

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA 3D E A TEORIA  
DE RESPOSTA AO ITEM NO PROCESSO DE ENSINO-  
APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ESPACIAL**

WAGNER ADOLFO DE ALCÂNTARA E SOUZA BANDEIRA



Instituto de Matemática

Maceió, Dezembro de 2017



PROFMAT

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS**  
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**WAGNER ADOLFO DE ALCÂNTARA E SOUZA BANDEIRA**

**O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA 3D E A TEORIA DE RESPOSTA AO ITEM  
NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ESPACIAL**

**MACEIÓ**

**2017**

WAGNER ADOLFO DE ALCÂNTARA E SOUZA BANDEIRA

**O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA 3D E A TEORIA DE RESPOSTA AO ITEM  
NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ESPACIAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vanio Fragoso de Melo.

MACEIÓ

2017

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**

Bibliotecária: Janaina Xisto de Barros Lima

B214u    Bandeira, Wagner Adolfo de Alcântara e Souza.  
O uso do software Geogebra 3D processo de ensino-aprendizagem de geometria espacial / Wagner Adolfo de Alcântara e Souza Bandeira. – 2018. 95 f. : il.

Orientador: Vanio Fragoso de Melo.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 91-92.

Apêndices: f. 93-95.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria espacial – Ensino e Aprendizagem. 3. Geogebra (Software). I. Título.

CDU: 514:371.315



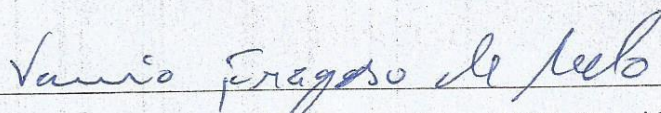
**Folha de Aprovação**

WAGNER ADOLFO DE ALCÂNTARA E SOUZA BANDEIRA

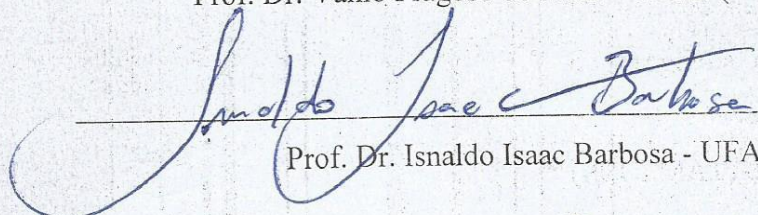
**O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA 3D E A TEORIA DE RESPOSTA AO  
ITEM NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA  
ESPACIAL**

Dissertação submetida ao corpo docente  
do Programa de Mestrado Profissional  
em Matemática em Rede Nacional  
(PROFMAT) do Instituto de Matemática  
da Universidade Federal de Alagoas e  
aprovada em 18 de dezembro de 2017.

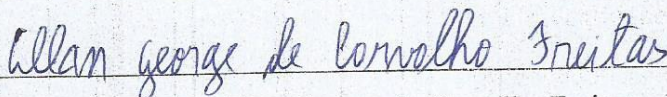
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Vanio Frágoso de Melo - UFAL (Presidente)



Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa - UFAL



Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas – UFPB



*Este trabalho é dedicado ao meu filho  
Arthur Emanuel, minha maior motivação.*

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, pela dedicação e persistência. Minha mãe Ana Maria que foi muito paciente durante todo meu tempo acadêmico e a meu pai Adolfo Bandeira (já ausente) por insistir na melhor educação para seus filhos.

Aos meus irmãos Eugênio, Chateaubriand e Lucca, e minhas irmãs Adna, Roseclaire e Élea pelo apoio. Em especial a Eugênio pelo apoio logístico, pelas conversas, pela descontração e por estar à disposição sempre que eu precisasse.

A minha esposa Luciana também pela extrema paciência e compreensão com as viagens semanais para a capital alagoana e também pela correção dos textos.

Ao meu orientador Vânio, que acreditou no trabalho e que colaborou muito para o meu crescimento como profissional.

Aos meus colegas de turma, pela ajuda e incentivo a continuar forte até o fim, depois de toda as dificuldades.

