UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FABIO HONORATO DOS SANTOS

FUNÇÕES DE FIBONACCI: UM ESTUDO SOBRE A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Maceió
2018

FABIO HONORATO DOS SANTOS

FUNÇÕES DE FIBONACCI: UM ESTUDO SOBRE A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Luis Guillermo Maza*

Maceió
2018

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária Responsável: Janis Christine Angelina Cavalcante – CRB: 1664

S237f Santos, Fabio Honorato dos.
Funções de Fibonacci: uma estudo sobre a razão áurea e a sequência de Fibonacci / Fabio Honorato dos Santos. – Maceió, 2018.
51 f.: il. color.

Orientador: Luiz Guillermo Martinez Maza.
Dissertação (Mestrado em Matemática) –
Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional. Maceió, 2018.

Inclui bibliografia

1. Razão áurea. 2. Sequência de Fibonacci. 3. Números de Fibonacci. 4. Frações contínuas. 5. Convergentes. 6. Funções de Fibonacci. I. Título.

CDU: 517.5

Folha de Aprovação

FÁBIO HONORATO DOS SANTOS

FUNÇÕES DE FIBONACCI: UM ESTUDO SOBRE A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 08 de fevereiro de 2018.

Banca Examinadora:

Luis Guillermo Martinez M.

Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza - UFAL (Presidente)

Isnaldo Isaac Barbosa

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa - UFAL

Gabriel Araujo Guedes

Prof. Dr. Gabriel Araújo Guedes – UFRPE

MACEIÓ - 2018

Aos meus pais, irmãos e amigos.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter estado comigo durante todos esses dias, dando-me força para continuar lutando e fazendo-me ver além do que os meus olhos podem ver.

Ao meu orientador Luis Guillermo, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas valiosas sugestões e pela extrema paciência para comigo.

Aos meus pais e irmãos, pelo amor, incentivo e apoio incondicional em momentos de tanta decepção.

A FAPEAL por ter contribuído na minha formação, por aquela velha sensação de dívida para com ela.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Não é aos saltos que se sobe uma montanha, mas a passos lentos.
—GREGÓRIO MAGNO

RESUMO

Apresentamos, neste trabalho, um breve estudo sobre as Funções de Fibonacci. Este estudo será desenvolvido a partir da noção de razão áurea e das sequências de Fibonacci. Algumas propriedades dos números de Fibonacci são apresentadas, bem como a representação do número de ouro em fração contínua. O principal resultado deste trabalho mostra que, se f é uma função de Fibonacci, isto é, uma função real para qual tem-se que $f(x+2) = f(x+1) + f(x)$ para todo número real x, então

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \phi,$$

onde ϕ é a razão áurea.

Palavras-chave: Razão Áurea. Sequência de Fibonacci. Números de Fibonacci. Frações Contínuas. Convergentes. Funções de Fibonacci.

ABSTRACT

We present, in this work, a brief study on Fibonacci Functions. This study will be developed from the notion of golden ratio and Fibonacci sequences. Some properties of the Fibonacci numbers are presented, as well as the representation of the golden ratio in continued fraction. The main result of this study shows that, if f is a Fibonacci function, that is, a real function for which one has to $f(x+2) = f(x+1) + f(x)$ for every real number x, then

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \phi,$$

where ϕ is golden ratio.

Keywords: Golden Ratio. Fibonacci Sequence. Fibonacci Numbers. Continued Fractions. Convergents. Fibonacci Functions.

SUMÁRIO

Introdução

É impressionante como as verdades matemáticas nos surpreende, padrões que aparentemente estão ligados a uma classe de objetos, que de certa forma, tem natureza distinta a outra classe de objetos, são mantidos a essa outra classe de objetos. Por exemplo, se considerarmos a sequência de Fibonacci $\{F_n\}$, que é uma sequência de números inteiros, observaremos que esta sequência tem a seguinte propriedade,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$$

Enquanto que, para as Funções de Fibonacci, que são funções reais, não necessariamente contínuas, algo semelhante é observado,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \phi.$$

Apesar da natureza distinta desses objetos, veremos que ambos compartilham propriedades semelhantes.

Neste trabalho, desenvolvemos um estudo sobre as Funções de Fibonacci, veremos que essa classe de funções está intimamente ligada a razão áurea e a sequência de Fibonacci.

No primeiro capítulo deste trabalho apresentaremos a Razão Áurea, também conhecida como proporção áurea, número de ouro, número áureo, secção áurea, proporção de ouro. Mostraremos como dividir um segmento de reta em média e extrema razão, isto é, em proporção áurea. Ainda veremos que a razão áurea é uma constante real algébrica irracional. No final do capítulo são apresentados alguns problemas geométricos, daremos a definição de retângulo áureo, bem como triângulo áureo.

No capítulo seguinte deste trabalho definiremos a sequência de Fibonacci, algumas de suas propriedades básicas serão demostradas. Apresentaremos a fórmula de Binet, uma fórmula fechada para encontrar o n-ésimo número de Fibonacci. Nesse capítulo, encontra-se a observação de Kepler sobre o limite do quociente entre números de Fibonacci consecutivos. Finalmente, definirmos as sequências generalizadas de Fibonacci.

Apresentamos no terceiro capítulo deste trabalho um breve estudo sobre frações contínuas, a definição de convergentes de uma fração contínua é dada. Algumas propriedades dos convergentes serão demonstradas. Daremos a representação do número de ouro em frações contínuas, e a partir dessa representação veremos a relação natural entre a sequência de Fibonacci e o número de ouro.

No último capítulo faremos um estudo sobre as Funções de Fibonacci. Alguns exemplos de funções de Fibonacci serão apresentados, bem como algumas de suas propriedades. Neste capítulo damos alguns resultados que, de certa forma, nos indicam ao segundo capítulo. É surpreendente notar que algumas das propriedades válidas para as sequências de Fibonacci, também são válidas para as funções de Fibonacci. A definição de função f-Par e f-Ímpar é dada e mostramos como obter algumas funções de Fibonacci a partir delas. O principal resultado desse capítulo nos remete a observação de Kepler sobre a sequência de Fibonacci.

1. A RAZÃO ÁUREA

> A Geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de uma joia preciosa. (Johannes Kepler)

1.1. Razão Áurea: A Divina Proporção

A razão áurea, também chamada número de ouro ou proporção áurea, ou ainda, divina proporção é uma constante real algébrica irracional. Euclides em, Os Elementos, definiu como "divisão de um segmento em média e extrema razão". Para os gregos antigos esse tipo de proporção era tão familiar que não se achava necessário ter um nome especial para ela, por isso a designação "divisão de um segmento em média e extrema razão", em geral era substituída simplesmente pela palavra secção. O Renascimento produziu uma importante mudança de direção na história da razão áurea, e a partir de então, esse conceito deixou de ficar restrito à matemática, dando assim uma importância maior do que havia. A razão áurea passou a ser encontrada nos fenômenos naturais, na arquitetura e nas artes.

Em Os Elementos, no livro VI, definição III, Euclides apresentou a seguinte definição:

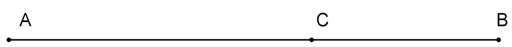
Definição 1.1.1 (Euclides, Os elementos)**.** *Um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre este segmento e o segmento maior é igual à razão entre o segmento maior e o segmento menor.*

Na figura 1.1, seja AB um segmento de reta e C um ponto interior a AB que divide AB em média e extrema razão, isto é,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB},$$

onde, $AC \neq 0$ e $CB \neq 0$.

Figura 1.1



Por conveniência, seja

$$\frac{AB}{AC} = x \quad (x > 0).$$

Então,

$$x = \frac{AB}{AC} = \frac{AC + CB}{AC} = 1 + \frac{CB}{AC} = 1 + \frac{1}{\frac{AC}{CB}} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Portanto,

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Multiplicado ambos os lados da equação acima por x, obtemos

$$x^2 = x + 1,$$

ou seja,

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

É de fácil verificação que as raízes desta equação quadrática são,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

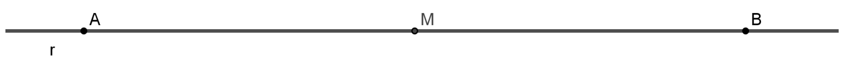
Sendo $\alpha > 0$ e $\beta < 0$, obtemos dessa forma

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

A razão $\frac{AB}{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é denominada razão áurea. Em homenagem ao famoso arquiteto e escultor Phídias, que a teria utilizado para conceber o templo grego Parthenon, convencionou-se identificar a razão áurea pela letra grega ϕ.

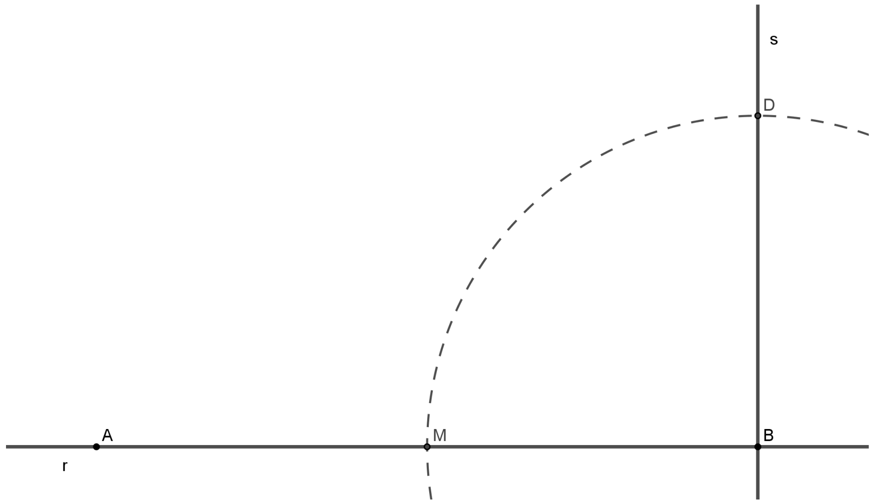
A divisão de um segmento AB em média extrema razão pode ser construída da seguinte forma. Seja r a reta suporte do segmento AB. Marque o ponto médio M de AB, conforme a figura abaixo.

Figura 1.2



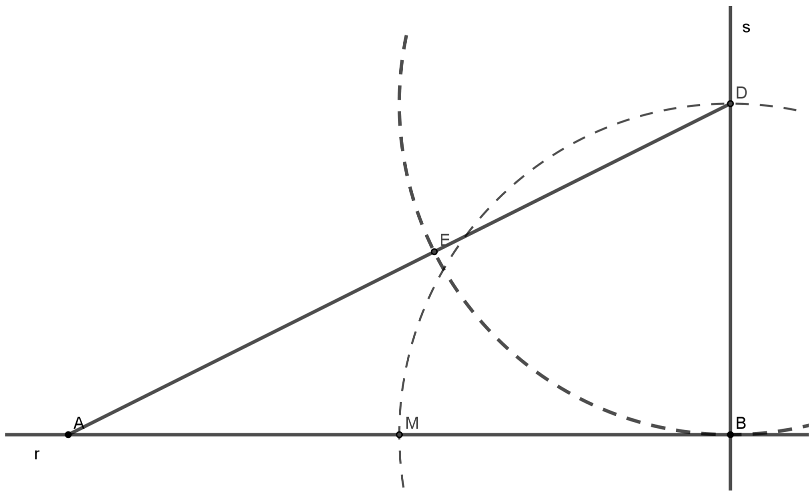
Trace uma reta s perpendicular a r, passando por B. Sobre s, marque o ponto D tal que $BD = MB$ (figura 1.3).

