

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

RICARDO ALBUQUERQUE FERNANDES

**ACOPLAMENTO MED-MEF ASSOCIADO A MODELOS DA
MECÂNICA DA FRATURA COESIVA**

**MACEIÓ
2012**

RICARDO ALBUQUERQUE FERNANDES

**ACOPLAMENTO MED-MEF ASSOCIADO A MODELOS DA
MECÂNICA DA FRATURA COESIVA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages
Coorientador: Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior

**MACEIÓ
2012**

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

F636a Fernandes, Ricardo Albuquerque.
Acoplamento MED-MEF associado a modelos da mecânica da fratura coesiva / Ricardo Albuquerque Fernandes. -- 2012.
134 f. : il., tabs., graf.

Orientador: Eduardo Nobre Lages.
Co-orientador: Adeildo Soares Ramos Júnior.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil : Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2012.

Bibliografia: f. 127-134.

1. Acoplamento MEF-MED. 2. Fratura coesiva – Mecânica. 3. Meios contínuos e discretos. I. Título.

CDU: 624.13



Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC
Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil – PPGECC



**ACOPLAMENTO MED-MEF ASSOCIADO A MODELOS DA
MECÂNICA DA FRATURA COESIVA**

RICARDO ALBUQUERQUE FERNANDES

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 06 do mês de novembro do ano de 2012.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages
Orientador – CTEC/UFAL

Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior
CTEC/UFAL

Prof. Dr. João Paulo Lima Santos
CTEC/UFAL

Prof. Dr. Anderson Moraes
CENPES/PETROBRAS

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois sem Ele nada seria possível.

À minha família, em especial aos meus pais e avôs, pela educação que me deram e pela motivação e conselhos que recebi, dando-me segurança para seguir sempre em frente em busca dos meus objetivos. Aos meus irmãos, cunhados e sobrinhos por toda a amizade, companheirismo e por tudo que representam em minha vida.

À Catarina, por todo o carinho, apoio, compreensão e por me dar forças e encorajar em todos os momentos.

Ao professor Eduardo Nobre, pela oportunidade de, novamente, ser seu orientado em mais um trabalho desenvolvido. Pela atenção, dedicação e motivação transmitidas durante toda a minha vida acadêmica.

Ao professor Adeildo Ramos Júnior, pelas oportunidades, orientações e por todos os estímulos e ideias que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

A Diogo Cintra e Luciana Vieira, por todo o suporte, atenção e conhecimentos transmitidos ao longo desse período.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC/UFAL), pela formação durante o mestrado, em especial aos professores Eduardo Toledo e João Paulo Santos, pelas sugestões feitas na defesa desta dissertação.

À Petrobras, pelo apoio financeiro, e em particular, aos engenheiros Cláudio Amaral e Edgard Poiate, pelas contribuições nas aplicações numéricas desenvolvidas, e, ao geólogo Anderson Moraes, pelas sugestões e contribuições técnicas na área de Geologia Estrutural.

A todos que fazem parte do Laboratório de Computação Científica e Visualização (LCCV/UFAL), pela amizade, companheirismo, momentos de alegria e descontração. Ao coordenador William Wagner, por toda a infraestrutura e apoio disponibilizados, contribuindo para minha formação e para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao apoio financeiro da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis – ANP, da financiadora de Estudos e Projetos – FINEP e do Ministério da Ciência e Tecnologia – MCT por meio do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor de Petróleo e Gás – PRH-ANP/MCT.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho propõe a modelagem computacional do comportamento mecânico bidimensional de meios com abordagens contínua, relacionada ao Método dos Elementos Finitos (MEF) associado a modelos da Mecânica da Fratura Coesiva (MFC) e discreta, através do Método dos Elementos Discretos (MED). O MEF consiste em uma ferramenta numérica bastante utilizada na determinação de soluções aproximadas para problemas da Mecânica do Contínuo, envolvendo fenômenos com não linearidades físicas e geométricas associadas e com comportamento quase-estático ou dinâmico, possuindo aplicações práticas já consagradas em diversas áreas do campo científico e industrial. Por outro lado, o MED tem desenvolvimento mais recente e vem sendo cada vez mais utilizado no tratamento de problemas de natureza discreta envolvendo fenômenos de contato, impacto, fragmentação e fluxo de sistemas particulados. Com foco na análise de problemas que envolvem interações entre tais naturezas, implementa-se uma estratégia de acoplamento MEF-MED para solução do problema em sub-regiões, onde o MEF é utilizado na modelagem de processos de nucleação e propagação de fraturas em meios contínuos e o MED é empregado na modelagem de meios granulares por natureza, ou assim concebidos, em comportamento transiente. A possibilidade de abertura e propagação de fraturas é considerada através da utilização de modelos da MFC, incorporados intrinsecamente na formulação do MEF através de interfaces inseridas nas arestas internas da malha de elementos finitos. Exemplos ilustrativos são apresentados e discutidos visando-se validar a formulação e a implementação propostas.

Palavras-chave: Acoplamento MEF-MED. Mecânica da Fratura Coesiva. Meios contínuos e discretos.

ABSTRACT

This work proposes the computational modeling of two-dimensional media mechanical behavior with a continuous approach, related to the Finite Element Method (FEM) associated with Cohesive Fracture Mechanics (CFM) models, and a discrete approach, using the Discrete Element Method (DEM). The FEM consists in a numerical tool widely used to achieve approximate solutions of Continuum Mechanics problems, involving physical and geometrical nonlinearities phenomena with quasi-static or dynamic behaviors, having already established practical applications in many areas of science and industry. On the other hand, DEM has more recent development and has been increasingly used to model discrete nature problems involving contact, impact and fragmentation phenomena and flow of particulate systems. Focused on analysis of problems with interactions between these natures, a FEM-DEM coupling code is developed to solve the problem by a sub-region scheme where the FEM is used on modeling of nucleation process and crack propagation in continuous media, and DEM is employed to model granular media, whether due its nature or its conception, in a transient behavior. The possibility of opening and propagation of cracks is considered by using CFM models, intrinsically incorporated into the FEM formulation through interfaces inserted into the inner edges of the finite element mesh. Illustrative examples are presented and discussed in order to validate the proposed formulation and implementation.

Keywords: FEM-DEM coupling technique. Cohesive Fracture Mechanics. Continuous and discrete media.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Fenômenos relacionados à Mecânica da Fratura: (a) Falha de San Andreas na Califórnia, EUA; (b) Trinca de 0,2 polegadas encontrada no sistema de propulsão do ônibus espacial Discovery.....	18
Figura 1.2 – Três modos de carregamento que podem ser aplicados a uma fratura.....	20
Figura 1.3 – Representação da zona coesiva para caso de fratura no modo I.....	21
Figura 1.4 – Tratamento de meios granulares e contínuos através do Método dos Elementos Discretos e do Método dos Elementos Finitos, respectivamente.....	23
Figura 2.1 – Associação entre elementos finitos e coesivos em um domínio contínuo.....	31
Figura 2.2 – Tração normal em um processo de separação puramente normal ($\Delta uT = 0$).	33
Figura 2.3 – Gráficos das tensões interfaciais para o modelo coesivo de Xu e Needleman (1993): (a) Trações normais para $\Delta uT = 0$; (b) Trações tangenciais para $\Delta uN = 0$	35
Figura 2.4 – Gráficos das tensões interfaciais para o modelo PPR (Park <i>et al.</i> , 2009): (a) Trações normais para $\Delta uT = 0$; (b) Trações tangenciais para $\Delta uN = 0$	38
Figura 2.5 – Regiões de interação coesiva no modelo PPR.....	39
Figura 2.6 – Relações de descarga/recarga para o modelo PPR.....	40
Figura 3.1 – Discretização espacial através do MEF: (a) Domínio do problema; (b) Discretização através de uma malha de elementos finitos; (c) Nós de malha; (d) Elementos finitos.	42
Figura 3.2 – Descrição Lagrangeana do movimento de um corpo arbitrário no sistema cartesiano.	43
Figura 3.3 – Incorporação da condição de contorno coesiva à equação de movimento.....	48
Figura 3.4 – Mapeamento de um elemento coesivo linear de quatro nós.	53
Figura 3.5 – Mapeamento paramétrico de um elemento coesivo linear de quatro nós.	54
Figura 3.6 – Modelo simplificado para verificação de grandes deslocamentos.....	61
Figura 3.7 – Comparação dos resultados numéricos e analíticos em regime de grandes deslocamentos.	62
Figura 3.8 – Modelos simplificados para verificação de trações interfaciais coesivas para os casos de: (a) separação puramente normal, (b) separação puramente tangencial.	63
Figura 3.9 – Resultados numéricos para as trações interfaciais (separação puramente normal).	64
Figura 3.10 – Resultados numéricos para as trações interfaciais (separação puramente tangencial).....	65
Figura 3.11 – Chapa com trinca inicial e tracionada proposta por Xu e Needleman.....	66
Figura 3.12 – Condições de contorno para simetria e discretização utilizada.	67
Figura 3.13 – Evolução do fraturamento da chapa tracionada.	69

Figura 3.14 – Detalhamento do comparativo do padrão de fraturamento para o tempo de $9 \mu\text{s}$	70
Figura 3.15 – Comparativo do padrão de fraturamento para o tempo de $10,6 \mu\text{s}$	70
Figura 3.16 – Comparativo do padrão de fraturamento para o tempo de $8 \mu\text{s}$	71
Figura 4.1 – Processo cíclico caracterizando as etapas básicas de uma análise numérica com o MED.....	73
Figura 4.2 – Sistemas de coordenadas global e local.	74
Figura 4.3 – Relações de interação durante o contato entre as partículas p e q	76
Figura 4.4 – Modelo Hooke de força-deslocamento para as direções normal e tangencial.	80
Figura 4.5 – Modelo Kelvin de força-deslocamento para as direções normal e tangencial.	81
Figura 4.6 – Definição do tamanho das células para o Método do Mapeamento Direto.	83
Figura 4.7 – Ilustração do Método de Mapeamento Direto.....	84
Figura 5.1 – Contato entre uma partícula de forma circular e uma aresta de contorno da malha de elementos finitos.	86
Figura 5.2 – Distribuição das forças de interação no contato entre a partícula p e a aresta e ..	88
Figura 5.3 – Influência do fraturamento na atualização do contorno: (a) malha original; (b) aparecimento de trações coesivas; (c) falha total na aresta de interface formando um novo contorno.....	91
Figura 5.4 – Fluxograma mostrando uma visão geral do acoplamento MEF-MED.	92
Figura 5.5 – Modelo dinâmico para verificação do contato bloco-partícula.....	94
Figura 5.6 – Solução analítica dos deslocamentos partícula-bloco para o modelo de contato adotado.	95
Figura 5.7 – Comparação entre as soluções analíticas e os resultados numéricos obtidos durante o intervalo de tempo que caracteriza o contato.....	96
Figura 5.8 – Janela operacional para definição de peso de fluido de perfuração.....	98
Figura 5.9 – Tendência de fraturamento em um poço vertical com $\sigma_v > \sigma_H > \sigma_h$	98
Figura 5.10 – Definição da geometria e simetria do domínio do problema.....	99
Figura 5.11 – Condições de contorno do problema.....	100
Figura 5.12 – Domínio discretizado do problema.	101
Figura 5.13 – Definição do tamanho dos elementos quadriláteros da malha de elementos finitos.	102
Figura 5.14 – Histórico do comportamento mecânico da formação sem elementos coesivos.	104
Figura 5.15 – Histórico da coordenada vertical do ponto superior da borda do poço.....	105
Figura 5.16 – Histórico da tensão circunferencial do ponto superior da borda do poço.	106
Figura 5.17 – Histórico do comportamento mecânico da formação com elementos coesivos.	107

Figura 5.18 – Histórico das coordenadas verticais do ponto superior da borda no poço para os lados direito e esquerdo do fraturamento.....	108
Figura 5.19 – Histórico dos deslocamentos horizontais do ponto superior da borda no poço para os lados direito e esquerdo do fraturamento.	108
Figura 5.20 – Tensões circunferenciais no ponto superior da borda no poço para os lados direito e esquerdo do fraturamento.	109
Figura 5.21 – Estágios da formação de domos de sal.....	110
Figura 5.22 – Abordagem para a modelagem computacional MEF-MED da formação de domos salinos.....	112
Figura 5.23 – Definição da geometria do domínio do problema.....	112
Figura 5.24 – Condições de contorno do problema.....	113
Figura 5.25 – Domínio discretizado do problema.	114
Figura 5.26 – Estágios da simulação numérica para a formação da estrutura dômica.	118
Figura 5.27 – Evolução das tensões horizontais no maciço.	121
Figura 5.28 – Localização dos pontos de interesse na configuração indeformada do modelo.	122

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Regra de integração gaussiana utilizando três pontos de Gauss para elementos coesivos lineares.	55
Tabela 3.2 – Valores dos parâmetros geométricos e do material.	61
Tabela 3.3 – Valores das propriedades do material.	63
Tabela 3.4 – Valores dos parâmetros do modelo PPR utilizados.	63
Tabela 3.5 – Informações geométricas e do material.	67
Tabela 3.6 – Informações do modelo coesivo.	67
Tabela 3.7 – Informações temporais.	67
Tabela 5.1 – Dados do bloco.	95
Tabela 5.2 – Dados da partícula e do modelo de contato.	95
Tabela 5.3 – Informações referentes à geometria do modelo.	100
Tabela 5.4 – Caracterização do material.	102
Tabela 5.5 – Caracterização do modelo de contato Kelvin.	103
Tabela 5.6 – Caracterização do modelo coesivo PPR.	103
Tabela 5.7 – Informações referentes à geometria do modelo.	114
Tabela 5.8 – Caracterização dos materiais.	116
Tabela 5.9 – Caracterização do modelo de contato Kelvin.	116
Tabela 5.10 – Caracterização do modelo coesivo PPR.	117
Tabela 5.11 – Resultados da análise qualitativa de tensões nos pontos de interesse.	122

LISTA DE SIGLAS E ABREVIACOES

ANSYS®	<i>Software comercial de Método dos Elementos Finitos</i>
C++	Linguagem de Programaco Orientada a Objetos
DEMOOP	<i>Discrete Element Method Oriented Object Programming</i>
EDEM®	<i>Software comercial de Método dos Elementos Discretos</i>
FEMcode	<i>Finite Element Method Code</i>
FLT	Formulao Lagrangeana Total
MDC	Método das Diferenças Centrais
MED	Método dos Elementos Discretos (<i>Discrete Element Method</i>)
MEF	Método dos Elementos Finitos (<i>Finite Element Method</i>)
MFC	Mecânica da Fratura Coesiva (<i>Cohesive Fracture Mechanics</i>)
MFEP	Mecânica da Fratura Elastoplástica
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
MRD	Método de Relaxaco Dinâmica
MTOOL	Pré-processador gráfico para modelos de elementos finitos 2D
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
NBS	<i>No Binary Search Algorithm</i>
ParaView	<i>Software código aberto de visualizao de dados científicos</i>
PMMA	Polimetilmetacrilato
POO	Programaco Orientada a Objetos
PPR	Potencial polinomial d Park, Paulino e Roesler
PreDEM	<i>Discrete Element Method Preprocessor</i>
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
Xdmf	<i>Extensible Data Model and Format</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Constante de amortecimento de Rayleigh
$\bar{\mathbf{B}}$	Matriz que mapeia os deslocamentos relativos locais por meio dos deslocamentos globais do elemento coesivo
\bar{b}_i	Componente de força volumétrica
B_{NL}^k	Matriz que mapeia o tensor de deformações de Green-Lagrange por meio de deslocamentos nodais
C	Matriz de amortecimento
c_N	Coefficiente de amortecimento normal
c_T	Coefficiente de amortecimento tangencial
d_i^k	Componente de deslocamento nodal
E	Módulo de elasticidade longitudinal
E_{ij}	Componente do tensor de deformações de Green-Lagrange
F_{ij}	Componente do tensor gradiente de deformações
f_N	Força de interação na direção normal
f_T	Força de interação na direção tangencial
$coh\mathbf{F}$	Vetor de forças coesivas
$ext\mathbf{F}$	Vetor de forças externas
$int\mathbf{F}$	Vetor de forças internas
g	Aceleração da gravidade
\mathbf{I}	Matriz identidade
I_{eq}	Momento de inércia equivalente para o contato
I^p	Momento principal de inércia da partícula p
J	Determinante do tensor gradiente de deformações
\bar{J}	Determinante do jacobiano da transformação
k_{max}	Maior valor de rigidez associado a um contato
k_N	Rigidez normal
k_T	Rigidez tangencial
\mathbf{L}	Matriz que mapeia os deslocamentos relativos por meio de deslocamentos globais

L_m	Comprimento médio do elemento coesivo na configuração deformada
l_{min}	Menor distância entre nós adjacentes de um elemento
m	Expoente adimensional na direção normal (PPR, 2009)
\mathbf{M}	Matriz de massa
m_{eq}	Massa equivalente para o contato
m_i	Componente da matriz de massa diagonalizada
m_{min}	Menor valor de massa associado a uma partícula
m^p	Massa da partícula p
n	Expoente adimensional na direção tangencial (PPR, 2009)
\mathbf{N}	Matriz das funções de interpolação; versor normal à interface
n_i	Componente do versor normal à superfície deformada
N^k	Funções de interpolação nodal
q	Parâmetro de acoplamento (XU e NEEDLEMAN, 1993)
r	Parâmetro de acoplamento (XU e NEEDLEMAN, 1993)
\mathbf{R}	Vetor de forças desequilibradas
\mathbf{R}^p	Vetor de forças e momentos resultantes no centróide da partícula p
R^p	Raio da partícula p
$amt\mathbf{R}^p$	Vetor de forças e momentos de amortecimento na partícula p
$ext\mathbf{R}^p$	Vetor de forças e momentos aplicados devido a cargas externas na partícula p
$int\mathbf{R}^p$	Vetor de forças e momentos resultantes de interações na partícula p
S_{ij}	Componente do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff
\mathbf{T}	Versor tangencial à interface
t	Instante de tempo
t_N	Tração coesiva interfacial na direção normal
t_T	Tração coesiva interfacial na direção tangencial
\bar{t}_i	Componentes de trações prescritas
t_i^c	Componente de trações coesivas
t_N^v	Tração interfacial de descarga/recarga na direção normal (PPR, 2009)
t_T^v	Tração interfacial de descarga/recarga na direção tangencial (PPR, 2009)

\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos
u_i	Componente de deslocamento
u_{rN}	Componente normal de deslocamento relativo
u_{rT}	Componente tangencial de deslocamento relativo
\bar{u}_i	Componente de deslocamento prescrito
$\dot{\mathbf{u}}$	Vetor de velocidades
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vetor de acelerações
\ddot{u}_i	Componente de aceleração
u^g	Deslocamentos globais do elemento coesivo
\mathbf{u}_r	Vetor de deslocamento relativo
V_c	Maior velocidade de propagação de onda em um elemento
v_{rN}	Componente normal de velocidade relativa
v_{rT}	Componente tangencial de velocidade relativa
\mathbf{v}_r	Vetor de velocidade relativa
w_i	Componente de peso utilizado na integração Gaussiana
x_i	Componente de coordenada cartesiana
α	Parâmetro de forma na direção normal (PPR, 2009)
α_{nvR}	Coefficiente de amortecimento não viscoso rotacional
α_{nvT}	Coefficiente de amortecimento não viscoso translacional
α_v	Parâmetro de forma de descarga/recarga na direção normal (PPR, 2009)
α_{vR}	Coefficiente de amortecimento viscoso rotacional
α_{vT}	Coefficiente de amortecimento viscoso translacional
$\bar{\alpha}$	Coefficiente de cisalhamento relativo à rigidez normal (NEEDLEMAN, 1990)
β	Parâmetro de forma na direção tangencial (PPR, 2009)
β_v	Parâmetro de forma de descarga/recarga na direção tangencial (PPR, 2009)
Γ_c	Superfícies com ação de forças coesivas
Γ_N	Constante de energia na direção normal (PPR, 2009)
Γ_T	Constante de energia na direção tangencial (PPR, 2009)
Γ_u	Superfícies com prescrição de deslocamentos

Γ_σ	Superfícies com prescrição de tensões
δ_{ij}	Operador delta de Kronecker
δ_N	Comprimento de falha na direção normal
δ_{Nc}	Abertura crítica na direção normal (PPR, 2009)
δ_T	Comprimento de falha na direção tangencial
δ_{Tc}	Abertura crítica na direção tangencial (PPR, 2009)
$\bar{\delta}_N$	Abertura final conjugada na direção normal (PPR, 2009)
$\bar{\delta}_T$	Abertura final conjugada na direção tangencial (PPR, 2009)
Δt	Incremento de tempo
Δt_{cr}	Incremento de tempo crítico
Δu_i	Componente de abertura interfacial coesiva
Δu_N	Separação interfacial na direção normal
Δu_{Nmax}	Separação interfacial máxima na direção normal durante todo o histórico de carregamento (PPR, 2009)
Δu_T	Separação interfacial na direção tangencial
Δu_{Tmax}	Separação interfacial máxima na direção tangencial durante todo o histórico de carregamento (PPR, 2009)
ε_{ij}	Componente do tensor de pequenas deformações
η	Coordenada paramétrica
θ	Matriz de transformação linear de rotação
λ_N	Indicador de elasticidade inicial na direção normal (PPR, 2009)
λ_T	Indicador de elasticidade inicial na direção tangencial (PPR, 2009)
ν	Coefficiente de Poisson
ξ	Coordenada paramétrica
$\bar{\rho}$	Densidade do material
σ_{ij}	Componente do tensor de tensões de Cauchy
σ_{max}	Tensão máxima de tração
τ_{max}	Tensão máxima de cisalhamento
Φ	Função potencial de fratura coesiva
Φ_N	Energia do modo de fratura I (PPR, 2009)
Φ_{sep}	Trabalho total de separação interfacial

Φ_T Energia do modo de fratura II (PPR, 2009)

Ω Domínio do problema

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Aspectos da Mecânica da Fratura	18
1.2	Natureza do Meio e o Acoplamento MEF-MED	21
1.3	Objetivos	25
1.4	Estrutura da Dissertação	26
2	MODELOS DA MECÂNICA DA FRATURA COESIVA	28
2.1	Primeiras Teorias da Fratura Coesiva	28
2.2	Vantagens da Utilização de Modelos Coesivos	29
2.3	Classificação dos Modelos Coesivos	30
2.4	Modelos Coesivos Relevantes	31
2.4.1	Modelo Polinomial de Needleman	31
2.4.2	Modelo Exponencial de Xu e Needleman	34
2.4.3	Modelo Polinomial de Park, Paulino e Roesler	35
3	MODELAGEM NUMÉRICA DE MEIOS CONTÍNUOS	41
3.1	Introdução	41
3.2	Formulação Matemática	42
3.3	Incorporação de Forças Coesivas	47
3.4	Implementação Computacional	48
3.4.1	Discretização Espacial do Domínio.....	49
3.4.2	Vetor de Forças Coesivas	52
3.4.3	Solução de Problemas Quase-estáticos.....	55
3.4.4	Solução de Problemas Dinâmicos	58
3.5	Verificações	60
3.5.1	Análise Mecânica com Grandes Deslocamentos.....	60
3.5.2	Trações Interfaciais Coesivas	62
3.5.3	Chapa Tractionada	65
4	MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS	72
4.1	Introdução	72
4.2	Equações de Movimento	74
4.3	Deslocamentos e Velocidades Relativas	75
4.4	Amortecimentos Globais	77
4.5	Integração Numérica	78

4.6	Relações Força-Deslocamento.....	79
4.6.1	Modelo Hooke	80
4.6.2	Modelo Kelvin.....	81
4.7	Busca por Contatos	82
4.7.1	Método da Verificação Direta	82
4.7.2	Método do Mapeamento Direto.....	83
5	ACOPLAMENTO MEF-MED	85
5.1	Caracterização do Contato.....	85
5.2	Cálculo das Forças de Interação.....	87
5.3	Estratégia Proposta.....	89
5.4	Verificação do Contato Bloco-Partícula	93
5.5	Aplicações Numéricas	96
5.5.1	Estabilidade de Poço.....	96
5.5.1.1	Modelagem Computacional	99
5.5.1.2	Resultados	103
5.5.2	Geologia Estrutural.....	110
5.5.2.1	Modelagem Computacional	111
5.5.2.2	Resultados	117
6	CONCLUSÃO	124
6.1	Considerações Finais	124
6.2	Propostas para Trabalhos Futuros.....	126
	REFERÊNCIAS	127

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo faz-se uma contextualização sobre aspectos da Mecânica da Fratura, apresentando um breve histórico de trabalhos expressivos desenvolvidos na área, e sobre a modelagem de problemas de engenharia de natureza contínua e discreta, destacando os métodos numéricos mais apropriados para o tratamento de cada caso. Comenta-se ainda sobre a análise de problemas que utilizam o acoplamento MEF-MED, sobretudo abordagens onde as diferentes naturezas do meio constituem subdomínios do problema, destacando trabalhos pioneiros e recentes desenvolvidos na área. Por fim, são apresentados os objetivos e a estruturação dos capítulos da dissertação.

1.1 Aspectos da Mecânica da Fratura

A Mecânica da Fratura é uma área do conhecimento que possibilita a representação de mecanismos de falhas discretas de estruturas e materiais de engenharia. Segundo Amorim (2007), fenômenos relacionados à Mecânica da Fratura têm despertado grande interesse científico visto que esses podem ser observados na própria natureza, onde as falhas e fraturas constituem os tipos de estruturas mais frequentes em termos geológicos, ou até em sistemas de alto padrão tecnológico (Figura 1.1).

Figura 1.1 – Fenômenos relacionados à Mecânica da Fratura: (a) Falha de San Andreas na Califórnia, EUA; (b) Trinca de 0,2 polegadas encontrada no sistema de propulsão do ônibus espacial Discovery.



Fonte: (a) TERRA, Lygia; COELHO, Marcos Amorim. Geografia geral: o espaço natural e socioeconômico. São Paulo: Moderna, 2005, p. 175. (b) NASA.

Estimar os processos de falha representativos de fenômenos reais é uma tarefa bastante desafiadora. A busca por modelos realísticos que permitam representar a evolução do dano mecânico do material desde sua inicialização apenas se torna possível devido a pesquisas precursoras nesse ramo da ciência.

Na Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), alguns trabalhos clássicos são destacados na literatura. Kirsch (1898 apud TIMOSHENKO e GOODIER, 1970) propôs uma teoria para definição do fator de concentração de tensões ao analisar tensões nas bordas de um furo circular. Mais tarde, Inglis (1913 apud MIRANDA, 2003) generalizou o fator de concentração de tensões para um furo elíptico. Griffith (1921, 1924 apud BROEK, 1984) formalizou o conceito de taxa de energia liberada por ponta de trinca, um dos primeiros critérios que caracterizam o início da propagação de fratura. Irwin (1957 apud MIRANDA, 2003) introduziu o conceito de fator de intensidade de tensão, através do qual o campo de tensões para diversos problemas práticos de engenharia pode ser obtido, assim como outro critério de definição do início da propagação da fratura foi viabilizado. Williams (1957 apud SAOUMA, 2000) chegou aos mesmos resultados de Irwin (1957) através do emprego do método de separação de variáveis.

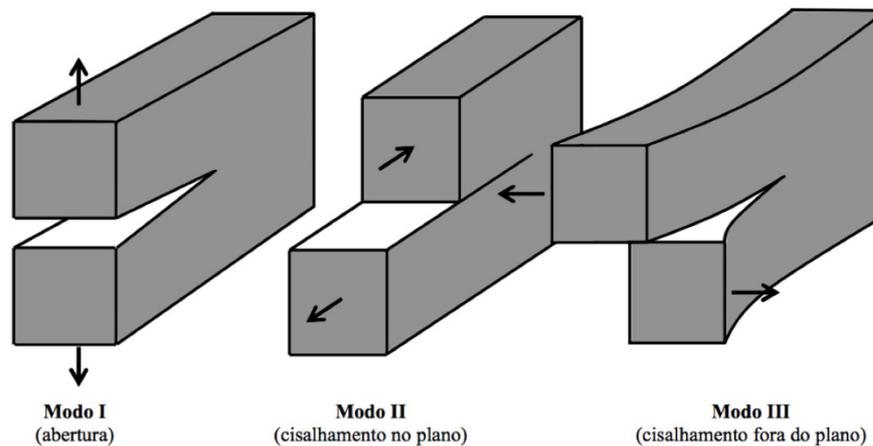
O aparecimento de deformações plásticas próximas à ponta da trinca é tratado através da Mecânica da Fratura Elastoplástica (MFEP). Nessa linha, destacam-se os trabalhos de Rice (1968), Hutchinson (1968) e de Rice e Rosengren (1968). O primeiro trabalho formulou a Integral J, que permite a determinação de mais uma condição inicial de avanço de trinca, e os outros descreveram os Campos HRR, permitindo a determinação de singularidades dos campos de tensão e deformação nas proximidades da ponta da trinca e a especificação de uma zona de domínio dos resultados da Integral J.

No entanto, a MFLE e a MFEP trazem algumas limitações como as singularidades nos campos de tensão e deformação, a necessidade de definição prévia de velocidades e direções de faturamento, e o fato de não se poder representar processos de abertura de falhas. Como alternativa a essas linhas mais tradicionais, Dugdale (1960) e Barenblatt (1959, 1962) apresentaram os fundamentos da Mecânica da Fratura Coesiva (MFC). Mais tarde, Needleman (1987) utilizou esses trabalhos para formular um modelo polinomial puramente contínuo que empregava forças coesivas de interface, juntamente com elementos finitos, através de uma estrutura unificada que descrevia a existência de uma parcela de trabalho coesivo na expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Amorim (2007) afirmou que

a relevância do trabalho de Needleman (1987) é tamanha, de modo que a grande maioria dos modelos de fratura coesiva que o sucedeu utiliza a mesma estrutura unificada proposta em seu trabalho. Como alternativa à limitação do trabalho de Needleman (1987), que desconsiderava a possibilidade de grandes deslocamentos relativos na direção tangencial, Xu e Needleman (1993) propuseram um modelo coesivo exponencial, permitindo a análise de problemas onde a completa separação interfacial pudesse ocorrer também na direção tangencial. Dessa forma, Xu e Needleman (1994) simularam a ramificação de trincas como resultado da solução de um problema de valor de contorno inicial. Park *et al.* (2009) apresentaram um modelo coesivo polinomial, onde mudanças do modo I para o modo II de fratura ocorrem monotonicamente em relação aos caminhos de separação, demonstrando uma maior consistência em relação a modelos propostos em trabalhos anteriores.

Segundo Anderson (1995), existem três tipos de carregamento que uma fratura pode estar submetida, conforme ilustra a Figura 1.2. No modo I, o carregamento principal é aplicado na direção perpendicular ao plano de falha, criando uma tendência de abertura da fratura. O modo II corresponde a um carregamento cisalhante no plano e tende ao deslizamento relativo entre as superfícies de falha. O modo III representa um cisalhamento fora do plano de falha. O faturamento de um material pode acontecer devido a carregamentos isolados em qualquer desses modos, ou ainda, devido à combinação de dois ou três modos.

Figura 1.2 – Três modos de carregamento que podem ser aplicados a uma fratura.

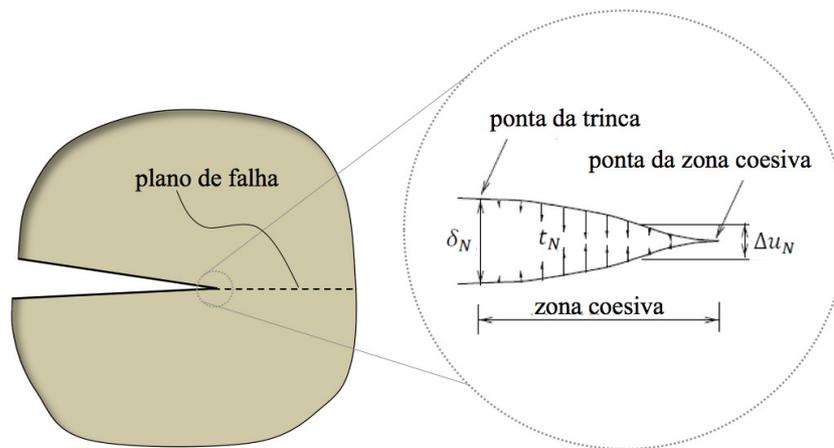


Fonte: Adaptado de Anderson (1995).

O conceito de fratura coesiva é ilustrado na Figura 1.3 para o modo I de fratura (separação puramente normal), onde se assume que a zona coesiva ao longo do plano de falha está presente na frente da ponta da trinca. Segundo Zhang (2003), dentro do âmbito da zona coesiva, pontos que eram idênticos quando o material estava intacto sofrem uma separação

normal Δu_N devido à influência de um elevado campo de tensões na vizinhança da ponta da trinca. Devido a essa separação, surgem trações interfaciais t_N de ordem coesiva que são calculadas em função da separação interfacial Δu_N , definida por uma lei constitutiva da superfície de zona coesiva. De um modo geral, tais leis indicam que, com o crescimento da separação interfacial, as trações primeiramente crescem até alcançarem um valor limite que caracteriza a resistência do material, e a partir desse ponto decrescem, até que o comprimento característico de abertura δ_N seja alcançado, caracterizando a falha completa do material.

Figura 1.3 – Representação da zona coesiva para caso de fratura no modo I.



Fonte: Adaptado de Zhang (2003).

Diante do que se foi comentado, os conceitos da MFC constituem uma forma mais natural para simulação dos mecanismos de falha, sendo, portanto, a abordagem utilizada neste trabalho. Dentre os modelos de zona coesiva, adotam-se os intrínsecos, pois possuem um critério de início de propagação de trincas internamente incorporado (KUBAIR e GEUBELLE, 2003) e não necessitam de alterações na estrutura topológica da malha de elementos finitos durante a simulação numérica (CELES *et al.*, 2005).

1.2 Natureza do Meio e o Acoplamento MEF-MED

Com o crescente avanço tecnológico e a conseqüente sofisticação de obras e projetos de engenharia, os desafios envolvidos em problemas dessa natureza tornam-se cada vez mais complexos, demandando técnicas e procedimentos mais avançados para a sua resolução. Em grande parte desses problemas, buscar soluções analíticas implica na imposição de simplificações excessivamente restritivas, podendo dessa forma se distanciar do comportamento do fenômeno em estudo. Desse modo, o uso de ferramentas numéricas para a

determinação de soluções aproximadas para tais problemas torna-se cada vez mais evidente, sendo amplamente utilizado e possuindo aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento.

No campo científico, os materiais podem ser analisados em diferentes níveis de detalhamento. Em um nível atômico, a estrutura do material abrange a interação entre átomos e a formação de ligações e moléculas. Em um escopo microscópico, aglomerações atômicas e moleculares podem ser observadas com o auxílio de um microscópio, assim como a formação de estruturas cristalinas, moleculares e amorfas. Por outro lado, estruturas macroscópicas de um material podem ser vistas a olho nu e caracterizam o comportamento do material em serviço (CALLISTER JR., 2007).

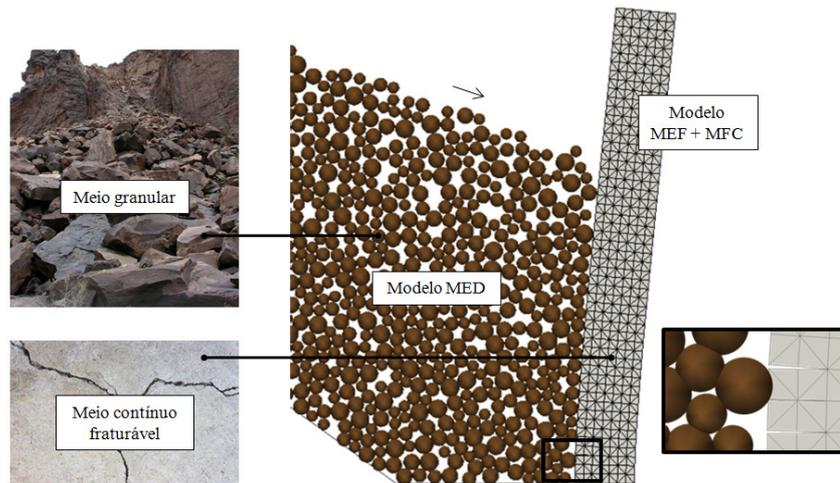
Na natureza, fazendo uso de uma abordagem macroscópica, os problemas de engenharia podem ser classificados em basicamente dois grupos distintos: os problemas de natureza contínua e os problemas de natureza discreta.

Para os problemas de natureza contínua, apesar de a microestrutura dos materiais ser considerada descontínua, geralmente não se faz necessário considerar tal hipótese visto que se tem interesse na análise de grandes porções do material, bem maiores que o nível microscópico de suas moléculas. Na modelagem computacional desse tipo de problema, costuma-se utilizar o Método dos Elementos Finitos (MEF), que representa o estado da arte para a solução numérica de problemas de engenharia de natureza contínua (MUNJIZA, 2004).

Por outro lado, o MEF apresenta alguns desafios numéricos quando empregado na análise de meios sujeitos a grandes deformações. Observa-se na literatura que na análise mecânica de problemas de engenharia com características de não linearidade física, sobretudo com comportamento viscoso acentuado, ao se utilizar o MEF em uma abordagem convencional, os elementos constituintes da malha, que inicialmente apresentam níveis de qualidade razoável, podem eventualmente apresentar um alto grau de distorção geométrica, o que pode acabar comprometendo a qualidade da solução numérica a ser obtida, necessitando, por exemplo, recorrer a técnicas adaptativas para garantia da consistência numérica (SANTOS, 2011). O Método dos Elementos Discretos (MED) pode ser explorado na discretização dessas regiões, pois possui hipóteses básicas mais adequadas ao tratamento de meios discretos, descrevendo melhor os problemas relacionados à interação e movimento individual de partículas (MUNJIZA, 2004).

Alguns problemas de engenharia envolvem a interação entre meios contínuos e discretos em sua concepção macroscópica, como é o caso, por exemplo, de um estudo do nível do impacto provocado por uma corrida de detritos em uma estrutura de contenção. Tendo em vista os conceitos supracitados, em análises numéricas dessa natureza, considera-se fisicamente mais apropriado que o meio rochoso, devido a seu aspecto granular e ao fluxo natural de seus constituintes, seja idealizado como um meio discreto, enquanto que a estrutura, por seu caráter monolítico, seja descrita por modelos contínuos, podendo ser representada por uma malha de elementos finitos, onde modelos da MFC associados ao MEF permitem a abertura e propagação de fraturas no meio contínuo. Dessa forma, cada método numérico é utilizado para tratar porções do problema que lhe são mais apropriadas (Figura 1.4), conduzindo a comportamentos e resultados mais próximos da realidade.

Figura 1.4 – Tratamento de meios granulares e contínuos através do Método dos Elementos Discretos e do Método dos Elementos Finitos, respectivamente.



Fonte: Autor (2012).

Os primeiros estudos relacionados à combinação entre o MEF e o MED iniciaram com Munjiza e o primeiro código computacional MEF-MED funcional (Programa RG, escrito em C++) foi desenvolvido por Munjiza em 1990. Originalmente, tais estudos incorporavam deformações elastoplásticas finitas acopladas a modelos de fratura e fragmentação (XIANG *et al.*, 2009). Na literatura é possível encontrar vários trabalhos recentes que abordam o acoplamento MEF-MED para análises de meios com comportamentos mecânicos diferenciados, análises multi-escala e/ou problemas de fragmentação e fraturamento, por exemplo. A seguir são listados alguns desses trabalhos, destacando suas temáticas e principais contribuições.

Na área de modelagem de fraturas e fragmentação, Munjiza e John (2002) analisaram a sensibilidade à variação do tamanho da malha em algoritmos para modelagem progressiva de fratura e fragmentação. Paavilainen *et al.* (2009) apresentaram um método que combina MEF-MED para a análise de fraturas múltiplas em vigas, que são modeladas com o MEF, utilizando a teoria não linear de Timoshenko e modelos de fratura coesiva. Nesse trabalho, os elementos de viga são utilizados para agrupar os elementos discretos, onde as forças de contato entre as vigas em colisão são calculadas usando o MED. Mahabadi *et al.* (2010) utilizaram ensaios experimentais para validar a simulação numérica do ensaio brasileiro de compressão diametral em corpos de prova de granito. Os autores utilizaram uma modelagem numérica acoplada MEF-MED baseada no Y-code proposto por Munjiza (2004).

