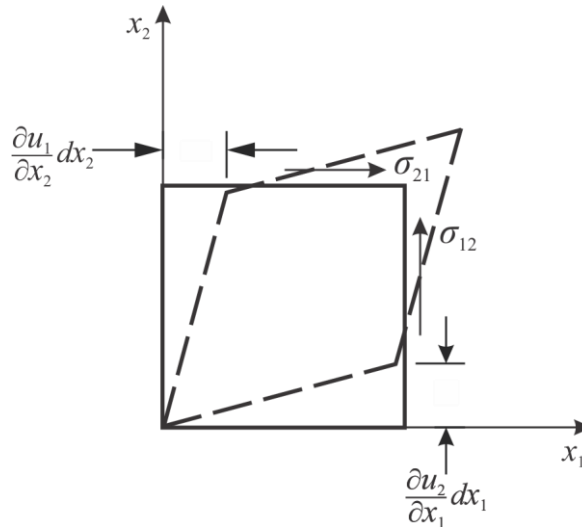
A energia de deformação por unidade de volume é dada por

$$\bar{U} = \frac{d\bar{U}}{dx_1 dx_2 dx_3} \quad (6.1.6)$$

Assim, tem-se que a energia de deformação específica para um material elástico linear sujeito a uma tensão uniaxial é dada por

$$\bar{U} = \frac{\sigma_{11}^2}{2E} = \frac{1}{2} \sigma_{11} \varepsilon_{11} \quad (6.1.7)$$

Figura 29 - Deformação causada por tensões de cisalhamento.



Fonte: Adaptado de Saad (2009).

Na análise da energia de deformação causada por tensões de cisalhamento, considera-se o mesmo elemento paralelepípedo mostrado na Figura 28, e o caso aqui analisado considera que o paralelepípedo está submetido às tensões de cisalhamento σ_{12} e σ_{21} , conforme apresentado na Figura 29. Seguindo procedimento similar ao apresentado acima, a energia de deformação para o caso de cisalhamento puro é encontrada como

$$d\bar{U} = \frac{1}{2} \sigma_{12} dx_2 dx_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \right) + \frac{1}{2} \sigma_{21} dx_1 dx_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \quad (6.1.8)$$

Como $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ é uma propriedade do tensor de tensões, advinda da satisfação do equilíbrio de momentos, então a Equação (6.1.8) pode ser expressa como

$$d\bar{U} = \frac{1}{2} \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (6.1.9)$$

Assim, a energia de deformação específica para o caso de cisalhamento puro pode ser escrita como

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \sigma_{12} \varepsilon_{12} \quad (6.1.10)$$

Segundo Saad (2009), os resultados originados das Equações (6.1.7) e (6.1.10) mostram que a energia de deformação não é uma função linear das tensões ou deformações, assim, o princípio da superposição dos efeitos não pode ser aplicado diretamente no desenvolvimento da energia de deformação para um estado multiaxial de tensões. Porém, de acordo com o princípio da conservação da energia mecânica, o trabalho realizado não depende da ordem de aplicação da carga, mas somente da intensidade final das tensões e das deformações (SAAD, 2009). Assim, este princípio permite que as tensões normais e cisalhantes sejam aplicadas uma de cada vez e produzam uma energia específica de deformação total para um caso geral avaliada por

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (6.1.11)$$

Finalmente, a energia de deformação total pode ser definida como (redefinição da Equação (6.1.3))

$$U_T = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (6.1.12)$$

6.2 Função de flexibilidade

A otimização topológica foi formulada, desde o princípio, como um problema que busca a melhor distribuição de uma determinada quantidade de material dentro de um domínio de referência. Desde o primeiro trabalho, apresentado por Bendsøe e Kikuchi (1988), grande parte dos avanços na otimização topológica vem sendo obtidos por meio de metodologias baseadas na minimização da energia de deformação elástica da estrutura relacionada com o trabalho das cargas externas (COLLET et al., 2017). Este problema é normalmente denominado de minimização da flexibilidade estrutural, ou, ainda, maximização da rigidez global da estrutura.

Os conceitos que envolvem a otimização topológica baseada na minimização da flexibilidade estão bem compreendidos e existem vários resultados que obtiveram sucesso (COLLET et al, 2017), como podem ser vistos em Eschenauer e Olhoff (2001), Rozvany

(2009) e Bendsøe e Sigmund (2003). A função de flexibilidade pode então ser definida como duas vezes a energia de deformação provocada pelo deslocamento \mathbf{u} . Assim, esta função pode ser expressa como

$$c(\mathbf{u}) = 2U(\mathbf{u}) = \iiint_{\Omega} 2\bar{U}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) d\Omega = \iiint_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) d\Omega \quad (6.2.1)$$

em que $c(\mathbf{u})$ é a função de flexibilidade, $U(\mathbf{u})$ é a energia de deformação, $\bar{U}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ é a energia de deformação específica, $\sigma_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ é o tensor de tensão de engenharia, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ é o tensor de deformação de engenharia, \mathbf{u} é o vetor contendo os deslocamentos e \mathbf{x} é o vetor que contém os valores para a variável de projeto do problema.

O trabalho realizado pelas forças externas de superfície, na ausência de forças de corpo, pode ser expresso como

$$2W = \iint_{S_{\sigma}} t_i u_i dS = \iint_S t_i u_i dS - \iint_{S_u} t_i u_i dS \quad (6.2.2)$$

em que t_i é o vetor de tensões, u_i é o vetor de deslocamentos, S_{σ} é a região do contorno da estrutura em que os vetores de tensão são prescritos, S_u é a região do contorno da estrutura em que os deslocamentos são prescritos e $S = S_{\sigma} \cup S_u$. Assumindo-se que na superfície S_u existe uma vinculação perfeita e $u_i = 0$, então a Equação (6.2.2) é reescrita como

$$2W = \iint_S t_i u_i dS \quad (6.2.3)$$

Aplicando-se a relação de Cauchy na Equação (6.2.3), obtém-se a seguinte expressão:

$$2W = \iint_S \sigma_{ji} n_j u_i dS \quad (6.2.4)$$

Aplicando-se o teorema da divergência, que se encontra no Apêndice A, chega-se na seguinte equação:

$$2W = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} u_i d\Omega + \iiint_{\Omega} \sigma_{ji} \varepsilon_{ij} d\Omega + \iiint_{\Omega} \sigma_{ji} \omega_{ij} d\Omega \quad (6.2.5)$$

em que $\omega_{ij} = 1/2 (\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i)$ é o tensor de rotações de engenharia. Considerando-se as leis que governam a teoria da elasticidade, observam-se as seguintes propriedades dos tensores apresentados na Equação (6.2.5): $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ e $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$. Consequentemente, as

seguintes relações podem ser obtidas: $\sigma_{ji}\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ e $\sigma_{ji}\omega_{ij} = 0$. Assim, a Equação (6.2.5) pode ser então simplificada, resultando na seguinte expressão:

$$2W = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} u_i d\Omega + 2U(\mathbf{u}) \quad (6.2.6)$$

Admitindo-se que o equilíbrio é satisfeito pontualmente e que não há forças de corpo, observa-se que a seguinte equação é satisfeita:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad (6.2.7)$$

Dessa forma, a função de flexibilidade pode ser obtida pela seguinte expressão:

$$c(\mathbf{u}) = 2U(\mathbf{u}) = 2W(\mathbf{u}) = \iint_{S_{\sigma}} t_i u_i dS \quad (6.2.8)$$

Deve-se salientar que a Equação (6.2.7) é satisfeita somente para formulação em elementos finitos cujo elemento adotado é o trilateral com três nós e para formulação de ordem zero da teoria de volumes finitos. Porém, esta consideração é estendida para as demais formulações, com o intuito de simplificar e facilitar a convergência da função objetivo.

6.3 Função de flexibilidade aplicada à teoria generalizada de volumes finitos

6.3.1 Avaliação do trabalho realizado em função das grandezas cinemáticas e estáticas

O deslocamento na direção x_1 na face vertical de um subvolume pode ser definido pela superposição dos efeitos apresentados na Figura 30. Nesta ilustração, são apresentados três polinômios de Legendre que compõem o componente horizontal do campo de deslocamentos na face vertical do subvolume. Assim, o deslocamento na direção x_1 pode ser definido como

$$u_1(x_2) = \mu_{1(0)} + x_2 \mu_{1(1)} + \frac{1}{2} \left(3x_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) \mu_{1(2)} \quad (6.3.1)$$

em que $\mu_{1(m)}$ são coeficientes desconhecidos que definem o deslocamento horizontal nas faces verticais de um subvolume.

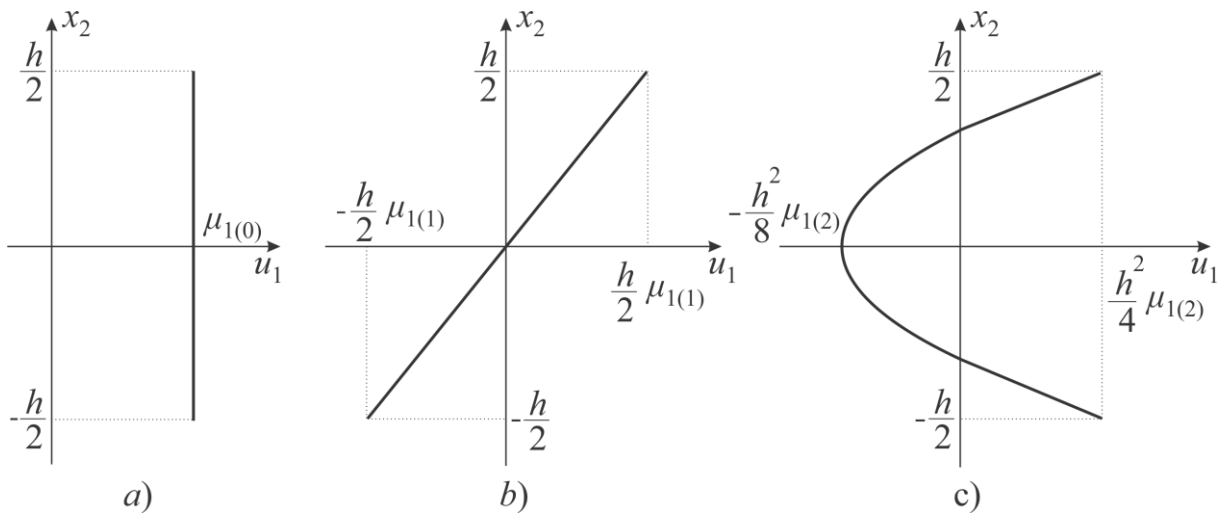
A rotação anti-horária da face vertical é representada pela derivada primeira do deslocamento $u_1(x_2)$ em relação a x_2 . Assim, esta pode ser expressa como

$$\theta_{12}(x_2) = -\frac{du_1}{dx_2}(x_2) = -\mu_{1(1)} - 3x_2\mu_{1(2)} \quad (6.3.2)$$

Ao mesmo tempo, a curvatura da face vertical é representada pela derivada segunda do deslocamento $u_1(x_2)$ em relação a x_2 , logo, tem-se

$$\kappa_{12}(x_2) = -\frac{d^2u_1}{dx_2^2}(x_2) = -3\mu_{1(2)} \quad (6.3.3)$$

Figura 30 - Deslocamento horizontal na face vertical de um subvolume na teoria generalizada de volumes finitos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

De forma semelhante, a tração na direção x_1 atuante na face vertical pode ser definida pela superposição dos efeitos apresentados na Figura 31. Nesta ilustração, são apresentados os três polinômios de Legendre que compõem o componente horizontal do vetor de tensões atuante na face vertical do subvolume. Dessa forma, a tração na direção x_1 atuante nas faces verticais de um subvolume é definida pela seguinte expressão:

$$t_1(x_2) = \tau_{1(0)} + x_2\tau_{1(1)} + \frac{1}{2}\left(3x_2^2 - \frac{h^2}{4}\right)\tau_{1(2)} \quad (6.3.4)$$

em que $\tau_{1(m)}$ são coeficientes a serem determinados.

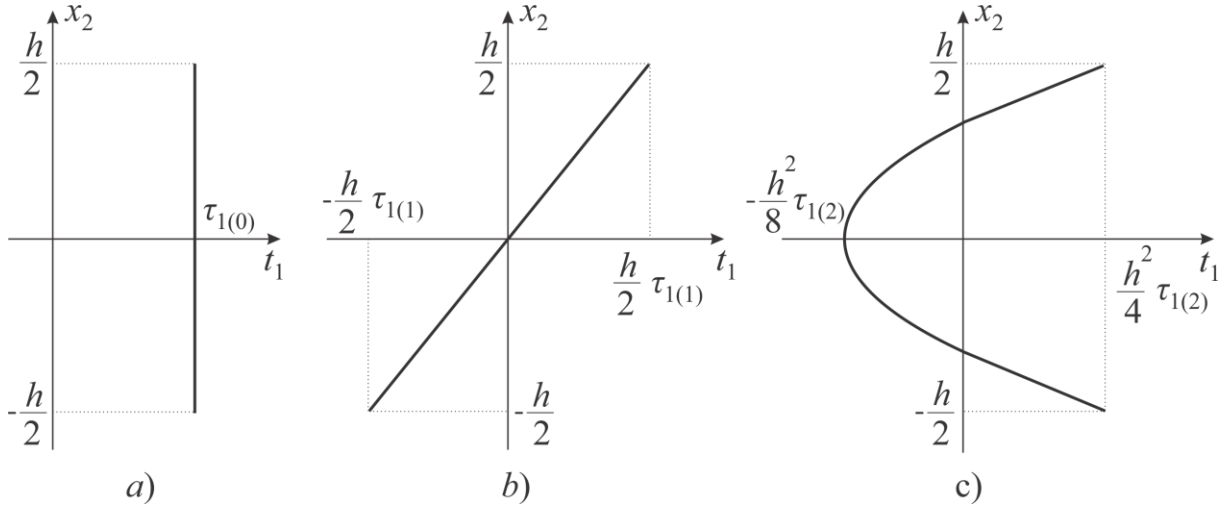
A derivada primeira do componente normal do vetor de tensão é representada por

$$t_{1/2}(x_2) = -\frac{dt_1}{dx_2}(x_2) = -\tau_{1(1)} - 3x_2\tau_{1(2)} \quad (6.3.5)$$

enquanto que a derivada segunda do componente normal do vetor de tensão pode ser expressa como

$$t_{1/22}(x_2) = -\frac{d^2 t_1}{dx_2^2}(x_2) = -3\tau_{1(2)} \quad (6.3.6)$$

Figura 31 - Componente horizontal do vetor de tensões atuante na face vertical de um subvolume na teoria generalizada de volumes finitos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Os valores médios das grandezas cinemáticas e estáticas atuantes nas faces verticais de um subvolume podem ser expressos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u_1(x_2) dx_2 = \mu_{1(0)} \\ \bar{t}_1 &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} t_1(x_2) dx_2 = \tau_{1(0)} \\ \bar{\theta}_{12} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \omega_{12}(x_2) dx_2 = -\mu_{1(1)} \\ \bar{t}_{1/2} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} t_{1/2}(x_2) dx_2 = -\tau_{1(1)} \\ \bar{\kappa}_{12} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \kappa_{12}(x_2) dx_2 = -3\mu_{1(2)} \\ \bar{t}_{1/22} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} t_{1/22}(x_2) dx_2 = -3\tau_{1(2)} \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Assim, as Equações (6.3.1) e (6.3.4) podem ser reescritas como

$$u_1(x_2) = \bar{u}_1 - x_2 \bar{\omega}_{12} - \frac{1}{6} \left(3x_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) \bar{\kappa}_{12}$$

$$t_1(x_2) = \bar{t}_1 - x_2 \bar{t}_{1/2} - \frac{1}{6} \left(3x_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) \bar{t}_{1/22}$$
(6.3.8)

enquanto que o trabalho realizado pelo componente horizontal do vetor de tensão na face vertical do subvolume, expresso na Equação (6.3.8), pode ser avaliado da seguinte forma

$$\int_{-h/2}^{h/2} t_1(x_2) u_1(x_2) dx_2 = \bar{u}_1 \bar{t}_1 h + \bar{\theta}_{12} \bar{t}_{1/2} \frac{h^3}{12} + \bar{\kappa}_{12} \bar{t}_{1/22} \frac{h^5}{720}$$
(6.3.9)

em que $\bar{t}_1 h = R_1$ é o componente horizontal da força resultante atuante na face vertical do subvolume, $\bar{t}_{1/2} (h^3/12) = M_R$ é o momento resultante atuante na face vertical do subvolume e $\bar{t}_{1/22} (h^5/720) = S_R$ é o momento resultante de segunda ordem atuante na face vertical do subvolume. As grandezas estáticas R_1 , M_R e S_R são energeticamente conjugadas às grandezas cinemáticas \bar{u}_1 , $\bar{\theta}_{12}$ e $\bar{\kappa}_{12}$, respectivamente.

As grandezas estáticas resultantes atuantes nas faces verticais de um subvolume são definidas pelas seguintes expressões:

$$R_1 = \int_{-h/2}^{h/2} t_1(x_2) dx_2 = \bar{t}_1 h$$

$$R_2 = \int_{-h/2}^{h/2} t_2(x_2) dx_2 = \bar{t}_2 h$$

$$M_R = - \int_{-h/2}^{h/2} t_1(x_2) x_2 dx_2 = \bar{t}_{1/2} \frac{h^3}{12}$$

$$S_R = \int_{-h/2}^{h/2} t_1(x_2) \frac{1}{6} \left(3x_2^2 - \frac{h^2}{4} \right) dx_2 = \bar{t}_{1/22} \frac{h^5}{720}$$
(6.3.10)

Assim, o trabalho total realizado na face vertical de um subvolume pode ser avaliado por

$$W = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} t_1(x_2) u_1(x_2) dx_2 + \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} t_2(x_2) u_2(x_2) dx_2$$
(6.3.11)

resultando em

$$W = \bar{u}_1 \bar{t}_1 h + \bar{u}_2 \bar{t}_2 h + \bar{\theta}_{12} \bar{t}_{1/2} \frac{h^3}{12} + \bar{\kappa}_{12} \bar{t}_{1/22} \frac{h^5}{720}$$
(6.3.12)

Seguindo processo semelhante ao apresentado nas Equações (6.3.11) e (6.3.12), o trabalho realizado em um subvolumo q pode ser estabelecido como

$$2W_q(\mathbf{u}^{(q)}, \boldsymbol{\theta}^{(q)}, \boldsymbol{\kappa}^{(q)}) = \mathbf{R}^{(q)} \mathbf{u}^{(q)} + \mathbf{M}_R^{(q)} \boldsymbol{\theta}^{(q)} + \mathbf{S}_R^{(q)} \boldsymbol{\kappa}^{(q)} \quad (6.3.13)$$

em que $\mathbf{R}^{(q)} = [R_1^{(1,q)}, R_2^{(1,q)}, R_1^{(2,q)}, R_2^{(2,q)}, R_1^{(3,q)}, R_2^{(3,q)}, R_1^{(4,q)}, R_2^{(4,q)}]^T$ é o vetor local formado pelas forças resultantes atuantes nas faces do subvolumo, $\mathbf{M}_R^{(q)} = [M_R^{(1,q)}, M_R^{(2,q)}, M_R^{(3,q)}, M_R^{(4,q)}]^T$ é o vetor formado pelos momentos resultantes atuantes nas faces do subvolumo e $\mathbf{S}_R^{(q)} = [S_R^{(1,q)}, S_R^{(2,q)}, S_R^{(3,q)}, S_R^{(4,q)}]^T$ é o vetor formado pelos momentos resultantes de segunda ordem que atuam nas faces de um subvolumo.

A partir da Equação (6.3.13), pode-se chegar a seguinte expressão para o trabalho realizado no subvolumo q de uma estrutura discretizada em volumes finitos:

$$2W_q(\mathbf{u}^{(q)}, \boldsymbol{\theta}^{(q)}, \boldsymbol{\kappa}^{(q)}) = [\mathbf{L}_{(0)}^{(q)} \mathbf{t}^{(q)}]^T \mathbf{u}^{(q)} + [\mathbf{L}_{(1)}^{(q)} \mathbf{t}_V^{(q)}]^T \boldsymbol{\theta}^{(q)} + [\mathbf{L}_{(2)}^{(q)} \mathbf{t}_{V^2}^{(q)}]^T \boldsymbol{\kappa}^{(q)} \quad (6.3.14)$$

em que

$$\mathbf{L}_{(0)}^{(q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{(0)}^{(1,q)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{(0)}^{(2,q)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{(0)}^{(3,q)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{(0)}^{(4,q)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{(1)}^{(q)} = \begin{bmatrix} L_{(1)}^{(1,q)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{(1)}^{(2,q)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{(1)}^{(3,q)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{(1)}^{(4,q)} \end{bmatrix} \quad (6.3.15)$$

$$\mathbf{L}_{(2)}^{(q)} = \begin{bmatrix} L_{(2)}^{(1,q)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{(2)}^{(2,q)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{(2)}^{(3,q)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{(2)}^{(4,q)} \end{bmatrix}$$

sendo

$$\mathbf{L}_{(0)}^{(p,q)} = \begin{bmatrix} L_p^{(q)} & 0 \\ 0 & L_p^{(q)} \end{bmatrix} \quad (6.3.16)$$

em que $L_p^{(q)}$ é a dimensão da face p do subvolum q , conforme apresentado anteriormente na Equação (4.1.17), e

$$L_{(1)}^{(p,q)} = \frac{L_p^{(q)^3}}{12} \quad (6.3.17)$$

$$L_{(2)}^{(p,q)} = \frac{L_p^{(q)^5}}{720}$$

6.3.2 Avaliação da função de flexibilidade

A função de flexibilidade para formulação generalizada da teoria de volumes finitos pode ser apresentada como

$$c(\mathbf{U}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{q=1}^{N_q} 2W_q(\mathbf{u}^{(q)}, \boldsymbol{\theta}^{(q)}, \boldsymbol{\kappa}^{(q)}, \rho_q) \quad (6.3.18)$$

em que \mathbf{U} é o vetor global formado pelos deslocamentos médios nas faces, $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor global formado pelas rotações médias nas faces, $\boldsymbol{\kappa}$ é o vetor global formado pelas curvaturas médias nas faces, $\boldsymbol{\rho}$ é o vetor formado pelas densidades artificiais de cada subvolum da estrutura discretizada e ρ_q é a densidade artificial relativa (variável de projeto) associada ao subvolum q . Com base na Equação (6.3.14), a Equação (6.3.18) pode ser reescrita como

$$c(\mathbf{U}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{q=1}^{N_q} (\rho_q)^p \left[\mathbf{L}_{(0)}^{(q)} \mathbf{t}^{(q)} \right]^T \mathbf{u}^{(q)} + \sum_{q=1}^{N_q} (\rho_q)^p \left[\mathbf{L}_{(1)}^{(q)} \mathbf{t}_{\nabla}^{(q)} \right]^T \boldsymbol{\theta}^{(q)} \quad (6.3.19)$$

$$+ \sum_{q=1}^{N_q} (\rho_q)^p \left[\mathbf{L}_{(2)}^{(q)} \mathbf{t}_{\nabla^2}^{(q)} \right]^T \boldsymbol{\kappa}^{(q)}$$

em que p é o fator de penalização utilizado na abordagem SIMP.