## RESUMO

Este trabalho tem como foco principal o processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial e possui duas fases. Na primeira fase, são usadas duas metodologias diferentes, aplicadas em duas turmas de terceiro ano do ensino médio integrado com técnico, no Centro Territorial de Educação Profissional Itaparica II Wilson Pereira (CETEPI 2). Uma das turmas tem aulas com a metodologia tradicional onde o professor usa apenas quadro branco e pincel atômico, enquanto a outra turma tem aulas no laboratório de informática usando o *software* de geometria dinâmica Geogebra 5.0 beta 3D, fazendo atividades de construção de sólidos com movimento dos mesmos e de seus elementos, construindo assim, princípios e conceitos geométricos, bem como a dedução de algumas fórmulas. Na segunda fase, as duas turmas passaram por um processo de avaliação baseada na Teoria de Resposta ao Item (TRI), com resultados satisfatórios, comparando os resultados das duas turmas em relação as habilidades dispostas nas Orientações Curriculares Para o Ensino Médio (OCPEM).

Palavras-chave: Geometria espacial; Geogebra 3D; Teoria de Resposta ao Item.

## **ABSTRACT**

This work has as focus the teaching and learning process of spatial geometry and has two phases. In the first phase, two different methodologies are used, applied in two classes of third degree of high school integrated with technician teaching, in the Territorial Center of Professional Education Itaparica II Wilson Pereira (CETEPI 2). One of the classes has traditional methodology lessons where the teacher uses only whiteboard and atomic marker, while the other class takes classes in the computer lab using Geogebra 5.0 beta 3D dynamic geometry software, doing solid motion activities with and its elements, thus constructing geometric principles and concepts, as well as the deduction of some formulas. In the second phase, the two groups underwent an evaluation process based on the Theory of Response to Item (TRI), with satisfactory results, comparing the results of the two classes in relation to the skills set out in the Curricular Guidelines for Secondary Education (OCPEM).

Keywords: Spatial geometry; 3D Geogebra; Item Response Theory.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Escolha do número de vértices do polígono regular (4 lados).....	28
Figura 2: Base quadrada de lado 3.....	29
Figura 3: Janela de visualização 3D e formação do cubo.....	29
Figura 4: Retas suporte e suas respectivas posições relativas.....	30
Figura 5: Plano suporte.....	30
Figura 6: Planos suporte e suas respectivas posições relativas.....	31
Figura 7: Poliedro não convexo.....	32
Figura 8: Plano que caracteriza um poliedro não convexo.....	32
Figura 9: Segmento de reta que caracteriza um poliedro não convexo.....	33
Figura 10: Os cinco poliedros regulares.....	33
Figura 11: Base triangular equilátera de um prisma.....	34
Figura 12: Retas paralelas suporte as arestas do prisma.....	35
Figura 13: Determinação da segunda base do prisma.....	35
Figura 14: Visualização do prisma oblíquo de base triangular regular.....	36
Figura 15: Prisma reto de base quadrada.....	37
Figura 16: Planificação do prisma de base quadrada.....	37
Figura 17: Prisma de base quadrada planificado.....	37
Figura 18: Controle deslizante e animação da planificação do prisma de base quadrada.....	38
Figura 19: Diagonais e centro da base hexagonal regular.....	39
Figura 20: Apótema da base hexagonal regular.....	39
Figura 21: Prisma reto de base hexagonal regular planificado.....	40
Figura 22: Bases quadrada e triangular retangular.....	41

Figura 23: Prismas de bases quadrada e triangular retangular.....	41
Figura 24: Plano paralelo ao plano das bases seccionando os prismas.....	42
Figura 25: Base pentagonal regular.....	43
Figura 26: Pirâmide reta de base pentagonal regular e sua planificação.....	43
Figura 27: Centro da base e apótemas da base e da pirâmide.....	44
Figura 28: Base pentagonal regular inscrita na circunferência.....	45
Figura 29: Pirâmide reta de base hexagonal regular, planificada.....	46
Figura 30: Diagonais e apótemas da base e da pirâmide hexagonal.....	47
Figura 31: Base hexagonal regular inscrita na circunferência.....	47
Figura 32: Quadrado de lado quatro e seus apótema e raio.....	48
Figura 33: circunferências inscritas e circunscritas ao quadrado.....	49
Figura 34: Formação dos círculos.....	49
Figura 35: Pirâmide reta de base quadrada e seu apótema.....	50
Figura 36: Triângulo retângulo cuja hipotenusa é o apótema da pirâmide.....	51
Figura 37: Primeiro triângulo retângulo cuja hipotenusa é a aresta da pirâmide.....	51
Figura 38: Triângulo retângulo cuja hipotenusa é o raio da base.....	52
Figura 39: Segundo triângulo retângulo cuja hipotenusa é a aresta da pirâmide.....	52
Figura 40: Primeiro plano seccionando o prisma reto de base triangular regular.....	54
Figura 41: Ocultando plano.....	54
Figura 42: Vista da primeira secção no prisma.....	54
Figura 43: Vista da segunda secção no prisma.....	55
Figura 44: Corte de uma pirâmide no prisma.....	56
Figura 45: Separação das três pirâmides que formam o prisma.....	56
Figura 46: Vista superior das pirâmides que compõem o prisma, separadas.....	57