Entre os trabalhos recentes relacionados à modelagem multi-escala de materiais, destacam-se os trabalhos de Rojek e Oñate (2007), que propuseram uma análise multi-escala empregando o MED e o MEF em diferentes subdomínios de um mesmo problema; Rousseau *et al.* (2009), que estudaram a análise de impacto em estruturas de concreto utilizando elementos discretos para a modelagem da região próxima aos impactos e elementos finitos no restante do domínio; e Nitka *et al.* (2011), que consideraram uma abordagem multi-escala para estudo do comportamento de materiais granulares. Nesse trabalho, em uma escala menor, os autores consideram uma estrutura granular composta por grãos rígidos circulares, modelados através do MED, enquanto que na escala macroscópica é considerada a solução numérica obtida através do MEF. Uma relação entre o estado de tensões nas duas escalas é feita através de um método de homogeneização.

Buscando a modelagem de meios com características mecânicas diferenciadas, Nakashima e Oida (2004) analisaram o contato solo-pneu através do acoplamento MEF-MED, onde o pneu e as camadas de solo mais profundas são modeladas com elementos finitos, enquanto a camada superficial do solo é discretizada através de um sistema particulado. Villard *et al.* (2009) propuseram um novo modelo numérico dedicado a estruturas de terra reforçadas com malhas geossintéticas baseado no acoplamento MEF-MED. No modelo proposto, os comportamentos mecânicos de tração e de membrana são modelados através do MEF, enquanto que o atrito interfacial entre o solo e os geossintéticos e o comportamento granular do solo sob grandes deslocamentos são tratados através do MED. Teixeira *et al.* (2010) utilizaram a combinação entre elementos finitos e discretos para a simulação numérica da interação barra-partícula, onde o comportamento dinâmico das barras é modelado através do MEF, e as partículas são modeladas através do MED. Os autores

também abordaram a interação solo-estrutura através da modelagem de um problema de deslizamento de rochas (partículas) sob um muro de arrimo (malha de elementos finitos). Ainda nessa linha, Nasato (2011) apresentou um acoplamento MEF-MED utilizando softwares comerciais. Nesse trabalho, o MED é utilizado para simulação de manuseio de materiais particulados na indústria de processos, através do software EDEM®, e o MEF é utilizado para estimar respostas estruturais a uma dada condição de carregamento, através do software ANSYS®. O autor considerou um acoplamento parcial, onde as forças calculadas no meio particulado são transmitidas à estrutura.

No presente trabalho, opta-se por uma estratégia de acoplamento numérico onde o MED trata porções idealizadas discretas do problema, enquanto que o MEF trata subdomínios contínuos com possibilidade de faturamento devido a sua associação com modelos da MFC. Utiliza-se como base para o desenvolvimento do acoplamento numérico, a formulação dinâmica mostrada no trabalho de Oñate e Rojek (2004).

1.3 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho consiste no estudo e desenvolvimento de uma ferramenta computacional que permita a interação entre meios com características mecânicas diferenciadas, utilizando o acoplamento entre o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos Discretos, com o intuito de possibilitar análises numéricas de problemas de engenharia mais fiéis aos fenômenos reais.

Entre os aspectos computacionais da ferramenta numérica desenvolvida, a formulação matemática relacionada com o Método dos Elementos Finitos contempla uma abordagem geometricamente não linear, permitindo que o modelo esteja sujeito a grandes deformações e deslocamentos. Além disso, a incorporação de interfaces nas arestas dos elementos finitos e a utilização de modelos constitutivos provenientes da Mecânica da Fratura Coesiva permitem a abertura e a propagação de fraturas. O conjunto de partículas é modelado através do Método dos Elementos Discretos, podendo se utilizar diferentes modelos de contato para representar o comportamento dinâmico do meio particulado.

Nesse contexto, os objetivos específicos deste trabalho consistem na realização de pesquisas, estudos e implementações computacionais que irão interagir com o módulo computacional DEMOOP (*Discrete Element Method Oriented Object Programming*), responsável pela análise numérica de modelos particulados através do Método dos Elementos

Discretos, desenvolvido por Carvalho Jr. e Cintra em 2006, permitindo, dessa forma, a análise acoplada de problemas de engenharia através da interação MEF-MED. Para alcançar tais objetivos, são propostas as seguintes tarefas:

- a) Estudar e implementar uma formulação em Elementos Finitos (FEMcode), onde se considera não linearidade geométrica, comportamento elástico-linear, isotropia do material e faz-se uso de interfaces nas arestas dos elementos, para a análise mecânica de meios contínuos fraturáveis;
- b) Estudar e implementar Modelos de Zona Coesiva intrínsecos para incorporação de mecanismos de falha ao meio contínuo, através da utilização de interfaces com propriedades coesivas;
- c) Estudar e implementar o Método de Relaxação Dinâmica para solução numérica quase-estática dos passos de análise da simulação e de processos adaptativos para otimização do número de iterações e aceleração do processo de convergência;
- d) Estudar e implementar o Método das Diferenças Centrais para a integração numérica das equações de movimento em análises dinâmicas;
- e) Estudar o Método dos Elementos Discretos no que diz respeito a seu equacionamento matemático, relações força-deslocamento, técnicas de integração numérica e algoritmos de busca por contatos.
- f) Estudar e formular o processo de acoplamento entre o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos Discretos, através da combinação numérica entre os métodos;
- g) Implementar uma classe de acoplamento MEF-MED (FEMcodeInterface), para comunicação entre o módulo computacional desenvolvido (FEMcode) e o módulo computacional DEMOOP, permitindo a análise acoplada de meios contínuos e granulares.

1.4 Estrutura da Dissertação

Nessa seção faz-se uma síntese dos capítulos que são apresentados nesta dissertação.

O Capítulo 2 apresenta uma breve descrição acerca dos primeiros trabalhos que consideram os efeitos de fraturas coesivas e sobre os modelos coesivos mais influentes no atual estágio da Mecânica da Fratura Coesiva.

No Capítulo 3 é apresentado o Método dos Elementos Finitos que corresponde à ferramenta numérica utilizada para a modelagem e análise computacional de meios contínuos neste trabalho. É apresentada a formulação matemática a ser utilizada, considerando grandes deformações, com base na Formulação Lagrangeana Total (FLT) da Mecânica do Contínuo e incorporando conceitos da Mecânica da Fratura Coesiva. Também são apresentados alguns casos para a verificação da implementação computacional realizada.

O Capítulo 4 apresenta o Método dos Elementos Discretos que representa a ferramenta numérica utilizada neste trabalho para a modelagem e análise computacional de meios granulares discretos. Apresenta-se a formulação matemática utilizada, destacando as equações de movimento, integração numérica, relações de força-deslocamento e algoritmos de busca por contatos.

O Capítulo 5 trata os aspectos relacionados ao acoplamento entre o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos Discretos utilizado neste trabalho. É definida a estratégia de contato entre elementos finitos e discretos, fazendo uma analogia com o contato entre partículas, e definindo as forças de interação associadas. São apresentados um modelo numérico para verificação do acoplamento proposto e aplicações qualitativas em áreas relacionadas ao setor de petróleo para demonstrar o potencial da ferramenta desenvolvida.

No Capítulo 6 são apresentadas as considerações finais do trabalho desenvolvido, as dificuldades encontradas e sugestões de continuidade para trabalhos futuros relacionados ao tema.

2 MODELOS DA MECÂNICA DA FRATURA COESIVA

Neste capítulo é apresentada uma breve descrição sobre os primeiros trabalhos que consideram os efeitos de fraturas coesivas e sobre os modelos coesivos mais influentes no atual estágio da Mecânica da Fratura Coesiva (AMORIM, 2007). Também são apresentadas as justificativas para o modelo coesivo utilizado neste trabalho.

2.1 Primeiras Teorias da Fratura Coesiva

Os primeiros desenvolvimentos que consideram efeitos de ordem coesiva no estudo de fraturas são os trabalhos de Dugdale (1960) e Barenblatt (1959, 1962). Esses trabalhos possuem um caráter pioneiro e inovador, representando o início dos estudos na área da Mecânica da Fratura Coesiva.

O modelo de Dugdale (1960) caracteriza-se como uma das primeiras propostas de avaliação do comprimento da zona plástica que se forma durante o processo de fraturamento em materiais dúcteis. Dugdale propõe uma teoria baseada em um critério uniaxial de tensões, considerando uma chapa de aço infinita, com um corte interno e sujeita a uma tração uniforme em sua borda. O autor considera que, para efeito de análise, o comprimento físico da região onde a fratura se processa pode ser substituído por um comprimento efetivo de fratura, onde este depende do comprimento da zona plástica que se forma na ponta da trinca (onde há presença de tensões de escoamento que tendem a agir de forma opostora à abertura da trinca). Considerando que ocorre uma compensação entre a tração aplicada e a tensão de escoamento do material, Dugdale admite que as tensões na ponta da trinca são finitas e, contornando tal singularidade, assume-se uma relação constitutiva elastoplástica perfeita para descrição do comportamento mecânico do material. Dessa forma, o autor propõe uma quantificação do comprimento de zona plástica na ponta da trinca. Dugdale (1960) realizou experimentos em estado plano de tensões para chapas com cortes em seu interior e na borda, obtendo boa concordância com os resultados de sua teoria para a determinação do comprimento da zona plástica próxima à ponta da trinca. Embora sua teoria seja bastante prática, restringe-se a estudos de materiais elastoplásticos perfeitos sob estado plano de tensões.

Barenblatt (1959, 1962) foi o primeiro pesquisador a propor explicitamente a consideração do efeito de forças coesivas no estudo de fraturas em materiais frágeis. Seu estudo consiste na investigação do equilíbrio de superfícies fraturadas de formas arbitrárias sob a ação de um dado carregamento, utilizando apenas conceitos da Teoria da Elasticidade.

A forma cuspidal¹ foi utilizada devido ao fato de sua superfície ser o único tipo de contorno que não viola nenhuma das leis da Teoria da Elasticidade e por suas propriedades geométricas serem condizentes com o nível de escala em que o estudo se realiza. Considerando todas as forças atuantes sobre um corpo carregado com uma fratura, é possível determinar o fator de intensidade de tensão devido ao sistema de forças, composto por uma parcela devido às cargas externas e por outra devido a forças de coesão. A partir da base matemática desenvolvida por outros pesquisadores, Barenblatt conseguiu determinar a taxa de energia liberada para um campo de tensão não uniforme e para uma região fraturada com a forma geométrica cuspidal, permitindo obter as distribuições dos deslocamentos normais à superfície fraturada de um corpo sólido elástico de dimensões infinitas. Com a definição do módulo de coesão como uma quantidade característica da resistência do material à propagação de fraturas, o autor analisou diversos tipos de problemas, tais como: fraturas axissimétricas planas, fraturas achatadas isoladas e fraturas em rochas.

2.2 Vantagens da Utilização de Modelos Coesivos

Estudos realizados utilizando conceitos puramente da MFLE e da MFEP não possuem uma base física consistente e que seja capaz de representar como os mecanismos de falha ocorrem na realidade (KLEIN *et al.*, 2000, 2001). Essas abordagens clássicas possuem algumas desvantagens como, por exemplo: conduzem a campos singulares, dificultando a quantificação de tensões e deformações; exigem a especificação da direção e velocidade de propagação da fratura; e não permitem a representação de surgimento de trincas.

A consideração de forças coesivas na vizinhança da ponta da trinca apresenta concordância com o comportamento físico de diversos materiais. A incorporação de forças coesivas no problema leva ao desaparecimento de inconsistências físicas como singularidades nos campos de tensão e deformação na utilização da MFLE e da MFEP. Os modelos mais atuais de zona coesiva possuem formulação baseada na adoção de forças coesivas e em trabalhos de separação, que representam a energia gasta para a geração de uma nova superfície, podendo essa ser considerada em uma ou nas duas direções (normal e tangencial).

¹ Forma cuspidal ou cúspide consiste em uma geometria com extremidade aguda, formando uma espécie de cume ou vértice.

2.3 Classificação dos Modelos Coesivos

Para classificar os modelos coesivos, consideram-se dois aspectos: a natureza do critério de inicialização da fratura, podendo ser intrínseco ou extrínseco; e o grau de representação do acoplamento dos efeitos causados pelos modos de deformação I e II, definindo modelos acoplados ou desacoplados.

Nos modelos intrínsecos, a condição de inicialização do fraturamento encontra-se incorporada ao próprio modelo, não havendo necessidade de definição de critérios adicionais. Tal fato ocorre devido às relações constitutivas das trações interfaciais, que de modo geral apresentam uma fase inicial onde há o crescimento das trações até atingirem a resistência do material, quando passam a fase de decrescimento que culmina na completa ruptura do material, gerando novas superfícies livres. Nos modelos extrínsecos, a resposta da interface apresenta-se apenas a partir da fase posterior ao alcance da resistência do material, não existindo uma fase de crescimento de trações. Devido a esse fato, os modelos extrínsecos necessitam de um critério adicional para definição do início do processo de falha (KUBAIR e GEUBELLE, 2003). Diferentemente dos modelos intrínsecos onde os elementos coesivos são definidos juntamente com a malha de elementos finitos antes do início da análise numérica, nos modelos extrínsecos, os elementos coesivos são inseridos quando um critério adicional de falha é satisfeito, em tempo de execução, alterando a estrutura de dados topológica no decorrer da análise. Devido a esse fato, os modelos extrínsecos demandam um custo computacional adicional e necessitam que as relações de adjacência topológica sejam realizadas eficientemente (CELES *et al.*, 2005). Por outro lado, essa metodologia para inserção de elementos coesivos influencia a resposta do sistema apenas quanto o fraturamento está de fato ocorrendo, diferentemente dos modelos intrínsecos, onde uma rigidez artificial é previamente incorporada ao sistema, mesmo quando ainda não há ocorrência de fraturas.

Em relação ao grau de acoplamento de modelos coesivos, em modelos desacoplados, a tração na direção normal independe do deslocamento relativo da interface na direção tangencial e vice-versa. Em modelos acoplados, ambos os componentes do vetor de trações interfaciais dependem de ambos os deslocamentos relativos (normal e tangencial). A maioria dos modelos de zona coesiva apresenta um acoplamento parcial, onde se define o grau de acoplamento do sistema em função de parâmetros de acoplamento específicos de cada modelo.

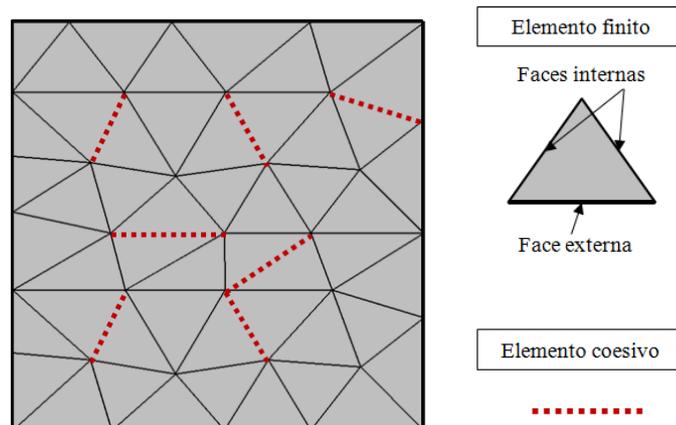
2.4 Modelos Coesivos Relevantes

Nesta seção são apresentados alguns modelos de fratura coesiva considerados relevantes dentro da área da Mecânica da Fratura Coesiva e que possuem influência direta no desenvolvimento deste trabalho.

2.4.1 Modelo Polinomial de Needleman

O trabalho de Needleman (1987) é considerado um marco na Mecânica da Fratura Coesiva devido ao fato de sua estrutura unificada e de as definições propostas pelo autor serem utilizadas até hoje, em trabalhos atuais, caracterizando sua robustez. A estrutura unificada de Needleman (Figura 2.1) possibilita a abordagem do problema através da associação entre elementos finitos e coesivos.

Figura 2.1 – Associação entre elementos finitos e coesivos em um domínio contínuo.



Fonte: Adaptado de Zhou *et al.* (2005).

A estrutura unificada de Needleman permite a representação da ruptura interfacial, separando faces opostas e resultando na formação de vazios, possibilitando, dessa forma, a alteração da geometria do problema ao longo do tempo. Esse fato está relacionado à adoção de elementos coesivos na interface entre dois elementos finitos, favorecendo o movimento relativo entre as faces desses elementos que compartilham inicialmente a mesma posição geométrica.

Para definir a relação constitutiva da interface, Needleman admitiu que para dois pontos materiais A e B, em lados opostos da interface, o vetor de trações interfaciais (forças coesivas) depende apenas do vetor que representa o deslocamento relativo entre esses dois pontos. Com isso, o autor decompôs os vetores em contribuições normais e tangenciais,

$$\Delta u_N = \Delta \mathbf{u}_{AB} \cdot \mathbf{N}, \quad \Delta u_T = \Delta \mathbf{u}_{AB} \cdot \mathbf{T} \quad (2.1)$$

$$t_N = \mathbf{t}^c \cdot \mathbf{N}, \quad t_T = \mathbf{t}^c \cdot \mathbf{T} \quad (2.2)$$

onde Δu_N , Δu_T representam o deslocamento relativo referente à abertura normal da interface e o deslocamento relativo referente ao deslizamento tangencial da interface; $\Delta \mathbf{u}_{AB}$, o vetor de deslocamentos relativos entre os pontos A e B; t_N e t_T representam os componentes normal e tangencial de tração coesiva; \mathbf{t}^c , o vetor de trações coesivas; e, \mathbf{N} e \mathbf{T} , os versores normal e tangencial à interface.

Desse modo, Needleman considerou a existência de um potencial polinomial dependente das contribuições normal e tangencial de deslocamento relativo,

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta u_N, \Delta u_T) = & \frac{27}{4} \sigma_{max} \delta \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_N}{\delta} \right)^2 \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta u_N}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_N}{\delta} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \bar{\alpha} \left(\frac{\Delta u_T}{\delta} \right)^2 \left[1 - 2 \left(\frac{\Delta u_N}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_N}{\delta} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde σ_{max} , $\bar{\alpha}$ e δ representam, respectivamente, tensão máxima de tração na separação puramente normal ($\Delta u_T = 0$); coeficiente de cisalhamento relativo à rigidez normal; e um comprimento característico da falha na direção normal, sendo $\Delta u_N \leq \delta$.

Os componentes do vetor de trações interfaciais podem ser calculados através da diferenciação do potencial em relação ao componente de deslocamento relativo na direção de interesse, onde $t_N = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta u_N}$ e $t_T = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta u_T}$. Logo, para $\Delta u_N \leq \delta$, tem-se que,

$$t_N = -\frac{27}{4} \sigma_{max} \left\{ \frac{\Delta u_N}{\delta} \left[1 - 2 \left(\frac{\Delta u_N}{\delta} \right) + \left(\frac{\Delta u_N}{\delta} \right)^2 \right] + \bar{\alpha} \left(\frac{\Delta u_T}{\delta} \right)^2 \left(\frac{\Delta u_N}{\delta} - 1 \right) \right\} \quad (2.4)$$

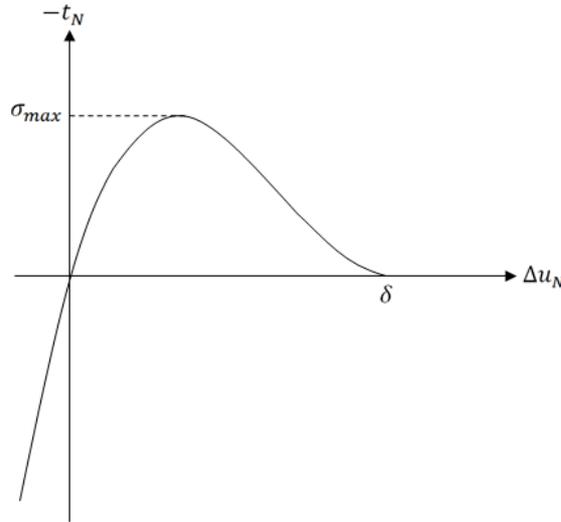
$$t_T = -\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta u_T} = -\frac{27}{4} \sigma_{max} \left\{ \bar{\alpha} \left(\frac{\Delta u_T}{\delta} \right) \left[1 - 2 \left(\frac{\Delta u_N}{\delta} \right) + \left(\frac{\Delta u_N}{\delta} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.5)$$

Através das Equações (2.4) e (2.5) é possível constatar que esse modelo coesivo é do tipo acoplado, visto que os componentes t_N e t_T dependem simultaneamente dos deslocamentos relativos Δu_N e Δu_T .

Na proposta de Needleman, uma separação puramente normal ($\Delta u_T = 0$) deve ocorrer de tal forma que com o aumento da separação interfacial, a tração normal pode atingir

um valor máximo, e então se reduzir, chegando até a completa separação entre as faces ($\Delta u_N > \delta$), onde não se verifica mais a presença de forças coesivas na direção normal ($t_N = 0$). Por outro lado, para um valor negativo de Δu_N , a magnitude da tração normal aumenta gradativamente, referente a uma restrição de contato que dificulta a interpenetração entre as faces (Figura 2.2).

Figura 2.2 – Tração normal em um processo de separação puramente normal ($\Delta u_T = 0$).



Fonte: Needleman (1987).

A fase de crescimento, observada na Figura 2.2, representa um processo de resistência da interface ao aumento da separação entre as faces, configurando-se como um critério de falha internamente incorporado ao modelo. Dessa forma, o modelo de fratura coesiva proposto por Needleman (1987) pode ser classificado como um modelo do tipo intrínseco.

O trabalho realizado durante toda a separação da interface é definido através do potencial estabelecido por Needleman $\Phi(\Delta u_N, \Delta u_T)$ quando $\Delta u_N > \delta$. Nesse caso, as trações interfaciais assumem valores nulos ($t_N = t_T = 0$) e o trabalho total de separação da interface pode ser quantificado como

$$\Phi_{sep} = \int_0^{\delta} -t_N d \Delta u_N = \frac{9\sigma_{max}\delta}{16} \quad (2.6)$$

O trabalho desenvolvido por Needleman não permite o total rompimento interfacial através de esforços puramente cisalhantes, visto que o autor estabeleceu uma relação linear

para Δu_T , não possibilitando a existência de forças tangenciais nulas. No entanto, vale ressaltar a contribuição inovadora do trabalho devido à consideração de forças coesivas interfaciais e do trabalho de separação por unidade de área, que basearam trabalhos desenvolvidos posteriormente.

2.4.2 Modelo Exponencial de Xu e Needleman

Em 1993, Xu e Needleman adotaram a forma exponencial na descrição das trações normais e tangenciais. Dessa forma, foi possível formular um modelo que permitisse a ocorrência de falhas puramente tangenciais. Os autores propuseram o seguinte potencial:

$$\Phi(\Delta u_N, \Delta u_T) = \Phi_N + \Phi_N \exp\left(-\frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right) \left[\left(1 - r + \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right)^{\frac{1-q}{r-1}} - \left(q + \frac{r-q}{r-1} \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right) \exp\left(-\frac{\Delta u_T^2}{\delta_T^2}\right) \right] \quad (2.7)$$

onde Φ_N e Φ_T representam os trabalhos de separação normal e tangencial; δ_N e δ_T representam comprimentos característicos nas direções normal e tangencial; e q e r representam parâmetros de acoplamento do modelo, sendo

$$\Phi_N = \sigma_{max} e \delta_N \quad (2.8)$$

$$\Phi_T = \tau_{max} \sqrt{\frac{e}{2}} \delta_T \quad (2.9)$$

$$q = \frac{\Phi_T}{\Phi_N} \quad (2.10)$$

$$r = \frac{\Delta u_N^*}{\delta_N} \quad (2.11)$$

com $e = \exp(1)$, e onde τ_{max} representa a tensão máxima de cisalhamento para uma separação em cisalhamento puro; e Δu_N^* representa o valor da componente de deslocamento relativo normal depois de promover uma separação cisalhante completa para $t_N = 0$.

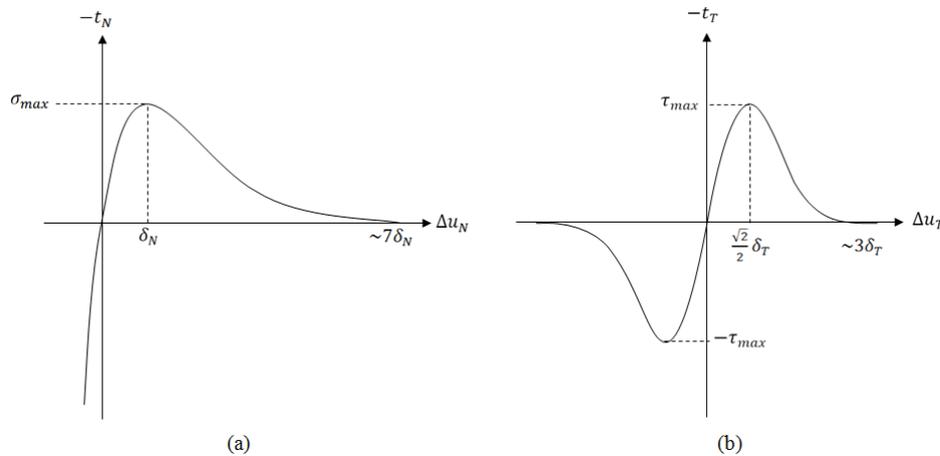
Através do potencial definido por Xu e Needleman (1993), os componentes do vetor de trações interfaciais podem ser obtidos pelas derivações do potencial em relação aos deslocamentos relativos nas direções de interesse, ou seja, de forma semelhante ao trabalho de Needleman (1987), resultando em

$$t_N = -\frac{\Phi_N}{\delta_N} \exp\left(-\frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right) \left\{ \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \exp\left(-\frac{\Delta u_T^2}{\delta_T^2}\right) + \frac{1-q}{r-1} \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta u_T^2}{\delta_T^2}\right) \right] \left(r - \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \right) \right\} \quad (2.12)$$

$$t_T = -\frac{\Phi_N}{\delta_N} \frac{2\delta_N}{\delta_T} \frac{\Delta u_T}{\delta_T} \left(q + \frac{r-q}{r-1} \frac{\Delta u_N}{\delta_N} \right) \exp\left(-\frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right) \exp\left(-\frac{\Delta u_T^2}{\delta_T^2}\right) \quad (2.13)$$

As variações das tensões interfaciais normal e tangencial sob os estados de separação puramente normal e puramente cisalhante são mostradas na Figura 2.3, onde se avalia que os comprimentos de separação limites para os modos normal e tangencial correspondem a aproximadamente $7\delta_N$ e $3\delta_T$, respectivamente.

Figura 2.3 – Gráficos das tensões interfaciais para o modelo coesivo de Xu e Needleman (1993):
(a) Trações normais para $\Delta u_T = 0$; (b) Trações tangenciais para $\Delta u_N = 0$.



Fonte: Xu e Needleman (1993).

A existência de uma fase inicial de crescimento das trações interfaciais indica que este modelo apresenta um critério de falha intrinsecamente incorporado e, através das Equações (2.12) e (2.13), percebe-se que as trações normais e tangenciais dependem dos deslocamentos relativos em ambas as direções, caracterizando o modelo como acoplado.

Este modelo, diferentemente do modelo proposto por Needleman (1987), possibilita a simulação de problemas onde o deslocamento relativo na direção tangencial é elevado e também a representação de falhas puramente cisalhantes, sendo um dos modelos de fratura coesiva mais amplamente utilizados na literatura científica.

2.4.3 Modelo Polinomial de Park, Paulino e Roesler

Park *et al.* (2009) propuseram um novo modelo coesivo polinomial, utilizando o conceito de potencial apresentado por Needleman (1987). Esse modelo trata modos mistos de fratura, configurando-se, portanto, como um modelo acoplado, onde os componentes de trações interfaciais (normal e tangencial) dependem dos deslocamentos relativos em ambas as

direções. Baseados no comportamento de fraturas macroscópicas, os autores propuseram o potencial PPR, definido como

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta u_N, \Delta u_T) = \min(\Phi_N, \Phi_T) + \left[\Gamma_N \left(1 - \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right)^\alpha \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right)^m + \langle \Phi_N - \Phi_T \rangle \right. \\ \left. \Gamma_T \left(1 - \frac{|\Delta u_T|}{\delta_T}\right)^\beta \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta u_T|}{\delta_T}\right)^n + \langle \Phi_T - \Phi_N \rangle \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde o operador $\langle \cdot \rangle$ representa

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

De modo semelhante aos trabalhos de Needleman (1987) e Xu e Needleman (1993), os autores determinaram os componentes normal e tangencial do vetor de trações interfaciais através dos gradientes do potencial PPR, ou seja,

$$\begin{aligned} t_N = -\frac{\Gamma_N}{\delta_N} \left[m \left(1 - \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right)^\alpha \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right)^{m-1} - \alpha \left(1 - \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right)^m \right] \\ \dots \left[\Gamma_T \left(1 - \frac{|\Delta u_T|}{\delta_T}\right)^\beta \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta u_T|}{\delta_T}\right)^n + \langle \Phi_T - \Phi_N \rangle \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} t_T = -\frac{\Gamma_T}{\delta_T} \left[n \left(1 - \frac{|\Delta u_T|}{\delta_T}\right)^\beta \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta u_T|}{\delta_T}\right)^{n-1} - \beta \left(1 - \frac{|\Delta u_T|}{\delta_T}\right)^{\beta-1} \left(\frac{n}{\beta} + \frac{|\Delta u_T|}{\delta_T}\right)^n \right] \\ \dots \left[\Gamma_N \left(1 - \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right)^\alpha \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right)^m + \langle \Phi_N - \Phi_T \rangle \right] \frac{\Delta u_T}{|\Delta u_T|} \end{aligned} \quad (2.17)$$

As constantes de energia Γ_N e Γ_T se relacionam aos modos I e II de fratura, e são definidas a depender dos valores das energias dos modos de fratura I e II (Φ_N , Φ_T) como

$$\Gamma_N = \begin{cases} -\Phi_N \frac{\langle \Phi_N - \Phi_T \rangle}{\Phi_N - \Phi_T} \left(\frac{\alpha}{m}\right)^m, & \Phi_N \neq \Phi_T \\ -\Phi_N \left(\frac{\alpha}{m}\right)^m, & \Phi_N = \Phi_T \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\Gamma_T = \begin{cases} -\Phi_T \frac{\langle \Phi_T - \Phi_N \rangle}{\Phi_T - \Phi_N} \left(\frac{\beta}{n}\right)^n, & \Phi_N \neq \Phi_T \\ \left(\frac{\beta}{n}\right)^n, & \Phi_N = \Phi_T \end{cases} \quad (2.19)$$

Os expoentes adimensionais m e n são definidos em função dos indicadores de elasticidade iniciais (λ_N , λ_T), respectivamente,

$$m = \frac{\alpha(\alpha - 1)\lambda_N^2}{1 - \alpha\lambda_N^2} \quad (2.20)$$

$$n = \frac{\beta(\beta - 1)\lambda_T^2}{1 - \beta\lambda_T^2} \quad (2.21)$$

que por sua vez são definidos como a relação entre as aberturas críticas (δ_{Nc} , δ_{Tc}) e as aberturas finais (δ_N , δ_T), em cada direção, respectivamente,

$$\lambda_N = \delta_{Nc}/\delta_N \quad (2.22)$$

$$\lambda_T = \delta_{Tc}/\delta_T \quad (2.23)$$

Os comprimentos característicos δ_N e δ_T representam as aberturas finais nas direções normal e tangencial, respectivamente, e são definidos como

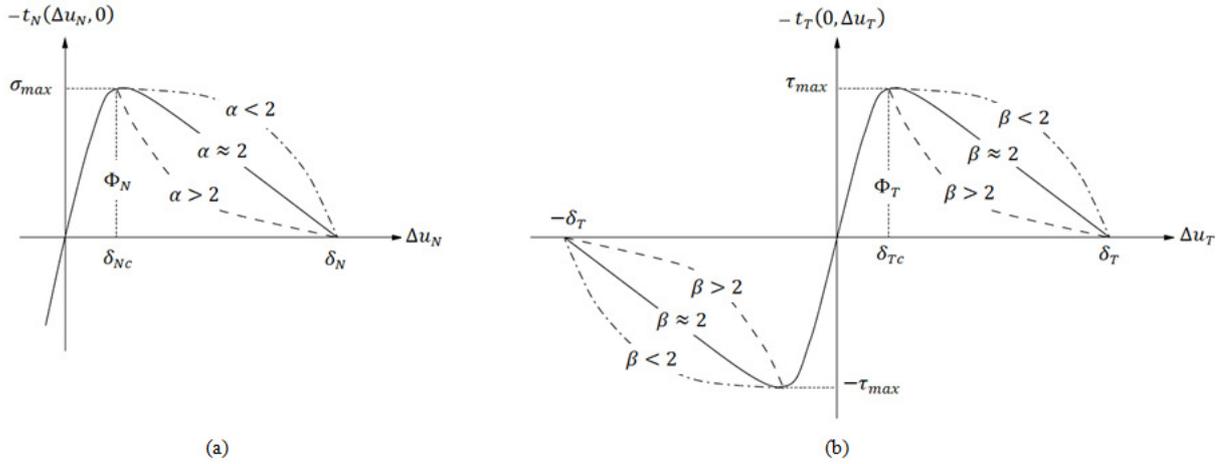
$$\delta_N = \frac{\Phi_N}{\sigma_{max}} \alpha \lambda_N (1 - \lambda_N)^{\alpha-1} \left(\frac{\alpha}{m} + 1\right) \left(\frac{\alpha}{m} \lambda_N + 1\right)^{m-1} \quad (2.24)$$

$$\delta_T = \frac{\Phi_T}{\tau_{max}} \beta \lambda_T (1 - \lambda_T)^{\beta-1} \left(\frac{\beta}{n} + 1\right) \left(\frac{\beta}{n} \lambda_T + 1\right)^{n-1} \quad (2.25)$$

Definidos os parâmetros do modelo acima apresentados, as variações dos componentes normal e tangencial do vetor de trações interfaciais, para os casos de separação puramente normal e separação puramente cisalhante, são mostradas na Figura 2.4, onde os parâmetros de forma α e β são utilizados para caracterizar o comportamento de amolecimento (*softening*) de materiais.

No trabalho, os autores propuseram duas abordagens para o modelo PPR, uma intrínseca e outra extrínseca. Neste trabalho, foca-se na abordagem intrínseca, que consiste no tipo de modelo coesivo a ser empregado. Desse modo, usando a abordagem intrínseca, os indicadores de inclinação iniciais são utilizados para controlar o comportamento elástico do modelo. Valores pequenos de λ_N e λ_T , ou de δ_N e δ_T resultam em inclinações iniciais elevadas e diminuem deformações elásticas artificiais. Os valores de λ_N e λ_T geralmente são determinados como valores pequenos dentro de uma faixa de valores que garanta a estabilidade numérica do modelo coesivo.

Figura 2.4 – Gráficos das tensões interfaciais para o modelo PPR (Park *et al.*, 2009):
 (a) Trações normais para $\Delta u_T = 0$; (b) Trações tangenciais para $\Delta u_N = 0$.



Fonte: Park *et al.* (2009).

Na formulação do modelo intrínseco, os autores afirmaram que uma falha normal ($t_N = 0$) ocorre quando a separação normal ou a separação tangencial atingem determinadas aberturas ($\delta_N, \bar{\delta}_T$), denominadas abertura final na direção normal e abertura final conjugada na direção tangencial, respectivamente,

$$t_N(\delta_N, \Delta u_T) = 0, \quad t_N(\Delta u_N, \bar{\delta}_T) = 0 \quad (2.26)$$

De forma semelhante, uma falha cisalhante ($t_T = 0$) ocorre quando a separação normal atinge a abertura final conjugada ou quando a separação tangencial atinge a abertura final na direção tangencial, ou seja,

$$t_T(\bar{\delta}_N, \Delta u_T) = 0, \quad t_T(\Delta u_N, \delta_T) = 0 \quad (2.27)$$

As aberturas finais conjugadas na direção normal e tangencial podem ser determinadas através da solução das seguintes equações não lineares, que constituem as últimas parcelas das equações (2.16) e (2.17), onde para t_N e t_T nulos, têm-se, respectivamente, as soluções $\Delta u_T = \bar{\delta}_T$ e $\Delta u_N = \bar{\delta}_N$:

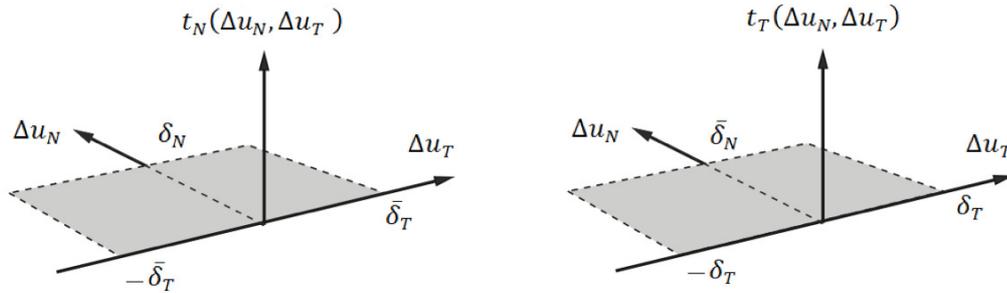
$$\Gamma_T \left(1 - \frac{\Delta u_T}{\delta_T}\right)^\beta \left(\frac{n}{\beta} + \frac{\Delta u_T}{\delta_T}\right)^n + \langle \Phi_T - \Phi_N \rangle = 0 \quad (2.28)$$

$$\Gamma_N \left(1 - \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right)^\alpha \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\Delta u_N}{\delta_N}\right)^m + \langle \Phi_N - \Phi_T \rangle = 0 \quad (2.29)$$

com $0 \leq \Delta u_N \leq \delta_N$ e $0 \leq \Delta u_T \leq \delta_T$.

Desse modo, definem-se as regiões onde há interação coesiva, relacionando cada uma das componentes de trações interfaciais e os deslocamentos relativos nas direções normal e tangencial (Figura 2.5).

Figura 2.5 – Regiões de interação coesiva no modelo PPR.



Fonte: Park e Paulino (2012).

Park e Paulino (2012) afirmaram que a dissipação da energia de fratura está associada com o descarregamento e o recarregamento do material, e assim sendo, os autores propuseram uma relação para representação de tal comportamento onde as trações interfaciais de descarga/recarga (t_N^v, t_T^v) são calculadas com base nas trações interfaciais convencionais, calculadas durante o estágio de amolecimento (*softening*),

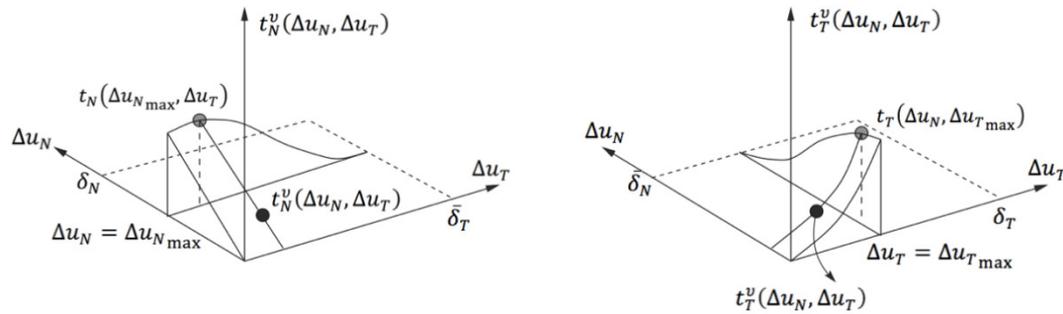
$$t_N^v(\Delta u_N, \Delta u_T) = t_N(\Delta u_{N_{max}}, \Delta u_T) \left(\frac{\Delta u_N}{\Delta u_{N_{max}}} \right)^{\alpha_v} \quad (2.30)$$

$$t_T^v(\Delta u_N, \Delta u_T) = t_T(\Delta u_N, \Delta u_{T_{max}}) \left(\frac{|\Delta u_T|}{\Delta u_{T_{max}}} \right)^{\beta_v} \quad (2.31)$$

onde $\Delta u_{N_{max}}$ e $\Delta u_{T_{max}}$ representam, respectivamente, as separações máximas durante todo o histórico de carregamento nas direções normal e tangencial; e, α_v e β_v representam os parâmetros de forma, introduzidos para descrever diferentes relações de descarga/recarga.

A Figura 2.6 ilustra as relações de descarga/recarga apresentadas, onde $t_N(\Delta u_{N_{max}}, \Delta u_T)$ e $t_T(\Delta u_N, \Delta u_{T_{max}})$ são representadas pelos círculos em cinza e correspondem às trações coesivas ao longo do contorno entre o estágio de amolecimento e o estágio de descarga/recarga. Observa-se também que se os parâmetros de forma α_v e β_v possuírem valor unitário, as relações entre trações interfaciais e separação são lineares em relação à origem. Quando o parâmetro de forma assume valores menores e maiores que 1, essa relação possui formas côncava e convexa, respectivamente.

Figura 2.6 – Relações de descarga/recarga para o modelo PPR.



Fonte: Park e Paulino (2012).