A análise sensitiva da função objetivo pode ser feita pelo gradiente da função de flexibilidade em relação às densidades artificiais. Neste caso, a sensibilidade da função objetivo pode ser expressa como

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_q}(\mathbf{u}^{(q)}, \boldsymbol{\theta}^{(q)}, \boldsymbol{\kappa}^{(q)}, \rho_q) \quad (6.3.20)$$

$$= -p(\rho_q)^{p-1} \left\{ \left[\mathbf{L}_{(0)}^{(q)} \mathbf{t}^{(q)} \right]^T \mathbf{u}^{(q)} + \left[\mathbf{L}_{(1)}^{(q)} \mathbf{t}_{\nabla}^{(q)} \right]^T \boldsymbol{\theta}^{(q)} + \left[\mathbf{L}_{(2)}^{(q)} \mathbf{t}_{\nabla^2}^{(q)} \right]^T \boldsymbol{\kappa}^{(q)} \right\}$$

6.4 Forma alternativa para avaliação da função de flexibilidade

Além da formulação apresentada na Seção 6.3.2, existe outra forma mais eficiente de se avaliar a flexibilidade de uma estrutura discretizada em volumes finitos. Esta alternativa baseia-se na obtenção da flexibilidade da estrutura a partir do trabalho realizado nas faces externas dos subvolumes que se encontram no contorno do domínio de análise. Assim, a função de flexibilidade pode também ser expressa como

$$c(\mathbf{U}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) = \sum_{\bar{\beta}=1}^{N_{\bar{\beta}}} \left[\bar{u}_1^{(\bar{\beta})} \bar{t}_1^{(\bar{\beta})} l_{\bar{\beta}} + \bar{u}_2^{(\bar{\beta})} \bar{t}_2^{(\bar{\beta})} l_{\bar{\beta}} + \bar{\theta}_{21}^{(\bar{\beta})} \bar{t}_{2/1}^{(\bar{\beta})} \frac{l_{\bar{\beta}}^3}{12} + \bar{\kappa}_{21}^{(\bar{\beta})} \bar{t}_{2/11}^{(\bar{\beta})} \frac{l_{\bar{\beta}}^5}{720} \right] + \sum_{\bar{\gamma}=1}^{N_{\bar{\gamma}}} \left[\bar{u}_1^{(\bar{\gamma})} \bar{t}_1^{(\bar{\gamma})} h_{\bar{\gamma}} + \bar{u}_2^{(\bar{\gamma})} \bar{t}_2^{(\bar{\gamma})} h_{\bar{\gamma}} + \bar{\theta}_{21}^{(\bar{\gamma})} \bar{t}_{2/1}^{(\bar{\gamma})} \frac{h_{\bar{\gamma}}^3}{12} + \bar{\kappa}_{21}^{(\bar{\gamma})} \bar{t}_{2/11}^{(\bar{\gamma})} \frac{h_{\bar{\gamma}}^5}{720} \right] \quad (6.4.1)$$

em que $\bar{\beta}$ é o índice associado à face horizontal do contorno (inferior ou superior) com carregamento prescrito, $N_{\bar{\beta}}$ é o número de faces horizontais do contorno com carregamento prescrito, $\bar{\gamma}$ é o índice associado à face vertical do contorno (esquerda ou direita) com carregamento prescrito, $N_{\bar{\gamma}}$ é o número de faces verticais do contorno com carregamento prescrito, $l_{\bar{\beta}}$ é a dimensão vertical do subvolume e $h_{\bar{\gamma}}$ é a dimensão vertical do subvolume. Neste caso, a penalização do método SIMP à densidade relativa do material $(\rho_{\bar{q}})^p$ deve ser aplicada posteriormente em cada subvolume da estrutura, sendo que o indexador \bar{q} é dado por $\bar{q} = \bar{\beta} + (\bar{\gamma} - 1)N_{\bar{\beta}}$.

No caso da versão de primeira ordem da formulação generalizada da teoria de volumes finitos, a função de flexibilidade pode ser obtida pela desconsideração dos efeitos provocados pelas grandezas cinemáticas e estáticas de segunda ordem. Assim, a Equação (6.4.1) pode ser atualizada para

$$c(\mathbf{U}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{\bar{\beta}=1}^{N_{\bar{\beta}}} \left[\bar{u}_1^{(\bar{\beta})} \bar{t}_1^{(\bar{\beta})} l_{\bar{\beta}} + \bar{u}_2^{(\bar{\beta})} \bar{t}_2^{(\bar{\beta})} l_{\bar{\beta}} + \bar{\theta}_{21}^{(\bar{\beta})} \bar{t}_{2/1}^{(\bar{\beta})} \frac{l_{\bar{\beta}}^3}{12} \right] + \sum_{\bar{\gamma}=1}^{N_{\bar{\gamma}}} \left[\bar{u}_1^{(\bar{\gamma})} \bar{t}_1^{(\bar{\gamma})} h_{\bar{\gamma}} + \bar{u}_2^{(\bar{\gamma})} \bar{t}_2^{(\bar{\gamma})} h_{\bar{\gamma}} + \bar{\theta}_{21}^{(\bar{\gamma})} \bar{t}_{2/1}^{(\bar{\gamma})} \frac{h_{\bar{\gamma}}^3}{12} \right] \quad (6.4.2)$$

No que diz respeito ao gradiente da função objetivo, o mesmo pode ser atualizado para

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_q}(\mathbf{u}^{(q)}, \boldsymbol{\theta}^{(q)}, \rho_q) = -p(\rho_q)^{p-1} \left\{ \left[\mathbf{L}_{(0)}^{(q)} \mathbf{t}^{(q)} \right]^T \mathbf{u}^{(q)} + \left[\mathbf{L}_{(1)}^{(q)} \mathbf{t}_V^{(q)} \right]^T \boldsymbol{\theta}^{(q)} \right\} \quad (6.4.3)$$

No caso da versão de ordem zero da formulação generalizada da teoria de volumes finitos, a função de flexibilidade pode ser obtida pela desconsideração das grandezas estáticas e cinemáticas de primeira e segunda ordem. Dessa forma, a flexibilidade pode ser atualizada para

$$c(\mathbf{U}) = \sum_{\bar{\beta}=1}^{N_{\bar{\beta}}} \left[\bar{u}_1^{(\bar{\beta})} \bar{t}_1^{(\bar{\beta})} l_{\bar{\beta}} + \bar{u}_2^{(\bar{\beta})} \bar{t}_2^{(\bar{\beta})} l_{\bar{\beta}} \right] + \sum_{\bar{\gamma}=1}^{N_{\bar{\gamma}}} \left[\bar{u}_1^{(\bar{\gamma})} \bar{t}_1^{(\bar{\gamma})} h_{\bar{\gamma}} + \bar{u}_2^{(\bar{\gamma})} \bar{t}_2^{(\bar{\gamma})} h_{\bar{\gamma}} \right] \quad (6.4.4)$$

Enquanto que o gradiente da função objetivo pode ser atualizado para a seguinte expressão:

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_q}(\mathbf{u}^{(q)}, \rho_q) = -p(\rho_q)^{p-1} \left\{ \left[\mathbf{L}_{(0)}^{(q)} \mathbf{t}^{(q)} \right]^T \mathbf{u}^{(q)} \right\} \quad (6.4.5)$$

6.5 Método OC e a teoria de volumes finitos

Na Seção 5.4 desta dissertação, foi observado que a definição do método OC está intimamente relacionada com a função objetivo (minimização da função de flexibilidade da estrutura) e com as restrições associadas ao problema de otimização. Para o caso da teoria generalizada de volumes finitos observou-se que a função de flexibilidade da estrutura é diferente daquela apresentada inicialmente na Equação (5.2.4). Porém, deve-se salientar que apesar desta diferença, não há a necessidade de se atualizar o passo iterativo para o método OC apresentado na Equação (5.4.10), visto que este está associado diretamente com a sensibilidade da função objetivo, conforme apresentado na Equação (5.4.9). Dessa forma, para aplicação do método OC, baseado na teoria generalizada de volumes finitos, deve-se substituir a sensibilidade da função objetivo, originalmente definida na Seção 5.4, por aquelas definidas nas Equações (6.3.20), (6.4.3) e (6.4.5), e que estão respectivamente associadas às versões de segunda, primeira e zero ordem da teoria generalizada de volumes finitos.

7 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são analisados três exemplos bidimensionais distintos, em que se aplicam tanto as três versões da teoria generalizada de volumes finitos como os elementos Q4 e Q8 do método dos elementos finitos, considerando-se um estado plano de tensões. Dessa forma, permite-se comparar a eficácia da nova técnica numérica em relação ao método dos elementos finitos, técnica tradicionalmente empregada na otimização topológica de estruturas elásticas contínuas. Os exemplos estudados são os seguintes: uma viga engastada submetida a uma carga concentrada no meio do bordo direito, uma viga do tipo MBB e uma estrutura *Michell*. Entre os aspectos numéricos que são investigados, encontram-se: número de iterações, tempo de processamento e convergência geral do processo de otimização.

Com o intuito de se ter uma comparação mais justa e transparente entre as técnicas numéricas empregadas, bem como mostrar as instabilidades numéricas que envolvem os algoritmos de otimização baseados em técnicas de homogeneização via MEF, os resultados a serem apresentados são obtidos sem a aplicação de filtros, ou seja, sem nenhum tipo de processamento de imagem. Além do mais, para se evitar problemas numéricos causados por mínimos locais, o esquema continuado de penalização é adotado. Neste caso, o fator de penalização p aumenta gradualmente, assumindo os valores de 1, 2, 3 e 4, procurando-se, desta forma, evitar possíveis mínimos locais, com uma convergência gradual para o projeto “preto e branco” almejado.

O critério de convergência adotado é baseado na máxima diferença entre passos sucessivos da função de densidade “artificial” relativa do material, assim, o loop finaliza quando o seguinte critério é satisfeito:

$$\max(|\boldsymbol{\rho}^{k+1} - \boldsymbol{\rho}^k|) < \text{TOL} \quad (7.1)$$

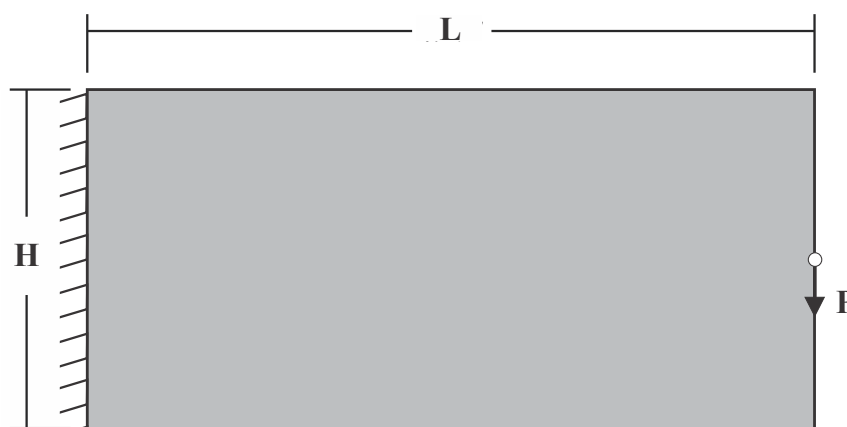
em que $\boldsymbol{\rho}^k$ é o vetor de densidades “artificiais” relativas do material do passo anterior e $\boldsymbol{\rho}^{k+1}$ é o vetor de densidades do passo atual. Os valores adotados para os parâmetros numéricos do modelo são os seguintes: $\text{TOL} = 0,01$, $\rho_{\min} = 0,001$, $m = 0,2$, $\epsilon = 10^{-4}$, $\lambda_{\inf}^{\text{inicial}} = 0$ e $\lambda_{\sup}^{\text{inicial}} = 10^5$. Com relação ao parâmetro η do método OC, este varia para cada modelo analisado, buscando-se sempre o valor mais próximo a $1/2$, que evite a não convergência do problema por conta da ocorrência de fenômenos oscilatórios durante o processo iterativo. O ambiente computacional empregado, em termos de linguagem de programação e computador,

pode ser descritos como: MatLab R2016a (64-bits)/Intel® Core™ i5-4200U CPU @ 1.60 GHz 2.30 GHz/8.0 GB RAM/64-bits.

7.1 Estudo de caso 1: viga engastada.

O primeiro exemplo estudado é uma viga engastada no bordo esquerdo com uma carga concentrada aplicada no meio do bordo direito, conforme apresentado na Figura 32. Na concepção do modelo, são adotadas unidades consistentes para os parâmetros geométricos e físicos de entrada. A Figura 33 mostra as topologias ótimas obtidas aplicando-se a versão de ordem zero da TVF, enquanto que as Figuras 35 e 37 apresentam, respectivamente, as mesmas topologias obtidas empregando-se as versões de primeira e segunda ordem da TVF. Por conseguinte, as Figuras 39 e 41 mostram as topologias obtidas aplicando-se os elementos Q4 e Q8 do método dos elementos finitos, respectivamente. As Figuras 34, 36, 38, 40 e 42 apresentam os respectivos gráficos, para cada topologia ótima obtida, para as versões de ordem zero, um e dois da teoria de volumes finitos e para os elementos Q4 e Q8, que descrevem a evolução da função objetivo ao longo de todo o processo iterativo.

Figura 32 - Viga engastada na extremidade esquerda com uma carga concentrada aplicada no meio do bordo direito.

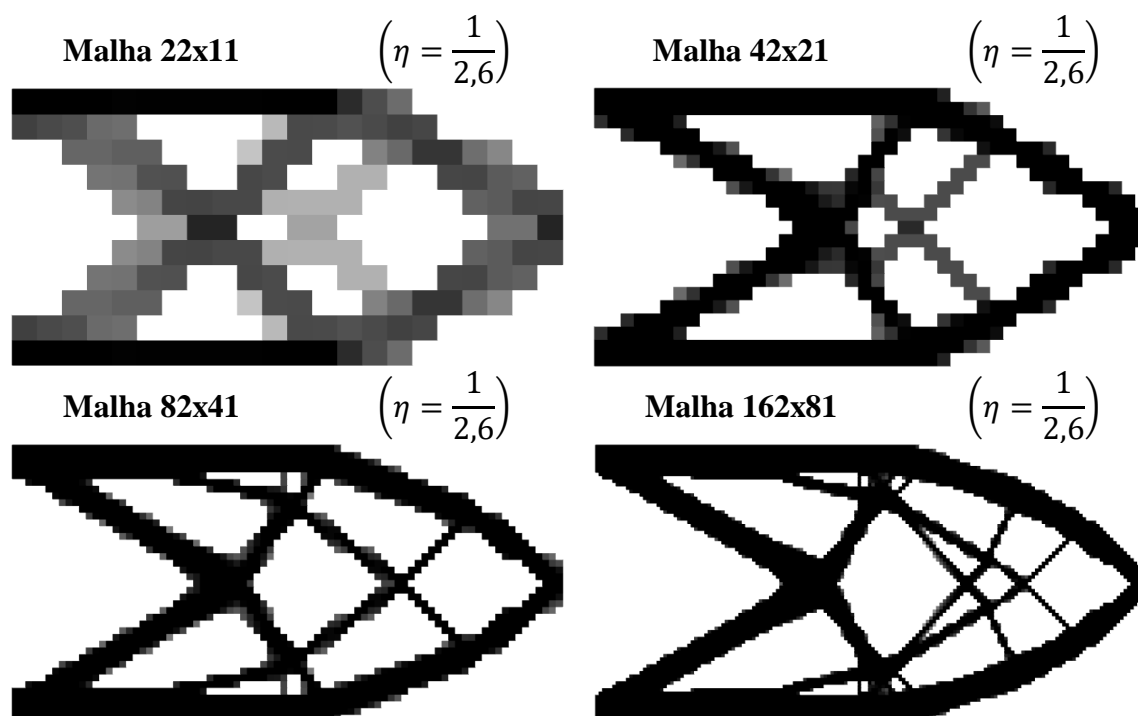


Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

O problema de otimização proposto consiste em encontrar o menor valor possível para função de flexibilidade da estrutura, cujo domínio de análise e condições de contorno encontram-se na Figura 32. O problema também visa encontrar a estrutura mais rígida possível, dada a restrição de volume de 40% do volume total da estrutura. Além do mais, nenhuma técnica de filtragem dos resultados ou processamento de imagem é empregada, com

o intuito de se produzir comparações mais justas e transparentes entre os métodos numéricos empregados.

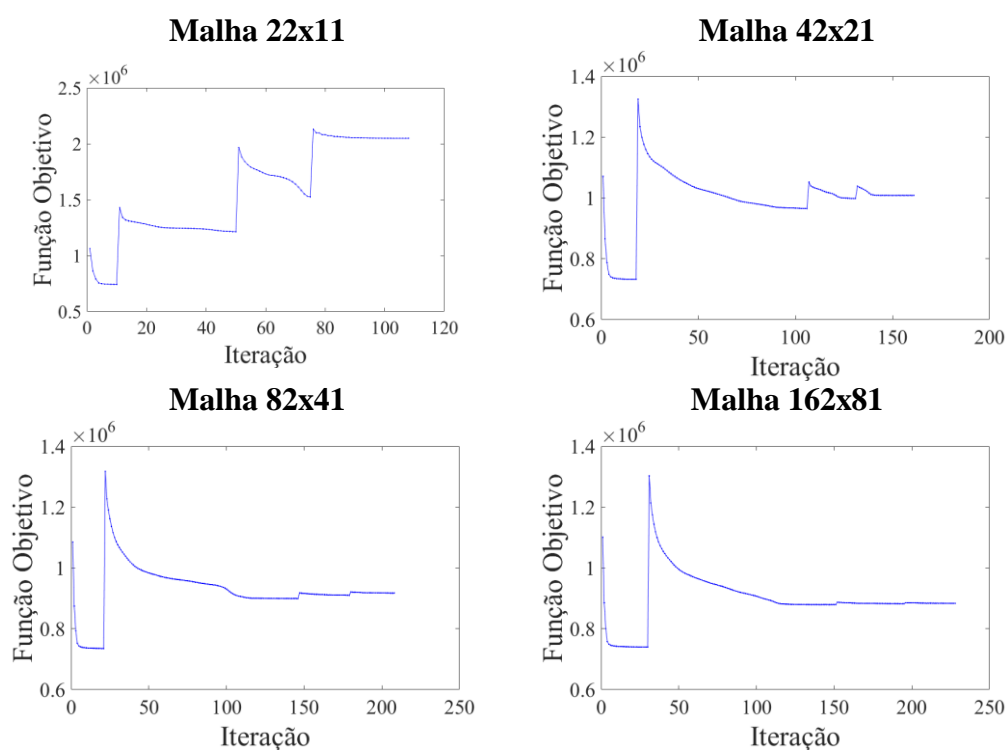
Figura 33 - Topologias ótimas obtidas via TVF de ordem zero para viga engastada submetida a uma carga concentrada na direção vertical.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

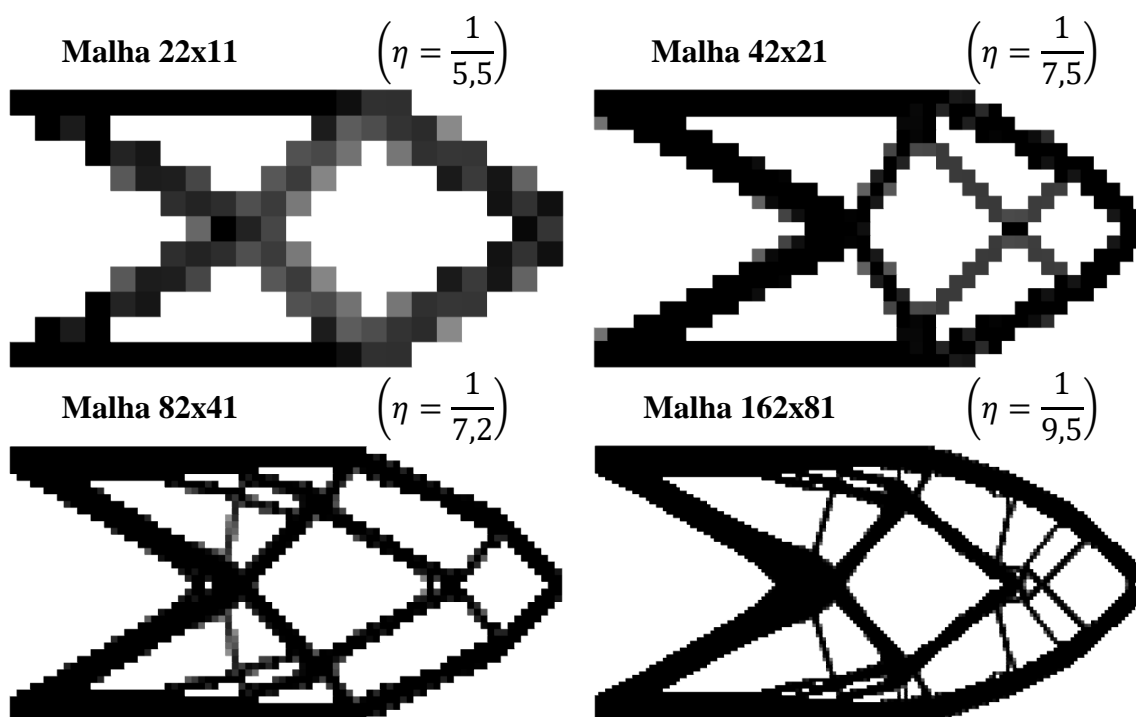
Com base nas topologias ótimas apresentadas nas Figuras 33, 35 e 37, observa-se que a aplicação da teoria de volumes finitos leva a obtenção de estruturas ótimas livres do efeito do padrão de xadrez. Este fato pôde ser observado inclusive para a malha menos refinada (malhas discretizada em 22x11 subvolumes). Por outro lado, os resultados ótimos obtidos mediante a aplicação do método dos elementos finitos, Figuras 39 e 41, mostram a presença do efeito do padrão de xadrez. No caso das topologias ótimas obtidas via aplicação do elemento Q4, o efeito do padrão xadrez ocorreu na estrutura como um todo, como pode ser observado nas topologias apresentadas na Figura 39. No caso do elemento Q8, o efeito do padrão de xadrez é observado apenas localmente, tal como ilustrado na Figura 43, que destaca a região da estrutura ótima em que é observada a presença do efeito do padrão de xadrez para malha mais refinada.

Figura 34 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para a TVF de ordem zero.



