UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O ENSINO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO COM ÊNFASE EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, JOGOS E APLICAÇÕES.

Josivânio Silva de Sousa

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Maceió, setembro de 2018.

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

JOSIVÂNIO SILVA DE SOUSA

O ENSINO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO COM ÊNFASE EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, JOGOS E APLICAÇÕES.

Maceió
2018

JOSIVÂNIO SILVA DE SOUSA

O ENSINO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO COM ÊNFASE EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, JOGOS E APLICAÇÕES.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Flores

Maceió
2018

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecário Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

S725e Sousa, Josivânio Silva de.
O ensino do sistema de numeração com ênfase em resolução de problemas, jogos e aplicações / Josivânio Silva de Sousa. – 2018.
78 f. : il.

Orientador: André Luiz Flores.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2018.

Bibliografia: f. 72.
Apêndices: f. 73-78.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Sistema de numeração. 3. Resolução de problemas. I. Título.

CDU: 372.8:51

Folha de Aprovação

JOSIVÂNIO SILVA DE SOUSA

O ENSINO DE SISTEMAS DE NUMERAÇÃO COM ÊNFASE EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, JOGOS E APLICAÇÕES

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 21 de setembro de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. André Luiz Flores – UFAL (Presidente)

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa - UFAL

Arlyson Alves do Nascimento

Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento – IFAL

MACEIÓ - 2018

Dedico este trabalho ao meu filho, Pedro Henrique.

AGRADECIMENTOS

Embora o grau de mestre seja individual, sinto-me na obrigação de compartilhar esse mérito com algumas pessoas. Esses agradecimentos são sinceros e merecidos.

Inicialmente, agradeço a minha mãe por ter sido uma guerreira em minha vida, por ter trabalhado muitos anos para que não me faltasse o mínimo de condições à vida.

Agradeço a todos os Professores, do ensino fundamental e médio, que participaram de minha formação, por terem me proporcionado o conhecimento e não somente por isso, mas por terem me ensinado desde sempre que estudar é a melhor arma contra as dificuldades sociais da vida.

Também agradeço a todos os Professores do Instituto de Matemática da UFAL e, principalmente, aqueles que fazem parte do PROFMAT/UFAL, pelos ensinamentos e por toda preocupação em garantir um curso de boa qualidade. Em especial, quero agradecer ao Professor e também Orientador, Prof. Dr. André Luiz Flores, por ter me deixado bastante à vontade na escolha do tema, pelo apoio e paciência, por ter dedicado parte do seu tempo fazendo as sugestões, correções e ponderações, estando sempre disponível nos momentos em que precisei, por acreditar em mim e por ser exemplo de profissional.

Aos amigos da turma PROFMAT/UFAL 2015, Jônatas, Edvânia, Wagner Adolfo, Vagner Lopes, Andréia, Igor, Josenildo, Alex, Erenilda, Edson, Cícero Rufino e Manoel Roberto, pelo companheirismo e apoio em todas as fases do mestrado.

À CAPES pelo apoio financeiro durante meu tempo de curso.

A todos da SBM, que contribuíram para que o PROFMAT tomasse corpo e trouxesse benefícios para a educação brasileira.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo".

Galileu Galilei

RESUMO

O objetivo desse trabalho é fornecer um material de apoio aos professores para ensinar o sistema de numeração utilizando resolução de problemas, jogos e aplicações. O que nos impeliu à escolha desse tema foi o fato de termos observado, na maioria dos livros didáticos, uma abordagem geral e de poucos atrativos a ponto de por si só motivar os alunos a aprenderem tal conteúdo, pois muitas vezes estes terminam o ensino fundamental sem saber o que são os sistemas não decimais e como se fazem as operações matemáticas nesses sistemas, bem como as relações desses sistemas com o sistema decimal. Pensando nisso, resolvemos explorar este tema utilizando, além do livro didático, também o lúdico por acreditarmos que trabalhando com a metodologia dos jogos didáticos e resolução de problemas obteremos uma aprendizagem mais significativa. Esperamos com isso, contribuir nos processos de ensino e de aprendizagem desse conteúdo aos alunos dos sextos anos.

Palavras-chaves: Sistema de numeração. Resolução de problemas. Aplicações.

ABSTRACT

The objective of this work is to provide a support material for teachers to teach the numbering system using problem solving, games and applications. What pushed us to choose this theme was the fact that we observed in most textbooks a general approach and few attractions to the extent that, on its own, motivate students to learn such content because they often finish teaching fundamental without knowing what non-decimal systems are and how the mathematical operations are done in those systems, as well as the relationships of these systems with the decimal system. Thinking about this, we decided to explore this theme using, in addition to the textbook, also the playful one because we believe that working with the methodology of didactic games and problem solving will obtain a more meaningful learning. We hope to contribute to the teaching and learning processes of this content to the students of the sixth year.

Key-words: Numbering system. Troubleshooting. Applications.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Quando nos deparamos com atividades ou problemas que envolvem o conhecimento sobre sistemas de numeração que não seja o decimal, é que percebemos o quanto precisamos nos aprofundar neste conhecimento. Foi a busca por esta necessidade de entender melhor sobre a construção de sistemas de numeração que não fossem decimais e, principalmente, as semelhanças que existem ou não, entre esses e o sistema decimal, que nos impulsionou a pesquisar e escrever sobre o tema. O interesse despertado ao encontrar livros, textos ou atividades e problemas nos quais se discutem o significado teórico e prático dos sistemas de numeração, permitiu a oportunidade de estudar e conhecer como foram construídos, historicamente e, mais especificamente, na matemática, os sistemas de numeração. A partir daí, perceber como eles influenciaram o processo de organização dos registros das quantidades. Foram esses processos criados para organizar o registro das contagens e, ao mesmo tempo, a sistematização dos cálculos aritméticos que permitiram o desenvolvimento das ciências exatas. Ao aprofundar nosso estudo nesse conteúdo, percebemos como ele pode levar a uma compreensão mais efetiva dos algoritmos operacionais utilizados nos sistemas numéricos em qualquer base, que o torna extremamente enriquecedor para o aprendizado e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Iniciamos este trabalho com uma abordagem histórica sobre a origem dos sistemas de numeração, mostrando o momento em que o homem passa a usar a contagem a partir do desenvolvimento das atividades humanas no solo, faremos isso falando de alguns sistemas de numeração antigos, como os sistemas Babilônicos, Egípcios, Grego, Romano, Chinês, Maia e o sistema Indo – Arábico decimal, que se tornou predominante em quase todas as culturas atuais.

No capítulo 2 apresentamos como realizar as operações aritméticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão, em base decimal. Comparativamente, aproveitaremos a temática para estudar e compreender melhor os sistemas numéricos que não são de base decimal. Mostraremos como construir os padrões de representação numérica de acordo com a base considerada para obter um sistema numérico. Apresentaremos como realizar as operações aritméticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão em bases não decimais e descreveremos como fazer a conversão de numerais de uma base para outra.

Seguiremos o trabalho propondo algumas aplicações e jogos como, por exemplo, a Mágica matemática, o Jogo das tábuas, o Jogo dos palitos, o Jogo das 4 operações, Um ábaco binário, Um contador binário, aplicação nos Códigos de barras, o Jogo de Nim e uma aplicação no Problema da moeda falsa, que são aplicações matemáticas que têm como princípio os sistemas numéricos decimais e não decimais, que ajudam na compreensão e na aprendizagem, permitindo o desenvolvimento do gosto pela investigação das relações numéricas em jogos ou desafios envolvendo essa temática.

No capítulo seguinte propomos uma atividade sobre sistemas não decimais onde se procura desenvolver aprendizagens relacionadas à conversão de números escritos em uma base qualquer para a base decimal, e vice-versa, assim como trabalha as quatro operações fundamentais em bases não decimais. Depois propomos alguns problemas de olimpíadas, visando o aprofundamento da aprendizagem dos sistemas de numeração.

No último capítulo faremos uma avaliação diagnóstica da aplicação de parte deste trabalho em uma turma do 6º ano da Escola Estadual Professor da Silveira Camerino, localizada no CEPA, Maceió-AL, com o objetivo de sondarmos a aprendizagem gerada com esses estudantes.

Por fim, fizemos um apêndice descrevendo passo a passo como construir um contador binário.

1.1 Sistemas de numeração: abordagem histórica

No início, o homem primitivo não tinha necessidade de contar, pois o que necessitavam para a sua sobrevivência era retirado da própria natureza. A necessidade de contar começou com o desenvolvimento das atividades humanas, quando o homem foi deixando de ser pescador e coletor de alimentos para fixa-se no solo. O homem começou a plantar, produzir alimentos, construir casas, proteções, fortificações e domesticar animais, usando os mesmos para obter a lã e o leite, tornando-se criador de animais domésticos, o que trouxe profundas modificações na vida humana[1].

As primeiras formas de agricultura de que se tem notícia, foram criadas há cerca de dez mil anos na região que hoje é denominada Oriente Médio.

A agricultura passou então a exigir o conhecimento do tempo, das estações do ano e das fases da lua e assim começaram a surgir as primeiras formas de calendário.

[1]O início do processo de contagem. Disponível em:<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/numeros/numeros.htm.> Acesso em: 20 fev. 2018.

No pastoreio, o pastor usava várias formas para controlar o seu rebanho. Pela manhã, ele soltava seus carneiros e analisava ao final da tarde, se algum tinha sido roubado ou se teria fugido, ou perdeu-se do rebanho, ou queria saber se havia sido acrescentado um novo carneiro ao rebanho. Assim eles tinham a correspondência um a um, onde cada carneiro correspondia a uma pedrinha que era armazenada em um saco.

No caso das pedrinhas, cada animal que saía para o pasto de manhã correspondia a uma pedra que era guardada em um saco. No final do dia, quando os animais voltavam do pasto era feita a correspondência inversa, onde para cada animal que retornava, era retirada uma pedra do saco. Se no final do dia sobrasse alguma pedra, era porque faltava algum dos animais, e se algum fosse acrescentado ao rebanho, era só acrescentar mais uma pedra.

A correspondência a unidade não era feita somente com pedras, mas eram usados também: nós em cordas nas paredes, talhos em ossos, desenhos nas cavernas e outros tipos de marcação. Os talhes nas barras de madeira, que eram usados para marcar quantidades, continuaram a ser usados até o século XVIII na Inglaterra. A palavra talhe significa corte.

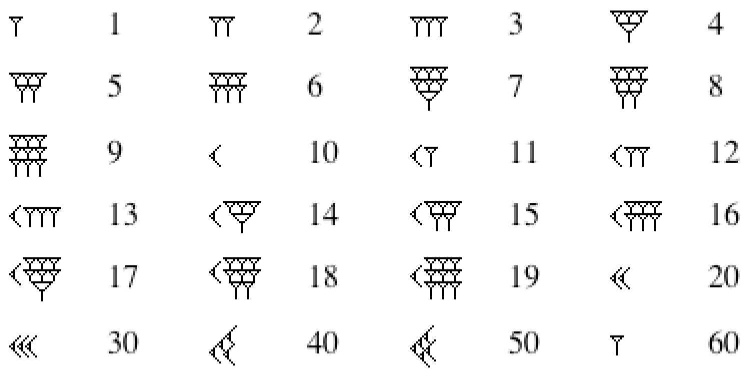
Com o passar do tempo, as quantidades foram representadas por expressões, gestos, palavras e símbolos, sendo que cada povo tinha a sua maneira de representação.

1.2 Sistema de numeração babilônico ou mesopotâmico

O sistema de numeração utilizado pelos escribas babilônios foi cultivado na antiga Mesopotâmia, região entre os rios Tigres e Eufrates, onde hoje é o Iraque.

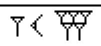
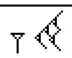
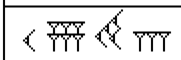
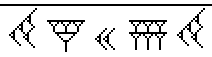
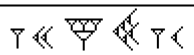
Segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 10), os babilônios escreviam em tábulas de argila úmidas e num estilo cujas extremidades podem ter sido triângulos isósceles penetrantes. Os símbolos eram feitos com marcações simples em forma de cunha (cuneiforme) e as tábulas eram cozidas em fornos até endurecer, obtendo, assim, registros permanentes.

Ainda, segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 10), o sistema de numeração dos babilônios utilizava o princípio posicional de base 60 (sexagesimal), na verdade, esse sistema era uma combinação de base 60 com base 10 (decimal), pois os números menores que 60 eram representados pelo uso de um sistema de base 10 simples, por agrupamento, e os números maiores ou iguais a 60 eram designados pelo princípio da posição na base 60. Abaixo, temos a representação da escrita dos babilônios.



Como podemos notar, os números babilônios eram representados por apenas dois símbolos: uma cunha vertical para 1, e uma cunha angular para 10. Além disso, o número 60 era representado também pelo mesmo símbolo que o número 1.

Vejamos como representavam alguns números na escrita cuneiforme:

Escrita cuneiforme	Leitura dos símbolos em nosso sistema	Valor decimal
	$1;15 \ = \ 1 \times 60 + 15$	75
	$1;40 \ = \ 1 \times 60 + 40$	100
	$16;43 \ = \ 16 \times 60 + 43$	1003
	$44;26;40 \ = \ 44 \times 60^2 + 26 \times 60 + 40$	160000
	$1;24;51;10 = 1 \times 60^3 + 24 \times 60^2 + 51 \times 60 + 10$	305470

A maneira mais fácil de fazer a leitura numérica cuneiforme é da direita para a esquerda, além disso, esse sistema dá margem para ambiguidades.

Por exemplo, com duas cunhas verticais temos o número 2 ou 61 ou 120 ou 3601 ou 7200, etc. Na representação do 2 esse problema é resolvido unindo-se bem os dois símbolos. Em outros casos, os babilônios tinham que depender do contexto, que permitia determinar a ordem de grandeza dos números em cada problema. Mas os babilônios tiveram outras dificuldades, como, por exemplo, diferenciar 1 de 60. Neste caso, houve uma época em que se usava o símbolo de 1 com tamanho diferente para representar 60.

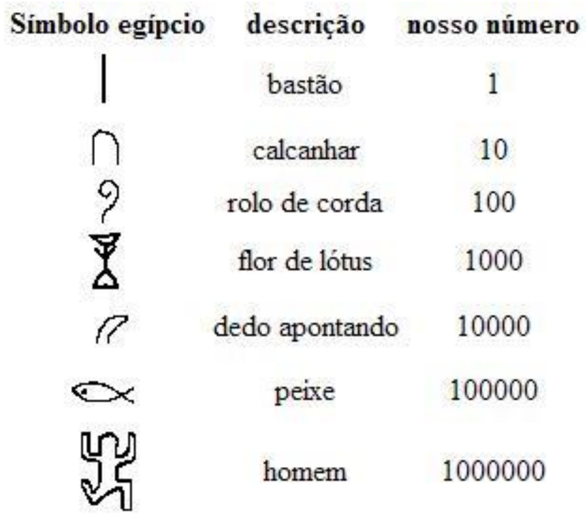
Em um primeiro momento da escrita cuneiforme, os babilônios não tinham nenhum símbolo para representar o zero, eles deixavam um espaço vazio quando havia uma potência de 60 ausente. Já no Império Selêucida, eles colocavam um símbolo separador representado por duas barras inclinadas, que era usado para indicar tal espaço vazio.

No entanto, este símbolo não era usado para diferenciar, por exemplo, 1, 60 e 3600, pois não poderia usá-lo como último algarismo, além disso, não podia ser resultado de cálculos, logo este separador não poderia ser concebido como número.

1.3 Sistema de numeração egípcio

Segundo os estudiosos, um sistema de numeração hieroglífico foi desenvolvido pelos antigos egípcios mais ou menos na mesma época que os babilônios, ou seja, por volta de 3000 a.C. Os egípcios empregavam um sistema de numeração decimal, do tipo aditivo, não tinham um símbolo para o zero, e, diferentemente dos babilônios, usavam um sistema de numeração não posicional, ou seja, a ordem dos símbolos não alterava o valor numérico (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 30).

Os hieróglifos egípcios eram usados principalmente para fazer inscrições em pedras e em outros objetos duráveis. Quando começaram a escrever em papiros, os egípcios desenvolveram métodos mais eficientes para escrever numerais. O novo sistema era composto por 7 símbolos básicos diferentes, onde um mesmo símbolo poderia ser repetido até 9 vezes. Cada agrupamento de 10 era trocado por um novo símbolo.



Símbolo egípcio	descrição	nosso número
	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo apontando	10000
	peixe	100000
	homem	1000000

Por ser um sistema aditivo, não posicional, a representação numérica era feita de várias formas, por exemplo, o número 23 poderia ser representado como:

∩∩|||	|||∩∩	∩||| ∩
10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 23	1 + 1 + 1 + 10 + 10 = 23	10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 23

Esse sistema não era prático para escrever números como 999 ou números como 1×10^{255}, pois exigiam a escrita de muitos símbolos.

1.4 Sistema de numeração grego

Os gregos, antes do século III a.C. desenvolveram dois sistemas principais de numeração: um, provavelmente o mais antigo, é conhecido como notação ática (ou herodiânica), o outro, como sistema jônio (ou alfabético). Ambos constituíam um sistema de agrupamento simples de base 10.

No sistema ático, os números de um a quatro eram representados por riscos verticais repetidos, o número cinco era representado por um novo símbolo, a primeira letra Π (ou Γ) da palavra cinco. Para os números de seis a nove, o sistema ático combinava o símbolo Γ com riscos unitários. Para potências inteiras positivas da base (dez), as letras iniciais correspondentes das palavras também eram usadas: Δ para Deca (dez), H para Hekaton (cem) X para Khilioi (mil), M para Myrioi.

I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII	Δ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Γ	Δ	H	X	M
Pente	Deca	Hekaton	Khilioi	Myrioi
Πεντε	Δεκα	Ηεκατον	Χλιοι	Μυριοι
5	10	100	1.000	10.000

Os gregos escreviam os números 50, 500, 5000 e 50000 no sistema ático como:

𐅄	𐅅	𐅆	𐅇
50	500	5000	50000

Na escrita ática, o número 39.875 escrevia-se como MMM𐅆XXXX𐅅HHH𐅄ΔΔΓ.

No sistema ático havia um grande problema. Para escrever um número muito alto, por exemplo, o número 9.999, teria que ser representado por 36 símbolos, e isso seria muito complicado. Por esse motivo, algum tempo depois, foi introduzido um novo sistema numérico, chamado de sistema jônico, que era baseado no próprio alfabeto grego[2].