O potencial PPR para tratamento de fraturas coesivas utiliza uma função polinomial para evitar o aparecimento de aberturas de fratura infinitamente grandes que podem ocorrer com a utilização de funções exponenciais. Os autores mostraram ainda que mudanças do modo I de fratura para o modo II de fratura ocorrem monotonicamente em relação aos caminhos de separação, demonstrando uma maior consistência do modelo coesivo.

Além disso, em relação ao trabalho de Xu e Needleman (1993), o potencial PPR traz algumas melhorias como a utilização dos parâmetros de forma α e β , que permite uma melhor representatividade do comportamento de materiais; a incorporação das aberturas finais conjugadas $\bar{\delta}_N$ e $\bar{\delta}_T$, tratando de maneira mais apropriada ocorrência de falhas; e a consideração dos indicadores de inclinação inicial λ_N e λ_T , que permite a diminuição da rigidez artificial inerente a modelos intrínsecos.

Diante do exposto anteriormente, a proposta de Park *et al.* (2009) que utiliza o potencial PPR para o tratamento do modo misto de fraturas consiste no principal modelo coesivo utilizado neste trabalho.

3 MODELAGEM NUMÉRICA DE MEIOS CONTÍNUOS

Neste capítulo é apresentado o Método dos Elementos Finitos (MEF), que corresponde à ferramenta numérica utilizada para a modelagem e análise computacional dos meios contínuos neste trabalho. Inicialmente é feito um breve histórico sobre o método, destacando algumas características e os primeiros trabalhos na área, e então, é apresentada a formulação matemática a ser utilizada, considerando grandes deformações, com base na configuração do corpo em diferentes instantes de tempo através do referencial lagrangeano (BATHE, 1996) e utilizando conceitos da Mecânica da Fratura Coesiva (MFC). No final, são comentados alguns aspectos relativos à implementação computacional e apresentados alguns casos para verificação da formulação apresentada.

3.1 Introdução

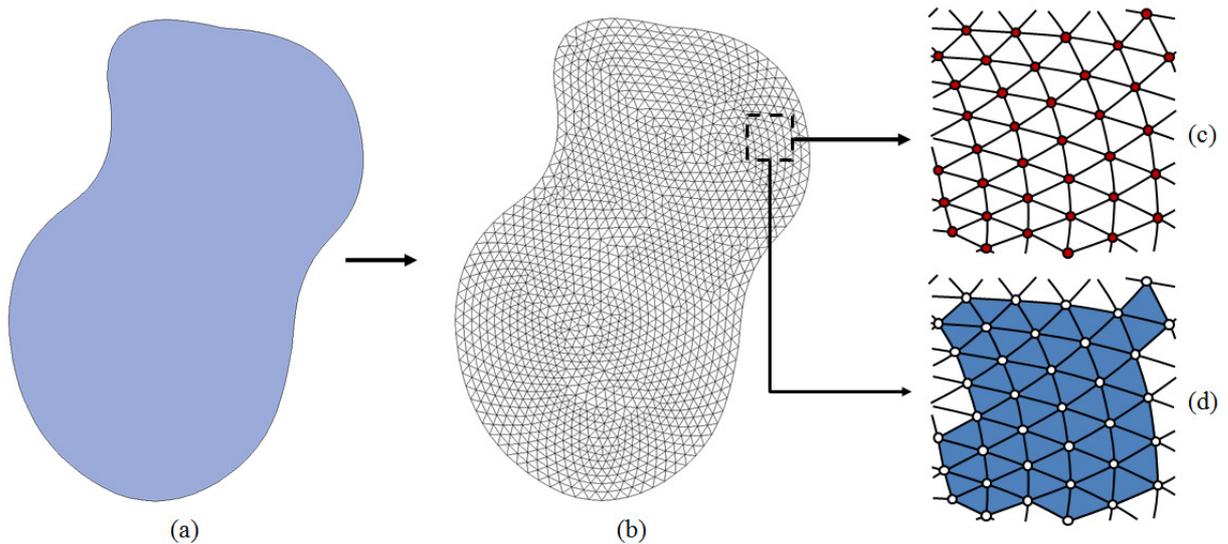
Grande parte dos problemas de engenharia pode ser descrito através de equações diferenciais. De modo geral, obter a solução dessas equações por meio de métodos analíticos clássicos para geometrias e condições de contorno arbitrárias é uma prática quase impossível. O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em uma ferramenta numérica através da qual tais equações diferenciais podem ser resolvidas de modo aproximado. Do ponto de vista da engenharia, o MEF é um método numérico para resolver problemas práticos, tais como análise de tensões, transferência de calor e escoamento de fluidos, através de simulações computacionais (FISH e BELYTSCHKO, 2007).

Não se sabe ao certo quando e quem desenvolveu o MEF, mas as primeiras evidências do método podem ser rastreadas até três grupos de pesquisa distintos: na área de Matemática Aplicada (COURANT, 1943), na área de Física (SYNGE, 1957) e na área de engenharia (ARGYRIS e KELSEY, 1955), sendo amplamente utilizado através de desenvolvimentos de engenharia. As primeiras contribuições aparecem nos trabalhos de Argyris e Kelsey (1955), Turner *et al.* (1956) e de Clough (1960), no qual a expressão “elemento finito” aparece pela primeira vez.

Segundo Assan (2003), o MEF é utilizado para dividir o domínio de integração contínuo em um número finito de pequenas regiões, denominadas elementos finitos, onde as variáveis de estado são aproximadas a partir de um conjunto finito de parâmetros, classicamente nodais. Com esse procedimento, o meio contínuo torna-se discreto e as equações representadas por integrais tornam-se somatórios nesses elementos. O conjunto

de elementos em que o domínio do problema é discretizado é chamado de malha de elementos finitos, e suas interseções pontuais são denominadas nós. A Figura 3.1 ilustra uma discretização espacial de um domínio arbitrário através do MEF, utilizando uma malha de elementos finitos triangulares e destacando seus nós e elementos.

Figura 3.1 – Discretização espacial através do MEF: (a) Domínio do problema; (b) Discretização através de uma malha de elementos finitos; (c) Nós de malha; (d) Elementos finitos.



Fonte: Adaptado de Araújo (2007).

O desenvolvimento do MEF para a solução de problemas práticos de engenharia está associado ao advento do computador. Segundo Bathe (1996), a essência da solução de um problema de engenharia utilizando elementos finitos é que um conjunto de equações governantes do problema seja montado e resolvido, e somente com o uso do computador esse processo pode ser executado efetivamente, garantindo a aplicabilidade do método.

3.2 Formulação Matemática

Na utilização de mecanismos de falha para análise de sólidos e estruturas, são bastante comuns os casos onde os elementos finitos, que descrevem a discretização espacial da geometria que define o problema, estão sujeitos a condições intensas de deformabilidade e de rotação. Para esses casos, embora seja demandado um maior custo computacional, a adoção de um regime de grandes deformações se faz necessária (AMORIM, 2007).

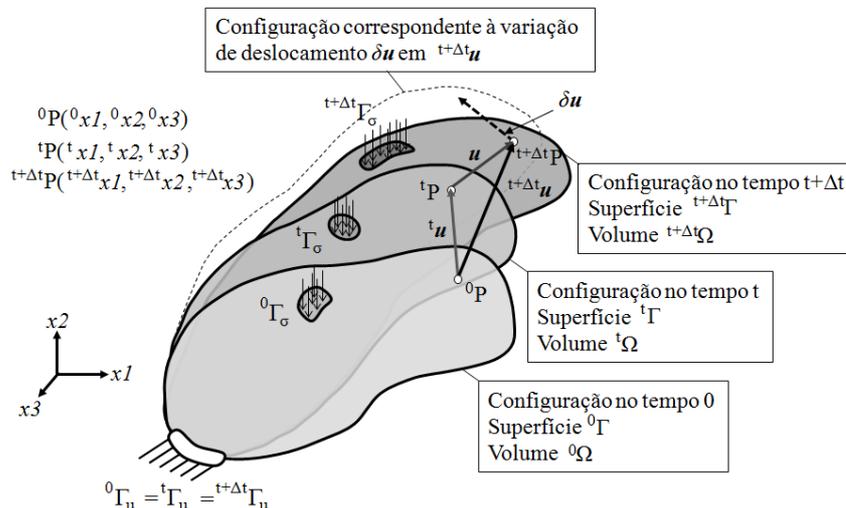
Considera-se o movimento de um corpo arbitrário em um dado sistema de coordenadas (Figura 3.2), onde esse pode estar sujeito a um regime de grandes deslocamentos e grandes deformações. O objetivo é determinar as configurações do corpo em diferentes

instantes de tempo, onde se assume que a solução para o instante de tempo t é totalmente conhecida.

No caso particular de um problema quase-estático, onde forças inerciais são desconsideradas, para o desenvolvimento da estratégia de solução, aplicam-se mudanças nas condições do contorno do problema (deslocamentos e/ou tensões) e o processo de solução é utilizado para se determinar uma nova posição de equilíbrio estático, referente a um instante $t + \Delta t$. A técnica é repetida até que se chegue a uma configuração de equilíbrio de interesse.

Na análise de sólidos, e conseqüentemente de estruturas, a descrição Lagrangeana representa de forma mais natural e efetiva a origem do problema. Nessa formulação, monitora-se o movimento de pontos materiais do corpo, da configuração inicial até a configuração final, diferentemente da formulação Euleriana, geralmente utilizada em análise de fluidos, onde se monitora o movimento do material através de um volume de controle estacionário. Neste trabalho, utiliza-se a Formulação Lagrangeana Total (FLT), que consiste em uma descrição Lagrangeana do movimento do corpo onde a configuração de referência é adotada como a configuração indeformada.

Figura 3.2 – Descrição Lagrangeana do movimento de um corpo arbitrário no sistema cartesiano.



Fonte: Adaptado de Bathe (1996).

Utilizando a descrição Lagrangeana, as coordenadas deformadas de um ponto material P são mapeadas em função de suas coordenadas indeformadas e do tempo. A Figura 3.2 ilustra as deslocabilidades de um corpo arbitrário através do mapeamento de suas posições nas configurações indeformada e deformada, onde os componentes de deslocamento podem ser expressos por

$${}^t u_i = {}^t x_i - {}^0 x_i \quad (3.1)$$

De acordo com essa representação, define-se o tensor gradiente de deformações como

$${}^t_0 F_{ij} = \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^0 x_j} \quad (3.2)$$

ou ainda, combinando-se as Eqs. (3.1) e (3.2), como sendo

$${}^t_0 F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^0 x_j} \quad (3.3)$$

onde δ_{ij} representa o operador delta de Kronecker, evidenciado a partir da diferenciação parcial das coordenadas indeformadas em relação às mesmas ($\partial {}^0 x_i / \partial {}^0 x_j$), tratando-se portanto de um tensor identidade de segunda ordem.

Com base no tensor gradiente de deformações, define-se o tensor de deformações de Green-Lagrange (E), que será utilizado posteriormente nesta formulação, como sendo

$${}^t_0 E_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t_0 F_{ki} {}^t_0 F_{kj} - \delta_{ij}) \quad (3.4)$$

Com base na Figura 3.2, admite-se que as configurações do corpo nos tempos 0 e t são conhecidas e que se deseja caracterizar uma nova configuração em $t + \Delta t$. Para isso, a equação dinâmica governante que define a configuração do corpo no tempo $t + \Delta t$ é dada por

$$\frac{\partial {}^{t+\Delta t} \sigma_{ji}}{\partial {}^{t+\Delta t} x_j} - \bar{\rho} {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_i + {}^{t+\Delta t} \bar{b}_i = 0 \text{ em } {}^{t+\Delta t} \Omega \quad (3.5)$$

onde σ_{ji} , $\bar{\rho}$, \ddot{u}_i , \bar{b}_i e Ω representam, respectivamente, os componentes do tensor de tensões de Cauchy (força por unidade de área na configuração deformada), a densidade do material, os componentes de aceleração, os componentes das forças de volume atuantes e o domínio do problema.

O contorno do problema pode ser definido pela contribuição de superfícies internas e externas. A princípio, não se consideram contribuições oriundas de superfícies internas. As superfícies externas são compostas pela superfície onde há prescrição de tensões (Γ_σ) e pela

superfície onde há prescrição de deslocamentos (Γ_u), recebendo as contribuições das condições de contorno naturais e essenciais que são descritas, respectivamente, como

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{ji} {}^{t+\Delta t}n_j = {}^{t+\Delta t}\bar{t}_i \text{ em } {}^{t+\Delta t}\Gamma_\sigma \quad (3.6)$$

$${}^{t+\Delta t}u_i = {}^{t+\Delta t}\bar{u}_i \text{ em } {}^{t+\Delta t}\Gamma_u \quad (3.7)$$

onde n_j , \bar{u}_i e \bar{t}_i representam, respectivamente, os componentes do vetor unitário normal à superfície do corpo deformado, os componentes dos deslocamentos prescritos e os componentes do vetor de trações prescritas.

Fazendo uso do Método dos Resíduos Ponderados, idealiza-se uma configuração correspondente à variação de deslocamento $\delta \mathbf{u}$, sobre ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ (Figura 3.2). Para isso, ponderam-se as Eqs. (3.5) e (3.6) em seus respectivos domínios de integração, onde δu_i representa os componentes do deslocamento virtual utilizado nessa ponderação, obtendo-se

$$\int_{{}^{t+\Delta t}\Omega} \left(\frac{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma_{ji}}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} - \bar{\rho} {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i + {}^{t+\Delta t}\bar{b}_i \right) \delta u_i d\Omega - \int_{{}^{t+\Delta t}\Gamma} ({}^{t+\Delta t}\sigma_{ji} {}^{t+\Delta t}n_j - {}^{t+\Delta t}\bar{t}_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (3.8)$$

Considerando-se a identidade matemática para a derivada de um produto

$$\frac{\partial ({}^{t+\Delta t}\sigma_{ji} \delta u_i)}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\sigma_{ji}}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} \delta u_i + {}^{t+\Delta t}\sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} \quad (3.9)$$

reescreve-se a Eq. (3.8) como

$$\int_{{}^{t+\Delta t}\Omega} \left[\frac{\partial ({}^{t+\Delta t}\sigma_{ji} \delta u_i)}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} - {}^{t+\Delta t}\sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} - \bar{\rho} {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i + {}^{t+\Delta t}\bar{b}_i \delta u_i \right] d\Omega - \int_{{}^{t+\Delta t}\Gamma_\sigma} ({}^{t+\Delta t}\sigma_{ji} {}^{t+\Delta t}n_j - {}^{t+\Delta t}\bar{t}_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (3.10)$$

Aplicando o Teorema da Divergência de Gauss (STEWART, 2005), tem-se que

$$\int_{{}^{t+\Delta t}\Omega} \frac{\partial ({}^{t+\Delta t}\sigma_{ji} \delta u_i)}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} d\Omega = \int_{{}^{t+\Delta t}\Gamma_\sigma} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ji} {}^{t+\Delta t}n_j \delta u_i d\Gamma \quad (3.11)$$

só com contribuição sobre o contorno ${}^{t+\Delta t}\Gamma_\sigma$, posto que δu_i é nulo em ${}^{t+\Delta t}\Gamma_u$. Portanto, a Eq. (3.10) pode ser reescrita como

$$\int_{{}^{t+\Delta t}\Omega} \left({}^{t+\Delta t}\sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_j} + \bar{\rho} {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i \partial \delta u_i \right) d\Omega = \int_{{}^{t+\Delta t}\Omega} {}^{t+\Delta t}\bar{b}_i \delta u_i d\Omega + \int_{{}^{t+\Delta t}\Gamma_\sigma} {}^{t+\Delta t}\bar{t}_i \delta u_i d\Gamma \quad (3.12)$$

Devido à simetria do tensor de tensões de Cauchy, a parcela à esquerda na Eq. (3.12) pode ser representada de maneira equivalente em termos dos componentes do tensor de pequenas deformações virtuais ($\delta \varepsilon_{ij}$), energeticamente conjugado ao tensor de tensões de Cauchy, através da demonstração a seguir:

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(\sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ji} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Assim sendo, a Eq. (3.12) pode ser reescrita, chegando-se à forma fraca do Método dos Resíduos Ponderados (Princípio dos Trabalhos Virtuais), equivalente à configuração dinâmica do corpo no instante $t + \Delta t$, onde

$$\int_{{}^{t+\Delta t}\Omega} \left({}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} + \bar{\rho} {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i \partial \delta u_i \right) d\Omega - \int_{{}^{t+\Delta t}\Omega} {}^{t+\Delta t}\bar{b}_i \delta u_i d\Omega - \int_{{}^{t+\Delta t}\Gamma_\sigma} {}^{t+\Delta t}\bar{t}_i \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (3.14)$$

Para a formulação em grandes deslocamentos, opta-se pelo cálculo do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff (S) que relaciona pseudo-forças por unidade de área na configuração indeformada. A escolha pelo segundo tensor de Piola-Kirchhoff é uma alternativa bastante utilizada, devido a sua simetria, o que implica em vantagens do ponto de vista computacional, e ao fato de calcular pseudo-forças por unidade de área da geometria indeformada, facilitando a sua quantificação. O tensor de tensões de Cauchy se relaciona com o segundo tensor de Piola-Kirchhoff através da seguinte expressão:

$${}^t\sigma_{ij} = \frac{1}{J} {}^tF_{ik} {}^tS_{kl} {}^tF_{jl} \quad (3.15)$$

onde J representa o determinante do tensor gradiente de deformações (F).

Formulações em grandes deslocamentos também costumam fazer uso do tensor de deformações de Green-Lagrange, apresentado anteriormente na Eq. (3.4). Esse tensor de deformações é energeticamente conjugado ao segundo tensor de Piola-Kirchhoff (CRISFIELD, 1991), logo,

$$\int_{t+\Delta t \Omega} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta {}_{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{{}^0 \Omega} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} E_{ij} d\Omega \quad (3.16)$$

Substituindo a Eq. (3.16) na Eq. (3.14), e prescrevendo as forças de volume e os vetores de tração em relação à configuração indeformada, fazendo uso do conceito do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, chega-se à forma fraca do Método dos Resíduos Ponderados na FLT utilizada para o tratamento de grandes deslocamentos e deformações:

$$\int_{{}^0 \Omega} ({}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} E_{ij} + \bar{\rho} {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \partial \delta u_i) d\Omega = \int_{{}^0 \Omega} {}^{t+\Delta t} \bar{b}_i \delta u_i d\Omega + \int_{{}^0 \Gamma_\sigma} {}^{t+\Delta t} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma \quad (3.17)$$

onde, a integral do lado esquerdo da equação representam as parcelas de forças internas e de forças inerciais, e, as parcelas integrais do lado direito representam, respectivamente, os componentes de forças volumétricas e de forças externas atuantes no modelo.

3.3 Incorporação de Forças Coesivas

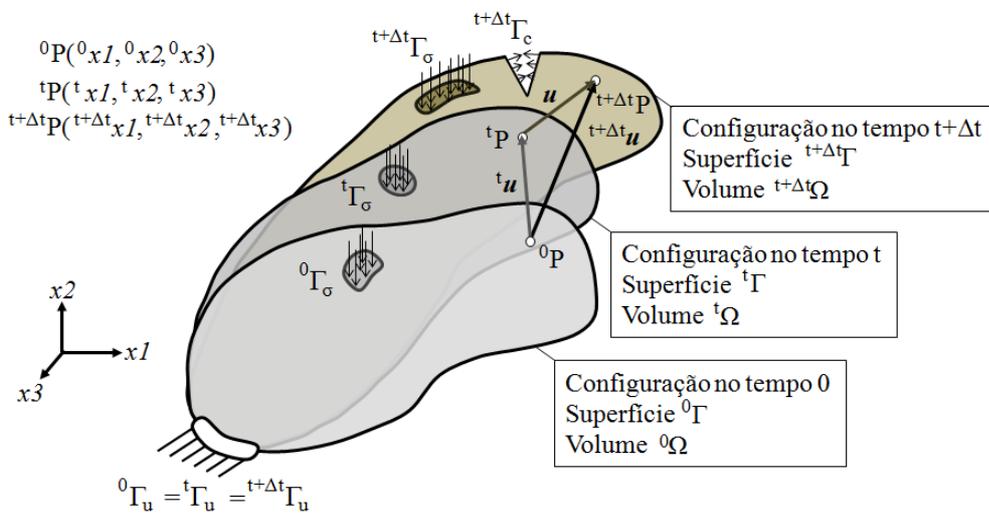
Para a incorporação de modelos coesivos à formulação, considera-se uma contribuição de condições de contorno oriundas de uma superfície interna (Γ_c), onde ocorre a ação de forças coesivas, conforme é ilustrado na Figura 3.3.

Dessa forma, para considerar tal efeito, partindo-se da Eq. (3.12) e realizando as considerações físicas e matemáticas descritas, consegue-se determinar uma nova equação incremental governante do problema sob a forma fraca do Método dos Resíduos Ponderados. Nesse contexto, a contribuição das forças coesivas representa a adição de um termo em relação à Eq. (3.17), tendo-se

$$\int_{\Omega} ({}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}E_{ij} + \bar{\rho} {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i \delta u_i) d\Omega = \int_{\Omega} {}^{t+\Delta t}\bar{b}_i \delta u_i d\Omega + \int_{{}^0\Gamma_\sigma} {}^{t+\Delta t}\bar{t}_i \delta u_i d\Gamma + \int_{{}^0\Gamma_c} {}^{t+\Delta t}t_i^c \delta \Delta u_i d\Gamma \quad (3.18)$$

onde t_i^c e $\delta \Delta u_i$ representam, respectivamente, os componentes do vetor de trações coesivas e os componentes do vetor de deslocamentos que caracterizam a abertura de fraturas coesivas.

Figura 3.3 – Incorporação da condição de contorno coesiva à equação de movimento.



Fonte: Autor (2012).

3.4 Implementação Computacional

Esta seção apresenta os principais procedimentos numéricos utilizados na implementação computacional da solução aproximada bidimensional de meios contínuos adotada neste trabalho, fazendo uso de modelos coesivos incorporados ao MEF. Tais procedimentos são representados pela discretização espacial do domínio, determinação do vetor de forças coesivas (AMORIM, 2007) e pela solução dos problemas quase-estático e dinâmico, através do Método de Relaxação Dinâmica (SILVA, 2005) e de uma adaptação do Método das Diferenças Centrais (KRYSL e BELYTCHKO, 1997), respectivamente.

Para a implementação computacional da equação de movimento descrita pela Eq. (3.18), pode-se representar a variação dos componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange baseando-se na Eq. (3.4),

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta F_{ki} F_{kj} + F_{ki} \delta F_{kj}) \quad (3.19)$$

e de forma semelhante, considerando a Eq. (3.3), a variação dos componentes do tensor gradiente de deformações é dada por

$$\delta F_{ij} = \delta \frac{\partial u_i}{\partial {}^0 x_j} \quad (3.20)$$

Dessa forma, desenvolvendo as Eqs. (3.19) e (3.20) e agrupando os termos cruzados da variação do tensor de deformações de Green-Lagrange, esse pode ser vetorialmente representado por

$$\delta \mathbf{E} = \left\{ \begin{array}{c} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \\ \delta E_{12} + \delta E_{21} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{k1} \delta \frac{\partial u_k}{\partial {}^0 x_1} \\ F_{k2} \delta \frac{\partial u_k}{\partial {}^0 x_2} \\ F_{k1} \delta \frac{\partial u_k}{\partial {}^0 x_2} + F_{k2} \delta \frac{\partial u_k}{\partial {}^0 x_1} \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

De forma análoga, o segundo tensor de Piola-Kirchhoff por ser representado em sua forma vetorial por

$$\mathbf{S} = \{S_{11} \quad S_{22} \quad S_{12}\}^T \quad (3.22)$$

onde, devido à simetria ($S_{12} = S_{21}$), o agrupamento dos termos cruzados torna-se desnecessário.

3.4.1 Discretização Espacial do Domínio

Para a solução do sistema de equações diferenciais parciais, descrito na Eq. (3.18), através do MEF, deve-se admitir que seu domínio seja discretizado no espaço utilizando elementos finitos. Assume-se que as coordenadas que mapeiam as posições de um corpo, dentro do domínio do elemento, podem ser determinadas a partir da interpolação das coordenadas dos nós de cada elemento, ou seja,

$$x_i = \sum_{k=1}^{nn} N^k(\xi, \eta) x c_i^k \quad (3.23)$$

onde k , nn , xc_i^k e $N^k(\xi, \eta)$ representam, respectivamente, o índice do número de funções de interpolação; o número de funções de interpolação; as coordenadas dos nós dos elementos e as funções de interpolação (ou de forma), em função das coordenadas paramétricas ξ e η .

De forma análoga, os deslocamentos e suas derivadas também podem ser expressos a partir de seus deslocamentos correspondentes, calculados nos nós dos elementos, como

$$u_i = \sum_{k=1}^{nn} N^k(\xi, \eta) d_i^k \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial {}^0x_j} = \sum_{k=1}^{nn} \frac{\partial N^k(\xi, \eta)}{\partial {}^0x_j} d_i^k \quad (3.25)$$

caracterizando uma formulação isoparamétrica em elementos finitos, onde são adotadas as mesmas funções de interpolação para mapeamento da geometria e dos deslocamentos.

Substituindo a Eq. (3.25) na Eq. (3.21), utiliza-se a aproximação por elementos finitos para reescrever a variação do tensor de deformações de Green-Lagrange,

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{B}_{NL}^k \delta \mathbf{d}^k \quad (3.26)$$

onde \mathbf{B}_{NL}^k representa, dentro do domínio de um elemento, uma matriz de transformação que mapeia o tensor de deformações de Green-Lagrange por meio dos deslocamentos nodais fornecidos pela malha de elementos finitos e $\delta \mathbf{d}^k$ representa as variações desses deslocamentos, expressos, respectivamente, por

$$\mathbf{B}_{NL}^k = \begin{bmatrix} F_{11} \frac{\partial N^k}{\partial {}^0x_1} & F_{21} \frac{\partial N^k}{\partial {}^0x_1} \\ F_{12} \frac{\partial N^k}{\partial {}^0x_2} & F_{22} \frac{\partial N^k}{\partial {}^0x_2} \\ F_{11} \frac{\partial N^k}{\partial {}^0x_2} + F_{12} \frac{\partial N^k}{\partial {}^0x_1} & F_{21} \frac{\partial N^k}{\partial {}^0x_2} + F_{22} \frac{\partial N^k}{\partial {}^0x_1} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\delta \mathbf{d}^k = [\delta d_1^k \quad \delta d_2^k]^T \quad (3.28)$$

Considerando que o vetor dos deslocamentos que caracteriza a abertura de fissura coesiva pode ser aproximado de maneira semelhante à Eq. (3.24), a Eq. (3.18) pode ser reescrita em formato matricial dentro do domínio de cada elemento finito com base nas Equações (3.24) e (3.26) como sendo

$$\int_{\circ\Omega_e} (\delta \mathbf{d}^k)^T (\mathbf{B}_{NL}^k)^T \mathbf{S} d\Omega + \int_{\circ\Omega_e} (\delta \mathbf{d}^k)^T (\mathbf{N}^k)^T \bar{\rho} \ddot{\mathbf{u}} \mathbf{N}^k d\Gamma = \int_{\circ\Omega_e} (\delta \mathbf{d}^k)^T (\mathbf{N}^k)^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\circ\Gamma_{\sigma e}} (\delta \mathbf{d}^k)^T (\mathbf{N}^k)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\circ\Gamma_{ce}} (\delta \mathbf{d}^k)^T (\mathbf{N}^k)^T \mathbf{t}^c d\Gamma \quad (3.29)$$

onde $\ddot{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{t}}$, \mathbf{t}^c e \mathbf{N}^k representam, respectivamente, o vetor de acelerações no elemento, o vetor de forças volumétricas no elemento, o vetor de trações prescritas no elemento carregado, o vetor de trações coesivas no elemento coesivo e a matriz de funções de interpolação relacionada às informações nos nós do elemento, sendo $\mathbf{N}^k = N^k \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} representa a matriz identidade.

Para que a Eq. (3.29) seja válida para qualquer variação dos deslocamentos nodais do elemento, a seguinte condição deve ser necessariamente imposta:

$$\int_{\circ\Omega_e} (\mathbf{B}_{NL}^k)^T \mathbf{S} d\Omega + \int_{\circ\Omega_e} (\mathbf{N}^k)^T \bar{\rho} \ddot{\mathbf{u}} \mathbf{N}^k d\Gamma = \int_{\circ\Omega_e} (\mathbf{N}^k)^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\circ\Gamma_{\sigma e}} (\mathbf{N}^k)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\circ\Gamma_{ce}} (\mathbf{N}^k)^T \mathbf{t}^c d\Gamma \quad (3.30)$$

Analisando cada parcela da Eq. (3.30) verifica-se que esta pode ser representada da seguinte forma:

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{u}}^{(e)} + \mathit{int} \mathbf{F}^{(e)} = \mathit{ext} \mathbf{F}^{(e)} + \mathit{coh} \mathbf{F}^{(e)} \quad (3.31)$$

onde $\mathbf{M}^{(e)}$ e $\ddot{\mathbf{u}}^{(e)}$ representam a matriz de massa e o vetor de acelerações. Por sua vez, $\mathit{ext} \mathbf{F}^{(e)}$, $\mathit{int} \mathbf{F}^{(e)}$ e $\mathit{coh} \mathbf{F}^{(e)}$ representam, respectivamente, as contribuições de forças externas, internas e coesivas, em um mesmo dado elemento e . No entanto, é conveniente defini-las utilizando o sistema de referência global, a partir da contribuição de cada elemento finito, ou seja,

$$\mathbf{M} = \sum_e \mathbf{M}^{(e)} = \sum_e \int_{\circ\Omega_e} (\mathbf{N}^{k(e)})^T \rho^{(e)} \mathbf{N}^{k(e)} d\Omega \quad (3.32)$$

$$\mathit{ext} \mathbf{F} = \sum_e \mathit{ext} \mathbf{F}^{(e)} = \sum_e \int_{\circ\Omega_e} (\mathbf{N}^{k(e)})^T \bar{\mathbf{b}}^{(e)} d\Omega + \sum_e \int_{\circ\Gamma_{\sigma e}} (\mathbf{N}^{k(e)})^T \bar{\mathbf{t}}^{(e)} d\Gamma \quad (3.33)$$

$$\mathit{int} \mathbf{F} = \sum_e \mathit{int} \mathbf{F}^{(e)} = \sum_e \int_{\circ\Omega_e} (\mathbf{B}_{NL}^{k(e)})^T \mathbf{S}^{(e)} d\Omega \quad (3.34)$$

$${}_{coh}\mathbf{F} = \sum_e {}_{coh}\mathbf{F}^{(e)} = \sum_e^{nec} \int_{{}^0\Gamma_{ce}} (\mathbf{N}^{k(e)})^T \mathbf{t}^{c(e)} d\Gamma \quad (3.35)$$

$$\mathbf{R} = {}_{ext}\mathbf{F} - {}_{int}\mathbf{F} + {}_{coh}\mathbf{F} \quad (3.36)$$

onde ne , nel e nec representam, respectivamente, o número de elementos finitos, o número de elementos finitos com carregamento e o número de elementos coesivos; e \mathbf{R} representa o vetor de forças desequilibradas do sistema.

Para realizar a contribuição de cada elemento conforme as expressões anteriormente apresentadas, as integrações no sistema de referência local são avaliadas numericamente nos elementos através da técnica de integração de Gauss e em seguida as informações inicialmente definidas no sistema local de coordenadas (sistema de referência do elemento) são acumuladas e transformadas para o sistema de referência global. Dessa forma, é possível representar a Eq. (3.18) globalmente através das forças desequilibradas definidas anteriormente, utilizando a seguinte expressão:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R} \quad (3.37)$$

3.4.2 Vetor de Forças Coesivas

Para determinação do vetor de forças de um dado elemento coesivo (${}_{coh}\mathbf{F}^{(e)}$), adota-se a formulação baseada nos trabalhos de Zhang (2003) e de Song *et al.* (2006).

Dado um sistema de referência global (X, Y) e as configurações indeformada e deformada de um elemento coesivo linear de quatro nós, considera-se um sistema local (T, N) para o elemento coesivo onde a sua origem coincida com o centro desse elemento, formando um ângulo θ com o sistema global. O mapeamento do elemento coesivo é feito através do eixo médio formado por suas faces (Figura 3.4).

Através do mapeamento descrito, obtêm-se os deslocamentos relativos globais das extremidades da interface

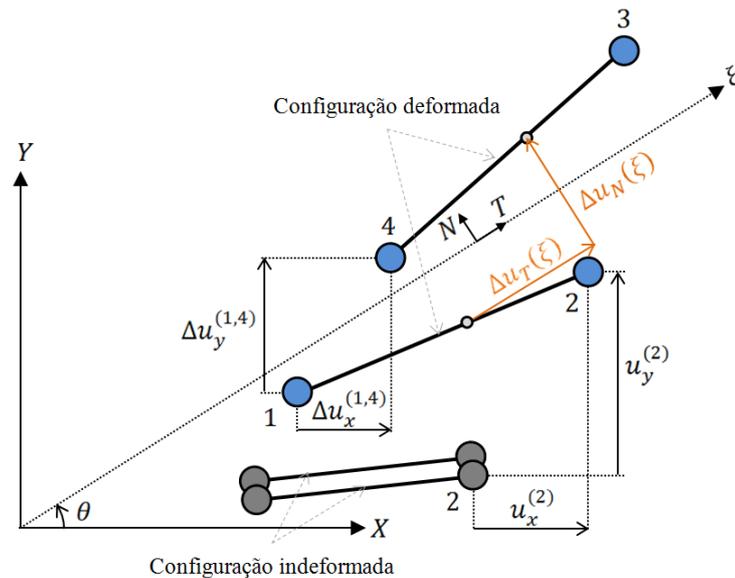
$$\begin{Bmatrix} \Delta u_x^{(1,4)} \\ \Delta u_y^{(1,4)} \\ \Delta u_x^{(2,3)} \\ \Delta u_y^{(2,3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x^{(4)} - u_x^{(1)} \\ u_y^{(4)} - u_y^{(1)} \\ u_x^{(3)} - u_x^{(2)} \\ u_y^{(3)} - u_y^{(2)} \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u}^g \quad (3.38)$$

onde \mathbf{L} e \mathbf{u}^g representam, respectivamente, uma matriz que mapeia os deslocamentos relativos e o vetor de deslocamentos globais do elemento coesivo, expressos, respectivamente, por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{u}^g = [u_x^{(1)} \quad u_y^{(1)} \quad u_x^{(2)} \quad u_y^{(2)} \quad u_x^{(3)} \quad u_y^{(3)} \quad u_x^{(4)} \quad u_y^{(4)}]^T \quad (3.40)$$

Figura 3.4 – Mapeamento de um elemento coesivo linear de quatro nós.



Fonte: Adaptado de Song *et al.* (2006).

O mapeamento paramétrico das funções de interpolação do elemento coesivo de quatro nós é admitido através da Figura 3.5, podendo-se obter os correspondentes deslocamentos relativos globais em um ponto qualquer da interface coesiva em função de sua coordenada paramétrica ξ na forma

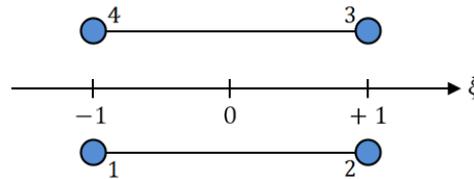
$$\begin{Bmatrix} \Delta u_X \\ \Delta u_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) \end{bmatrix} \mathbf{L} \mathbf{u}^g = \mathbf{N} \mathbf{L} \mathbf{u}^g \quad (3.41)$$

onde \mathbf{N} representa a matriz das funções de interpolação dos nós das extremidades do elemento coesivo apresentado, sendo essas definidas através de seus componentes

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.42)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.43)$$

Figura 3.5 – Mapeamento paramétrico de um elemento coesivo linear de quatro nós.



Fonte: Amorim (2007).

Os deslocamentos relativos nas coordenadas locais do elemento coesivo podem ser obtidos em um ponto qualquer da interface coesiva através de uma transformação linear que defina os deslocamentos relativos locais através de uma rotação no sistema global,

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_T \\ \Delta u_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_X \\ \Delta u_Y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Theta} \mathbf{N} \mathbf{L} \mathbf{u}^g = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}^g \quad (3.44)$$

onde $\boldsymbol{\Theta}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ representam, respectivamente, a matriz de transformação linear de rotação e outra matriz de transformação linear que mapeia os deslocamentos relativos locais diretamente através dos deslocamentos globais do elemento coesivo.

Os valores de $\sin \theta$ e $\cos \theta$ podem ser determinados através das expressões:

$$\sin \theta = \frac{y_b - y_a}{L_m}; \quad \cos \theta = \frac{x_b - x_a}{L_m} \quad (3.45)$$

onde (x_a, y_a) e (x_b, y_b) são os pontos pertencentes ao eixo médio do elemento coesivo e L_m representa o comprimento médio do elemento, ambos na configuração deformada, sendo

$$x_a = \left({}^{t+\Delta t}x_1^{(1)} + {}^{t+\Delta t}x_1^{(4)} \right) / 2; \quad y_a = \left({}^{t+\Delta t}x_2^{(1)} + {}^{t+\Delta t}x_2^{(4)} \right) / 2 \quad (3.46)$$

$$x_b = \left({}^{t+\Delta t}x_1^{(2)} + {}^{t+\Delta t}x_1^{(3)} \right) / 2; \quad y_b = \left({}^{t+\Delta t}x_2^{(2)} + {}^{t+\Delta t}x_2^{(3)} \right) / 2 \quad (3.47)$$

$$L_m = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \quad (3.48)$$

Pelo princípio da contragradência (LIVESLEY, 1975), determina-se o vetor de forças no elemento coesivo

$${}_{coh}\mathbf{F}^e = \int_{-1}^{+1} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{t}^c (\Delta u_T, \Delta u_N) \bar{J} d\xi \quad (3.49)$$

onde \mathbf{t}^c representa o vetor de trações locais da interface, calculado através do modelo coesivo utilizado e \bar{J} representa o determinante do jacobiano da transformação. Utilizando a integração Gaussiana, a Eq. (3.49) pode ser expressa através do seguinte somatório:

$${}_{coh}\mathbf{F}^e = \sum_{pg=1}^{npg} [\bar{\mathbf{B}}(\xi_i)]^T \mathbf{t}^c(\xi_i) \frac{L_m}{2} w_i^\xi \quad (3.50)$$

onde npg representa o número de pontos de Gauss utilizados na integração numérica e w_i^ξ representa os peso utilizados nessa integração, associado à coordenada ξ_i . A Tabela 3.1 mostra a regra de integração adotada, utilizando três pontos de Gauss.

Tabela 3.1 – Regra de integração gaussiana utilizando três pontos de Gauss para elementos coesivos lineares.

ξ_1	ξ_2	ξ_3	w_1^ξ	w_2^ξ	w_3^ξ
$-\sqrt{0,6}$	0	$+\sqrt{0,6}$	5/9	8/9	5/9

Fonte: Zhang (2003).

3.4.3 Solução de Problemas Quase-estáticos

Para o tratamento de problemas quase-estáticos desconsidera-se a contribuição de forças inerciais, e, portanto, trabalha-se com uma particularização da Eq. (3.37), dada por

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (3.51)$$

Trata-se de um processo incremental-iterativo ao longo da simulação numérica. Desta forma, o problema quase-estático se configura com a variação das condições de contorno do problema ao longo dos passos de análise (processo incremental), sendo necessário se determinar uma nova configuração de equilíbrio estático referente a cada passo da análise numérica (processo iterativo).

Em análises não lineares, processos iterativos convencionais costumam utilizar o Método de Newton-Raphson para estimativa de incrementos de deslocamentos referentes ao equilíbrio através da atualização da matriz de rigidez tangente ao longo das iterações. No caso deste trabalho, a determinação da matriz de rigidez tangente, que consiste na derivada das forças desequilibradas em relação aos deslocamentos globais, torna-se um trabalho complexo devido à não linearidade geométrica associada e à possível utilização de diferentes modelos coesivos. Dessa forma, utiliza-se o Método da Relaxação Dinâmica (FRANKEL, 1950 *apud* SILVA, 2005) para solução dos processos iterativos e determinação de novas configurações de equilíbrio.

O Método de Relaxação Dinâmica (MRD) consiste na resolução de um problema de equilíbrio estático transformando-o em um problema dinâmico amortecido, onde a solução do problema estático é numericamente igual à solução permanente do problema dinâmico. Trata-se de uma técnica iterativa de solução do sistema de equilíbrio previamente discretizado através de algum método numérico, neste caso o MEF, visando à minimização das forças desequilibradas do sistema (\mathbf{R}).