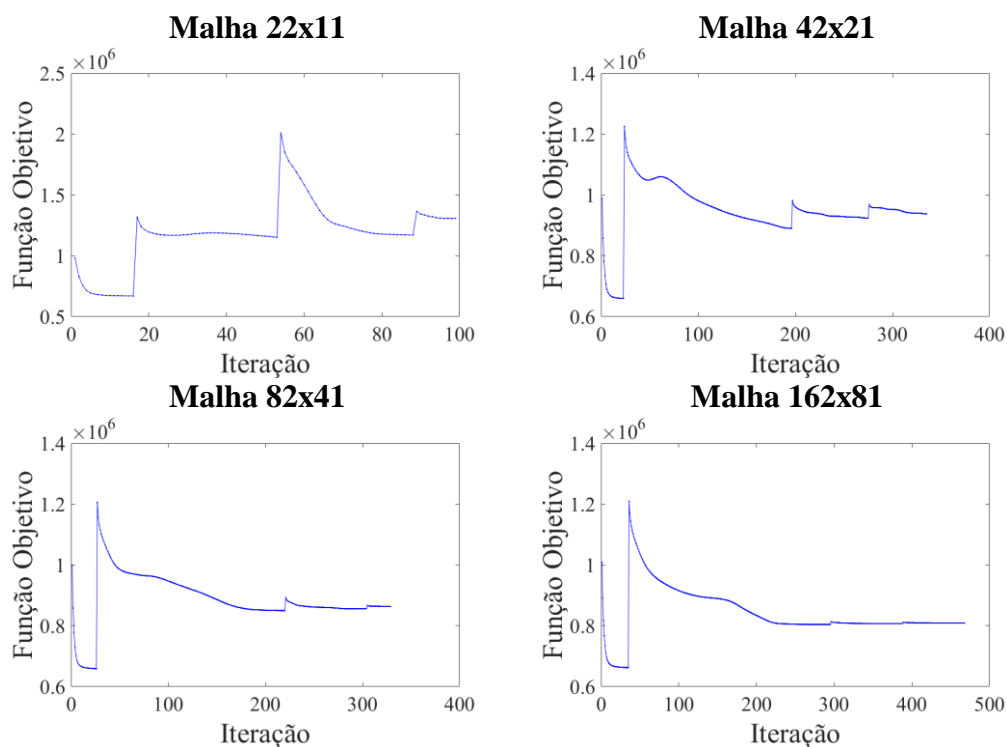
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 35 - Topologias ótimas obtidas via TVF de primeira ordem para viga engastada submetida a uma carga concentrada vertical.



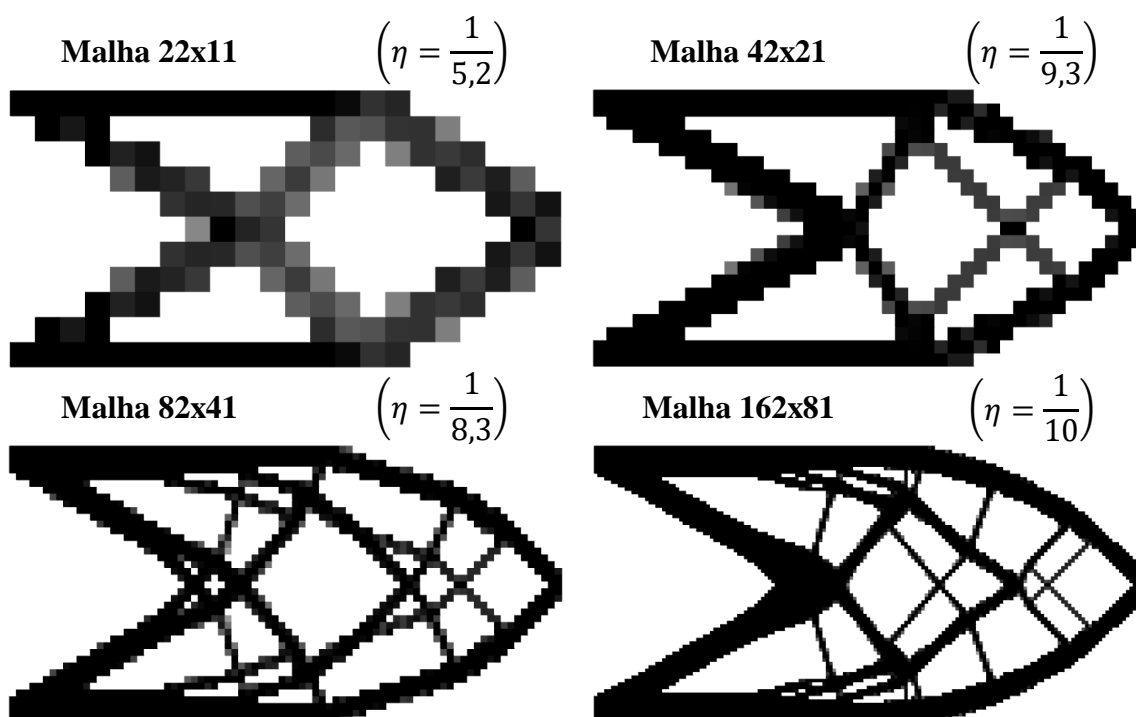
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 36 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para a TVF de primeira ordem.



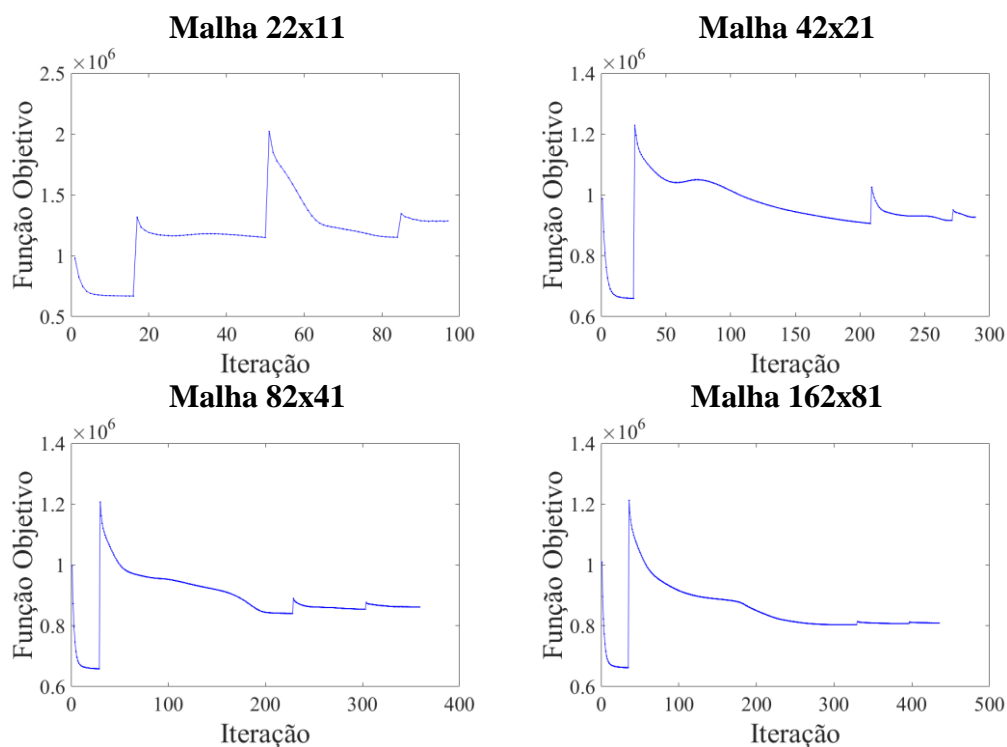
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 37 - Topologias ótimas obtidas via TVF de segunda ordem para viga engastada submetida a uma carga concentrada vertical.



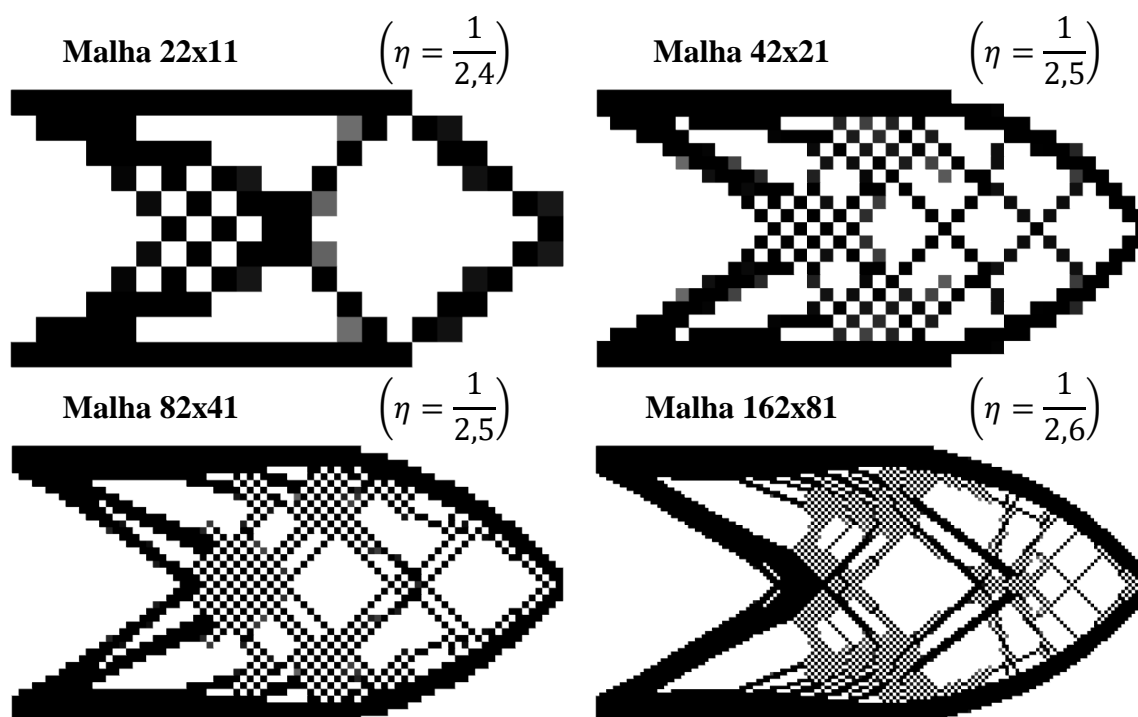
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 38 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para a TVF de segunda ordem.



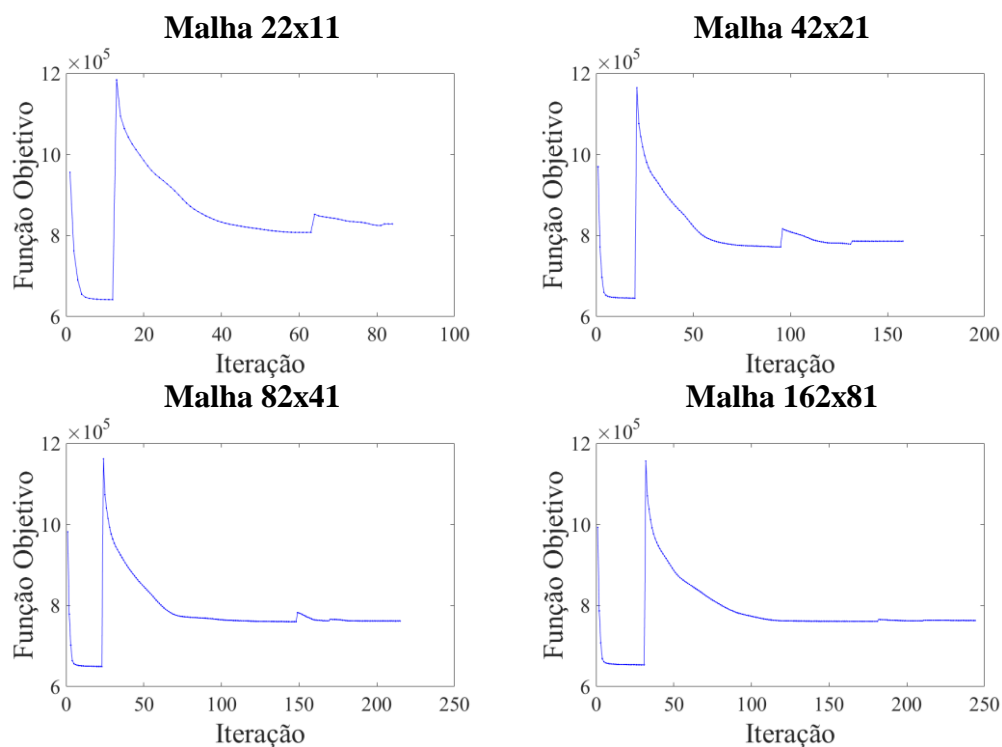
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 39 - Topologias ótimas obtidas via elemento finito Q4 para viga engastada submetida a uma carga concentrada vertical.



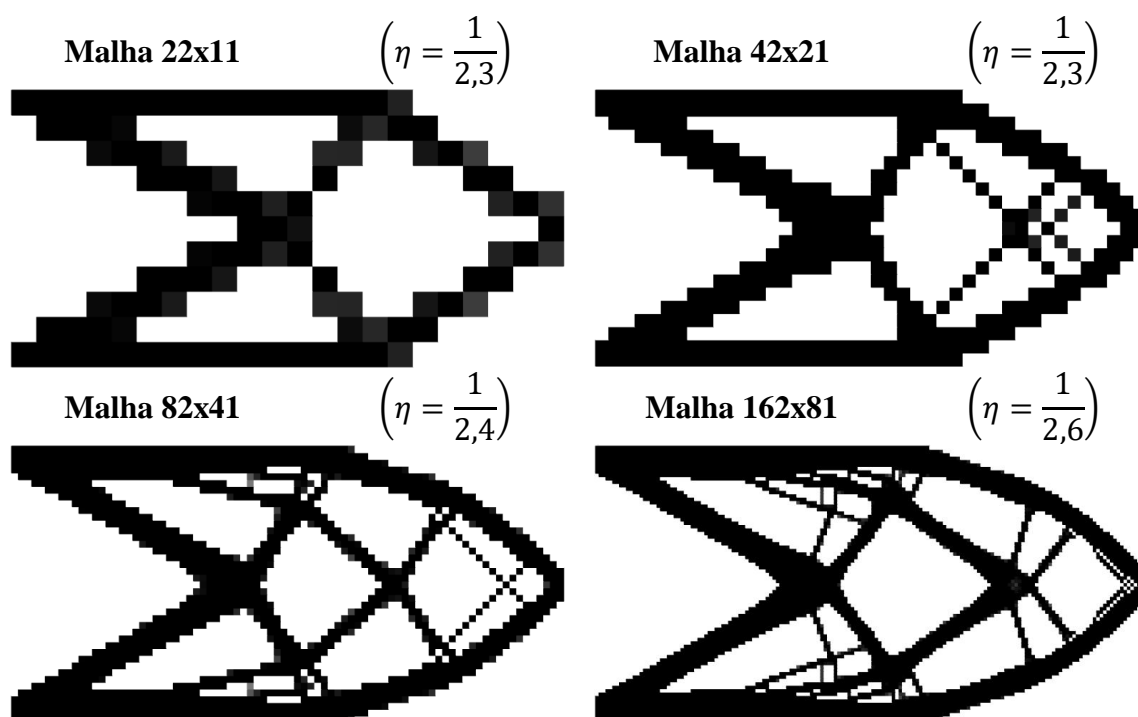
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 40 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para o método dos elementos finitos empregando o elemento Q4.



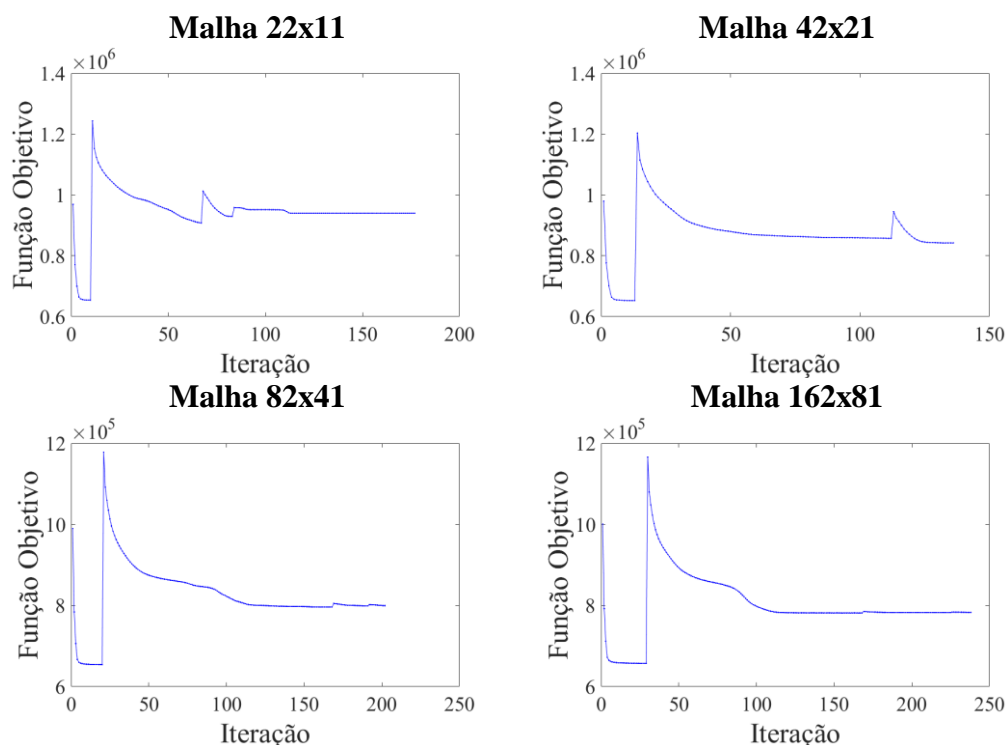
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 41 - Topologias ótimas obtidas via elemento finito Q8 para viga engastada submetida a uma carga concentrada vertical.



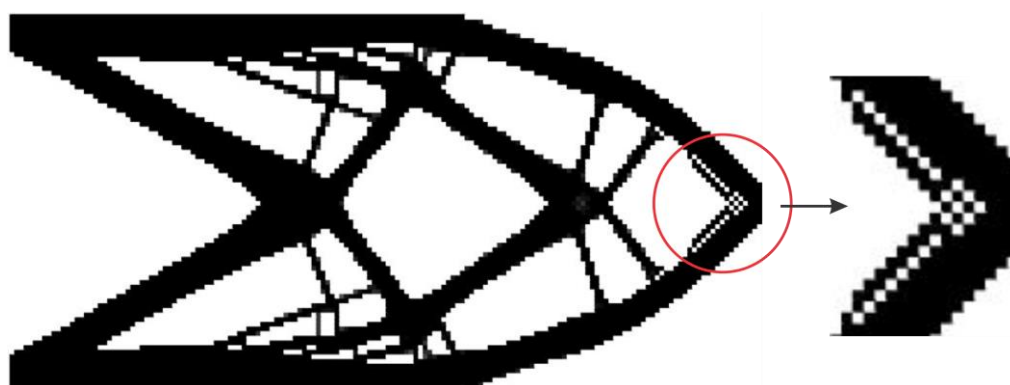
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 42 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para o método dos elementos finitos empregando o elemento Q8.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 43 - Efeito do padrão de xadrez na topologia ótima obtida para a malha 162x81 aplicando-se o elemento Q8.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Outro problema numérico associado à otimização topológica de estruturas contínuas é a dependência de malha, discutida previamente na Seção 5.5.3. Este problema é observado tanto nos modelos empregando a teoria de volumes finitos como naqueles que empregam o método dos elementos finitos. Inicialmente, pode-se cogitar a utilização de filtros ou restrições, que são tradicionalmente empregados para resolver essa questão. Porém, este problema pode ser resolvido de outra maneira, visto que essas técnicas são desenvolvidas para

lidar com aproximações oriundas do método dos elementos finitos, dessa forma, não seria interessante simplesmente replicá-las e aplicá-las no âmbito da teoria de volumes finitos.

De modo geral, os demais gráficos apresentados nas Figuras 34, 36, 38, 40 e 42 mostram uma convergência gradual para os problemas de otimização estudados, especialmente para as malhas mais refinadas (82x41 e 162x81). Certamente, o esquema de penalização continuado produz as assíntotas bem definidas, obtidas nos gráficos das funções objetivos para essas malhas. Outro ponto importante observado nesses gráficos é que o ponto de mínimo global para o processo de otimização é atingido quando o fator de penalização é igual a 1. Nos gráficos apresentados nas Figuras 34, 36, 38, 40 e 42, para as malhas de 82x41 e 162x81, observam-se dois patamares de energia bem definidos, os quais correspondem ao fator de penalização 1 e aos demais coeficientes de penalização adotados. Na análise desses gráficos, observa-se que a minimização da função de flexibilidade da estrutura ocorreu para $p = 1$ e não ao final do processo iterativo quando $p = 4$. Assim, pode-se inferir que a melhor distribuição de material dentro do domínio de análise é justamente a nuvem de cinzas obtida quando são adotados fatores de penalização unitários, ou seja, sem penalização das densidades intermediárias, que correspondem à ocorrência de materiais com diferentes índices de porosidade.

Uma vez que não é empregada nenhuma técnica de filtragem e restrição no processo de otimização topológica, observa-se a necessidade de utilizar o fator de amortecimento η para regularizar as oscilações de deslocamentos nas regiões menos densas durante o processo iterativo. Sendo assim, para cada malha estudada procura-se obter o valor de η mais próximo a $1/2$ sem que se observe a ocorrência de fenômenos oscilatórios. Os valores adotados para o fator de amortecimento estão apresentados em suas respectivas topologias, conforme ilustrado nas Figuras 33, 35, 37, 39 e 41. De modo geral, observa-se uma grande variabilidade no valor de η empregado, especialmente para os casos das versões de primeira e segunda ordem da TVF. Todavia, a única exceção a essa variabilidade no fator de amortecimento é justamente a versão de ordem zero da TVF, que apresenta para todos os casos o mesmo parâmetro $\eta = 1/2,6$.

Os Quadros 01, 02, 03, 04 e 05 mostram os resultados obtidos para a análise de convergência empregando, respectivamente, as versões de ordem zero, primeira e segunda da teoria de volumes finitos e os elementos Q4 e Q8 do método dos elementos finitos. O número de iterações não mudou substancialmente quando são comparados os elementos Q4 e Q8, com a versão de ordem zero da teoria de volumes finitos. Porém, diferenças substanciais são

percebidas quando se compara com o número de iterações observadas para os modelos empregando as versões de primeira e segunda ordem da teoria de volumes finitos. Nesses casos, chega-se a obter mais de 400 iterações para as malhas mais refinadas, que corresponde a quase o dobro de iterações em relação à versão de ordem zero (problema melhor comportado e que apresentou um menor número de iterações). Um fator que explica isso é o parâmetro η , o qual destoou bastante do valor ideal de $1/2$ nesses casos, levando esses problemas a necessitarem de um maior número de iterações para garantia da convergência.

Quadro 01 - Análise de convergência da viga engastada para versão de ordem zero da TVF.

Malha		22x11	42x21	82x41	162x81
Número de iterações	p=1	10	18	21	30
	p=2	40	88	125	121
	p=3	25	25	33	44
	p=4	33	30	29	33
	Total	108	161	208	228
Tempo de processamento (segundos)	p=1	0,29	5,42	59,27	1606,20
	p=2	1,05	22,88	360,16	6408,39
	p=3	0,67	6,39	95,21	2365,07
	p=4	0,87	7,76	89,81	1756,21
	Total	2,88	42,45	604,45	12135,87
Número de Graus de Liberdade (NGL)		1034	3654	13694	52974

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Quadro 02 - Análise de convergência da viga engastada para versão de primeira ordem da TVF.