O sistema jônico era decimal e empregava 27 caracteres, dos quais, 24 eram as letras do alfabeto grego e possuía mais três outras obsoletas: *digamma, koppa* e *sampi.*

Símbolo	Α, α	Β, β	Γ, γ	Δ, δ	Ε, ε	ϛ (digamma)	Ζ, ζ	Η, η	Θ, θ
Valor	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Símbolo	Ι, ι	Κ, κ	Λ, λ	Μ, μ	Ν, ν	Ξ, ξ	Ο, ο	Π, π	ϙ (koppa)
Valor	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Símbolo	Ρ, ρ	Σ, σ	Τ, τ	Υ, υ	Φ, ϕ	Χ, χ	Ψ, ψ	Ω, ω	ϡ (sampi)
Valor	100	200	300	400	500	600	700	800	900

Neste sistema numérico, cada letra grega representava um número, e ao escrever um número que tivesse mais de um dígito, dava-se a impressão de que se estava escrevendo uma palavra[3]. Assim, para diferenciar as letras dos números, colocava-se uma espécie de acento agudo na parte superior direita da sequência de números.

Usando as letras minúsculas, como exemplo do uso desses símbolos, temos:

$$15 = \iota\varepsilon', \quad 32 = \lambda\beta', \quad 789 = \psi\pi\theta'.$$

Para os primeiros nove múltiplos de mil foram adotadas as primeiras nove letras do alfabeto precedidas por um risco.

,α	,β	,γ	,δ	,ε	,ϛ	,ζ	,η	,θ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

Assim, o número 6.789 era escrito como ,ϛψπθ’.

Para números acima de 10.000 era utilizado o símbolo M, *miríade grega.* Fazendo uso do princípio multiplicativo. Um símbolo para um inteiro de 1 a 9.999 era colocado acima da

[2] Disponível em:<https://janusaureus.wordpress.com/2012/02/23/o-sistema-numerico-grego/. Acesso em: 21 de fev. 2018.

[3] Disponível em: https://janusaureus.wordpress.com/2012/02/23/o-sistema-numerico-grego/. Acesso: em 21 de fev. de 2018.

letra M ou depois dela. Por exemplo, 72.803 = $\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$,$\beta\pi\gamma$’, 450.082 = $\overset{\mu\varepsilon}{\mathrm{M}}$ $\pi\beta$’, 3.257.888 =$\overset{\tau\beta\varepsilon}{\mathrm{M}}$,$\zeta\omega\pi\eta$’. Caso aparecessem números ainda maiores, o mesmo princípio seria aplicado à dupla miríade, 100.000.000 ou 10^8.

1.5 Sistema de numeração romano

De acordo com Andrini e Vasconcelos (2012, p. 12), os antigos romanos possuíam um sistema de numeração formado por 7 símbolos, esse sistema era baseado no princípio aditivo e não era posicional. Os símbolos I, X, C e M podiam ser repetidos até 4 vezes, enquanto os símbolos V, L e D não podiam se repetir.

Símbolo	I	V	X	L	C	D	M
Valor	1	5	10	50	100	500	1000

Assim, nos tempos antigos e medievais, escrevia-se, por exemplo, 1994 como sendo MDCCCCLXXXXIIII.

Numa fase posterior, foi introduzida uma notação seguindo o princípio subtrativo. Esse princípio seguia a seguinte regra: se um símbolo de um numeral menor fosse colocado antes de um símbolo de numeral maior, então o valor menor era subtraído do maior. Além disso, para evitar ambiguidade, exigia-se que só os símbolos representando potências de dez podiam ser subtraídos, assim, definiu-se que: o I só podia preceder o V ou o X, o X só podia preceder o L ou o C e o C só podia preceder o D ou o M. Por exemplo, $\mathrm{IV} = 5 - 1 = 4$, $\mathrm{IX} = 10 - 1 = 9$, $\mathrm{XL} = 50 - 10 = 40$, $\mathrm{XC} = 100 - 10 = 4$, $\mathrm{CD} = 500 - 100 = 400$, $\mathrm{IV} = 5 - 1 = 4$, $\mathrm{CM} = 1000 - 100 = 900$. Após o surgimento do princípio subtrativo, os símbolos I, X, C e M passou a ser repetido, no máximo, 3 vezes. O número 1.994, agora, era representado por MCMXCIV.

Os números maiores eram escritos com uma barra sobre um conjunto de símbolos para indicar multiplicação por mil. Assim, $\overline{\mathrm{V}} = 5 \times 1.000 = 5.000$, $\bar{\bar{L}} = 50 \times 1.000^2 = 50.000.000$, $\overline{\mathrm{VII}}\mathrm{CLXV} = 7 \times 1.000 + 100 + 50 + 10 + 5 = 7.165$.

1.6 Sistema de numeração chinês – japonês

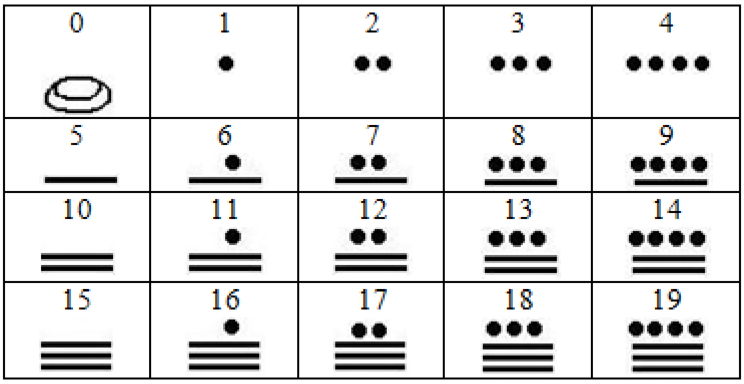
Conforme Eves (2004, p. 34), os chineses e japoneses antigos faziam seus registros em lâminas de bambu. Eles rachavam, longitudinalmente, a parte situada entre dois nós em tiras estreitas. Quando essas tiras eram secadas e raspadas, colocavam-se lado a lado, amarradas por quatro cordões transversais. Foi por conta da estreiteza das tiras que os caracteres eram escritos verticalmente, de cima para baixo, dando origem ao costume de escrever que permaneceu até os tempos mais modernos, quando as lâminas de bambu foram substituídas pela tinta e o papel, materiais mais convenientes para a escrita. O sistema de numeração chinês – japonês era um sistema multiplicativo de base 10.

1	一	7	七
2	二	8	八
3	三	9	九
4	四	10	十
5	五	10^2	百
6	六	10^3	千

Exemplo: $7.648 = 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8 =$ 七千六百四十八

1.7 Sistema de numeração maia

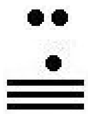
Um sistema muito interessante é o sistema da civilização Maia, da América Central. De origem remota e desconhecida, foi descoberto pelas expedições espanholas a Yucatán no inicio do século XVI. Os maias usavam um sistema vigesimal utilizando combinações de pontos e traços (seixos e gravetos), em que o ponto representava o número 1, e o traço representa o 5. Esse sistema também possuía um símbolo especial para o zero. (EVES, 2004, p. 37)

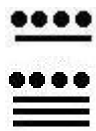


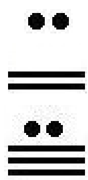
Para números maiores ou iguais a 20 eram usados agrupamentos verticais, calculados somando-se o valor por posição de cada grupo. O grupo mais embaixo representava as unidades, o valor do segundo grupo era multiplicado por 20, e, os outros grupos eram multiplicados por $18 \cdot 20^n$, em vez de 20^n. A explicação para essa discrepância provavelmente reside no fato de o ano maia consistir em 360 dias. Assim, o sistema dos maias era essencialmente baseado na base 20, exceto pelo uso peculiar de 18.

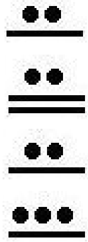
Vejamos alguns exemplos de como os maias representavam alguns números.

$20 = 1(20) + 0 =$ 

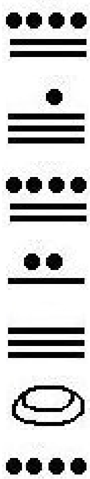
$56 = 2(20) + 16 =$ 

$199 = 9(20) + 19 =$ 

$937 = 2(18 \cdot 20) + 10(20) + 17 =$ 

$$54.868 = 7(18 \cdot 20^2) + 12(18 \cdot 20) + 7(20) + 8 =$$ 

$$854.551.804 = 14(18 \cdot 20^5) + 16(18 \cdot 20^4) + 14(18 \cdot 20^3) + 7(18 \cdot 20^2) +$$

$$15(18 \cdot 20) + 0(20) + 4 =$$ 

Como observação, podemos escrever o número 381 apenas de uma maneira, como sendo $381 = 1(18 \cdot 20) + 1(20) + 1 =$ .

1.8 Sistema de numeração indo – arábico

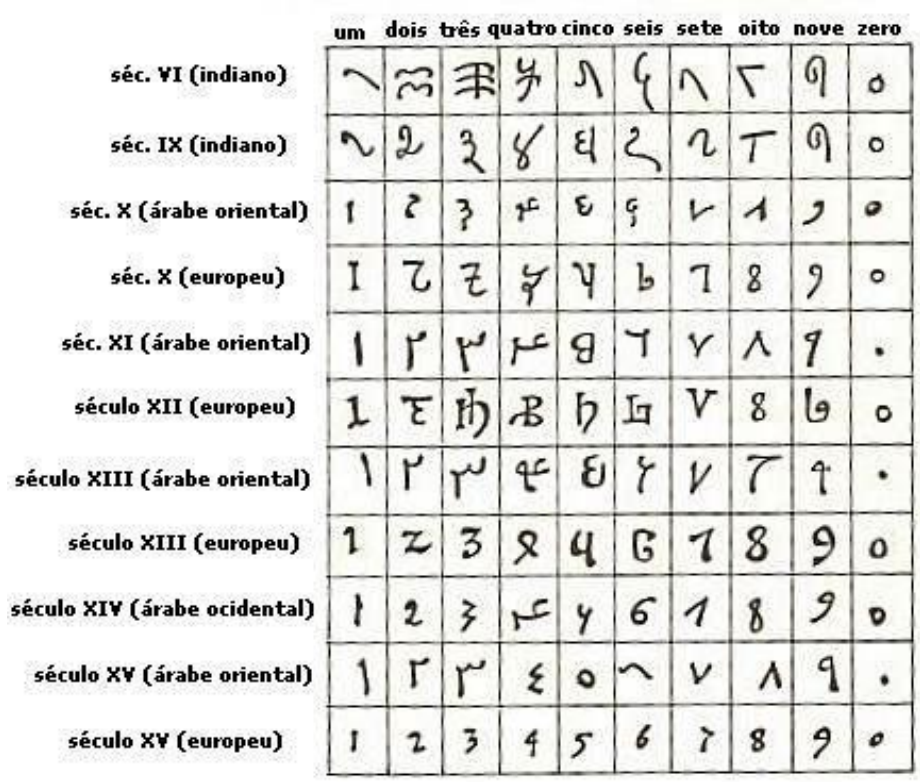
O sistema de numeração que usamos hoje é conhecido como sistema de numeração indo-arábico. Esse sistema possui esse nome devido aos antigos povos indianos que o criaram e aos árabes que, mais tarde, o aperfeiçoaram e divulgaram para a Europa Ocidental (EVES, 2004, p. 40).

Na Índia, encontram-se algumas colunas de pedras com símbolos numéricos que seriam os precursores do nosso sistema de numeração. Observou-se, nessas colunas, que o símbolo para o zero e a notação posicional não aparecem, no entanto, a ideia de valor posicional e um zero devem ter sido introduzidos na Índia antes do ano 800 d.C., pois o matemático árabe Al – Khowarizmi, que traduziu e escreveu muitas obras matemáticas de maneira completa, detalhava como, a partir dos 10 símbolos, que incluía o zero, organizava-se o sistema de numeração criado pelos indianos, no ano 825 d.C. (EVES, 2004, p. 40).

Em um de seus livros, o tratado de aritmética intitulado *Livro da adição e da Subtração segundo o Cálculo dos Indianos*, Al – Khowarizmi, discute o sistema de numeração decimal posicional hindu e as operações feitas nesse sistema, incluindo a multiplicação e a divisão (MOL, 2013, p. 67).

Mais tarde, no século, XII, uma tradução latina do tratado de Al – Khowarizmi, seguida de alguns trabalhos europeus sobre o assunto, fez com que o sistema se disseminasse mais amplamente. Mas, somente em 1600, os numerais indo – arábicos passaram a fazer parte da civilização europeia que, até então, utilizava-se do sistema de numeração romano.

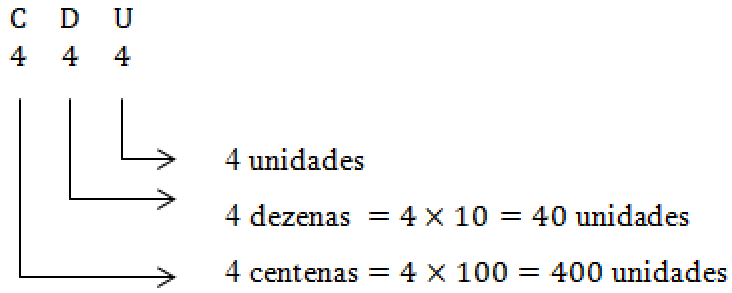
Abaixo, representamos os primeiros registros numéricos dos antigos indianos e suas posteriores modificações pelos árabes.



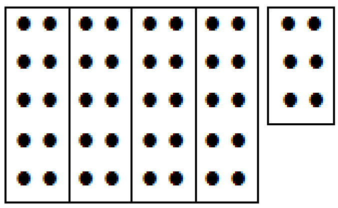
Segundo Andrini e Vasconcelos (2012, p. 12), A variação dos números se deu porque antigamente os livros e documentos eram todos escritos à mão, com diferentes caligrafias e, com a invenção da imprensa, os números foram padronizados até chegar aos que hoje utilizamos, chamados de algarismos.

2 SISTEMA INDO – ARÁBICO

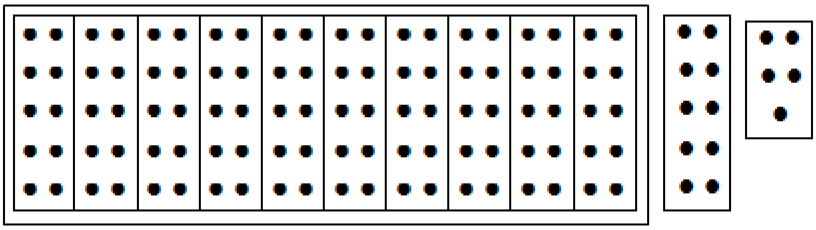
Esse sistema, como o próprio nome diz, utiliza os algarismos indo-arábicos de base 10, ou seja, os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Conforme Moretti (1999, p. 13), a escolha de uma base no sistema indo-arábico é arbitrária (qualquer natural maior do que 1), mas, por razões históricas, a base mais utilizada é a decimal, muito provavelmente devido aos dedos das mãos. Esse sistema numérico associa duas ideias básicas: o valor posicional e a base 10. Por exemplo, no número 444, o algarismo 4 representa quantidades diferentes dependendo da posição em que se encontra de modo que na primeira posição, o 4 (contando da direita para a esquerda) representa quatro unidades, na segunda posição quatro dezenas ou quarenta unidades e na terceira posição quatro centenas ou quatrocentos unidades.



O sistema de numeração indo-arábico decimal utiliza agrupamentos de 10 em 10 para representar a contagem de objetos. Por exemplo, se tivermos quarenta e seis objetos, podemos formar quatro grupos de 10 (4 dezenas) mais seis unidades, ou seja, $46 = 4 \times 10 + 6$.



Quando trabalhamos com quantidades maiores, por exemplo, o número 115, têm-se, então, onze grupos de 10 mais 5 unidades. Os onze grupos de 10 podem ser reagrupados, tomando a base 10 como parâmetro, ou seja, 10 grupos de 10 mais um grupo de 10. Assim, 115 pode ser agrupado como 10 grupos de 10 (um grupo de 10^2), um grupo de 10 mais 5 unidades, logo, $115 = 10 \times 10 + 1 \times 10 + 5$ ou $115 = 1 \times 10^2 + 1 \times 10 + 5$.



Nesse sistema de numeração, estabelecemos uma organização na representação numérica: a cada 3 posições ou ordens posicionadas da direita para a esquerda temos uma classe, essa organização facilita a leitura dos números. Por exemplo, o número

280 541 379 possui 3 classes.

8	0	5	4	1	3	7	9
Ordem das dezenas de milhão	Ordem das unidades de milhão	Ordem das centenas de milhar	Ordem das dezenas de milhar	Ordem das unidades de milhar	Ordem das centenas	Ordem das dezenas	Ordem das unidades
Classe dos milhões		Classe dos milhares			Classe das unidades simples		

A esquerda da classe dos milhões vem a classe dos bilhões, depois, a classe dos trilhões, dos quatrilhões, e assim por diante.

Na tabela anterior, o número 280 541 379 possui 9 algarismos ou ordens e ocupa a classe dos milhões. Portanto, lê-se: duzentos e oitenta milhões, quinhentos e quarenta e um mil, trezentos e setenta e nove.

Podemos, também decompor o número 280 541 379 numa representação de base 10 como:

$280\,541\,379 = 2 \cdot 10^8 + 8 \cdot 10^7 + 0 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + + 9 \cdot 10^0$.

Assim, podemos representar um número qualquer $(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_{10}$ na base decimal como sendo $(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_{10} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$, onde a_n , a_{n-1} , $\cdots$, a_1 , a_0 $\in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $n \in \mathbb{N}$.

2.1 Sistema indo – arábico de base 10

2.1.1 Adição

A adição está ligada à ideia de juntar, acrescentar. A cada par de parcelas, associamos sua soma, por exemplo:

$$\underset{\text{parcela}}{\underset{\downarrow}{8}} \quad + \quad \underset{\text{parcela}}{\underset{\downarrow}{9}} \quad = \quad \underset{\text{total ou soma}}{\underset{\downarrow}{17}}$$

Algoritmo da adição: Este processo reduz-se às adições nos agrupamentos de mesma ordem, sendo alinhados da direita para a esquerda. Por exemplo, para calcular a soma de $64 + 79$ alinhamos, primeiramente, unidade abaixo de unidade, em seguida, dezena abaixo de dezena, em seguida, efetuamos as somas em cada agrupamento.

$$\begin{array}{r} 6\ 4 \\ +\ 7\ 9 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 6\ 4 \\ +\ 7\ 9 \\ \hline 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 6\ 4 \\ +\ 7\ 9 \\ \hline 1\ 4\ 3 \end{array}$$

Começamos pelas unidades:

● 4 unidades + 9 unidades = 13 unidades = 1 dezena + 3 unidades.