Na solução através do MRD, as equações de equilíbrio estático são transformadas em equações de movimento, através da incorporação de forças inerciais e de amortecimento fictícias, na forma

$$\mathbf{M}^n \mathbf{u} + \mathbf{C}^n \dot{\mathbf{u}} + {}_{int}^n \mathbf{F}(\mathbf{u}) = {}_{ext}^n \mathbf{F} + {}_{coh}^n \mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad (3.52)$$

onde \mathbf{M} representa a matriz de massa, \mathbf{C} representa a matriz de amortecimento, $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$ representam as velocidades e acelerações, respectivamente, e n representa o n -ésimo incremento de tempo do algoritmo.

A matriz \mathbf{M} é admitida como uma matriz diagonal (m_i) para que possa haver o desacoplamento das equações de equilíbrio e a matriz \mathbf{C} é adotada segundo o amortecimento de Rayleigh (COOK *et al.*, 1989) desconsiderando-se a influência da rigidez, logo

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} \quad (3.53)$$

sendo a uma constante. Portanto, \mathbf{C} é uma matriz diagonal.

Para desenvolver o algoritmo de integração das equações de movimento adotam-se os cálculos de acelerações, velocidades e deslocamentos propostos por Smith (1985 *apud* FIGUEIREDO, 1991),

$${}^n\ddot{\mathbf{u}} = \frac{{}^{n+\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{u}} - {}^{n-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{u}}}{\Delta t} \quad (3.54)$$

$${}^{n-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{u}} = \frac{{}^n\mathbf{u} - {}^{n-1}\mathbf{u}}{\Delta t} \quad (3.55)$$

$${}^{n+\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{u}} = \frac{{}^{n+1}\mathbf{u} - {}^n\mathbf{u}}{\Delta t} \quad (3.56)$$

$${}^n\dot{\mathbf{u}} = \frac{{}^{n-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{u}} + {}^{n+\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{u}}}{2} \quad (3.57)$$

onde Δt representa o incremento de tempo conforme os requisitos de estabilidade do sistema.

Substituindo-se as Eqs. (3.36), (3.53), (3.54) e (3.57) na Eq. (3.52), e fazendo-se as considerações relacionadas à diagonalização da matriz de massa \mathbf{M} , obtém-se

$${}^{n+\frac{1}{2}}\dot{u}_i = \frac{\frac{1}{\Delta t} - \frac{a}{2}}{\frac{1}{\Delta t} + \frac{a}{2}} {}^{n-\frac{1}{2}}\dot{u}_i + \frac{{}^nR_i}{m_i \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{a}{2} \right)} \quad (3.58)$$

e rearrumando a Eq. (3.56), também é possível chegar a seguinte expressão:

$${}^{n+1}u_i = {}^nu_i + {}^{n+\frac{1}{2}}\dot{u}_i\Delta t \quad (3.59)$$

onde o índice i representa o i -ésimo componente vetorial das grandezas relacionadas, sendo m_i , o i -ésimo componente da diagonal da matriz de massa \mathbf{M} .

No primeiro passo da integração, devem ser prescritas as seguintes condições iniciais,

$${}^0\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad (3.60)$$

$${}^0\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (3.61)$$

$$-\frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}} = -\frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}} \quad (3.62)$$

e substituindo a Eq. (3.62) na Eq. (3.58), obtém a seguinte expressão para quantificação das velocidades no primeiro passo de integração:

$$\frac{1}{2}\dot{u}_i = \frac{R_i^0 \Delta t}{2m_i} \quad (3.63)$$

Para a iteração inicial, de posse dos deslocamentos, calculam-se as forças desequilibradas (Eq. (3.36)) e as velocidades (Eq. (3.63)). Nas demais iterações, calculam-se os deslocamentos (Eq. (3.59)), as forças desequilibradas e as velocidades (Eq. (3.58)). As iterações são repetidas até que o sistema entre em equilíbrio, ou seja, que as forças desequilibradas sejam minimizadas.

O parâmetro de amortecimento a é calculado através da técnica de *Auto-Damping Global*. Esta estratégia visa manter a taxa de variação da energia cinética próxima da potência de amortecimento e tendendo a zero, acelerando a convergência do processo iterativo. Para maiores detalhes sobre a estratégia, recomenda-se consultar o trabalho de Figueiredo (1991).

Como o MRD é baseado em um método de integração explícito no tempo, deve-se adotar um incremento de tempo (Δt) menor que um determinado incremento de tempo crítico. Maiores detalhes sobre a determinação deste valor crítico serão mostrados a seguir na solução de problemas dinâmicos.

3.4.4 Solução de Problemas Dinâmicos

Para o tratamento de problemas dinâmicos deve-se determinar a solução para a equação de movimento do corpo, dada pela Eq. (3.37). No presente trabalho, utilizam-se algoritmos explícitos que se baseiam em obter a solução no tempo $t + \Delta t$ considerando-se a configuração dinâmica no tempo t , e geralmente apresentam baixo custo computacional por intervalo de tempo, visto que não há necessidade de processos iterativos para obtenção da solução em $t + \Delta t$.

Dentro do escopo de algoritmos explícitos utiliza-se o Método das Diferenças Centrais (MDC) que consiste em um procedimento numérico de integração temporal que utiliza conceitos de diferenças finitas para aproximar deslocamentos, velocidades e acelerações a partir da definição de uma condição inicial.

Neste trabalho, utiliza-se uma variação do Método das Diferenças Centrais apresentada por Krysl e Belytschko (1998), caracterizada por uma variação do método de integração implícito Newmark β pela definição de valores limites dos parâmetros (SIMO *et al.*, 1992). As expressões para integração de deslocamentos, velocidades e acelerações são expressas por:

$${}^t\dot{\mathbf{u}} = {}^{t-\Delta t}\dot{\mathbf{u}} + \frac{\Delta t}{2} ({}^t\ddot{\mathbf{u}} + {}^{t-\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}) \quad (3.64)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{u}} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\ddot{\mathbf{u}} \quad (3.65)$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}} \quad (3.66)$$

onde a matriz de massa \mathbf{M} é admitida como concentrada, desacoplando a equação (3.66) e o vetor ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}}$ é definido como o vetor de forças desequilibradas, representado na Eq. (3.36), subtraído de uma contribuição de forças amortecidas:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - \mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}^p \quad (3.67)$$

sendo a matriz de amortecimento \mathbf{C} definida conforme à Eq. (3.53) e o vetor de predições de velocidade definido como:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}^p = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t {}^t\ddot{\mathbf{u}} \quad (3.68)$$

Dessa forma, no instante inicial, impõem-se as condições iniciais do problema através da definição dos vetores de deslocamentos e velocidades iniciais, representados por ${}^0\mathbf{u}$ e ${}^0\dot{\mathbf{u}}$, respectivamente. O vetor de acelerações iniciais pode ser determinado através da Eq. (3.66) adotando o parâmetro de amortecimento presente na matriz \mathbf{C} como nulo ($a = 0$), obtendo-se

$${}^0\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1} {}^0\mathbf{R} \quad (3.69)$$

Determinados os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações referentes à configuração inicial, recorre-se às equações do MDC para a integração temporal dos graus de liberdade livres associados a essas grandezas, que são calculados para um dado incremento de tempo através das equações Eq. (3.64), Eq. (3.65) e Eq. (3.66).

Conforme se observa na estratégia descrita anteriormente, o MDC é um método de integração explícito no tempo, estando sujeito a problemas de estabilidade. Para contornar esse problema, utiliza-se a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (COURANT *et al.*, 1928), onde o incremento de tempo (Δt) não pode ser maior que o tempo gasto para a transmissão de deslocamentos entre dois nós adjacentes da malha (SIDDIQUEE, 1995),

$$\Delta t \leq \beta \frac{l_{min}}{V_c} \quad (3.70)$$

onde β representa um fator de estabilidade ($\beta < 1$); l_{min} representa a menor distância entre nós adjacentes de um elemento; e V_c representa a maior velocidade de propagação da onda de um elemento, definida para análises em Estado Plano de Deformações como:

$$V_c = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (3.71)$$

e para Estado Plano de Tensões:

$$V_c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1+\nu)(1-\nu)}} \quad (3.72)$$

onde ρ , E , ν representam, respectivamente, a densidade, módulo de elasticidade longitudinal e coeficiente de Poisson do material associado ao elemento.

3.5 Verificações

Para verificação da implementação computacional realizada, são apresentados e discutidos três casos. O primeiro caso consiste em uma análise mecânica de um modelo simplificado através da formulação geometricamente não linear do MEF. No segundo caso, verificam-se as trações interfaciais coesivas do modelo PPR através de separações nas direções normal e tangencial isoladamente (PARK e PAULINO, 2012). O terceiro caso discute o padrão de fraturamento de uma chapa tracionada proposta por Xu e Needleman (1994), onde separações nas direções normal e tangencial são simultaneamente consideradas.

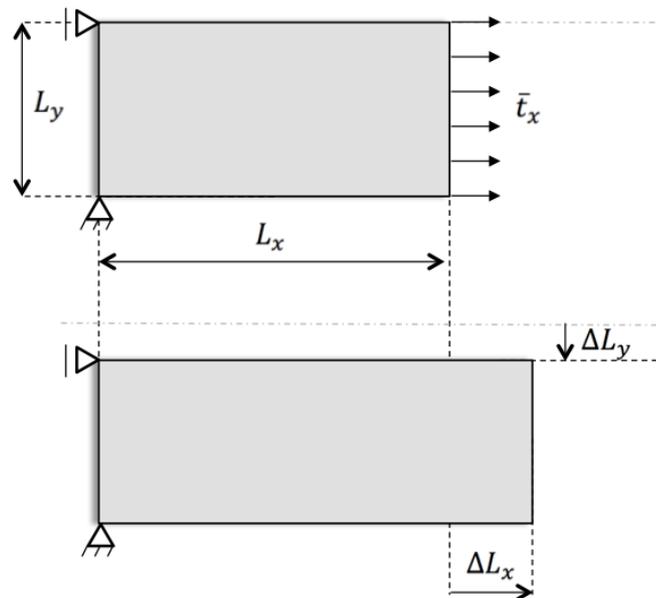
3.5.1 Análise Mecânica com Grandes Deslocamentos

Para avaliação quantitativa de grandes deslocamentos, adota-se um modelo mecânico simplificado. O modelo é composto um elemento finito quadrilateral plano de quatro nós,

fazendo uso de funções de interpolação bilineares. As condições de vinculação, bem como a tensão de tração normal (t_x) aplicada na extremidade livre do elemento são ilustradas na Figura 3.6.

A verificação desse caso consiste na avaliação dos deslocamentos na direção longitudinal e transversal na extremidade livre do elemento, quando aplicada uma tensão de tração normal (\bar{t}_x) nessa mesma extremidade em sua configuração inicial (Figura 3.6). O deslocamento total na direção longitudinal dessa posição é quantificado analiticamente como o alongamento do elemento finito na direção longitudinal (ΔL_x), calculado através do tensor de deformações de Green-Lagrange. O encurtamento na direção transversal (ΔL_y) é quantificado analiticamente considerando os efeitos do coeficiente de Poisson na deformação transversal do modelo. Os valores dos parâmetros referentes à geometria e material são mostrados na Tabela 3.2.

Figura 3.6 – Modelo simplificado para verificação de grandes deslocamentos.



Fonte: Autor (2012).

Tabela 3.2 – Valores dos parâmetros geométricos e do material.

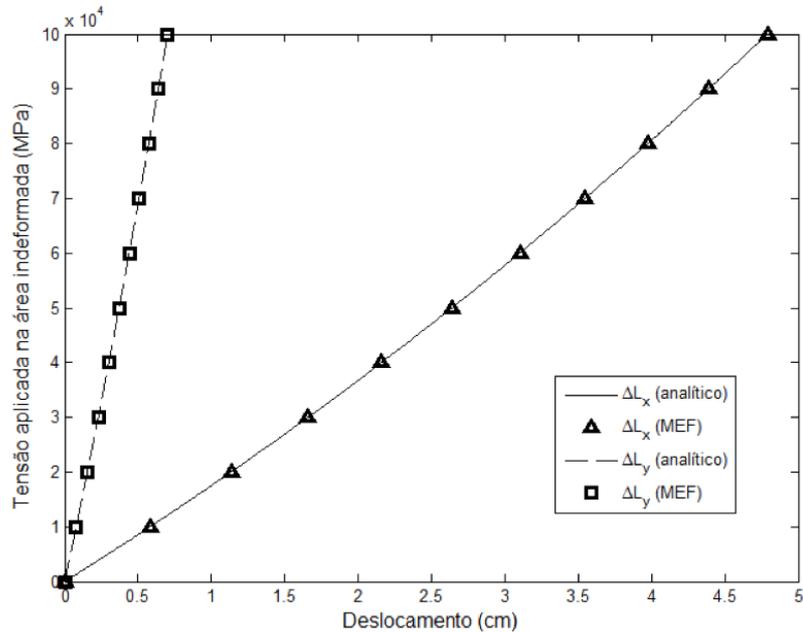
L_x	L_y	E	ν
30 cm	20 cm	500 GPa	0,20

Fonte: Autor (2012).

Esse modelo simplificado é analisado em diferentes passos de análise, onde o valor da tensão normal (\bar{t}_x) vai sendo incrementado gradativamente, até um valor máximo de 10^5

MPa. Em cada um dos passos, computam-se as informações de deslocamentos longitudinais e transversais, confrontando com os respectivos valores analíticos na Figura 3.7.

Figura 3.7 – Comparação dos resultados numéricos e analíticos em regime de grandes deslocamentos.



Fonte: Autor (2012).

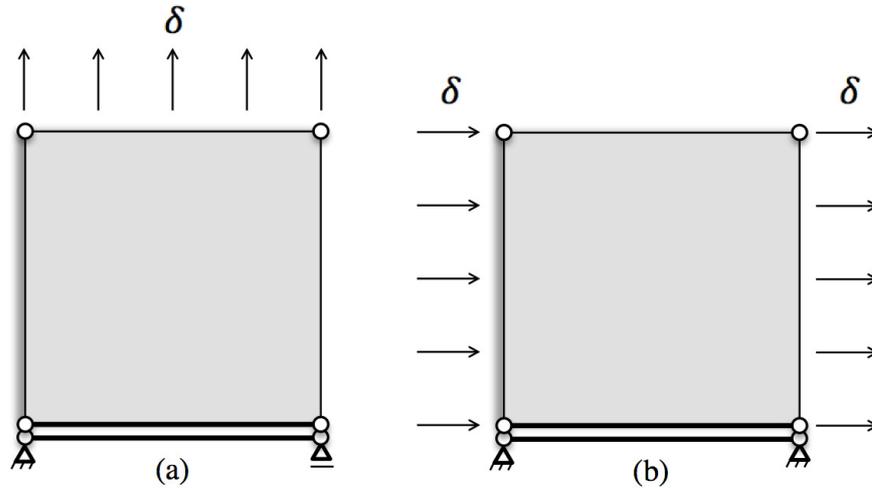
Através da Figura 3.7, percebe-se que os resultados numéricos obtidos possuem concordância com as soluções analíticas para os deslocamentos nas direções longitudinal e transversal (não linearidade geométrica).

3.5.2 Trações Interfaciais Coesivas

Para verificar a implementação computacional das interfaces coesivas, baseia-se no trabalho de Park e Paulino (2012), onde os autores propuseram modelos simplificados para o modo I e II da fratura. A geometria dos problemas de modo I (separação puramente normal) e modo II (separação puramente tangencial) são ilustradas na Figura 3.8, onde as arestas destacadas representam interfaces coesivas inseridas previamente no modelo.

Os modelos são estudados através de uma análise quase-estática, considerando estado plano de tensões. As informações referentes ao material, módulo de elasticidade longitudinal (E) e coeficiente de Poisson (ν), são informadas na Tabela 3.3 e os dados do modelo de fratura coesiva PPR, utilizado nesses casos, são mostrados na Tabela 3.4. Para o comportamento de descarga/recarga, considera-se a relação linear em relação à origem.

Figura 3.8 – Modelos simplificados para verificação de trações interfaciais coesivas para os casos de: (a) separação puramente normal, (b) separação puramente tangencial.



Fonte: Autor (2012).

Tabela 3.3 – Valores das propriedades do material.

E	ν
32 GPa	0,20

Fonte: Autor (2012).

Tabela 3.4 – Valores dos parâmetros do modelo PPR utilizados.

Φ_N	Φ_T	σ_{\max}	τ_{\max}	α	β	λ_N	λ_T
100 N/m	200 N/m	4 MPa	3 MPa	5	1.6	0,005	0,15

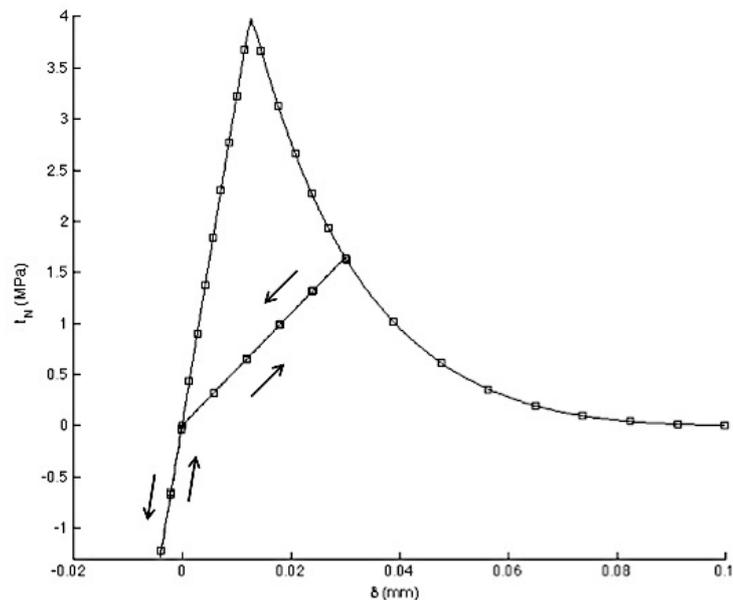
Fonte: Autor (2012).

No teste do modo I, controla-se o deslocamento da superfície superior de uma chapa quadrada de 10 cm x 10 cm, através do controle do grau de liberdade δ . Inicialmente, a chapa é submetida a um alongamento de sua superfície superior até um deslocamento de 0,03 mm. Em seguida, a superfície superior da chapa é comprimida até um deslocamento de -0,01 mm e é alongada novamente até a falha completa do material. A chapa é representada numericamente por um elemento finito quadrilateral de quatro nós (interpolação bilinear), com uma interface coesiva de quatro nós inserida em sua superfície inferior.

A Figura 3.9 mostra o gráfico que relaciona os deslocamentos prescritos na superfície superior da chapa e as correspondentes trações interfaciais que surgem na elemento coesivo. Enquanto a chapa é alongada, as trações crescem até atingirem o valor de resistência do material na direção normal (σ_{\max}), e em seguida é evidenciado o comportamento de amolecimento do material, cuja curva possui a forma convexa devido ao parâmetro de forma

relacionado ao modo I (α) ser maior que 2. Ao ser descarregado, as trações diminuem seguindo a regra linear até o valor de separação nula ($\delta = 0$), e a partir desse ponto, para valores de deslocamentos negativos, as trações interfaciais na direção normal voltam a ser calculadas através do gradiente normal do potencial PPR. Em seguida, volta-se a alongar a chapa até que se caracterize a falha normal da interface. Durante esse processo de recarga, as trações interfaciais voltam a aumentar, seguindo pela mesma trajetória de descarregamento até que se alcance o nível máximo de separação normal, em $\delta = 0,03$ mm, onde voltam a ser determinadas através do gradiente normal do potencial PPR.

Figura 3.9 – Resultados numéricos para as trações interfaciais (separação puramente normal).



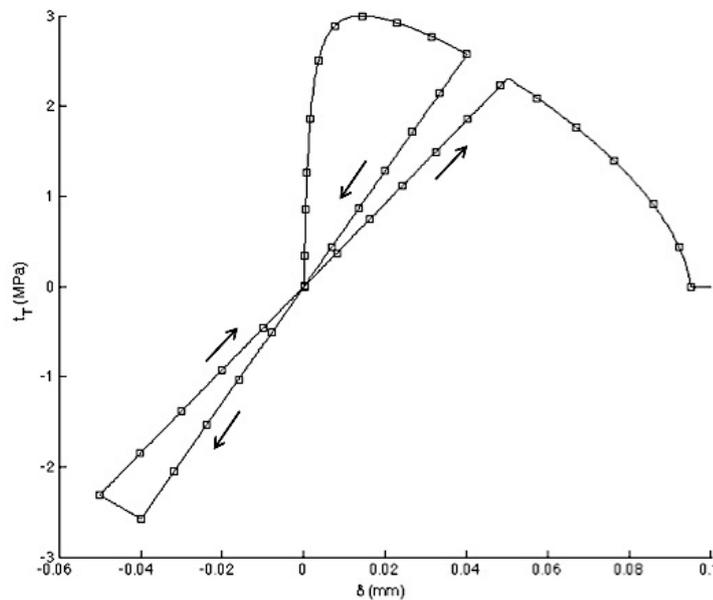
Fonte: Autor (2012).

No teste do modo II, controla-se o deslocamento lateral da chapa (δ). Inicialmente, a chapa é deslocada para a direita em 0,04 mm. Em seguida, a lateral da chapa retorna para a esquerda até um deslocamento de -0,05 mm e é movida novamente para a direita até a falha completa do material. A chapa é representada numericamente por um elemento finito quadrilateral de quatro nós (interpolação bilinear), com uma interface coesiva de quatro nós inserida em sua superfície inferior.

A Figura 3.10 mostra o gráfico que relaciona os deslocamentos impostos nas laterais da chapa e as correspondentes trações interfaciais que surgem no elemento coesivo. Enquanto a chapa se move inicialmente para a direita, as trações crescem até atingirem o valor de resistência do material na direção normal (τ_{\max}), e então é evidenciado o comportamento de amolecimento do material, cuja curva possui a forma côncava devido ao parâmetro de forma

relacionado ao modo II (β) ser menor que 2. Em seguida, o material é submetido a sucessivos estágios de carga: descarregamento (de 0,04 mm a -0,04 mm), amolecimento (de -0,04 mm a -0,05 mm), recarregamento (de -0,05 mm a 0,05 mm) e amolecimento final (de 0,05 mm até o aparecimento da falha cisalhante). Durante essas etapas, as trações interfaciais cisalhantes são determinadas através da regra linear em relação à origem para os trechos de descarga/recarga e através do gradiente tangencial do potencial PPR nos estágios de amolecimento (*softening*).

Figura 3.10 – Resultados numéricos para as trações interfaciais (separação puramente tangencial).



Fonte: Autor (2012).

3.5.3 Chapa Tracionada

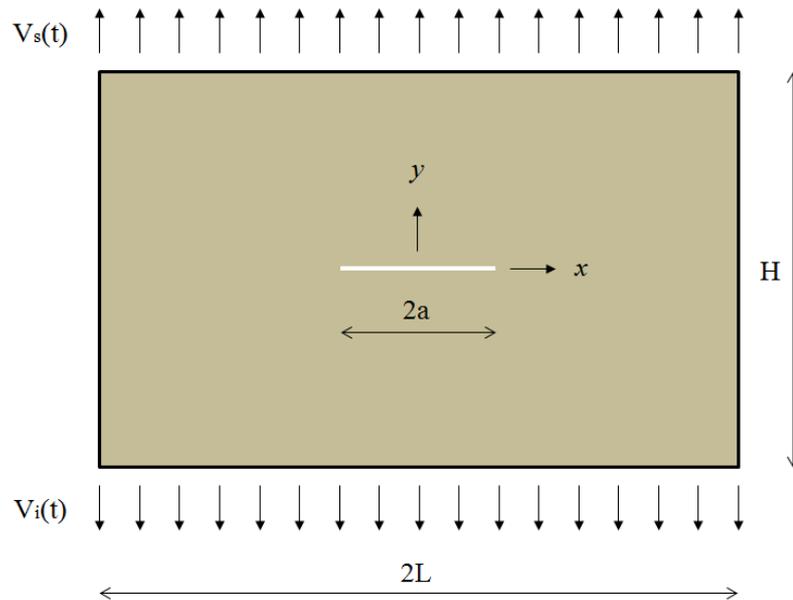
O modelo proposto por Xu e Needleman (1994) trata da análise dinâmica não amortecida de uma chapa com uma trinca inicial disposta horizontalmente em seu interior, onde a chapa é tracionada através de prescrições de campos de velocidade em suas extremidades superior e inferior. A análise é realizada em estado plano de deformações e a geometria do problema é ilustrada na Figura 3.11.

Os campos de velocidade $V_s(t)$ e $V_i(t)$ são definidos a partir de uma função rampa,

$$V_s(t) = -V_i(t) = \begin{cases} V t/t_r, & \text{para } t \leq t_r \\ V, & \text{para } t > t_r \end{cases} \quad (3.73)$$

onde V representa a velocidade final de tração nas extremidades superior e inferior da chapa e t_r representa o tempo de crescimento da função rampa.

Figura 3.11 – Chapa com trinca inicial e tracionada proposta por Xu e Needleman.



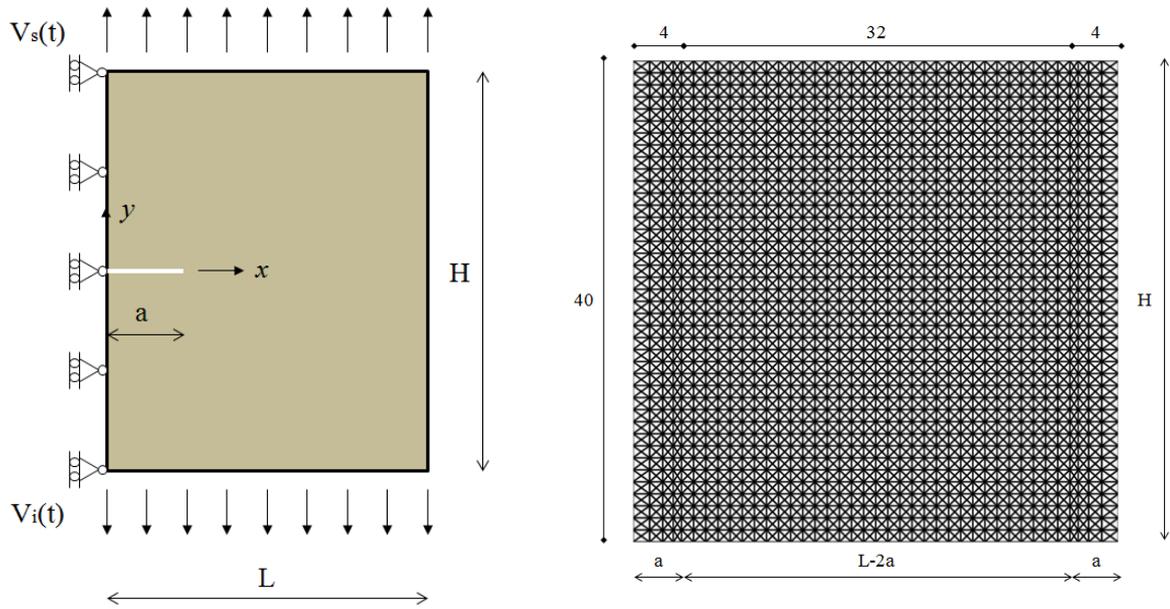
Fonte: Xu e Needleman (1994).

De forma a usufruir da simetria do problema em relação ao eixo y , opta-se por simular apenas o trecho da chapa onde $x \geq 0$, introduzindo apoios de primeiro gênero para restringir deslocamentos na direção x ao longo do eixo $x = 0$.

A discretização do problema é a mesma utilizada por Xu e Needleman (1994), onde há 40×40 divisões, sendo 40×32 células quadradas na parte central e 40×4 células retangulares variando gradativamente nas laterais da chapa e com o tamanho da célula menor sendo metade do tamanho da célula maior. Essa discretização forma um padrão quadrilateral que é subdividido, ao longo de suas diagonais, em quatro elementos finitos triangulares com deformações constantes. Elementos de interface são incorporados ao longo de todas as arestas internas da malha, exceto ao longo da trinca inicial, que representa uma descontinuidade. A Figura 3.12 mostra as condições de contorno do problema juntamente com a malha de elementos finitos utilizada.

O trecho da chapa analisado possui um comprimento L e uma altura H , e a trinca inicial possui comprimento a . A chapa é constituída de um material frágil, chamado PMMA (Polimetilmetacrilato), caracterizado através de valores do módulo de elasticidade (E), coeficiente de Poisson (ν), densidade (ρ) e taxa crítica de energia liberada (G_{IC}) na Tabela 3.5.

Figura 3.12 – Condições de contorno para simetrização e discretização utilizada.



Fonte: Xu e Needleman (1994).

Tabela 3.5 – Informações geométricas e do material.

L, H	α	E	ν	ρ	G_{IC}
3 mm	0,3 mm	3,24 GPa	0,35	1190 kg/m ³	352,3 N/m

Fonte: Autor (2012).

Utiliza-se o modelo de fratura coesiva de Xu e Needleman, com os valores dos parâmetros adotados conforme os trabalhos de Xu e Needleman (1994), Zhang (2003) e Amorim (2007) na Tabela 3.6, para facilitar posteriores comparações de resultados. O incremento de tempo adotado, que consiste em cerca de 5% do incremento de tempo crítico (Eq. (3.70)), bem como parâmetros do campo de velocidade são mostrados na Tabela 3.7.

Tabela 3.6 – Informações do modelo coesivo.

Φ_N, Φ_T	σ_{max}	τ_{max}	r
352,3 N/m	324 MPa	755,4 MPa	0

Fonte: Autor (2012).

Tabela 3.7 – Informações temporais.

V	t_r	Δt
5 m/s	0,1 μs	0,001 μs

Fonte: Autor (2012).

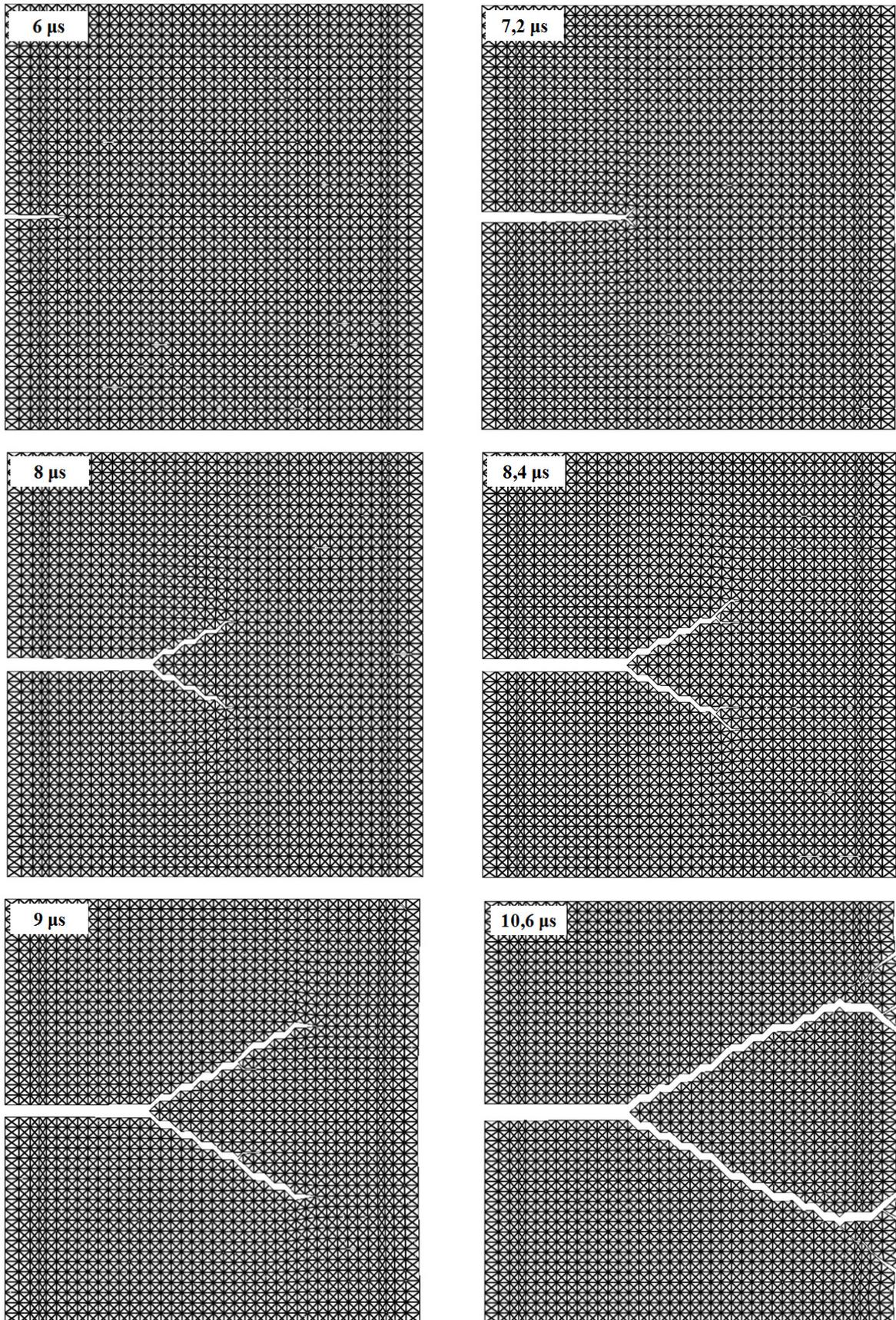
A Figura 3.13 ilustra a evolução da propagação e ramificação da trinca induzida inicialmente. Percebe-se que a propagação da trinca inicia por volta de $6 \mu s$ após o início da análise, caracterizando um intervalo de tempo necessário para que a tenacidade do material seja consumida, possibilitando dessa forma a evolução da trinca. Superando essa resistência inicial, a abertura da trinca evolui até cerca de $7,2 \mu s$, quando ocorre a sua ramificação. Posteriormente, cada ramo da trinca se propaga de maneira inclinada e simétrica, formando um ângulo de 29° em relação ao eixo x . A partir desse momento, cada ramificação continua predominantemente se propagando ao longo da direção de inclinação definida até que as aberturas alcançam o trecho final da placa por volta de $10,6 \mu s$, sofrendo uma mudança de direção devido ao diferente refinamento da malha naquela região do domínio.

Segundo Yoffe (1951), uma ramificação ocorre quando a velocidade de propagação da fratura no meio atinge um valor crítico de 60% da velocidade de propagação de onda transversal no material. Acima dessa velocidade, a componente normal de tensão é máxima para um determinado ângulo formado em relação à direção de propagação, que varia com a intensidade da velocidade, implicando que o fraturamento, propagado nessa velocidade, pode se tornar instável e resultar em uma ramificação.

A Figura 3.14 mostra a comparação dos resultados obtidos com os fornecidos por Amorim (2007) e Zhang (2003) para o tempo de simulação de $9 \mu s$, onde se percebe a conformidade entre o padrão de abertura e ramificação e a presença de pequenas ramificações temporárias, mostradas em detalhe. A Figura 3.15 mostra a comparação, novamente, com os resultados de Amorim (2007) e Zhang (2003), agora para o tempo de $10,6 \mu s$, onde todos os casos apresentam boa equivalência, observando uma morfologia final de trinca com duas ramificações principais. No trecho próximo à extremidade direita da chapa, os trabalhos apresentam ramos com diferenças morfológicas entre si, que são atribuídas à diferente discretização da malha na região e a erros numéricos inerentes à simulação.

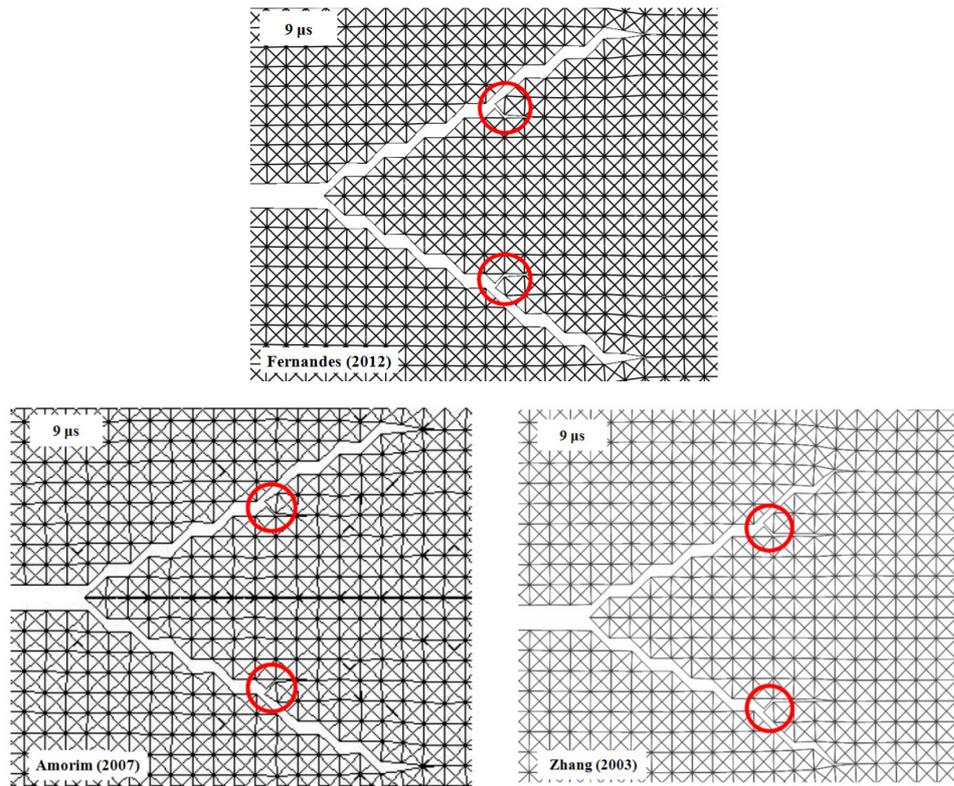
Na Figura 3.16, são confrontados os resultados obtidos com os fornecidos por Amorim (2007) e Xu e Needleman (1994), para o tempo de cerca de $8 \mu s$. Nota-se que o comprimento caracterizado desde a abertura inicial até o ponto de ramificação no trabalho de Xu e Needleman se estende até 1,275 mm, enquanto que no trabalho de Amorim e no presente trabalho, este comprimento encontra-se por volta de 1,05 mm. Apesar disso, observa-se que os trabalhos apresentam uma boa concordância.

Figura 3.13 – Evolução do fraturamento da chapa tracionada.



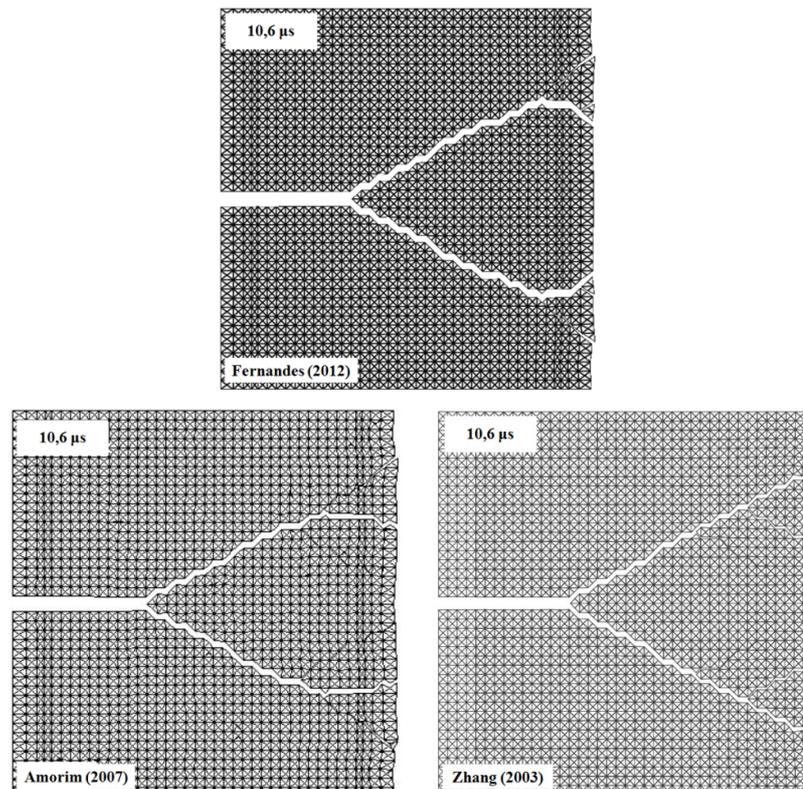
Fonte: Autor (2012).

Figura 3.14 – Detalhamento do comparativo do padrão de fraturamento para o tempo de $9 \mu s$.