Figura 47: Prisma reto de base quadrada que compõe o tronco de pirâmide.....	58
Figura 48: Primeiro prisma de base triangular que compõe o tronco de pirâmide.....	58
Figura 49: Segundo prisma de base triangular que compõe o tronco de pirâmide.....	59
Figura 50: Tronco de pirâmide formado.....	59
Figura 51: Cilindro circular reto de raio variável.....	60
Figura 52: Cilindro circular reto de raio e altura variáveis.....	61
Figura 53: Cone circular reto de raio e altura variáveis.....	62
Figura 54: Exibição do valor do volume do cilindro.....	62
Figura 55: Exibição os valores dos volumes dos dois cilindros e do cone.....	63
Figura 56: Cilindro equilátero e esfera, ambos de mesmo raio variável.....	64
Figura 57: Plano secionando a esfera e o cone duplo interno ao cilindro.....	65
Figura 58: Interseção do plano com a superfície do cone.....	65
Figura 59: Interseção do plano com as superfícies do cilindro, do cone e da esfera....	66
Figura 60: Exibição dos valores das áreas das seções do cilindro, do cone e da esfera.....	67
Figura 61: Esfera de raio variável (Teorema de Arquimedes).....	67
Figura 62: Cilindro equilátero de raio variável e esfera inscrita de mesmo raio.....	68
Figura 63: Cilindro, cone e esfera, de raio variável (Teorema de Arquimedes).....	68



## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Identificação dos parâmetros em uma Curva Característica de um Item.....	26
Gráfico 2: Curva característica da turma – 3° ACB.....	73
Gráfico 3: Curva característica da turma – 3° AGR.....	73
Gráfico 4: Curvas características dos itens – 3° ACB.....	74
Gráfico 5: Curvas características dos itens – 3° AGR.....	74
Gráfico 6: CCI 1 – 3° ACB.....	75
Gráfico 7: CCI 1 – 3° AGR.....	75
Gráfico 8: CCI 2 – 3° ACB.....	76
Gráfico 9: CCI 2 – 3° AGR.....	76
Gráfico 10: CCI 3 – 3° ACB.....	77
Gráfico 11: CCI 3 – 3° AGR.....	77
Gráfico 12: CCI 4 – 3° ACB.....	79
Gráfico 13: CCI 4 – 3° AGR.....	79
Gráfico 14: CCI 5 – 3° ACB.....	80
Gráfico 15: CCI 5 – 3° AGR.....	80
Gráfico 16: CCI 6 – 3° ACB.....	81
Gráfico 17: CCI 6 – 3° AGR.....	81
Gráfico 18: CCI 7 – 3° ACB.....	82
Gráfico 19: CCI 7 – 3° AGR.....	82
Gráfico 20: CCI 8 – 3° ACB.....	83
Gráfico 21: CCI 8 – 3° AGR.....	83
Gráfico 22: CCI 9 – 3° ACB.....	84

Gráfico 23: CCI 9 – 3° AGR.....	84
Gráfico 24: CCI 10 – 3° ACB.....	85
Gráfico 25: CCI 10 – 3° AGR.....	85
Gráfico 26: CCI 11 – 3° ACB.....	86
Gráfico 27: CCI 11 – 3° AGR.....	86
Gráfico 28: CCI 12 – 3° ACB.....	87
Gráfico 29: CCI 12 – 3° AGR.....	87

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Classificação e percentual esperado para os índices de dificuldade.....	25
Tabela 2: Classificação da discriminação.....	25
Tabela 3: Resultado do teste do 3° AC-B.....	69
Tabela 4: Resultado do teste do 3° AGR.....	70
Tabela 5: Estimativa dos parâmetros – 3° ACB.....	71
Tabela 6: Estimativa dos parâmetros – 3° AGR.....	71
Tabela 7: Estimativa de variável latente – 3° ACB.....	72
Tabela 8: Estimativa de variável latente – 3° AGR.....	72