Malha		22x11	42x21	82x41	162x81
Número de iterações	p=1	16	23	26	35
	p=2	37	173	194	260
	p=3	35	79	84	93
	p=4	11	60	25	80
	Total	99	335	329	468
Tempo de processamento (segundos)	p=1	0,98	25,26	273,94	4146,90
	p=2	2,20	186,88	2020,01	28969,94
	p=3	2,09	84,74	913,50	10944,07
	p=4	0,67	64,97	272,00	9527,94
	Total	5,94	361,85	3479,45	53588,85
NGL		1551	5481	20541	79461

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

O tempo de processamento também variou dependendo do tipo de abordagem, por exemplo, o custo computacional para o algoritmo de otimização empregando o elemento Q8, para a malha mais refinada, é 3,4 vezes superior à mesma análise empregando a versão de

ordem zero da teoria de volumes finitos. Ao passo que a análise empregando o elemento Q4 é 1,5 vezes mais rápido que o modelo que emprega a versão de ordem zero da teoria de volumes finitos, no caso da malha mais refinada. Certamente, o número de graus de liberdade explica a maior eficiência numérica das abordagens baseadas na versão de ordem zero da teoria de volumes finitos e no elemento Q4, uma vez que este define o tamanho do sistema global de equações, resolvido diversas vezes durante o processo de otimização.

Quadro 03 - Análise de convergência da viga engastada para versão de segunda ordem da TVF.

Malha		22x11	42x21	82x41	162x81
Número de iterações	p=1	16	25	29	35
	p=2	34	183	199	294
	p=3	34	63	75	67
	p=4	13	18	56	39
	Total	97	289	359	435
Tempo de processamento (segundos)	p=1	1,61	22,77	338,74	5452,59
	p=2	3,42	172,70	2398,94	46886,24
	p=3	3,50	58,97	915,94	10862,31
	p=4	1,41	16,59	676,65	5999,92
	Total	9,94	271,03	4330,27	69201,06
NGL		2068	7308	27388	105948

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Quadro 04 - Análise de convergência da viga engastada para o elemento Q4.

Malha		22x11	42x21	82x41	162x81
Número de iterações	p=1	12	20	23	31
	p=2	51	75	125	150
	p=3	18	36	21	29
	p=4	3	27	46	34
	Total	84	158	215	244
Tempo de processamento (segundos)	p=1	0,29	3,49	47,78	1097,90
	p=2	0,92	11,16	246,29	4896,18
	p=3	0,87	5,38	39,21	922,09
	p=4	0,05	4,10	86,69	1045,10
	Total	2,13	24,13	419,97	7961,27
NGL		552	1892	6972	26732

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Com relação às versões de ordem superior da teoria de volumes finitos, observa-se um custo computacional um pouco mais elevado, sendo a versão de primeira ordem 1,3 vezes mais lenta em relação à abordagem empregando o elemento Q8 para malha mais refinada, e a versão de segunda ordem 1,7 vezes mais lenta em relação à mesma abordagem. Porém, ao se observar o tempo de processamento em relação ao número de iterações, tem-se que o custo

computacional do passo iterativo, para a malha mais refinada, para as versões de primeira e segunda ordem da teoria de volumes finitos são, respectivamente, de 114,48 e 159,18 segundos, enquanto que a abordagem empregando o elemento Q8 é de 172,79 segundos. Dessa forma, o que prejudica a eficiência dos modelos empregando as versões de primeira e segunda ordem da teoria de volumes finitos são os valores adotados para o fator de amortecimento, visto que os passos iterativos para essas abordagens são mais rápidos que aqueles obtidos empregando o elemento Q8.

Quadro 05 - Análise de convergência da viga engastada para o elemento Q8.

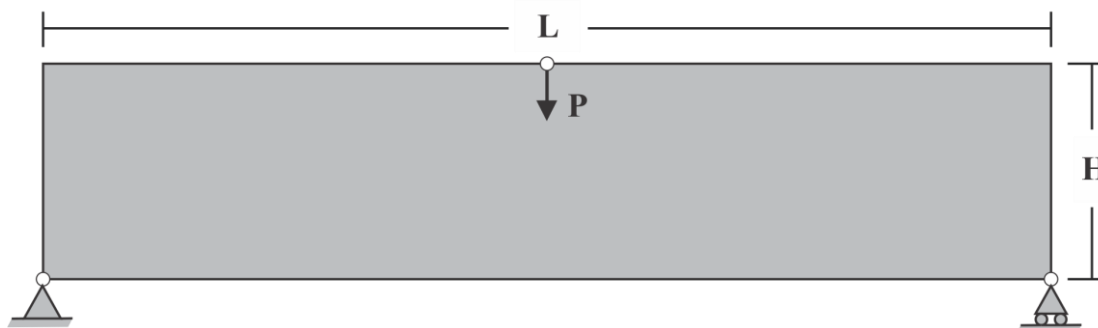
Malha		22x11	42x21	82x41	162x81
Número de iterações	p=1	10	13	20	29
	p=2	57	99	148	139
	p=3	16	21	23	57
	p=4	94	3	11	13
	Total	177	136	202	238
Tempo de processamento (segundos)	p=1	2,01	17,36	296,00	5030,20
	p=2	11,01	135,77	2062,91	24374,36
	p=3	3,06	27,57	319,84	9527,46
	p=4	17,74	3,93	143,48	2169,10
	Total	33,82	184,63	2822,23	41101,12
NGL		1586	5546	20666	79706

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

7.2 Estudo de caso 2: viga do tipo *Messerschmitt-Bölkow-Blom* (MBB)

A viga do tipo MBB é mostrada na Figura 44, para a qual são adotadas unidades consistentes para os parâmetros geométricos e físicos na concepção do modelo. Tomando-se vantagem da simetria da estrutura, somente metade do domínio de referência é analisada, empregando-se, assim as devidas condições de contorno que refletem essa simetria.

As Figuras 45, 47, 49, 51 e 53 mostram, respectivamente, as topologias ótimas obtidas para as malhas de 30x5, 60x10, 120x20 e 240x40 (na análise as malhas adotadas são 15x5, 30x10, 60x20 e 120x40, respectivamente) para as análises empregando as versões de ordem zero, primeira e segunda da teoria de volumes finitos e os elementos Q4 e Q8 do método dos elementos finitos. As Figuras 46, 48, 50, 52 e 54 apresentam os respectivos gráficos da evolução das funções objetivos ao longo do processo iterativo. Neste caso, o problema de otimização consiste em buscar o menor valor para função de flexibilidade da estrutura submetida a uma restrição de 50% do volume total da mesma, não sendo empregada nenhuma técnica de filtragem dos resultados ou de processamento de imagem.

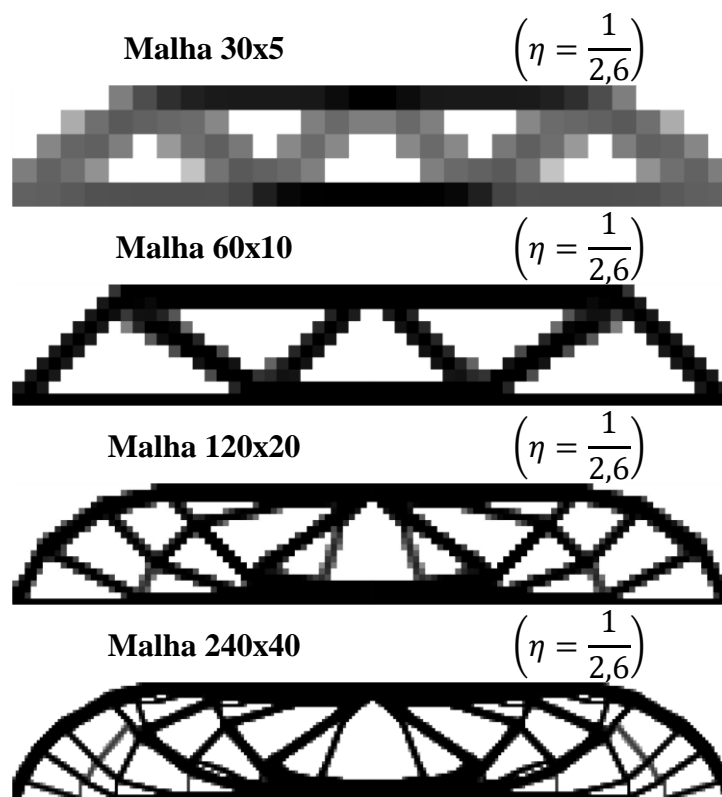
Figura 44 - Viga do tipo MBB.

Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

As Figuras 45, 47 e 49 mostram topologias livres do efeito do padrão de xadrez. Por outro lado, as topologias apresentadas na Figura 51 mostram a presença do efeito do padrão de xadrez em toda a estrutura, enquanto que as topologias apresentadas na Figura 53 mostram a ocorrência do padrão de xadrez apenas localmente. Para as topologias obtidas empregando-se a teoria de volumes finitos, observa-se de uma forma geral que não ocorre o efeito do padrão de xadrez. Ao passo que aquelas topologias ótimas obtidas empregando-se o método dos elementos finitos apresentam o efeito do padrão de xadrez. Quanto à instabilidade numérica associada à dependência de malha, esta é observada em todas as abordagens, empregando-se tanto a teoria de volumes finitos como o método dos elementos finitos, assim, este é um ponto que deve ser tratado em pesquisas futuras.

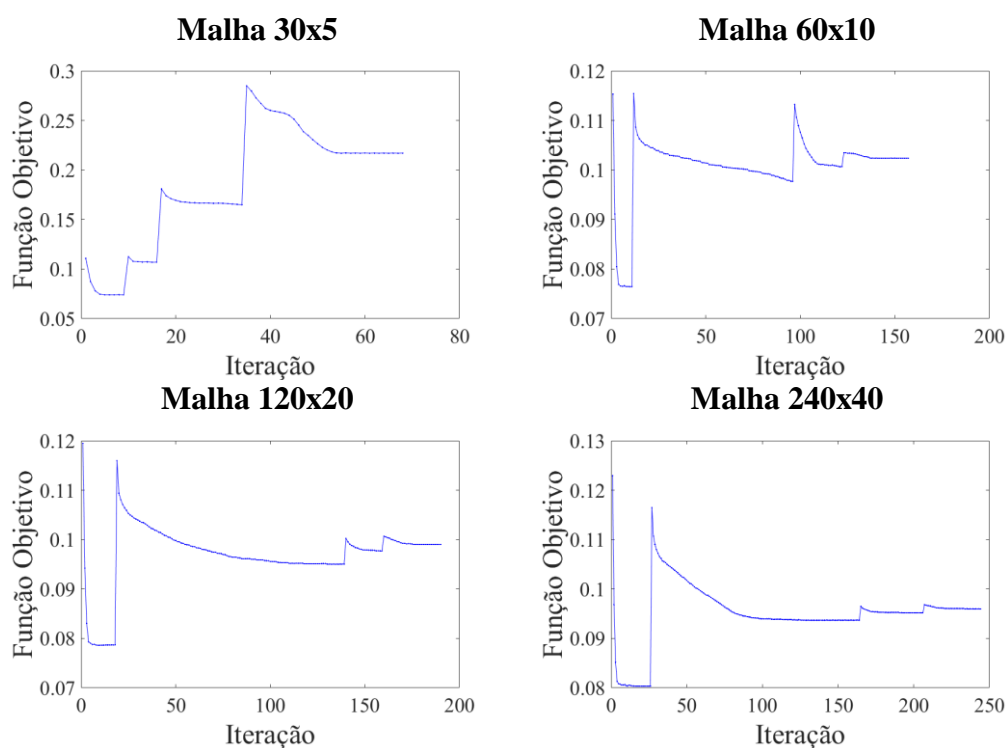
Na ausência de técnicas de filtragem dos resultados e de processamento de imagem, observa-se a necessidade de utilizar o fator de amortecimento para regularizar as oscilações de deslocamentos nas regiões menos densas da estrutura durante o processo de otimização. Dessa forma, para cada malha estudada é adotado o valor de η mais próximo possível de $1/2$, sem que sejam verificadas oscilações no processo iterativo. Assim, os valores de η apresentam uma alta variabilidade dependendo da malha empregada, como pode ser observado nas Figuras 45, 47, 49, 51 e 53, a única exceção a este caso é justamente a versão de ordem zero da teoria de volumes finitos, a qual mantém um valor $\eta = 1/2,6$ constante para todas as simulações.

Figura 45 - Topologias ótimas obtidas via TVF de ordem zero para viga do tipo MBB.



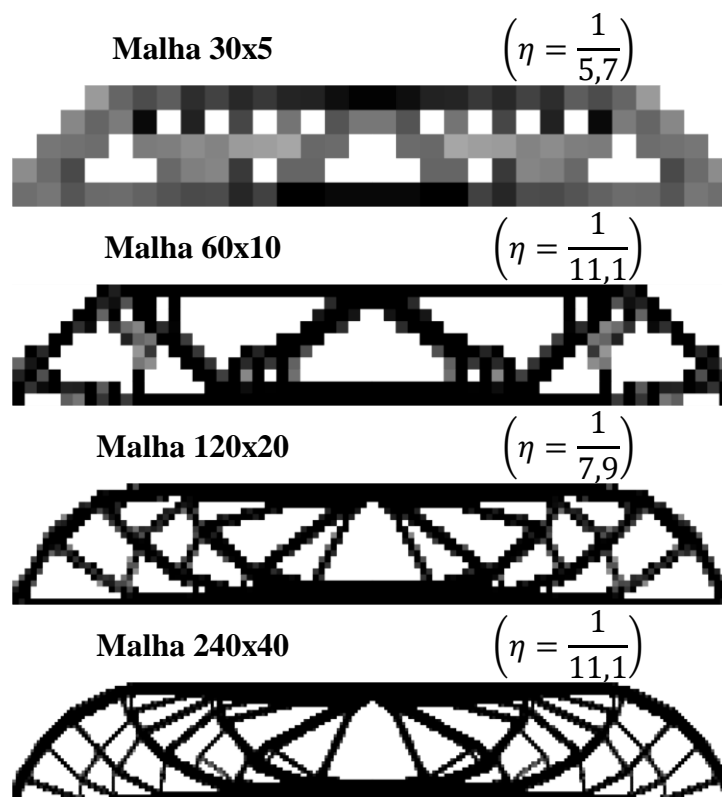
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 46 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para versão de ordem zero da TVF.



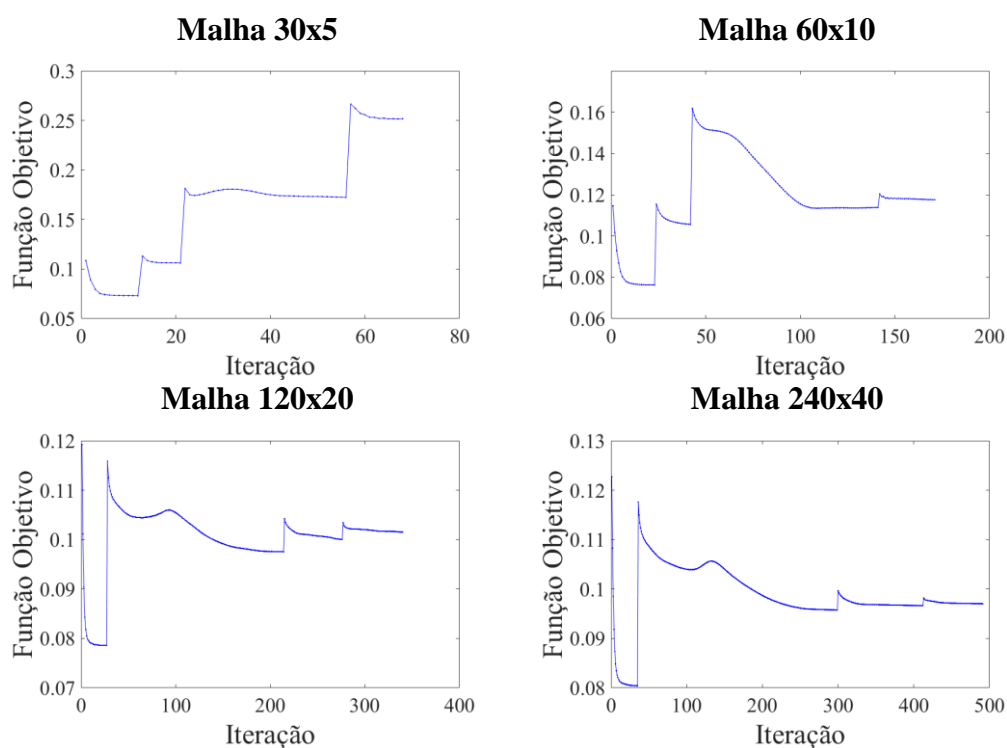
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 47 - Topologias ótimas obtidas via TVF de primeira ordem para viga do tipo MBB.



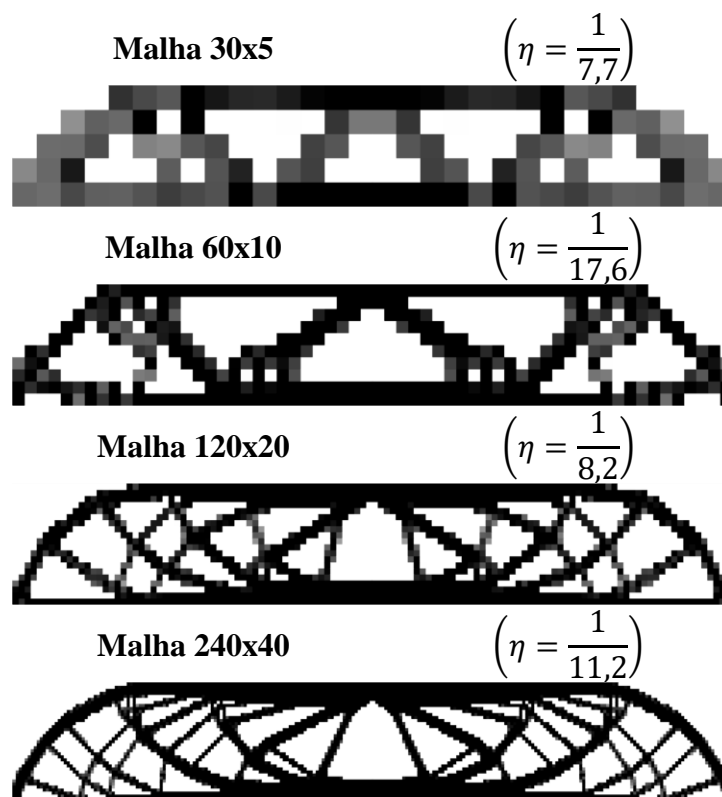
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 48 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para versão de primeira ordem da TVF.



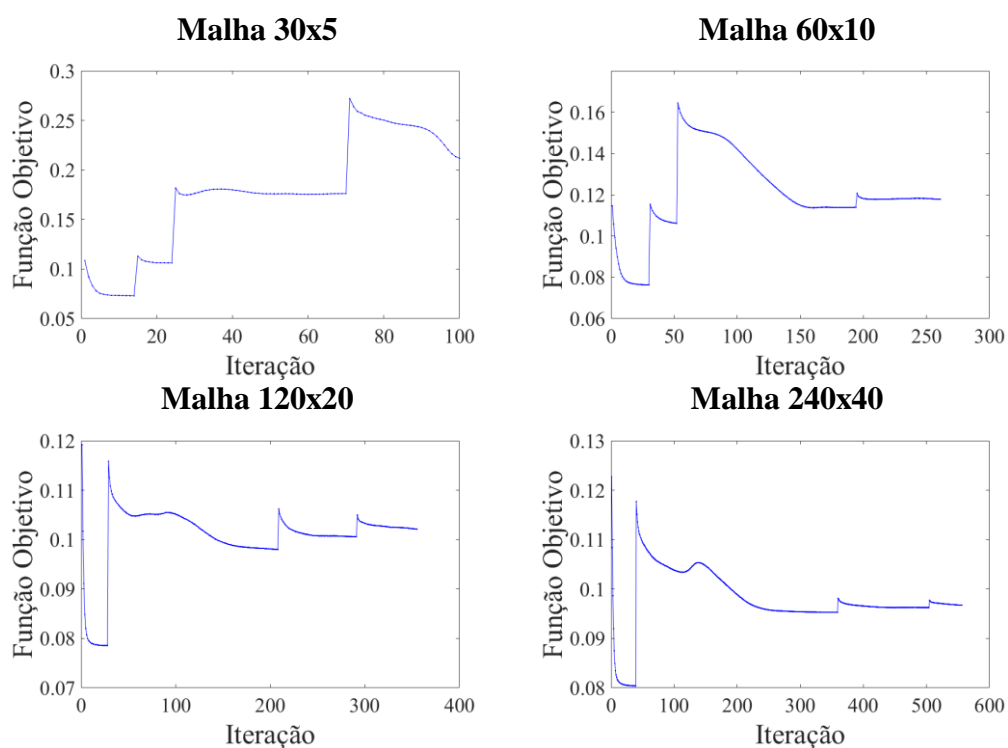
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 49 - Topologias ótimas obtidas via TVF de segunda ordem para viga do tipo MBB.



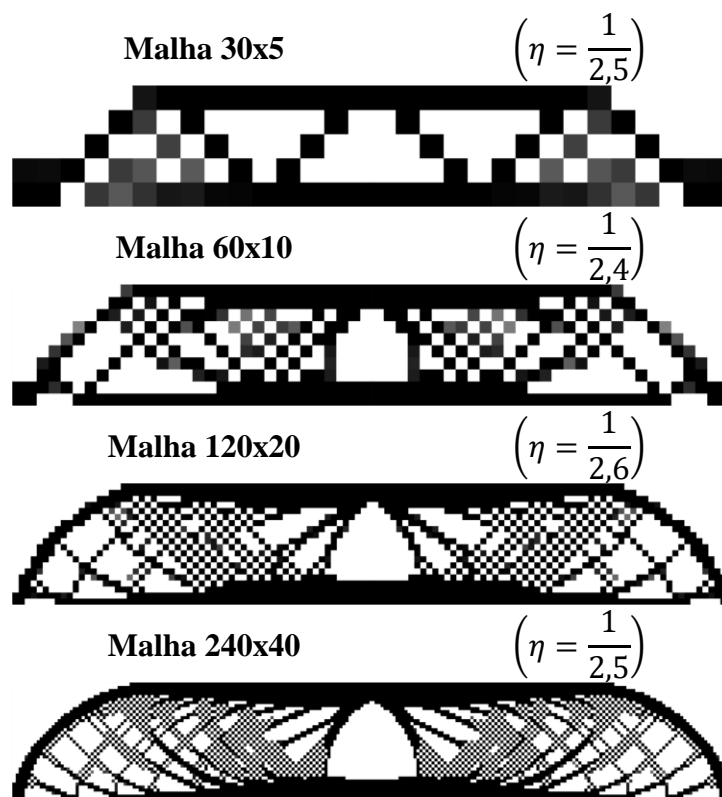
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 50 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para versão de segunda ordem da TVF.