Depois adicionamos as dezenas:

● 6 dezenas + 7 dezenas + 1 dezena (que veio da adição das unidades) = 14 dezenas = 1 centena + 4 dezenas.

O total é de 1 centena, 4 dezenas e 3 unidades, ou seja, 143.

2.1.2 Subtração

Efetuamos subtrações para responder às perguntas: Quanto resta? Quanto falta? Quanto a mais? Numa subtração, temos:

$$\underset{\text{minuendo}}{\underset{\downarrow}{15}} \quad - \quad \underset{\text{subtraendo}}{\underset{\downarrow}{8}} \quad = \quad \underset{\text{diferença ou resto}}{\underset{\downarrow}{7}}$$

Algoritmo da subtração: Este processo reduz-se às subtrações nos agrupamentos de mesma ordem, sendo alinhados da direita para a esquerda. Por exemplo, para calcular a subtração de $400 - 321$ alinhamos, primeiramente, unidade abaixo de unidade, em seguida, dezena abaixo de dezena, centena abaixo de centena, em seguida, efetuamos as subtrações em cada agrupamento.

$$\begin{array}{r} 4\,0\,0 \\ -\,3\,2\,1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle 3\;9\;10} \\ \cancel{4}\,0\,0 \\ -\,3\,2\,1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle 3\;9\;10} \\ \cancel{4}\,0\,0 \\ -\,3\,2\,1 \\ \hline 9 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle 3\;9\;10} \\ \cancel{4}\,0\,0 \\ -\,3\,2\,1 \\ \hline 7\;9 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle 3\;9\;10} \\ \cancel{4}\,0\,0 \\ -\,3\,2\,1 \\ \hline 0\;7\;9 \end{array}$$

● Começamos pelas unidades:

Quando trabalhamos com números naturais, não é possível tirar 1 de zero; então recorremos às dezenas. Como também não há dezenas, fazemos:

4 centenas = 3 centenas + 10 dezenas = 3 centenas + 9 dezenas + 10 unidades.

Logo, 10 unidades – 1 unidade = 9 unidades.

● Em seguida, subtraímos as dezenas e as centenas:

9 dezenas – 2 dezenas = 7 dezenas,

3 centenas – 3 centenas = 0 centena.

A diferença é de 7 dezenas e 9 unidades, ou seja, 79.

2.1.3 Multiplicação

Usamos a multiplicação para registrar uma adição de parcelas iguais, por exemplo:

$$\underbrace{3+3+3+3}_{} = 4 \times 3 = 12$$

4 parcelas iguais a 3.

$$\underbrace{4+4+4}_{} = 3 \times 4 = 12$$

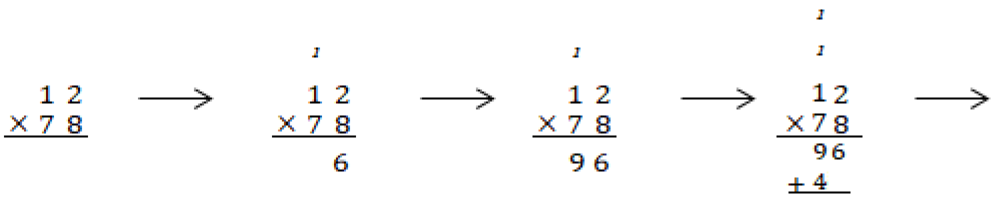
3 parcelas iguais a 4.

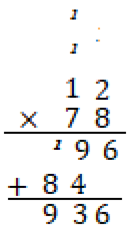
Os números multiplicados são chamados fatores e o resultado é o produto.

$$5 \times 2 = 10 \text{ ou } 5 \cdot 2 = 10$$

Fator Fator Produto

Algoritmo da multiplicação: Esse processo utiliza, basicamente, a propriedade distributiva da multiplicação. Por exemplo, para multiplicar 12 por 78, temos $12 \times (70 + 8) = 12 \times 70 + 12 \times 8 = 840 + 96 = 936$.





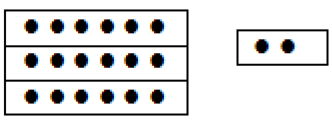
● Inicialmente fazemos 8 × 2 unidades = 16 unidades = 1 dezena e 6 unidades, em seguida fazemos 8 × 1 dezena = 8 dezenas, que somadas à 1 dezena, resulta em 9 dezenas. Em seguida, fazemos 70 × 2 unidades = 140 unidades = 1 centena e 4 dezenas, em seguida, fazemos 70 × 1 dezena = 70 dezenas = 700 unidades = 7 centenas, que somadas à 1 centena, resulta em 8 centenas. Por fim, fazemos a soma seguindo a regra de ordem dos algarismos.

É comum usarmos nomes especiais para indicar algumas multiplicações. Exemplos:

- O **dobro de** 6 é o mesmo que 2 × 6.
- O **triplo de** 7 é o mesmo que 3 × 7.
- O **quádruplo de** 3 é o mesmo que 4 × 3.
- O **quíntuplo de** 2 é o mesmo de 5 × 2.

2.1.4 Divisão

Usamos a divisão para repartir uma quantidade em partes iguais ou descobrir quantas vezes uma quantidade cabe em outra. Por exemplo, com 20 podemos formar 3 grupos de 6 e restam 2. Ou seja, 6 cabe 3 vezes em 20 e restam 2.

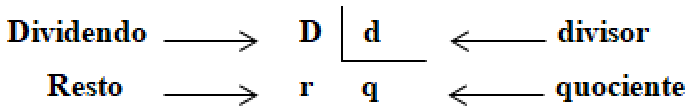


$20 = 6 + 6 + 6 + 2 = 3 \times 6 + 2$.

Algoritmo da divisão: Esse algoritmo é também chamado de “método da chave” e é definido da seguinte maneira:

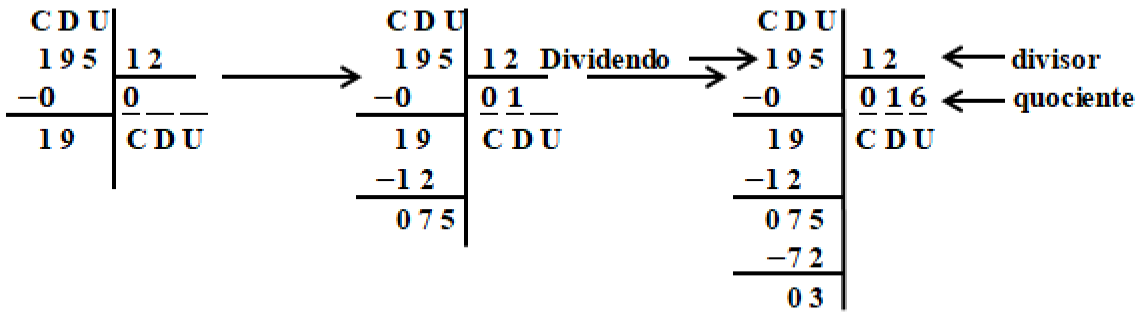
$\mathbf{Dividendo = quociente \times divisor + resto}$

$\mathbf{D = q \times d + r,}$ ou



Observação: O resto é sempre menor que o divisor. Se o resto é zero, a divisão é exata.

Exemplo: Vamos efetuar a divisão de 195 por 12 pelo método das chaves.



Como não podemos repartir igualmente 1 centena em 12 partes de modo a obter centena, trocamos 1 centena por 10 dezenas e, com as 9 que já tínhamos, passamos a ter 19 dezenas.

Repartindo igualmente 19 dezenas em 12 partes iguais, resulta 1 dezena para cada uma e ainda restam 7 dezenas.

Trocamos 7 dezenas por 70 unidades. Com as 5 que já tínhamos, passamos a ter 75 unidades.

Repartindo igualmente as 75 unidades por 12, resulta 6 unidades para cada uma e ainda restam 3 unidades.

Esta é uma **divisão não exata**, pois o **resto é diferente de 0.**

2.2 Sistema de numeração indo – arábico em uma base b qualquer

2.2.1 Teorema Geral da Numeração

Seja N um número natural representado em um sistema de numeração posicional de base b natural, com $b > 1$. O número N pode ser representado unicamente por $N =$

$(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_b = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0$, onde a_n , a_{n-1} , $\cdots$, a_1 , $a_0 \in \{0, 1, 2, \cdots, (b-1)\}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n \leq N < b^{n+1}$. Temos então que $N = a_n b^n + N_1$, onde $0 \leq a_n < b$ e $0 \leq N_1 < b^n$.

Agora, dividindo N_1 por b^{n-1}, temos que $N_1 = a_{n-1} b^{n-1} + N_2$, onde $0 \leq a_{n-1} < b$ e $0 \leq N_2 < b^{n-1}$.

Dividindo N_2 por b^{n-2}, temos que $N_2 = a_{n-2} b^{n-2} + N_3$, onde $0 \leq a_{n-2} < b$ e $0 \leq N_3 < b^{n-2}$.

Fazendo essas divisões sucessivamente chegamos que $N_{n-1} = a_1 b^1 + N_n$, onde $0 \leq a_1 < b$ e $0 \leq N_n < b^1$.

Por fim, dividindo N_n por $b^{n-n} = b^0 = 1$, temos que $N_n = a_0 \cdot 1 + N_{n+1}$, onde $0 \leq a_0 < b$ e $0 \leq N_{n+1} < 1$, que implica que $N_{n+1} = 0$, ou seja, $N_n = a_0$.

Portanto, $N = a_n b^n + N_1 = a_n b^n + (a_{n-1} b^{n-1} + N_2) = \cdots = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + N_n =$ $a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0$, ou seja, $N = (a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0)_b$.

Para representarmos, por exemplo, 100 elementos no sistema indo-arábico de base 2, procedemos da seguinte forma:

Tomamos $N = 100$, $b = 2$ e procuramos $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n \leq 100 < 2^{n+1}$ seja verdadeira. Assim, encontramos $n = 6$. Agora, dividindo 100 por 2^6, temos:

$100 = 1 \cdot 2^6 + 36$, onde $0 \leq 1 < 2$ e $0 \leq 36 < 2^6$.

Dividindo 36 por 2^5, temos:

$36 = 1 \cdot 2^5 + 4$, onde $0 \leq 1 < 2$ e $0 \leq 4 < 2^5$.

Dividindo 4 por 2^4, temos:

$4 = 0 \cdot 2^4 + 4$, onde $0 \leq 0 < 2$ e $0 \leq 4 < 2^4$.

Dividindo 4 por 2^3, temos:

$4 = 0 \cdot 2^3 + 4$, onde $0 \leq 0 < 2$ e $0 \leq 4 < 2^3$.

Dividindo 4 por 2^2, temos:

$4 = 1 \cdot 2^2 + 0$, onde $0 \leq 1 < 2$ e $0 \leq 0 < 2^2$.

Dividindo 0 por 2^1, temos:

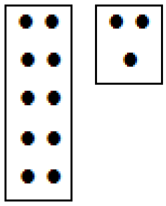
$0 = 0 \cdot 2^1 + 0$, onde $0 \leq 0 < 2$ e $0 \leq 0 < 2^1$.

Dividindo 0 por 2^0, temos:

$0 = 0 \cdot 2^0 + 0$, onde $0 \leq 0 < 2$ e $0 \leq 0 < 2^0$.

Portanto, $100 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$, ou seja, $N = 1100100_2$.

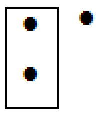
No sistema de numeração indo-arábico de base 10, para escrever ou representar quantidades utilizamos os 10 primeiros símbolos indo-arábicos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Por exemplo, para escrevermos um numeral que represente um conjunto de 13 pontinhos utilizando o sistema decimal, agrupamos em grupos de 10, nesse caso, temos um grupo de 10 e três pontos a mais, ou seja, temos 1 dezena e 3 unidades representados por $13 = 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0$.



2.3 Sistema de numeração indo – arábico de base 2 (sistema binário)

No sistema binário, utilizamos o menor agrupamento possível, isto é, agrupamos as quantidades de dois em dois, usando apenas os dois primeiros símbolos indo-arábicos 0 e 1, desta maneira, podemos representar qualquer quantidade apenas utilizando os dígitos 0 e 1.

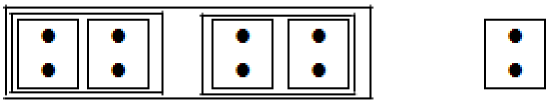
Para representarmos, por exemplo, 3 elementos no sistema indo-arábico de base 2, agrupamos em grupos de 2, nesse caso, temos um grupo de 2 e um ponto a mais, que escrevemos 11_2, no qual aparecem dois dígitos ou duas ordens. Assim, $3 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11_2$.



$3 = 11_2$

Para representarmos, por exemplo, 10 elementos no sistema indo-arábico de base 2, agrupamos em grupos de 2, nesse caso, temos cinco grupos de 2 e nenhuma unidade, como não temos um dígito para representar os cinco grupos, reagrupamos em grupos de 2×2, ficando com dois grupos de 2×2, um grupo de 2 e nenhuma unidade. Novamente, como não temos um dígito para representar os dois grupos de 2×2, nesse sistema, reagrupamos novamente e ficamos com um grupo de $2 \times 2 \times 2$, um grupo de 2 e nenhuma unidade. Ficamos então com 1 agrupamento de $2 \times 2 \times 2$, nenhum grupo de 2×2, um grupo de 2 elementos e nenhuma unidade. Logo, 10 elementos pode ser representado, na base 2, por

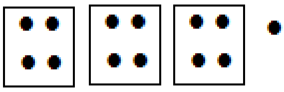
1010_2, no qual aparecem quatro dígitos ou quatro ordens. Assim, $10 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 1010_2$.



$10 = 1010_2$

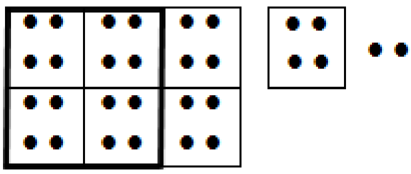
2.4 Sistema de numeração indo – arábico de base 4

Nesse sistema, usamos apenas os quatro primeiros símbolos indo-arábicos 0, 1, 2 e 3, para representar qualquer quantidade. Realizando o mesmo procedimento na mesma quantidade de pontos, agrupando-os em grupos de 4, obtemos 3 grupos de 4 pontinhos mais uma unidade, que escrevemos 31 na base 4. A representação deste número na base 4 é 31_4, no qual aparecem dois dígitos ou duas ordens. Assim, $13 = 3 \times 4^1 + 1 \times 4^0 = 31_4$



$13 = 31_4$

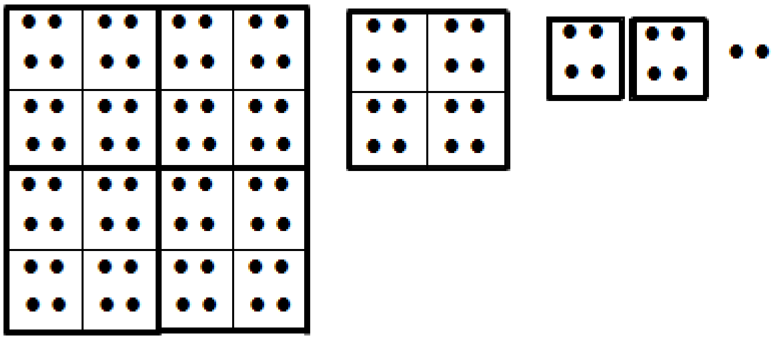
Para representarmos, por exemplo, 30 pontinhos em agrupamentos de 4, ficamos com 7 grupos de 4 pontinhos, mais 2 unidades. Como neste sistema qualquer número se representa apenas com os algarismos 0, 1, 2 e 3, devemos, então, reagrupar os 7 grupos de 4 pontinhos de modo que tenhamos 1 agrupamento de 4 grupos de 4 pontinhos ou 4×4 pontinhos, mais 3 grupos de 4 pontinhos ou 3×4 pontinhos, mais duas unidades, que escrevemos 132_4, no qual aparecem três dígitos ou três ordens. Assim, $30 = 1 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 2 \times 4^0 = 132_4$.



$30 = 132_4$

Se quisermos agrupar, por exemplo, 90 pontinhos em agrupamentos de 4, ficamos com 22 grupos de 4 mais 2 unidades. Esses 22 grupos de 4 são 5 agrupamentos de 4×4 mais 2 grupos de 4. Ficamos, então com 5 agrupamentos de 4×4, mais 2 grupos de 4, mais 2 unidades. Esses 5 agrupamentos de 4×4 é igual a 1 agrupamento de $4 \times 4 \times 4$, mais 1 agrupamento de 4×4. Ficamos então com 1 agrupamento de $4 \times 4 \times 4$, mais 1 grupo de

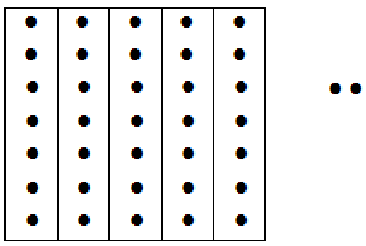
4×4, mais 2 grupos de 4, mais 2 unidades. Logo, 90 pontinhos pode ser representado, na base 4, por 1122_4, no qual aparecem quatro dígitos ou quatro ordens. Assim, $90 = 1 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 2 \times 4^1 + 2 \times 4^0 = 1122_4$.



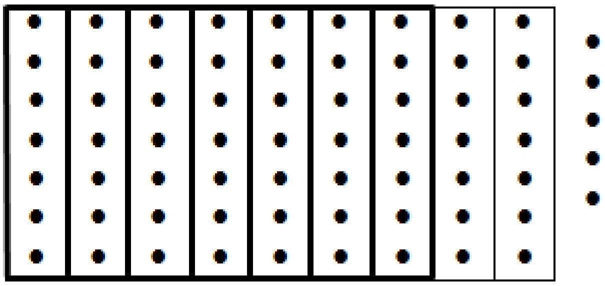
$$90 = 1122_4$$

2.5 Sistema de numeração indo – arábico de base 7

Nesse sistema, usamos apenas os sete primeiros símbolos indo-arábicos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, para representar qualquer quantidade. Tomemos 37 objetos, vamos agrupá-los em grupos de 7. Formamos 5 grupos de 7 e mais 2 unidades, que escrevemos 52 na base 7. A representação deste número na base 7 é 52_7, no qual aparecem dois dígitos ou duas ordens. Assim, $37 = 5 \times 7^1 + 2 \times 7^0 = 52_7$.