Figura 1.3



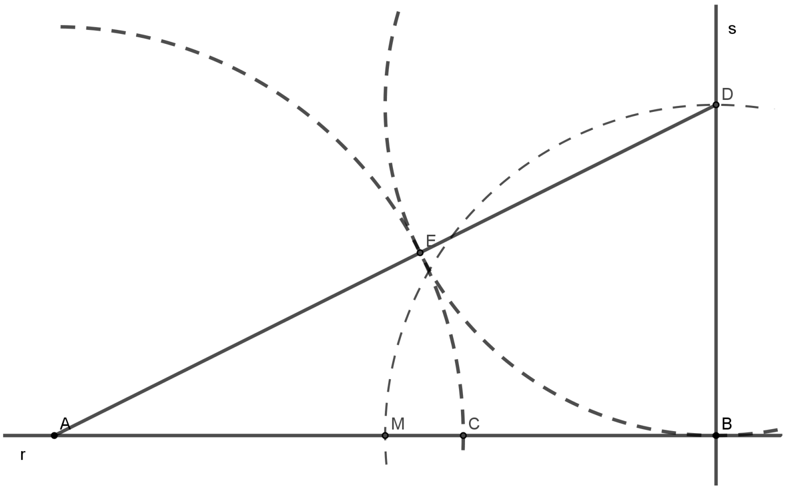
Trace o segmento AD. Marque o ponto E sobre AD tal que $BD = DE$ (figura 1.4).

Figura 1.4



Marque C sobre r tal que $AC = AE$. C é o ponto que determina a divisão de AB em média e extrema razão (figura 1.5).

Figura 1.5



De fato, por construção,

$$AB = 2BD, \quad ED = BD$$

e, pelo teorema de Pitágoras,

$$AD = \sqrt{5}BD.$$

Portanto,

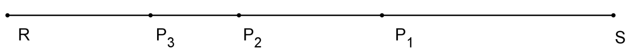
$$AC = AE = AD - ED = (\sqrt{5} - 1)BD.$$

Assim,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2BD}{(\sqrt{5}-1)BD} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Uma das propriedades importantes da seção áurea é que, por assim dizer, ela se auto propaga. Isto é, se um ponto P_1, divide um segmento RS (figura 1.6) em média e extrema razão, sendo RP_1 o segmento maior, e se sobre esse segmento maior marcamos o ponto P_2 tal que $RP_2 = P_1S$, então o segmento RP_1 por sua vez ficará subdividido em média e extrema razão pelo ponto P_2. Novamente, se marcarmos em RP_2 o ponto P_3 tal que $RP_3 = P_2P_1$, o segmento RP_2 ficará subdividido em média e extrema razão por P_3. Esse processo interativo, é claro, pode ser repetido tantas vezes quanto se queira, obtendo-se segmentos RP_n cada vez menores divididos em média e extrema razão por P_{n+1}.

Figura 1.6



Suponha que o retângulo $ABCD$ na figura 1.7 é tal que, se dele suprimirmos um quadrado $AEFD$, o retângulo restante, $BCFE$, é semelhante ao retângulo original. Isto é,

$$\frac{BC}{EB} = \frac{AB}{DA}.$$

Dado que $DA = AE = BC = x$ e $EB = y$, tem-se

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}, \text{ ou } \frac{x}{y} = 1 + \frac{y}{x}.$$

Multiplicando os dois lados da equação

$$\frac{x}{y} = 1 + \frac{y}{x}$$

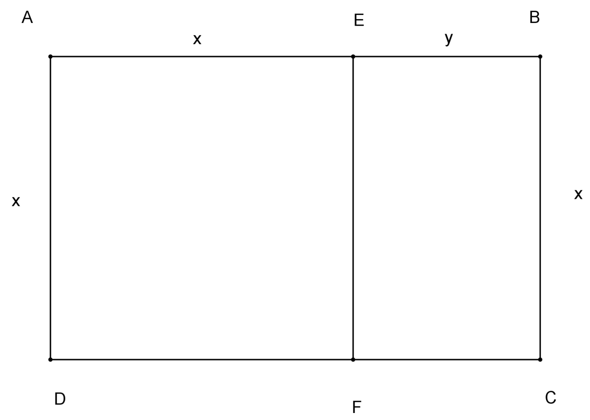
por $\frac{x}{y}$, obtemos

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} + 1$$

Portanto,

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Figura 1.7



Isto é, a razão entre o lado maior e o lado menor do retângulo $BCFE$ (e também do retângulo $ABCD$) é a razão áurea. Esse retângulo é chamado de, retângulo áureo.

1.2. A Irracionalidade da Razão Áurea

Em matemática, um número algébrico é qualquer número real ou complexo que é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros. Em um sentido mais amplo, diz-se que um número é algébrico sobre um corpo quando ele é raiz de um polinômio com coeficientes neste corpo. Portanto, a afirmação feita sobre ϕ (razão áurea), na qual, ϕ é uma constante real algébrica irracional, decorre do fato que ϕ é raiz da equação 1.1 e do teorema a seguir.

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{1.1}$$

Teorema 1.2.1. *O número ϕ é irracional.*

Demonstração. Por contradição, vamos supor que ϕ é um número racional. Sendo assim, $\phi = \frac{a}{b}$, onde a, b são inteiros com $(a,b) = 1$. De onde, substituindo $\phi = \frac{a}{b}$, em 1.1, obtém-se

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

isto é,

$$\frac{a^2 - ab}{b^2} = 1.$$

Assim,

$$a(a-b) = b^2.$$

Como $(a-b)$ é um número inteiro, vemos dessa igualdade que a divide b^2, isto é, $a|b^2$. Consequentemente, a divide b, o que contraria a hipótese que $(a,b) = 1$. Portanto, ϕ é irracional. $\square$

Sendo ϕ raiz da equação 1.1, temos

$$\phi^2 = \phi + 1$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por ϕ^n, obtemos

$$\phi^{n+2} = \phi^{n+1} + \phi^n. \tag{1.2}$$

Se definirmos $w_n = \phi^n, \quad n \geq 1$, então $w_1 = \phi$ e $w_2 = \phi^2$, de onde obtemos a sequência

$$\phi, \quad \phi^2 = \phi + 1, \quad \phi^3 = \phi^2 + \phi, \ldots.$$

Semelhantemente, sendo $\nu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ raiz da equação 1.1, obtemos

$$\nu^{n+2} = \nu^{n+1} + \nu^n. \tag{1.3}$$

e a sequência

$$\nu, \quad \nu^2 = \nu + 1, \quad \nu^3 = \nu^2 + \nu, \ldots.$$

Ainda temos,

$$\phi + \nu = 1 \text{ e } \phi - \nu = \sqrt{5}.$$

Assim, subtraindo os termos da equação 1.2 pela equação 1.3 e dividindo cada termo da equação resultante por $\phi - \nu$, obtemos

$$\frac{\phi^{n+2} - \nu^{n+2}}{\phi - \nu} = \frac{\phi^{n+1} - \nu^{n+1}}{\phi - \nu} + \frac{\phi^{n} - \nu^{n}}{\phi - \nu}.$$

Se definirmos $u_n = \dfrac{\phi^n - \nu^n}{\phi - \nu}, \quad n \geq 1$, então teremos

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

e

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\phi - \nu}{\phi - \nu} = 1, \\ u_2 &= \frac{\phi^2 - \nu^2}{\phi - \nu} = \frac{(\phi - \nu)(\phi + \nu)}{\phi - \nu} = \frac{(\sqrt{5})(1)}{\sqrt{5}} = 1. \end{aligned}$$

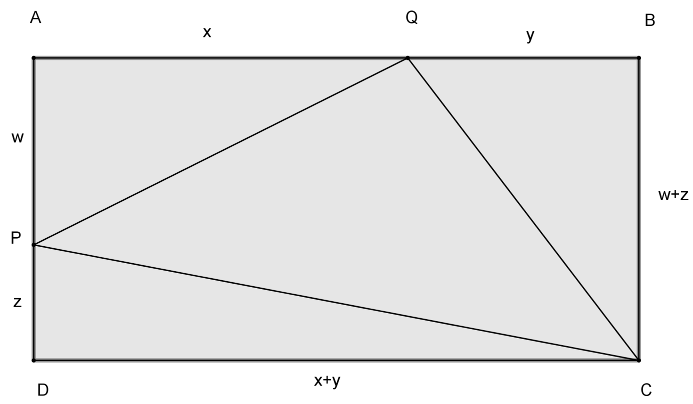
Portanto, como veremos no próximo capítulo, a sequência u_n é precisamente a sequência de Fibonacci.

1.3. Alguns Problemas Relacionados à Razão Áurea

Nesta seção será apresentado alguns problemas de geometria plana. É interessante como à razão áurea aparece de forma tão natural nesses problemas.

Problema 1 Suponha que desejamos remover de um retângulo, $ABCD$, três triângulos retângulos de mesma área, $\Delta PAQ, \Delta QBC$ e ΔCDP, como mostra a figura 1.8. Como localizar os pontos P e Q?

Figura 1.8



Solução: Seja

$$AQ = x, \quad QB = y, \quad AP = w, \quad \text{e} \quad PD = z.$$

Então, desde que as áreas dos triângulos PAQ, QBC, e CDP são iguais, temos

$$\frac{1}{2}xw = \frac{1}{2}y(w+z) = \frac{1}{2}z(x+y),$$

ou seja,

$$xw = yw + yz = xz + yz.$$

Sendo

$$yw + yz = xz + yz,$$

obtemos

$$yw = xz,$$

ou ainda

$$\frac{w}{z} = \frac{x}{y}.$$

De

$$xw = y(w+z)$$

obtemos

$$\frac{x}{y} = \frac{w+z}{w} = 1 + \frac{z}{w} = 1 + \frac{1}{\frac{w}{z}}.$$

Desde que $\frac{w}{z} = \frac{x}{y}$, obtemos

$$\frac{x}{y} = 1 + \frac{1}{\frac{x}{y}},$$

ou seja,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0.$$

Assim,

$$\frac{x}{y} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{w}{z} = \frac{x}{y} = \phi,$$

ou seja, P e Q dividem, respectivamente, os segmentos AD e AB em média e extrema razão. Assim,

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AQ}{QB} = \phi$$

Problema 2 Se o retângulo ABCD, no Problema 1, for um retângulo áureo, então

$$\frac{x+y}{w+z} = \phi.$$

Mostre que, neste caso, o triangulo PQC é um triângulo retângulo isósceles, com ângulo reto em Q.