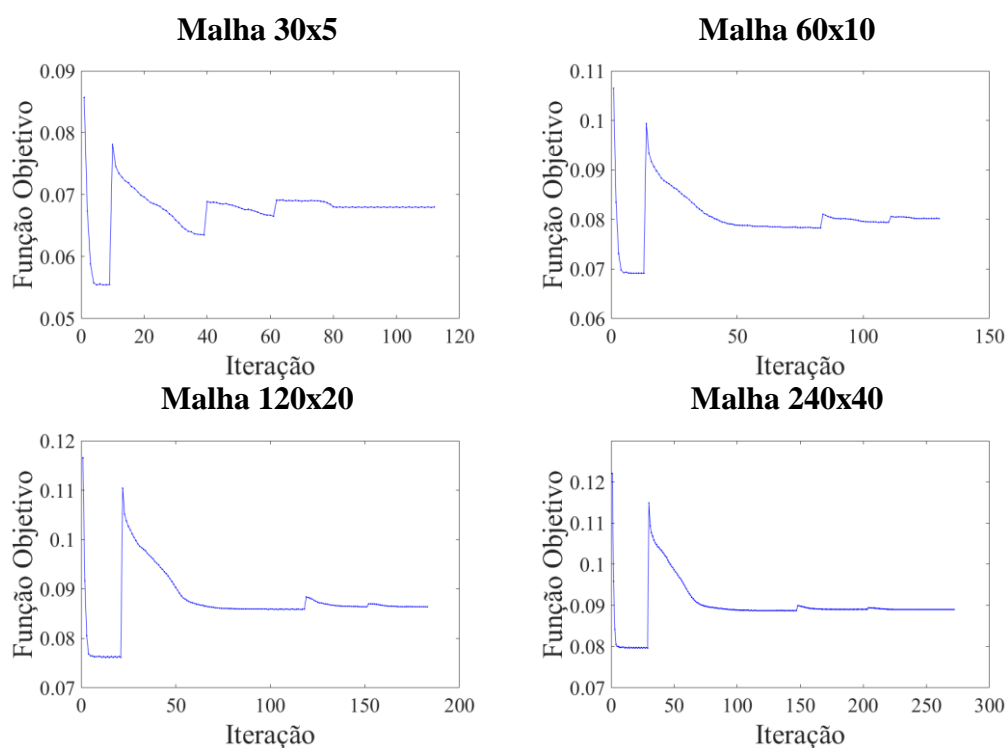
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 51 - Topologias ótimas obtidas via elemento finito Q4 para viga do tipo MBB.



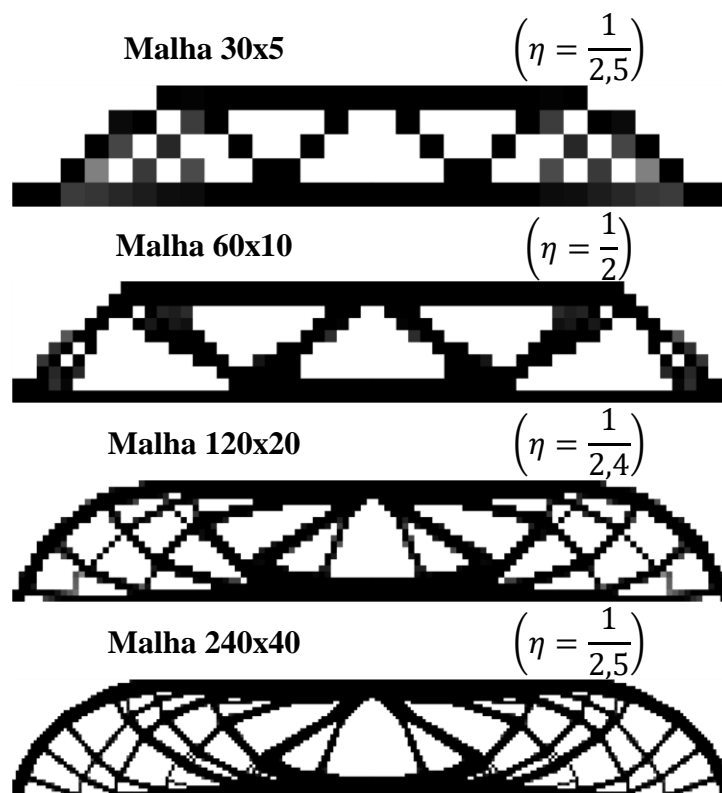
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 52 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para o elemento finito Q4.



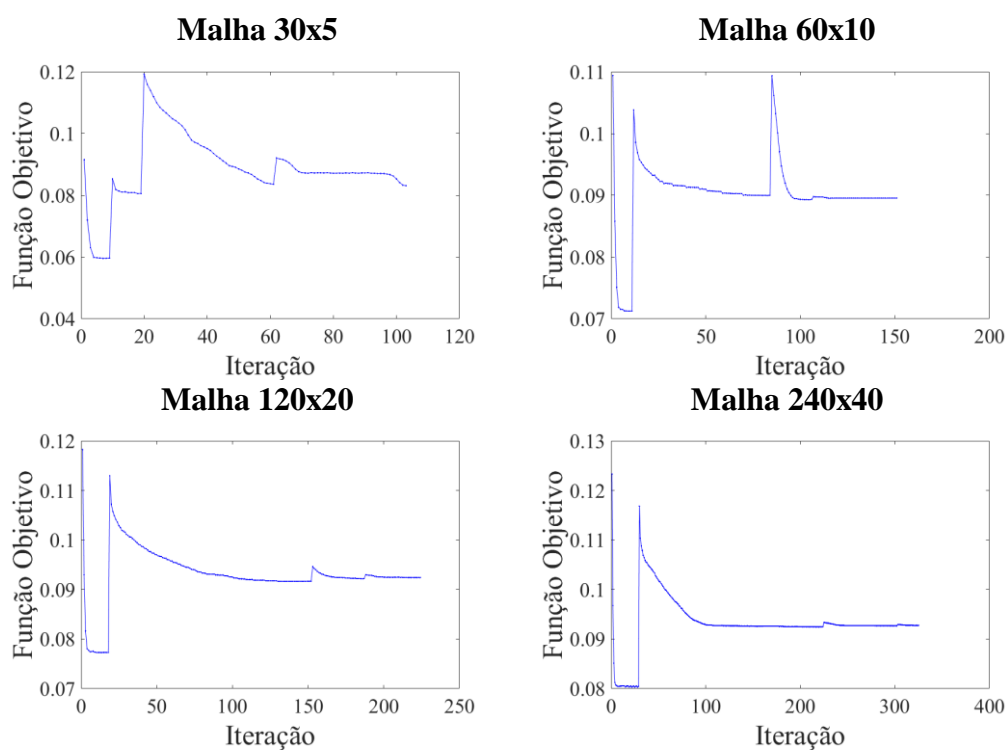
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 53 - Topologias ótimas obtidas via elemento finito Q8 para viga do tipo MBB.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 54 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para o elemento finito Q8.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Os gráficos apresentados nas Figuras 46, 48, 50, 52 e 54 mostram uma convergência lenta e gradual para as malhas mais refinadas. Além do mais, pode-se observar quatro patamares de energia bem definidos, especialmente para as abordagens empregando a teoria de volumes finitos. Esses patamares correspondem aos fatores de penalização adotados ao longo do processo iterativo, visto que é adotado o esquema continuado de penalização, visando evitar a ocorrência de mínimos locais. Além disso, esses patamares revelam que a minimização da função de flexibilidade da estrutura ocorreu logo no início do processo de otimização, quando o coeficiente de penalização é igual a 1. Assim, pode-se inferir que a topologia, que resulta na minimização da função de flexibilidade da estrutura, é a que apresenta regiões acinzentadas quando o fator de penalização é igual a 1, diferindo totalmente das topologias ótimas apresentadas nas Figuras 45, 47, 49, 51 e 53. Essas regiões acinzentadas correspondem a materiais com diferentes índices de porosidade.

Os Quadros 06, 07, 08, 09 e 10 mostram os resultados numéricos obtidos para a análise de convergência dos modelos baseados, respectivamente, nas versões de ordem zero, um e dois da teoria de volumes finitos e nos elementos Q4 e Q8 do método dos elementos finitos. O número de iterações não variou substancialmente entre os modelos empregando a versão de ordem zero da teoria de volumes finitos e os elementos Q4 e Q8. Porém, para as versões de primeira e segunda ordem da teoria de volumes finitos, observa-se um aumento acentuado no número de iterações, chegando a mais que o dobro para a malha mais refinada empregando-se a versão de segunda ordem. Os valores adotados para o fator de amortecimento explicam essa elevada quantidade de iterações para garantia da convergência. Nesses casos, os valores de η chegam a ser 6,8 vezes inferior ao adotado para os demais modelos, o que certamente prejudica o desempenho dessas abordagens.

O tempo de processamento também varia dependendo do tipo de abordagem empregada. Por exemplo, o custo computacional da malha mais refinada empregando o elemento Q8 é 3,4 vezes superior à mesma análise empregando a versão de ordem zero da teoria de volumes finitos. A abordagem baseada no elemento Q4 é 1,7 vezes mais rápida que aquela empregando a versão de ordem zero da teoria de volumes finitos para a malha mais refinada. Porém, em relação às versões de ordem superior da teoria de volumes, observa-se um custo computacional mais elevado quando comparado com as demais abordagens. No caso da versão de primeira ordem, esta é 1,1 vezes mais lenta que o elemento Q8 para a malha mais refinada, enquanto que a versão de segunda ordem apresenta um custo computacional 1,7 vezes superior ao elemento Q8 para a malha mais refinada. Porém, os tempos de

processamento por iteração para as versões de primeira e segunda ordem são de 14,43 e 20,50 segundos, respectivamente, para malha mais refinada, enquanto que o tempo de processamento por iteração para o elemento Q8 é de 20,52 segundos. Dessa forma, pode-se inferir que os valores adotados para o fator de amortecimento levam a perda de eficiência computacional das abordagens baseadas nas versões de primeira e segunda ordem da teoria de volumes finitos, prejudicando, assim, o desempenho geral dessas abordagens.

Quadro 06 - Análise de convergência da viga do tipo MBB para versão de ordem zero da TVF.

Malha		15x5	30x10	60x20	120x40
Número de iterações	p=1	9	11	18	26
	p=2	7	85	121	138
	p=3	18	26	20	42
	p=4	34	35	31	38
	Total	68	157	190	244
Tempo de processamento (segundos)	p=1	0,20	0,67	10,65	203,25
	p=2	0,06	4,44	73,37	1084,53
	p=3	0,12	1,35	12,45	341,57
	p=4	0,24	1,88	18,85	308,29
	Total	0,62	8,34	115,32	1937,64
NGL		340	1280	4960	19520

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Quadro 07 - Análise de convergência da viga do tipo MBB para versão de primeira ordem da TVF.

Malha		15x5	30x10	60x20	120x40
Número de iterações	p=1	12	23	27	35
	p=2	9	19	187	264
	p=3	35	99	62	113
	p=4	12	30	64	79
	Total	68	171	340	491
Tempo de processamento (segundos)	p=1	0,17	2,56	21,43	503,96
	p=2	0,12	2,07	157,44	3835,33
	p=3	0,41	10,89	50,28	1598,60
	p=4	0,15	3,33	51,82	1148,15
	Total	0,85	18,85	280,97	7086,04
NGL		510	1920	7440	29280

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Quadro 08 - Análise de convergência da viga do tipo MBB para versão de segunda ordem da TVF.

Malha		15x5	30x10	60x20	120x40
Número de iterações	p=1	14	30	28	39
	p=2	10	22	180	320
	p=3	46	142	83	145
	p=4	30	67	64	52
	Total	100	261	355	556
Tempo de processamento (segundos)	p=1	0,25	4,53	32,22	791,05
	p=2	0,17	3,38	213,32	6587,70
	p=3	0,76	22,03	97,72	2964,03
	p=4	0,47	10,34	74,71	1051,67
	Total	1,65	40,28	417,97	11394,45
NGL		680	2560	9920	39040

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Quadro 09 - Análise de convergência da viga do tipo MBB para o elemento Q4.

Malha		15x5	30x10	60x20	120x40
Número de iterações	p=1	9	13	21	29
	p=2	30	70	97	118
	p=3	22	27	33	56
	p=4	51	20	32	69
	Total	112	130	183	272
Tempo de processamento (segundos)	p=1	0,08	0,38	10,04	162,87
	p=2	0,17	1,64	44,16	629,61
	p=3	0,11	0,62	15,47	307,04
	p=4	0,25	0,47	14,49	370,16
	Total	0,61	3,11	84,16	1469,68
NGL		192	682	2562	9922

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Quadro 10 - Análise de convergência da viga do tipo MBB para o elemento Q8.

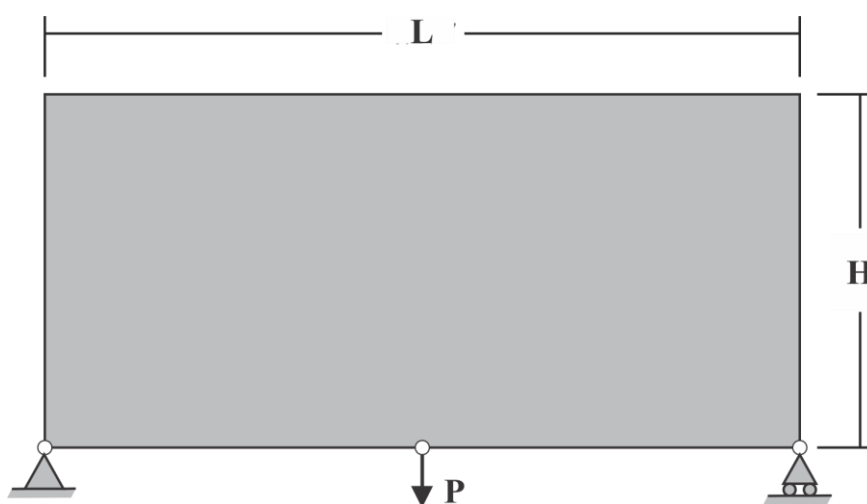
Malha		15x5	30x10	60x20	120x40
Número de iterações	p=1	9	11	18	29
	p=2	10	73	134	195
	p=3	42	22	35	78
	p=4	42	45	37	23
	Total	103	151	224	325
Tempo de processamento (segundos)	p=1	0,26	1,12	22,30	625,71
	p=2	0,21	7,49	158,73	3977,44
	p=3	0,85	2,26	39,29	1596,62
	p=4	0,84	4,32	41,72	471,32
	Total	2,16	15,19	262,04	6671,09
NGL		532	1962	7522	29442

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

7.3 Estudo de caso 3: estrutura *Michell*

A Figura 55 ilustra o domínio de análise, bem como as condições de contorno, da estrutura *Michell* empregada na análise. Na análise do modelo proposto, são adotadas unidades consistentes para os parâmetros geométricos e físicos. Levando-se em consideração a simetria da estrutura, analisa-se somente metade do domínio de referência, assim, são empregadas as condições de contorno que garantem a ocorrência dessa simetria. Posteriormente, as topologias ótimas obtidas são espelhadas.

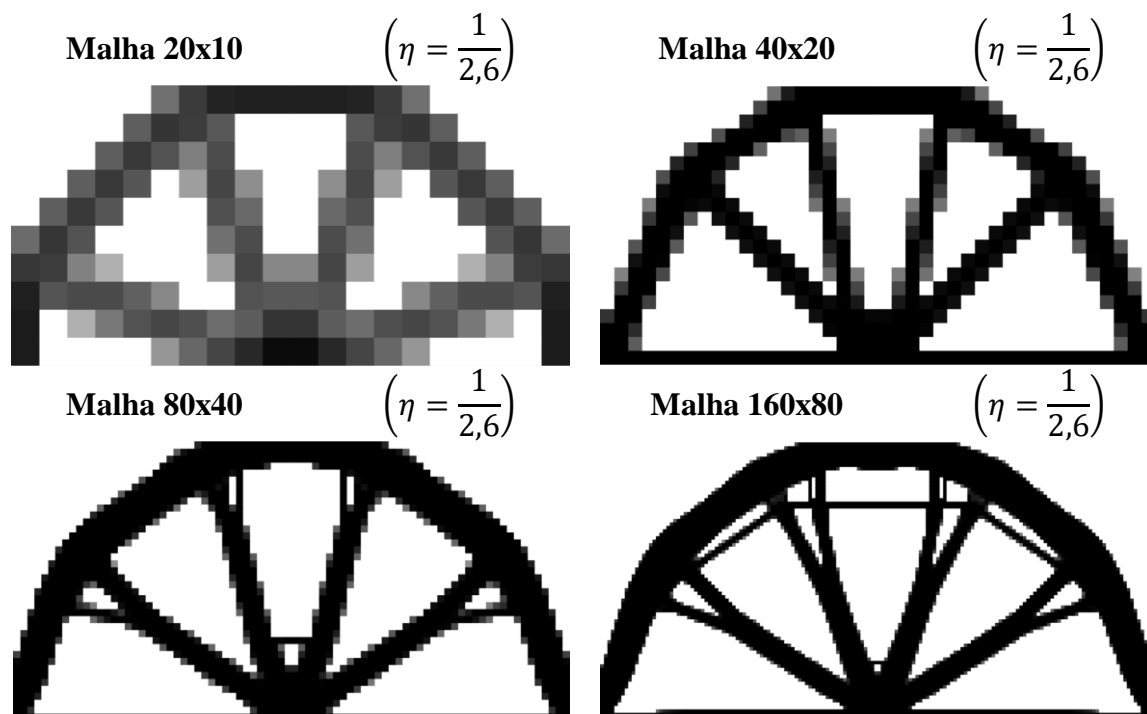
Figura 55 - Estrutura *Michell*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

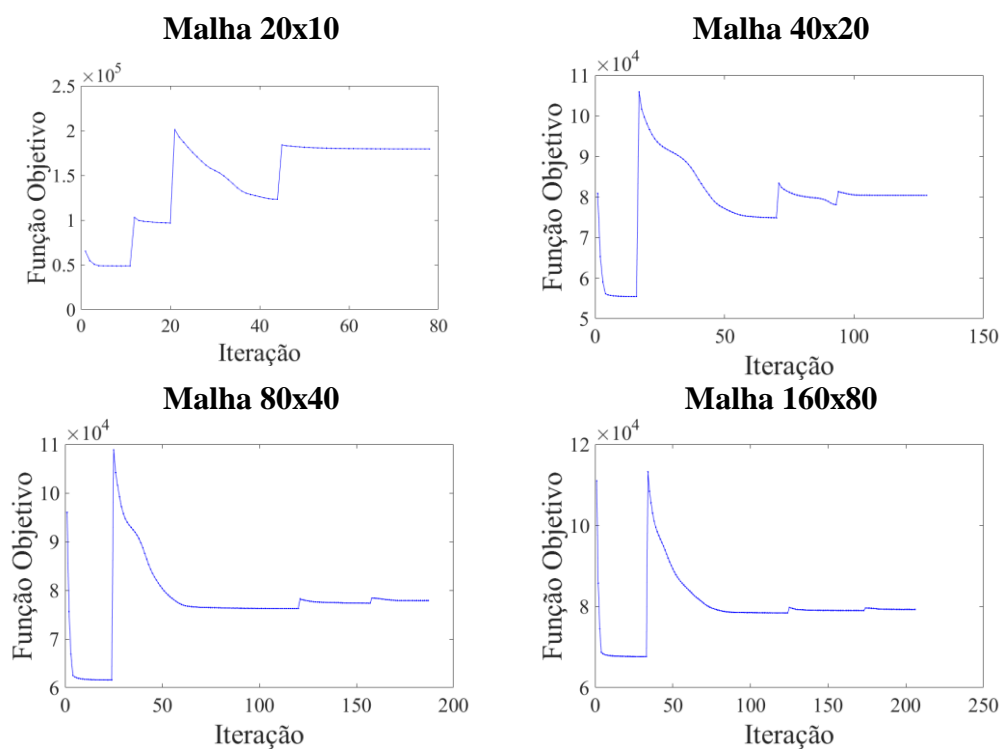
As Figuras 56, 58, 60, 62 e 64 apresentam as topologias ótimas obtidas para as malhas de 20x10, 40x20, 80x40 e 160x80, que correspondem, respectivamente, as malhas analisadas de 10x10, 20x20, 40x40 e 80x80, resultantes das análises empregando as versões de ordem zero, um e dois da teoria de volumes finitos e os elementos Q4 e Q8 do método dos elementos finitos, respectivamente. Os gráficos apresentados nas Figuras 57, 59, 61, 63 e 65 representam a evolução da função objetivo ao longo do processo de otimização para as respectivas malhas resultantes de diferentes abordagens. Neste caso, o problema de otimização busca minimizar a função de flexibilidade da estrutura dada uma restrição volumétrica de 40% do volume total da estrutura, não sendo empregada nenhuma técnica de filtragem dos resultados ou de processamento de imagem.

Figura 56 - Topologias ótimas obtidas via TVF de ordem zero para estrutura *Michell*.



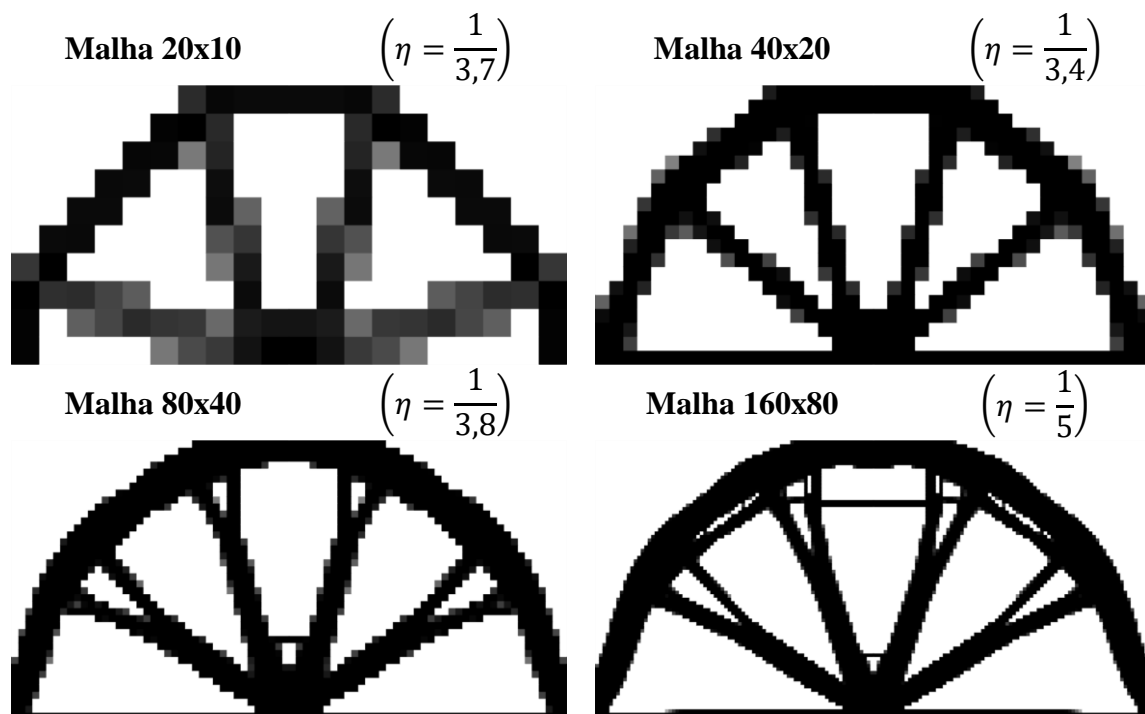
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 57 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para TVF de ordem zero.