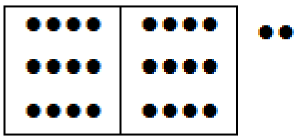
Consideremos, agora, 68 objetos. Agrupando-os em grupos de 7 formamos 9 grupos de 7 e 5 unidades. Como não temos símbolos para representar os nove grupos, reagrupamos os nove grupos de 7 em 1 grupo de 7×7, restando 2 grupos de 7. Assim, os 68 objetos serão agrupados como sendo 1 grupo de 7×7, 2 grupos de 7 e mais 5 unidades, que escrevemos 125_7, no qual aparecem três dígitos ou três ordens. Assim, $68 = 1 \times 7^2 + 2 \times 7^1 + 5 \times 7^0 = 125_7$.



2.6 Sistema de numeração indo – arábico de base 12

Nesse sistema, usamos os dez símbolos indo-arábicos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e mais 2 símbolos que podem ser figuras ou desenhos, já que não dispomos de mais que 10 símbolos indo-arábicos. Representando por $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ os símbolos que faltam para completar o conjunto de símbolos da base 12, temos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$, onde $\boldsymbol{\alpha} = 10$ unidades e $\boldsymbol{\beta} = 11$ unidades.

Para representarmos, por exemplo, 26 objetos na base 12, agrupamos esta quantidade em grupos de 12, ficamos com 2 grupos de 12 e mais 2 unidades, que escrevemos 22_{12}, no qual aparecem dois dígitos ou duas ordens. Assim, $26 = 2 \times 12^1 + 2 \times 12^0 = 22_{12}$.



$26 = 22_{12}$

Outro exemplo é o número 144 que pode ser agrupado em grupos de 12 como sendo 12 grupos de 12. Como não temos um símbolo, nesse sistema, para representar 12, agrupamos, novamente, ficando com 1 grupo de 12×12, nenhum grupo de 12 e nenhuma unidade, que escrevemos 100_{12}, no qual aparecem três dígitos ou três ordens. Assim, $144 = 1 \times 12^2 + 0 \times 12^1 + 0 \times 12^0 = 100_{12}$.

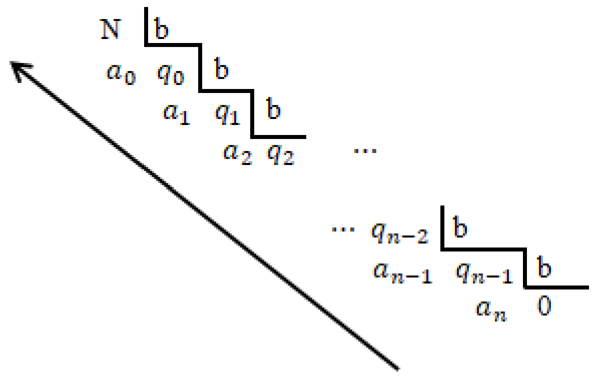
Consideremos, agora, o número 275. Agrupando-o em grupos de 12 ficamos com 22 grupos de 12 mais 11 unidades. Como não temos um símbolo, nesse sistema, para representar 22, agrupamos, novamente, ficando com 1 grupo de 12×12, 10 grupos de 12 mais 11 unidades. Mas, como $\boldsymbol{\alpha} = 10$ unidades e $\boldsymbol{\beta} = 11$ unidades, temos que $275 = 1\boldsymbol{\alpha\beta}_{12}$, no qual aparecem três dígitos ou três ordens. Assim, $275 = 1 \times 12^2 + 10 \times 12^1 + 11 \times 12^0 = 1\boldsymbol{\alpha\beta}_{12}$.

2.7 Conversão de números naturais em base 10 para uma base b qualquer

Para converter um número natural da base 10 para uma base b qualquer, devemos proceder às divisões sucessivas do número em base 10 pelo valor da base até que o último quociente seja zero. O resto de cada divisão ocupará sucessivamente as posições de ordem 0, 1, 2, …, e assim por diante, até que o resto da última divisão (que resulta em quociente 0) ocupe a posição de mais alta ordem.

Seja *N* um número da base 10, podemos escrevê-lo em um número *M* escrito em uma base b qualquer, $b > 1$ natural, no qual os coeficientes a_0, a_1, a_2, $\cdots, a_n$ serão os algarismos de *M* na base b, de modo que o primeiro resto a_0 será o primeiro algarismo, a partir da direita, na representação de *M*. Assim, $N_{10} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 = (a_n, a_{n-1}, a_2, \ \cdots, a_0\ )_b = M_b$, onde a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_1, a_0 $\in \{0, 1, 2, \cdots, (b-1)\}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Na prática, fazemos:



Vamos ilustrar alguns exemplos onde será feito a conversão do número na base 10 para o número em uma base b indicada em cada exemplo:

Exemplo 1: Representar 25 na base 2.

Temos:

$25 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$, onde $a_i \ \in \{0{,}1\}$.

Como $25 = (a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_1) \cdot 2 + a_0$, concluímos que a_0 é o resto da divisão de 25 por 2. Sendo $25 = 12 \cdot 2 + 1$, temos $a_0 = 1$.

O número 12 também pode ser escrito na base 2 e, de acordo com o que fizemos anteriormente, temos $12 = a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 2 + a_1 = (a_n \cdot 2^{n-2} + a_{n-1} \cdot 2^{n-3} + \cdots + a_2) \cdot 2 + a_1$. Logo a_1 é o resto da divisão de 12 por 2. Sendo $12 = 6 \cdot 2 + 0$, temos $a_1 = 0$.

Assim, da mesma forma, temos:

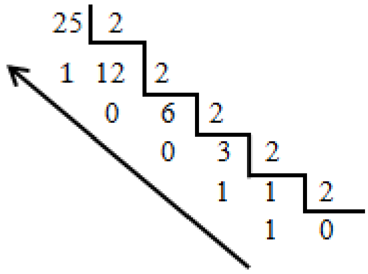
$6 = 3 \cdot 2 + 0; \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$

$3 = 1 \cdot 2 + 1; \quad \Rightarrow \quad a_3 = 1$

$1 = 0 \cdot 2 + 1; \quad \Rightarrow \quad a_4 = 1$

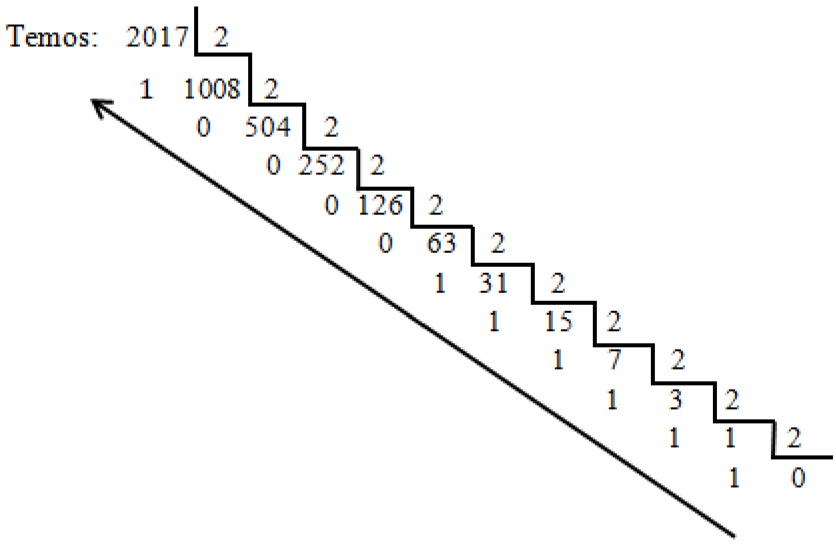
Desta forma, $25 = a_4 \cdot 2^4 + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$, ou seja, $25 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, logo $25 = 11001_2$.

Na prática, fazemos:



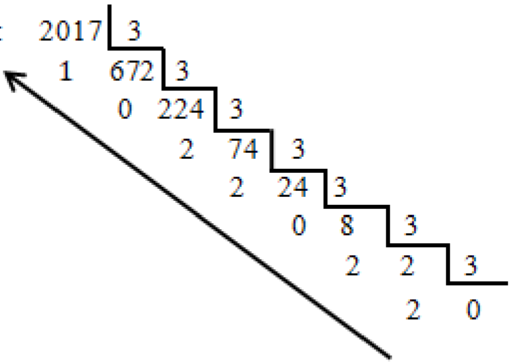
Logo, $25 = 11001_2$.

Exemplo 2: Representar 2017 nas bases 2, 3, 8 e 12:



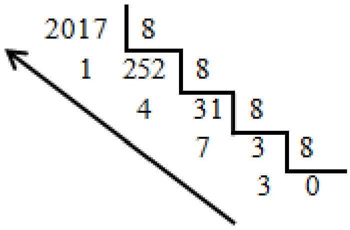
Logo, $2017 = 1111100001_2$.

Temos:



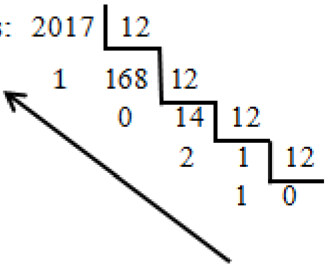
Logo, $2017 = 2202201_3$.

Temos:



Logo, $2017 = 3741_8$

Temos:



Logo, $2017 = 1201_{12}$.

2.8 Conversão de números naturais em base b qualquer para a base 10

Para converter um número natural em base b qualquer para a base 10, devemos resolver a expressão:

$$(a_n, a_{n-1}, a_2, \cdots, a_0)_b = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 = N_{10}$$

Exemplos:

a) $101101_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 45$

b) $2021_3 = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 61$

c) $10413_5 = 1 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 733$

d) $10\alpha\beta_{13} = 1 \cdot 13^3 + 0 \cdot 13^2 + 10 \cdot 13^1 + 11 \cdot 13^0 = 2338$, onde $\alpha = 10$ e $\beta = 11$.

2.8.1 Operações em bases não decimais

As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão em bases não decimais são feitas de modo semelhante ao sistema numérico decimal.

2.8.1.1 Adição

Exemplo 1: Calcular $110_2 + 111_2$.

Solução: Para facilitar a visualização das representações numéricas na base binária, construiremos sua tabela da adição:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	10

Resolvendo a adição binária, temos:

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0 \\ +1\,1\,1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 1\,1\,0 \\ +1\,1\,1 \\ \hline 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} {}^{1} \\ 1\,1\,0 \\ +1\,1\,1 \\ \hline 0\,1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} {}^{1} \\ 1\,1\,0 \\ +1\,1\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,1 \end{array}$$

No exemplo acima, temos o número 110_2 que representa 1 grupo de 2×2, 1 grupo de 2 e 0 unidades somado ao número 111_2 que representa 1 grupo de 2×2, 1 grupo de 2 e 1 unidade. Começamos a somar pela ordem das unidades, ou seja, da direita para a esquerda, como no sistema decimal. Neste caso, temos $0_2 + 1_2 = 1_2$ que representa 1 unidade.

Agora, $1_2 + 1_2 = 10_2$. Deixamos o 0 na posição dos grupos de 2 e o 1 na posição dos grupos de 2×2.

E, finalmente, fazemos $1_2 + 1_2 + 1_2 = 11_2$. Portanto, $110_2 + 111_2 = 1101_2$.

Exemplo 2: Calcular $102102_3 + 212121_3$.

Solução: Para facilitar a visualização das representações numéricas na base 3 (base ternária), construiremos sua tabela da adição:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Resolvendo a adição, temos:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ 1\ \ 1\ \ \ \ } \\ 1\,0\,2\,1\,0\,2 \\ +\ 2\,1\,2\,1\,2\,1 \\ \hline 1\,0\,2\,2\,0\,0\,0 \end{array}$$

No exemplo acima, temos o número 102102_3 que representa 1 grupo de $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$, 0 grupo de $3 \times 3 \times 3 \times 3$, 2 grupos de $3 \times 3 \times 3$, 1 grupo de 3×3, 0 grupo de 3 e 0 unidade somado ao número 212121_3 que representa 2 grupos de $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$, 1 grupo de $3 \times 3 \times 3 \times 3$, 2 grupos de $3 \times 3 \times 3$, 1 grupo de 3×3, 2 grupos de 3 e 1 unidade.

Novamente, somamos pela ordem das unidades, ou seja, da direita para a esquerda, como no sistema decimal. Neste caso, temos $2_3 + 1_3 = 10_3$ que representa 1 grupo de 3 e 0 unidade. Deixamos o 0 na posição das unidades e o 1 na posição dos grupos de 3.

Agora, $1_3 + 0_3 + 2_3 = 10_3$. Deixamos o 0 na posição dos grupos de 3 e o 1 na posição dos grupos de 3×3.

Agora, $1_3 + 1_3 + 1_3 = 10_3$. Deixamos o 0 na posição dos grupos de 3×3 e o 1 na posição dos grupos de $3 \times 3 \times 3$.

Agora, $1_3 + 2_3 + 2_3 = 12_3$. Deixamos o 2 na posição dos grupos de $3 \times 3 \times 3$ e o 1 na posição dos grupos de $3 \times 3 \times 3 \times 3$.

Agora, $1_3 + 0_3 + 1_3 = 2_3$. Deixamos o 2 na posição dos grupos de $3 \times 3 \times 3 \times 3$.

E, finalmente, temos $1_3 + 2_3 = 10_3$. Portanto, $102102_3 + 212121_3 = 1022000_3$.

2.8.1.2 Subtração

Exemplo 1: Calcular $1011011_2 - 100101_2$.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 0\,2\ \ \ \ 0\,2\ \ \ \ \ \ \ \ } \\ \cancel{1}\,0\ 1\,\cancel{1}\,0\,1\,1 \\ -\ \ 1\ 0\,0\,1\,0\,1 \\ \hline 1\ 1\,0\,1\,1\,0 \end{array}$$

A subtração na base binária é semelhante a base decimal.

Fazemos, na ordem das unidades, $1_2 - 1_2 = 0_2$.

Em seguida, no grupo das potências de 2^1, fazemos $1_2 - 0_2 = 1_2$.

Agora, no grupo das potências de 2^2, observamos que não é possível fazer $0_2 - 1_2$. Retiramos 1 grupo da ordem das potências de 2^3, que é igual a 2 grupos na ordem das potências de 2^2, e adicionamos no grupo das potências de 2^2, ficamos, então, com $10_2 - 1_2 = 1_2$ (para facilitar, transformamos os números em quantidades do sistema decimal, ou seja, ficamos com $2_{10} - 1_{10} = 1_{10} = 1_2$).

Em seguida, no grupo das potências de 2^3, fazemos $0_2 - 0_2 = 0_2$.

No grupo das potências de 2^4 fazemos $1_2 - 0_2 = 1_2$.

No grupo das potências de 2^5 observamos que não é possível fazer $0_2 - 1_2$, então retiramos 1 grupo da ordem das potências de 2^6, que é igual a 2 grupos na ordem das potências de 2^5, e adicionamos no grupo das potências de 2^5, ficamos, então, com $10_2 - 1_2 = 1_2$ (para facilitar, transformamos os números em quantidades do sistema decimal, ou seja, ficamos com $2_{10} - 1_{10} = 1_{10} = 1_2$).

Como restou 0 grupo na ordem das potências de 2^6, concluímos que $1011011_2 - 100101_2 = 110110_2$.

Exemplo 2: Calcular $22031_4 - 233_4$.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 3 & 4 & \\
 & 1 & \cancel{4} & 2 & 4 \\
2 & \cancel{2} & 0 & \cancel{3} & 1 \\
- & & 2 & 3 & 3 \\
\hline
2 & 1 & 1 & 3 & 2
\end{array}
$$

Neste exemplo, observamos que não podemos fazer $1_4 - 3_4$. Retiramos, então, 1 grupo da ordem das potências de 4^1, que é igual a 4 grupos na ordem das potências de 4^0, e adicionamos no grupo das potências de 4^0, ficamos, então, com $(10_4 + 1_4) - 3_4 = 2_4$ (para facilitar, transformamos os números em quantidades do sistema decimal, ou seja, ficamos com $(4_{10} + 1_{10}) - 3_{10} = 2_{10} = 2_4$).

Em seguida, na ordem das potências de 4^1, observamos que não podemos fazer $2_4 - 3_4$. Iríamos, então, retirar 1 grupo da ordem das potências de 4^2, como não é possível, pois nessa ordem não temos grupos de 4^2, retiramos, então, 1 grupo na ordem das potências de 4^3que é igual a 4 grupos na ordem das potências de 4^2, retiramos 1 grupo dessa ordem e adicionamos ao grupo das potências de 4^1, ficamos, com $(10_4 + 2_4) - 3_4 = 3_4$, na ordem das potências de 4^1 (para facilitar, transformamos os números em quantidades do sistema decimal, ou seja, ficamos com $(4_{10} + 2_{10}) - 3_{10} = 3_{10} = 3_4$).

Em seguida, no grupo das potências de 4^2, fazemos $3_4 - 2_4 = 1_4$.

Agora, no grupo das potências de 4^3, fazemos $1_4 - 0_4 = 1_4$.

E, finalmente, no grupo das potências de 4^4, fazemos $2_4 - 0_4 = 2_4$.

Portanto, $22031_4 - 233_4 = 21132_4$.

2.8.1.3 Multiplicação

Exemplo 1: Calcular $142312_5 \times 3_5$.

Solução: Construindo a tabela da multiplicação na base 5:

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Resolvendo a multiplicação, temos:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ 1\ 1\quad 1\quad} \\ 1\,4\,2\,3\,1\,2 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline 1\,032\,4\,4\,1 \end{array}$$

Neste exemplo, multiplicamos o número 142312_5 por 3_5 semelhantemente ao processo na base decimal.

Fazemos $3_5 \times 2_5 = 11_5$, escrevemos 1 unidade na posição do grupo de 5^0 e somamos 1 à multiplicação $3_5 \times 1_5$.

Fazemos, agora $3_5 \times 1_5 + 1_5 = 4_5$ e escrevemos o seu valor na posição do grupo de 5^1.

Fazemos, agora $3_5 \times 3_5 = 14_5$, escrevemos 4 unidades na posição do grupo de 5^2 e somamos 1 à multiplicação $3_5 \times 2_5$.

Fazemos, agora $3_5 \times 2_5 + 1_5 = 12_5$, escrevemos 2 unidades na posição do grupo de 5^3 e somamos 1 à multiplicação $3_5 \times 4_5$.

Fazemos, agora $3_5 \times 4_5 + 1_5 = 23_5$, escrevemos 3 unidades na posição do grupo de 5^4 e somamos 2 à multiplicação $3_5 \times 1_5$.

Fazemos, então $3_5 \times 1_5 + 2_5 = 10_5$ escrevemos 0 unidade na posição do grupo de 5^5 e 1 unidade na posição do grupo de 5^6. Portanto, $142312_5 \times 3_5 = 1032441_5$.

2.8.1.4 Divisão

Exemplo 1: Calcular $32_4 \div 2_4$.