Solução: De fato, pelo problema anterior,

$$x = \phi y \quad \text{e} \quad w = \phi z,$$

Assim,

$$\phi = \frac{x+y}{w+z} = \frac{\phi y + y}{\phi z + z} = \frac{(\phi+1)y}{(\phi+1)z}, \quad \text{ou seja, } y = \phi z$$

Mas, $w = \phi z$. Portanto,

$$w = y, \text{ isto é, } AP \equiv QB.$$

Dado que,

$$\frac{1}{2}xw = \frac{1}{2}y(w+z),$$

sendo $w = y$, obtemos

$$x = w + z, \text{ isto é, } AQ \equiv BC.$$

Assim sendo, os triângulos PAQ e QBC são congruentes. Portanto,

$$PQ \equiv QC \quad \text{e} \quad A\hat{Q}P \equiv B\hat{C}Q.$$

Além disso,

$$B\hat{C}Q + C\hat{Q}B = 90^\circ.$$

Desde que

$$A\hat{Q}P + P\hat{Q}C + C\hat{Q}B = 180^\circ$$

e

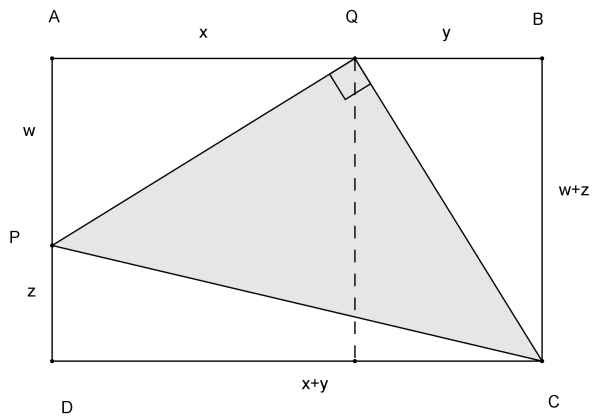
$$A\hat{Q}P = B\hat{C}Q,$$

tem-se

$$P\hat{Q}C = 90^\circ.$$

Assim sendo, o triangulo PQC é um triângulo retângulo isósceles (figura 1.9).

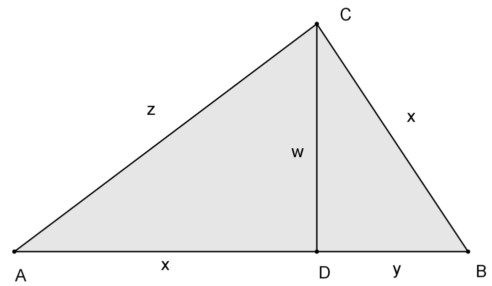
Figura 1.9



Um Triângulo Áureo é um triângulo tal que, quando dele se remove, um triangulo semelhante a ele, a razão entre a área do triângulo áureo pela área do triangulo restante é a razão áurea. Isto é, na figura 1.10, quando ΔCBD é removido de ΔABC, tem-se

$$\frac{\text{Área}_{\Delta ABC}}{\text{Área}_{\Delta ACD}} = \phi.$$

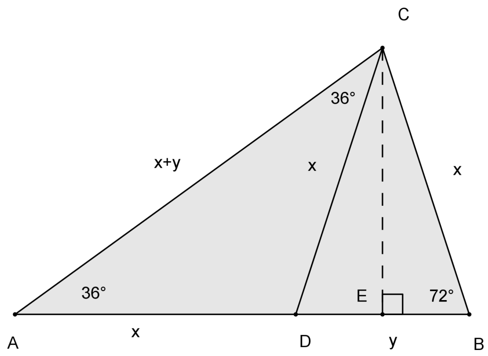
Figura 1.10



Problema 3 Mostre que o triângulo isósceles, com ângulo do vértice medindo 36°, é um triângulo áureo.

Solução: Observe que cada ângulo da base mede 72°. Ao bissetar um dos ângulos da base, conforme a figura 1.11, obtermos dois triângulos isósceles.

Figura 1.11



Sendo o triangulo CDB semelhante ao triangulo ABC, obtemos

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y},$$

isto é,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0.$$

Portanto,

$$\frac{x}{y} = \phi.$$

Seja CE a altura do triângulo CDB. Então

$$CE = \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}$$

$$\begin{aligned}
\text{Área}_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2}(x+y)(CE) \\
\text{Área}_{\Delta ADC} &= \frac{1}{2}x(CE) \\
\frac{\text{Área}_{\Delta ABC}}{\text{Área}_{\Delta ADC}} &= \frac{x+y}{x} = \phi.
\end{aligned}$$

Portanto, o triângulo ABC é um triângulo áureo.

Ainda sobre o problema 3, vale destacar as seguintes relações:

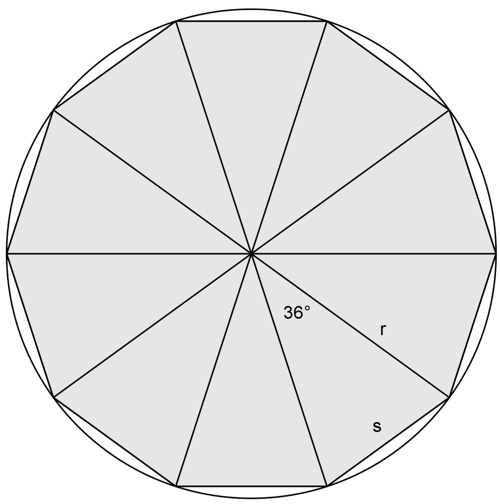
$$\frac{\text{Área}_{\Delta ADC}}{\text{Área}_{\Delta CDB}} = \frac{x}{y} = \phi$$

e

$$\frac{\text{Área}_{\Delta ABC}}{\text{Área}_{\Delta CDB}} = \frac{x+y}{y} = \frac{x+y}{x}\,\frac{x}{y} = \phi^2$$

Observando que o ângulo central de um decágono regular tem medida equivalente a 36° (figura 1.12), pelo problema 3, a razão entre o raio da circunferência circunscrita ao decágono regular e seu lado é igual à razão áurea.

Figura 1.12



2. NÚMEROS DE FIBONACCI

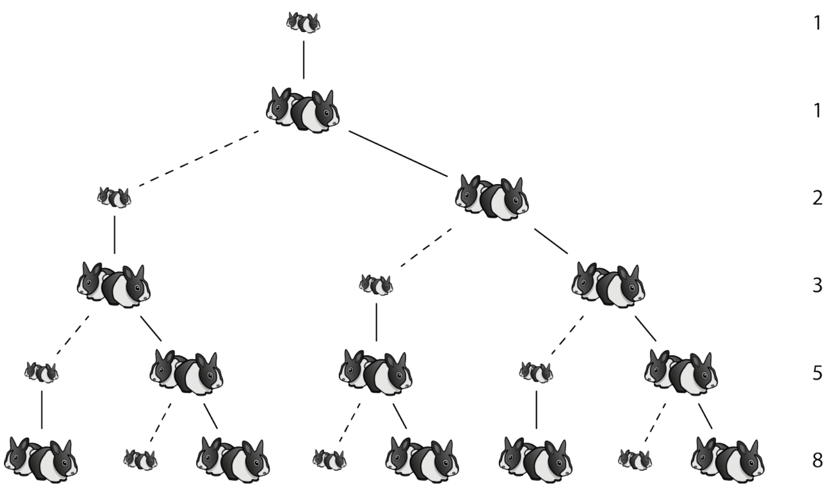
> O papel de Fibonacci na história da razão áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a razão áurea, foi responsável por um progresso significativo mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a razão áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da razão áurea e de suas aplicações. (Livio, 2011, p. 115)

2.1. Sequência de Fibonacci

Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, foi um matemático italiano que nasceu em Pisa por volta de 1170. Era filho de Guglielmo Bonacci, um rico mercador de Pisa representante dos comerciantes da República de Pisa e encarregado de negócios das cidades de Veneza, Gênova e Pisa. O nome Fibonacci, vem da contração de filius Bonacci ou filho de Bonacci. Fibonacci viveu parte de sua juventude no norte da África, onde aprendeu o idioma e familiarizou-se com os costumes e a cultura árabe. Viajou extensamente pelo Mediterrâneo durante grande parte de sua vida, o que lhe rendeu o apelido Leonardo Bigollo (Leonardo Viajante). De volta à Itália, em torno de 1200, publicou o Liber Abaci (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo) em 1202. Neste livro Fibonacci apresentou um problema que envolve o crescimento de uma população hipotética de coelhos, que é a base da sequência de Fibonacci.

Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todos os meses cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? A figura abaixo (fig. 2.1) ilustra o crescimento dessa população de coelhos. Assumindo que nenhum dos coelhos morre, ao final do segundo mês teremos dois pares de coelhos, um par adulto e um par de coelhos recém nascido do par original.

Figura 2.1



Durante o terceiro mês, o par original irá produzir um outro par e o par que havia nascido no mês anterior chegará a sua fase adulta. Um mês após, tanto o par original como o par primogênito produzirá novos pares de coelhos, de modo que teremos três pares de coelhos adultos e dois pares de coelhos recém nascido, e assim por diante. A tabela 2.1 mostra o crescimento da população de coelhos ao longo dos meses, onde b_n representa o número de pares de coelhos recém nascidos no mês n, A_n representa o número de pares de coelhos adultos nesse mesmo mês e $T_n = A_n + b_n$ é a quantidade total de pares de coelhos no mês n. A partir dela

Mês	b_n	A_n	T_n
1	0	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	5	8
6	5	8	13
7	8	13	21
8	13	21	34
9	21	34	55
10	34	55	89
11	55	89	144
12	89	144	233

Tabela 2.1 Número total de pares de coelhos, T_n, em função do número de meses.

podemos tirar algumas conclusões sobre esse crescimento, como o número de pares coelhos após um ano.

Está claro, pelo estudo da tabela, que o número de pares de coelhos adultos no décimo terceiro mês será 233. Destes, 232 foram gerados a partir do primeiro par de coelhos, de modo que, é natural que ao somarmos os elementos da coluna "b_n" obtenhamos esse mesmo valor. De fato, ao fazer essa soma obtemos

$$\begin{aligned} S &= 0+1+1+2+3+5+8+13+21+34+55+89 \\ &= 232. \end{aligned}$$

Ainda examinando a tabela, vemos que existem alguns padrões, por exemplo, cada elemento de uma linha é a soma dos seus dois precedentes na mesma coluna. Na linha 4, temos

$$2 = 1+1 \quad 3 = 2+1 \quad 5 = 3+2.$$

Na linha 5, temos

$$3 = 2+1 \quad 5 = 3+2 \quad 8 = 5+3.$$

Mais geral, a tabela mostra que $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$. De modo que podemos listar indefinidamente os termos dessa sequência. Desta forma, obtemos

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad 55, \quad 89, \quad 144, \quad 233, \quad 377, \ldots$$

Devido à sua origem no problema que envolve o crescimento de uma população de coelhos, que foi apresentado por Fibonacci, a sequência de números inteiros

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \ldots$$

é chamada de sequência de Fibonacci, e seus termos são chamados de número de Fibonacci. A partir de agora, denotaremos o n-ésimo número de Fibonacci por F_n, portanto:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \ldots$$

E, além disso, tem-se

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Na próxima seção, bem como ao logo de todo o trabalho, quando falarmos de sequência de Fibonacci estaremos nos referindo a uma sequência de números inteiros positivos, definida pela relação de recorrência

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

onde $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$.