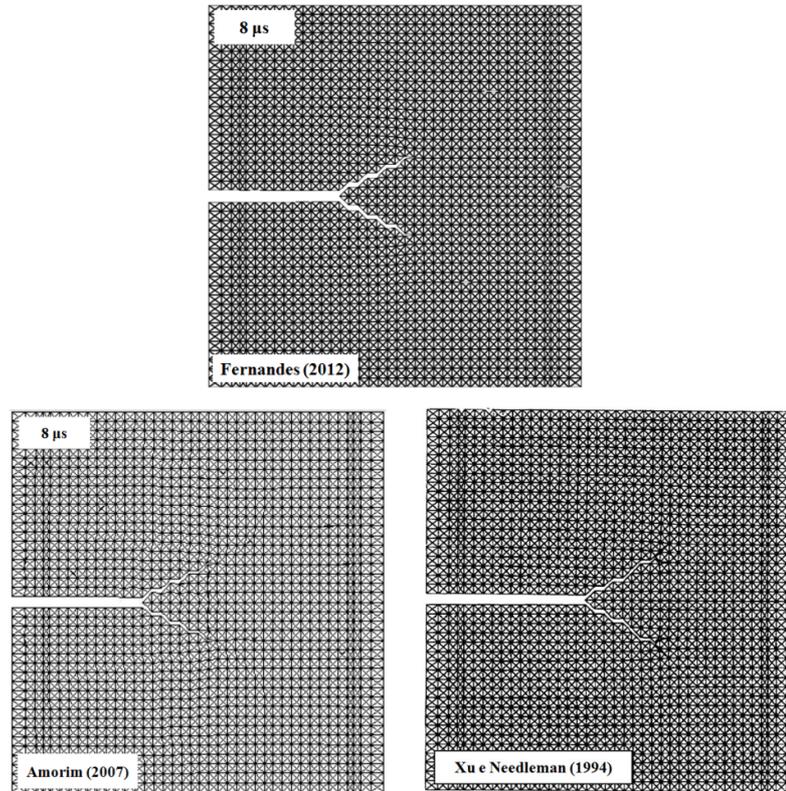
Fonte: Autor (2012).

Figura 3.15 – Comparativo do padrão de fraturamento para o tempo de $10,6 \mu s$.



Fonte: Autor (2012).

Figura 3.16 – Comparativo do padrão de fraturamento para o tempo de $8 \mu s$.



Fonte: Autor (2012).

Conforme é afirmado por Zhang (2003), com os resultados obtidos no presente trabalho, observa-se que o desenvolvimento de ramificações da trinca propicia o aparecimento de elementos sujeitos a um processo de grandes rotações, onde o regime de grandes deformações é de grande importância para captar tal fenômeno com mais precisão.

É importante ressaltar que as respostas apresentadas pelos quatro trabalhos são qualitativamente equivalentes e que as diferenças apresentadas são aceitáveis e esperadas, visto que o problema analisado possui um alto grau de instabilidade e que os trabalhos possuem diferentes acúmulos de erros numéricos em suas implementações computacionais.

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS

Este capítulo apresenta o Método dos Elementos Discretos (MED), que representa a técnica numérica utilizada neste trabalho para a modelagem e análise computacional de meios discretos. Inicialmente é feito um breve histórico sobre o método, destacando algumas características e os primeiros trabalhos na área (DEMOOP Versão 1.0, 2008). Apresenta-se ainda a formulação matemática a ser utilizada, destacando as equações de movimento, grandezas relativas, amortecimento do sistema, integração numérica, relações de força-deslocamento e algoritmos de busca por contatos (DEMOOP Versão 1.0, 2008; OÑATE e ROJEK, 2004).

4.1 Introdução

O Método dos Elementos Discretos (MED) consiste de uma ferramenta numérica adequada para análise de problemas de natureza descontínua e com fluxo individual de partículas. Devido a tais características, o MED tem sido aplicado em diversas áreas, sobretudo no campo da engenharia geotécnica, em trabalhos relacionados à Mecânica das Rochas (CUNDALL, 1971; TANNANT e WANG, 2004) e Mecânica dos Solos (KUHN, 2005; YAO e ANANDARAJAH, 2003). Segundo Moresi *et al.* (2001), o MED pertence a um grupo denominado métodos sem malha, onde as deformações no sistema podem ser maiores que um determinado nível de tolerância.

A Mecânica Computacional do Descontínuo consiste em uma área recente da Mecânica Computacional que trata de soluções de problemas descontínuos. Embora seu desenvolvimento teórico seja razoavelmente antigo, com trabalhos desenvolvidos na década de 1970, a aplicação de fato de métodos descontínuos na solução de problemas industriais e científicos apenas se tornou possível no final da década de 1990, devido à evolução dos computadores, que passaram a usufruir de uma maior capacidade de processamento e armazenamento de dados.

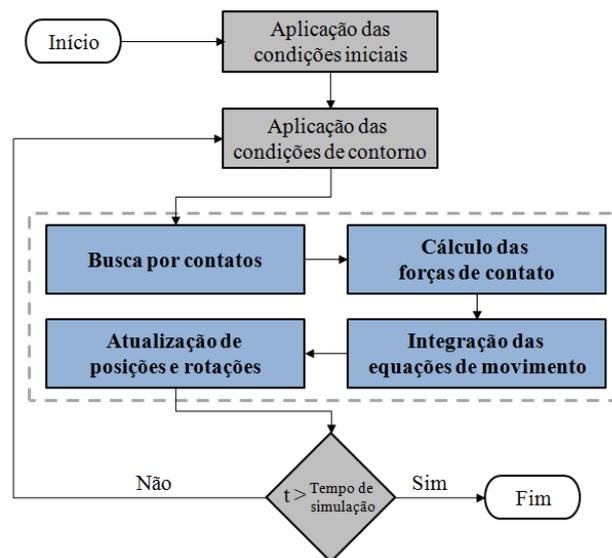
A primeira referência na literatura a apresentar o método foi o trabalho de Cundall e Strack (1979), onde os autores formalizaram o Método dos Elementos Distintos como um modelo numérico capaz de descrever o comportamento mecânico de um conjunto de discos ou esferas, utilizando elementos com contatos deformáveis e uma abordagem explícita para a solução temporal das equações de equilíbrio. Em seguida, Cundall e Hart (1992) definiram o Método dos Elementos Discretos como um método computacional que permitia o cálculo de

deslocamentos e rotações finitas para corpos discretos e o reconhecimento de novos contatos no decorrer da análise numérica.

Métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) encontram-se em um estágio de desenvolvimento bastante avançado, sendo considerados métodos tradicionais para a determinação de soluções aproximadas de problemas de valor de contorno. Diferentemente destes métodos, o Método dos Elementos Discretos ainda está em fase de pleno desenvolvimento, onde novas características propostas em trabalhos recentes na literatura são agregadas às ideias inicialmente apresentadas por Cundall e Strack (1979).

Para a aplicação do MED identificam-se algumas etapas básicas que devem ser executadas. Tais etapas são aplicadas ao longo do tempo, caracterizando um processo cíclico, conforme é ilustrado na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Processo cíclico caracterizando as etapas básicas de uma análise numérica com o MED.



Fonte: Adaptado de Lobo *et al.* (2009).

Inicialmente, são aplicadas as condições iniciais e de contorno do problema, caracterizando o início da análise numérica. Com isso, determinam-se os contatos entre os elementos e efetuam-se os cálculos das forças de contato, que dependem das relações de força-deslocamento empregadas. Então, faz-se a integração das equações de movimento, onde as variáveis cinemáticas são determinadas e utilizadas para definir as novas posições e rotações das partículas. Determinada esta nova configuração, o processo cíclico continua com a possível aplicação de novas condições de contorno ao problema, no caso destas serem

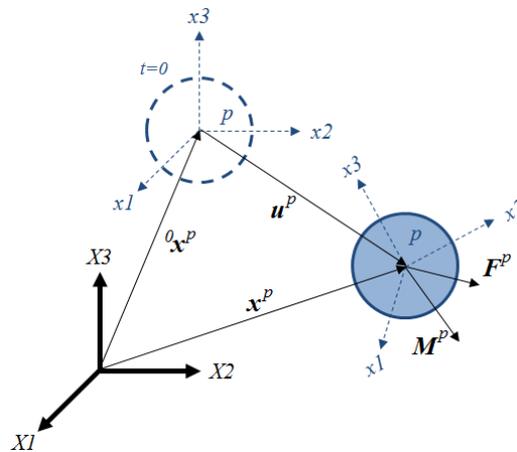
dependentes do tempo, e em seguida, com a determinação dos novos contatos e assim sucessivamente, até se chegar com tempo final de simulação, caracterizando o fim da análise numérica.

4.2 Equações de Movimento

Em uma análise numérica com o MED, deve-se primeiramente estabelecer um sistema de coordenadas global fixo e um sistema de coordenadas local, associado a cada partícula, de modo que seja possível quantificar seus deslocamentos e rotações. Desse modo, é possível se obter um histórico de grandezas cinemáticas do centróide de cada partícula (deslocamentos, velocidade e acelerações).

Na Figura 4.2, \mathbf{u}^p representa o vetor deslocamentos para uma dada partícula p em um tempo t qualquer, sendo obtido a partir de ${}^0\mathbf{x}^p$ e \mathbf{x}^p , que representam, respectivamente, os vetores com as posições iniciais e finais da partícula para um dado intervalo de tempo.

Figura 4.2 – Sistemas de coordenadas global e local.



Fonte: Oñate e Rojek (2004).

Para facilitar a representação das equações de movimento, os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações de uma dada partícula p são apresentados, respectivamente, como

$$\mathbf{U}^p = [\mathbf{u}^p \quad \boldsymbol{\theta}^p]^T \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^p = [\mathbf{v}^p \quad \boldsymbol{\omega}^p]^T \quad (4.2)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^p = [\mathbf{a}^p \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}^p]^T \quad (4.3)$$

onde \mathbf{u}^p , \mathbf{v}^p e \mathbf{a}^p representam, respectivamente, os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações translacionais; e $\boldsymbol{\theta}^p$, $\boldsymbol{\omega}^p$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}}^p$ representam os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações rotacionais, respectivamente.

Os termos inerciais são definidos pela massa (m^p) e pelo momento de inércia de cada partícula. Adotando-se os elementos discretos com forma esférica, assim, considerando que o sistema de coordenadas local de cada partícula coincide com os eixos principais de inércia, os três momentos principais de inércia são iguais ($I^p = I_1^p = I_2^p = I_3^p$). Dessa forma, define-se o vetor de massa associado a uma dada partícula p como sendo

$$\mathbf{m}^p = [m^p \quad m^p \quad m^p \quad I^p \quad I^p \quad I^p]^T \quad (4.4)$$

O movimento das partículas é governado pela equação de movimento para corpos rígidos, expressa de acordo com a Segunda Lei de Newton para translação e rotação como

$$m_i^p \ddot{U}_i^p = R_i^p \quad (4.5)$$

onde \mathbf{R}^p representa o vetor de forças e momentos resultantes no centróide de p , composto pelas contribuições de todas as ações atuantes na partícula p ,

$$\mathbf{R}^p = [\mathbf{F}^p \quad \mathbf{M}^p]^T = {}_{ext}\mathbf{R}^p + {}_{int}\mathbf{R}^p - {}_{amt}\mathbf{R}^p \quad (4.6)$$

$$\mathbf{F}^p = {}_{ext}\mathbf{F}^p + {}_{int}\mathbf{F}^p - {}_{amt}\mathbf{F}^p \quad (4.7)$$

$$\mathbf{M}^p = {}_{ext}\mathbf{M}^p + {}_{int}\mathbf{M}^p - {}_{amt}\mathbf{M}^p \quad (4.8)$$

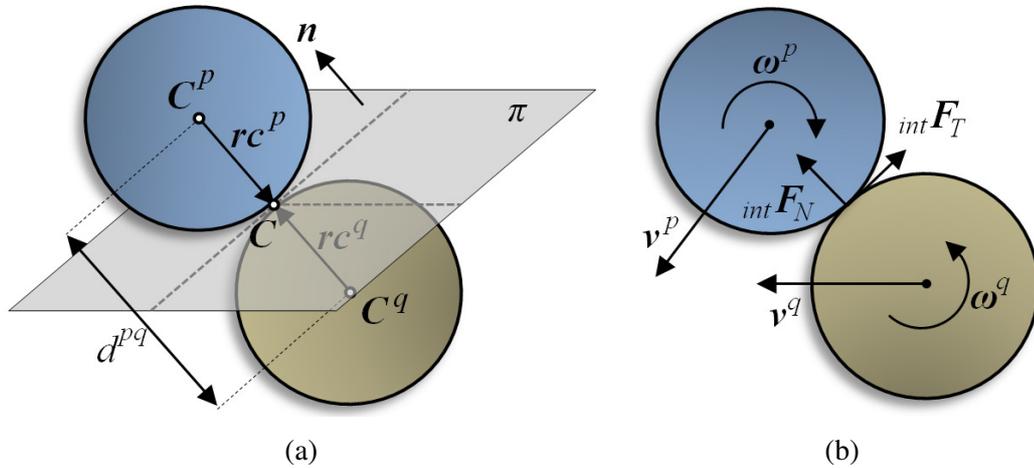
onde ${}_{ext}\mathbf{F}^p$ e ${}_{ext}\mathbf{M}^p$ representam as forças e momentos aplicados devido a cargas externas, ${}_{int}\mathbf{F}^p$ e ${}_{int}\mathbf{M}^p$ representam forças e momentos resultantes de interações com outras partículas ou obstáculos e, ${}_{amt}\mathbf{F}^p$ e ${}_{amt}\mathbf{M}^p$ representam a parcela de forças e momentos de amortecimento do sistema.

4.3 Deslocamentos e Velocidades Relativas

Para a definição de relações de interação no contato entre duas partículas p e q , define-se um plano de contato (π) como sendo o plano tangente a duas partículas no ponto de contato (\mathbf{C}), conforme é ilustrado na Figura 4.3(a). Os vetores que unem o centro das partículas (\mathbf{C}^p e \mathbf{C}^q) ao ponto de contato são representados por \mathbf{rc}^p e \mathbf{rc}^q , respectivamente, \mathbf{n} é o versor normal a π , e d^{pq} representa a distância entre os centros das partículas. A Figura

4.3(b) define os vetores de velocidades translacionais (\mathbf{v}^p e \mathbf{v}^q) e rotacionais ($\boldsymbol{\omega}^p$ e $\boldsymbol{\omega}^q$), e os componentes normal e tangencial da força de contato (${}_{int}\mathbf{F}_N$ e ${}_{int}\mathbf{F}_T$).

Figura 4.3 – Relações de interação durante o contato entre as partículas p e q .



Fonte: (a) Adaptado de DEMOOP Versão 1.0 (2008); (b) Oñate e Rojek (2004).

Conforme mostrado na Figura 4.3(b), a força de contato pode ser decomposta em componentes normal e tangencial. Esta interação pode ser quantificada pelas forças de contato ${}_{int}\mathbf{F}^p$ e ${}_{int}\mathbf{F}^q$, obedecendo à Terceira Lei de Newton, onde

$${}_{int}\mathbf{F} = {}_{int}\mathbf{F}_N + {}_{int}\mathbf{F}_T \quad \therefore \quad {}_{int}\mathbf{F} = {}_{int}\mathbf{F}^p = -{}_{int}\mathbf{F}^q \quad (4.9)$$

É possível determinar os deslocamentos e velocidades relativos que são utilizados para a quantificação dessas forças de contato através das relações força-deslocamento. Os deslocamentos e velocidades relativos são obtidos através dos seus componentes nas direções normal e tangencial, de forma semelhante à adotada por Oñate e Rojek (2004),

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{rN} + \mathbf{u}_{rT} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{rN} + \mathbf{v}_{rT} \quad (4.11)$$

Através da Figura 4.3(a) e da Figura 4.3(b), pode-se quantificar os componentes normal e tangencial dos deslocamentos e velocidades relativos como

$$\mathbf{u}_{rN} = (R^p + R^q - d^{pq}) \mathbf{n} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{v}_{rN} = [(\mathbf{v}^q - \mathbf{v}^p) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{u}_{rT} = \mathbf{u}_r - (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{v}_{rT} = \mathbf{v}_r - (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (4.15)$$

onde R^p e R^q representam os raios das partículas p e q , respectivamente; e \mathbf{u}_r e \mathbf{v}_r representam os vetores de deslocamentos e velocidades relativas entre as partículas, definidos como

$$\mathbf{u}_r = (\mathbf{u}^q + \boldsymbol{\theta}^q \times \mathbf{rc}^q) - (\mathbf{u}^p + \boldsymbol{\theta}^p \times \mathbf{rc}^p) \quad (4.16)$$

$$\mathbf{v}_r = (\mathbf{v}^q + \boldsymbol{\omega}^q \times \mathbf{rc}^q) - (\mathbf{v}^p + \boldsymbol{\omega}^p \times \mathbf{rc}^p) \quad (4.17)$$

4.4 Amortecimentos Globais

A consideração de amortecimentos globais no sistema promove a dissipação de energia, mesmo das partículas que não estão em contato com nenhum outro corpo. A incorporação do amortecimento é feita no cálculo das forças e momentos resultantes, ao se incluir uma parcela de forças e momentos amortecidos que é calculada em função da velocidade de cada partícula.

O amortecimento global de uma partícula p é definido através de suas parcelas: viscosa e não viscosa, ou seja,

$$amt\mathbf{F}^p = \underset{visc}{amt\mathbf{F}^p} + \underset{nvisc}{amt\mathbf{F}^p} \quad (4.18)$$

$$amt\mathbf{M}^p = \underset{visc}{amt\mathbf{M}^p} + \underset{nvisc}{amt\mathbf{M}^p} \quad (4.19)$$

A parcela viscosa está relacionada à magnitude da velocidade da partícula, enquanto que a parcela não viscosa está relacionada à magnitude das forças e momentos resultantes (OÑATE e ROJEK, 2004; SHIU e DONZÉ, 2005). Assim sendo, Oñate e Rojek (2004) apresentaram as seguintes expressões para as parcelas de amortecimento:

$$\underset{visc}{amt\mathbf{F}^p} = \alpha_{vT} m^p \mathbf{v}^p \quad (4.20)$$

$$\underset{visc}{amt\mathbf{M}^p} = \alpha_{vR} I^p \boldsymbol{\omega}^p \quad (4.21)$$

$$\underset{nvisc}{amt} \mathbf{F}^p = \alpha_{nvT} \|\underset{ext}{\mathbf{F}}^p + \underset{int}{\mathbf{F}}^p\| \frac{\mathbf{v}^p}{\|\mathbf{v}^p\|} \quad (4.22)$$

$$\underset{nvisc}{amt} \mathbf{M}^p = \alpha_{nvR} \|\underset{ext}{\mathbf{M}}^p + \underset{int}{\mathbf{M}}^p\| \frac{\boldsymbol{\omega}^p}{\|\boldsymbol{\omega}^p\|} \quad (4.23)$$

onde α_{vT} , α_{vR} , α_{nvT} e α_{nvR} representam, respectivamente, os coeficientes de amortecimento viscoso translacional, viscoso rotacional, não viscoso translacional e não viscoso rotacional.

4.5 Integração Numérica

Para solucionar as equações diferenciais de movimento resultantes da formulação do MED, geralmente opta-se por métodos numéricos explícitos de integração temporal, visto que esses são bastante utilizados em associação com o MED (O'SULLIVAN e BRAY, 2004).

Algoritmos explícitos se baseiam em obter a solução no tempo $t + \Delta t$ considerando-se as condições de equilíbrio no tempo t , e geralmente apresentam baixo custo computacional por intervalo de tempo, visto que não há necessidade de processos iterativos para obtenção da solução em $t + \Delta t$. Cundall e Strack (1979) afirmaram que o incremento de tempo escolhido (Δt), em uma análise com o MED, deve ser pequeno o suficiente para que durante um único passo de tempo as perturbações não se propagem além da vizinhança de cada partícula. Essa consideração reforça o fato de que os incrementos de tempo utilizados na solução do MED têm pequena ordem de grandeza, favorecendo o uso de métodos explícitos.

O Método da Diferença Central (MDC) é o algoritmo de integração explícito utilizado neste trabalho. Essa técnica é bastante utilizada para solução dinâmica do MED, sendo sua formulação baseada em aproximações por diferenças centrais para as velocidades e acelerações na forma (adaptada de Cook *et al.*, 1989)

$${}^{n+1}U_i = {}^nU_i + \Delta t {}^n\dot{U}_i + \frac{\Delta t^2}{2} {}^n\ddot{U}_i \quad (4.24)$$

$${}^{n+1}\ddot{U}_i = {}^{n+1}R_i/m_i \quad (4.25)$$

$${}^{n+1}\dot{U}_i = {}^n\dot{U}_i + \frac{\Delta t}{2} ({}^n\ddot{U}_i + {}^{n+1}\ddot{U}_i) \quad (4.26)$$

onde os índices i e n representam, respectivamente, os graus de liberdade livres das partículas do sistema e, um passo de tempo qualquer da análise numérica.

Em contrapartida à eficiência computacional apresentada por métodos explícitos, estes algoritmos são, geralmente, condicionalmente estáveis, onde o incremento de tempo utilizado deve ser menor ou igual a um dado incremento de tempo crítico, ou seja,

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} \quad (4.27)$$

Na literatura, alguns autores recomendam modelos para o cálculo do incremento de tempo crítico. Cundall e Strack (1979) propuseram um modelo de intervalo de tempo crítico estimado com base em um sistema massa-mola com um grau de liberdade, dado por

$$\Delta t_{cr} = 2 \sqrt{\frac{m_{min}}{k_{max}}} \quad (4.28)$$

onde m_{min} representa o menor valor de massa associado a uma partícula e k_{max} , o maior valor de rigidez associado a um contato.

Independente da estratégia utilizada, o cálculo do intervalo de tempo crítico deve ser avaliado cuidadosamente, visto que, caso contrário, instabilidades e imprecisões podem ser causadas na etapa de integração numérica. Ressalta-se também que o valor de Δt_{cr} pode ser aumentado quando se trata de uma análise quase-estática, onde os efeitos de inércia não são influentes na solução. Nesse caso, um aumento fictício da massa gera um intervalo de tempo crítico maior, assumindo que a resposta do sistema não é sensível aos efeitos de inércia.

4.6 Relações Força-Deslocamento

A quantificação das forças de contato geralmente envolve modelos micro-mecânicos ou teóricos, e na análise através do MED podem-se adotar abordagens alternativas visando representar os efeitos de colisão satisfatoriamente. Um método bastante utilizado é o Método da Penalidade, onde a interpenetração é evitada utilizando um parâmetro de penalidade que gera uma força repulsiva suficientemente grande para impedir a superposição dos corpos.

Neste trabalho, consideram-se partículas rígidas, onde o método da penalidade é utilizado para garantir a impenetrabilidade. Esse método é associado a modelos reológicos que representam os comportamentos físicos de um meio granular no nível de escala do grão. Relações unidimensionais são consideradas, uma vez que o cálculo de cada componente, normal e tangencial, da força de contato é considerado separadamente, utilizando,

respectivamente, os componentes normais e tangenciais de deslocamentos e velocidades relativas, descritos anteriormente na Seção 4.3, onde se adota

$$u_{rN} = \|\mathbf{u}_{rN}\|, \quad u_{rT} = \|\mathbf{u}_{rT}\|, \quad v_{rN} = \|\mathbf{v}_{rN}\|, \quad v_{rT} = \|\mathbf{v}_{rT}\| \quad (4.29)$$

$$f_N = \|\text{int}\mathbf{F}_N\|, \quad f_T = \|\text{int}\mathbf{F}_T\| \quad (4.30)$$

Entre os modelos de força-deslocamento mais utilizados na literatura estão modelos que consideram associação de componentes elásticos, viscosos, de atrito e de coesão em sua formulação. São apresentados os modelos Hooke e Kelvin, que serão utilizados na caracterização das forças de contato em casos estudados no presente trabalho.

4.6.1 Modelo Hooke

Consiste em um modelo em que a relação força-deslocamento é representada por um comportamento elástico linear. As forças normal e tangencial são determinadas diretamente a partir das suas respectivas rigidezes.

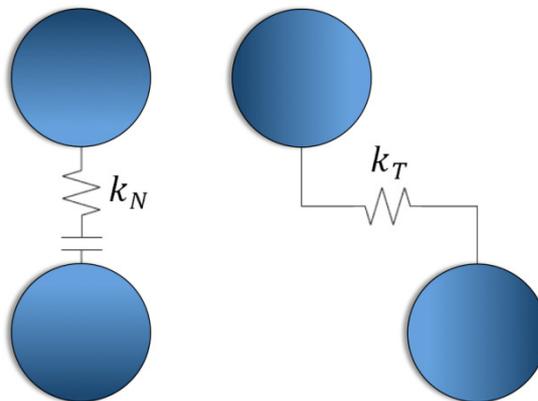
$$f_N = k_N u_{rN} \quad (4.31)$$

$$f_T = k_T u_{rT} \quad (4.32)$$

onde k_N e k_T representam as rigidezes normal e tangencial, respectivamente, e são adotados como valores não negativos para evitar inconsistências físicas.

A Figura 4.4 ilustra o modelo massa-mola de Hooke para caracterização do contato normal e tangencial entre partículas.

Figura 4.4 – Modelo Hooke de força-deslocamento para as direções normal e tangencial.



4.6.2 Modelo Kelvin

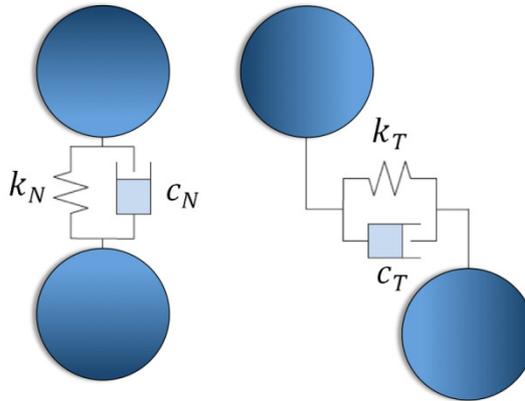
O Modelo Kelvin (Figura 4.5) consiste em uma associação em paralelo de um elemento elástico-linear (mola) com um elemento viscoso-linear (amortecedor). Dessa forma, as forças calculadas através desse modelo dependem tanto dos deslocamentos relativos, como das velocidades relativas entre partículas. As parcelas de força normal e tangencial são determinadas de modo semelhante, a partir de suas respectivas rigidezes e amortecimentos.

$$f_N = k_N u_{rN} + c_N v_{rN} \quad (4.33)$$

$$f_T = k_T u_{rT} + c_T v_{rT} \quad (4.34)$$

onde c_N e c_T representam os coeficientes de amortecimento normal e tangencial, respectivamente, e são adotados como valores reais não negativos, para se garantir consistência física ao modelo.

Figura 4.5 – Modelo Kelvin de força-deslocamento para as direções normal e tangencial.



Fonte: DEMOOP Versão 1.0 (2008).

Geralmente, ao invés de se determinar diretamente os coeficientes c_N e c_T , adotam-se valores percentuais dessas grandezas (f_{c_N} , f_{c_T}) em relação a um valor de amortecimento crítico determinado previamente, onde são válidas as seguintes relações:

$$c_N = 2f_{c_N} \sqrt{m_{eq} k_N} \quad (4.35)$$

$$c_T = 2f_{c_T} \sqrt{I_{eq} k_T} \quad (4.36)$$

onde m_{eq} e I_{eq} representam, respectivamente, a massa e o momento de inércia equivalentes para o contato. No caso de contato entre duas partículas p e q , a massa e o momento de inércia equivalentes são definidos como

$$m_{eq} = \frac{m^p m^q}{m^p + m^q} \quad (4.37)$$

$$I_{eq} = \frac{I^p I^q}{I^p + I^q} \quad (4.38)$$

4.7 Busca por Contatos

No Método dos Elementos Discretos (MED) várias partículas independentes interagem durante a análise numérica, de forma que, para se alcançar resultados coerentes nessas interações, faz-se necessário garantir que dois corpos não ocupem o mesmo lugar no espaço em um dado instante de tempo. O tratamento do contato entre partículas é composto por duas etapas: a detecção dos contatos e a interação no contato (MUNJIZA, 2004).

A detecção ou busca por contatos consiste na etapa onde se procura quais os pares de partículas que estão próximos o suficiente para estarem em contato. Uma vez detectado um contato entre duas partículas, torna-se necessário quantificar as forças de interação mobilizadas em cada caso, fazendo uso das relações força-deslocamento apresentadas anteriormente.

A busca por contatos entre partículas consiste na etapa de maior esforço computacional em uma simulação com o MED. Na busca de contatos considerando todas as N possibilidades em N partículas do sistema são envolvidas operações com complexidade computacional proporcional a N^2 , tornando o método limitado para solução de problemas que envolvam milhões de partículas (CARVALHO JR. e CINTRA, 2006).

A seguir são apresentados dois algoritmos de busca de contatos: o Método da Verificação Direta, de ordem $O(N^2)$ e o Método do Mapeamento Direto ou NBS (MUNJIZA e ANDREWS, 1998), de ordem $O(N)$ para partículas de tamanho semelhantes.

4.7.1 Método da Verificação Direta

Consiste em um algoritmo bastante intuitivo para a busca por contatos. Para o caso deste trabalho, onde se faz uso apenas de partículas com formas circulares, a verificação da

interseção é dada de forma bem simples, onde ocorre a detecção de um contato quando a penetração entre os discos for positiva, ou seja,

$$\mathbf{u}_{rN} \cdot \mathbf{n} > 0 \quad (4.39)$$

Em geral, as etapas do Método da Verificação Direta são as representadas no Algoritmo 4.1.

Algoritmo 4.1 – Método da Verificação Direta.

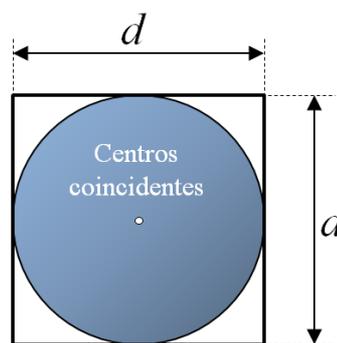
Para i de 1 até N (*loop* nos elementos discretos)
Para j de $i + 1$ até N (*loop* nos elementos restantes)
 Verifica se o elemento i está em contato com o elemento j
Fim de Para
Fim de Para

Fonte: Munjiza (2004).

4.7.2 Método do Mapeamento Direto

O algoritmo de mapeamento direto baseia-se em mapeamentos espaciais, dividindo o espaço em células de mesmo tamanho. Para o caso de partículas em forma circular, o tamanho das células individuais é escolhido de tal forma que o maior elemento discreto possa ser envolvido pelas células. Dessa forma, o diâmetro (d) do disco que representa o maior elemento discreto deve coincidir com o lado das células (Figura 4.6).

Figura 4.6 – Definição do tamanho das células para o Método do Mapeamento Direto.

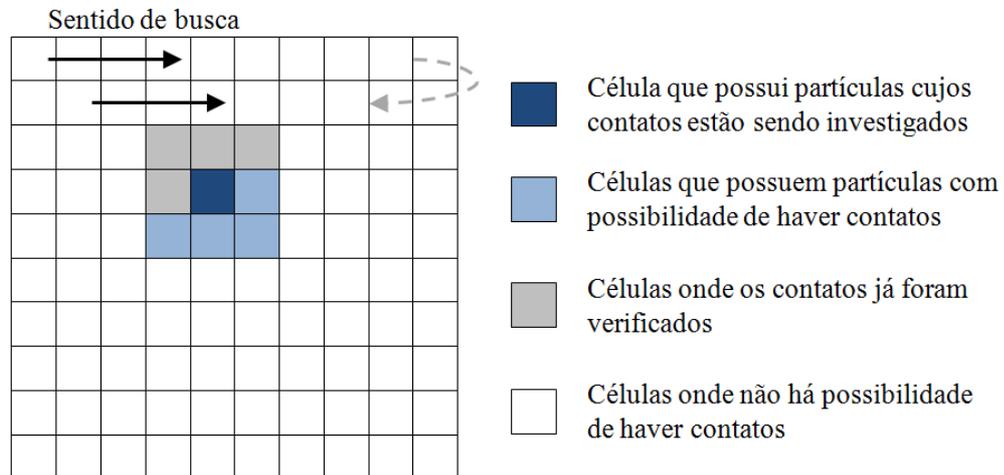


Fonte: DEMOOP Versão 1.0 (2008).

O procedimento divide-se em duas etapas: mapeamento dos elementos discretos nas células e busca pelos elementos discretos que podem estar em contato. Para determinar os contatos considera-se que, como cada um dos elementos discretos cabe em uma única célula, se o centróide do elemento coincide com o centro da célula, significa que nenhuma parte do elemento está fora da célula (centros coincidentes). Considera-se também que quando dois

elementos são mapeados em células vizinhas, estes podem estar em contato (Figura 4.7), desta forma, elementos pertencentes a células que já foram verificadas e a células distantes (não vizinhas) não entram na busca por contatos.

Figura 4.7 – Ilustração do Método de Mapeamento Direto.



Fonte: DEMOOP Versão 1.0 (2008).

O Método do Mapeamento Direto é adequado para análises onde o diâmetro das partículas possui baixa variabilidade, dessa forma tem-se um algoritmo de busca por contatos com complexidade computacional $O(N)$, apresentando tempo de processamento bem menor se comparado ao Método de Verificação Direta.

5 ACOPLAMENTO MEF-MED

Este capítulo apresenta os aspectos relacionados ao acoplamento entre o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos Discretos (MED) utilizado neste trabalho. Baseia-se na abordagem dinâmica proposta no trabalho de Oñate e Rojek (2004), onde se define uma estratégia de contato entre elementos finitos e discretos, fazendo uma analogia com o contato entre partículas, e caracterizando as forças de interação associadas. São mostrados uma esquematização da combinação entre os métodos, um caso para validação da metodologia e aplicações nas áreas de Estabilidade de Poço e Geologia Estrutural para demonstrar a capacidade da ferramenta desenvolvida.

5.1 Caracterização do Contato

Neste trabalho, a utilização do acoplamento MEF-MED envolve o tratamento de contatos entre elementos discretos de forma circular e o contorno de subdomínios contínuos discretizados através de elementos finitos. De forma similar ao caso do contato entre duas partículas, a força de contato entre a partícula e a aresta de contorno (${}_{int}\mathbf{F}$) é decomposta em componentes na direção normal e tangencial (${}_{int}\mathbf{F}_N$ e ${}_{int}\mathbf{F}_T$).

A Figura 5.1 ilustra o contato entre uma partícula circular (p) e uma aresta de contorno da malha de elementos finitos (e), onde a aresta é representada por um elemento linear de dois nós, A e B , que possuem os respectivos vetores de velocidades \mathbf{v}^A e \mathbf{v}^B associados. Na partícula, \mathbf{v}^p e $\boldsymbol{\omega}^p$ representam os respectivos vetores de velocidades translacionais e rotacionais; e \mathbf{rc}^p representa o vetor que une o centro (C^p) ao ponto de contato, podendo ser calculado através da expressão vetorial

$$\mathbf{rc}^p = \frac{\overrightarrow{AC}^p \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}^p \quad (5.1)$$

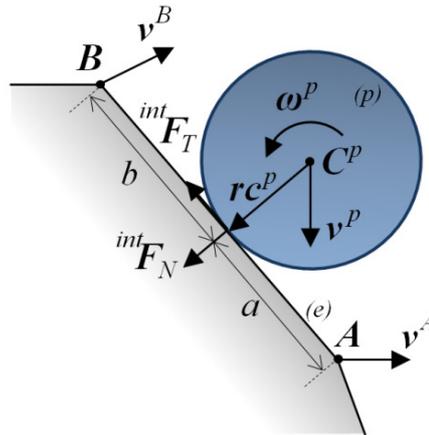
sendo \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC}^p os vetores que unem o nó A ao nó B e ao centro C^p , respectivamente.

O contato acontece, de fato, quando ocorre a superposição das posições geométricas da partícula e da aresta de contorno, ou seja, quando é válida a seguinte relação:

$$\|\mathbf{rc}^p\| < R^p \quad (5.2)$$

onde R^p representa o raio da partícula p . Nesse caso, procede-se com o cálculo da força de contato ${}^{int}\mathbf{F}$, que ocorre devido à interação entre os dois corpos. Essa força é definida através dos componentes dos vetores de deslocamentos e velocidades relativos representados, respectivamente, por \mathbf{u}_r e \mathbf{v}_r .

Figura 5.1 – Contato entre uma partícula de forma circular e uma aresta de contorno da malha de elementos finitos.



Fonte: Adaptado de Oñate e Rojek (2004).

Fazendo uma analogia com o caso de contato entre duas partículas, conforme as Eqs. (4.12) a (4.15), os componentes normal e tangencial dos vetores de deslocamentos e velocidades relativos podem ser expressos por

$$\mathbf{u}_{rN} = (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = R^p \mathbf{n} - \mathbf{r} \mathbf{c}^p \quad (5.3)$$

$$\mathbf{v}_{rN} = (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = [(\mathbf{v}^p - \mathbf{v}^e) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{u}_{rT} = \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_{rN} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{v}_{rT} = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_{rN} \quad (5.6)$$

sendo \mathbf{n} o versor normal a superfície de contato, expresso por

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} \mathbf{c}^p}{\|\mathbf{r} \mathbf{c}^p\|} \quad (5.7)$$

e com os deslocamentos e velocidades relativos, no ponto de contato, quantificados como

$$\mathbf{u}_r = (\mathbf{u}^p + \boldsymbol{\theta}^p \times \mathbf{r} \mathbf{c}^p) - \mathbf{u}^e \quad (5.8)$$

$$\mathbf{v}_r = (\mathbf{v}^p + \boldsymbol{\omega}^p \times \mathbf{r}c^p) - \mathbf{v}^e \quad (5.9)$$

onde \mathbf{u}^p e $\boldsymbol{\theta}^p$ representam, respectivamente, o vetor com os deslocamentos e as rotações no centróide da partícula p , na configuração corrente e em relação à configuração inicial; e, \mathbf{u}^e e \mathbf{v}^e representam os respectivos deslocamentos e velocidades da aresta de contorno e no ponto de contato, expressos por

$$\mathbf{u}^e = N_A(\xi) \mathbf{d}^A + N_B(\xi) \mathbf{d}^B \quad (5.10)$$

$$\mathbf{v}^e = N_A(\xi) \mathbf{v}^A + N_B(\xi) \mathbf{v}^B \quad (5.11)$$

sendo N_A e \mathbf{d}^A , respectivamente, as funções de interpolação do elemento finito linear associado à aresta de contorno e , e o vetor de deslocamentos na configuração corrente, ambos associados ao nó A ; N_B e \mathbf{d}^B , as mesmas variáveis, porém associadas ao nó B ; e ξ , a coordenada paramétrica do ponto de contato.

5.2 Cálculo das Forças de Interação

Caracterizados os componentes normal e tangencial dos deslocamentos e velocidades relativos entre a partícula p e a aresta de contorno e , a força de contato ${}_{int}\mathbf{F}$ é quantificada através de sua decomposição nas mesmas direções, com isso

$${}_{int}\mathbf{F} = {}_{int}\mathbf{F}_N + {}_{int}\mathbf{F}_T \quad (5.12)$$

Essa quantificação é feita através dos módulos das parcelas normal e tangencial da força de contato, representadas, respectivamente, por f_N e f_T , que são calculadas através das relações força-deslocamento, apresentadas na Seção 4.6, em função de u_{rN} , v_{rN} , u_{rT} e v_{rT} , que representam os módulos dos componentes normal e tangencial dos vetores de deslocamento e velocidades relativos,

$$\|{}_{int}\mathbf{F}_N\| = f_N(u_{rN}, v_{rN}) \quad (5.13)$$

$$\|{}_{int}\mathbf{F}_T\| = f_T(u_{rT}, v_{rT}) \quad (5.14)$$

$$u_{rN} = \|\mathbf{u}_{rN}\|, \quad u_{rT} = \|\mathbf{u}_{rT}\|, \quad v_{rN} = \|\mathbf{v}_{rN}\|, \quad v_{rT} = \|\mathbf{v}_{rT}\| \quad (5.15)$$

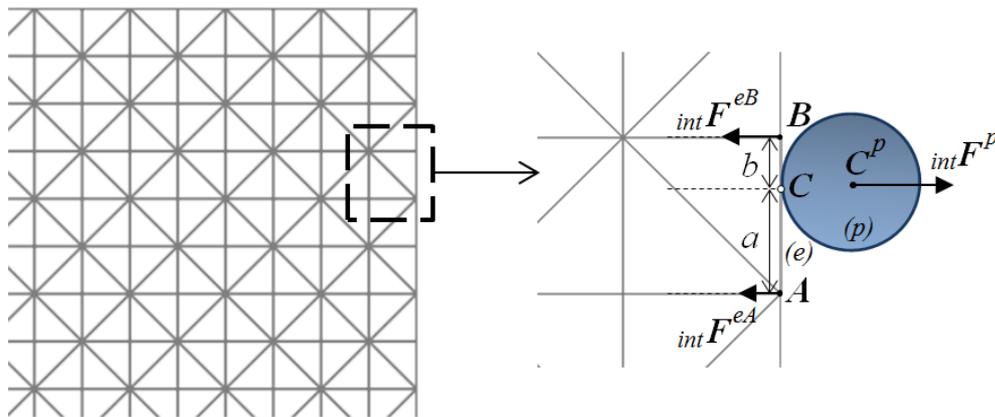
Desse modo, definida a força de contato ${}_{int}\mathbf{F}$, tal força é aplicada à partícula p e à aresta e , obedecendo ao princípio da ação e reação, regido pela Terceira Lei de Newton, onde

$int\mathbf{F}$ possui mesma intensidade, direção e sentido que a força $int\mathbf{F}^e$, aplicada na aresta de contorno da malha de elementos finitos, e mesma intensidade, direção, porém sentido contrário ao da força $int\mathbf{F}^p$, aplicada na partícula circular,

$$int\mathbf{F} = int\mathbf{F}^e = -int\mathbf{F}^p \quad (5.16)$$

A Figura 5.2 ilustra essa estratégia para distribuição das forças de interação entre os corpos, onde C representa o ponto de contato entre a partícula e a aresta de contorno; os comprimentos a e b representam as distâncias entre o ponto de contato e os nós A e B , respectivamente; e as forças $int\mathbf{F}^{eA}$ e $int\mathbf{F}^{eB}$ representam os respectivos componentes da força de contato $int\mathbf{F}^e$ aplicadas aos nós A e B da aresta.