## Sumário

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>2. CONTEXTO HISTÓRICO.....</b>	<b>15</b>
<b>3. O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL SEGUNDO OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS .....</b>	<b>17</b>
<b>4. A TEORIA DE RESPOSTA AO ITEM .....</b>	<b>23</b>
<b>5. PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA: O USO DO GEOGEBRA 3D NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL .....</b>	<b>28</b>
<b>6. ANÁLISE DOS RESULTADOS DOS TESTES USANDO A TRI.....</b>	<b>69</b>
<b>7. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>88</b>
<b>8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>89</b>
<b>9. ANEXO .....</b>	<b>91</b>



## 1. INTRODUÇÃO

Atualmente, é impensável viver em uma sociedade moderna sem o uso da tecnologia da informação e comunicação. Segundo as Orientações Curriculares Nacionais (p.87, 2008) é importante uma formação escolar em dois sentidos, "...a matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a matemática". Por um lado, podemos usar a matemática para capacitar o aluno a usar calculadoras e planilhas eletrônicas; por outro lado, podemos usar *softwares* para que os alunos possam explorar e construir diferentes conceitos matemáticos. Os *softwares* de geometria dinâmica, podem ser usados para o estudo de geometria espacial e auxiliar o livro didático dando movimento aos sólidos geométricos e seus elementos. De acordo com Giraldo (2012, p. 114)

As ferramentas de geometria dinâmica permitem a construção de objetos geométricos de acordo com propriedades ou relações estabelecidas. Estes podem ser manipulados dinamicamente, de tal maneira que as propriedades e relações sejam preservadas.

Para facilitar a visão tridimensional do aluno e enriquecer imagens mentais associadas às propriedades geométricas, existem opções de metodologias que são de grande ajuda, como o uso desses *softwares* de geometria dinâmica, construindo os sólidos e analisando suas propriedades e os conceitos envolvidos através do movimento do próprio sólido ou de seus elementos.

Este trabalho trata do uso do Geogebra 5.0 Beta (3D) como *software* de geometria dinâmica auxiliando o livro didático no processo de ensino-aprendizagem de geometria espacial, em comparação com a metodologia tradicional apenas com o uso do livro didático. A comparação entre as duas metodologias será feita com o uso de um teste considerando as habilidades adquiridas pelos alunos durante o processo, a análise dos resultados será realizada por um método mundialmente conhecido como Teoria de Resposta ao Item (TRI). Foram selecionadas duas turmas de terceiro ano do Ensino Médio integrado com Curso Técnico, uma delas utilizando-se do livro didático adotado pela escola e do Geogebra 5.0 beta (3D) instalado nos computadores do laboratório de informática. A outra turma utilizando apenas o livro didático adotado pela escola e metodologia tradicional com quadro branco e pincel atômico.

O objetivo é acrescentar uma metodologia que facilite o estudo de geometria espacial explorando o espaço de forma mais dinâmica, proporcionando assim um melhor desenvolvimento da visão espacial dos objetos estudados e suas propriedades geométricas.

Ao final do estudo, não se espera que os alunos de uma turma sejam melhores ou piores que os da outra turma, mas que tenham habilidades diferentes para resolver problemas de geometria espacial, ou pelo menos resultados diferentes para a mesma habilidade.

## 2. CONTEXTO HISTÓRICO

Não se tem certeza sobre a origem da geometria, mas sabe-se que, antes mesmo da escrita, os mesopotâmios, os egípcios e os babilônios, já utilizavam conhecimentos geométricos relativos à medida. A principal fonte de informação sobre o Egito vem do papiro de Rhind ou de Ahmes. Mas existem outras fontes, como os papiros de Kahun e de Berlin e, um importante chamado papiro de Moscou ou Golonishev (1890 a.C. aproximadamente).

No papiro de Moscou há um exemplo que parece ser muito importante em que aparece uma figura que aparenta ser um trapézio, mas os cálculos relacionados a ela estão associados a um tronco de pirâmide. O problema pergunta qual é o volume de um tronco de pirâmide quadrada cuja altura mede 6 unidades se as arestas das bases superior e inferior medem, respectivamente, 2 unidades e 4 unidades.

Foi Tales de Mileto (c. 624 – 548 a.C.), que começou as demonstrações em geometria. Depois, o filósofo grego Platão (427 a.C. – 347 a.C.), nascido em Atenas e discípulo de Sócrates, conheceu uma classe de poliedros, que mais tarde, receberia seu nome.