2.2. Sobre os Números de Fibonacci

Nessa seção será apresentada algumas propriedades dos números de Fibonacci, o princípio da indução será frequentemente utilizado nas demonstrações dessas propriedades. Por definição, poremos $F_0 = 0$. Mais adiante, neste capítulo, justificaremos essa definição.

Teorema 2.2.1. *Na sequência de Fibonacci, termos consecutivos são primos entre si, isto é,*

$$(F_n, F_{n+1}) = 1$$

para todo inteiro positivo n.

Demonstração. Suponhamos que o inteiro $d > 1$ divide F_n e F_{n+1}. Então d divide a diferença entre eles, isto é, $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ é divisível por d. Desde que $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$, podemos concluir que $d|F_{n-2}$. O mesmo argumento mostra que $d|F_{n-3}, d|F_{n-4}, \ldots, d|F_3, d|F_2$ e finalmente $d|F_1$. Mas, $F_1 = 1$, que certamente não é divisível por $d > 1$. Esta contradição prova o teorema. $\square$

Teorema 2.2.2. *Para todo $m, n, \in \mathbb{N}$,*

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}. \tag{2.1}$$

Demonstração. Fixando m, daremos a prova por indução em n. Quando $n = 1$ a identidade 2.1 assume a forma

$$F_{m+1} = F_{m-1}F_1 + F_m F_2 = F_{m-1} + F_m$$

que é obviamente válida. Dessa forma, suponha que a identidade 2.1 seja válida para todo inteiro positivo menor ou igual a k. Pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} F_{m+k} &= F_{m-1}F_k + F_m F_{k+1}, \\ F_{m+(k-1)} &= F_{m-1}F_{k-1} + F_m F_k \end{aligned}$$

Somando essas duas equações obtemos

$$F_{m+k} + F_{m+(k-1)} = F_{m-1}(F_k + F_{k-1}) + F_m(F_{k+1} + F_k)$$

Assim,

$$F_{m+(k+1)} = F_{m+k} + F_{m+(k-1)} = F_{m-1}F_{k+1} + F_m F_{k+2},$$

isto é, 2.1 vale para $n = k+1$. □

Como consequência do teorema anterior, podemos obter algumas identidades sobre os números de Fibonacci. Por exemplo, fazendo $m = n$ em 2.1 obtemos

$$F_{2n} = F_{n-1}F_n + F_n F_{n+1}.$$

Sendo, $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$. Concluímos que

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$$

De maneira similar, fazendo $m = n+1$ em 2.1 obtém-se

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2.$$

Teorema 2.2.3. *Para $m \geq 1$ e $n \geq 1$, F_m divide F_{mn}.*

Demonstração. A prova será feita por indução em n. Fixando m, é de fácil verificação que para $n = 1$ o teorema é válido. Suponha que $F_m | F_{mn}$. Por 2.1

$$F_{m(n+1)} = F_{mn+m} = F_{mn-1}F_m + F_{mn}F_{m+1}.$$

Assim, pela hipótese de indução, o lado direito da expressão acima é divisível por F_m, uma vez que ambas as parcelas são divisíveis por F_m. Portanto, $F_m | F_{m(n+1)}$, o que conclui a prova. □

O lema a seguir será utilizado na demonstração do próximo teorema, aqui q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de m por n.

Lema 2.2.1. *Se $m = qn + r$, então $(F_m, F_n) = (F_n, F_r)$.*

Demonstração. Através da identidade 2.1, podemos escrever que

$$(F_m, F_n) = (F_{qn+r}, F_n) = (F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n).$$

Assim, utilizando o teorema anterior e o fato que $(a+c, b) = (a, b)$ se $b|c$, obtemos

$$(F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n) = (F_{qn-1}F_r, F_n).$$

Para concluir a demonstração observe que $(F_{qn-1}, F_n) = 1$, já que F_n divide F_{qn} e os números F_{qn-1} e F_{qn} são primos entre si por serem termos consecutivos na sequência de Fibonacci. Portanto,

$$(F_m, F_n) = (F_{qn-1}F_r, F_n) = (F_r, F_n).$$

□

Teorema 2.2.4 (Lucas, 1876)**.** *O máximo divisor comum entre dois números de Fibonacci é um número de Fibonacci. Mais especificamente,*

$$(F_m, F_n) = F_d, \quad \text{onde} \quad d = (m, n).$$

Demonstração. Suponha que $m \geq n$. Aplicando o algoritmo de Euclides aos números m e n, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
m &= q_1 n + r_1, \quad 0 < r_1 < n \\
n &= q_2 r_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_{n-1} + 0.
\end{aligned}$$

De acordo com o lema 2.2.1,

$$(F_m, F_n) = (F_n, F_{r_1}) = (F_{r_1}, F_{r_2}) = \ldots = (F_{r_{k-1}}, F_{r_k}).$$

Desde que $r_k | r_{k-1}$, pelo teorema 2.2.3, temos que $F_{r_k} | F_{r_{k-1}}$, e consequentemente $(F_{r_{k-1}}, F_{r_k}) = F_{r_k}$. Mas sendo r_k o último resto não nulo ao aplicar o algoritmo de Euclides aos números m e n, tem-se $r_k = (m, n)$. Assim obtemos

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}.$$

$\square$

Exemplo 2.2.1. *Aplicando o algoritmo da Euclides aos números 987 e 144, obtemos*

$$\begin{aligned}
987 &= 6.144 + 123, \\
144 &= 1.123 + 21, \\
123 &= 5.21 + 18, \\
21 &= 1.18 + 3, \\
18 &= 6.3 + 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $(987, 144) = 3$. *Porém, observando que* $F_{16} = 987$ *e* $F_{12} = 144$, *podemos concluir, a partir do teorema anterior, que*

$$(987, 144) = (F_{16}, F_{12}) = F_4 = 3$$

É interessante notar que a recíproca do teorema 2.2.3 pode ser obtida a partir do teorema anteriormente provado, em outras palavras, se F_n é divisível por F_m, então $m|n$. De fato, se $F_m | F_n$, então $(F_m, F_n) = F_m$. Mas pelo teorema anterior, $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$. O que implica $(m, n) = m$, e portanto $m|n$. Assim temos o seguinte corolário:

Corolário 2.2.1. *$F_n|F_m$ se, e somente se, $n|m$, para $m \geq n \geq 3$.*

Apresentaremos, a seguir, algumas identidades relacionadas aos números de Fibonacci.

$$\textbf{(I)} \qquad F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1, \quad n \geq 1.$$

Desde que,

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

para todo inteiro positivo n. Podemos, portanto, escrever as seguintes sequências de equações:

$$\begin{array}{rcl} F_1 & = & F_3 - F_2 \\ F_2 & = & F_4 - F_3 \\ F_3 & = & F_5 - F_4 \\ & \vdots & \\ F_{n-1} & = & F_{n+1} - F_n \\ F_n & = & F_{n+2} - F_{n+1} \end{array}$$

De modo que somando, membro a membro, as igualdades acima, obtemos

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

$$\textbf{(II)} \qquad F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1, \quad n \geq 1.$$

Por indução, a igualdade se verifica para $n = 1$, já que $F_2 = F_3 - 1$. Assim, supondo que, $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ vale para n, mostraremos que a mesma vale para $n+1$. De fato, somando F_{2n+2} em ambos os lados da expressão, obtém-se

$$(F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n}) + F_{2n+2} = F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} = F_{2n+3} - 1.$$

De modo que a identidade é válida para todo inteiro positivo.

$$\textbf{(III)} \qquad F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}, \quad n \geq 1.$$

Dado que

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+2} - 1$$

e

$$F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Podemos subtrair a primeira identidade pela segunda, afim de obter

$$\begin{array}{rcl} F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} & = & (F_{2n+2} - 1) - (F_{2n+1} - 1) \\ & = & F_{2n+2} - F_{2n+1} = F_{2n} \end{array}$$

$$\textbf{(IV)} \qquad F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Mostraremos por indução a validade da identidade. E fácil ver que $F_1^2 = F_1F_2$, ou seja, a igualdade é válida para $n = 1$. Assim, suponha que, para o inteiro positivo n, a identidade é válida. Isto é,

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}.$$

Somando F_{n+1}^2 em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + F_{n+1}^2 &= F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1}F_{n+2} \end{aligned}$$

Portanto, a identidade (IV) é válida para todo inteiro positivo.

Teorema 2.2.5 (Identidade de Cassini)**.**

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad n \geq 1.$$

Demonstração. A prova será dada mais uma vez por indução matemática. Como $F_0 = 0, F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ vê-se que a identidade é válida para $n = 1$. Supondo que para $n = k$

$$F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$$

seja válida, então para $n = k+1$ tem-se

$$\begin{aligned} F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 &= F_kF_{k+2} - F_{k+1}F_{k+1} \\ &= F_kF_{k+2} - F_{k+1}(F_{k-1} + F_k) \\ &= F_kF_{k+2} - F_{k+1}F_{k-1} - F_{k+1}F_k \\ &= F_k(F_{k+2} - F_{k+1}) - F_{k+1}F_{k-1} \\ &= F_k^2 - F_{k-1}F_{k+1} \\ &= (-1)(F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2) \\ &= (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Assim, a identidade se verifica para $n = k+1$, o que completa a prova. □

Uma consequência da identidade de Cassini é que as equações diofantinas $x^2 + xy - y^2 = 1$ e $x^2 + xy - y^2 = -1$ possuem infinitas soluções. Para verificar isso, basta substituir $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ na identidade de Cassini, obtendo desta maneira que

$$F_{n-1}^2 + F_{n-1}F_n - F_n^2 = (-1)^n.$$

2.3. A Fórmula de Binet

Visto que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ é a relação de recorrência que define a sequência de Fibonacci, onde $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. Estamos interessados em encontrar uma fórmula fechada para essa relação de recorrência. Assim, vamos supor que a solução para esse problema pode ser dada por λ^n (com $\lambda \neq 0$), isto é, $F_n = \lambda^n$. Desde que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, tem-se que

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n.$$

De modo que

$$\lambda^2 = \lambda + 1.$$

Observe que, sendo $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ as raízes dessa equação, a sequência $\{x_n\}$ definida por $x_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$ também é solução para o problema. De fato,

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= \alpha\lambda_1^{n+2} + \beta\lambda_2^{n+2} \\
&= \alpha\lambda_1^n\lambda_1^2 + \beta\lambda_2^n\lambda_2^2 \\
&= \alpha\lambda_1^n(\lambda_1 + 1) + \beta\lambda_2^n(\lambda_2 + 1) \\
&= (\alpha\lambda_1^{n+1} + \beta\lambda_2^{n+1}) + (\alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n) \\
&= x_{n+1} + x_n
\end{aligned}$$

Assim,

$$F_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n \tag{2.2}$$

Desta forma, podemos determinar os valores dos coeficientes simplesmente substituindo $F_1 = F_2 = 1$ em 2.2, obtendo assim

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Consequentemente,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{2.3}$$