Figura 5.2 – Distribuição das forças de interação no contato entre a partícula p e a aresta e



Fonte: Adaptada de Araújo (2007).

Através dessas considerações, as forças de interação $int\mathbf{F}^{eA}$ e $int\mathbf{F}^{eB}$ podem ser determinadas através das seguintes relações:

$$int\mathbf{F}^{eA} = \frac{b}{a+b} int\mathbf{F}^e \quad (5.17)$$

$$int\mathbf{F}^{eB} = \frac{a}{a+b} int\mathbf{F}^e \quad (5.18)$$

onde as intensidades das componentes $int\mathbf{F}^{eA}$ e $int\mathbf{F}^{eB}$ são diretamente proporcionais à distância do ponto de contato aos respectivos nós A e B .

As distâncias a e b podem ser quantificadas a partir das coordenadas do centro C^p e dos nós A e B da aresta na configuração corrente como

$$a = \|\overline{AC^p} + rc^p\| \quad (5.19)$$

$$b = \|\overline{AB}\| - a \quad (5.20)$$

5.3 Estratégia Proposta

Neste trabalho, simulam-se numericamente casos onde o domínio espacial do problema possa ser discretizado por elementos finitos e elementos discretos. O Método dos Elementos Finitos (MEF) representa um método numérico bastante eficaz no tratamento de meios contínuos, enquanto que o Método dos Elementos Discretos (MED) possui hipóteses cinemáticas mais apropriadas na modelagem de meios granulares (discretos). Ainda no escopo deste trabalho, a formulação matemática utilizada no MEF prevê a incorporação de elementos de interface coesivos, situados nas arestas internas da malha de elementos finitos, com a finalidade de simular casos onde os processos de nucleação e propagação de fraturas sejam inerentes à natureza do problema.

Para a modelagem de meios contínuos, utiliza-se uma abordagem dinâmica onde a integração das equações de movimento é realizada através do Método das Diferenças Centrais (MDC), que consiste em um algoritmo explícito para integração numérica. Em problemas em que as forças inerciais não sejam de grande relevância (problemas quase-estáticos), consideram-se as velocidades v^A e v^B , referentes aos nós das arestas de contorno da malha de elementos finitos, bem como a velocidade v^e da aresta no ponto de contato como sendo nulas,

$$v^A = v^B = v^e = 0 \quad (5.21)$$

Essa metodologia é admitida como uma forma de acelerar o processo de dissipação da energia cinética do meio contínuo e para simplificar a transmissão de informações entre os módulos computacionais responsáveis pelas análises através do MEF e do MED.

Na modelagem através do MED, a abordagem dinâmica permite simular um comportamento viscoso do meio particulado, onde as relações força-deslocamento que incorporam parcelas viscosas são, de fato, dependentes do tempo. Deste modo, a integração das equações de movimento também é feita através do MDC.

Na análise dos meios granulares através do MED, utiliza-se o *software* DEMOOP (*Discrete Element Method Oriented Object Programming*) (CARVALHO JR. e CINTRA, 2006), onde se deve, primeiramente, estabelecer as condições iniciais e de contorno do

problema, e então, para cada passo de tempo, procede-se com as etapas de busca por contatos entre partículas, quantificação das forças de contato, integração numérica das equações dinâmicas através do MDC e atualização das posições e rotações das partículas, até que se atinja o tempo final de simulação. Para o caso de existirem condições de contorno dependentes do tempo para o problema, essas também são atualizadas a cada passo de tempo.

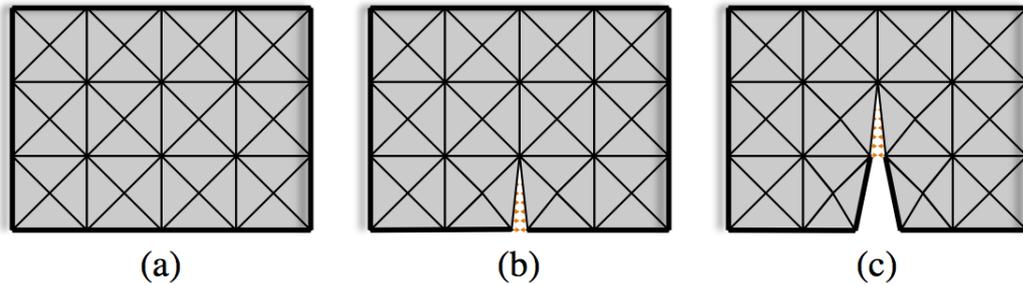
Na análise de meios contínuos fraturáveis, desenvolve-se um código computacional utilizando a formulação do MEF e da MFC (FEMcode), onde para cada passo de análise determinam-se as condições de contorno que deverão ser aplicadas e atualiza-se a configuração do corpo através da integração das equações de movimento, atualizando deslocamentos e tensões nos nós e elementos do domínio espacial do problema.

Os módulos computacionais DEMOOP e FEMcode são desenvolvidos utilizando-se linguagem de programação C++ (STROUSTRUP, 2000), e tirando proveito do paradigma de programação orientada a objetos (POO), que agrega características de modularidade e reusabilidade ao código computacional. No modelo de acoplamento proposto neste trabalho, se faz proveito da POO, e implementa-se a classe *FEMcodeInterface*, responsável pela comunicação de informações entre o DEMOOP e o FEMcode, necessárias para o acoplamento numérico entre os métodos. Nessa comunicação, basicamente dois tipos de informações são transmitidas: posições geométricas atualizadas das arestas de contorno de sub-regiões contínuas (MEF→MED) e caracterização de forças de contato entre partículas e essas arestas de contorno da malha de elementos finitos (MED→MEF).

A constante atualização das posições geométricas das arestas de contorno de elementos finitos é necessária visto que durante a simulação numérica, novos contornos, mostrados em negrito na Figura 5.3, podem ser definidos devido à separação interfacial de superfícies internas que pode ocorrer por conta dos mecanismos de falha incorporados ao meio contínuo, onde o novo contorno é definido como o contorno tradicional da malha de MEF, onde se aplicam as condições de contorno naturais (Γ_{σ}^{MEF}) e essenciais (Γ_u^{MEF}), e as novas superfícies internas oriundas do processo de nucleação e propagação de fraturas ao longo do domínio (Γ_c^{MEF}).

$$\Gamma^{MEF} = \Gamma_u^{MEF} + \Gamma_{\sigma}^{MEF} + \Gamma_c^{MEF} \quad (5.22)$$

Figura 5.3 – Influência do fraturamento na atualização do contorno: (a) malha original; (b) aparecimento de trações coesivas; (c) falha total na aresta de interface formando um novo contorno.



Fonte: Autor (2012).

As posições geométricas atualizadas das arestas de contorno da malha de elementos finitos são informadas ao módulo responsável pela análise dos elementos discretos (FEMcode→DEMOOP), que efetua buscas por contatos do tipo partícula-partícula e partícula-aresta.

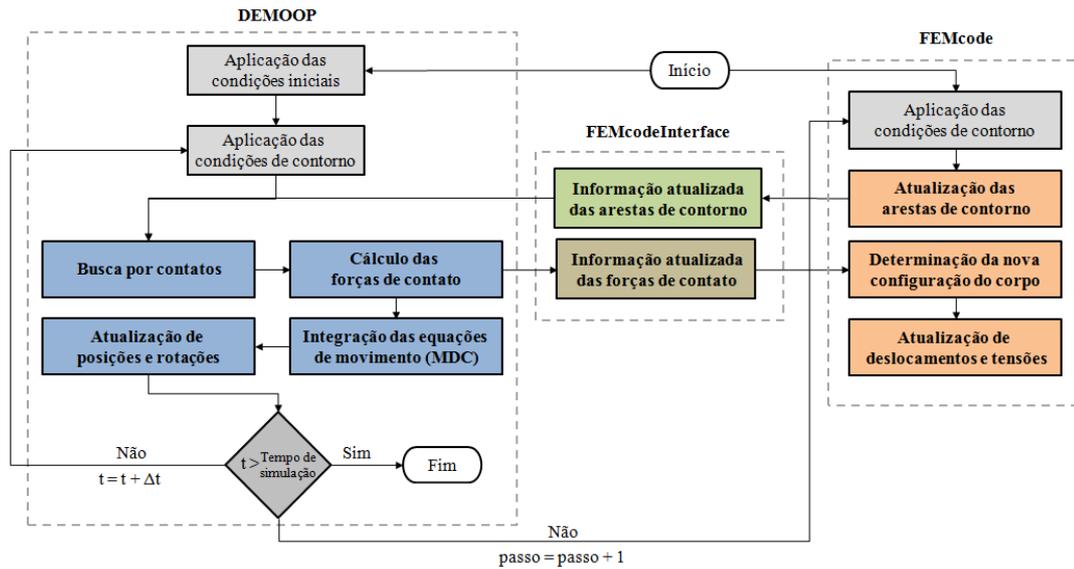
No caso da detecção de contato do tipo partícula-aresta, calculam-se forças de interação provenientes da sobreposição geométrica desses corpos, sendo essas forças de reação aplicadas à partícula (${}_{int}\mathbf{F}^p$) e à aresta (${}_{int}\mathbf{F}^e$). Para isso, há uma nova comunicação entre os módulos computacionais, sendo que agora, informações referentes à caracterização da força de contato são transmitidas para o módulo de elementos finitos (DEMOOP→FEMcode). Com essas informações, a contribuição da força de contato representa uma parcela incorporada às forças externas atuantes no meio contínuo,

$${}_{ext}\mathbf{F} = {}_{ext}\mathbf{F}^{MEF} + {}_{int}\mathbf{F}^e \quad (5.23)$$

e procede-se com a determinação da nova configuração do meio contínuo.

A Figura 5.4 exibe um fluxograma com uma visão geral dos procedimentos utilizados no modelo de acoplamento proposto neste trabalho. Como se percebe, o fluxo da sistemática proposta é basicamente comandado pela análise com elementos discretos, visto que esta determina o fim da análise numérica acoplada, representado por um tempo final de simulação. Esse procedimento é pertinente visto que a análise dinâmica das partículas depende, de fato, da evolução temporal das grandezas cinemáticas envolvidas.

Figura 5.4 – Fluxograma mostrando uma visão geral do acoplamento MEF-MED.



Fonte: Autor (2012).

Para a integração das equações de movimento tanto da parte contínua (FEMcode) como da porção granular (DEMOOP) utiliza-se um mesmo incremento de tempo constante. Este incremento de tempo deve ser menor que os incrementos de tempo críticos calculados com a formulação em elementos finitos e elementos discretos, simultaneamente. Dessa forma, garante-se que todas as equações de movimento do sistema são integradas no mesmo passo de tempo, evitando processos de subciclagem e possíveis inconsistências físicas e geométricas.

A seguir, é mostrado o algoritmo utilizado para a integração das equações de movimento tanto da porção contínua como da porção discreta do problema em um dado instante de tempo (MDC). Nesse algoritmo, utiliza-se a nomenclatura das variáveis adotada nos capítulos anteriores.

Algoritmo 5.1 – Método das Diferenças Centrais

Inicializações:

Definir o incremento de tempo ($\Delta t \leq \Delta t_{cr}$)

Definir condições iniciais (${}^0\mathbf{U}$ e ${}^0\dot{\mathbf{U}}$)

Definir matriz de massa diagonalizada (\mathbf{M})

Calcular vetor de forças desequilibradas:

$${}^0\mathbf{R} = {}_{ext}\mathbf{F} - {}_{int}\mathbf{F}({}^0\mathbf{U}) + {}_{coh}\mathbf{F}({}^0\mathbf{U}) \text{ [MEF]}$$

$${}^0\mathbf{R} = {}_{ext}\mathbf{R} + {}_{int}\mathbf{R}({}^0\mathbf{U}, {}^0\dot{\mathbf{U}}) - {}_{amt}\mathbf{R}({}^0\dot{\mathbf{U}}) \text{ [MED]}$$

Calcular o vetor de acelerações iniciais:

$${}^0\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{M}^{-1} {}^0\mathbf{R} \text{ [MEF/MED]}$$

Para cada instante de tempo:

Calcular um preditor de velocidade:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_{pr} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \Delta t {}^t\ddot{\mathbf{U}} \text{ [MEF/MED]}$$

Calcular o vetor de deslocamentos:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^t\ddot{\mathbf{U}} \text{ [MEF/MED]}$$

Calcular o vetor de forças desequilibradas:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}} = {}^{t+\Delta t}_{ext}\mathbf{F} - {}^{t+\Delta t}_{int}\mathbf{F}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}) + {}^{t+\Delta t}_{coh}\mathbf{F}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}) - \alpha \mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_{pr} \text{ [MEF]}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = {}^{t+\Delta t}_{ext}\mathbf{R} + {}^{t+\Delta t}_{int}\mathbf{R}({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}, {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_{pr}) - {}^{t+\Delta t}_{amt}\mathbf{R}({}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_{pr}) \text{ [MED]}$$

Calcular o vetor de acelerações:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{M}^{-1} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{F}} \text{ [MEF]}$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{M}^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} \text{ [MED]}$$

Calcular o vetor de velocidades:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t}{2} ({}^t\ddot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}) \text{ [MEF/MED]}$$

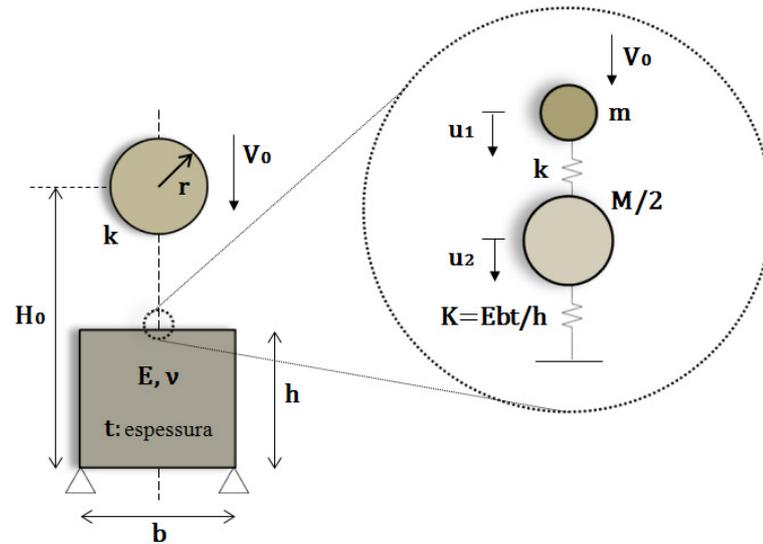
Fonte: Adaptado de DEMOOP Versão 1.0 (2008).

5.4 Verificação do Contato Bloco-Partícula

Para a verificação da estratégia de acoplamento proposta, foi idealizado um modelo dinâmico de colisão elástica bloco-partícula, onde o bloco é representado numericamente através de um elemento finito quadrilateral de quatro nós e a partícula, por sua vez, através de um elemento discreto com forma circular, conforme é ilustrado na Figura 5.5.

O bloco possui massa M ; geometria definida pela largura b , altura h e espessura t ; e material caracterizado pelo módulo de elasticidade longitudinal E e coeficiente de Poisson ν . A partícula possui massa m , geometria definida através do raio r e é lançada verticalmente para baixo com velocidade V_0 de uma altura de queda H_0 em relação ao seu centro. É admitido o modelo de contato de Hooke para representar o choque elástico entre os corpos, sendo k o coeficiente de rigidez normal deste contato e $M/2$, a massa equivalente dos nós da aresta de contato. Esta verificação numérica é realizada considerando estado plano de tensões, e desprezando efeitos decorrentes da gravidade, bem como, a rigidez tangencial associada do contato bloco-partícula.

Figura 5.5 – Modelo dinâmico para verificação do contato bloco-partícula.



Fonte: Autor (2012).

Na Figura 5.5, u_1 e u_2 variam com o tempo e representam, respectivamente, os deslocamentos dos graus de liberdade da partícula e do bloco para o modelo de contato apresentado. Estes podem ser determinados através das equações de movimento do sistema massa-mola, onde se escreve a segunda lei de Newton para cada grau de liberdade:

$$m\ddot{u}_1(t) = k(u_2(t) - u_1(t)) \quad (5.24)$$

$$\frac{M}{2}\ddot{u}_2(t) = -Ku_2(t) - k(u_2(t) - u_1(t)) \quad (5.25)$$

As Equações (5.24) e (5.25) representam um sistema de equações diferenciais ordinárias onde a variável independente é o tempo, logo, para resolvê-lo deve-se impor as seguintes condições iniciais para deslocamentos e velocidades:

$$u_1(0) = u_2(0) = 0 \quad (5.26)$$

$$\dot{u}_1(0) = V_0; \quad \dot{u}_2(0) = 0 \quad (5.27)$$

Dados hipotéticos referentes a informações do bloco (Tabela 5.1) e da partícula e modelo de contato (Tabela 5.2) são utilizados para avaliação do modelo, onde a altura H_0 é admitida nula para tornar o tempo inicial de simulação igual ao tempo em que o contato se inicia, facilitando posterior comparação numérica.

Tabela 5.1 – Dados do bloco.

M	b	h	t	E	ν
1000 kg	1 m	1 m	1 m	250 MPa	0

Fonte: Autor (2012).

Tabela 5.2 – Dados da partícula e do modelo de contato.

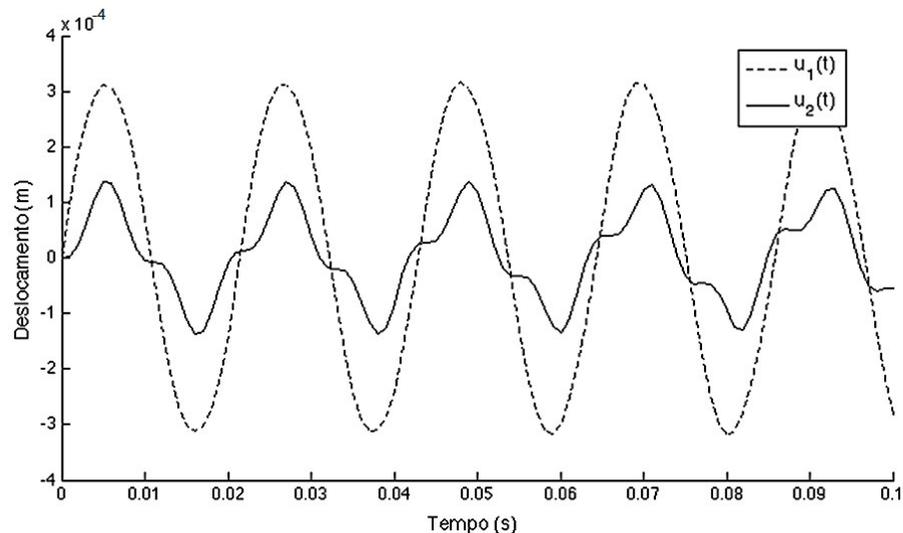
m	r	V_0	H_0	k
785,4 kg	0,5 m	0,1 m/s	0	100 GN/m

Fonte: Autor (2012).

Utiliza-se um incremento de tempo comum para a integração das equações de movimento do bloco e da partícula, sendo este menor que os incrementos de tempo críticos para o MEF e para o MED simultaneamente.

Utilizando os dados numéricos da Tabela 5.1 e da Tabela 5.2, as soluções das Equações (5.24) e (5.25), que consistem nas funções deslocamento da partícula e do bloco para o modelo de contato adotado, podem ser numericamente quantificadas e são mostradas na Figura 5.6.

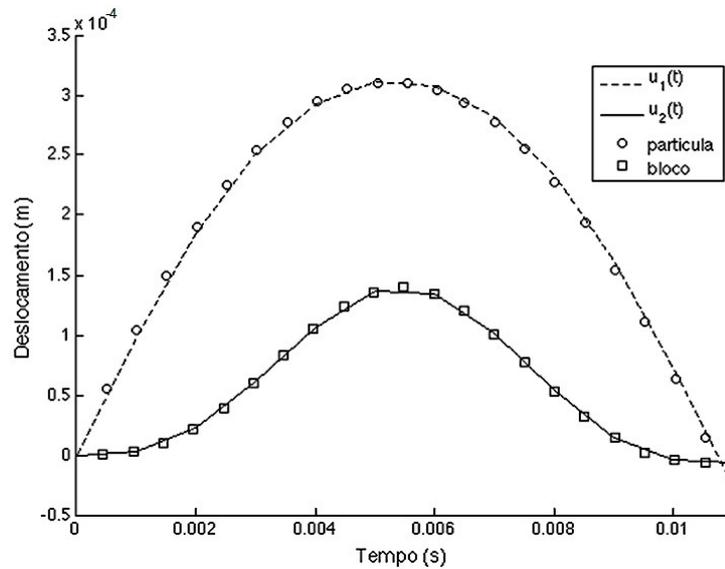
Figura 5.6 – Solução analítica dos deslocamentos partícula-bloco para o modelo de contato adotado.



Fonte: Autor (2012).

Os resultados numéricos obtidos para os deslocamentos da partícula e do bloco no instante do contato, através do *workflow* descrito na Figura 5.4, são confrontados com a solução analítica apresentada para $u_1(t)$ e $u_2(t)$, onde se percebe a conformidade dos resultados na Figura 5.7.

Figura 5.7 – Comparação entre as soluções analíticas e os resultados numéricos obtidos durante o intervalo de tempo que caracteriza o contato.



Fonte: Autor (2012).

5.5 Aplicações Numéricas

Para demonstração do potencial de aplicação da ferramenta computacional desenvolvida, realiza-se o estudo de problemas inspirados em critérios de estabilidade de poços, relacionados ao fraturamento do maciço rochoso; e em um cenário da Geologia Estrutural relacionado à tectônica salífera, que consiste em uma modelagem simplificada do processo de formação de domos salinos. Em cada caso, primeiramente é apresentada uma breve base teórica sobre o tema, destacando aspectos e conceitos considerados importantes no estudo desses fenômenos, e, em seguida, são mostrados as considerações e resultados acerca da modelagem numérica dos problemas em pauta.

5.5.1 Estabilidade de Poço

A viabilidade de um projeto de poço está diretamente relacionada à definição de sua janela operacional, que é definida basicamente pelas curvas de pressão de poros, de colapso e de fratura.

A pressão de poros, também referenciada como pressão da formação, é definida como a pressão do fluido contido nos espaços porosos da rocha. Segundo Rocha e Azevedo (2009), os procedimentos para quantificação da pressão de poros são divididos em medições diretas, realizadas em formações permeáveis, e métodos indiretos, efetuados em formações de baixíssima permeabilidade, como, por exemplo, os folhelhos.

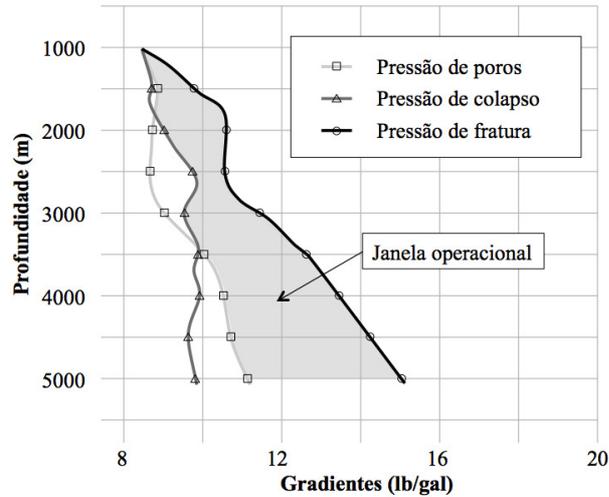
A pressão de colapso está relacionada à falha por cisalhamento, ou seja, sob tensões de compressão, que pode ocorrer devido a um baixo peso de fluido de perfuração (colapso inferior) ou devido a um peso de fluido excessivo (colapso superior). As consequências dessas falhas variam de acordo com o tipo de rocha, onde se pode haver aprisionamento da coluna de perfuração por acunhamento, devido a deformações no diâmetro do poço, ou pelo desmoronamento total ou parcial do poço, devido ao desmoronamento de cascalhos.

O gradiente de fratura está relacionado ao fraturamento da formação ao redor do poço, que se inicia quando as tensões na rocha mudam de compressão para tração, e atingem a resistência à tração do maciço. O fraturamento pode ocorrer tanto para o caso de redução de pressão dentro do poço (fratura inferior), onde a falha pode levar ao desmoronamento da parede do poço, podendo inviabilizar o projeto do poço devido ao aprisionamento da coluna de perfuração, quanto devido ao aumento da pressão interna (fratura superior), onde ocorre o fraturamento do maciço com consequente perda de fluido de perfuração para a formação, também chamada de perda de circulação, aumentando as chances de ocorrências de *kicks*², sobretudo em formações permeáveis. Segundo Rocha e Azevedo (2009), a estimativa do gradiente de fratura também é realizada através de medições diretas (métodos diretos) ou pela utilização de cálculos baseados em modelos teóricos ou empíricos (métodos indiretos).

A janela operacional determina a variação permitida para a pressão exercida pelo fluido de perfuração dentro do poço, de forma a manter sua integridade, respeitando basicamente as pressões de poros, fratura e colapso. A Figura 5.8 mostra a determinação de uma janela operacional hipotética, em que o limite inferior para o peso de fluido de perfuração é estabelecido pelo maior valor entre as curvas de pressão de poros e colapso inferior, enquanto que o limite superior para o peso do fluido é determinado pela curva de pressão de fratura superior, caracterizando o peso do fluido a ser utilizado ao longo da perfuração, bem como limites para o assentamento de sapatas de revestimento (ROCHA E AZEVEDO, 2009).

² *kicks* são influxos inesperados e indesejados da formação para o poço que, em geral, ocorrem quando a pressão no poço em frente a uma formação permeável for menor que a pressão de poros dessa formação.

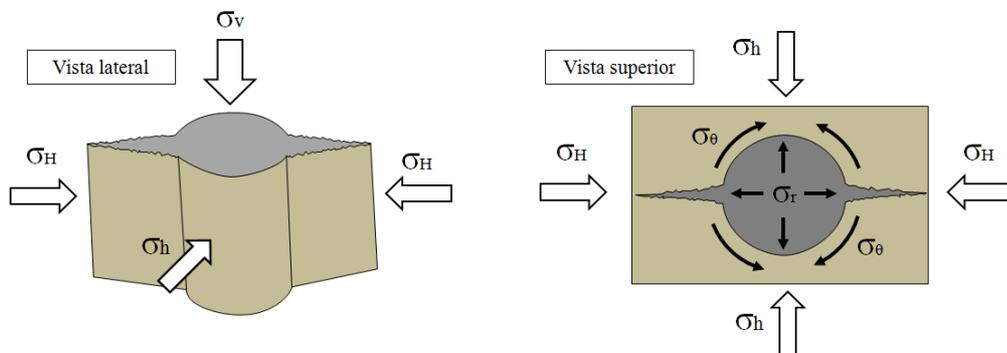
Figura 5.8 – Janela operacional para definição de peso de fluido de perfuração.



Fonte: Adaptado de Rocha e Azevedo (2009).

Em um poço vertical, tensões tangenciais podem levar ao fraturamento vertical quando essas ultrapassam o limite de resistência à tração da rocha. Segundo Rocha e Azevedo (2009), esse tipo de fratura pode ser gerada tanto por fluidos penetrantes quanto por fluidos não penetrantes. A direção de propagação de uma fratura dependerá do ambiente, sobretudo dos esforços oferecidos pelas tensões *in situ*. Uma fratura tende a se abrir na direção da menor tensão *in situ*, propagando-se perpendicularmente à direção dessa tensão. A Figura 5.9 ilustra o caso de um poço vertical em que a tensão *in situ* mínima é dada em uma das direções horizontais. Assim sendo, em caso de fraturamento, este deve ocorrer verticalmente (perpendicular à direção de menor tensão) e se propagar perpendicularmente à tensão mínima, ou seja, na direção da tensão horizontal máxima.

Figura 5.9 – Tendência de fraturamento em um poço vertical com $\sigma_v > \sigma_H > \sigma_h$.



Fonte: Adaptado de Rocha e Azevedo (2009).

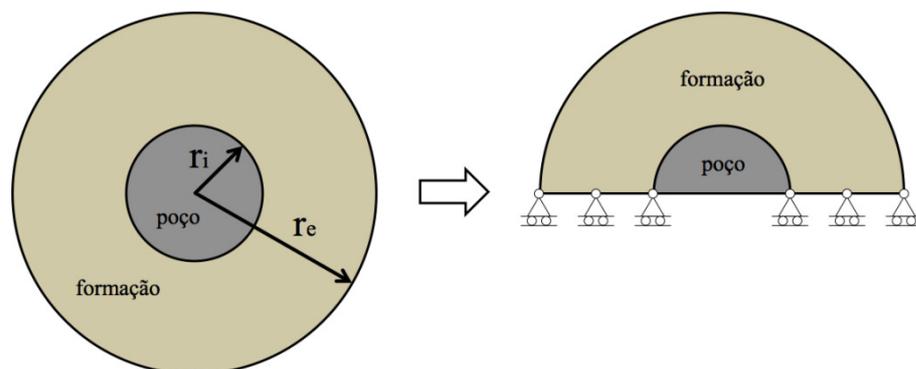
5.5.1.1 Modelagem Computacional

Com base nos aspectos teóricos apresentados, propõe-se uma abordagem simplificada para a simulação de fraturamento em poços de petróleo, onde a formação é considerada como um meio contínuo fraturável e sujeito a grandes deformações, enquanto que o fluido de perfuração é tratado como um meio com comportamento equivalente ao de um fluido.

Para essa abordagem, o subdomínio do problema que representa a formação rochosa é analisado utilizando-se a formulação geometricamente não linear do MEF, permitindo-se avaliar o nível de tensão alcançado na formação. A porção do problema representativa do fluido de perfuração é analisada através da formulação do MED e representada por um conjunto de partículas com movimentos individuais descritos através da dinâmica de corpos rígidos e com leis de interação diretamente dependentes da velocidade relativa entre os corpos, simulando o comportamento hipotético de um fluido. Assim, utiliza-se o acoplamento MEF-MED proposto para o estudo do processo de fraturamento da formação devido ao aumento da pressão interna do poço.

Na modelagem da geometria do problema, consideram-se duas sub-regiões: o poço, definido pelo raio interno do modelo (r_i), e a formação, definida radialmente de r_i ao raio externo r_e . O modelo é estudado em estado plano de deformações e possui simetria radial. Devido a este fato e pela inserção de elementos de interface que será comentada mais adiante, opta-se pela modelagem de apenas metade do domínio do problema, conforme é ilustrado na Figura 5.10.

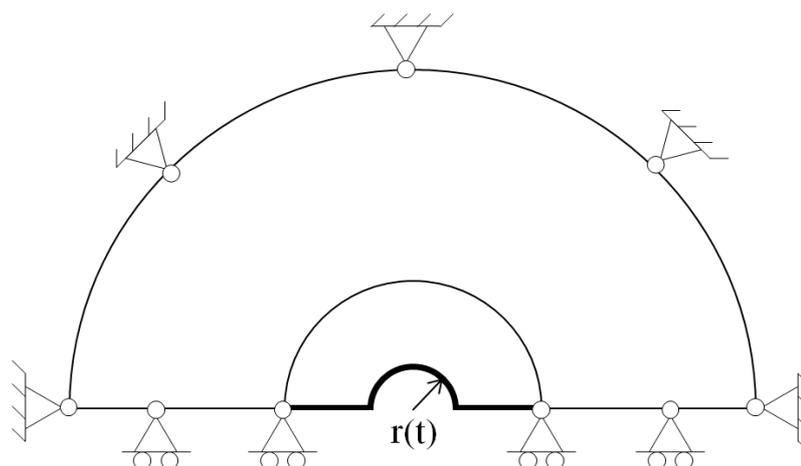
Figura 5.10 – Definição da geometria e simetrização do domínio do problema.



Fonte: Autor (2012).

A Figura 5.11 ilustra as condições essenciais de contorno impostas ao problema, onde restrições de segundo gênero são colocadas ao longo de toda a circunferência externa da formação. Observa-se ainda na Figura 5.11 um trecho em negrito que representa o contorno do poço devido à simetria considerada. Esse trecho é modelado através de segmentos de reta que representam obstáculos, utilizados para se impor restrições de deslocamento ao conjunto de partículas representativas do fluido de perfuração.

Figura 5.11 – Condições de contorno do problema.



Fonte: Autor (2012).

Para forçar o aumento de pressão interna no poço, impõe-se uma expansão radial no obstáculo, em negrito na Figura 5.11, através de uma função $r(t)$, dependente do tempo, que inicialmente possui valor nulo e é incrementada gradualmente, diminuindo a área da região que pode ser ocupada pelo conjunto de partículas e, conseqüentemente, aumentando a pressão interna no poço.

Na Tabela 5.3 são definidos os parâmetros geométricos que são utilizados na simulação numérica. O raio interno é adotado como um valor próximo a valores nominais utilizados pela indústria de petróleo no Brasil (COSTA *et al.*, 2010) e o raio externo é adotado hipoteticamente como um valor não muito elevado, de forma a garantir um tempo de simulação considerado razoável.

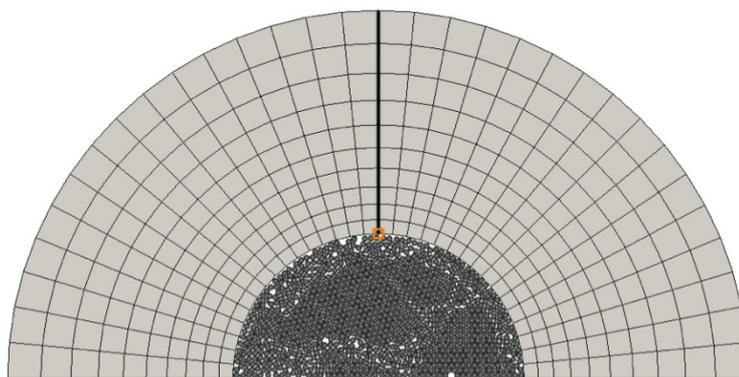
Tabela 5.3 – Informações referentes à geometria do modelo.

r_i	r_e
15 cm	38,2516 cm

Fonte: Autor (2012).

A Figura 5.12 mostra o domínio discretizado do problema, formado pela malha de elementos finitos na sub-região representativa da formação, e pelo conjunto de partículas no interior do poço. A linha em negrito evidencia a região onde os elementos de interface são inseridos, representando a direção de maior tensão horizontal na qual haverá a propagação do fraturamento devido ao aumento de pressão no poço. A região destacada na parte superior da parede interna da formação representa a posição geométrica referente ao(s) nó(s) da malha de elementos finitos utilizado(s) para posterior quantificação de deslocamentos e tensões.

Figura 5.12 – Domínio discretizado do problema.

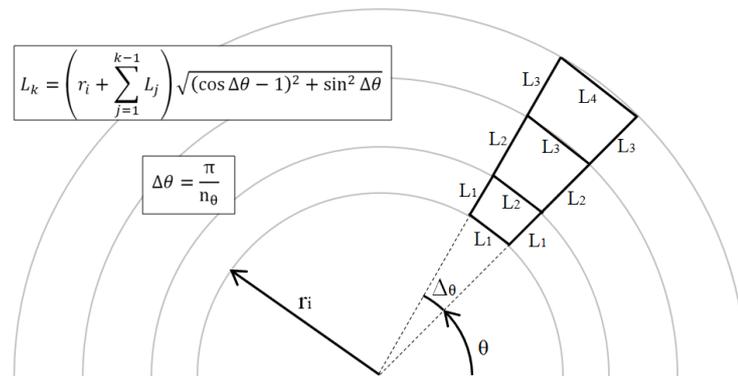


Fonte: Autor (2012).

Para a geração da malha de elementos finitos mostrada na Figura 5.12, deve-se inicialmente determinar o número de discretizações da malha ao longo da direção circunferencial (n_θ), onde esse valor deve ser uma potência de base 2 para garantir a possibilidade de inserção dos elementos de interface ao longo da direção vertical. Com isso, utiliza-se o procedimento ilustrado na Figura 5.13 para determinação da posição geométrica e do tamanho dos elementos quadriláteros, que aumenta gradativamente conforme se aproxima do raio externo da formação. Na malha em questão utilizam-se 32 discretizações ao longo da direção circunferencial, resultando em um total de 320 elementos quadriláteros de 4 nós.

Para a geração da malha de elementos discretos mostrada na Figura 5.12, utiliza-se o programa PreDEM (FERRAZ *et al.*, 2008), onde, através da definição de uma região de interesse, com suas propriedades físicas e granulometria, é possível gerar de forma aleatória um conjunto inicial de 1035 partículas nesse domínio. Para o modelo mostrado na Figura 5.12, utiliza-se uma distribuição uniforme de partículas com diâmetro de 0,6 cm, que equivale a cerca de 40% do tamanho L_1 das arestas internas de contorno da malha de elementos finitos.

Figura 5.13 – Definição do tamanho dos elementos quadrilaterais da malha de elementos finitos.



Fonte: Autor (2012).

As propriedades das rochas da formação são adotadas hipoteticamente conforme é mostrado na Tabela 5.4. Na primeira camada de elementos finitos, mais próximos do raio interno do poço, utiliza-se um valor do módulo de elasticidade vinte vezes maior que E para evitar o colapso desses elementos durante a simulação devido a movimentos bruscos de partículas que ficam aprisionadas na interface entre os materiais.

Tabela 5.4 – Caracterização do material.

E (GPa)	ν	ρ (kg/m ³)
0,5	0,29	3200

Fonte: Autor (2012).

Como o fluido de perfuração é modelado através de elementos discretos, ao invés de módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, caracteriza-se o material através da definição do modelo de contato que define as relações de força-deslocamento entre partículas. Para esse problema, utiliza-se o modelo de contato Kelvin, definido no Capítulo 4, que possui relações viscosas para a determinação das forças de contato que são obtidas diretamente a partir dos deslocamentos e velocidades relativas entre os corpos. Para a caracterização do modelo Kelvin faz-se necessário adotar 4 parâmetros: rigidez normal (k_N), rigidez tangencial (k_T), percentual de amortecimento normal (f_{c_N}) e percentual de amortecimento tangencial (f_{c_T}), cujos valores estão indicados na Tabela 5.5. O valor de k_N é determinado como um valor razoavelmente alto para garantir que o nível de sobreposição entre as partículas seja menor que um determinado valor de referência, geralmente adotado como 1% do raio. O valor nulo para k_T caracteriza o comportamento do meio de maneira equivalente a um fluido.

Tabela 5.5 – Caracterização do modelo de contato Kelvin.

k_N (GN/m)	k_T (N/m)	$f c_N$	$f c_T$
1	0	0,99	0

Fonte: Autor (2012).

Os parâmetros do modelo coesivo PPR são definidos com base em valores de resistência à tração de 300 MPa e de separação total na direção normal como sendo cerca de 3% do tamanho da aresta de contorno da malha de elementos finitos. Utilizam-se valores elevados para a energia de separação tangencial e tensão máxima de cisalhamento pois não se tem interesse de abertura tangencial nos elementos de interface. Os valores utilizados para a caracterização do modelo coesivo PPR são mostrados na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Caracterização do modelo coesivo PPR.

Φ_N (kN/m)	Φ_T (MN/m)	σ_{max} (MPa)	τ_{max} (MPa)	α	β	λ_N	λ_T
89,09	116,3	300	1200	2	2	0,15	0,30

Fonte: Autor (2012).