Euclides de Alexandria (c. 300 a.C.) organizou todos os resultados dos estudos matemáticos e melhorou muitas demonstrações, que publicou em sua coleção de 13 livros, chamada de “Os Elementos”. Muito do que está escrito nesta coleção ainda é a base da escrita geométrica usada até hoje. Mais da metade das obras escritas por Euclides se perdeu, “Os Elementos” foi uma das cinco obras que sobreviveram, com 13 volumes dos quais os seis primeiros eram sobre geometria plana e os três últimos sobre geometria no espaço. O trabalho de Euclides, segundo Boyer (2010), é “a mais renomada na história da matemática”, e ainda segundo Boyer, “Proclo descreve *Os Elementos*, em relação com o resto da matemática, como as letras do alfabeto em relação com sua linguagem”.

O primeiro livro começa com uma lista de vinte e três definições, que, atualmente não são consideradas como definições. Logo em seguida, Euclides lista cinco postulados e cinco axiomas (ou noções comuns). Não se sabe se Euclides diferenciava axioma de postulados como fazia Aristóteles, mas para os matemáticos



atuais, não há diferença. O fato é que, essas definições e postulados escritos por Euclides, são a base da geometria atual, inclusive para a geometria espacial de posição.

Arquimedes (c. 287 – 212 a.C.) foi considerado o maior matemático da antiguidade e um dos maiores de todos os tempos. Nasceu e morreu em Siracusa na Grécia, era um geômetra muito habilidoso e era também muito engenhoso, suas obras são verdadeiras obras-primas com linguagem clara e com muito rigor nas demonstrações. Construiu máquinas de guerra para resistir a invasão dos romanos.

Saindo da antiguidade e chegando na atualidade, dois matemáticos que contribuíram com a geometria foram, o italiano Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) e o suíço Leonhard Euler (1707 – 1783). Cavalieri foi aluno de Galileu e sua maior contribuição matemática foi *Geometria indivisibilibus*, e é nesta obra que ele desenvolve, com muito rigor, um método para se calcular áreas e volumes e é conhecido hoje como Princípio de Cavalieri. Euler é reconhecido como o matemático mais produtivo de todos os tempos, tendo contribuído em todos os ramos da matemática. Sua maior contribuição para a geometria foi a expressão que relaciona o número de faces, vértices e arestas de um poliedro.

### 3. O ENSINO DE GEOMETRIA SEGUNDO OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Um dos objetivos deste trabalho é usar a tecnologia para auxiliar o livro didático no ensino de matemática. A ideia inicial era usar o *software* Geogebra 5.0 Beta (3D) para resolver problemas do cotidiano, já que um dos propósitos do ensino de matemática na educação básica é exatamente este. Ao passar do tempo, durante as oficinas ministradas no laboratório de informática, percebeu-se que os alunos não tinham uma base sólida das definições e teoremas. Assim, adotou-se a estratégia de usar o Geogebra em dois momentos, no primeiro para explorar propriedades, definições e teoremas, e num segundo momento, os alunos poderiam tentar resolver problemas contextualizados ao estilo do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM – que testa as habilidades relacionadas a representação e a compreensão

A representação de figuras geométricas planas e espaciais é, sem dúvida, o que mais estimula o aluno a aprender matemática. O uso do Geogebra facilita essas representações e, mais ainda, no nosso caso, dá movimento a essas representações facilitando a compreensão das definições e das proposições, abrindo caminho para as outras habilidades como comunicação, investigação e contextualização sociocultural.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) são um conjunto de orientações curriculares, baseado em princípios definidos na LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação), que traça o perfil para o currículo, apoiada em competências e habilidades a serem desenvolvidas, relacionadas a representação, compreensão, comunicação, investigação e contextualização sociocultural. Essas diretrizes buscam orientar os professores a buscar novas abordagens e metodologias, onde a forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático, buscando dar significado ao conhecimento escolar mediante a contextualização, a interdisciplinaridade e incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender.

Segundo os PCNEM, um dos fatores que determinaram a elaboração das diretrizes gerais que compõem o próprio documento são os avanços da tecnologia no campo da microeletrônica e o avanço rápido da informática a partir dos anos 80.

A denominada “revolução informática” promove mudanças radicais na área do conhecimento, que passa a ocupar um lugar central nos processos de desenvolvimento, em geral. É possível afirmar que, nas próximas décadas, a educação vá se transformar mais rapidamente do que em muitas outras, em função de uma nova compreensão teórica sobre o papel da escola, estimulada pela incorporação das novas tecnologias. (PCNEM 2000).