Teorema 2.3.1 (Fórmula de Binet). *Para todo inteiro positivo,*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Demonstração. Na demonstração, utilizaremos o princípio da indução. É de fácil verificação que a fórmula é válida para $n = 1$ e $n = 2$. De fato,

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2\sqrt{5}}{2}\right] = 1,
\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{4\sqrt{5}}{4}\right]=1. \end{aligned}$$

Como hipótese de indução, vamos supor que a fórmula é válida para $n=k$ e $n=k+1$, e dessa forma concluir que também é válida para $n=k+2$. Dado que $F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$, obtemos substituindo a hipótese de indução que

$$\begin{aligned} F_{k+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right] \end{aligned}$$

Como $\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ e $\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$, obtemos

$$\begin{aligned} F_{k+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right] \end{aligned}$$

Assim, a fórmula é válida para todo inteiro positivo. □

Em consequência do que acabamos de provar, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.3.2 (Observação de Kepler). *A razão entre termos sucessivos da sequência de Fibonacci converge para ϕ, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi.$$

Demonstração. Seja, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\chi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Pela fórmula de Binet, temos

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^{n+1} - \chi^{n+1}]}{\frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^n - \chi^n]}$$

Ou seja,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\phi^{n+1} - \chi^{n+1}}{\phi^n - \chi^n}.$$

Dividido o numerado e o denominador da fração do lado direito da equação por ϕ^n, obtemos

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\phi - \frac{\chi^{n+1}}{\phi^n}}{1 - \frac{\chi^n}{\phi^n}} = \frac{\phi - \chi(\frac{\chi}{\phi})^n}{1 - (\frac{\chi}{\phi})^n}.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

Uma vez que, $\left|\frac{\chi}{\phi}\right| < 1$. □

No último capítulo deste trabalho apresentaremos um resultado que é análogo ao teorema anterior. Mostraremos que, se f é uma Função de Fibonacci, então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x+1)}{F(x)} = \phi.$$

2.4. Sequências Generalizadas de Fibonacci

Considere a relação de recorrência 2.4, a qual foi utilizada para definir os números de Fibonacci

$$A_{n+2} = A_{n+1} + A_n. \tag{2.4}$$

Podemos obter várias sequências diferentes de números inteiros a partir dessa relação de recorrência simplesmente escolhendo os dois primeiros termos da sequência. Por exemplo, se tomarmos $A_1 = 1$ e $A_2 = 3$, teremos a sequência

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots,$$

que é chamada de sequência de Lucas em homenagem ao matemático francês François Édouard Anatole Lucas. Os termos dessa sequência são chamados de números de Lucas e denotaremos o n-ésimo termo dessa sequência por L_n.

Em geral, se tomarmos p e q inteiros positivos, com $b_1 = p$ e $b_2 = q$, obteremos a partir da relação de recorrência 2.4 a sequência de números inteiros

$$p, q, p+q, p+2q, 2p+3q, 3p+5q, \ldots,$$

que será chamada sequência generalizada de Fibonacci. Denotaremos o n-ésimo termo dessa sequência por H_n.

Teorema 2.4.1. *Seja $\{H_n\}$ uma sequência generalizada de Fibonacci, com $H_1 = p$ e $H_2 = q$. Então,*

$$H_{n+2} = qF_{n+1} + pF_n. \tag{2.5}$$

para todo inteiro $n \leq 1$.

Demonstração. Por indução, verifique que a igualdade é válida para $n = 1$, isto é,

$$H_3 = qF_2 + pF_1 = p + q.$$

Assim, supondo que a mesma é válida para $n \leq k$, concluiremos que a igualdade também é válida para $n = k+1$, ou seja,

$$H_{k+3} = qF_{k+2} + pF_{k+1}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} H_{k+3} &= H_{k+2} + H_{k+1} \\ &= \{qF_{k+1} + pF_k\} + \{qF_k + pF_{k-1}\} \\ &= q\{F_{k+1} + F_k\} + p\{F_k + F_{k-1}\} \\ &= qF_{k+2} + pF_{k+1}. \end{aligned}$$

Assim, por indução, a igualdade é válida para todo inteiro $n \leq 1$. $\square$

É interessante notar que a sequência de Fibonacci pode ser definida, de maneira natural, para todo número inteiro, a partir da relação de recorrência 2.6

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \tag{2.6}$$

De fato, podemos escrever F_n em função de F_{n+1} e F_n, de modo que,

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Sendo assim, teremos, $F_0 = F_2 - F_1 = 0$ e, portanto

$$\begin{aligned} F_{-1} &= F_1 - F_0 = 1, \\ F_{-2} &= F_0 - F_{-1} = -1, \\ F_{-3} &= F_{-1} - F_{-2} = 2, \\ F_{-4} &= F_{-2} - F_{-3} = -3. \end{aligned}$$

A tabela a seguir mostra os primeiros valores de F_n para índices inteiros.

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_n	-8	+5	-3	+2	-1	+1	0	1	1	2	3	5	8

Observando a tabela anterior podemos deduzir que

$$|F_{-n}| = F_n;$$

além disso, $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$. De fato, por indução, podemos verificar o seguinte teorema:

Teorema 2.4.2. *Para todo n inteiro,*

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

3. Frações Contínuas

Dado qualquer número irracional I existe uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de inteiros positivos tal que o número I pode ser expresso na forma

$$I = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \dots}}}}}$$

onde a_0 é um número inteiro. Esta expressão é a expansão em frações contínuas do número I, que denotaremos por

$$I = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots].$$

Isto significa que o número I é o limite da sequência

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

Os números a_i são chamados os quocientes de I e as frações $\dfrac{p_k}{q_k}$ são os convergentes de I.

3.1. Convergentes e Quocientes

Considere as seguintes frações

$$c_0 = \frac{a_0}{1}, c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, c_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \dots$$

obtidas pelas expansões das frações contínuas

$$[a_0], [a_0, a_1], [a_0, a_1, a_2], \dots.$$

Estas frações são chamadas de convergentes da fração contínua $[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots]$.

Exemplo 3.1.1. *Considere a fração contínua* $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$. *Seus primeiros convergentes são*

$$c_0 = 2, \quad c_1 = 3, \quad c_2 = \frac{8}{3}, \quad c_3 = \frac{11}{4}, \quad c_4 = \frac{19}{7}, \quad c_5 = \frac{87}{32}$$

Exemplo 3.1.2. *A expressão, em fração contínua, do número racional* $79/28$ *é* $[2,1,4,1,1,2]$. *De fato, pelo algoritmo da divisão de Euclides, temos*

$$\begin{aligned} 79 &= 2\times 28+23 \\ 28 &= 1\times 23+5 \\ 23 &= 4\times 5+3 \\ 5 &= 1\times 3+2 \\ 3 &= 1\times 2+1 \\ 2 &= 2\times 1+0 \end{aligned}$$

A partir dessas igualdades obtemos

$$\begin{aligned} \frac{79}{28} &= 2+\frac{23}{28}=2+\frac{1}{\frac{28}{23}} \\ &= 2+\frac{1}{1+\frac{5}{23}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{23}{5}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\frac{3}{5}}} \\ &= 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\frac{1}{\frac{5}{3}}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\frac{2}{3}}}} \\ &= 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}} \end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{79}{28}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$$

Por convenção, escreveremos

$$q_{-1}=0, \quad p_0=a_0, \quad p_{-1}=q_0=1$$

Teorema 3.1.1. *Seja* $c_i=p_i/q_i$ *o i-ésimo convergente da fração contínua* $[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n]$. *Então o numerador* p_i *e o denominador* q_i *de* c_i *satisfazem as seguintes relações:*

$$\begin{aligned} p_i &= a_i p_{i-1}+p_{i-2} \\ q_i &= a_i q_{i-1}+q_{i-2} \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$

Demonstração. A demonstração será dada por indução. Observamos que

$$c_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$$

e que

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}.$$

Portanto, podemos escolher

$$p_1 = a_1 a_0 + 1 = a_1 p_0 + p_{-1} \quad \text{e} \quad q_1 = a_1 = a_1 q_0 + q_{-1},$$

de modo que o teorema é válido para $i = 1$.

Para $i = 2$, por definição, temos

$$c_2 = \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_0 a_2 a_1 + a_0 + a_2}{a_2 a_1 + 1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} p_2 &= a_0 a_2 a_1 + a_0 + a_2 = a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0 = a_2 p_1 + p_0 \\ q_2 &= a_2 a_1 + 1 = a_2 q_1 + q_0 \end{aligned}$$

Isto é, o teorema é válido para $i = 2$.

Assumimos, agora, que o teorema é válido para todo $j \leq i$. Isto significa que

$$c_i = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i] = \frac{p_i}{q_i} = \frac{a_i p_{i-1} + p_{i-2}}{a_i q_{i-1} + q_{i-2}}. \tag{3.1}$$

Observando que,

$$c_i = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i}}}}$$

e que,

$$c_{i+1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i + \frac{1}{a_{i+1}}}}}}$$

vemos que c_{i+1} pode ser obtido de c_i simplesmente pela substituição de a_i por $a_i + \dfrac{1}{a_{i+1}}$. De modo que, se pudermos mostrar que os números $p_{i-1}, p_{i-2}, q_{i-1}$ e q_{i-2} dependem somente dos quocientes parciais $a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}$, poderemos usar (3.1) para obtenção de c_{i+1}, pois estamos assumindo, como hipótese de indução, a validade de (3.1) para todo $j \leq i$. Como

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{a_{i-1}p_{i-2} + p_{i-3}}{a_{i-1}q_{i-2} + q_{i-3}}$$

os números p_{i-1} e q_{i-1} dependem somente dos números a_{i-1} e dos números $p_{i-2}, q_{i-2}, p_{i-3}$ e q_{i-3} os quais dependem dos seus precedentes a's, p's e q's. Desta forma $p_{i-2}, q_{i-2}, p_{i-1}$ e q_{i-1} dependem somente dos primeiros $i-1$ quocientes parciais $a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}$ sendo independentes de a_i. Portanto eles não serão alterados com a substituição de a_i por $a_i + \dfrac{1}{a_{i+1}}$. Portanto, podemos utilizar (3.1) para a obtenção de c_{i+1} bastando, para isto, substituir a_i por $a_i + \dfrac{1}{a_{i+1}}$; Assim,

$$\begin{aligned}
c_{i+1} &= \frac{\left(a_i + \frac{1}{a_{i+1}}\right) p_{i-1} + p_{i-2}}{\left(a_i + \frac{1}{a_{i+1}}\right) q_{i-1} + q_{i-2}} \\
&= \frac{(a_{i+1}a_i + 1)\, p_{i-1} + a_{i+1}p_{i-2}}{(a_{i+1}a_i + 1)\, q_{i-1} + a_{i+1}q_{i-2}} \\
&= \frac{a_{i+1}(a_i p_{i-1} + p_{i-2}) + p_{i-1}}{a_{i+1}(a_i q_{i-1} + q_{i-2}) + q_{i-1}} \\
&= \frac{a_{i+1}p_i + p_{i-1}}{a_{i+1}q_i + q_{i-1}} \\
&= \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração por indução. □

Teorema 3.1.2. *A relação*

$$p_{i-1}q_i - p_i q_{i-1} = (-1)^i$$

se verifica para todo $i \geq 0$, onde p_i e q_i são, respectivamente, o numerador e o denominador do i-ésimo convergente.