Solução:

$$\begin{array}{l|l} 3\,2_4 & 2_4 \\ \cline{2-2} 1\,2_4 & 13_4 \\ \ \,0 & \end{array}$$

Para realizarmos a divisão de 32_4 por 2_4, começamos pela esquerda e, como o divisor possui apenas 1 dígito, iniciamos a divisão a partir do primeiro algarismo à esquerda. Desta forma, $3_4 \div 2_4 = 1_4$ e resto 1_4. O algarismo 1_4 fica na posição do quociente e o resto 1_4 permanece sob os algarismos divididos. Desce o algarismo 2_4 à direita do resto 1_4 e temos então $12_4 \div 2_4$, que representam, na base decimal, $6_{10} \div 2_{10} = 3_{10} = 3_4$ e resto $0_{10} = 0_4$. O algarismo 3_4 fica na posição do quociente e o resto 0_4 permanece sob os algarismos divididos, finalizando a divisão. Portanto, $32_4 \div 2_4 = 13_4$.

Exemplo 2: Calcular $5063_7 \div 11_7$.

Solução:

$$\begin{array}{l|l} 5\,0\,6\,3_7 & 11_7 \\ \cline{2-2} 3\,6_7 & 433_7 \\ \ 3\,3_7 & \\ \ \ \,0 & \end{array}$$

Neste exemplo, realizarmos a divisão de 5063_7 por 11_7, começamos pela esquerda e, como o divisor possui 2 dígitos, iniciamos a divisão a partir dos dois primeiros algarismos à esquerda. Temos, então, $50_7 \div 11_7$, que representam, na base decimal, $35_{10} \div 8_{10} = 4_{10} = 4_7$ e resto $3_{10} = 3_7$. O algarismo 4_7 fica na posição do quociente e o resto 3_7 permanece sob os algarismos divididos. Desce o algarismo 6_7 à direita do resto 3_7 e temos então $36_7 \div 11_7$, que representam, na base decimal, $27_{10} \div 8_{10} = 3_{10} = 3_7$ e resto $3_{10} = 3_7$. O algarismo 3_7 fica na posição do quociente e o resto 3_7 permanece sob os algarismos divididos. Desce o algarismo 3_7 à direita do resto 3_7 e temos então $33_7 \div 11_7$, que representam, na base decimal, $24_{10} \div 8_{10} = 3_{10} = 3_7$ e resto $0_{10} = 0_7$. O algarismo 3_7 fica na posição do quociente e o resto 0_7 permanece sob os algarismos divididos, finalizando a divisão. Portanto, $5063_7 \div 11_7 = 433_7$.

3 APLICAÇÕES

Apresentaremos aqui algumas aplicações em que trabalhamos com a compreensão do sistema de numeração de base 2. Nosso objetivo é incluir, neste trabalho, atividades que possam ser utilizadas em sala de aula e que permitam que os alunos tenham melhor compreensão do sistema de numeração de base 2.

3.1 Mágica matemática

Vamos descobrir o dia do seu aniversário...

1 – Para descobrir o seu dia de aniversário utilizam-se estes calendários mágicos:

Um sim um não

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

De dois em dois

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

De quatro em quatro

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

De oito em oito

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Meio mês sim, meio não

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

2 – Devolva os calendários que indiquem a data de seu nascimento que aparece <u>sublinhada.</u>

3 – Em poucos segundos consegue-se dizer o seu dia de aniversário.

Qual é o truque?

Para realizar esta atividade é necessário construir os cinco calendários acima. O procedimento para descobrir o dia do aniversário consiste em pedir que, dos cinco calendários, o aluno devolva aqueles em que o seu dia de aniversário esteja sublinhado. O truque é somar os primeiros números sublinhados que aparecem nos calendários que a pessoa escolheu e você descobrirá a data de seu aniversário, sem que ela lhe conte. O resultado corresponde à data procurada. Por exemplo, se a pessoa nasceu no dia 7, os calendários em que este número aparece sublinhado têm os números 1, 2 e 4 como os primeiros números sublinhados. A soma deles é $1 + 2 + 4 = 7$.

3.2 Jogo das tábuas (adaptação do jogo mágica matemática)

Vamos adivinhar o número que você pensou...

1 – Para adivinhar o número pensado precisamos destas tábuas com números.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	39	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63
65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95
97	99	101	103	105	107	109	111
113	115	117	119	121	123	125	127

Tabela 1

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63
66	67	70	71	74	75	78	79
82	83	86	87	90	91	94	95
98	99	102	103	106	107	110	111
114	115	118	119	122	123	126	127

Tabela 2

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63
68	69	70	71	76	77	78	79
84	85	86	87	92	93	94	95
100	101	102	103	108	109	110	111
116	117	118	119	124	125	126	127

Tabela 3

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63
72	73	74	75	76	77	78	79
88	89	90	91	92	93	94	95
104	105	106	107	108	109	110	111
120	121	122	123	124	125	126	127

Tabela 4

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

Tabela 5

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

Tabela 6

64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

Tabela 7

2 – Indique em quais das tábuas se encontram o número pensado. Não pode ser maior que 127.

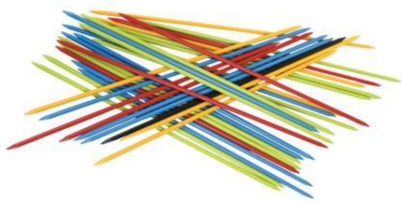
3 – Logo diremos o número pensado. Consideram-se 7 tábuas de 64 casas contendo certos números compreendidos entre 1 e 127. Podemos saber onde se encontram qualquer um destes números indicados nas tábuas desde que se saiba em que tábuas estes se encontram. Assim, para adivinhar o número pensado é só pedir ao aluno que indique em quais tábuas aquele número se encontra. Some os todos os números do canto superior esquerdo. O resultado é o número pensado.

As tábuas estão ordenadas, em ordem crescente, de acordo com as potencias de base 2 que aparecem no canto superior esquerdo, de modo que a primeira tabela começa com o $1 = 2^0$, a segunda com o $2 = 2^1$, a terceira com o $4 = 2^2$ e assim até a sétima que se inicia com $64 = 2^6$. Em cada tabela, existem aqueles números que, na representação em base dois, apresentam os algarismos um, no sentido da direita para a esquerda, nas posições que correspondem à ordenação das tabelas e, na decomposição em adição de potências de base 2, contêm a potência correspondente ao valor do canto superior esquerdo. Vejamos um exemplo:

$57 = 111001_2 = 2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 1 + 8 + 16 + 32.$

O número 57 encontra-se na primeira, quarta, quinta e sexta tabuas e apenas nestas. Desta forma, levando em consideração a representação dos valores em base 2, na primeira tabela começamos com o número 1 que possui o dígito 1 na primeira posição e $1 = 2^0$. Todos os outros números que se encontram na primeira tabela, possuem o dígito 1 na primeira posição da sua representação em base 2 e contêm a potência 2^0 na sua decomposição. Na segunda tabela começamos com o número 2 que possui o dígito 1 na segunda posição assim como todos os outros números pois, estes números contêm a potência 2^1 na decomposição. E assim até a 7ª tabela.

3.3 Jogos dos palitos



Duas pessoas participam do jogo.

1- Elas começam a partida com 128 palitos cada um.
2- Em cada jogada, elas tiram par ou ímpar. Se sai par, o jogador 1, que pediu a opção par, dá a metade de seus palitos para o outro jogador 2 e, se sai impar é o jogador 2 que dá a sua metade para o jogador 1.
3- Eles repetem o procedimento da regra anterior até que um deles fique com um número ímpar de palitos, quando a partida acaba. Ganha quem ficar com o maior número de palitos.

Veja o que acontece em uma partida fictícia:

Jogador 1	Jogador 2
128	128

Par

1ª jogada

Jogador 1	Jogador 2
64	192

Ímpar

2ª jogada

Jogador 1	Jogador 2
160	96

Par

3ª jogada

Jogador 1	Jogador 2
80	176

Ímpar

4ª jogada

Jogador 1	Jogador 2
168	88

Par

5ª jogada

Jogador 1	Jogador 2
84	172

Ímpar

6ª jogada

Jogador 1	Jogador 2
190	86

Par

7ª jogada

Jogador 1	Jogador 2
95	181

Acompanhando esta partida, chamamos jogador 1 de J_1 e jogador 2 de J_2, de modo que na 1ª jogada saiu a opção par, então J_1 dá 64 palitos (metade de 128) para J_2, logo J_1 fica com 64 e J_2 com $128 + 64 = 192$.

Na 2ª jogada saiu opção ímpar, então J_2 dá a metade de 192 que é 96 para J_1, logo J_1 fica com $64 + 96 = 160$ e J_2 fica com 96 palitos.

Na 3ª jogada, a opção é par, então J_1 fica com 80 e J_2 com 176 $(76 + 80)$ palitos. Na 4ª jogada, a opção é impar, então J_1 fica com 168 $(80 + 88)$ e J_2 fica com 88 palitos.

Na 5ª jogada, a opção é par, então J_1 fica com 84 e J_2 fica com 172 palitos.

Na 6ª jogada, a opção é impar, então J_1 fica com 190 e J_2 fica com 86 palitos e, finalmente, na 7ª jogada, a opção é par, então J_1 fica com 95 e J_2 com 181, quando termina a partida. Como J_2 ficou com a maior quantidade de palitos, ele ganha a partida. A partida acabou na 7ª jogada.

Podemos realizar as seguintes atividades:

a) Pedir aos alunos que joguem algumas partidas e registrem os resultados parciais e finais;
b) Sugerir aos alunos que completem as tabelas de jogos fictícios em vários tipos de situação de jogo;
c) A partir do resultado final de uma partida, informar se saiu par ou ímpar na última jogada ou mesmo a sequência de pares e impares desta partida;
d) Desafiá-los a descobrir o porquê do término do jogo na sétima partida.

Observe que o término da partida na 7ª jogada vai acontecer com qualquer partida que se iniciar com esta quantidade de palitos, pois, $128 = 2^7$. Verificamos também, conforme algoritmo das divisões sucessivas que, são necessárias sete divisões sucessivas por 2 para obter a representação de 127 na base 2 e só um dígito 1 aparece com o último quociente obtido nesta divisões, ou seja, 128 é resultado de uma potência de base 2. Este jogo é possível com valores que possuem esta característica, tais como: 32, 64, 256, etc. Então, podemos propor o jogo com outra quantidade de palitos, por exemplo, 32 ou 64 ou 256 e realizar as mesmas atividades.

3.4 Jogo das 4 operações (sistema decimal)

Peças: Um tabuleiro constituído de dois conjuntos de números.

O primeiro conjunto é formado por números que serão combinados pelos alunos para realizar uma das operações.

O resultado a ser obtido faz parte do segundo conjunto de números do tabuleiro.

Quatro (4) peões (um representando cada operação: adição, subtração, multiplicação e divisão).

Modo de Jogar:

Os jogadores decidem quem vai começar o jogo (pode tirar no "par ou ímpar", jogar a moeda cara e coroa, etc.);

O primeiro jogador (ou equipe) escolhe uma operação e marca com o peão dessa operação um dos números do tabuleiro;

O segundo jogador deve dizer dois números da linha superior (3, 6, 12) e com a operação indicada fazer uma operação que resulte no número marcado pelo primeiro jogador.

Exemplo:

Eduarda e Davi estão jogando uma partida do Desafio das Operações. Eduarda marcou no tabuleiro o número 15 com o peão adição. Davi deve dizer que 15 é o resultado da adição entre 3 e 12 ou 12 e 3. Se Davi pronunciar os valores esperados (corretos) por Eduarda, ele captura uma das nove fichas dispostas na mesa. Caso ele erre, Eduarda captura uma ficha da mesa.

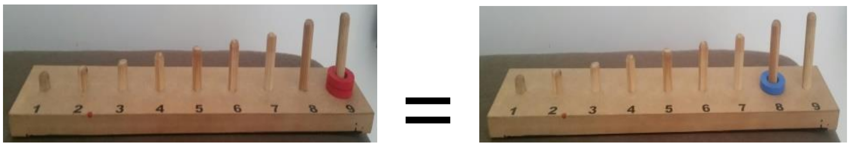
Vence o jogo o primeiro que capturar 5 das 9 fichas numeradas disponíveis na mesa.

3.5 Um ábaco binário

No sistema de numeração binário os agrupamentos e reagrupamentos são feitos de dois em dois. Para a utilização de um ábaco binário precisamos compreender as regras básicas do sistema de numeração em base 2 e, em particular, a ideia de valor posicional.

No ábaco realizamos operações básicas tais como: adição, subtração, multiplicação e divisão. Neste trabalho, trabalharemos somente com adição e subtração em base 2. Para a utilização do ábaco os alunos devem compreender que sempre que temos duas argolas agrupadas em um pino, devemos substituí-las por uma argola no pino seguinte (à esquerda).

Devemos substituir 2 argolas no pino da direita por 1 argola no pino imediatamente à esquerda.



O professor deve utilizar alguns exemplos para ensinar aos alunos como representar os números no ábaco binário. Oriente os alunos a representarem em seus ábacos o número dado. A seguir apresentamos algumas possibilidades, caberá ao professor observar as respostas da turma para verificar se são necessários exemplos adicionais.

a) 11001_2

b) 11110_2

c) 1100100_2

RELACIONANDO A SOMA NO ÁBACO BINÁRIO

Para ensinar a adição utilizando o ábaco binário como recurso pedagógico, é fundamental que o professor articule o trabalho feito sobre o ábaco com as etapas do algoritmo da adição. Veremos como trabalhar em sala de aula para promover pelo uso do ábaco a compreensão do significado dos diferentes passos do algoritmo da adição.

1º PASSO - ARMAR A CONTA

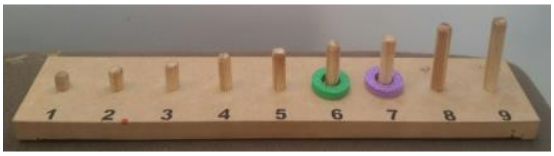
O professor deve colocar no quadro um exemplo e armar a conta:

Exemplo 1: $1100_2 + 1001_2$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0 \\ +\,1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \end{array}$$

2º PASSO - REPRESENTAR A PRIMEIRA PARCELA NO ÁBACO

Em seguida o professor deve pedir aos alunos que representem o primeiro número no ábaco. Logo que os alunos tenham realizado esta tarefa o professor deve representar em seu próprio ábaco para que os alunos confiram.



3º PASSO - ADICIONAR A SEGUNDA PARCELA NO ÁBACO

A seguir pede-se aos alunos que acrescentem o segundo número no ábaco para efetuar a soma.

4º PASSO – REAGRUPANDO AS ARGOLAS

Devemos esclarecer que só pode haver no máximo 1 argola em cada pino, e, portanto, devemos trocar duas argolas no sexto pino por uma argola no quinto pino.

Temos então:

 = 

Ou seja,

 +  = 

5º PASSO - OBSERVAR E REGISTRAR O RESULTADO

Observamos que o resultado no ábaco conta com uma argola no nono pino, outra argola no sétimo pino e mais uma argola no quinto pino, o que corresponde ao valor $10101_2 = 1100_2 + 1001_2$.

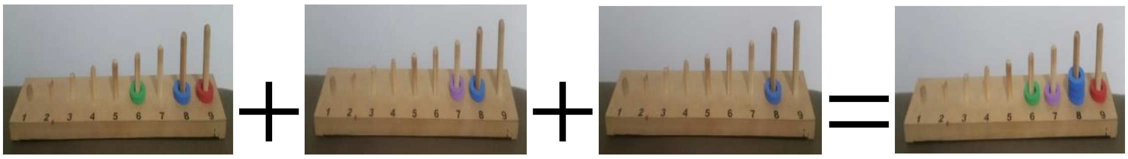
6° PASSO- PRATICAR MAIS UM POUCO ...

A seguir apresentamos mais um exemplo de soma. É importante que o professor conduza o trabalho sempre trabalhando simultaneamente no ábaco e no algoritmo, como explicamos acima.

Exemplo 2: $1011_2 + 110_2 + 10_2$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 1 & & \\
 & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
+ & & & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

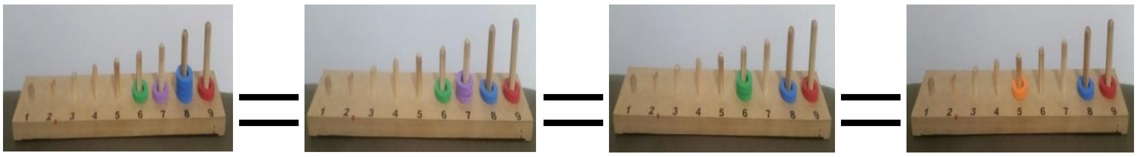
REPRESENTANDO AS TRÊS PARCELAS NO ÁBACO



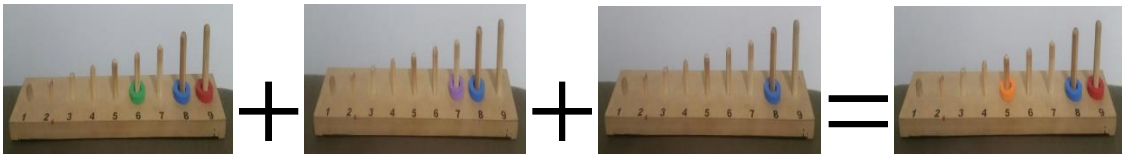
REAGRUPANDO AS ARGOLAS

Devemos trocar duas argolas no oitavo pino por uma argola no sétimo pino. Em seguida trocamos duas argolas no sétimo pino por uma argola no sexto pino, e, por último, trocamos duas argolas no sexto pino por uma argola no quinto pino.

Temos então:



Ou seja,



OBSERVAR E REGISTRAR O RESULTADO

Observamos que o resultado no ábaco conta com uma argola no nono pino, outra argola no oitavo pino e mais uma argola no quinto pino, o que corresponde ao valor $10011_2 = 1011_2 + 110_2 + 10_2$.

RELACIONANDO A SUBTRAÇÃO NO ÁBACO BINÁRIO

Aqui valem as mesmas observações que fizemos quando tratamos da adição: é fundamental que o professor articule o trabalho feito sobre o ábaco com as etapas do algoritmo da subtração.