5.5.1.2 Resultados

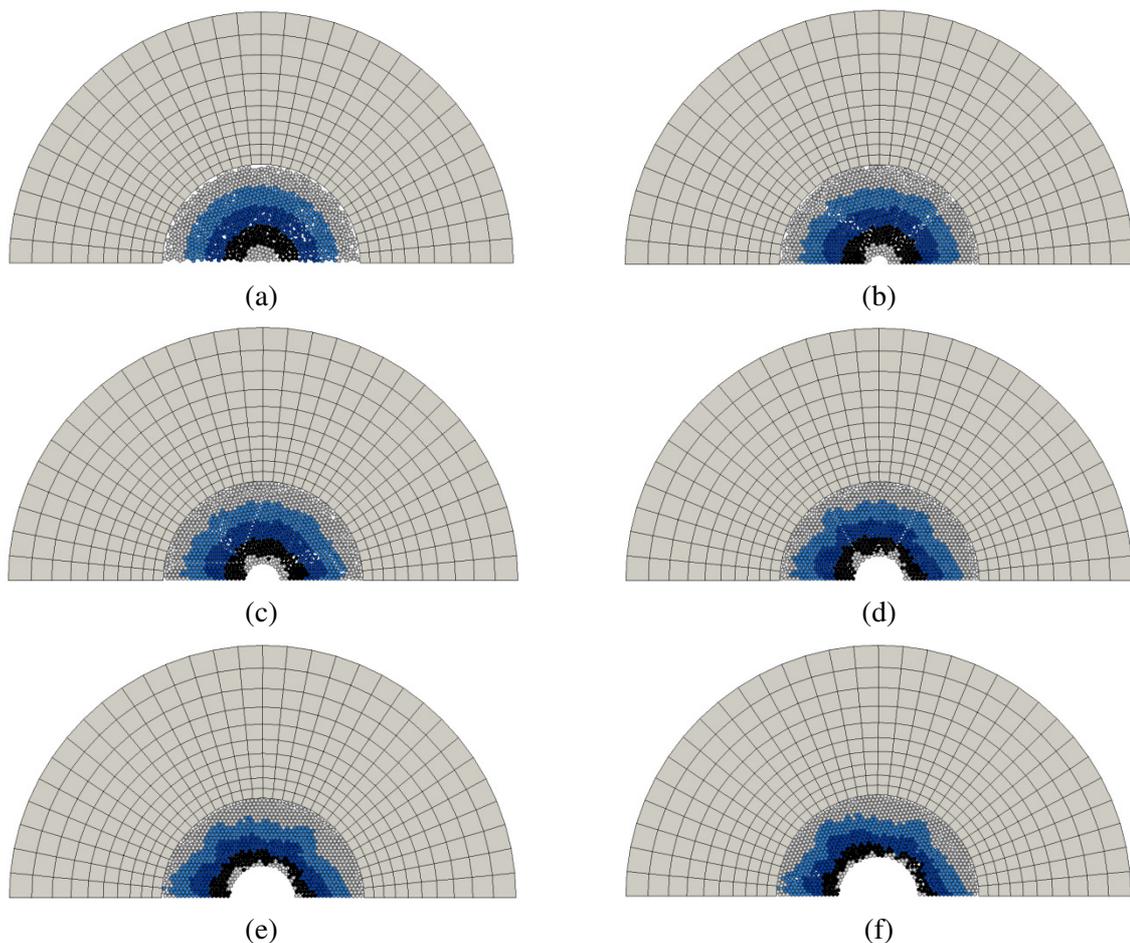
Para visualização e análise dos resultados numéricos obtidos, utiliza-se o programa ParaView (HENDERSON, 2007), um *software* multiplataforma, com código aberto e bastante difundido no meio científico para visualização de grandes volumes de dados. O programa aceita como entrada vários formatos de arquivos, inclusive o Xdmf (*Extensible Data Model and Format*) que é utilizado neste trabalho, onde o FEMcode e o DEMOOP imprimem dois arquivos de resultados, de extensão xmf, com as informações referentes aos elementos finitos e ao conjunto de partículas, respectivamente.

Analisa-se o problema de estabilidade de poço, conforme a modelagem apresentada na seção anterior, utilizando duas estratégias diferentes. Primeiramente, analisa-se o modelo apresentado sem fazer uso de elementos de interface, ou seja, não se considera a possibilidade de fraturamento da formação. Em seguida, elementos de interface são incorporados ao modelo ao longo das arestas internas da malha na região em negrito da Figura 5.12, onde essas interfaces possuem as propriedades coesivas informadas na Tabela 5.6.

Durante a análise numérica, o valor da função $r(t)$ é incrementado gradualmente, contribuindo para o rearranjo das partículas circulares que representam o fluido de perfuração e, conseqüentemente, aumentando a pressão interna exercida na interface entre o poço e a formação rochosa. Inicialmente, os incrementos na função r contribuem preferencialmente na reorganização das partículas e na redução do índice de vazios do conjunto particulado, e, em seguida, atuam mais fortemente no aumento da pressão interna no poço.

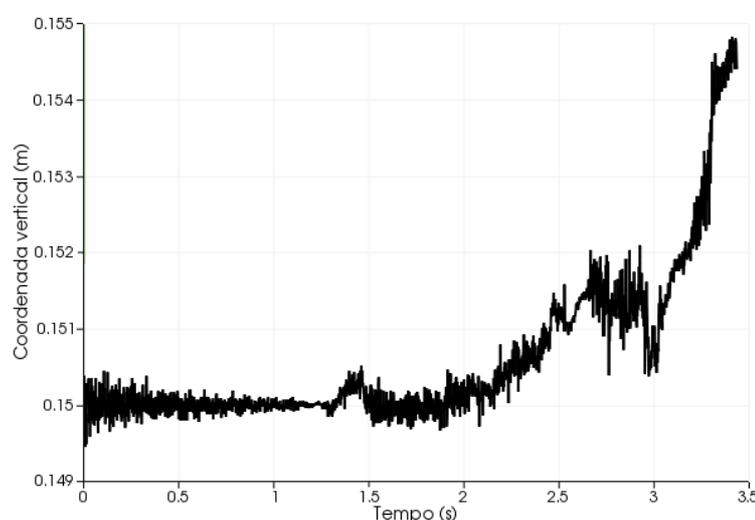
Com a elevação da pressão interna exercida, surgem tensões na formação que levam ao aparecimento de deformações radiais na borda do poço e que, por sua vez, contribuem para o aparecimento de deformações circunferenciais, dilatando a circunferência interna inicial do poço e modificando de forma acentuada o nível de tensão em sua proximidade. A Figura 5.14 mostra um histórico do comportamento mecânico do modelo ao longo do tempo com o aumento da pressão interna no poço para o modelo sem elementos coesivos. Isofaixas de cores são utilizadas para uma melhor visualização das deslocabilidades das partículas.

Figura 5.14 – Histórico do comportamento mecânico da formação sem elementos coesivos.



A Figura 5.15 mostra o histórico da coordenada vertical do nó superior da borda do poço (Figura 5.12) ao longo de tempo. O nível de variação apresentado é justificado pela abordagem dinâmica utilizada, com um alto índice de transmissão de forças de contato entre as partículas e as arestas de contorno internas ao longo dos passos de integração e por não se considerar amortecimento no meio contínuo nessa abordagem. Sendo um modelo hipotético para a verificação da estabilidade de poço, percebe-se qualitativamente a influência do aumento da pressão interna no deslocamento radial da interface com a formação.

Figura 5.15 – Histórico da coordenada vertical do ponto superior da borda do poço.



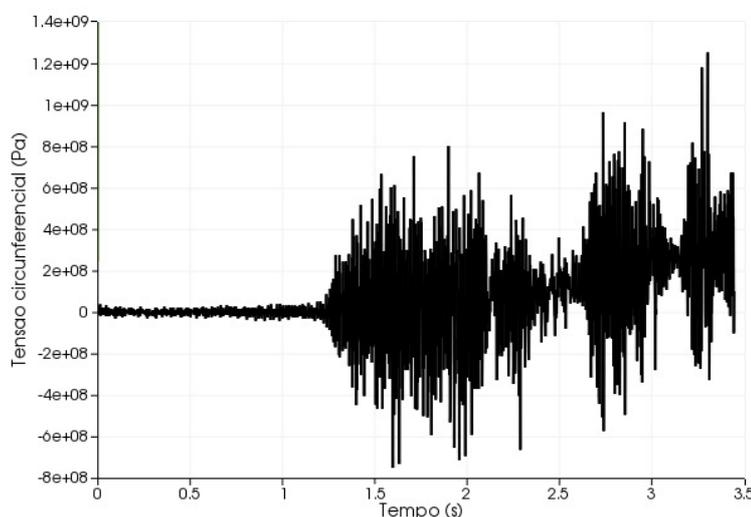
Fonte: Autor (2012).

Ainda observando a Figura 5.15, percebe-se que há uma fase inicial, até o instante de 1,23 segundos, onde a coordenada do ponto em questão não sofre deslocamentos verticais consideráveis. Essa fase inicial é justificada pelo tempo necessário para que o acréscimo de pressão interna atue no conjunto particulado, rearranjando-o e diminuindo o seu índice de vazios. A partir desse momento, verifica-se uma tendência crescente da coordenada vertical, provocada, de fato, pelo aumento da pressão interna no poço. No instante 2,95 segundos, observa-se uma tendência local de decréscimo da coordenada vertical do ponto superior da borda do poço que ocorre devido a novos rearranjos do conjunto de partículas.

A Figura 5.16 ilustra o histórico de tensões circunferenciais medidas no nó superior da borda do poço (Figura 5.12). Fazendo uma analogia com o histórico da coordenada vertical apresentado na Figura 5.15, observa-se a mesma fase inicial, onde a tensão circunferencial se mantém aproximadamente nula devido ao rearranjo e diminuição do índice de vazios do meio

particulado, e apenas posteriormente, com o aumento de fato da pressão interna no poço, observa-se uma tendência sempre crescente da magnitude das tensões circunferenciais.

Figura 5.16 – Histórico da tensão circunferencial do ponto superior da borda do poço.



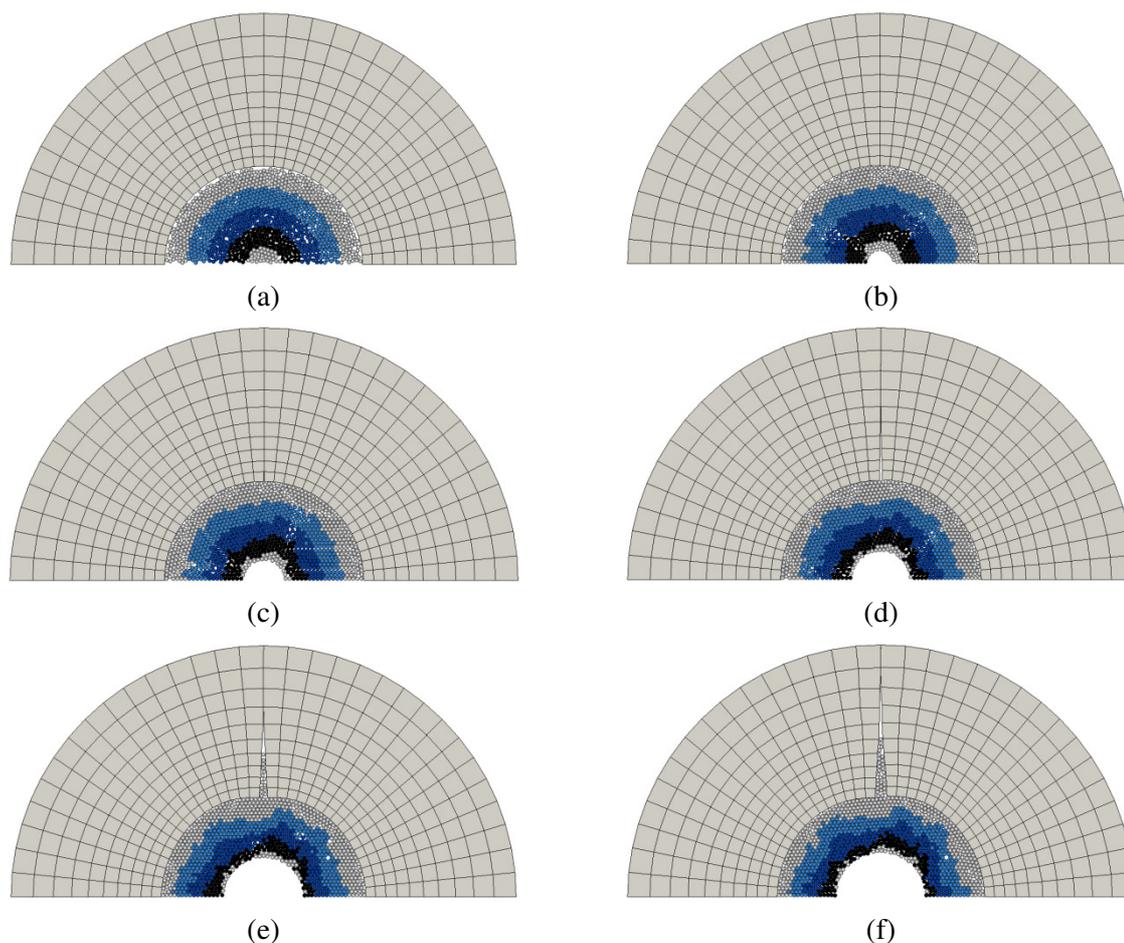
Fonte: Autor (2012).

Na análise do modelo utilizando os elementos de interface ao longo da direção vertical, inicialmente percebe-se um comportamento mecânico semelhante ao modelo sem interfaces. Porém, com o aumento da pressão interna, as deformações circunferenciais que surgem devido ao acréscimo de tensões radiais vão aumentando até que se atinja a resistência normal do material. Continuada a elevação das deformações circunferenciais, caracteriza-se a fase de *softening* do material, até que se alcance o nível crítico de separação interfacial especificado através do modelo coesivo PPR, quando se inicia o processo de abertura total da fratura na parede interna da formação.

A Figura 5.17 ilustra o histórico do comportamento mecânico da formação com a utilização de elementos interfaciais coesivos na direção vertical. Observando-se a Figura 5.17(a), a Figura 5.17(b) e a Figura 5.17(c), percebe-se um comportamento semelhante ao caso sem elementos coesivos (Figura 5.16). No entanto, na Figura 5.17(d) observa-se a abertura e início de propagação da fratura ao longo da direção especificada. Na Figura 5.17(e), a propagação da fratura juntamente com o aumento da separação interfacial possibilita que algumas das partículas, que representam o fluido de perfuração submetido a um elevado nível de pressão, adentrem a formação através da região fraturada, caracterizando um processo de perda de fluido para a formação devido ao aparecimento de falhas por fratura tracional. Dessa forma, a direção horizontal do modelo em estado plano configura-se como

uma região de tensões horizontais mínimas, caracterizando a direção de abertura da fratura, enquanto que a direção vertical do modelo em estado plano representa a região de tensões horizontais máximas, definindo a direção de propagação da fratura. A Figura 5.17(f) ilustra a configuração final do modelo, com avanços na propagação da fratura e entrada de mais partículas no meio contínuo através da região fraturada.

Figura 5.17 – Histórico do comportamento mecânico da formação com elementos coesivos.

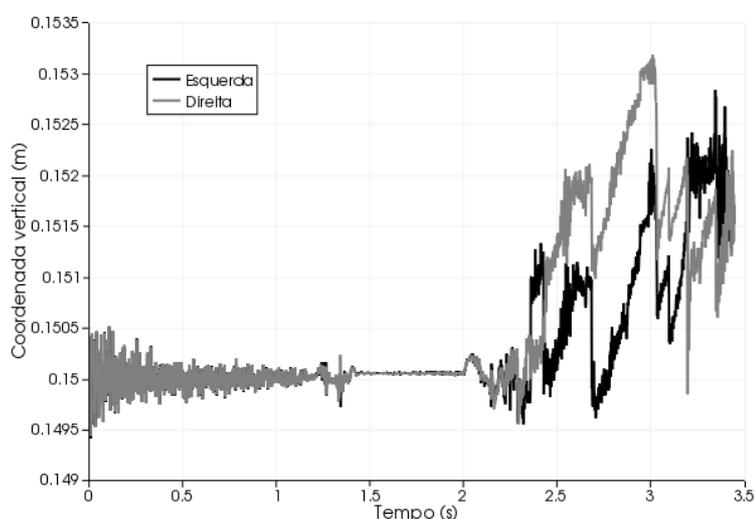


Fonte: Autor (2012).

A Figura 5.18 ilustra o histórico das coordenadas verticais dos nós superiores da borda do poço. A existência de dois nós é justificada através dos elementos de interface que, para representar o fenômeno de fraturamento, possuem nós independentes do lado direito e esquerdo da direção de propagação de fratura. A Figura 5.18 mostra uma perturbação inicial nas coordenadas verticais durante a fase inicial de rearranjo e diminuição do índice de vazios do meio particulado, que vai se dissipando ao longo do tempo até o instante de 1,34 segundos, quando se percebe uma outra perturbação característica do processo de abertura da fratura na formação, que é evidenciada através do deslocamento horizontal relativo entre os nós

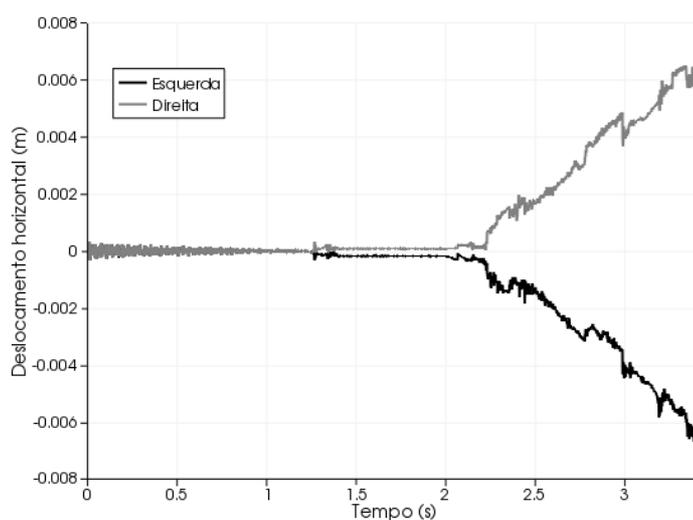
esquerdo e direito na parte superior da borda do poço (Figura 5.19). Após este momento, a variação nas coordenadas verticais é quase nula até o instante 2,22 segundos, quando as partículas começam a adentrar a formação, causando movimentações verticais não simétricas nos lados direito e esquerdo do fraturamento. A entrada de partículas é caracterizada por um salto no deslocamento horizontal relativo nesse mesmo instante, ilustrado na Figura 5.19. A Figura 5.20 ilustra as tensões circunferenciais medidas ao longo do tempo no ponto superior da borda do poço para os lados direito e esquerdo do fraturamento.

Figura 5.18 – Histórico das coordenadas verticais do ponto superior da borda no poço para os lados direito e esquerdo do fraturamento.



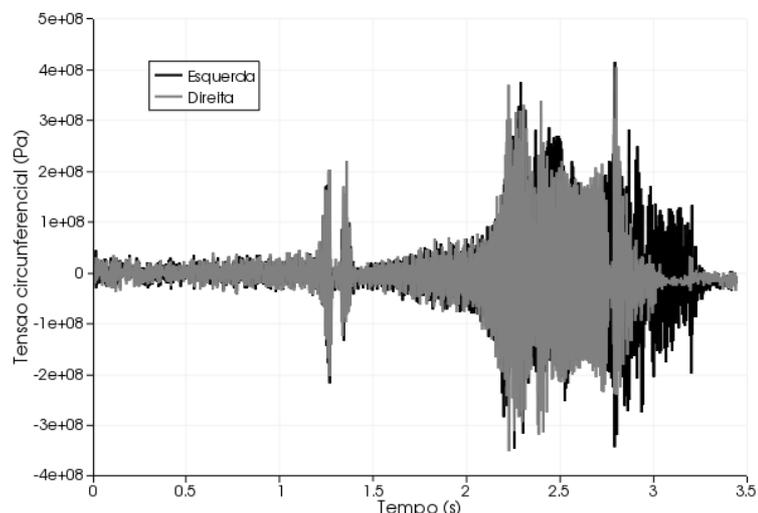
Fonte: Autor (2012).

Figura 5.19 – Histórico dos deslocamentos horizontais do ponto superior da borda no poço para os lados direito e esquerdo do fraturamento.



Fonte: Autor (2012).

Figura 5.20 – Tensões circunferenciais no ponto superior da borda no poço para os lados direito e esquerdo do fraturamento.



Fonte: Autor (2012).

Através da ilustração percebe-se a fase inicial de redistribuição do conjunto particulado, onde as tensões circunferenciais oscilam em uma faixa constante até que, no intervalo de 1,19 a 1,34 segundos, verifica-se uma oscilação maior, onde se percebe um rápido crescimento da tensão circunferencial atingindo um valor de 200 MPa, próximo ao do limite de resistência normal do material e decaindo rapidamente, caracterizando, portanto, o processo de abertura normal da fratura no meio contínuo. A partir deste momento, observa-se um novo crescimento da tensão circunferencial devido à continuidade do processo de elevação da pressão interna do poço e, em seguida, a divergência acentuada de valores de tensão nos lados direito e esquerdo caracterizando a entrada do fluido na formação através da fratura formada, que solicitam diferentemente as porções direita e esquerda do meio contínuo.

Com a análise desse caso, observa-se a influência da introdução dos elementos coesivos, que possibilita a ocorrência do fraturamento da formação em um nível de tensão menor que os níveis de tensões atingidos com o modelo sem as interfaces. Com isso, após o falhamento e a entrada de partículas na região fraturada, percebe-se uma redistribuição dos níveis de tensão na formação, a exemplo das tensões circunferenciais no ponto superior da borda do poço, conforme indica a comparação entre a Figura 5.16 e Figura 5.20.

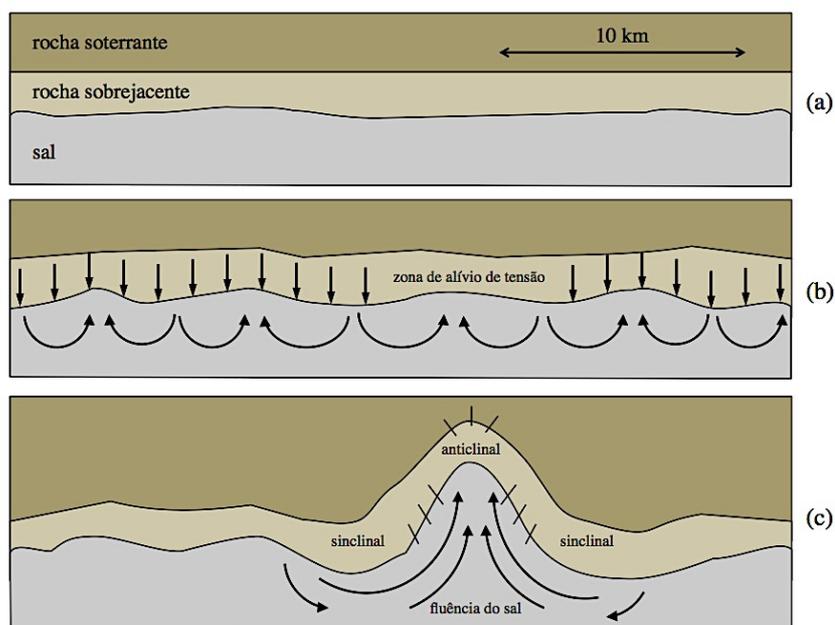
5.5.2 Geologia Estrutural

O estudo de rochas salinas vem ganhando cada vez mais importância devido ao atual cenário de exploração de petróleo nas camadas do pré-sal no Brasil. Diferentemente de outros tipos de rochas, os evaporitos apresentam porosidade e permeabilidade praticamente nulas em seu estado natural (MEDEIROS, 1999), sendo, portanto, de grande interesse para a indústria petrolífera, visto que o sal, devido a tais características, tem a capacidade de criação de estruturas selantes possibilitando a acumulação de hidrocarbonetos.

Um fenômeno bastante ocorrente em rochas salinas é a halocinese, que consiste no processo de ascensão do sal (menos denso), empurrando camadas superiores (mais densas), denominadas rochas encaixantes. Esse processo de intrusão pode levar a deformações acentuadas das rochas sobrejacentes, resultando na formação de estruturas dômicas no maciço juntamente com a própria massa intrusiva de sal (BOTELHO, 2008).

A Figura 5.21 exibe a sequência de formação de domos salinos, evidenciando estruturas sinclinais, anticlinais e a influência do domo nas tensões em torno dessas formações.

Figura 5.21 – Estágios da formação de domos de sal.



Fonte: Adaptado de Botelho (2008).

Inicialmente, camadas de sal bem como camadas de rochas sobrejacentes encontram-se distribuídas horizontalmente ao longo da direção vertical devido ao processo deposicional.

A Figura 5.21(a) mostra como essas camadas encontram-se dispostas quando começam a surgir algumas perturbações na camada de evaporitos. Tais perturbações são geralmente provocadas devido ao comportamento altamente viscoso do sal, que por ser menos denso que as camadas de rocha sobrejacentes inicia um processo de ascensão e ao encontrar zonas de alívio de tensão favorecem o aparecimento de uma série de cumes (Figura 5.21(b)). A partir desse estágio, o sal encontra rotas preferenciais de ascensão, principalmente, devido à diferença de densidade entre os meios, e por suas características de fluência de grande mobilidade continua o processo de intrusão nas rochas sobrejacentes, formando estruturas dômicas (Figura 5.21(c)).

O processo de formação de domos salinos é caracterizado por grandes deformações e deslocamentos do maciço rochoso que acompanha o movimento ascendente do sal. Durante esse processo, é comum aparecerem falhas nas formas sinclinais no contato entre o sal e a rocha sobrejacente e nas estruturas anticlinais do contato entre a rocha sobrejacente e a rocha soterrante. Esse comportamento acontece devido ao fato de tais zonas estarem sujeitas a elevadas tensões de tração e cisalhamento, favorecendo a ruptura do maciço nessas regiões, conforme é indicado na Figura 5.21(c).

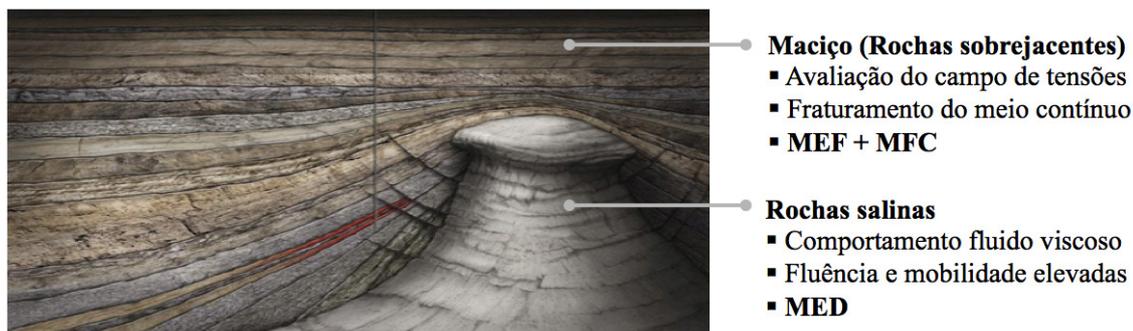
5.5.2.1 Modelagem Computacional

Com base nos aspectos teóricos apresentados, propõe-se uma abordagem simplificada para a modelagem computacional do processo de formação de domos de sal, onde as rochas sobrejacentes e de soterramento são consideradas como meios contínuos fraturáveis e sujeitos a grandes deformações, enquanto que o sal é tratado como um meio com comportamento equivalente ao de um fluido viscoso e com grande mobilidade.

Para esta abordagem, o subdomínio do problema que representa as rochas sobrejacentes é analisado utilizando-se a formulação geometricamente não linear do MEF apresentada no Capítulo 3, onde, a partir da discretização espacial com elementos finitos, elementos de interface com propriedades da MFC (Capítulo 2) são previamente inseridos nas arestas internas da malha. Dessa forma, permite-se avaliar o nível de tensão alcançado na estrutura dômica, com a possibilidade de nucleação e propagação de falhas ao longo do maciço rochoso. A porção do problema representativa das rochas salinas é analisada através da formulação do MED, apresentada no Capítulo 4, onde, dessa forma, esse subdomínio é representado por um conjunto de partículas com movimentos individuais descritos através da

dinâmica de corpos rígidos e com leis de interação diretamente dependentes da velocidade relativa entre os corpos, simulando o comportamento do sal como um meio viscoso e com grande mobilidade. Assim, utiliza-se o acoplamento MEF-MED proposto para o estudo do processo halocinético, conforme ilustra a Figura 5.22.

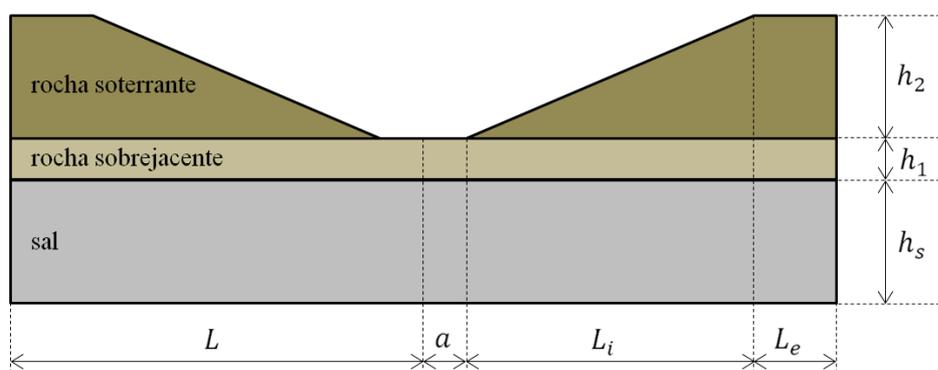
Figura 5.22 – Abordagem para a modelagem computacional MEF-MED da formação de domos salinos.



Fonte: Adaptado do site http://www.geoart.com/offshore_schematics.php.

Na modelagem da geometria do problema, consideram-se três sub-regiões distintas: uma camada inferior (sal), uma camada intermediária (rocha sobrejacente) e uma camada superior (rocha soterrante). As camadas de rocha salina, sobrejacente e soterrante possuem alturas h_s , h_1 e h_2 , respectivamente. O modelo é estudado em estado plano de deformações e possui simetria em relação a um eixo vertical que intercepta seu centro, sendo as camadas de sal e de rocha sobrejacente distribuídas horizontalmente ao longo de todo o comprimento horizontal do modelo ($2L$), enquanto que a camada de rocha soterrante possui uma determinada inclinação para gerar uma zona central de alívio de tensões, conforme é ilustrado na Figura 5.23.

Figura 5.23 – Definição da geometria do domínio do problema.



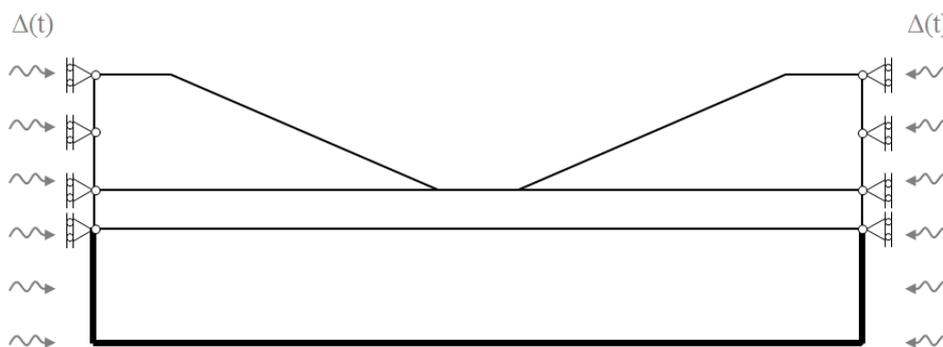
Fonte: Autor (2012).

Apesar da simetria geométrica do modelo, simula-se o domínio completo do problema, visto que a utilização de uma malha não simétrica de partículas associada à complexidade do problema e os erros inerentes à simulação numérica podem conduzir a um comportamento não simétrico do fenômeno.

A Figura 5.24 ilustra as condições de contorno impostas ao problema, onde restrições de primeiro gênero são atribuídas às extremidades laterais de todo o domínio para permitir a aplicação de um movimento de compressão no modelo. Tal imposição é baseada na consideração da movimentação horizontal de placas tectônicas. Em relação à direção vertical, o modelo fica livre para movimentação devido aos efeitos mecânicos e gravitacionais.

Observa-se ainda na Figura 5.24 um trecho em negrito que representa o contorno da região salina que não possui contato com as rochas subjacentes. Esse trecho é modelado computacionalmente como segmentos de reta que representam obstáculos que são utilizados para se impor restrições de deslocamento na zona salina. Para cada instante de tempo, juntamente com a busca por contatos do tipo partícula-partícula e partícula-aresta, também há a busca e tratamento de contatos entre partículas e obstáculos.

Figura 5.24 – Condições de contorno do problema.



Fonte: Autor (2012).

Para simular o comportamento de grande mobilidade do sal combinado com a movimentação de placas tectônicas, impõe-se um campo de deslocamentos que rege a movimentação dos obstáculos e nós da malha de elementos finitos que estão localizados nas extremidades laterais do modelo. Esse campo de deslocamentos é representado pela função Δ , dependente do tempo, que auxilia no processo de movimentação e de fluxo das partículas ao longo do domínio do problema. O outro segmento de reta localizado na extremidade inferior

da camada de rochas salinas é tratado como obstáculo fixo. A função $\Delta(t)$ é considerada linear, aplicada a uma velocidade de 0,4 m/s.

Na Tabela 5.7 são definidos os parâmetros geométricos que são utilizados na simulação numérica. Os valores das alturas das camadas de rochas são adotados como valores médios utilizados na literatura em problemas de perfuração de poços em rochas salinas (COSTA e POIATE, 2008; COSTA *et al.*, 2010). Em relação ao comprimento horizontal do modelo, utiliza-se um valor compatível com medidas aferidas através de mapas sísmicos que caracterizam a existência de estruturas dômicas encontradas em trabalhos na literatura (CALDAS, 2007; MOHRIAK *et al.*, 2008).

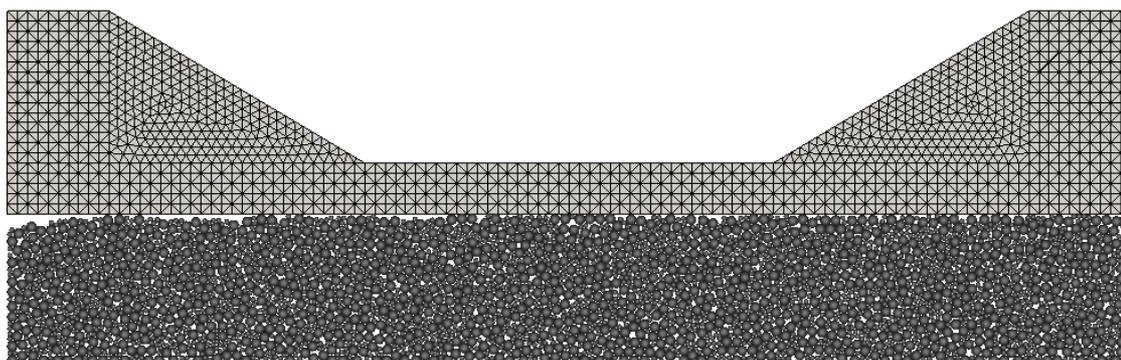
Tabela 5.7 – Informações referentes à geometria do modelo.

L	L_i	L_e	a	h_s	h_1	h_2
5500 m	2500 m	1000 m	2000 m	1500 m	500 m	1500 m

Fonte: Autor (2012).

A Figura 5.25 mostra o domínio discretizado do problema, formado pela malha de elementos finitos na sub-região representativa das rochas sobrejacentes e soterrantes, e pelo conjunto de partículas na zona salina.

Figura 5.25 – Domínio discretizado do problema.



Fonte: Autor (2012).

Para a geração da malha de elementos finitos mostrada na Figura 5.25, utiliza-se o programa MTOOL (LIRA *et al.*, 2006), onde se define um comprimento de 100 m para subdivisão do contorno da malha. Esse valor de referência define o tamanho das arestas de contorno de toda a sub-região pós-sal. Dessa forma, gera-se uma malha estruturada na sub-região de rocha sobrejacente e em parte da região de rocha soterrante, através de uma técnica de triangulação bilinear (*Union Jack*), e uma malha não estruturada na zona inclinada de

rocha soterrante, através de uma técnica de triangulação por contração de contorno. Os tamanhos dos elementos da malha obedecem à subdivisão do contorno da malha.

Após a definição da malha, utiliza-se uma rotina computacional desenvolvida para inserir elementos de interface em todas as arestas internas da malha de elementos finitos, obedecendo às considerações estabelecidas na Seção 3.4.2. A malha final de elementos finitos é constituída por 7854 nós, 2618 elementos triangulares de três nós e 3793 elementos de interface.

Para a geração da malha de elementos discretos mostrada na Figura 5.25, utiliza-se o programa PreDEM (FERRAZ *et al.*, 2008), onde através da definição de uma região de interesse, com suas propriedades físicas e granulometria, é possível gerar de forma aleatória, um conjunto inicial de partículas nesse domínio. Através de uma técnica de separação geométrica combinada com um processo de acomodação por gravidade, faz-se uma pré-simulação do conjunto de partículas até que a energia cinética do sistema seja próxima de zero. Dessa forma, gera-se um conjunto final de 3170 partículas com índice de vazios e nível de sobreposição baixos e aceitáveis, evitando o aparecimento de inconsistências físicas como a retração ou a expansão do volume particulado durante as etapas iniciais da simulação numérica. Para o modelo mostrado na Figura 5.25, utiliza-se uma distribuição granulométrica de 60% de partículas com diâmetro de 50 m e 40% de partículas com diâmetro de 100 m, que equivale ao tamanho das arestas de contorno da malha de elementos finitos.

As propriedades das rochas são adotadas através de valores encontrados na literatura científica. As propriedades das camadas de rochas salinas e sobrejacentes são definidas através de valores utilizados no trabalho de Borges (2008), enquanto que a rocha soterrante é caracterizada como um material mais rígido e denso, definido no trabalho de Perić e Crook (2004). Dessa forma, os valores de módulo de elasticidade longitudinal (E), coeficiente de Poisson (ν) e densidade (ρ) que caracterizam os materiais são apresentados na Tabela 5.8, onde os valores indicados com subscritos 1, 2 e s representam informações associadas às camadas de rochas sobrejacentes, soterrantes e salinas, respectivamente. Nos elementos finitos da faixa inferior da camada sobrejacente, utiliza-se um valor do módulo de elasticidade dez vezes maior que E_1 para evitar o colapso desses elementos durante a simulação devido a movimentos bruscos de partículas que ficam aprisionadas na interface entre os materiais.

Como a camada salina é modelada através de elementos discretos, ao invés de módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, caracteriza-se o material através da definição do modelo de contato que define as relações de força-deslocamento entre partículas. Para esse problema, utiliza-se o modelo de contato Kelvin, definido no Capítulo 4, que possui relações viscosas para a determinação das forças de contato, que são obtidas diretamente a partir dos deslocamentos e velocidades relativas entre os corpos. Para a caracterização do modelo Kelvin faz-se necessário adotar 4 parâmetros: rigidez normal (k_N), rigidez tangencial (k_T), percentual de amortecimento normal (fc_N) e percentual de amortecimento tangencial (fc_T), cujos valores estão indicados na Tabela 5.9.

Tabela 5.8 – Caracterização dos materiais.

E_1 (GPa)	ν_1	ρ_1 (kg/m ³)	E_2 (GPa)	ν_2	ρ_2 (kg/m ³)	ρ_s (kg/m ³)
20	0,29	2262,06	31,04	0,24	3200	2160

Fonte: Autor (2012).

Tabela 5.9 – Caracterização do modelo de contato Kelvin.

k_N (GN/m)	k_T (N/m)	fc_N	fc_T
18	0	0,99	0

Fonte: Autor (2012).

O valor de k_N é determinado como um valor razoavelmente alto para garantir que o nível de sobreposição entre as partículas seja menor que um determinado valor de referência, geralmente 1% do raio. Para a caracterização do parâmetro k_T , quanto maior for seu valor, maior é a tendência de o meio possuir características de um sólido, e, por outro lado, quanto mais se aproximar do valor nulo, mais o meio particulado tende ao comportamento de um fluido. Como se pretende modelar a zona salina com um comportamento representativo de um meio mais fluido devido às características de mobilidade e fluência do material, e visto que, a adoção de um coeficiente de amortecimento tangencial nulo acelera o processo de simulação numérica, adota-se $k_T = 0$. Além disso, adota-se um percentual de amortecimento na direção normal de 99% em relação ao crítico, visto que o fenômeno em estudo acontece em uma escala de tempo geológica, diferentemente da modelagem aqui empregada. O valor percentual de amortecimento crítico tangencial (fc_T) pode ser qualquer, visto que há uma dependência de k_T , que é nulo, na determinação do coeficiente de amortecimento tangencial (Eq. 4.36).