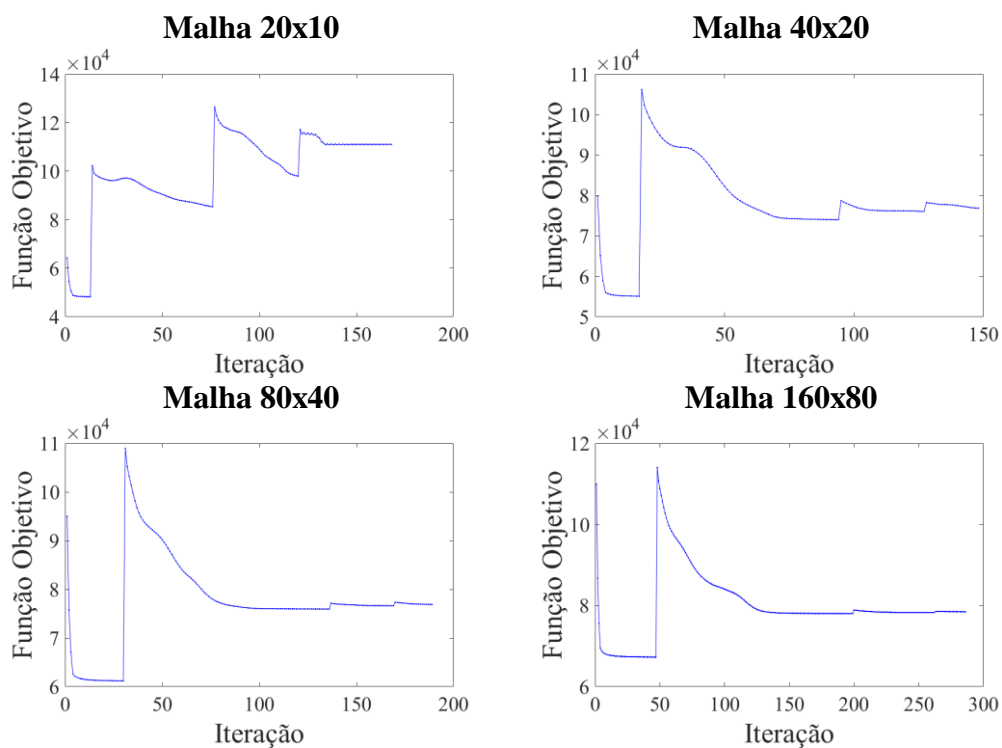
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 58 - Topologias ótimas obtidas via TVF de primeira ordem para estrutura *Michell*.



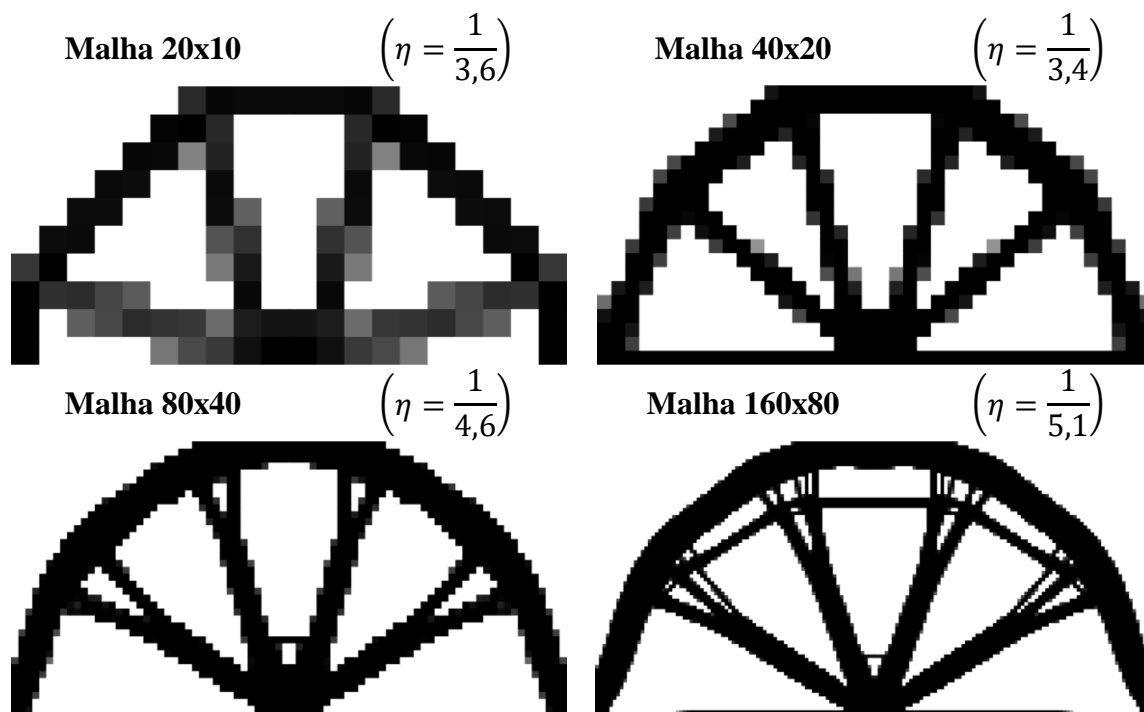
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 59 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para TVF de primeira ordem.



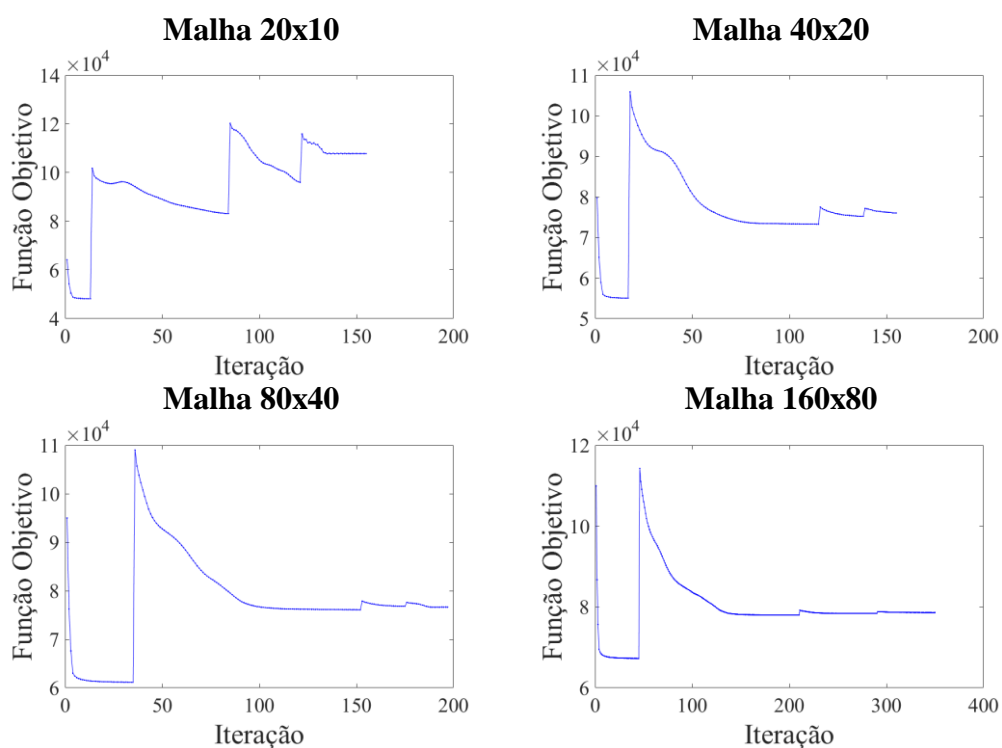
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 60 - Topologias ótimas obtidas via TVF de segunda ordem para estrutura *Michell*.



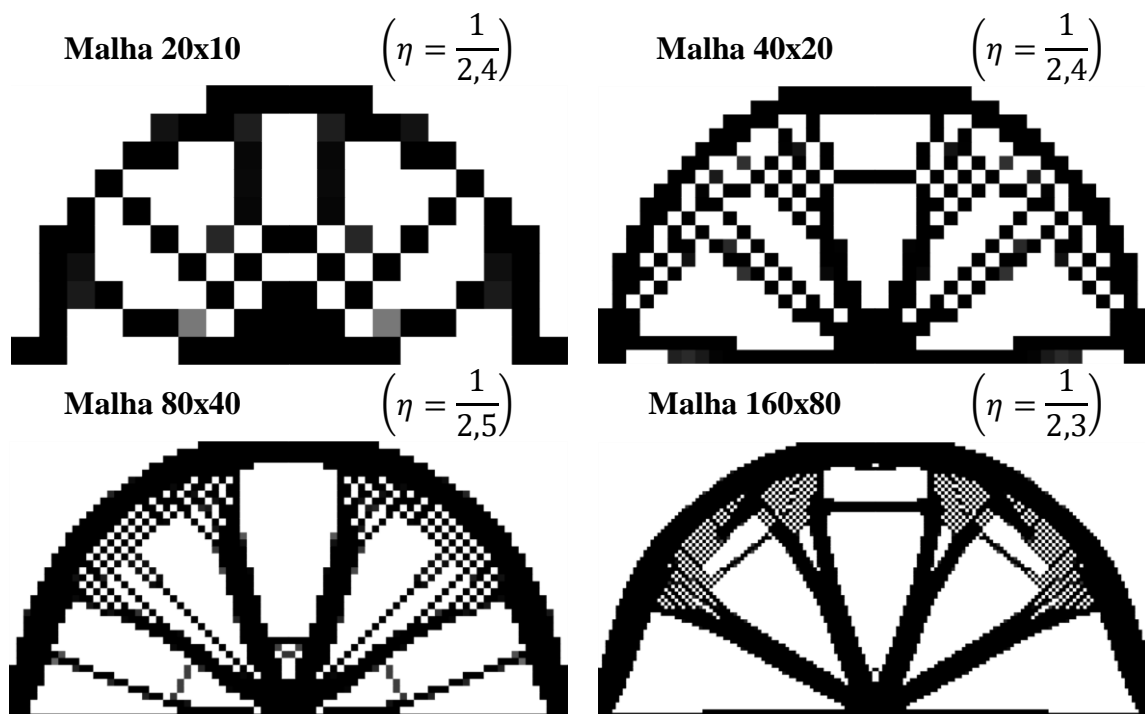
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 61 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para TVF de segunda ordem.



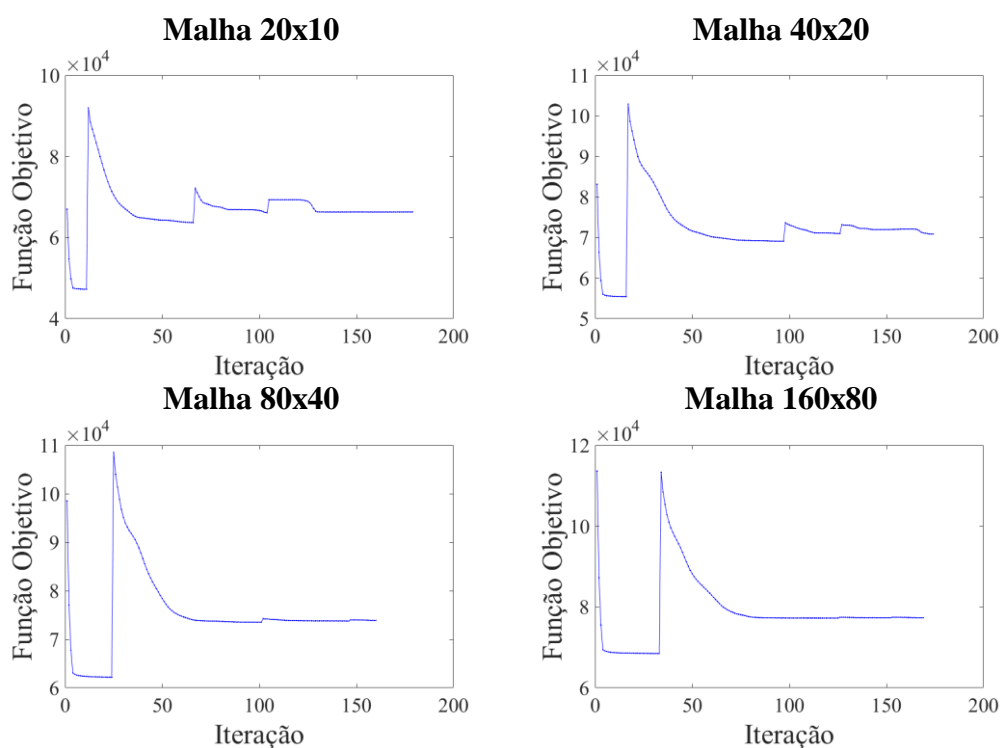
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 62 - Topologias ótimas obtidas via elemento Q4 para estrutura *Michell*.



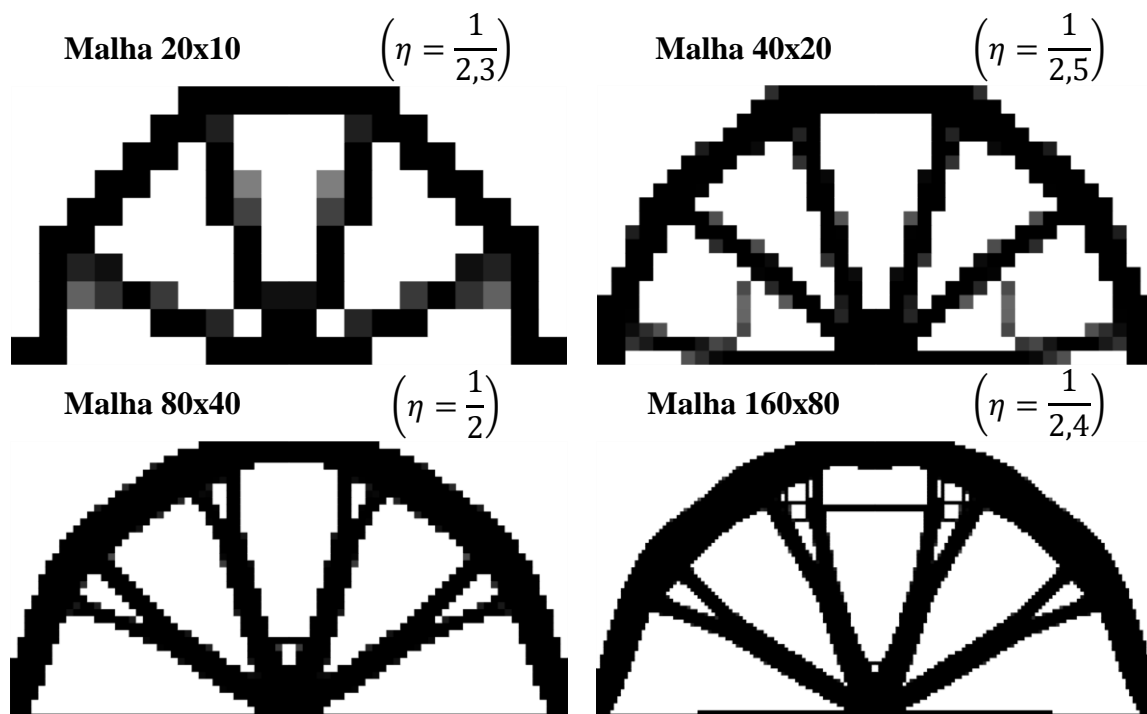
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 63 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para técnica de elementos finitos empregando o elemento Q4.



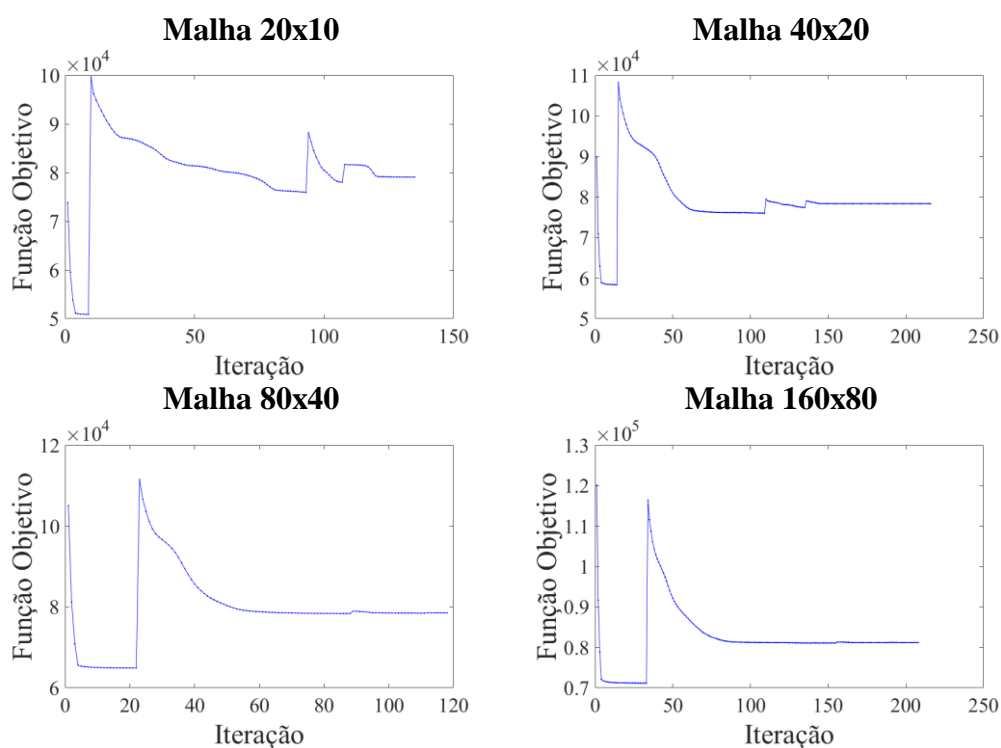
Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 64 - Topologias ótimas obtidas via elemento Q8 para estrutura *Michell*.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Figura 65 - Gráficos da função objetivo em relação ao número de iterações para técnica de elementos finitos empregando o elemento Q8.



Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

As Figuras 56, 58 e 60 apresentam topologias ótimas que são livres do efeito do padrão de xadrez. Por outro lado, as estruturas ótimas apresentadas na Figura 62 mostram a ocorrência generalizada do efeito do padrão xadrez. Nas topologias apresentadas na Figura 64 é possível perceber a ocorrência do fenômeno do padrão de xadrez apenas localmente para a malha de 40x20. Assim, os resultados ótimos obtidos empregando-se a teoria de volumes finitos mostram a ausência do fenômeno do padrão do tabuleiro de xadrez, inclusive para as malhas menos refinadas. Ao passo que para os resultados ótimos obtidos pelas abordagens empregando o método dos elementos finitos é observada a ocorrência do efeito do padrão do tabuleiro de xadrez. Em relação à instabilidade numérica associada à dependência de malha, esta é observada nas cinco abordagens empregadas durante a análise.

O fator de amortecimento é utilizado para regularizar possíveis oscilações do campo de deslocamentos durante o processo de otimização, uma vez que não é empregada nenhuma técnica de filtragem no algoritmo de otimização. Assim, para cada malha é adotado um valor para o fator de amortecimento mais próximo possível de $1/2$, desde que não fossem verificados fenômenos oscilatórios durante o processo de iteração. Os valores adotados encontram-se descritos nas Figuras 56, 58, 60, 62 e 64. De modo geral, há uma alta variabilidade no valor adotado para η , tendo como única exceção a versão de ordem zero da teoria de volumes finitos, a qual sempre mantém um valor $\eta = 1/2,6$.

A aplicação do esquema continuado de penalização levou a uma convergência lenta e gradual do processo de otimização, especialmente para as malhas mais refinadas, conforme apresentado nos gráficos das Figuras 57, 59, 61, 63 e 65. Nos gráficos das malhas 80x40 e 160x80, observa-se a formação de dois patamares bem definidos de energia. É possível também observar que a minimização da função de flexibilidade da estrutura ocorre quando o fator de penalização é igual a 1, ou seja, o primeiro patamar de energia encontra-se abaixo do segundo, indicando que a melhor topologia para a estrutura analisada é aquela que apresenta diferentes escalas de cinza, correspondentes a diferentes índices de porosidade do material.

Os resultados numéricos obtidos para análise de convergência da estrutura *Michell* encontram-se apresentados nos Quadros 11, 12, 13, 14 e 15, os quais são obtidos para as abordagens baseadas nas versões de ordem zero, um e dois da teoria de volumes finitos e nos elementos Q4 e Q8 do método dos elementos finitos, respectivamente. O número de iterações, para este exemplo, tem um comportamento um pouco atípico para os modelos aplicando o método dos elementos finitos. Por exemplo, para o elemento Q4, observa-se que o número de iterações necessário para a malha mais refinada (80x80) é inferior aquele observado para a

malha menos refinada (10x10). Da mesma forma, pôde-se observar que o número de iterações para abordagem baseada no elemento Q8 para malha de 40x40 é inferior ao obtido para malha de 10x10, e o número de iterações da malha de 80x80 também é inferior àquele observado para malha de 20x20. Normalmente, o refinamento da malha leva a um aumento no número de iterações, porém, nesse caso, para as abordagens empregando o método dos elementos finitos, isso não é observado.

Quadro 11 - Análise de convergência da estrutura *Michell* para versão de ordem zero da TVF.

Malha		10x10	20x20	40x40	80x80
Número de iterações	p=1	11	16	24	33
	p=2	9	54	96	91
	p=3	24	23	37	49
	p=4	34	35	30	33
	Total	78	128	187	206
Tempo de processamento (segundos)	p=1	0,19	1,04	17,87	489,42
	p=2	0,14	3,33	60,25	1357,26
	p=3	0,36	1,47	24,08	686,74
	p=4	0,49	2,22	19,14	449,75
	Total	1,18	8,06	121,34	2983,17
NGL		440	1680	6560	25920

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Quadro 12 - Análise de convergência da estrutura *Michell* para versão de primeira ordem da TVF.

Malha		10x10	20x20	40x40	80x80
Número de iterações	p=1	13	17	30	47
	p=2	63	77	106	152
	p=3	44	33	33	63
	p=4	48	21	20	24
	Total	168	148	189	286
Tempo de processamento (segundos)	p=1	0,24	1,97	36,49	1241,99
	p=2	1,05	9,16	127,63	3969,53
	p=3	0,76	3,81	39,45	1650,88
	p=4	0,87	2,53	24,23	639,11
	Total	2,92	17,47	227,80	7501,51
NGL		660	2520	9840	38880

Fonte: Elaborada pelo autor (2018).

Nesse exemplo, como o valor adotado para o fator de amortecimento para as versões de primeira e segunda ordem da teoria de volumes finitos é relativamente menor que aqueles adotados nos exemplos anteriores, pôde-se observar um número relativamente menor de iterações quando comparado com os exemplos anteriores (viga engastada e viga do tipo

MBB). No caso da versão de primeira ordem da teoria de volumes finitos, o número de iterações para malha mais refinada é apenas 37,5% maior que o observado para o elemento Q8. No caso da versão de segunda ordem, o número de iterações para malha mais refinada é aproximadamente 68% superior que aquele observado para o elemento Q8. Nos exemplos anteriores, esses valores chegam a ser superior a 100%.

Quadro 13 - Análise de convergência da estrutura *Michell* para versão de segunda ordem da TVF.

Malha		10x10	20x20	40x40	80x80
Número de iterações	p=1	13	17	35	45
	p=2	71	98	117	165
	p=3	37	23	23	80
	p=4	34	17	22	60
	Total	155	155	197	350
Tempo de processamento (segundos)	p=1	0,34	2,92	73,38	1717,52
	p=2	1,68	18,06	250,20	6294,77
	p=3	0,93	4,40	49,02	3075,35
	p=4	0,87	3,29	47,45	2270,46
	Total	3,82	28,67	420,05	13358,10
NGL		880	3360	13120	51840

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

Quadro 14 - Análise de convergência da estrutura *Michell* para o elemento Q4.