1° PASSO – ARMAR A CONTA

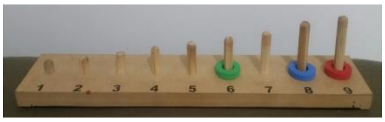
Trabalharemos primeiro sobre um exemplo que não exige substituições. O professor deve propor a operação e armar no quadro a conta:

Exemplo 1: $1011_2 + 1001_2$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1 \\ -\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

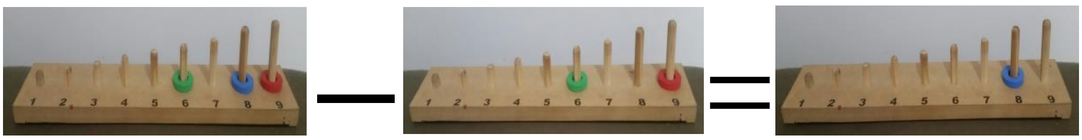
2° PASSO – REPRESENTANDO O MINUENDO NO ÁBACO

Em seguida, no ábaco, junto com os alunos, representamos o 1011_2 (o minuendo)



3º PASSO - SUBTRAÍMOS NO ÁBACO O SUBTRAENDO

Subtraímos 1 argola no nono pino, nenhuma argola no oitavo pino, nenhuma argola no sétimo pino e subtraímos 1 argola no sexto pino.



Realizamos na conta armada cada um dos passos equivalentes às operações que executamos sobre o ábaco, sempre chamando a atenção para a relação entre o movimento no ábaco e o procedimento na continha.

Em seguida devemos efetuar junto com os alunos alguma subtração que exija substituições. Vamos trabalhar com o exemplo 2: $11010_2 - 10100_2$

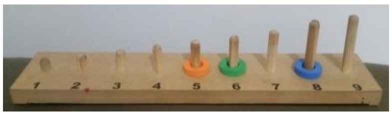
1º PASSO - ARMANDO A CONTA

Colocamos no quadro a operação e armamos a conta:

$$
\begin{array}{rccccc}
 & 1 & \cancel{1} & \overset{+2}{0} & 1 & 0 \\
- & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

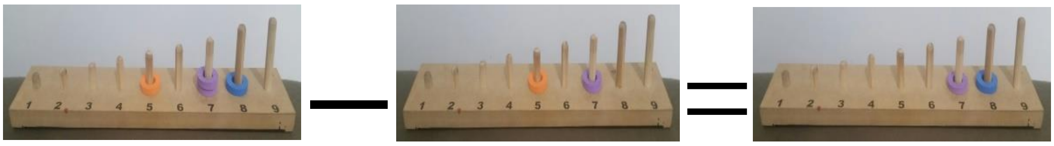
2º PASSO - REPRESENTANDO O MINUENDO NO ÁBACO

Junto com os alunos, representamos no ábaco o número 11010_2



3º PASSO - SUBTRAÍMOS NO ÁBACO O SUBTRAENDO

Esperamos que os alunos percebam que não há nenhuma argola no sétimo pino e então propomos a eles que para que consigamos fazer a subtração é preciso converter uma argola do sexto pino em duas argolas no sétimo pino. Após a conversão, ficaremos com:



3.6 Um contador binário

É um contador que associa cada número natural a um número binário. O seu funcionamento consiste em girar a placa que fica na primeira posição da direita para formar a sequência binária ordenada.

ADIÇÃO COM O CONTADOR BINÁRIO

Para somarmos, por exemplo, $111_2 + 101_2$ utilizando o contador binário colocamos, inicialmente, a primeira parcela 111_2 no contador e, em seguida, giramos as placas da 1ª e 3ª posição, da direita, respectivamente, correspondente a soma da parcela 101_2, aparecendo, no contador, o número binário $0001100_2 = 1100_2$ que, por sua vez, é o resultado da soma $111_2 + 101_2 = 1100_2$.

1° Momento: Colocamos a 1ª parcela do número binário

2° Momento: Alteramos a 1ª placa da direita, ficando com

3° Momento: Alteramos a 3ª placa da direita, ficando com o resultado.

3.7 Os códigos de barras

Atualmente, a maioria dos produtos é identificada por meio de um código numérico. O progresso da tecnologia, que tornou relativamente baratos e acessíveis aparelhos de leitura óptica e computadores, tornou também o uso desse tipo de código bastante frequente. Por exemplo, os produtos que compramos em um supermercado estão identificados por um código de barras, como o que mostramos na figura 1.

Figura 1 – Código de Barras

7 891079 000229

Ele não é mais do que um número, associado à identificação do produto, escrito de forma a permitir uma leitura rápida no caixa. Note que, imediatamente abaixo das barras, aparece o mesmo número, escrito em algarismos correntes, de forma que o leitor humano também possa fazer a leitura.

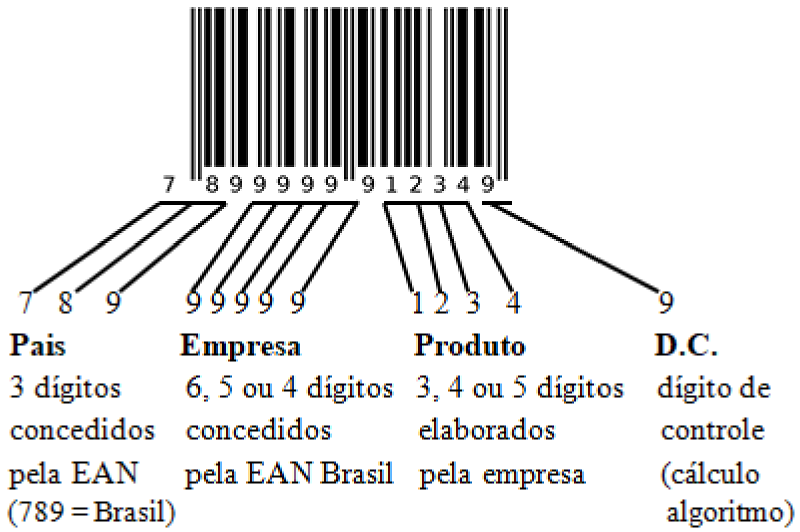
Porém, algumas vezes, ao passar um produto pela leitora óptica (por exemplo, quando a embalagem está úmida ou enrugada), não é possível realizar-se a leitura. O que vemos, então, é o funcionário do caixa tentar passar o produto em sentido contrário, ou inverter o produto, de modo que o código de barras fique de cabeça para baixo, e tentar passá-lo mais uma vez. Se nem assim der certo, então ele próprio lê o código e o digita. Naturalmente, essas atitudes sugerem algumas perguntas. Em primeiro lugar, uma vez que o desenho das barras é totalmente simétrico para a máquina, que o lê usando um feixe de luz transversal, ao passá-lo "de ponta – cabeça" ela não deveria ler o número na ordem contrária? E o que é pior, o operador do caixa, ao digitar o número rapidamente, não poderia cometer um erro, e nós acabarmos pagando por um produto muito mais caro do que aquele que estamos comprando?

Para compreender como funciona o processo de detecção de erros, precisamos entender, inicialmente, como se atribui, a cada produto, o dígito de verificação.

3.7.1 O Código EAN13

O código EAN13 é o mais usado na identificação de itens comerciais. É composto de 13 dígitos: os 3 primeiros representam o país (no Brasil é 789); os 4 seguintes representam o código da empresa filiada à EAN; os próximos 5 representam o código do item comercial dentro da empresa; e o 13º dígito é o **verificador**, obtido por meio de cálculo que será a seguir. De acordo com a grade (quantidade) de itens da empresa, a composição pode ser mudada para que o item comercial tenha de 3 a 6 dígitos, e a empresa tenha de 6 a 3. Ou seja, a combinação de código da empresa + código do item deve ter 9 dígitos:

Figura 2 – Código EAN13



Suponhamos que determinado produto esteja identificado, no sistema EAN13, pela sequência de dígitos ABCDEFGHIJKLX, em que X é o dígito controle.

O cálculo feito pelo computador é:

$$A + 3\mathrm{B} + \mathrm{C} + 3\mathrm{D} + \mathrm{E} + 3\mathrm{F} + \mathrm{G} + 3\mathrm{H} + \mathrm{I} + 3\mathrm{J} + \mathrm{K} + 3\mathrm{L} + \mathrm{X}$$

O dígito de verificação X é escolhido de modo que o resultado da soma seja um número múltiplo de 10. Vamos supor que o caixa do supermercado digite a seguinte sequência: 7891079000229, conforme a figura 1.

O cálculo a ser feito é o seguinte:

$7 + 3 \times 8 + 9 + 3 \times 1 + 0 + 3 \times 7 + 9 + 3 \times 0 + 0 + 3 \times 0 + 2 + 3 \times 2 + 9 = 7 + 24 + 9 + 3 + 21 + 9 + 2 + 6 + 9 = 90,$
que é múltiplo de 10.

Atividade:

1º) Veja os códigos de barras abaixo:

Figura 3 – código de barras

7 891000 36670X

Figura 4 – código de barras

7 891095 H00808

a) Suponha que você pegou o último item de determinado produto na prateleira de um supermercado e o leitor óptico não consegue ler o código de barras. O caixa começa a digitar os dígitos e verifica que só aparecem os 12 primeiros: 789100036670 (Figura 3). Determine o dígito de verificação X.
b) Agora, suponhamos que, em outro produto, não aparece o oitavo dígito (H). Aparece apenas 7891095H00808 (Figura 4). Encontre o valor de H.

3.8 O jogo de Nim

O Jogo de Nim faz parte de uma teoria, relativamente jovem, chamada Teoria de Jogos. Ele consiste de N palitos separados em três grupos com números distintos de elementos e colocados em cima de uma mesa, no qual dois jogadores se alternam retirando, cada um na sua vez, um número não nulo qualquer de palitos de apenas um dos grupos, podendo retirar inclusive todos os palitos do grupo escolhido. Ganha o jogo quem primeiro não deixar nenhum palito sobre a mesa. Cada estado do jogo pode ser representado por uma terna de números, representando o número de palitos em cada grupo, ordenados previamente como Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3, começando com uma configuração inicial (n_1, n_2, n_3), onde $n_1 + n_2 + n_3 = N$.

Tomemos como exemplo a configuração inicial $(3, 5, 7)$ e que os jogadores sejam João (J) e Maria (M) e vejamos um exemplo de uma partida:

$$(3,5,7) \xrightarrow{\text{J}} (2,5,7) \xrightarrow{\text{M}} (2,5,0) \xrightarrow{\text{J}} (2,2,0).$$

Neste ponto já dá para perceber que Maria não tem mais saída, pois se ela retirar dois palitos de um grupo, João tira os dois palitos que sobraram no outro grupo e ganha o jogo. Se Maria tira um palito de um grupo, João tira um palito do outro grupo e assim Maria fica também sem saída. Portanto, João ganhou a partida. A primeira jogada do João, bem como as seguintes, não foram jogadas aleatórias, ele seguiu uma estratégia vencedora que explicaremos a seguir.

Voltemos à situação inicial da partida entre João e Maria em que $N = 15, n_1 = 3, n_2 = 5$ e $n_3 = 7$.

$$|\,|\,| \qquad |\,|\,|\,|\,| \qquad |\,|\,|\,|\,|\,|\,|$$

Neste caso particular, vamos estabelecer uma estratégia de tal modo que, quem iniciar a partida fazendo uma boa abertura e seguindo as regras que estabeleceremos, sempre vencerá.

Para isto, a cada jogada, escreve-se o número de palitos de cada grupo na base 2, colocando-os um em cada linha, de modo que os algarismos das unidades se correspondam. Por exemplo, no início da partida tem-se

Grupo 1	11
Grupo 2	101
Grupo 3	111

Somando os três números acima como se fossem na base 10, obtemos o número 223, que chamaremos, a cada etapa, de ***chave do jogo***.

O primeiro jogador poderá, então, com uma jogada, tornar par cada um dos algarismos da chave. Por exemplo, poderá retirar um palito do grupo três, obtendo:

Grupo 1	11
Grupo 2	101
Grupo 3	110
	222

Agora, qualquer jogada que o segundo jogador efetuar transformará a chave 222 numa chave com, pelo menos, um algarismo ímpar (você pode verificar isto com a análise de todas as possibilidades).

Agora, mediante uma jogada conveniente, o primeiro jogador poderá recolocar o jogo na situação em que todos os algarismos sejam pares. Uma situação em que todos os algarismos da chave são pares será chamada de ***posição segura***, enquanto que, quando pelo menos um dos algarismos da chave é ímpar, será uma ***posição insegura***.

Pode-se mostrar, de modo bem elementar, que qualquer que seja a configuração inicial do jogo, se um jogador encontra na sua vez uma posição segura, qualquer que seja a jogada que faça, só poderá chegar a uma posição insegura.

Mostra-se também que, de uma posição insegura, pode-se, com uma jogada conveniente, sempre retornar a uma posição segura.

Finalmente, observando que quem chegar primeiro em 000 ganha o jogo e que esta é uma posição segura, ganhará o jogo quem sempre, após a sua vez de jogar, se mantiver em posições seguras.

Em geral, nem sempre a configuração inicial do jogo será favorável ao primeiro jogador. Por exemplo, o jogo com a configuração inicial $(3, 5, 6)$, nos dá a seguinte chave:

Grupo 1	11
Grupo 2	101
Grupo 3	110
	222

Esta chave já coloca o primeiro jogador em desvantagem, pois qualquer jogada que fizer, o deixará em posição insegura.

Esta versão, bem como a sua estratégia, podem ser generalizadas sem dificuldade para um número arbitrário de grupos com um número arbitrário de palitos em cada grupo.

3.9 O problema da moeda falsa

Problema: (Qual é a moeda falsa?): Temos oito moedas rigorosamente iguais na sua aparência exterior. No entanto, uma delas é falsa e pesa menos que as outras sete. Como descobrir qual é a moeda falsa fazendo apenas duas pesagens numa balança de pratos?

Material Sugerido: 8 moedas de mesmo valor e formato.

Procedimentos: A turma poderá ser dividida em pequenos grupos de discussão. Cada grupo deverá receber ou ter em posse oito moedas de mesmo valor e formato. A partir disto, os grupos poderão realizar suas experimentações. O objetivo neste enigma é estabelecer uma estratégia sistemática que consiga garantir o conhecimento de uma moeda falsa e mais leve dentre oito moedas idênticas, com apenas duas pesagens.

SUGESTÃO DE SOLUÇÃO

Solução: São pesadas inicialmente seis moedas, sendo três em cada prato. Há duas possibilidades para esta primeira tentativa: Ou os pratos ficam equilibrados, ou em um deles se identifica menos peso. Se ambos ficarem equilibrados, já sabemos que a moeda mais leve não está neste grupo de seis, sendo, portanto necessária apenas mais uma pesagem com as duas que sobraram para descobrirmos a moeda falsa. Se um dos pratos descer, então no outro está a moeda mais leve; neste caso faz-se novamente uma pesagem com duas das três moedas que estava no prato mais leve, e novamente aqui temos duas possibilidades: Ou a balança se equilibra, ou a balança acusa uma moeda mais leve. Se a balança se equilibrar, então a moeda que estava de fora é a mais leve. Se um dos pratos da balança descer, então a moeda que está no outro prato é a mais leve.

4 ATIVIDADES PROPOSTAS PARA A SALA DE AULA

Questão 1. Escreva, na base 10, os seguintes números:

a) 111000111_2 b) 123456_7 c) 8888_9

Questão 2. Calcule, na base 10, o valor de:

a) $1234_5 + 1234_6$ b) $1000_2 \cdot 1000_3$ c) $1101_2 \cdot (123_9 - 321_8)$

Questão 3. Calcule x, sendo $x1001_2 = 25$.

Questão 4. Escreva o número 2017 nas bases:

a) 2 b) 3 c) 8

Questão 5. Determine a base do sistema no qual o número 48 escreve-se 143.

Questão 6. Calcule, na base 2, o número 1001 + 1101 + 11001:

Questão 7. Faça uma tabela da adição e da multiplicação para a base 4.

Questão 8. Calcule e dê o resultado na base em que os números estão escritos:

a) $102102_3 + 212121_3$ b) $100234_5 - 10144_5$

c) $10102_3 \cdot 10012_3$ d) $503_7 \div 4_7$

Questão 9. Calcule x, sabendo que $1012_x + 1101_3 = 2120_3$.

Questão 10. Calcule x, sabendo que:

a) $2x33_5 = 368$ b) $12x_4 = 27$

c) $62xx_7 = 2172$ d) $10xx10_2 = 46$

Questão 11. Calcule x, sabendo que:

$$212_3 + xx10_3 + 2x1_3 = 111x0_3$$

4.1 Problemas de olimpíadas

Problema 1. (OPM) Pense em um número de dois algarismos diferentes. Inverta a ordem dos algarismos desse número (por exemplo, se o primeiro for 52, o segundo será 25). Subtraia o número menor do maior.

a) Qual é a soma dos algarismos da diferença obtida?
Explique por que ela é sempre a mesma.

b) Inverta a ordem dos algarismos da diferença e adicione o número obtido à diferença. Que número você obtém? Explique por que ele é sempre o mesmo.
c) Agora pense em um número de três algarismos diferentes. Inverta a ordem dos algarismos e subtraia o número menor do maior. Depois inverta a ordem dos algarismos da diferença e some com a diferença. Qual será o resultado? Justifique sua resposta.

Problema 2. (OPM) $(xy) \cdot (zy) = TTT$

Na equação anterior xy representa um número de 2 algarismos distintos, o mesmo acontece com zy, enquanto TTT representa um número com 3 algarismos iguais:

a) Demonstre que TTT é divisível por 37.
b) Determine x, y, z e T.

Problema 3. (OPM) Um número inteiro dado, de quatro algarismos, é tal que a soma dos quadrados dos algarismos das extremidades é igual a 130, enquanto que a soma dos quadrados dos algarismos do meio é igual a 100. Além disso, subtraindo do número dado o número formado invertendo a ordem dos algarismos, obtém-se a diferença 1818. Determine o número dado.

5 APLICAÇÃO E ANÁLISE DE UMA ATIVIDADE COM UM CONTADOR BINÁRIO

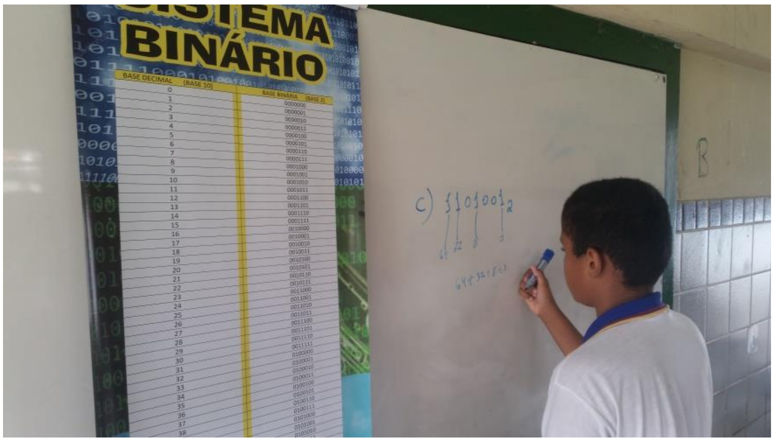
Neste capítulo trataremos da aplicação e análise de uma atividade sobre sistemas binários utilizando um contador binário como recurso didático.