O Ministério da Educação também disponibiliza, para cada área do conhecimento, as orientações curriculares para o ensino médio.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCPEM) de 2008, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei N° 9.394/96), determina os objetivos do ensino básico ao qual está inserido o ensino médio.

O ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos. (OCPEM, 2008)

Os objetivos da formação matemática na educação básica, tem como propósitos, segundo as orientações curriculares para o ensino médio:

- Usar a matemática para resolver problemas do cotidiano;
- Modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento;
- Compreender que a matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações;
- Perceber a matemática como um conhecimento social e historicamente construído;
- Saber apreciar a importância da matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

Por isso, no que diz respeito ao conteúdo trabalhado, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCPEM) destacam que “A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um ‘fazer matemático’ por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento”. Nesse contexto, nada mais prático do que o próprio aluno usar uma ferramenta tão rica como um *software* de geometria dinâmica para dar movimento aos sólidos geométricos e aos seus elementos.

Atualmente, a base curricular brasileira é sustentada em quatro pilares: trabalho, ciência, tecnologia e cultura, e trazem a contextualização, a interdisciplinaridade e a transversalidade como tripé metodológico (OCPEM).

A matriz do 3º ano do ensino médio, em matemática, é composta por quatro temas, são eles:

- Tema I – Espaço e Forma
- Tema II – Grandezas e Medidas
- Tema III – Números e Operações / Álgebra e Funções
- Tema IV – Tratamento da Informação

Cada tema é composto por descritores. Como este trabalho é baseado em estudos de geometria espacial, trataremos apenas dos descritores do tema I – Espaço e Forma e o tema II – Grandezas e Medidas.

Segundo Rabelo (2013, p.24),

O desenvolvimento do pensamento geométrico é fundamental para o estudante compreender, descrever e representar, de forma organizada e clara, o mundo que o cerca. Nessa etapa de escolaridade, o estudante deve se familiarizar mais com o raciocínio abstrato e ser capaz de reconhecer as figuras planas não somente pelas suas definições, mas também por meio da investigação de suas propriedades. Além disso deve reconhecer as figuras espaciais clássicas (prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas) e identificar suas propriedades...

Devemos perceber que o trabalho com o Geogebra é mais abstrato do que contextualizado com problemas do cotidiano, mas que com essa abstração, o estudante adquire a capacidade de resolver problemas contextualizados. Por isso, as atividades propostas e os testes devem ter como referência os descritores de cada tema. Os descritores do tema I são:

- D1 – Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.
- D2 – Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.
- D3 – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

- D4 – Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.
- D5 – Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente).
- D6 – Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
- D7 – Identificar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.
- D8 – Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.
- D9 – Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.
- D10 – Reconhecer entre as equações de 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências.

Devemos perceber também que nem todos os descritores se encaixam nas atividades propostas em geometria espacial, porém, outras atividades podem ser elaboradas para isto. Já no tema II, podem ser usados todos os descritores. O principal objetivo do tema II é a manipulação das unidades de medidas convencionais. Os descritores do tema II são:

- D11 – Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.
- D12 – Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.
- D13 – Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

A matriz de referência para o ENEM na área da Matemática e suas tecnologias é composta por cinco eixos cognitivos (comum a todas as áreas do conhecimento) e sete competências de área, cada competência é composta por suas respectivas habilidades. São eles:

### **Eixos Cognitivos**

I – Dominar Linguagens (DL): dominar a norma culta da língua portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II – Compreender Fenômenos (CF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos Histórico-geográficos, na produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III – Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV – Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V – Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos nas escolas para elaboração de propostas de intervenção solidária, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

### **Competências e Habilidades**

Como já foi mencionado, cada competência tem suas respectivas habilidades, mas não listaremos todas as habilidades nem todas as competências. A lista de competências e habilidades a seguir é apenas o que interessa neste trabalho.

O eixo 2, Geometria e medidas, é composto por duas competências e oito habilidades, sendo quatro habilidades para cada competência. São elas:

Competência C2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos sobre espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos sobre espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência C4: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Apenas a competência do eixo 2 e suas respectivas habilidades (H6 até H9) foram utilizadas no teste. Quanto aos descritores, foram utilizados nos testes, os descritores dos temas I e II, mas os alunos não foram avaliados com base nos descritores, o critério de avaliação do teste foi baseado nas habilidades.