Malha		10x10	20x20	40x40	80x80
Número de iterações	p=1	11	16	24	33
	p=2	55	81	77	92
	p=3	38	29	45	27
	p=4	75	48	14	17
	Total	179	174	160	169
Tempo de processamento (segundos)	p=1	0,13	0,52	10,41	252,63
	p=2	0,44	2,55	30,25	557,94
	p=3	0,25	0,91	16,71	154,94
	p=4	0,47	1,48	6,39	97,20
	Total	1,29	5,46	63,76	1062,71
NGL		242	882	3362	13122

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

O tempo de processamento variou bastante a depender do tipo de abordagem empregada. O custo computacional do elemento Q8 é 2,6 vezes superior ao observado para versão de ordem zero da teoria de volumes finitos. A abordagem baseada no elemento Q4 é 2,8 vezes mais rápida que aquela empregando a versão de ordem zero da teoria de volumes finitos. Neste exemplo, a versão de primeira ordem da teoria de volumes finitos apresentou

um custo computacional inferior em relação ao elemento Q8, enquanto que a versão de segunda ordem é 1,7 vezes mais lenta, porém, quando o tempo de processamento por iteração é analisado, percebe-se que os custos computacionais dos passos iterativos destas últimas abordagens são muito semelhantes. Dessa forma, pode-se inferir que os valores adotados para o fator de amortecimento nas abordagens baseadas nas versões de primeira e segunda ordem da teoria de volumes finitos levam à perda de eficiência das mesmas, prejudicando, assim, o desempenho das abordagens baseadas nessas metodologias.

Quadro 15 - Análise de convergência da estrutura *Michell* para o elemento Q8.

Malha		10x10	20x20	40x40	80x80
Número de iterações	p=1	9	14	22	33
	p=2	84	95	66	122
	p=3	14	26	23	34
	p=4	28	81	7	19
	Total	135	216	118	208
Tempo de processamento (segundos)	p=1	0,18	2,28	51,18	1330,62
	p=2	1,43	15,02	142,03	4505,50
	p=3	0,25	4,90	45,28	1197,15
	p=4	0,49	13,26	13,80	688,35
	Total	2,35	35,46	252,29	7721,62
NGL		682	2562	9922	39042

Fonte: Elaborado pelo autor (2018).

CONCLUSÕES

O algoritmo de otimização topológica baseado na teoria de volumes finitos demonstrou ser eficiente para os exemplos analisados em comparação com a mesma técnica empregando o método dos elementos finitos. Além do mais, a ausência de algumas instabilidades numéricas, tais como o efeito do padrão de xadrez, demonstra a eficácia da nova técnica numérica no âmbito da otimização topológica de estruturas elásticas contínuas. Credita-se grande parte da eficiência da teoria de volumes finitos em produzir topologias ótimas livres do efeito do padrão de xadrez ao fato desta satisfazer as continuidades estáticas e cinemáticas em termos médios nas faces comuns entre subvolumes adjacentes, o que representa que as conexões entre subvolumes ocorrem por meio das faces e não por meio dos nós, como no método dos elementos finitos.

O efeito do padrão de xadrez é definitivamente um problema em topologias ótimas obtidas empregando o elemento Q4, podendo também ocorrer localmente quando o elemento Q8 é empregado. Além do mais, o uso de técnicas de filtragem ou processamento de imagem, para melhorar os resultados obtidos via método dos elementos finitos, foi evitado com o intuito de proporcionar uma comparação mais justa e transparente entre as diferentes abordagens analisadas. Assim, uma análise livre das técnicas de filtragem proporcionou a verificação de algumas instabilidades numéricas, apresentadas na Seção 5.5, entre elas destaca-se a ocorrência do efeito do padrão de xadrez.

As instabilidades numéricas apresentadas na Seção 5.5, especialmente o efeito do padrão de xadrez, estão intimamente relacionadas às considerações assumidas pelo método dos elementos finitos. Segundo Díaz e Sigmund (1995), o surgimento do padrão do tabuleiro de xadrez em uma topologia ótima, se deve a aproximações oriundas do método dos elementos finitos, levando a estrutura ótima a apresentar uma rigidez artificial. O método força a satisfação das equações de equilíbrio e das condições de compatibilidade estática e cinemática apenas nos nós dos elementos que compõem o domínio discretizado de análise. Por outro lado, a teoria de volumes finitos satisfaz as equações de equilíbrio no nível do subvolume e as condições de compatibilidade estática e cinemática são estabelecidas nas interfaces comuns entre subvolumes adjacentes. Dessa forma, nas abordagens empregando a TVF, as conexões entre subvolumes adjacentes se dá por intermédio das faces dos subvolumes, garantindo, assim, a produção de topologias livres do efeito do padrão de xadrez.

Apesar da eficácia comprovada da teoria de volumes finitos em se evitar a ocorrência de configurações de tabuleiro de xadrez em partes de estruturas contínuas ótimas, deve-se salientar que em nenhum momento pretende-se sugerir a substituição do método dos elementos finitos no âmbito da otimização topológica de estruturas baseadas na aplicação da metodologia SIMP, uma vez que existem diversas técnicas de otimização topológica de estruturas elásticas contínuas baseadas no método dos elementos finitos, que também são capazes de produzir topologias ótimas livres do padrão de xadrez, ver Poulsen (2002), Jang et al. (2003), Bruggi (2008), Pereira et al. (2010) e Balogh e Lógó (2017). Neste trabalho, o método dos elementos finitos foi empregado com o intuito de se ter resultados de referência que possibilitassem a validação dos resultados obtidos empregando-se a teoria de volumes finitos, além de permitir uma análise comparativa de desempenho computacional.

A dependência de malha é outro tipo de instabilidade numérica associado à otimização topológica de estruturas, conforme descrito na Seção 5.5. Normalmente, quando não há aplicação de nenhuma técnica de filtragem de resultados, observa-se a ocorrência desse problema numérico. Fato observado em todos os resultados obtidos nessa dissertação, tanto para as abordagens empregando o método dos elementos finitos como para aquelas abordagens que empregaram a teoria de volumes finitos.

Sigmund e Petersson (1998) sugerem três técnicas distintas para solucionar problemas relacionados à dependência de malha: filtros de controle do perímetro e de malhas independentes, bem como a adição de restrições ao gradiente da função de densidade relativa. Porém, estas soluções são tradicionalmente empregadas em abordagens baseadas no método dos elementos finitos. Assim, no âmbito da otimização topológica baseada na teoria de volumes finitos, uma possibilidade seria tratar os filamentos delgados que aparecem nas topologias ótimas, oriundas de malhas mais refinadas, por meio de técnicas que restringem a tensão efetiva de von Mises. Esses resultados podem ser obtidos adicionando-se restrições de tensão ao problema de otimização topológica apresentado na Equação (5.2.4), evitando-se, dessa forma, a formação de filamentos delgados que são de difícil manufatura e provocam o problema da dependência de malha.

O esquema continuado, em que o fator de penalização aumenta gradualmente a partir de 1, foi adotado durante o processo de otimização, garantindo-se, assim, uma convergência gradual para o processo e evitando-se possíveis problemas ocasionados pela presença de mínimos locais. Além do mais, o emprego do esquema continuado revelou que durante o processo de iteração, o mínimo global ocorre quando o fator de penalização assume o seu

primeiro valor, o que nos leva a crer que a melhor distribuição de material dentro do domínio de análise é justamente aquela que resulta em regiões acinzentadas associadas a diferentes índices de porosidade do material.

Apesar desta topologia não poder ser obtida na indústria convencional, nem por intermédio de impressoras 3D, ela pode ser explicada do ponto de vista teórico pela teoria de materiais compósitos. Ou seja, nesse caso, cada elemento ou subvolume da estrutura ótima é definido como sendo parte sólida e vazia, a parte sólida está diretamente relacionada à fração volumétrica da matriz, enquanto a parte vazia está diretamente relacionada com a fração de poros de um material compósito. Certamente, esse aspecto pode ser objeto de pesquisas futuras, especialmente com o intuito de obter o melhor fator de penalização para as abordagens que empregam a teoria de volumes finitos, assim como foi feito por Bendsøe e Sigmund (1999) no contexto do método dos elementos finitos.

O fator de amortecimento do método OC variou a depender do tipo de abordagem e do refinamento da malha, com o intuito de se evitar a ocorrência de oscilações indesejadas durante o processo de iteração. O único modelo empregado em que não se observou nenhuma variação, independentemente do tipo de malha e do exemplo analisado, foi a versão de ordem zero da teoria de volumes finitos, para todos os casos o valor de η se manteve constante e igual a $1/2,6$. Para as demais abordagens, observa-se uma variação no fator de amortecimento. Porém, dentre essas, as mais prejudicadas foram as versões de primeira e segunda ordem da teoria de volumes finitos. Os valores de η empregados nessas abordagens levaram a uma perda de eficiência computacional muito grande, levando, em certos casos, a um número de iterações de aproximadamente o dobro daquele observado para o elemento Q8. Dessa forma, para as versões de ordem superior da teoria de volumes finitos, sugere-se adotar uma estratégia alternativa para evitar possíveis oscilações no processo iterativo.

Segundo Montes (2016), o critério de convergência baseado na máxima diferença entre iterações consecutivas considera somente duas iterações consecutivas, não evitando o fenômeno oscilatório e complicando o processo de convergência. Dessa forma, o autor sugere adotar um critério de convergência alternativo, tais como critérios de parada baseados na diferença dos fatores de segurança da estrutura de duas iterações consecutivas ou na variância da função objetivo. Além desses critérios, pode-se sugerir também a adoção de um critério alternativo baseado na diferença da função objetivo de duas iterações consecutivas. Para o método de penalização fixa, esses critérios de convergência funcionam bem e são capazes de

evitar a ocorrência de fenômenos oscilatórios, possibilitando-se, assim, uma comparação mais justa entre as abordagens empregadas.

O baixo custo computacional da versão de ordem zero da teoria de volumes finitos, em relação as versões de ordem superior da mesma, justifica a sua aplicação em detrimento das outras. O número de graus de liberdade explica, em grande parte, a sua eficiência, uma vez que este define o tamanho do sistema global de equações. Em relação as topologias ótimas obtidas pelas diferentes versões da teoria de volumes finitos, não se observa uma diferença substancial que justifique o aumento do custo computacional causado pela aplicação das versões de ordem superior. Dessa forma, a aplicação da versão de ordem zero da teoria de volumes finitos na otimização topológica de estruturas elásticas contínuas é suficiente para obtenção de topologias ótimas livres do efeito do padrão de xadrez e com um custo computacional satisfatório.

Com base nos resultados até então obtidos, pode-se justificar a continuação desta investigação, explorando os variados aspectos da teoria de volumes finitos. A satisfação das equações de equilíbrio localmente e as condições de compatibilidade estática e cinemática estabelecidas em termos médios entre os subvolumes que compartilham faces comuns são os grandes trunfos dessa nova abordagem. Assim, trabalhos futuros devem ser desenvolvidos com o intuito de melhor avaliar e validar os diferentes aspectos que envolvem a teoria de volumes finitos e solucionar os problemas até então apresentados.

Considerações finais

Nesta dissertação, a otimização topológica, via metodologia SIMP, é aplicada a estruturas elásticas contínuas bidimensionais, considerando-se um estado de plano de tensões, submetida a restrições de volumes, minimizando a função de flexibilidade da estrutura. As formulações propostas se mostraram capazes de evitar a ocorrência da configuração de tabuleiro de xadrez, como também mostraram ser computacionalmente eficazes e competitivas em relação aquelas tradicionalmente baseadas no método dos elementos finitos.

De modo geral, as topologias ótimas obtidas mostraram-se bem-comportadas, apresentando uma boa nitidez e clara disposição de material. A implementação de um esquema de penalização continuado contribuiu para uma convergência gradual do processo de otimização, evitando-se, assim, a ocorrência de mínimos locais, especialmente para as malhas mais refinadas. Por fim, a microestrutura artificial do método SIMP, na qual a única variável de projeto é a densidade relativa do material, permitiu penalizar as regiões formadas por

densidades intermediárias, a qual possibilitou a obtenção de projetos “preto e branco” bem definidos.

Sugestões de trabalhos futuros

Algumas possibilidades para trabalhos futuros incluem:

- Contemplar partes da teoria da plasticidade e adotar restrições às tensões efetivas de von Mises, possibilitando, assim, a obtenção de topologias ótimas livres da ocorrência da dependência de malha e possíveis de serem manufaturadas, empregando-se a teoria de volumes finitos.
- Adotar fatores de penalização unitários, obtendo-se topologias ótimas com diferentes escalas de cinza, e tentando associá-las a materiais com diferentes índices de porosidade, com base na Micromecânica de Materiais Compósitos.
- Modificar o esquema de penalização adotado e investigar novos critérios de convergência com o intuito de reduzir o custo computacional das abordagens baseadas nas versões de ordem superior da teoria de volumes finitos.
- Adotar a formulação paramétrica da teoria de volumes finitos com a finalidade de estudar estruturas, que possuam algum tipo de descontinuidade, tal como uma viga com furos circulares.

REFERÊNCIAS

- ABOUDI, J.; PINDER, M. J.; ARNOLD, S. M. Thermoelastic response of metal matrix composites with large-diameter fibers subjected to thermal gradients. *NASA Technical Memorandum 106344*, pp. 1-74, 1993.
- ABOUDI, J.; PINDER, M. J. HOTCFGM-1D: A Coupled Higher-Order Theory for Cylindrical Structural Components with Through-Thickness Functionally Graded Microstructures. 1999.
- ANDREASSEN, E. et al. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 43, p. 1-16, 2011.
- ARAÚJO, M. V. O.; LAGES, E. N.; CAVALCANTE, M. A. A. Finite Volume Theory Applied to Topology Optimization of Continuum Linear Elastic Structures. In: *XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2017, Florianópolis. *Proceedings...* Florianópolis, SC: ABMEC, 2017.
- BALOGH, B.; LÓGÓ, J. The application of drilling degree of freedom to checkerboards in structural topology optimization. *Advances in Engineering Software*, v. 107, p. 7-12, 2017.
- BANSAL, Y. *Finite Volume Direct Averaging Micromechanics of Heterogeneous Media*. 2005. Thesis (Master in Applied Mechanics) – University of Virginia, Charlottesville, 2005.
- BANSAL, Y.; PINDER, M. J. Efficient Reformulation of the Thermoelastic Higher-Order Theory for Functionally Graded Materials. *Journal of Thermal Stress*, v. 26, n. 11-12, p. 1055-1092, 2003.
- BANSAL, Y.; PINDER, M. J. Efficient Reformulation of the Thermoelastic Higher-Order Theory for FGMs. 2002.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, v. 17, p. 14-24, 1989.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, North-Holland, v. 71, p. 197-224, 1988.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, v. 69, p. 635-654, 1999.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 2003. 393 p.
- BRUGGI, M. On the solution of the checkerboard problem in mixed-FEM topology optimization. *Computers and Structures*, v. 86, n. 19-20, p. 1819-1829, 2008.
- BRUGGI, M.; VENINI, P. A mixed FEM approach to stress-constrained topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 73, 1693-1714, 2008.

CAVALCANTE, M. A. A. *Modelagem do Comportamento Termomecânico Transiente de Estruturas de Materiais Compósitos pela Teoria de Volumes Finitos*. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2006.

CAVALCANTE, M. A. A.; MARQUES, S. P.; PINDERA, M. J. Parametric formulation of the finite-volume theory for functionally graded materials – Part I: Analysis. *Journal of Applied Mechanics*, v. 74, n. 5, p. 946-957, 2007a.

CAVALCANTE, M. A. A.; MARQUES, S. P.; PINDERA, M. J. Parametric formulation of the finite-volume theory for functionally graded materials – Part II: numerical results. *Journal of Applied Mechanics*, v. 74, n. 5, p. 946-957, 2007b.

CAVALCANTE, M. A. A.; MARQUES, S. P.; PINDERA, M. J. Computational aspects of the parametric finite-volume theory for functionally graded materials. *Computational Materials Science*, v. 44, n. 2, p. 422-438, 2008.

CAVALCANTE, M. A. A.; PINDERA, M. J.; KHATAM, H. Finite-volume micromechanics of periodic materials: Past, present and future. *Composites Part B: Engineering*, v. 43, n. 6, p. 2521-2543, 2012.

CAVALCANTE, M. A. A.; PINDERA, M. J. Generalized Finite-Volume Theory for Elastic Stress Analysis in Solid Mechanics – Part I: Framework. *Journal of Applied Mechanics*, v. 79, n. 5, p. 051006, 2012a.

CAVALCANTE, M. A. A.; PINDERA, M. J. Generalized Finite-Volume Theory for Elastic Stress Analysis in Solid Mechanics – Part I: Results. *Journal of Applied Mechanics*, v. 79, n. 5, p. 051007, 2012b.

CAVALCANTE, M. A. A.; PINDERA, M. J. Finite-Volume enabled transformation field analysis of periodic materials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, v. 9, n. 2, p. 153-179, 2013.

CAVALCANTE, M. A. A.; PINDERA, M. J. Generalized FVDAM Theory for Periodic Materials Undergoing Finite Deformations – Part I: Framework. *Journal of Applied Mechanics*, v. 81, n. 2, p. 021005, 2014a.

CAVALCANTE, M. A. A.; PINDERA, M. J. Generalized FVDAM Theory for Periodic Materials Undergoing Finite Deformations – Part I: Results. *Journal of Applied Mechanics*, v. 81, n. 2, p. 021006, 2014b.

CAVALCANTE, M. A. A.; PINDERA, M. J. Generalized FVDAM theory for elastic-plastic periodic materials. *International Journal of Plasticity*, v. 77, p. 90-117, 2016.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. *An Introduction to Structural Optimization*. Linköping: Springer Science & Business Media, 2009. 214 p.

COLLET, M.; BRUGGI, M.; DUYSINX, P. Topology optimization for minimum weight with compliance and simplified nominal stress constraints for fatigue resistance. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 55, p. 839-855, 2017.

CORDEIRO, M. F. *Uma Técnica para Otimização Estrutural Mediante a Derivada Topológica*. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

DÍAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 10, n.1, p. 40-45, 1995.

DIMITROVOVÁ, Z. *O Princípio dos Trabalhos Virtuais*. Lisboa: DEC/FCT/UNL, 2016. 32 p.

DOMKE, J. Lagrange Duality. In: *Statistical Machine Learning*, 2013, p. 1-4.

DVORAK, G. J. *Micromechanics of Composite Materials*. New York: Springer, 2013. 454 p.

ESCHENAUER, H. A.; OLHOFF, N. Topology Optimization of Continuum Structures: A Review. *Applied Mechanics Reviews*, v. 54, n.4, p. 331-390, 2001.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. *A First Course in Finite Elements*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2007. 344 p.

GATTU, M. et al. Parametric Finite-Volume Micromechanics of Uniaxial, Continuously-Reinforced Periodic Materials with Elastic Phases. *Journal of Engineering Materials and Technology*, v. 130, n. 3, p. 031015, 2008.

HABER, R. B.; BENDSØE, M. P.; JOG, C. S. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on the perimeter. *Structural Optimization*, v. 11, n. 1-2, p. 1-12, 1996.

HE, Q.; KANG, Z.; WANG, Y. A topology optimization method for geometrically nonlinear structures with meshless analysis and independent density field interpolation. *Computational Mechanics*, v. 54, n. 3, p. 629-644, 2014.

HIBBELER, R. C. *Resistência dos Materiais*. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. 637 p.

JANG, G. W. et al. Checkerboard-free topology optimization using non-conforming finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 57, n. 12, p. 1717-1735, 2003.

JOHNSEN, S. *Structural Topology Optimization: Basic Theory, Methods and Applications*. 2013. Thesis (Master of Science in Mechanical Engineering) – Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2013.

KHATAM, H.; PINDERA, M. J. Parametric Finite-Volume Micromechanics of Periodic Materials with Elastoplastic Phases. *International Journal of Plasticity*, v. 25, n. 7, p. 1386-1411, 2009.

KHATAM, H.; PINDERA, M. J. Plasticity-Triggered Architectural Effects in Periodic Multilayers with Wavy Microstructures. *International Journal of Plasticity*, v. 26, n. 2, p. 273-287, 2010.

- LARSSON, R. *Methodology for Topology and Shape Optimization: Application to a Rear Lower Control Arm*. 2016. Thesis (Master of Applied Mechanics) – Chalmers University of Technology, Göteborg, 2016.
- MA, Z.-D.; KIKUCHI, N.; HAGIWARA, I. Structural topology and shape optimization for frequency response problem. *Computational Mechanics*, v. 13, n. 3, p. 157-174, 1993.
- MLEJNEK, H.P. Some aspects of the genesis of structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Stuttgart, v. 5, p. 64-69, 1992.
- MONTES, M. A O. *Topology Optimization Algorithms for the Solution of Compliance and Volume Problems in 2D*. 2016. Thesis (Master of Computation Science and Industrial Mathematics) – Investigation Center in Mathematics, Guanajuato, 2016.
- OLINQUEVICZ, D. F. *Otimização Topológica de Estruturas Contínuas de Polipropileno com Restrições de Tensão Baseadas em Critérios de Escoamento*. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.
- PARÍS, J. et al. Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 39, p. 419-437, 2009.
- PINDERA, M. J.; ABOUDI, J.; ARNOLD, S. M. Limitations of the uncoupled, RVE-based micromechanical approach in the analysis of functionally graded composites. *Mechanics of Materials*, v. 20, n. 1, p. 77-94, 1995.
- PINDERA, M. J.; ABOUDI, J.; ARNOLD, S. M. Higher-Order Micro-Macrostructural Theory for the Analysis of Functionally Graded Materials. In: *Advanced Multilayered and Fiber-Reinforced Composites*. Springer, Dordrecht, 1998. p. 111-132.
- PEREIRA, A. et al. Checkerboard-free topology optimization using polygonal finite elements. *Mecânica Computacional*, v. 29, p. 1525-1534, 2010.
- POULSEN, T. A. A simple scheme to prevent checkerboard patterns and one-node connected hinges in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 24, n. 5, p. 396-399, 2002.
- ROZVANY, G. I. A Critical Review of Established Methods of Structural Topology Optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 37, n. 3, p. 217-237, 2009.
- SAAD, M. H. *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*. 2. ed. Burlington: Elsevier Inc., 2009.
- SANT'ANA, H. M.; FONSECA, J. S. O. Topology Optimization of Continuum Two-Dimensional Structures under Compliance and Stress Constraints. *Mecânica Computacional*, Santa Fé, v. 21, p. 2732-2751, 2002.
- SHUKLA, A.; MISRA, A.; KUMAR, S. Checkerboard problem in finite element based topology optimization. *International Journal of Advances in Engineering & Technology*, v. 6, n. 4, p. 1769-1774, 2013.