Essa atividade foi aplicada na Escola Estadual Professor da Silveira Camerino, na turma do 6º ano B nos dias 31/07/2018 e 07/08/2018, tendo duração de quatro aulas de 50 minutos cada.

A atividade foi iniciada falando um pouco da história da contagem primitiva até o surgimento dos primeiros sistemas de numeração e o porquê do surgimento desses sistemas na sociedade. Depois foi explicado sobre o surgimento do Sistema Indo – Arábico, com dez algarismos, e do seu desenvolvimento até a criação do Sistema Decimal, usado mundialmente por todos nós. Em seguida, foi explicado que com os dez algarismos Indo-Arábicos, 0, 1, 2, ..., 9, é possível criar outros sistemas, como o sistema de base 2 (Binário), sistema de base 3 (Ternário), sistema de base 4, etc. Enfatizamos a importância do sistema binário no nosso dia-dia, como o uso em máquinas, uma vez que os sistemas digitais trabalham internamente com dois estados (ligado/desligado, verdadeiro/falso, aberto/fechado), falamos também da importância do seu uso pelos computadores no seu processamento e leitura de dados. Em seguida, expomos um banner, com uma representação decimal/binária ordenada de 0 a 127, em que foi possível notar a admiração dos alunos pelos números binários, até então desconhecidos.

Em seguida, apresentamos o contador binário e explicamos como ele funcionava. Nesse momento também foi observado a curiosidade dos alunos pelo contador e a vontade de manusear o mesmo. Foi então iniciado a contagem de alguns números na base 10 e sua respectiva representação binária no contador. Deixamos os alunos realizarem algumas sequências no contador e falar o valor na base 10. Em seguida foi explicado como se procedia para descobrir o valor em base 10 de um valor qualquer no contador binário, logo após foi feito alguns exemplos, no quadro branco, de conversão de números binários para base 10. Em seguida foi explicado como converter um número da base 10 para a base binária, em seguida, explicamos como se realizava a operação de soma utilizando o quadro branco e o contador binário. Por fim, aplicamos uma avaliação diagnóstica.

Figura 5 - Aplicação da atividade de conversão

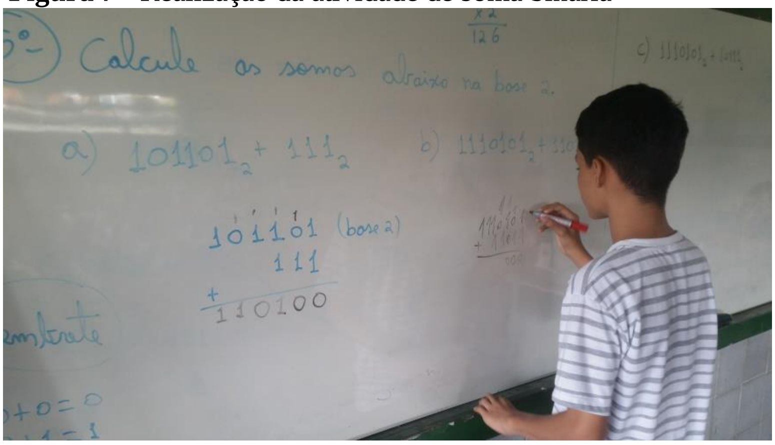


Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Figura 6 - Realização da atividade de conversão no contador

Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Figura 7 - Realização da atividade de soma binária



Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

5.1 Avaliação diagnóstica

Após trabalharmos este conteúdo, aplicamos uma avaliação diagnóstica com o objetivo de sondarmos a aprendizagem gerada. Seguimos, assim então, com as perguntas, respostas e análises.

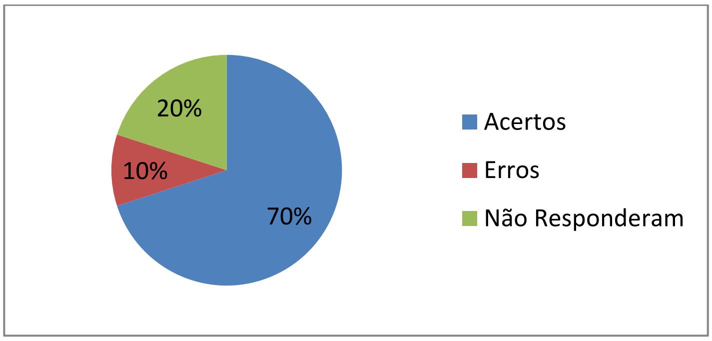
Questão 1. Observe que os números abaixo estão escritos na base 2. Agora, escreva-os na base 10.

a) 110011_2

b) 101011_2

Nesta questão tivemos um índice de 70% de acertos e 10% de erros, enquanto que 20% dos alunos não responderam.

Gráfico 1 - Porcentagens relativas à 1ª questão



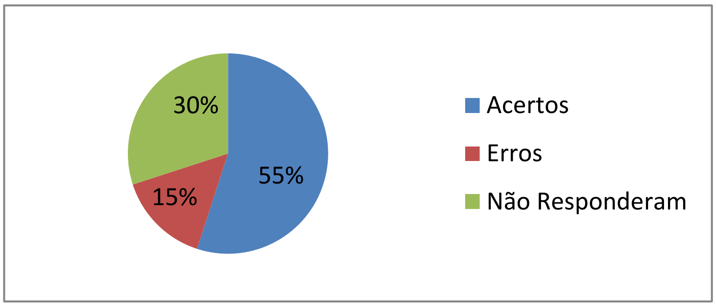
Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Observe que o índice de acerto foi expressivo ao passo que, somados os erros com os que não responderam chega a 30%. Este resultado nos mostra que o conteúdo foi bem assimilado pelos alunos.

Questão 2. Escreva o número 201 na base 2.

Nesta questão, 55% dos alunos responderam acertadamente, enquanto 15% erraram e 30% não responderam.

Gráfico 2 - Porcentagens relativas à 2ª questão



Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Nesta questão, quando somados os erros com os que não responderam chega-se a 45%. Nota-se, portanto, dificuldade de quase 50% dos alunos em converter da base 10 para a base 2. Embora tenhamos obtido 55% de acertos, preocupa-nos a quantidade de alunos que não compreenderam o conteúdo de forma satisfatória.

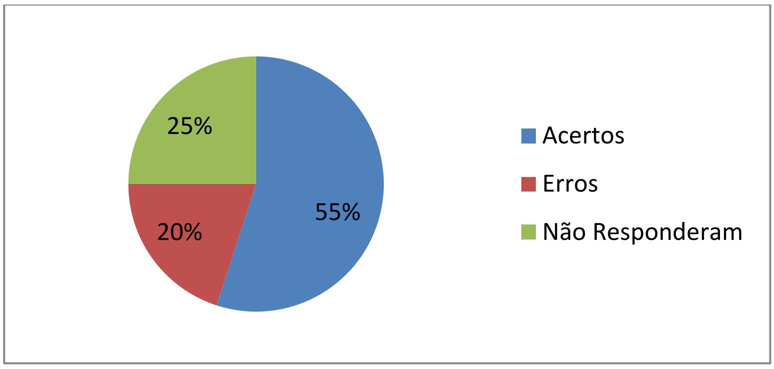
Questão 3. Calcule e dê o resultado na base em que os números estão escritos:

a) $1010_2 + 1011_2$

b) $11110_2 + 1101_2$

Nesta questão, 55% dos alunos conseguiram acertar as somas binárias, enquanto 20% erraram e 25% não souberam responder.

Gráfico 3 - Porcentagens relativas à 3ª questão

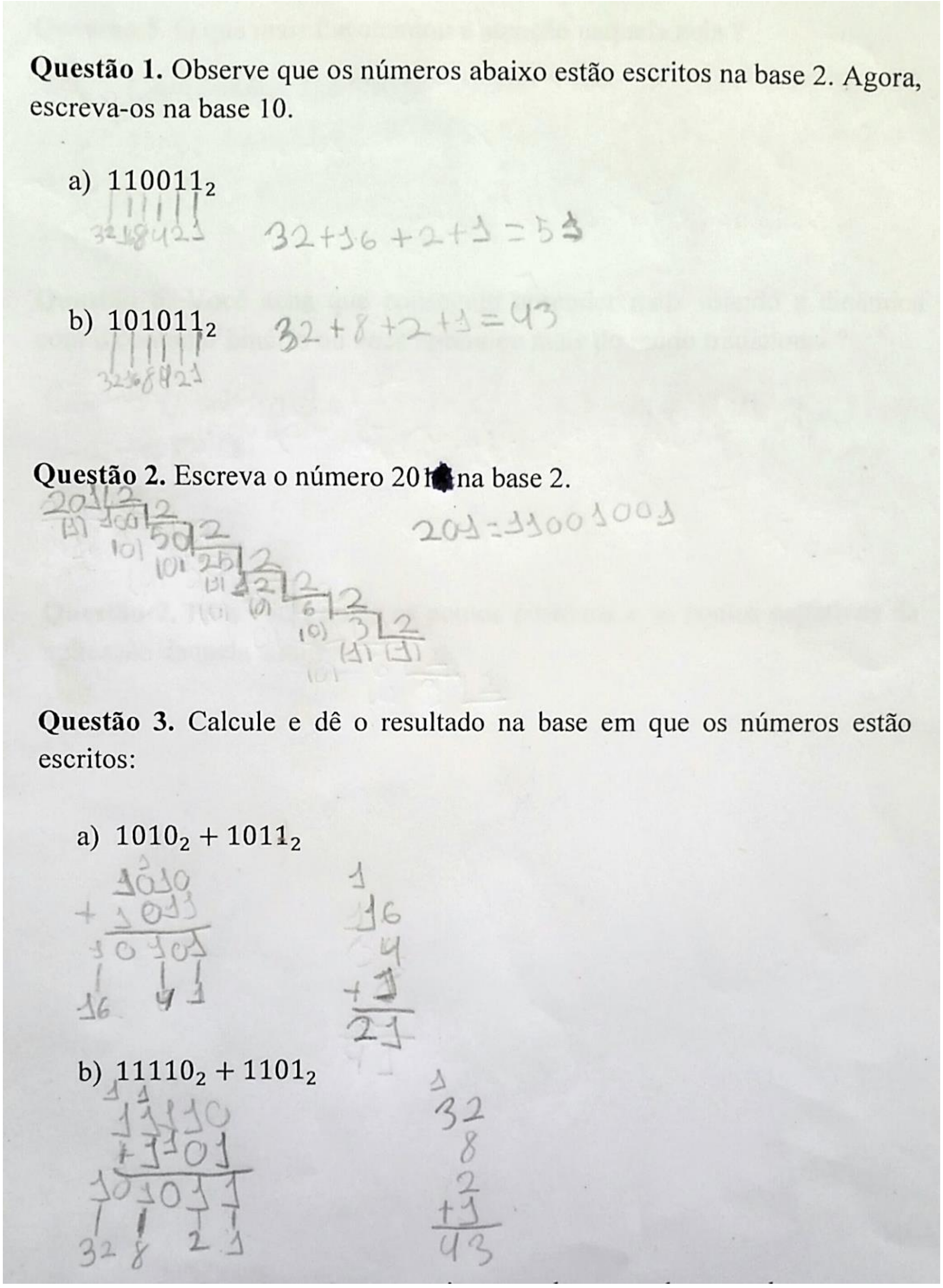


Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Nesta questão, quando somados os erros com os que não responderam chega-se a 45%. Nota-se, portanto, dificuldade de quase 50% dos alunos em converter da base 10 para a base 2. Embora tenhamos obtido 55% de acertos, preocupa-nos a quantidade de alunos que não compreenderam o conteúdo de forma satisfatória.

Veremos, nas figuras abaixo, estas questões respondidas de forma correta e incorreta, respectivamente, por dois desses estudantes.

Figura 8 – Resolução correta de um estudante



Questão 1. Observe que os números abaixo estão escritos na base 2. Agora, escreva-os na base 10.

a) 110011_2

32 16 8 4 2 1

$32+16+2+1=51$

b) 101011_2 $32+8+2+1=43$

32 16 8 4 2 1

Questão 2. Escreva o número 201[redacted] na base 2.

$201=11001001$

Questão 3. Calcule e dê o resultado na base em que os números estão escritos:

a) $1010_2 + 1011_2$

$1010 + 1011 = 10101$

16 4 1

$16 + 4 + 1 = 21$

b) $11110_2 + 1101_2$

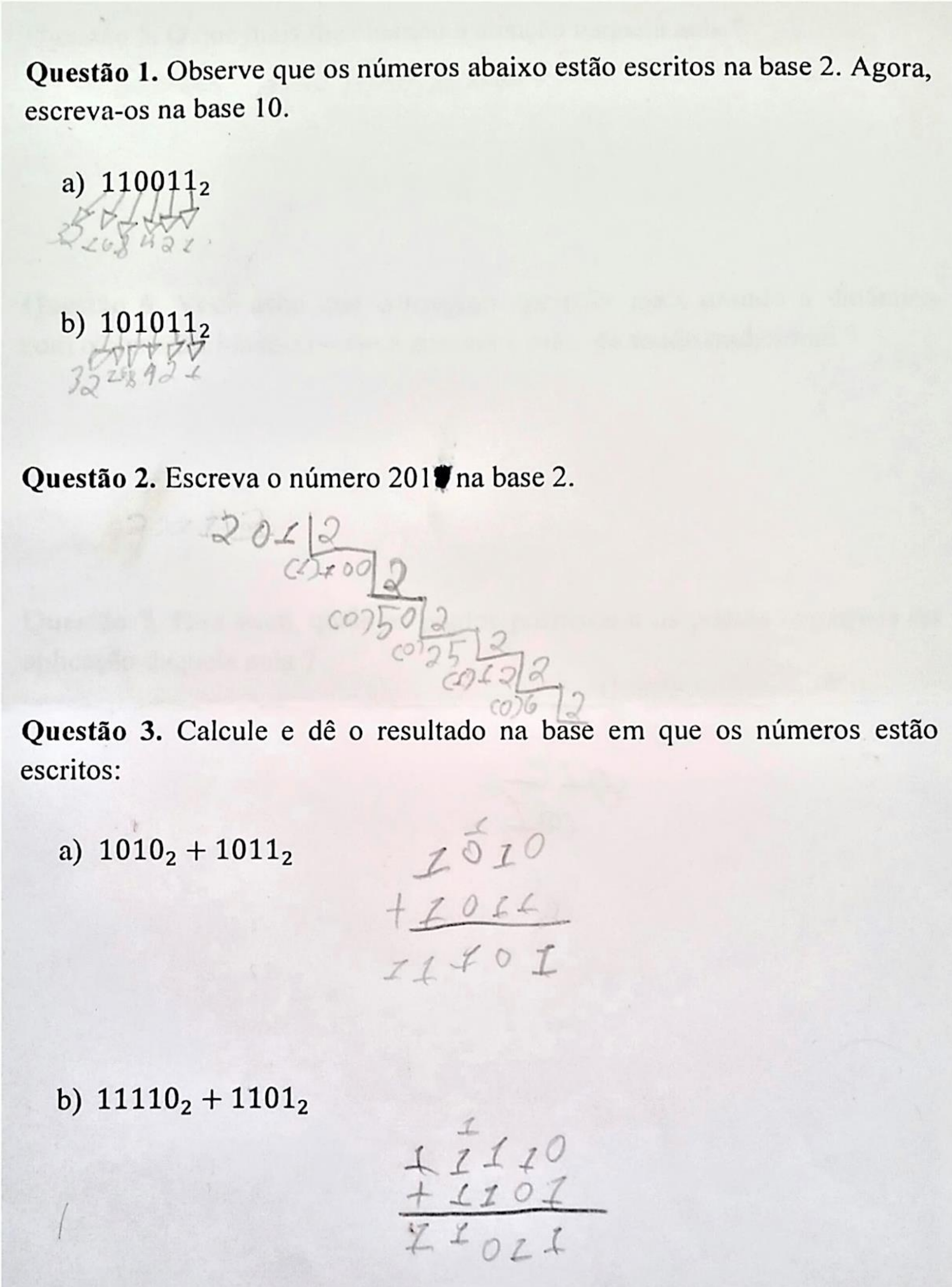
$11110 + 1101 = 101011$

32 8 2 1

$32 + 8 + 2 + 1 = 43$

Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Figura 9 – Resolução incorreta de um estudante



Questão 1. Observe que os números abaixo estão escritos na base 2. Agora, escreva-os na base 10.

a) 110011_2

b) 101011_2

Questão 2. Escreva o número 201[redacted] na base 2.

Questão 3. Calcule e dê o resultado na base em que os números estão escritos:

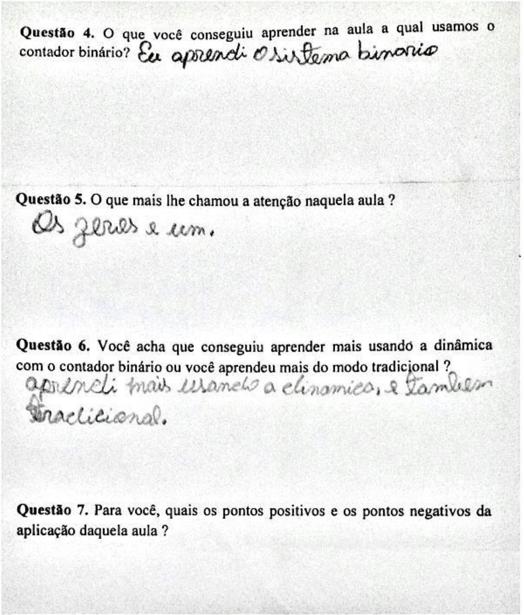
a) $1010_2 + 1011_2$

b) $11110_2 + 1101_2$

Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

A seguir, alguns depoimentos dos alunos sobre o desenvolvimento do trabalho, para isso eles seguiram um roteiro de perguntas. Classificamos os alunos como aluno A, aluno B, aluno C.