#### 4. A TEORIA DE RESPOSTA AO ITEM (TRI)

Segundo Mauro Rabelo no livro AVALIAÇÃO EDUCACIONAL: Fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro (2012), a Teoria de Resposta ao Item (TRI) surgiu na década de 50 e foi introduzida por Frederic Lord, que propôs um modelo teórico e estabeleceu métodos para estimar os parâmetros dos itens cujas respostas eram dicotômicas, binárias, do tipo certo ou errado.

A TRI usa modelos e algoritmos matemáticos complexos, difíceis de ser operacionalizados e, por isso, só começou a ser difundida depois do desenvolvimento de *softwares* com o avanço tecnológico da década de 80. O modelo foi aperfeiçoado por Samejima na década de 70, que segundo Rabelo (2012), "...generalizou a teoria e elaborou modelos para testes com itens de respostas politômicas e também para dados contínuos" (2012, p.126).

##### **O modelo de três parâmetros**

A TRI é um modelo composto por um, dois ou três parâmetros. O modelo utilizado nesta proposta é composto por três parâmetros. O acerto ao acaso ( $c$ ), a dificuldade do item ( $b$ ) e a discriminação do item ( $a$ ). Por isso, a escolha da TRI no teste aplicado nesta pesquisa, deve-se ao fato de que os itens são de múltipla escolha, com possibilidade de "chute" dos respondentes, além do mais, as metodologias utilizadas nas duas turmas foram completamente diferentes, possibilitando assim, a comparação do parâmetro dificuldade do item.

O parâmetro  $a$  é a discriminação do item, que tem a capacidade de diferenciar indivíduos com habilidades diferentes, e, também foi observada nesta pesquisa. Para entender melhor o modelo de três parâmetros na TRI, vamos transcorrer um pouco sobre cada um desses parâmetros.

Começaremos pelo parâmetro  $c$  que é o acerto ao acaso, ou o mais popularmente conhecido como "chute". Segundo Rabelo (2012, p.132), O acerto ao acaso "ocorre principalmente com itens que são mais difíceis, para os quais indivíduos de baixa aptidão não conhecem a resposta correta, mas arriscam qualquer uma".

O parâmetro  $c$ , na TRI, representa uma probabilidade de acerto ao acaso, de um aluno que tem baixa habilidade ou nenhuma habilidade para responder o item de forma correta. Como cada item tem cinco opções de escolha para que o respondente



assinale uma, o valor esperado para o parâmetro  $c$  deve ser menor que  $\frac{1}{5} = 0,2$  ou 20%. Se  $c$  for muito maior que 0,2, isso significa que pode haver equívoco na formulação já que o resultado indica que a opção correta atrai respondentes de desempenho mais baixo.

O parâmetro  $b$  é a dificuldade do item, que Rabelo (2012, p.133) define “como o nível mínimo de proficiência que um estudante precisa possuir para ter uma chance alta de acertar a resposta”. O parâmetro  $b$  não é uma probabilidade, é um valor  $\theta$  associado a aptidão necessária para se obter uma probabilidade de acerto igual a  $\frac{(1+c)}{2}$ . O *eirt*, suplemento do *excel*, define esse valor  $\theta$  como  $z$ .

O parâmetro  $b$  (ou dificuldade), pode variar numa escala de -3 a 3, sendo que no *eirt*, esse parâmetro tem intervalo de variação maior podendo chegar -4 como limite inferior e 4 como limite superior. Teoricamente, o  $b$  pode variar de  $-\infty$  a  $+\infty$ , mas o motivo de, na prática, se usar o intervalo limitado é que 99,7% dos casos estão dispostos entre -3 e 3. Nesta pesquisa, usaremos o intervalo de -4 a 4, como disposto no *eirt*.

No nosso caso, os itens são considerados mais fáceis quando estão próximos de -4 e mais difíceis quando estão próximos de 4. Itens que se encontram fora desse intervalo, normalmente, seriam excluídos, também não é nosso caso, já que pretendemos analisar, diagnosticar e apresentar os problemas do teste em relação à metodologia usada em sala de aula.

De acordo com Rabelo, “uma distribuição de níveis de dificuldades de itens no teste dentro de uma curva normal: 10% dos itens em cada uma das faixas extremas, 20% em cada uma das faixas seguintes e 40% na faixa média” (Rabelo, 2012 *apud* Pasquali, 2003). Como o teste é de matemática, não deveremos seguir essas recomendações sobre esses percentuais, pois, ainda de acordo com Rabelo, “Em geral, nos testes de matemática, os itens apresentam tendência de índice de dificuldade elevada...”. (2012, p.134 e 135).