Demonstração. Para $i = 0$ temos $p_{-1}q_0 - p_0 q_{-1} = 1 = (-1)^0$, uma vez que $q_{-1} = 0, p_0 = a_0$ e $p_{-1} = q_0 = 1$. Assumimos, como hipótese de indução, que $p_{i-1}q_i - p_i q_{i-1} = (-1)^i$ é válida para todo inteiro positivo menor ou igual a i, e mostraremos que essa igualdade também se verifica para $i+1$. Pelo teorema anterior,

$$p_{i+1} = a_{i+1}p_i + p_{i-1} \quad \text{e} \quad q_{i+1} = a_{i+1}q_i + q_{i-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i &= p_i(a_{i+1} q_i + q_{i-1}) - (a_{i+1} p_i + p_{i-1}) q_i \\ &= a_{i+1} p_i q_i + p_i q_{i-1} - a_{i+1} p_i q_i - p_{i-1} q_i \\ &= (-1)(p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1}) \end{aligned}$$

Assim, utilizando a hipótese de indução, obtemos

$$p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i = (-1)(p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1}) = (-1)(-1)^i = (-1)^{i+1}$$

o que conclui a demonstração. □

Corolário 3.1.1. *Para todo convergente* $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ *temos que* $(p_i, q_i) = 1$.

Demonstração. Pelo teorema anterior temos que $p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1} = (-1)^i$. Isto nos diz que qualquer divisor comum de p_i e q_i deve ser um divisor de 1 ou -1. Portanto o máximo divisor comum de p_i e q_i deve ser igual a 1. □

3.2. Aproximações Sucessivas

Seja α um número irracional e seja $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, isto é, a_0 é o maior inteiro menor do que α. Logo,

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{x_0},$$

onde $x_0 = \dfrac{1}{\alpha - a_0}$ é irracional e $x_0 > 1$. Podemos, pois, escrever x_0 na forma

$$x_0 = a_1 + \frac{1}{x_1},$$

onde $a_1 = \lfloor x_0 \rfloor$, $\quad x_1$ irracional e $x_1 > 1$. Este processo pode ser repetido a fim de obter:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 + \frac{1}{x_0} \\ x_0 &= a_1 + \frac{1}{x_1} \\ x_1 &= a_2 + \frac{1}{x_2} \\ x_2 &= a_3 + \frac{1}{x_3} \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}} \end{aligned}$$

onde todos os a_i's $(i > 1)$ são inteiros positivos e todos os x_i's são maiores do que 1. Desde que cada x_i é irracional, este processo pode ser repetido um número infinito de vezes. De modo que

$$\begin{aligned}
\alpha = a_0 + \frac{1}{x_0} &= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_1}} \\
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_2}}} \\
&= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{x_3}}}}
\end{aligned}$$

Definimos $[a_0, a_1, a_2, \ldots] = \lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Exemplo 3.2.1. *A expansão de $\sqrt{5}$ pode ser obtida pelo processo descrito acima. Sendo $a_0 = \left\lfloor \sqrt{5} \right\rfloor = 2$ e*

$$\sqrt{5} = a_0 + \frac{1}{x_0} = 2 + \frac{1}{x_0},$$

temos

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2} = \sqrt{5} + 2.$$

Consequentemente

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{x_0} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5} + 2}.$$

Como $a_1 = \left\lfloor \sqrt{5} + 2 \right\rfloor = 4$, temos

$$\sqrt{5} + 2 = 4 + \frac{1}{x_1},$$

de onde obtemos

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2 - 4} = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2.$$

Logo,

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{x_0} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{x_1}}.$$

Isto é,

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\sqrt{5}+2}}.$$

Como $a_2 = a_1 = \left\lfloor \sqrt{5}+2 \right\rfloor = 4$*, temos que* $x_2 = x_1$*, de onde concluímos que, continuando esse processo, iremos obter para a sequência* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *os valores* $2, 4, 4, 4, \ldots$*. Logo a fração contínua infinita que representa* $\sqrt{5}$ *será dada por:*

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}$$

3.3. Algumas Propriedades dos Convergentes

Teorema 3.3.1. *A sequência* $c_0, c_1, c_2, \ldots$ *dos convergentes de uma fração contínua satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $c_0 < c_2 < c_4 < c_6 < \ldots < c_{2n}$

(ii) $c_1 > c_3 > c_5 > c_7 > \ldots > c_{2n+1}$

(iii) $c_{2n} < c_{2n+1} < c_{2n-1}$

Demonstração. Pelo teorema 3.1.2 temos que

$$p_{i-1}q_i - p_i q_{i-1} = (-1)^i.$$

Assim, dividindo ambos os lados dessa igualdade por $q_i q_{i-1}$ obtemos:

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{(-1)^i}{q_i q_{i-1}},$$

isto é,

$$c_{i-1} - c_i = \frac{(-1)^i}{q_i q_{i-1}}. \tag{3.2}$$

Mas sendo

$$c_i - c_{i-2} = \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = \frac{p_i q_{i-2} - p_{i-2} q_i}{q_i q_{i-2}}$$

obtemos, pelo fato de $p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$ e $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$, que

$$\begin{aligned} c_i - c_{i-2} &= \frac{(a_i p_{i-1} + p_{i-2})q_{i-2} - p_{i-2}(a_i q_{i-1} + q_{i-2})}{q_i q_{i-2}} \\ &= \frac{-a_i(p_{i-2}q_{i-1} - p_{i-1}q_{i-2})}{q_i q_{i-2}} \\ &= \frac{-a_i(-1)^{i-1}}{q_i q_{i-2}} \\ &= \frac{a_i(-1)^i}{q_i q_{i-2}} \end{aligned}$$

ou seja,

$$c_i - c_{i-2} = \frac{a_i(-1)^i}{q_i q_{i-2}} \tag{3.3}$$

Tomando $i = 1$ e $i = 2$ em 3.2 obtemos, respectivamente,

$$c_0 - c_1 = \frac{-1}{q_1 q_0} < 0 \quad \text{e} \quad c_1 - c_2 = \frac{1}{q_2 q_1} > 0$$

uma vez que todos os q_i's são positivos.

Agora, tomando $i = 2$ em 3.3 obtemos

$$c_2 - c_0 = \frac{a_2}{q_2 q_0} > 0$$

Pois, a_2, q_2, q_0 são, todos, positivos. Sendo, pois, $c_0 < c_2, c_0 < c_1, c_2 < c_1$ temos que $c_0 < c_2 < c_1$. Usando, agora, $i = 2$ e $i = 3$ em 3.2 e $i = 3$ em 3.3 obtemos $c_2 < c_3 < c_1$. Este processo pode ser repetido a fim de obter a sequência de desigualdades:

$$\begin{gathered} c_4 < c_5 < c_3 \\ c_6 < c_7 < c_5 \\ \vdots \end{gathered}$$

Combinando estas desigualdades obtemos

$$c_0 < c_2 < c_4 < c_6 < \ldots < c_{2j} < \ldots < c_{2k+1} < \ldots < c_5 < c_3 < c_1$$

concluindo, portanto, a demonstração. □

Segue-se como consequência do teorema anterior que a sequência dos convergentes de índice par forma uma sequência crescente limitada superiormente e que a sequência dos convergentes de índice ímpar forma uma sequência limitada inferiormente, ambas convergentes. Além do mais, ambas convergem para o mesmo limite. De fato, tomando $i = 2j$ em 3.2, teremos

$$c_{2j-1} - c_{2j} = \frac{1}{q_{2j} q_{2j-1}}$$

o que nos permite concluir que o $\lim_{j \to \infty} (c_{2j-1} - c_{2j}) = 0$, pois a sequência dos q_i's cresce indefinidamente.

Teorema 3.3.2. *Para qualquer número real α temos:*

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, \alpha] = \frac{\alpha p_{i-1} + p_{i-2}}{\alpha q_{i-1} + q_{i-2}}$$

Demonstração. A demontração será dada por indução. Para $n = 1$ temos

$$[a_0, \alpha] = a_0 + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha a_0 + 1}{\alpha} = \frac{\alpha p_0 + p_{-1}}{\alpha q_0 + q_{-1}}$$

Suponha que para $n = i - 1$ a afirmação seja válida, isto é,

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, \alpha] = \frac{\alpha p_{i-1} + p_{i-2}}{\alpha q_{i-1} + q_{i-2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i, \alpha] &= [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + \frac{1}{\alpha}] \\
&= \frac{(a_i + \frac{1}{\alpha})p_{i-1} + p_{i-2}}{(a_i + \frac{1}{\alpha})q_{i-1} + q_{i-2}} \\
&= \frac{\alpha(a_i p_{i-1} + p_{i-2}) + p_{i-1}}{\alpha(a_i q_{i-1} + q_{i-2}) + q_{i-1}} \\
&= \frac{\alpha p_i + p_{i-1}}{\alpha q_i + q_{i-1}}
\end{aligned}$$

Assim o teorema é válido para todo inteiro positivo. □

Dado que, pelo processo descrito para obtenção da expressão em fração contínua do número irracional α, temos

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_{i-1}]$$

e pelo teorema anterior

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_{i-1}] = \frac{x_{i-1} p_{i-1} + p_{i-2}}{x_{i-1} q_{i-1} + q_{i-2}}.$$

Tomando a diferença

$$\begin{aligned}
\alpha - c_{i-1} &= \frac{x_{i-1} p_{i-1} + p_{i-2}}{x_{i-1} q_{i-1} + q_{i-2}} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} \\
&= \frac{p_{i-2} q_{i-1} - p_{i-1} q_{i-2}}{q_{i-1}(x_{i-1} q_{i-1} + q_{i-2})} \\
&= \frac{(-1)^{i-1}}{q_{i-1}(x_{i-1} q_{i-1} + q_{i-2})}
\end{aligned}$$

podemos concluir que $\lim_{i \to \infty} (\alpha - c_{i-1}) = 0$, uma vez que a sequência dos q_i's e os números x_i's são positivos. Assim, $\alpha = \lim_{i \to \infty} c_i = \lim_{i \to \infty} [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_i] = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$. De modo que a afirmação feita no inicio do capítulo é, de fato, válida para todo número irracional.

Considere a equação quadrática dada por

$$x^2+x-1=0.$$

A solução positiva desta equação é $\dfrac{1}{\phi}$. Esta equação pode ser escrita como

$$x(x+1)=1 \quad \text{ou} \quad x=\frac{1}{1+x}$$

De modo que ainda podemos fazer

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}$$

Repetindo esse processo um número infinito de vezes obtemos

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

Assim, sendo $\dfrac{1}{\phi}$ a raiz positiva da equação quadrática dada, podemos ainda escrever

$$\frac{1}{\phi}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

Observando que

$$\phi=1+\frac{1}{\phi}$$

Concluímos que

$$\phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

Isto é, $\phi=[1,1,1,1,1,\dots]$.