Figura 10 - Depoimento do aluno A


Questão 4. O que você conseguiu aprender na aula a qual usamos o contador binário? Eu aprendi o sistema binario

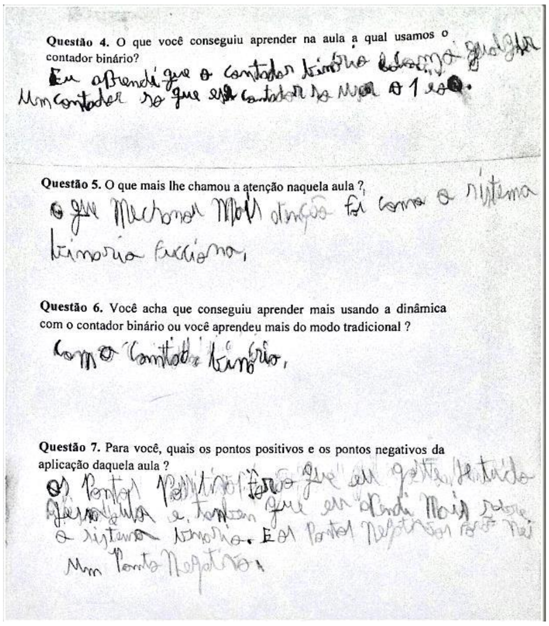
Questão 5. O que mais lhe chamou a atenção naquela aula ? Os zeros e um.

Questão 6. Você acha que conseguiu aprender mais usando a dinâmica com o contador binário ou você aprendeu mais do modo tradicional ? aprendi mais usando a dinamica, e tambem tradicional.

Questão 7. Para você, quais os pontos positivos e os pontos negativos da aplicação daquela aula ?

Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Figura 11 – Depoimento do aluno B


Questão 4. O que você conseguiu aprender na aula a qual usamos o contador binário?

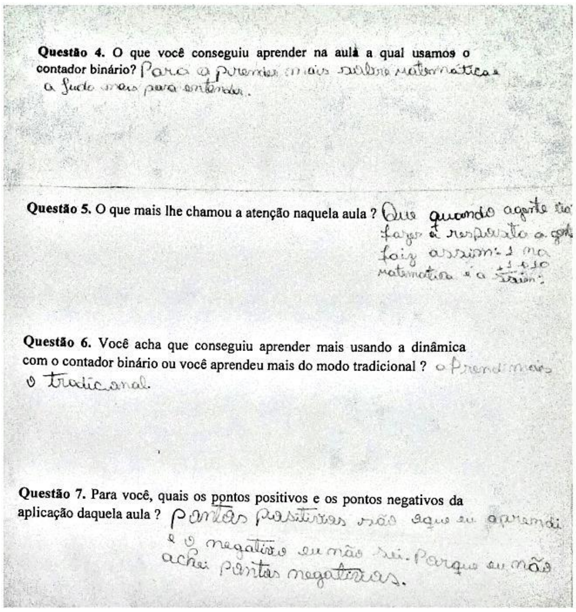
Questão 5. O que mais lhe chamou a atenção naquela aula ?

Questão 6. Você acha que conseguiu aprender mais usando a dinâmica com o contador binário ou você aprendeu mais do modo tradicional ?

Questão 7. Para você, quais os pontos positivos e os pontos negativos da aplicação daquela aula ?

Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Figura 12 - Depoimento do aluno C


Questão 4. O que você conseguiu aprender na aula a qual usamos o contador binário? Para aprender mais sobre matemática e ajuda mais para entender.

Questão 5. O que mais lhe chamou a atenção naquela aula ?

Questão 6. Você acha que conseguiu aprender mais usando a dinâmica com o contador binário ou você aprendeu mais do modo tradicional ? aprendi mais o tradicional

Questão 7. Para você, quais os pontos positivos e os pontos negativos da aplicação daquela aula ?

Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Seguem as perguntas norteadoras destes depoimentos:

Questão 4. O que você conseguiu aprender na aula a qual usamos o contador binário?

Aluno A. Eu aprendi o sistema binário.

Aluno B. Eu aprendi que o contador binário é como qualquer um contador, só que esse contador só usa o 0 e o 1.

Aluno C. Para aprender mais sobre matemática e ajuda mais para entender.

Questão 5. O que mais lhe chamou a atenção naquela aula?

Aluno A. Os zeros e um.
Aluno B. O que me chamou mais atenção foi como o sistema binário funciona.
Aluno C. Que quando a gente vai fazer a resposta a gente faz assim: 1 + 1 = 10, na matemática é assim.

Questão 6. Você acha que conseguiu aprender mais usando a dinâmica com o contador binário ou você aprendeu mais do modo tradicional?

Aluno A. Aprendi mais usando a dinâmica, e também tradicional.
Aluno B. Com o contador binário.
Aluno C. Aprendi mais o tradicional.

Questão 7. Para você, quais os pontos positivos e os pontos negativos da aplicação daquela aula?
Aluno A. (Em branco).
Aluno B. Os pontos positivos foram que eu gostei de tudo dessa aula e também que eu aprendi mais sobre o sistema binário. E os pontos negativos foram nenhum ponto negativo.
Aluno C. Pontos positivos são o que eu aprendi e o negativo eu não sei, porque eu não achei pontos negativos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, trouxemos uma proposta de ensino sobre os sistemas de numeração, onde introduzimos várias atividades de resolução de problemas, jogos e aplicações em sala de aula.

Atividades bem orientadas, fazendo uso de jogos e até de materiais concretos durante as aulas de matemática, podem facilitar na aprendizagem de conceitos fundamentais que permitam a aprendizagem do sistema numérico decimal, atualmente o mais usado e, a compreensão das operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Com os conhecimentos consolidados acerca do sistema de numeração decimal, introduzimos exercícios propostos em outras bases, onde se trabalham as operações, representações numéricas e mudança de base, afim de que os educandos possam compreender, relacionar e ampliar seus conhecimentos até então adquiridos.

Alguns jogos, aplicações e situações problemas foram acrescentados ao trabalho com o objetivo de sair um pouco da rotina da aula tradicional e trazer o lúdico para a sala de aula. Portanto o professor pode, de forma planejada, fazer uso dessas ferramentas, possibilitando aos alunos desenvolver estratégias de raciocínio úteis ao aprendizado dos sistemas de numeração, fazendo com que o aprendizado seja prazeroso e tenha significado.

Observamos, porém, que nenhuma proposta de ensino é garantia para o progresso do ensino em sala de aula, mas consideramos que toda a forma de sugestão pode ser de grande valia.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger; PITOMBEIRA, João B. (Trad.**). Episódios da história antiga da matemática**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELOS, Maria José. **Praticando matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED–UFMG, 2013.

MOREIRA, Carlos Gustavo T. ; MARTÍNEZ, Fábio E. Brochero.; SALDANHA, Nicolau C. **Tópicos de Teoria dos Números:** um passeio com primos e outros números familiares pelos mundo inteiro. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MORETTI, Méricles Thadeu. **Dos sistemas de numeração às operações básicas com números naturais**. Florianópolis: Editora da UFSC, 1999.

OLIVEIRA, Daniela Santos. **Números e sistemas de numeração.** 2008. 64f. Monografia (Pós-Graduação "Lato Sensu" em Matemática) - Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2008. Disponível em:< http://sistemas.eel.usp.br/bibliotecas/monografias/2008/MMA08005.pdf> Acesso em 2 fev. 2018.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João B. **Tópicos de história da matemática**. São Paulo: SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

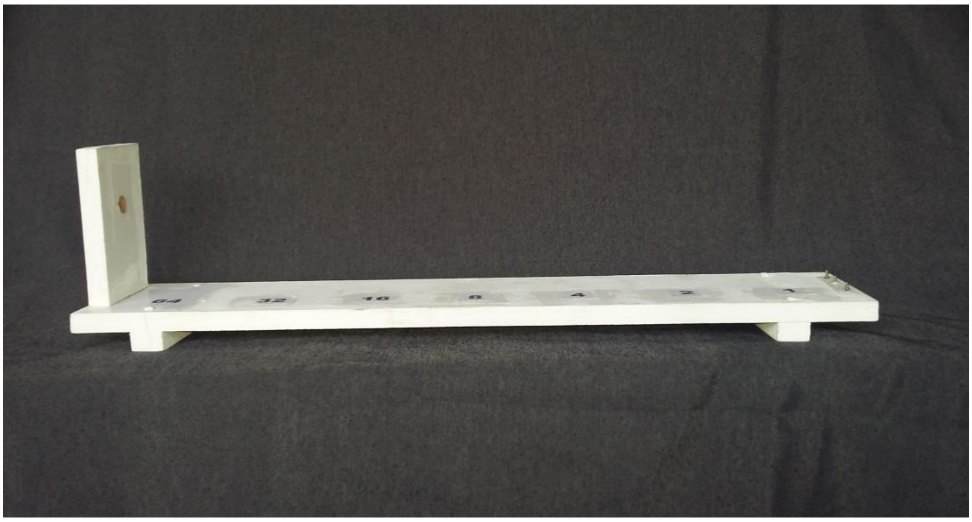
APÊNDICE

Contador Binário

Lista de Materiais

1 Tábua Base de MDF (Medidas: 57,5cm x 11 cm x 1,5 cm).

2 Peças que sustentam a base: 11 cm x 2,4 cm x 1,5 cm.

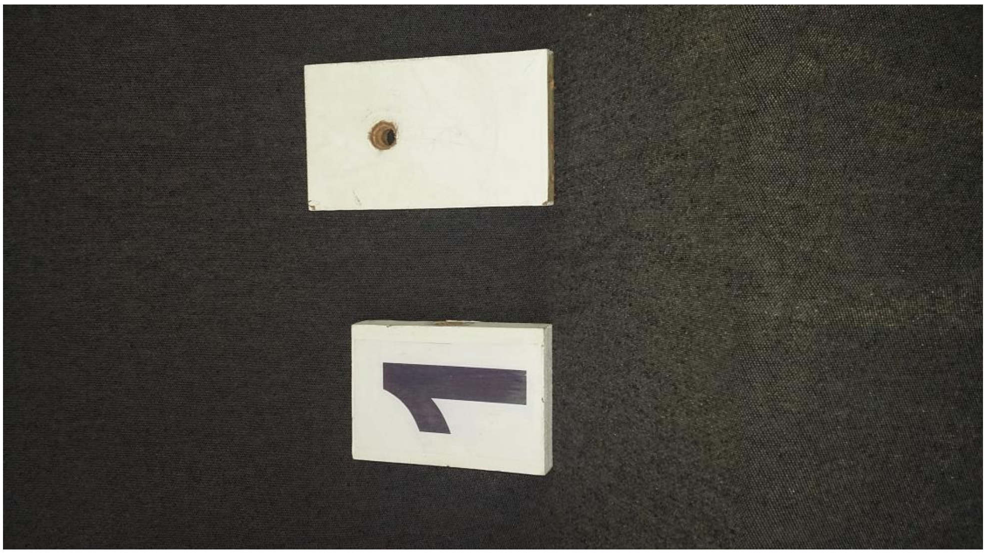


Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

2 Peças que sustentam a barra roscada (Medidas: 12,5 cm x 7,5 cm x 1,5 cm).

1 Furo para a barra roscada em cada uma das duas peças: Feito com broca ¼ na altura de 8cm.

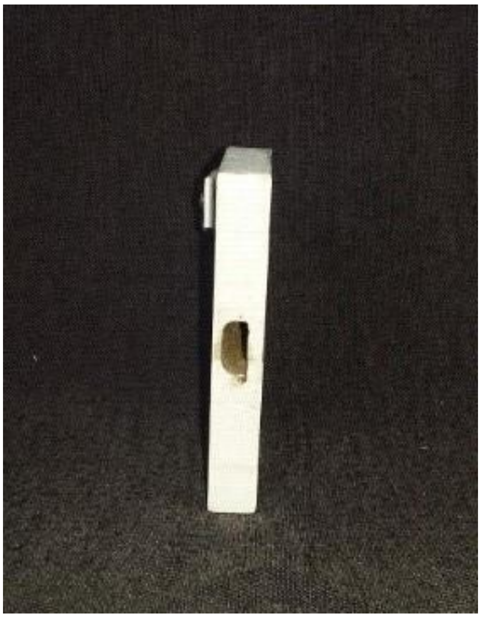
7 peças para inserir os números (Medidas: 10 cm x 7,5 cm x 1,5 cm).



Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

1 Furo retangular centralizado para a entrada da barra roscada (Medidas do furo: 6 mm x 18mm).

O furo é feito com broca ¼. (Preferência: Fazer esse furo em uma furadeira de bancada).



Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

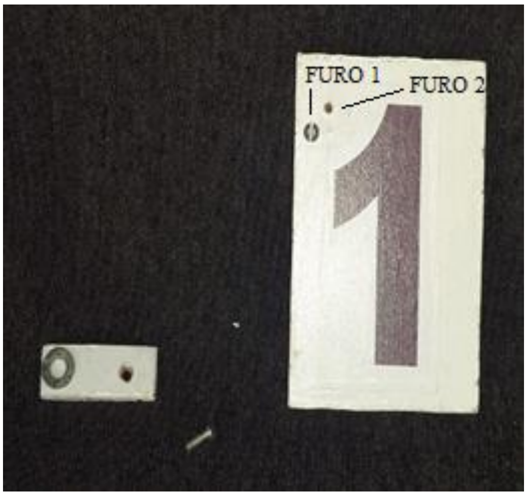
Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Peça trava de MDF (Medidas: 45 mm x 15 mm x 3 mm).

Furos na peça numérica:

Furo 1: (distância entre as bordas mais próximas: 20 mm x 6 mm).

Furo 2: (distância entre as bordas mais próximas: 16 mm x 14 mm).



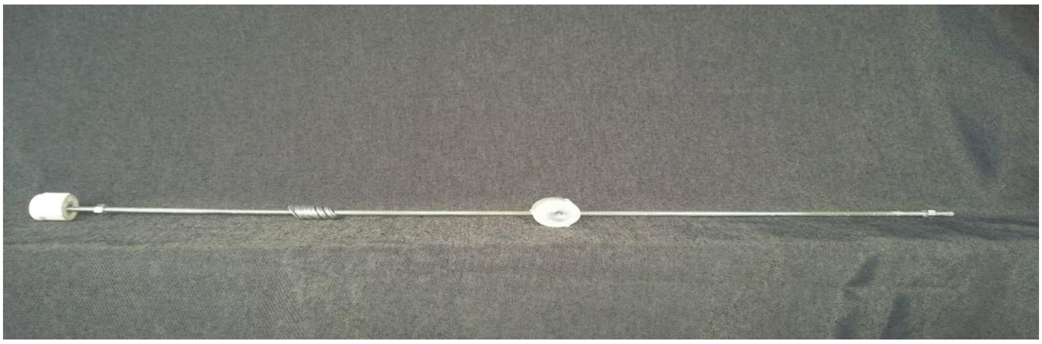
Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

.

Obs: A arruela de pressão foi colocada na peça trava para facilitar a descida da mesma com a gravidade.

Barra roscada ¼ com 60 cm.



Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

2 Cap PVC ½.

Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Obs: O Cap PVC tem 2 porcas preenchidas com massa epoxi, mais 1 porca e 1 arruela lisa na parte de fora, na parte de dentro vai 1 porca mais 2 arruelas que servem para travar a barra roscada e regular a distância entre as peças.

08 Porcas sextavadas ¼.

20 Arruelas lisas ¼.

10 Arruelas pressão ¼.

12 Parafusos Madeira 3,5 x 30 mm.

16 Parafusos 1/8 x 3/8.

1 Massa epoxi.

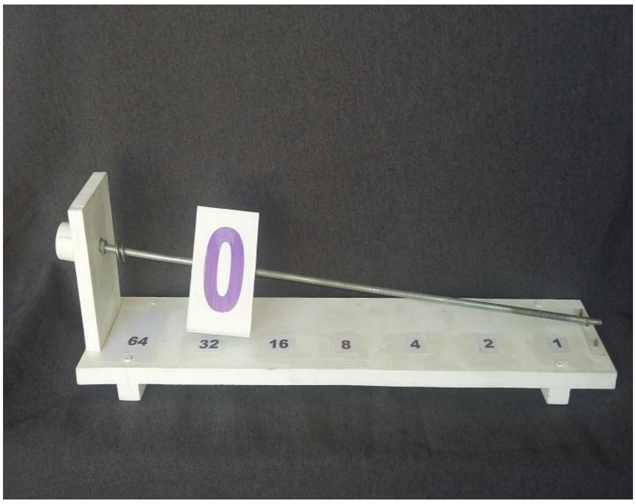
Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Montagem

Primeiro montar 1 base do suporte da barra roscada

Obs: Na primeira peça, a esquerda, não se usa a trava.

Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

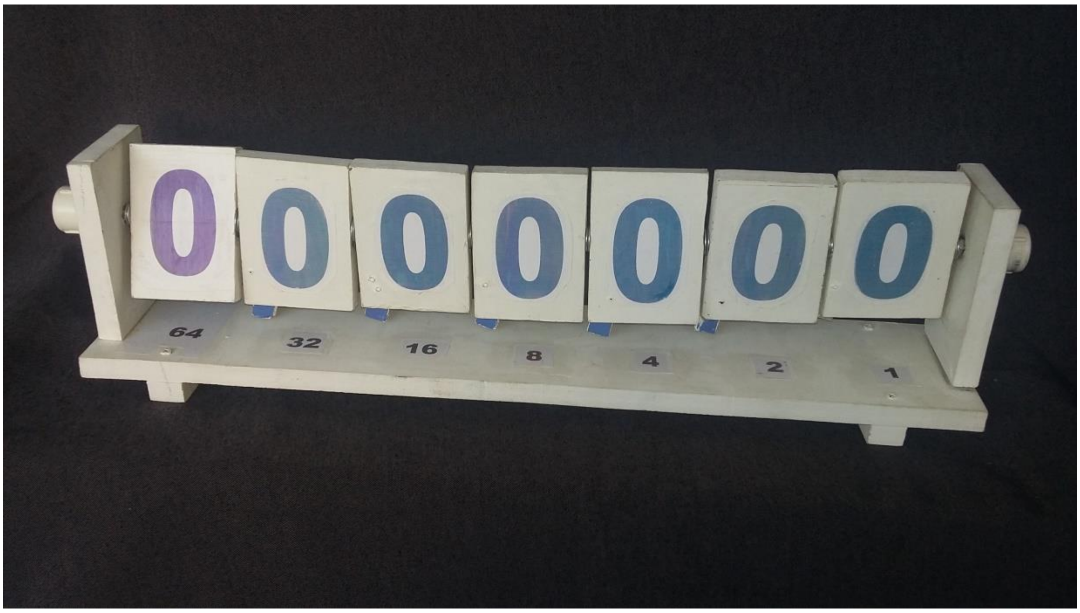


Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

No restante das peças temos 2 arruelas lisas entre elas, e no final 2 arruelas lisas mais 1 porca para travar a barra roscada e regular a distância entre elas. A peça de suporte da barra roscada só é colocada definitivamente depois que estiverem montadas todas as peças, que deverá ter uma pequena margem para regular a distância entre elas.

Fonte: Arquivo Pessoal (2018)

Os números foram feitos no Word e colados com cola branca, passando verniz acrílico brilhante a base de água.



Fonte: Arquivo Pessoal (2018)