- SHUKLA, A.; MISRA, A. Review of Optimality Criterion Approach Scope, Limitation and Development in Topology Optimization. *International Journal of Advances in Engineering & Technology*, v. 6, n.4, p. 1886-1889, 2013.
- SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 21, n. 2, p. 120-127, 2001.
- SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 33, n. 4, p. 401-424, 2007.
- SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, Springer-Verlag, v. 16, p. 68-75, 1998.
- SILVA, E. C. N. Técnicas de otimização aplicadas no projeto de peças mecânicas, 2003. Disponível em: <<http://sites.poli.usp.br/d/pmr5215/otimizacao.pdf>>. Acesso em: Setembro de 2017.
- TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. *Theory of Elasticity*. 2. ed. New York: McGRAW-HILL BOOK COMPANY, Inc., 1951.
- TORII, A. J. Otimização Topológica de Estruturas Planas. In: *CONGRESSO NACIONAL DE ESTUDANTES DE ENGENHARIA MECÂNICA*, 14, Uberlândia, 2007. Anais... Uberlândia, MG: Universidade Federal de Uberlândia, 2007.
- VERSTEEG, H. K. MALALASEKERA, W. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. New York: Longman Scientific & Technical, 1995. 267 p.
- WAITE, M. *Paperback Oxford English Dictionary*. 7. ed. Oxford: Oxford University Press, 2012. 864 p.
- ZHANG, Y. *Methods to Avoid Numerical Instabilities in Topology Optimization Using Nodal Design Variables*. 2014. Thesis (Master of Science) – University of Florida, Gainesville, 2014.
- ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. The COC algorithm, part II: Topological, geometry and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Essen, v. 89, p. 197-224, 1991.

APÊNDICES

Apêndice A – Teorema da divergência

Seja S uma parte de uma superfície contínua delimitando a região V . Se um vetor \mathbf{u} é contínuo e possui primeira derivada contínua em V , então

$$\iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} \, dV \quad (\text{A.1})$$

em que \mathbf{n} é o vetor normal unitário da superfície S que aponta para fora. Este resultado pode também ser reescrito da seguinte forma:

$$\iint_S a_{ij\dots k} n_k \, dS = \iiint_V \frac{\partial a_{ij\dots k}}{\partial x_k} \, dV \quad (\text{A.2})$$

Apêndice B – Matrizes de rigidez para o método dos elementos finitos

Apêndice B.1 – Matriz de rigidez para o elemento Q4

$$\mathbf{K}_{(8 \times 8)}^{(q)} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{6} & -\frac{\beta_1}{8} & \frac{\alpha_2}{12} & -\frac{\beta_2}{8} & \frac{\alpha_1}{12} & \frac{\beta_1}{8} & \frac{\alpha_3}{6} & \frac{\beta_2}{8} \\ -\frac{\beta_1}{8} & \frac{\gamma_1}{6} & \frac{\beta_2}{8} & -\frac{\gamma_2}{6} & \frac{\beta_1}{8} & -\frac{\gamma_1}{12} & -\frac{\beta_2}{8} & \frac{\gamma_3}{12} \\ \frac{\alpha_2}{12} & \frac{\beta_2}{8} & -\frac{\alpha_1}{6} & \frac{\beta_1}{8} & -\frac{\alpha_3}{6} & -\frac{\beta_2}{8} & \frac{\alpha_1}{12} & -\frac{\beta_1}{8} \\ -\frac{\beta_2}{8} & -\frac{\gamma_2}{6} & \frac{\beta_1}{8} & \frac{\gamma_1}{6} & \frac{\beta_2}{8} & \frac{\gamma_3}{12} & -\frac{\beta_1}{8} & -\frac{\gamma_1}{12} \\ \frac{\alpha_1}{12} & \frac{\beta_1}{8} & -\frac{\alpha_3}{6} & \frac{\beta_2}{8} & -\frac{\alpha_1}{6} & -\frac{\beta_1}{8} & \frac{\alpha_2}{12} & -\frac{\beta_2}{8} \\ \frac{\beta_1}{8} & -\frac{\gamma_1}{12} & -\frac{\beta_2}{8} & \frac{\gamma_3}{12} & -\frac{\beta_1}{8} & \frac{\gamma_1}{6} & \frac{\beta_2}{8} & -\frac{\gamma_2}{6} \\ \frac{\alpha_3}{6} & -\frac{\beta_2}{8} & \frac{\alpha_1}{12} & -\frac{\beta_1}{8} & \frac{\alpha_2}{12} & \frac{\beta_2}{8} & -\frac{\alpha_1}{6} & \frac{\beta_1}{8} \\ \frac{\beta_2}{8} & \frac{\gamma_3}{12} & -\frac{\beta_1}{8} & -\frac{\gamma_1}{12} & -\frac{\beta_2}{8} & -\frac{\gamma_2}{6} & \frac{\beta_1}{8} & \frac{\gamma_1}{6} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.1})$$

em que

$$\alpha_1 = \frac{[l^2(1 - \nu) + 2h^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\alpha_2 = \frac{[l^2(\nu - 1) + 4h^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\alpha_3 = \frac{[l^2(\nu - 1) + h^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\beta_1 = \frac{E}{\nu - 1}$$

$$\beta_2 = \frac{(3\nu - 1)E}{\nu^2 - 1}$$

$$\gamma_1 = \frac{[h^2(\nu - 1) - 2l^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\gamma_2 = \frac{[h^2(\nu - 1) + l^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\gamma_3 = \frac{[h^2(\nu - 1) + 4l^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

(B.1.2)

Apêndice B.2 – Matriz de rigidez para o elemento Q8

$$\mathbf{K}_{(16 \times 16)}^{(q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11(8 \times 8)}^{(q)} & \mathbf{K}_{12(8 \times 8)}^{(q)} \\ \left(\mathbf{K}_{12(8 \times 8)}^{(q)}\right)^T & \mathbf{K}_{22(8 \times 8)}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.1})$$

em que

$$\mathbf{K}_{11(8 \times 8)}^{(q)} = \begin{bmatrix} \frac{13\alpha_1}{45} & -\frac{17\beta_1}{72} & -\frac{\alpha_4}{180} & \frac{\beta_2}{24} & -\frac{23\alpha_1}{180} & \frac{7\beta_1}{72} & -\frac{\alpha_5}{90} & -\frac{\beta_2}{24} \\ \frac{17\beta_1}{72} & \frac{13\gamma_1}{45} & -\frac{\beta_2}{24} & \frac{\gamma_4}{90} & -\frac{7\beta_1}{72} & \frac{23\gamma_1}{180} & \frac{\beta_2}{24} & \frac{\gamma_5}{180} \\ -\frac{\alpha_4}{180} & -\frac{\beta_2}{24} & \frac{13\alpha_1}{45} & \frac{17\beta_1}{72} & \frac{\alpha_5}{90} & \frac{\beta_2}{24} & \frac{23\alpha_1}{180} & \frac{7\beta_1}{72} \\ \frac{\beta_2}{24} & \frac{\gamma_4}{90} & -\frac{17\beta_1}{72} & \frac{13\gamma_1}{45} & -\frac{\beta_2}{24} & \frac{\gamma_5}{180} & \frac{7\beta_1}{72} & \frac{23\gamma_1}{180} \\ \frac{23\alpha_1}{180} & \frac{7\beta_1}{72} & -\frac{\alpha_5}{90} & -\frac{\beta_2}{24} & \frac{13\alpha_1}{45} & -\frac{17\beta_1}{72} & -\frac{\alpha_4}{180} & \frac{\beta_2}{24} \\ -\frac{17\beta_1}{72} & -\frac{13\gamma_1}{45} & \frac{\beta_2}{24} & \frac{\gamma_4}{90} & -\frac{23\alpha_1}{180} & \frac{7\beta_1}{72} & \frac{13\alpha_1}{45} & -\frac{17\beta_1}{72} \\ \frac{7\beta_1}{72} & \frac{23\gamma_1}{180} & -\frac{\beta_2}{24} & \frac{\gamma_5}{180} & \frac{17\beta_1}{72} & \frac{13\gamma_1}{45} & -\frac{\beta_2}{24} & \frac{\gamma_4}{90} \\ \frac{72}{72} & \frac{180}{180} & \frac{24}{24} & \frac{180}{180} & -\frac{72}{72} & \frac{45}{45} & -\frac{24}{24} & \frac{90}{90} \\ -\frac{\alpha_5}{90} & \frac{\beta_2}{24} & -\frac{23\alpha_1}{180} & \frac{7\beta_1}{72} & \frac{\alpha_4}{180} & -\frac{\beta_2}{24} & \frac{13\alpha_1}{45} & \frac{17\beta_1}{72} \\ -\frac{90}{90} & \frac{24}{24} & -\frac{180}{180} & \frac{72}{72} & -\frac{180}{180} & -\frac{24}{24} & -\frac{45}{45} & \frac{72}{72} \\ -\frac{\beta_2}{24} & \frac{\gamma_5}{180} & \frac{7\beta_1}{72} & \frac{23\gamma_1}{180} & \frac{\beta_2}{24} & \frac{\gamma_4}{90} & \frac{17\beta_1}{72} & \frac{13\gamma_1}{45} \\ -\frac{24}{24} & \frac{180}{180} & \frac{72}{72} & \frac{180}{180} & \frac{24}{24} & \frac{90}{90} & \frac{72}{72} & \frac{45}{45} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.2})$$

$$\mathbf{K}_{12(8 \times 8)}^{(q)} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_6}{90} & -\frac{\beta_3}{18} & \frac{\alpha_7}{45} & \frac{\beta_1}{18} & \frac{\alpha_8}{90} & \frac{\beta_1}{18} & -\frac{\alpha_9}{45} & \frac{\beta_4}{18} \\ \frac{\beta_4}{18} & -\frac{\gamma_6}{45} & \frac{\beta_1}{18} & -\frac{\gamma_7}{90} & \frac{\beta_1}{18} & -\frac{\gamma_8}{45} & \frac{\beta_3}{18} & \frac{\gamma_9}{90} \\ \frac{\alpha_6}{90} & \frac{\beta_3}{18} & -\frac{\alpha_9}{45} & \frac{\beta_4}{18} & \frac{\alpha_8}{90} & -\frac{\beta_1}{18} & \frac{\alpha_7}{45} & -\frac{\beta_1}{18} \\ \frac{\beta_4}{18} & -\frac{\gamma_6}{45} & \frac{\beta_3}{18} & \frac{\gamma_9}{90} & -\frac{\beta_1}{18} & -\frac{\gamma_8}{45} & -\frac{\beta_1}{18} & -\frac{\gamma_7}{90} \\ -\frac{18}{18} & \frac{45}{45} & \frac{18}{18} & \frac{90}{90} & -\frac{18}{18} & \frac{45}{45} & -\frac{18}{18} & -\frac{90}{90} \\ \frac{\alpha_8}{90} & \frac{\beta_1}{18} & -\frac{\alpha_9}{45} & \frac{\beta_4}{18} & \frac{\alpha_6}{90} & -\frac{\beta_3}{18} & \frac{\alpha_7}{45} & \frac{\beta_1}{18} \\ \frac{\beta_1}{18} & -\frac{\gamma_8}{45} & -\frac{\beta_3}{18} & \frac{\gamma_9}{90} & \frac{\beta_4}{18} & -\frac{\gamma_6}{45} & \frac{\beta_1}{18} & -\frac{\gamma_7}{90} \\ \frac{18}{18} & \frac{45}{45} & \frac{18}{18} & \frac{90}{90} & \frac{18}{18} & \frac{45}{45} & \frac{18}{18} & -\frac{90}{90} \\ \frac{\alpha_8}{90} & -\frac{\beta_1}{18} & \frac{\alpha_7}{45} & -\frac{\beta_1}{18} & \frac{\alpha_6}{90} & \frac{\beta_3}{18} & -\frac{\alpha_9}{45} & -\frac{\beta_4}{18} \\ -\frac{18}{18} & \frac{45}{45} & -\frac{18}{18} & -\frac{90}{90} & -\frac{18}{18} & -\frac{45}{45} & \frac{18}{18} & \frac{90}{90} \\ -\frac{\beta_1}{18} & -\frac{\gamma_8}{45} & -\frac{\beta_1}{18} & -\frac{\gamma_7}{90} & -\frac{\beta_4}{18} & -\frac{\gamma_6}{45} & \frac{\beta_3}{18} & \frac{\gamma_9}{90} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.3})$$

$$\mathbf{K}_{22(8 \times 8)}^{(q)} = \begin{bmatrix} -\frac{4\alpha_{10}}{45} & 0 & 0 & \frac{2\beta_1}{9} & -\frac{4\alpha_{11}}{45} & 0 & 0 & -\frac{2\beta_1}{9} \\ 0 & \frac{8\gamma_{10}}{45} & \frac{2\beta_1}{9} & 0 & 0 & \frac{4\gamma_{11}}{45} & -\frac{2\beta_1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2\beta_1}{9} & -\frac{8\alpha_{12}}{45} & 0 & 0 & -\frac{2\beta_1}{9} & \frac{4\alpha_{13}}{45} & 0 \\ \frac{2\beta_1}{9} & 0 & 0 & \frac{4\gamma_{12}}{45} & -\frac{2\beta_1}{9} & 0 & 0 & -\frac{4\gamma_{13}}{45} \\ -\frac{4\alpha_{11}}{45} & 0 & 0 & -\frac{2\beta_1}{9} & -\frac{4\alpha_{10}}{45} & 0 & 0 & \frac{2\beta_1}{9} \\ 0 & \frac{4\gamma_{11}}{45} & -\frac{2\beta_1}{9} & 0 & 0 & \frac{8\gamma_{10}}{45} & \frac{2\beta_1}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{2\beta_1}{9} & \frac{4\alpha_{13}}{45} & 0 & 0 & \frac{2\beta_1}{9} & -\frac{8\alpha_{12}}{45} & 0 \\ -\frac{2\beta_1}{9} & 0 & 0 & -\frac{4\gamma_{13}}{45} & \frac{2\beta_1}{9} & 0 & 0 & \frac{4\gamma_{12}}{45} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2.4})$$

sendo

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{[17l^2(1-\nu) + 56h^2]lE}{(\nu^2 - 1)h} \\ \alpha_5 &= \frac{[14l^2(1-\nu) + 17h^2]lE}{(\nu^2 - 1)h} \\ \alpha_6 &= \frac{[3l^2(\nu - 1) + 80h^2]lE}{(\nu^2 - 1)h} \\ \alpha_7 &= \frac{[10l^2(1-\nu) + 3h^2]lE}{(\nu^2 - 1)h} \\ \alpha_8 &= \frac{[3l^2(1-\nu) + 40h^2]lE}{(\nu^2 - 1)h} \\ \alpha_9 &= \frac{[20l^2(\nu - 1) + 3h^2]lE}{(\nu^2 - 1)h} \\ \alpha_{10} &= \frac{[3l^2(1-\nu) + 20h^2]lE}{(\nu^2 - 1)h} \\ \alpha_{11} &= \frac{[3l^2(\nu - 1) + 10h^2]lE}{(\nu^2 - 1)h} \\ \alpha_{12} &= \frac{[5l^2(1-\nu) + 3h^2]lE}{(\nu^2 - 1)h} \\ \alpha_{13} &= \frac{[5l^2(\nu - 1) + 6h^2]lE}{(\nu^2 - 1)h} \end{aligned} \quad (\text{B.2.5})$$

$$\beta_3 = \frac{(7\nu - 5)E}{\nu^2 - 1}$$

$$\beta_4 = \frac{(11\nu - 1)E}{\nu^2 - 1}$$

$$\beta_5 = \frac{h}{l} \frac{E}{\nu^2 - 1}$$

$$\beta_6 = \frac{El(\nu + 1)}{h}$$

$$\beta_7 = \frac{Eh(\nu + 1)}{l}$$

$$\beta_8 = \frac{l}{h} \frac{E}{\nu^2 - 1}$$

$$\gamma_4 = \frac{[14h^2(\nu - 1) - 17l^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\gamma_5 = \frac{[17h^2(\nu - 1) - 56l^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\gamma_6 = \frac{[20h^2(\nu - 1) + 3l^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\gamma_7 = \frac{[3h^2(\nu - 1) - 40l^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\gamma_8 = \frac{[10h^2(\nu - 1) - 3l^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\gamma_9 = \frac{[3h^2(\nu - 1) + 80l^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\gamma_{10} = \frac{[5h^2(\nu - 1) - 3l^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\gamma_{11} = \frac{[5h^2(\nu - 1) + 6l^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\gamma_{12} = \frac{[3h^2(\nu - 1) - 20l^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

$$\gamma_{13} = \frac{[3h^2(\nu - 1) + 10l^2]lE}{(\nu^2 - 1)h}$$

Apêndice C – Matrizes utilizadas na formulação cartesiana bidimensional da teoria de volumes finitos

$$\mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h_\gamma}{2} & 0 & \frac{h_\gamma^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h_\gamma}{2} & 0 & \frac{h_\gamma^2}{4} \\ \frac{l_\beta}{2} & 0 & \frac{l_\beta^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_\beta}{2} & 0 & \frac{l_\beta^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{h_\gamma}{2} & 0 & \frac{h_\gamma^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_\gamma}{2} & 0 & \frac{h_\gamma^2}{4} \\ -\frac{l_\beta}{2} & 0 & \frac{l_\beta^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_\beta}{2} & 0 & \frac{l_\beta^2}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{A}_{01(8 \times 4)}^{(q)} = \mathbf{0}_{(8 \times 4)} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{A}_{02(8 \times 4)}^{(q)} = \mathbf{0}_{(8 \times 4)} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{A}_{10(4 \times 8)}^{(q)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{A}_{11(4 \times 4)}^{(q)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h_\gamma}{2} & 0 & \frac{h_\gamma^2}{4} \\ -\frac{l_\beta}{2} & 0 & -\frac{l_\beta^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{h_\gamma}{2} & 0 & \frac{h_\gamma^2}{4} \\ \frac{l_\beta}{2} & 0 & -\frac{l_\beta^2}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbf{A}_{12(4 \times 4)}^{(q)} = \mathbf{0}_{(4 \times 4)} \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{A}_{20}_{(4 \times 8)}^{(q)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{A}_{21}_{(4 \times 4)}^{(q)} = \mathbf{0}_{(4 \times 4)} \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{A}_{22}_{(4 \times 4)}^{(q)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3h_\gamma}{2} & 0 & \frac{3h_\gamma^2}{4} \\ \frac{3l_\beta}{2} & 0 & -\frac{3l_\beta^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3h_\gamma}{2} & 0 & \frac{3h_\gamma^2}{4} \\ \frac{3l_\beta}{2} & 0 & -\frac{3l_\beta^2}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{A}_{(12 \times 12)}^{(q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} & \mathbf{A}_{01}_{(8 \times 4)}^{(q)} \\ \mathbf{A}_{10}_{(4 \times 8)}^{(q)} & \mathbf{A}_{11}_{(4 \times 4)}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{A}_{(16 \times 16)}^{(q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(8 \times 8)}^{(q)} & \mathbf{A}_{01}_{(8 \times 4)}^{(q)} & \mathbf{A}_{02}_{(8 \times 4)}^{(q)} \\ \mathbf{A}_{10}_{(4 \times 8)}^{(q)} & \mathbf{A}_{11}_{(4 \times 4)}^{(q)} & \mathbf{A}_{21}_{(4 \times 4)}^{(q)} \\ \mathbf{A}_{20}_{(4 \times 8)}^{(q)} & \mathbf{A}_{21}_{(4 \times 4)}^{(q)} & \mathbf{A}_{22}_{(4 \times 4)}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\mathbf{a}_{(8 \times 2)}^{(q)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{a}_{(12 \times 2)}^{(q)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{a}_{(16 \times 2)}^{(q)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} = \begin{bmatrix} 0 & -C_{44} & 0 & \frac{3}{2}C_{44}h_\gamma & -C_{44} & 0 & 0 & 0 \\ -C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{11} & 0 & \frac{3}{2}C_{11}h_\gamma \\ C_{11} & 0 & \frac{3}{2}C_{11}l_\beta & 0 & 0 & C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 & 0 & C_{44} & 0 & \frac{3}{2}C_{44}l_\beta & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 & \frac{3}{2}C_{44}h_\gamma & C_{44} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} & 0 & \frac{3}{2}C_{11}h_\gamma \\ -C_{11} & 0 & \frac{3}{2}C_{11}l_\beta & 0 & 0 & C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -C_{44} & 0 & 0 & -C_{44} & 0 & \frac{3}{2}C_{44}l_\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

$$\mathbf{B}_{01}^{(q)}_{(8 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}C_{44}h_\gamma & 0 & -\frac{1}{4}C_{44}h_\gamma^2 \\ \frac{1}{2}C_{12}h_\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}C_{12}l_\beta & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}C_{44}l_\beta & 0 & \frac{1}{4}C_{44}l_\beta^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}C_{44}h_\gamma & 0 & \frac{1}{4}C_{44}h_\gamma^2 \\ \frac{1}{2}C_{12}h_\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}C_{12}l_\beta & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}C_{44}l_\beta & 0 & -\frac{1}{4}C_{44}l_\beta^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{B}_{02}^{(q)}_{(8 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}C_{12}h_\gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}C_{12}l_\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}C_{12}h_\gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}C_{12}l_\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{B}_{10}^{(q)}_{(4 \times 8)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3C_{12} \\ 0 & 0 & 3C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3C_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

$$\mathbf{B}_{11}^{(q)}_{(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & -C_{11} & \frac{3}{2}C_{12}h_\gamma & \frac{3}{2}C_{11}h_\gamma \\ -C_{11} & 0 & -\frac{3}{2}C_{11}l_\beta & -\frac{3}{2}C_{12}l_\beta \\ 0 & C_{11} & \frac{3}{2}C_{12}h_\gamma & \frac{3}{2}C_{11}h_\gamma \\ C_{11} & 0 & -\frac{3}{2}C_{11}l_\beta & -\frac{3}{2}C_{12}l_\beta \end{bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

$$\mathbf{B}_{12}^{(q)}_{(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{4}C_{12}h_\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4}C_{12}l_\beta^2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}C_{12}h_\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4}C_{12}l_\beta^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

$$\mathbf{B}_{20}^{(q)}_{(4 \times 8)} = \mathbf{0}_{(4 \times 8)} \quad (\text{C.21})$$

$$\mathbf{B}_{21}^{(q)}_{(4 \times 4)} = \mathbf{0}_{(4 \times 4)} \quad (\text{C.22})$$

$$\mathbf{B}_{22}^{(q)}_{(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & -3C_{11} & 0 & \frac{9}{2}C_{11}h_\gamma \\ -3C_{11} & 0 & -\frac{9}{2}C_{11}l_\beta & 0 \\ 0 & 3C_{11} & 0 & \frac{9}{2}C_{11}h_\gamma \\ 3C_{11} & 0 & -\frac{9}{2}C_{11}l_\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.23})$$

$$\mathbf{B}_{(12 \times 12)}^{(q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} & \mathbf{B}_{01(8 \times 4)}^{(q)} \\ \mathbf{B}_{10(4 \times 8)}^{(q)} & \mathbf{B}_{11(4 \times 4)}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (\text{C.24})$$

$$\mathbf{B}_{(16 \times 16)}^{(q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(8 \times 8)}^{(q)} & \mathbf{B}_{01(8 \times 4)}^{(q)} & \mathbf{B}_{02(8 \times 4)}^{(q)} \\ \mathbf{B}_{10(4 \times 8)}^{(q)} & \mathbf{B}_{11(4 \times 4)}^{(q)} & \mathbf{B}_{12(4 \times 4)}^{(q)} \\ \mathbf{B}_{20(4 \times 8)}^{(q)} & \mathbf{B}_{21(4 \times 4)}^{(q)} & \mathbf{B}_{22(4 \times 4)}^{(q)} \end{bmatrix} \quad (\text{C.25})$$