Em relação ao domínio discretizado com elementos finitos, também se define um fator de amortecimento, adotado como $\alpha = 4$. A influência desse parâmetro é mostrada indiretamente na Eq. 3.67, através da definição da matriz de amortecimento.

Os parâmetros do modelo coesivo PPR são definidos com base em valores de resistência à tração de 40 MPa e de separação total na direção normal como sendo 25% do tamanho da aresta de contorno da malha de elementos finitos. A utilização de valores menores de separação, conforme se observa na literatura em problemas de fraturamento em elementos estruturais (ZHANG, 2003; PARK, 2009) não se aplica neste tipo de problema, devido à ordem de grandeza da geometria que demandaria um nível de refinamento das malhas considerado inviável computacionalmente. Os valores utilizados para a caracterização do modelo coesivo PPR são mostrados na Tabela 5.10.

Tabela 5.10 – Caracterização do modelo coesivo PPR.

Φ_N (GN/m)	Φ_T (GN/m)	σ_{max} (MPa)	τ_{max} (MPa)	α	β	λ_N	λ_T
0,60	105,30	40	160	2	2	0,15	0,30

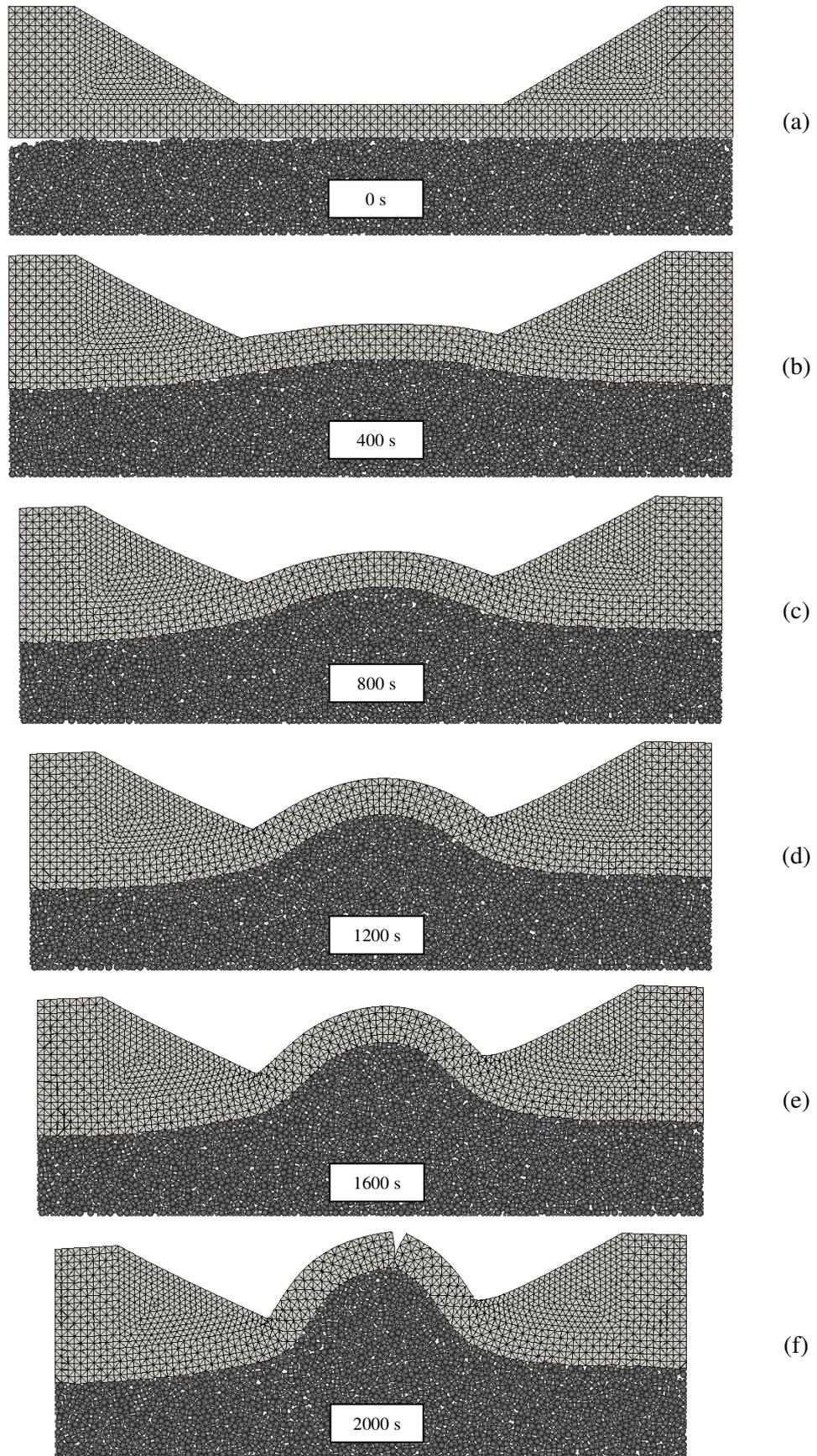
Fonte: Autor (2012).

Utiliza-se o valor de 9,81 m/s² para a aceleração da gravidade (g) em todo o domínio. Este valor atua no modelo particulado através de uma parcela de forças externas, calculadas pela multiplicação de g pela massa da partícula no grau de liberdade referente ao deslocamento vertical. Em elementos finitos, a força gravitacional atua como uma força volumétrica na direção vertical, onde para cada elemento, tal força é definida como ρg , sendo ρ , a densidade do material associado ao elemento finito.

5.5.2.2 Resultados

Para visualização e análise dos resultados numéricos obtidos, utiliza-se o programa ParaView (HENDERSON, 2007). A Figura 5.26 ilustra o processo evolutivo sugerindo a formação do domo salino, que se obteve a partir da modelagem computacional descrita na seção anterior. Primeiramente, é mostrada a configuração inicial do problema em $t = 0$, representada pela Figura 5.26(a), onde a malha de elementos finitos e o conjunto de partículas apresentam-se indeformados.

Figura 5.26 – Estágios da simulação numérica para a formação da estrutura dômica.



Fonte: Autor (2012).

Com a evolução temporal, é imposta uma compressão horizontal em todo o modelo, regida pela função linear de deslocamento $\Delta(t)$. A ação gravitacional atuante, sobretudo nas rochas sobrejacentes e soterrantes, gera uma sobrecarga que dificulta a ascensão da camada salina nas extremidades do modelo. Dessa forma, a intrusão do sal é facilitada na porção central devido ao alívio de tensões causado pela ausência da rocha soterrante nessa região.

Na Figura 5.26(b), que representa a configuração do modelo no instante $t = 400$ s, já se observa uma discreta ascensão da zona salina até um espaço inicialmente ocupado pelas rochas sobrejacentes. No instante $t = 800$ s (Figura 5.26(c)), observa-se uma maior intrusão do sal nas camadas sobrejacentes, já sendo perceptível a definição das formas anticlinal, na porção central do topo da rocha sobrejacente, e sinclinais, na porção inferior das rochas sobrejacentes à medida que se aproxima das extremidades laterais do modelo.

A evolução da movimentação horizontal do modelo e a ação gravitacional contribuem para uma intrusão significativa da massa salina no maciço sobrejacente que pode ser observada na Figura 5.26(d) e na Figura 5.26(e). A Figura 5.26(f) ilustra a configuração final do modelo em $t = 2000$ s, caracterizando a estrutura dômica formada pela ferramenta computacional desenvolvida. Nessa configuração percebe-se o aparecimento e propagação de uma falha tracional no topo de camada de rochas sobrejacentes, visto que é uma região onde as tensões de tração são predominantes, devido ao comportamento mecânico do fenômeno.

Através da modelagem das rochas sobrejacentes e soterrantes via MEF, possibilita-se a análise da influência do processo de formação da estrutura dômica no estado de tensões do maciço. Conforme o modelo matemático descrito no Capítulo 3, embora a formulação incorpore considerações relativas ao peso próprio através da parcela de forças volumétricas, não se prevê a incorporação de um estado de tensões iniciais ao modelo. Dessa forma, faz-se uma análise qualitativa dos níveis de tensão atingidos durante a evolução do fenômeno.

A Figura 5.27 ilustra a evolução das tensões horizontais de Cauchy (tensões de engenharia) no maciço, que representam medidas de força por unidade de área na configuração deformada. Essas tensões são exibidas através de um mapa de cores, sendo representadas por valores constantes em cada elemento finito, visto que os elementos triangulares com 3 nós (elementos com deformação constante) utilizam apenas 1 ponto de Gauss para integração das equações no domínio do elemento. Os mapas de cores são mostrados nos mesmos estágios apresentados na Figura 5.26.

A Figura 5.27(a) ilustra a configuração indeformada do modelo onde as tensões horizontais são inicialmente nulas devido a não consideração de um estado de tensões iniciais na formulação numérica do problema. A Figura 5.27(b) mostra que devido à ação gravitacional e a diferença de densidades entre as camadas de sal e de rochas sobrejacentes e soterrantes, se inicia o movimento ascendente das partículas em direção às camadas superiores. Este processo contribui para o surgimento de pequenas tensões de compressão na região central e inferior das rochas sobrejacentes, onde se caracteriza a formação de um pequeno cume de massa salina intrusiva. Em seguida, há a continuação do movimento ascendente das partículas devido à compressão lateral do modelo através da função $\Delta(t)$, e observando-se a Figura 5.27(c), a Figura 5.27(d) e a Figura 5.27(e) percebe-se claramente a definição gradativa de zonas de compressão e de tração nas rochas sobrejacentes. As zonas de compressão são evidenciadas na região anticlinal inferior e sinclinais superiores, e, por outro lado, as zonas de tração no maciço estão caracterizadas na região anticlinal superior e, com menor intensidade, nas regiões sinclinais inferiores. Observando-se a Figura 5.27(f), percebe-se que com o desenvolvimento do movimento ascendente das partículas, alcançada a configuração final da estrutura dômica, surge uma falha normal na região onde as tensões horizontais de tração possuíam valores elevados e que, com a nucleação e propagação dessa falha, as tensões de tração nessa região (anticlinal superior) vão sendo dissipadas, caracterizando um processo de descarga do material.

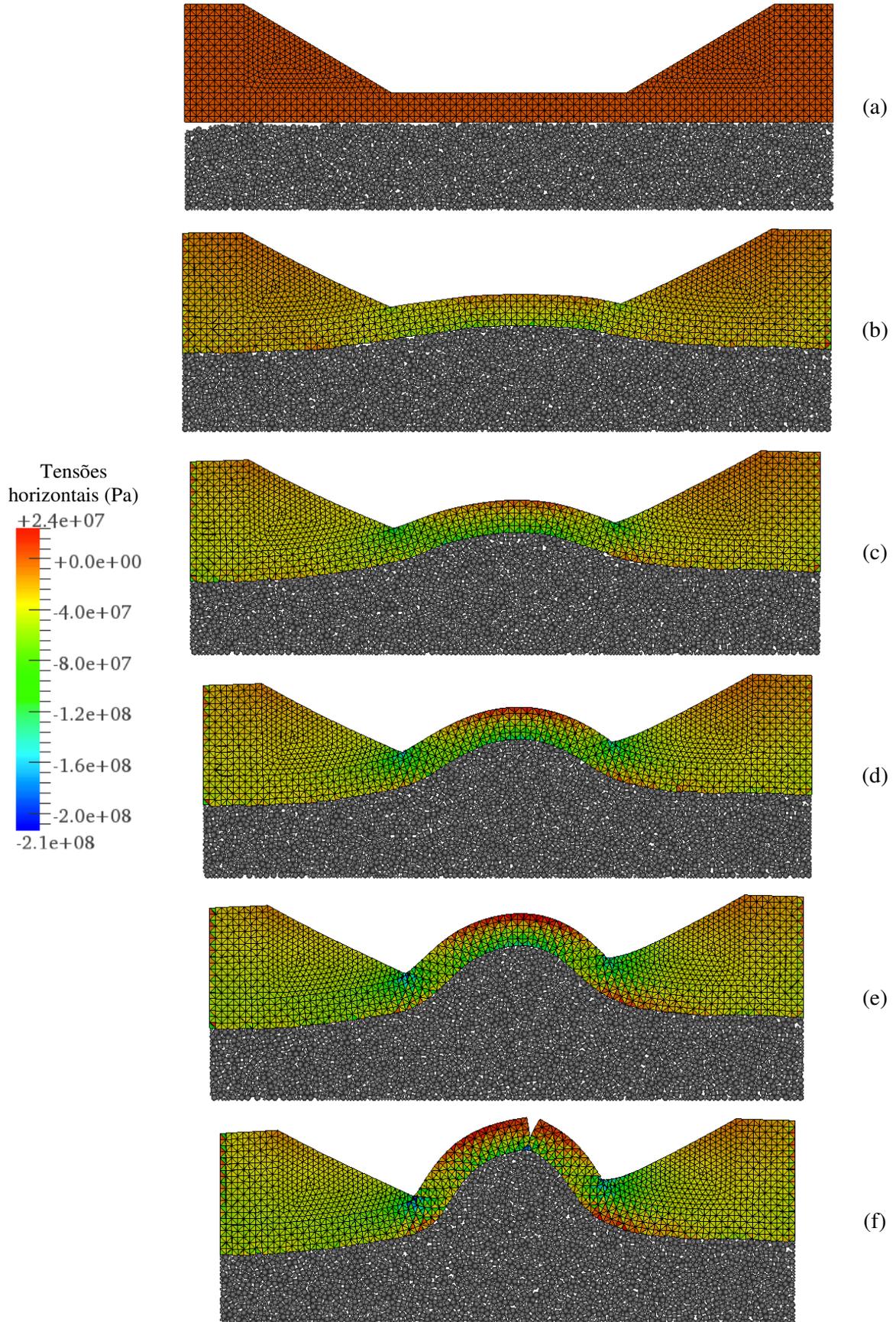
Para analisar qualitativamente as tensões no maciço utiliza-se também uma estratégia de avaliação de tensões pontuais no modelo estudado. Primeiramente, definem-se três pontos de interesse P_1 , P_2 e P_3 , localizados na configuração inicial conforme a Figura 5.28. As tensões geostáticas nesses pontos são calculadas com base na configuração final da estrutura dômica (Figura 5.26(f)) através do peso das camadas definido por:

$${}^{(g)}\sigma_1 = g(\rho_1 h + \rho_2 H) \quad (5.28)$$

$${}^{(g)}\sigma_2 = {}^{(g)}\sigma_3 = \rho_1 g h \quad (5.29)$$

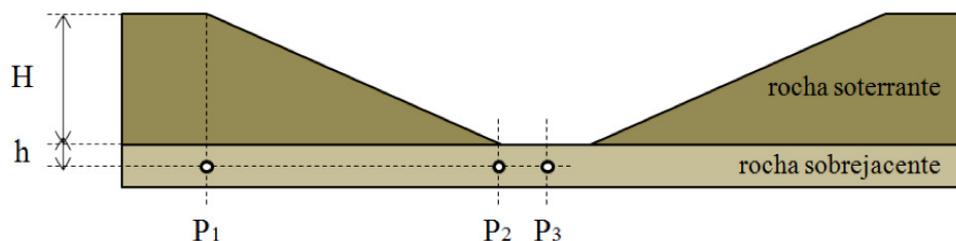
onde g representa a aceleração da gravidade, ρ_1 e ρ_2 representam as respectivas densidades das rochas sobrejacentes e soterrantes, bem como, h e H representam as respectivas alturas de rochas sobrejacentes e soterrantes acima de cada um dos pontos em estudo. Na configuração indeformada do modelo, os pontos de interesse são definidos para $h = 200 \text{ m}$.

Figura 5.27 – Evolução das tensões horizontais no maciço.



Fonte: Autor (2012).

Figura 5.28 – Localização dos pontos de interesse na configuração indeformada do modelo.



Fonte: Autor (2012).

O coeficiente de empuxo horizontal, que relaciona a tensão horizontal com a tensão vertical em um dado ponto material, é definido como sendo

$$K_0 = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} \quad (5.30)$$

Dessa forma, avaliam-se as tensões horizontais e verticais nos pontos de interesse do modelo numérico considerando tensões de Cauchy na configuração final da estrutura dômica. Esses valores de tensão são comparados com os valores analíticos das tensões geostáticas calculados através das Equações 5.28 e 5.29, levando-se em consideração as alturas atualizadas, para cada ponto de interesse, obtidas conforme a configuração final (Figura 5.26(f)). Os resultados são mostrados na Tabela 5.11.

Tabela 5.11 – Resultados da análise qualitativa de tensões nos pontos de interesse.

Ponto de interesse	Tensão geostática (MPa)	Tensões vertical na configuração final (MPa)	Coefficiente de empuxo horizontal
P_1	-52,79	-39,72	1,20
P_2	-4,71	-46,62	1,98
P_3	-4,20	-9,04	1,89

Fonte: Autor (2012).

Conforme os resultados obtidos, observa-se que o ponto de interesse P_1 sofreu um alívio de tensão em relação à tensão geostática calculada. Tal comportamento é explicado devido à movimentação horizontal de compressão em todo o modelo, gerando esforços tracionais na direção vertical e aliviando a tensão geostática de compressão devido ao efeito do coeficiente de Poisson. Por outro lado, os pontos P_2 e P_3 , por estarem localizados de fato na região de ascensão dos evaporitos, sofrem uma alteração significativa no estado de tensões, elevando os valores de tensões compressivas verticais. O aumento exagerado na tensão

compressiva vertical no ponto P_2 pode estar relacionado à geometria da malha próxima a esse ponto de interesse, caracterizando uma região com bico, onde a concentração de tensões geralmente é bastante elevada. Em relação aos coeficientes de empuxo horizontais, foram obtidos valores maiores que 1 para os três pontos de interesse, caracterizando meios com velocidade excessiva de deformação, como é o caso da fluência do sal, apresentando concordância com trabalhos da literatura científica (FALCÃO, 2008).

Em relação aos resultados obtidos com a modelagem numérica da formação de domos salinos, a simetria em relação ao eixo vertical médio não ocorreu devido a alguns fatores. Entre esses fatores, pode-se citar a distribuição aleatória das partículas na zona salina, que pode gerar diferentes níveis de deformação e de solicitações externas no maciço soterrante; a complexidade do problema, devido à sensibilidade do experimento numérico aos diversos parâmetros envolvidos na modelagem do fenômeno, desde a definição dos parâmetros do modelo de contato para as partículas até o ajuste dos parâmetros do modelo coesivo que regulam o comportamento das falhas no meio contínuo; e erros numéricos inerentes à análise numérica do fenômeno.

A modelagem computacional e o estudo qualitativo feito através da técnica proposta neste trabalho possui concordância com fenômenos geológicos determinantes na evolução da formação de domos salinos, demonstrando o potencial da ferramenta desenvolvida para a modelagem de problemas complexos na área de Geologia Estrutural e em outras áreas do conhecimento científico.

6 CONCLUSÃO

Este capítulo apresenta as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido, resumindo as atividades desenvolvidas, estudos realizados e resultados obtidos. Também são feitas algumas sugestões de trabalhos futuros relacionados ao tema.

6.1 Considerações Finais

No presente trabalho, apresentou-se uma introdução, contextualizando o problema de engenharia a ser abordado através de uma breve revisão bibliográfica relacionada à Mecânica da Fratura e à modelagem de meios contínuos e discretos, destacando a importância de trabalhos relevantes relacionados ao tema. Também foram apresentadas informações relacionadas a Modelos Coesivos, Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método dos Elementos Discretos (MED), constituindo o referencial teórico dessa dissertação. A estratégia proposta neste trabalho para o acoplamento MEF-MED é apresentada com detalhes no capítulo anterior.

Através dessa estratégia, é possível simular computacionalmente problemas mecânicos cujo domínio seja representado por porções idealizadas contínuas e discretas. A porção contínua é modelada através do MEF, com a incorporação de elementos de interface com relações constitutivas provenientes de modelos coesivos apresentados na literatura, possibilitando o desenvolvimento de falhas nesse subdomínio. A porção discreta possui aspecto granular ou fluido e é modelada através do MED, utilizando o *software* DEMOOP (CARVALHO JR. e CINTRA, 2006), desenvolvido utilizando a linguagem de programação C++ (STROUSTRUP, 2000) e o paradigma de programação orientada a objetos (POO).

O FEMcode, programa desenvolvido para análise do meio contínuo, baseia-se na formulação do MEF com modelos coesivos, sendo desenvolvido utilizando tanto linguagem C++ quanto POO, de modo a tirar proveito das características de modularidade associadas a esse paradigma de programação e por facilitar o desenvolvimento e incorporação da classe FEMcodeInterface para comunicação com o *software* DEMOOP.

Durante o processo de modelagem computacional das aplicações numéricas, apareceram dificuldades relacionadas principalmente à caracterização de parâmetros micromecânicos do modelo de contato de elementos discretos, bem como a calibração de

parâmetros do modelo coesivo PPR, utilizado nas relações constitutivas dos elementos de interface para definição do comportamento das fraturas do meio contínuo.

A análise numérica simplificada de um poço durante o estágio de perfuração através do acoplamento MEF-MED permitiu modelar os diferentes subdomínios do problema com métodos numéricos que lhe são mais apropriados. Dessa forma, caracterizou-se hipoteticamente a formação rochosa como um meio contínuo, através do MEF, e o fluido de perfuração como um meio fluido, através do MED. A possibilidade de abertura e propagação de fratura na formação indica a concordância com aspectos teóricos de estabilidade de poços onde através de falhas por fratura superior ocorre a perda de circulação do fluido, podendo ocasionar problemas operacionais durante o processo de perfuração. Com a análise desse caso, observa-se a influência da introdução dos elementos coesivos, que possibilita a ocorrência do fraturamento da formação em um nível de tensão menor que os níveis de tensões atingidos com o modelo sem as interfaces. Essa aplicação pode ser adaptada para a simulação numérica de propantes no fraturamento hidráulico de poços de petróleo, visando reduzir ou eliminar fenômenos de *flow-back*.

A modelagem computacional do processo de formação de domos salinos através da técnica de acoplamento MEF-MED proposta mostrou concordância com processos geológicos que caracterizam o fenômeno em estudo, observando-se a formação da estrutura dômica, de formas anticlinal e sinclinais no maciço e o aparecimento e propagação de falhas ao longo do maciço rochoso em regiões submetidas a elevadas tensões de tração. Além disso, foi possível realizar uma análise qualitativa do processo de grandes deformações das rochas subjacentes, devido ao processo intrusivo da camada salina influencia no estado de tensões na vizinhança da estrutura dômica. Em relação aos resultados obtidos, a simetria em relação ao eixo vertical médio não ocorreu devido à distribuição aleatória das partículas na zona salina, que pode gerar diferentes níveis de deformação e de solicitações externas no maciço soterrante e à complexidade do problema e erros inerentes à análise numérica do fenômeno. A modelagem computacional e o estudo qualitativo feito através da técnica proposta possuem concordância com fenômenos geológicos determinantes na evolução da formação de domos salinos, demonstrando o potencial da ferramenta desenvolvida para a modelagem de problemas complexos em áreas de interesse da indústria do petróleo.

6.2 Propostas para Trabalhos Futuros

Com a elaboração deste trabalho, surgem motivações para trabalhos futuros baseadas em dificuldades encontradas e com o objetivo de se modelar uma quantidade maior de problemas. Também se julga interessante a consideração de efeitos fisicamente mais abrangentes para que seja possível a modelagem de problemas complexos de maneira mais próxima à realidade. Desse modo, propõe-se:

- Incorporação de um Estado de Tensões Iniciais para consideração de tensões geostáticas na modelagem de problemas geomecânicos;
- Realização de ensaios experimentais para calibração e caracterização de parâmetros de contato para o modelo de elementos discretos e parâmetros do modelo coesivo;
- Consideração das velocidades das arestas dos elementos finitos no cálculo das forças de interação para modelagem de problemas onde as forças inerciais sejam significativas;
- Implementação numérica da formulação tridimensional de elementos finitos e superfícies de interface para a modelagem de problemas sem a utilização de simplificações de estados planos, visto que o DEMOOP já simula modelos particulados tridimensionais;
- Incorporação de leis viscoelásticas e de regras de escoamento (plasticidade) para possibilitar a modelagem de fenômenos com características de não linearidade física;
- Investigar o custo computacional associado à utilização de modelos coesivos extrínsecos e compará-los com os modelos intrínsecos implementados;
- Simular problemas geológicos utilizando abordagens puramente quase-estáticas e permitindo a possibilidade de falhas cisalhantes;
- Utilização da ferramenta desenvolvida para modelagem de outras aplicações pertinentes, sobretudo nas áreas de Geomecânica, Geologia Estrutural e Mecânica dos Materiais.

REFERÊNCIAS

- AMORIM, J. A. **Aplicação de Modelos Coesivos Intrínsecos na Simulação de Propagação Dinâmica de Fraturas**. 164 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, 2007.
- ANDERSON, T. L. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. 2nd ed. CRC Press LLC, Florida, 1995.
- ARAÚJO, J. P. N. **Modelagem da Interação Solo-Estrutura Utilizando-se o Método dos Elementos Finitos Combinado ao Método dos Elementos Discretos**. 76 f. Monografia (Graduação) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, 2007.
- ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. Energy Theorems and Structural Analysis. **Aircraft Engineering**, v. 26-27, 1955.
- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: primeiros passos**. 2^a Edição. Editora Unicamp, 2003.
- BARENBLATT, G. I. The Formation of Equilibrium Cracks During Brittle Fracture: General Ideas and Hypotheses, Axially Symmetric Cracks. **Applied Mathematics and Mechanics (PMM)**, v. 23, p. 622-636, 1959.
- BARENBLATT, G. I. Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. **Advances in Applied Mechanics**, v. 7, p. 55-129, 1962.
- BATHE, K-J. **Finite Element Procedures**. Prentice-Hall, 1996.
- BORGES, R. G. **Avaliação Numérica de Perturbações de Tensões Associadas a Estruturas Salíferas e suas Influências na Estabilidade de Poços**. 135 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.
- BOTELHO, F. V. C. **Análise Numérica do Comportamento Mecânico do Sal em Poços de Petróleo**. 211 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.
- BROEK, D. **Elementary Engineering Fracture Mechanics**. 3th ed. Martinus Nijhoff Publishers, 1984.
- CALDAS, M. F. **Reconstituição Cinemática e Tectono-Sedimentação Associada a Domo Salino nas Águas Profundas da Bacia de Santos, Brasil**. 129 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.

CALLISTER JR., W. D. **Materials Science and Engineering: An Introduction**. 7th ed. John Wiley & Sons, 2007.

CARVALHO JR., H.; CINTRA, D. T. **Desenvolvimento de Ferramentas de Análise e Visualização do Método dos Elementos Discretos e suas Aplicações na Engenharia**. 82 f. Monografia (Graduação) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, 2006.

CELES, W.; PAULINO, G. H.; ESPINHA, R. A Compact Adjacency-Based Topological Data Structure for Finite Element Mesh Representation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 64, p. 1529-1556, 2005

CLOUGH, R. W. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. **Proceedings of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation**, Pittsburgh, PA, p. 345-378, 1960.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. John Wiley & Sons, 1989.

COSTA, A. M.; POIATE JR., E. **Rocha Salina na Indústria do Petróleo: Aspectos Relacionados à Reologia e à Perfuração de Rochas Salinas**. In: MOHRIAK, W; SZATMARI, P.; ANJOS, S. M. C. SAL: Geologia e Tectônica. 1. ed. Ed. São Paulo: Beca Edições, 2008. cap. 17.

COSTA, A. M.; POIATE JR., E.; AMARAL, C. S.; GONÇALVES, C. J. C; FALCÃO, J. L.; PEREIRA, A. Geomechanics Applied to the Well Design Through Salt Layers in Brazil: A History of Success. **44th U.S. Rock Mechanics Symposium and 5th U.S.-Canada Rock Mechanics Symposium**, Salt Lake City, Utah, 2010.

COURANT, R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 49, p. 1-23, 1943.

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. **IBM Journal**, v. 11, p. 215-234, 1967, English translation of the German original: COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. Über die Partiellen Differenzgleichungen der Mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, v. 100, p. 32-74, 1928.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. v. 1. John Wiley & Sons, 1991.

CUNDALL, P. A. A Computer Model for Simulating Progressive, Large-scale Movements in Blocky Rock Systems. **Proceedings of the Symposium of the International Society for Rock Mechanics**, Nancy, France, v. 1, n. II-8, 1971.

CUNDALL, P. A.; HART, R. D. Numerical Modelling of Discontinua. **Engineering Computations**, v. 9, p. 101-113, 1992.

CUNDALL, P. A.; STRACK, O. D. L. A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies. **Géotechnique**, v. 29, n. 1, p. 47-65, 1979.

DEMOOP Versão 1.0, Manual Teórico. 2008.

DUGDALE, D. S. Yielding of Sheets Containing Slits. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v. 8, p. 100-104, 1960.

FALCÃO, J. L. **Perfuração de Formações Salíferas**. In: MOHRIAK, W; SZATMARI, P.; ANJOS, S. M. C. SAL: Geologia e Tectônica. 1. ed. Ed. São Paulo: Beca Edições, 2008. cap. 18.

FERRAZ, D. H. S.; ARAUJO, C. N.; FERNANDES, R. A.; LAGES, E. N.; LIRA, W. W. M. Um Sistema Gráfico-Interativo para Geração de Modelos Particulados. In: **XXIX CILAMCE – Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia**, 2008, Maceió. XXIX CILAMCE – Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, 2008.

FIGUEIREDO, R. P. **Aplicação da Técnica de Relaxação Dinâmica à Solução de Problemas Geotécnicos**. 187 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1991.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. John Wiley & Sons, 2007.

GRIFFITH, A. A. The Phenomenon of Rupture and Flow in Solids. **Philosophical Transactions Royal Society of London**, Series A, v. 221, p 163-197, 1921.

GRIFFITH, A. A. The Theory of Rupture. **Proceedings of the 1st International Congress on Applied Mechanics**, Delft, p. 55-63, 1924.

HENDERSON, A. **ParaView Guide, A Parallel Visualization Application**. Kitware Inc., 2007.

HUTCHINSON, J. W. Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v.16, p 13-31, 1968.

INGLIS, C. E. Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners. **Transactions of the Institute of Naval Architecture**, v. 55, p. 219-230, 1913.

IRWIN, G. R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. **Journal of Applied Mechanics**, Trans. ASME, v. 24, p. 361-364, 1957.

KIRSCH, G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. **Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure**, v. 42, p. 797-807, 1898.

KLEIN, P. A.; FOULK, J. W.; CHEN, E. P.; WIMMER, S. A.; GAO, H. J. **Physics-based Modeling of Brittle Fracture: Cohesive Formulations and the Application of Meshfree Methods**. Technical Report SAND2001-8099, Sandia National Laboratories, Livermore, The United State of America, 2000.

KLEIN, P. A.; FOULK, J. W.; CHEN, E. P.; WIMMER, S. A.; GAO, H. J. Physics-based Modeling of Brittle Fracture: Cohesive Formulations and the Application to Meshfree Methods. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, v. 37, p. 99-166, 2001.

KUBAIR, D. V.; GEUBELLE, P. H. Comparative Analysis of Extrinsic and Intrinsic Cohesive Models of Dynamic Fracture. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, p. 3853-3868, 2003.

KUHN, M. R. Are Granular Materials Simple? An Experimental Study of Strain Gradient Effects and Localization. **Mechanics of Materials**, v. 37, p. 607-627, 2005.

LIRA, W. W. M.; ARRUDA, M.; MIRANDA, A. C. O.; MARTHA, L. F. C. R. **Mtool: Pré-processador Gráfico para Modelos de Elementos Finitos Bidimensionais**. *Software sem registro de patente*, 2006.

LIVESLEY, R. K. **Matrix Methods of Structural Analysis**. 2nd ed. Pergamon Press, 1975.

LOBO, T. P. S.; CINTRA, D. T.; FERNANDES, R. A.; LIRA, W. W. M.; LAGES, E. N.; RAMOS JR., A. S. Modelagem da Interação entre Sistemas Particulados e Corpos Contínuos Arbitrários Não Deformáveis Bidimensionais. **Proceedings of XXX Iberian Latin American Congresso n Computational Methods in Engineering**, Armação dos Búzios, Rio de Janeiro, 2009.

MAHABADI, O. K.; COTTRELL, B. E.; GRASSELLI, G. An Example of Realistic Modelling of Rock Dynamics Problems: FEM/DEM Simulation of Dynamic Brazilian Test on Barre Granite. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 43, p. 707-716, 2010.

MEDEIROS, F. A. S. **Análise do Comportamento de Colunas de Revestimento Frente à Movimentação do Sal em Poços de Petróleo**. 155 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1999.

MIRANDA, A. C. O. **Propagação de Trincas por Fadiga em Geometrias 2D Complexas sob Cargas Cíclicas Variáveis**. 125 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2003.

MOHRIAK, W.; SZATMARI, P; ANJOS, S. M. C. SAL: **Geologia e Tectônica**. 1. ed. Ed. São Paulo: Beca Edições, 2008.

MORESI, L.; MÜHLHAUS, H.; DUFOUR, F. An Overview of Numerical Methods for Earth Simulations. **Proceedings of Exploration Geodynamics Chapman Conference**, Dunsborough, Australia, p. 113-119, 2001.

MUNJIZA, A. **The Combined Finite-Discrete Element Method**. John Wiley & Sons, 2004.

MUNJIZA, A; ANDREWS, K. R. F. NBS Contact Detection Algorithm for Bodies of Similar Size. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 43, n. 1, p. 131-149, 1998.

MUNJIZA, A.; JOHN, N. W. M. Mesh Size Sensitivity of the Combined FEM/DEM Fracture and Fragmentation Algorithms. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 69, p. 281-295, 2002.

NAKASHIMA, H.; OIDA, A. Algorithm and Implementation of Soil-Tire Contact Analysis Code Based on Dynamic FE-DE Method. **Journal of Terramechanics**, v. 41, p. 127-137, 2004.

NASATO, D. S. **Desenvolvimento de Acoplamento Numérico entre o Método dos Elementos Discretos (DEM) e o Método dos Elementos Finitos**. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação: Engenharia Química, Universidade Estadual de Campinas, 2011.

NEEDLEMAN, A. A Continuum Model for Void Nucleation by Inclusion Debonding. **Journal of Applied Mechanics**, v. 54, p. 525-531, 1987.

NITKA, M.; COMBE, G.; DASCALU, C. Two-scale Modeling of Granular Materials: a DEM-FEM Approach. **Granular Matter**, v. 13, p. 277-281, 2011.

OÑATE, E.; ROJEK, J. Combination of Discrete Element and Finite Element Methods for Dynamic Analysis of Geomechanics Problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 3087-3128, 2004.

O'SULLIVAN, C.; BRAY, J. D. Selecting a Suitable Time Step for Discrete Element Simulations that Use the Central Difference Time Integration Scheme. **Engineering Computations**, v. 21, n. 2/3/4, p. 278-303, 2004.

PAAVILAINEN, J.; TUHKURI, J.; POLOJÄRVI, A. 2D Combined Finite-Discrete Element Method to Model Multi-fracture of Beam Structures. **International Journal for Computer-Aided Engineering and Software**, v. 26, p. 578-598, 2009.

PARK, K.; PAULINO, G. H.; ROESLER, J. R. A Unified Potential-based Cohesive Model of Mixed-mode Fracture. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 57, p. 891-908, 2009.

PARK, K.; PAULINO, G. H. Computational Implementation of the PPR Potential-based Model in ABAQUS: Educational Perspective. **Engineering Fracture Mechanics**, <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.02.007>, 2012.

PERIĆ, D.; CROOK, A. J. L. Computational Strategies for Predictive Geology with Reference to Salt Tectonics. **Computational Methods in Applied Mechanics And Engineering**, v. 193, p. 5195-5222, 2004.

RICE, J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. **Journal of Applied Mechanics**, v. 35, p. 379-386, 1968.

RICE, J. R.; ROSENGREN, G.F. Plane Strain Deformation Near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v. 16, p. 1-12, 1968.

ROCHA, L. A. S.; AZEVEDO, C. T. **Projetos de Poços de Petróleo: Geopressões e Assentamento de Colunas de Revestimentos**. 2. ed. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 2009.

ROJEK, J.; OÑATE, E. Multiscale Analysis Using a Coupled Discrete/Finite Element Model. **Interaction and Multiscale Mechanics**, v. 1, p. 1-31, 2007.

ROUSSEAU, J.; FRANGIN, E.; MARTIN, P. DAUDEVILLE, L. Multidomain Finite and Discrete Elements Method for Impact Analysis of a Concrete Structure. **Engineering Structures**, v. 31, p. 2735-2743, 2009.

SANTOS, J. P. L. **Estratégias Adaptativas para Formulações Mistas em Elementos Finitos Aplicadas a Modelos Reológicos Viscoelásticos e Modelos Lineares Incompressíveis**. 143 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011.

SAOUMA, V. E. **Lecture Notes in: Fracture Mechanics**. Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, United States of America, 2000.

SHIU, W. J.; DONZÉ, F. V. **Numerical Study of Rockfalls on Covered Galleries by the Discrete Elements Method**. In DONZÉ, F. V. (Ed.). Annual Report 2004 of Discrete Element Group for Risk Mitigation. Joseph Fourier University, Grenoble, France: website: http://geo.hmg.inpg.fr/frederic/articles/GED_2004/annual_report_GED_2005.pdf, 2005.

SIDDIQUEE, M. S. A.; TANAKA, T; TATSUOKA, F. Tracing the Equilibrium Path by Dynamic Relaxation in Materially Nonlinear Problems. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 19, p. 749-767, 1995.

SILVA, D. M. L. **Geração de Configurações Equilibradas de Sistemas de Linha Flexíveis através de Métodos de Relaxação Dinâmica**. 109 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.

SIMO, J. C.; TARNOW, N.; WONG, K. K. Exact Energy-Momentum Conserving Algorithms and Symplectic Schemes for Nonlinear Dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics And Engineering**, v. 100, p. 63-116, 1992.

SMITH, G. P. **Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods**. 3rd ed. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1985.

SONG, S. H.; PAULINO, G. H.; BUTTLAR, W. G. A Bilinear Cohesive Zone Model Tailored for Fracture of Asphalt Concrete Considering Viscoelastic Bulk Material. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 73, p. 2829-2848, 2006.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 2, 4. ed. Pioneira Thompson Learning, 2005.

STROUSTRUP, B. **C++ Programming Language**. 3rd ed. Addison-Wesley, 2000.

SYNGE, J. L. **The Hypercicle in Mathematical Physics**. Cambridge University Press, London, 1957.

TANNANT, D. D.; WANG, C. Thin Tunnel Liners Modelled with Particle Flow Code. **Engineering Computations**, v. 21, n. 2/3/4, p. 318-342, 2004.

TEIXEIRA, M. G.; MINATO, K. K.; BORGES, A. F. Combined FEM-DEM: Examples of Beam-Particle Interaction. **Mecânica Computacional**, v. XXIX, p. 4495-4505, 2010.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. **Theory of Elasticity**. McGraw Hill, 1970.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, p. 805-823, 1956.

VILLARD, P.; CHEVALIER, B.; LE HELLO, B.; COMBE, G. Coupling between Finite and Discrete Element Methods for the Modelling of Earth Structures Reinforced by Geosynthetic. **Computers and Geotechnics**, v. 36, p. 709-717, 2009.

WILLIAMS, M. L. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v. 24, p. 109-114, 1957.

XIANG, J.; MUNJIZA, A.; LATHAM, J.; GUISES, R. On the Validation of DEM and FEM/DEM Models in 2D and 3D. **International Journal for Computer-Aided Engineering and Software**, v. 26, p. 673-687, 2009.

XU, X.-P.; NEEDLEMAN, A. Void Nucleation by Inclusion Debonding in a Crystal Matrix. **Modelling Simulation Material Science Engineering**, v. 1, p. 111-132, 1993.

XU, X.-P.; NEEDLEMAN, A. Numerical Simulation of Fast Crack Growth in Brittle Solids. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v. 42, p. 1397-1434, 1994.

YAO, M; ANANDARAJAH, A. Three-dimensional Discrete Element Method of Analysis of Clays. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 129, n. 6, p. 585-596, 2003.

YOFFE, E. H. The Moving Griffith Crack. **Philosophical Magazine Series 7**, v. 42, p. 739-750, 1951.

ZHANG, Z. **Cohesive Zone Modeling of Dynamic Failure in Homogeneous and Functionally Graded Materials**. 171 p. Thesis (Master of Science degree) – Department of Civil and Environmental Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2003.

ZHOU, F.; MOLINARI, J-F; SHIOYA, T. A Rate-dependent Cohesive Model for Simulating Dynamic Crack Propagation in Brittle Materials. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 72, p. 1383-1410, 2005.