A partir dessa representação, calculamos os primeiros convergentes de ϕ, que são dados por

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1 = \frac{1}{1} \\
c_1 &= 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} \\
c_2 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2} \\
c_3 &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3} \\
c_4 &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

O que nos sugere que

$$c_i = \frac{F_{i+1}}{F_i}.$$

De fato, seja $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ o i-ésimo convergente de ϕ. Pelo teorema 3.1.1 temos que

$$q_{i+2} = a_{i+2}q_{i+1} + q_i = q_{i+1} + q_i,$$

isto é, a sequência $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$ é uma sequência de Fibonacci. Afirmamos ainda que para ϕ também se verifica $p_i = q_{i+1}$. Por indução, observe que $p_0 = q_0 = 1$ e $q_1 = 1$. Portanto, $p_0 = q_1 = 1$. Suponha agora que $p_j = q_{j+1}$, para $1 \geq j \geq i$. Pelo teorema 3.1.1 obtemos

$$\begin{aligned}
p_{i+1} &= a_{i+1}p_i + p_{i-1} \\
&= q_{i+1} + q_i \\
&= q_{i+2}.
\end{aligned}$$

Concluindo a prova de que $p_i = q_{i+1}$, para $i \geq 0$. Assim

$$c_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, \quad \text{para} \quad n \geq 0.$$

Observando que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \phi$, obtemos a seguinte relação que foi discutida no capítulo 2,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$$

Ainda sobre os convergentes de ϕ, o que acabamos de mostrar combinado com o corolário 3.1.1, nos dá a importante relação entre os números de Fibonacci

$$(F_{n+1}, F_n) = 1.$$

4. FUNÇÕES DE FIBONACCI

Neste capítulo iremos fazer um estudo sobre as Funções de Fibonacci. Os exemplos aqui apresentados, bem como os teoremas e seus corolários são resultados presentes em [Han12].

O principal resultado desse artigo nos remete a uma propriedade dos números de Fibonacci que foi demonstrada no segundo capítulo deste trabalho, a saber,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi,$$

onde $\{F_n\}$ é a sequência de Fibonacci.

De fato, se f é uma função de Fibonacci, então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \phi.$$

4.1. Funções de Fibonacci

Uma função f definida sobre os números reais é dita ser uma função de Fibonacci se, para todo número real x, tem-se:

$$f(x+2) = f(x+1) + f(x).$$

Com definição análoga a definição de sequência de Fibonacci, espera-se que as funções de Fibonacci tenham propriedades também análogas.

A seguir será apresentado alguns exemplos de funções de Fibonacci.

Exemplo 4.1.1. *Suponha que a função exponencial $f(x) = a^x$ seja uma função de Fibonacci em $\mathbb{R}$, onde $a > 0$. Então,*

$$f(x+2) = f(x+1) + f(x)$$

para todo número real x, isto é,

$$a^{x+2} = a^{x+1} + a^x = a^x(a+1).$$

Desde que $a > 0$, e consequentemente $a^x > 0$, tem-se então que

$$a^2 = a+1,$$

ou seja, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Portanto a função $f(x) = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x$ é uma função de Fibonacci. De fato, é a única função de Fibonacci deste tipo definida sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.1.2. *Sejam $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ e $\{v_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sequências generalizadas de Fibonacci. Definiremos a função real f por*

$$f(x) = u_{\lfloor x \rfloor} + v_{\lfloor x \rfloor} t,$$

onde $t = x - \lfloor x \rfloor \in (0,1)$. *Então,*

$$\begin{aligned} f(x+2) &= u_{\lfloor x+2 \rfloor} + v_{\lfloor x+2 \rfloor} t \\ &= u_{(\lfloor x \rfloor + 2)} + v_{(\lfloor x \rfloor + 2)} t \\ &= (u_{(\lfloor x \rfloor + 1)} + u_{\lfloor x \rfloor}) + (v_{(\lfloor x \rfloor + 1)} + v_{\lfloor x \rfloor}) t \\ &= f(x+1) + f(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. *Assim,* f *é uma função de Fibonacci.*

Observe que se uma função de Fibonacci é diferenciável em $\mathbb{R}$, então sua derivada também é uma função de Fibonacci. Assim, a função real definida por

$$h(x) = \left[\ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \right] \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^x$$

é uma função de Fibonacci, desde que h é a derivada da função definida no exemplo 4.1.1

Proposição 4.1.1. *Seja* f *uma função de Fibonacci. Se definirmos* $g := f(x+t)$, *onde* $t \in \mathbb{R}$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *então* g *é uma função de Fibonacci.*

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{R}$, nós temos que

$$g(x+2) = f(x+2+t) = f(x+t+1) + f(x+t) = g(x+1) + g(x),$$

provando assim a proposição. □

Por exemplo, dado que $f(x) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x$ é uma função de Fibonacci, também é uma função de Fibonacci a função real g definida por $g(x) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x+t}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, pois $g := f(x+t)$.

Exemplo 4.1.3. *No exemplo anterior nós discutimos a função*

$$f(x) := u_{\lfloor x \rfloor} + v_{\lfloor x \rfloor} t,$$

onde $t = x - \lfloor x \rfloor \in (0,1)$. *Se definirmos* $v_{\lfloor x \rfloor} := u_{(\lfloor x \rfloor - 1)}$, *então* f *será uma função de Fibonacci. Calculando o valor da função para* $x = -6,1$ *e para* $x = -5,9$ *obtemos:*

$$\begin{aligned} f(-6,1) &= f(-7+0,9) = u_{-7} + u_{-8}(0,9) \\ &= 13 - 21.(0,9) = -5,9 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(-5,9) &= f(-6+0,1) = u_{-6} + u_{-7}(0,1) \\ &= -8 + 13.(0,1) = -6,7 \end{aligned}$$

Teorema 4.1.1. *Seja f uma função de Fibonacci e F_n uma sequência de Fibonacci com $F_0 = 0$ e $F_1 = F_2 = 1$. Então*

$$f(x+n) = F_n f(x+1) + F_{n-1} f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \geq 2$ inteiro.

Demonstração. A demonstração será dada por indução em n. Se $n = 2$ obviamente

$$f(x+2) = f(x+1) + f(x) = F_2 f(x+1) + F_1 f(x).$$

Além disso, se $n = 3$, então

$$\begin{aligned} f(x+3) &= f(x+2) + f(x+1) \\ &= F_2 f(x+1) + F_1 f(x) + F_1 f(x+1) + F_0 f(x) \\ &= (F_2 + F_1) f(x+1) + (F_1 + F_0) f(x) \\ &= F_3 f(x+1) + F_2 f(x). \end{aligned}$$

Suponhamos que para n e $n+1$ a igualdade seja válida, então

$$\begin{aligned} f(x+n+2) &= f(x+n+1) + f(x+n) \\ &= F_{n+1} f(x+1) + F_n f(x) + F_n f(x+1) + F_{n-1} f(x) \\ &= (F_{n+1} + F_n) f(x+1) + (F_n + F_{n-1}) f(x) \\ &= F_{n+2} f(x+1) + F_{n+1} f(x), \end{aligned}$$

isso conclui a demonstração. □

Como consequência direta do que acabamos de provar, segue-se mais uma relação entre os números de Fibonacci e a razão áurea.

Corolário 4.1.1. *Se $\{F_n\}$ é uma sequência de números de Fibonacci com $F_1 = F_2 = 1$, então*

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = F_n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + F_{n-1}.$$

Demonstração. Como vimos no exemplo 4.1.1, $f(x) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x$ é uma função de Fibonacci. Seja $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pelo teorema anterior

$$\phi^{x+n} = f(x+n) = F_n f(x+1) + F_{n-1} f(x) = F_n \phi^{x+1} + F_{n-1} \phi^x = \phi^x \left(F_n \phi + F_{n-1}\right),$$

de modo que,

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}.$$

□

Teorema 4.1.2. *Seja $\{u_n\}$ uma sequência generalizada de Fibonacci. Então*

$$u_{\lfloor x+n \rfloor} = F_n u_{(\lfloor x \rfloor + 1)} + F_{n-1} u_{\lfloor x \rfloor}$$

e

$$u_{(\lfloor x+n \rfloor - 1)} = F_n u_{\lfloor x \rfloor} + F_{n-1} u_{(\lfloor x \rfloor - 1)}.$$

Demonstração. A função $f(x) := u_{\lfloor x\rfloor} + u_{(\lfloor x\rfloor -1)}t$, definida no exemplo 4.1.3 é uma função de Fibonacci. Assim, aplicando o teorema anterior para esta função, obtemos

$$\begin{aligned} u_{\lfloor x+n\rfloor} + u_{(\lfloor x+n\rfloor -1)}t &= f(x+n) \\ &= F_n f(x+1) + F_{n-1} f(x) \\ &= F_n[u_{\lfloor x+1\rfloor} + u_{(\lfloor x+1\rfloor -1)}t] + F_{n-1}[u_{\lfloor x\rfloor} + u_{(\lfloor x\rfloor -1)}t] \\ &= F_n[u_{(\lfloor x\rfloor +1)} + u_{\lfloor x\rfloor}t] + F_{n-1}[u_{\lfloor x\rfloor} + u_{(\lfloor x\rfloor -1)}t] \\ &= [F_n u_{(\lfloor x\rfloor +1)} + F_{n-1}u_{\lfloor x\rfloor}] + [F_n u_{\lfloor x\rfloor} + F_{n-1}u_{(\lfloor x\rfloor -1)}]t, \end{aligned}$$

provando, pois, o teorema. □

Corolário 4.1.2. *Se $n \geq 2$, então*

$$F_{\lfloor x+n\rfloor} = F_n F_{(\lfloor x\rfloor +1)} + F_{n-1} F_{\lfloor x\rfloor}$$

e

$$F_{(\lfloor x+n\rfloor -1)} = F_n F_{\lfloor x\rfloor} + F_{n-1} F_{(\lfloor x\rfloor -1)}.$$

Tomando $x = 2$, na primeira equação do corolário anterior, obtemos mais uma relação entre os números de Fibonacci.

Corolário 4.1.3. $F_{n+2} = F_n F_3 + F_{n-1} F_2$

4.2. Função f-par e Função f-ímpar

Nesta seção definiremos e daremos alguns exemplos de funções f-par e funções f-ímpar.

Definição 4.2.1. *Seja a uma função real, tal que, se $a(x)h(x) \equiv 0$, onde h é contínua, então $h(x) \equiv 0$. A função a é dita ser uma função f-par se $a(x+1) = a(x)$ (função f-ímpar se $a(x+1) = -a(x)$) para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 4.2.1. *Seja $a(x) = x - \lfloor x\rfloor$ e h uma função contínua em $\mathbb{R}$. Se $x \notin \mathbb{Z}$, então $a(x)h(x) = 0$ implica $h(x) = 0$. Por continuidade, segue-se que $h(n) = \lim_{x\to n} h(x) = 0$ para todo inteiro n, portanto $h(x) \equiv 0$. Desde que*

$$\begin{aligned} a(x+1) &= (x+1) - \lfloor x+1\rfloor = (x+1) - (\lfloor x\rfloor + 1) \\ &= x - \lfloor x\rfloor \\ &= a(x), \end{aligned}$$

vemos que a função a é uma função f-par.

Exemplo 4.2.2. *Seja* $a(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ *e* h *uma função contínua em* $\mathbb{R}$*. Se* $x \notin \mathbb{Z}$*, então* $a(x)h(x) = 0$ *implica* $h(x) = 0$*. Por continuidade, segue-se que* $h(n\pi) = \lim_{x\to n\pi} h(x) = 0$ *para todo inteiro* n*, portanto* $h(x) \equiv 0$*. Desde que*

$$\begin{aligned} a(x+1) &= \operatorname{sen}(\pi x+\pi) = \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi)\cos(\pi x) \\ &= \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi) = -\operatorname{sen}(\pi x) \\ &= -a(x), \end{aligned}$$

vemos que a função a *é uma função f-ímpar.*

Teorema 4.2.1. *Seja* $f(x) = a(x)g(x)$ *uma função real, onde* a *é uma função f-par e* g *uma função contínua. Então* f *é uma função de Fibonacci se, e somente se,* g *é uma função de Fibonacci.*

Demonstração. Suponha que f seja uma função de Fibonacci. Desde que $a(x) = a(x+1) = a(x+2)$, obtemos

$$\begin{aligned} a(x)g(x+2) &= a(x+2)g(x+2) \\ &= f(x+2) \\ &= f(x+1) + f(x) \\ &= a(x+1)g(x+1) + a(x)g(x) \\ &= a(x)[g(x+1) + g(x)] \end{aligned}$$

Portanto, $a(x)[g(x+2) - g(x+1) - g(x)] \equiv 0$, de modo que, $[g(x+2) - g(x+1) - g(x)] \equiv 0$, isto é,

$$g(x+2) = g(x+1) + g(x),$$

ou seja, g é uma função de Fibonacci.

Reciprocamente, supondo que g é uma função de Fibonacci, temos

$$\begin{aligned} f(x+2) &= a(x+2)g(x+2) \\ &= a(x+2)[g(x+1) + g(x)] \\ &= a(x+2)g(x+1) + a(x+2)g(x) \\ &= a(x+1)g(x+1) + a(x)g(x) \\ &= f(x+1) + f(x) \end{aligned}$$

ou seja, f é uma função de Fibonacci. Ficando provado, dessa forma, o teorema. □

Exemplo 4.2.3. *Vimos no exemplo 4.1.1 que* $g(x) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x$ *é uma função de Fibonacci. Dado que* $a(x) = x - \lfloor x \rfloor$ *é uma função f-par, pelo teorema anterior,*

$$f(x) = a(x)g(x) = (x - \lfloor x \rfloor)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x$$

é uma função de Fibonacci.

Exemplo 4.2.4. *Se definirmos a função* $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dada por* $a(x)=1$ *para* x *racional e* $a(x)=-1$ *para* x *irracional, então* $a(x+1)=a(x)$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$*. Além disso, se* $a(x)h(x)\equiv 0$ *então* $h(x)\equiv 0$ *independente da continuidade de* h*. Portanto* a *é uma função f-par. No exemplo anterior vimos que*

$$f(x)=(x-\lfloor x\rfloor)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x$$

é uma função de Fibonacci. Assim, pelo teorema 4.2.1 a função real definida por

$$a(x)f(x)=\begin{cases} (x-\lfloor x\rfloor)(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^x & \text{se} \quad x\in\mathbb{Q};\\ -(x-\lfloor x\rfloor)(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^x & \text{se} \quad x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

é uma função de Fibonacci.

Uma função f definida sobre os números reais é dita ser uma função de Fibonacci ímpar se, para todo número real, tem se $f(x+2)=-f(x+1)+f(x)$. Similarmente, a sequência $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ para a qual $a_{n+2}=-a_{n+1}+a_n$ é dita ser uma sequência de Fibonacci ímpar.

Exemplo 4.2.5. *A sequência* $\{1,1,0,-1,2,-3,5,\ldots\}$ *é uma sequência de Fibonacci ímpar.*

Corolário 4.2.1. *Seja* $f(x)=a(x)g(x)$ *uma função real, onde* a *é uma função f-impar e* g *uma função contínua. Então* f *é uma função de Fibonacci se, e somente se,* g *é uma função de Fibonacci ímpar.*

Demonstração. De maneira similar ao teorema 4.2.1, suponha que f seja uma função de Fibonacci. Observando que $a(x+2)=a(x)$ e $a(x+1)=-a(x)$, obtemos

$$a(x)[g(x+2)+g(x+1)-g(x)]\equiv 0,$$

de modo que, $[g(x+2)+g(x+1)-g(x)]\equiv 0$, isto é,

$$g(x+2)=-g(x+1)+g(x),$$

ou seja, g é uma função de Fibonacci ímpar.

Reciprocamente, supondo que g é uma função de Fibonacci ímpar, obtemos

$$\begin{aligned} f(x+2) &= a(x+2)g(x+2)\\ &= a(x+2)[-g(x+1)+g(x)]\\ &= -a(x+2)g(x+1)+a(x+2)g(x)\\ &= a(x+1)g(x+1)+a(x)g(x)\\ &= f(x+1)+f(x)\end{aligned}$$

ou seja, f é uma função de Fibonacci. □

Exemplo 4.2.6. *A função* $g(x) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x$ *é uma função de Fibonacci ímpar; de fato, seja* $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$*, então*

$$g(x+2)+g(x+1)-g(x) = b^x b^2 + b^x b - b^x = b^x(b^2+b-1) = 0,$$

pois b *é raiz do polinômio* b^2+b-1*, ou seja,*

$$g(x+2) = -g(x+1)+g(x).$$

Dado que $a(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ *é uma função f-ímpar, pelo corolário anterior, vemos que a função*

$$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x$$

é uma função de Fibonacci ímpar.

4.3. Quociente de Funções de Fibonacci

Nesta seção encontra-se o teorema central deste trabalho, o colorário decorrente deste teorema relaciona as funções de Fibonacci com a razão áurea.

Teorema 4.3.1. *Se* f *é uma função de Fibonacci, então o limite do quociente* $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ *existe.*

Demonstração. Se considerarmos o quociente $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ da função de Fibonacci f, teremos quatro casos a ser analisados: (i) $f(x) > 0, f(x+1) > 0$; (ii) $f(x) < 0, f(x+1) > 0$; (iii) $f(x) > 0, f(x+1) < 0$; (iv) $f(x) < 0, f(x+1) < 0$. Assim, considerando o caso (iii) e definindo $\alpha = f(x) > 0, -\beta = f(x+1) < 0$, então $f(x+2) = \alpha-\beta$, $f(x+3) = \alpha-2\beta$, $f(x+4) = 2\alpha-3\beta = F_3\alpha - F_4\beta$ e $f(x+5) = F_4\alpha - F_5\beta$. Desta forma, por indução, tem-se $f(x+n) = F_{n-1}\alpha - F_n\beta$ para todo inteiro positivo n. Observe que dado $x' \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$ tal que, $x' = x+n$. Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{f(x'+1)}{f(x')} &= \frac{f(x+n+1)}{f(x+n)} \\
&= \frac{F_n\alpha - F_{n+1}\beta}{F_{n-1}\alpha - F_n\beta} \\
&= \frac{\alpha - \frac{F_{n+1}}{F_n}\beta}{\frac{F_{n-1}}{F_n}\alpha - \beta} \\
&\to \frac{\alpha - \phi\beta}{\frac{\alpha}{\phi} - \beta} = \phi,
\end{aligned}$$

onde $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Portanto $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = \phi$. O caso (ii) é demonstrado de maneira similar ao caso (iii), de modo que consideraremos o caso (i): $f(x) > 0, f(x+1) >$

0. Analogamente, escreveremos $x = \delta + 2n$, onde $\delta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Considere a sequência $\{\frac{f(\delta+2n+1)}{f(\delta+2n)}\}_{n=1}^{\infty}$. Temos

$$\frac{f(\delta+2n+1)}{f(\delta+2n)} = \frac{f(\delta+2n)+f(\delta+2n-1)}{f(\delta+2n)} = 1 + \frac{f(\delta+2n-1)}{f(\delta+2n)} < 2,$$

pois, $\frac{f(\delta+2n-1)}{f(\delta+2n)} < 1$. Afirmamos que a sequência $\{\frac{f(\delta+2n+1)}{f(\delta+2n)}\}_{n=1}^{\infty}$ é monótona crescente. De fato, desde que $\frac{f(\delta+2n+3)}{f(\delta+2n+2)} - \frac{f(\delta+2n+1)}{f(\delta+2n)} = \frac{f(\delta+2n+3)f(\delta+2n)-f(\delta+2n+2)f(\delta+2n+1)}{f(\delta+2n+2)f(\delta+2n)}$, basta mostrar que o numerado é positivo. Assim,

$$\begin{aligned}
&f(\delta+2n+3)f(\delta+2n) - f(\delta+2n+2)f(\delta+2n+1)\\
&= [f(\delta+2n+2)+f(\delta+2n+1)]f(\delta+2n) - f(\delta+2n+2)f(\delta+2n+1)\\
&= f(\delta+2n+2)[f(\delta+2n)-f(\delta+2n+1)] + f(\delta+2n+1)f(\delta+2n)\\
&> f(\delta+2n)[f(\delta+2n)-f(\delta+2n+1)] + f(\delta+2n+1)f(\delta+2n)\\
&= [f(\delta+2n)]^2\\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

isto é, a sequência é monótona crescente. Portanto, a sequência $\{\frac{f(\delta+2n+1)}{f(\delta+2n)}\}_{n=1}^{\infty}$ é convergente. Além disso temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\delta+2n+1)}{f(\delta+2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

O caso (iv) é similar ao caso (i). Portanto, o teorema está provado. □

Corolário 4.3.1. *Se f é uma função de Fibonacci, então*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Demonstração. Como consequência do teorema anterior, basta verificar a validade da afirmação para $f(x) > 0, f(x+1) > 0$. Assim, seja $\alpha = f(x) > 0, \beta = f(x+1) > 0$, então

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+n+1)}{f(x+n)} &= \frac{F_n\alpha + F_{n+1}\beta}{F_{n-1}\alpha + F_n\beta}\\
&= \frac{\alpha + \frac{F_{n+1}}{F_n}\beta}{\frac{F_{n-1}}{F_n}\alpha + \beta}\\
&\to \frac{\alpha + \phi\beta}{\frac{\alpha}{\phi} + \beta} = \phi,
\end{aligned}$$

o que prova o corolário. □

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Boy74] Carl Benjamin Boyer. *História da Matemática*. Blucher, São Paulo, 1974.

[Dun97] R. A. Dunlap. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. World Scientific, Hackensack, 1997.

[Han12] Jeong Soon et al. Han. On fibonacci functions with fibonacci numbers. *Advances in Difference Equations*, 2012(1):126, 2012.

[Hog69] Verner E. Hoggatt. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Houghton Mifflin, Boston, 1969.

[Liv06] Mario Livio. *Razão Áurea: A História de fi, um número surpreendente*. Record, Rio de Janeiro, 2006.

[San05] José Plínio de Oliveira Santos. *Introdução à Teoria dos Números*. Coleção matemática universitária. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.