A classificação e o percentual esperado para os índices de dificuldade estão representados na tabela a seguir:

Tabela 1: Classificação e percentual esperado para os índices de dificuldade

Classificação	Valores de $b$	% esperado
Muito fáceis	Até -1,28	10%
Fáceis	de -1,27 a -0,52	20%
Medianos	de -0,51 a 0,51	40%
Difíceis	de 0,52 a 1,27	20%
Muito difíceis	1,28 ou mais	10%

Fonte: Rabelo (2012)

O parâmetro  $a$  é a discriminação do item, que teoricamente deve ser um valor maior que ou igual a zero. Os itens cujo valor de  $a$  seja negativo deve ser descartado, pois, nesse caso indica que quanto maior a habilidade do respondente menor é a probabilidade de acerto desse item, o que é no mínimo muito estranho. Para alguns autores a classificação da discriminação é classificada de acordo com a tabela abaixo:

Tabela 2: Classificação da discriminação

Valores	Discriminação
$a = 0,0$	Nenhuma
$0,0 < a \leq 0,35$	Muito baixa
$0,35 < a \leq 0,65$	Baixa
$0,65 < a \leq 1,35$	Moderada
$1,35 < a \leq 1,70$	Alta
$a > 1,70$	Muito alta

Fonte: Rabelo (2012)

Segundo Rabelo (2012, p. 138), os valores de  $a$  para que ele seja considerado discriminativo para os itens, em geral, são valores acima de 0,70, “não é possível estabelecer *a priori* se o item vai se comportar bem quando da aplicação do teste” (Rabelo 2012). Na análise do teste aplicado nesta pesquisa veremos que nem todo item será discriminativo, e não se trata da má elaboração do item, afinal são itens que já foram aplicados no ENEM. Os itens que não são discriminativos ou são fáceis demais ou são difíceis demais e, os itens que tem dificuldade média são mais discriminativos, em geral.

## Curva característica do item

A Curva Característica do Item (CCI) é uma sigmoide, curva em formato de “S”, com duas assíntotas horizontais. Através da CCI, obtemos informações importantes como a Probabilidade de um indivíduo  $j$  responder corretamente um item  $i$  em função de sua habilidade  $\theta$  (no nosso caso,  $z$ ) e os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Essa probabilidade é dada por:

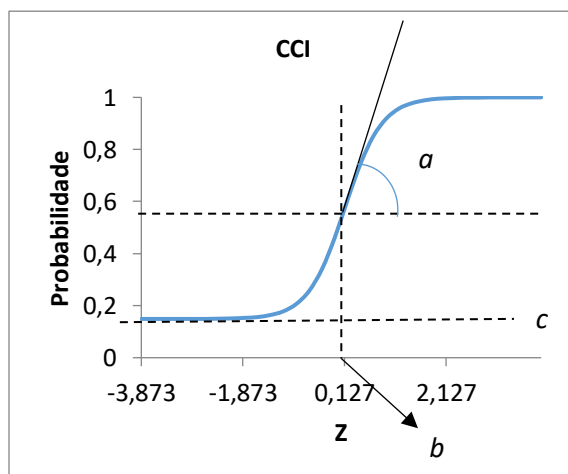
$$P(X_{ji} = 1/z_j) = c_i + \frac{(1-c_i)}{1+\exp[-Da_i(z_j-b_i)]}$$

Onde,

- $X_{ji}$  é a resposta do indivíduo  $j$  ao item  $i$  (igual a 1, se a resposta for correta, ou igual a 0, caso contrário);
- $a_i > 0$  é o parâmetro de discriminação do item;
- $b_i$  é a dificuldade do item (medido na mesma escala da habilidade do item);
- $0 < c_i < 1$  é o parâmetro de acerto ao acaso;
- $z_j$  é a habilidade ou traço latente do indivíduo  $j$ ;
- $\exp$  representa a função exponencial;
- $D$  é um fator de escala, que é igual a 1 na métrica logística e igual a 1,7 na métrica normal.

A seguir, temos um exemplo de Curva Característica do Item com os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  em destaque.

Gráfico 1: Identificação dos parâmetros em uma Curva Característica de um Item



Fonte: eirt

Na CCI, o parâmetro  $a$  é a inclinação da reta tangente ao ponto de inflexão da curva. O parâmetro  $b$  é o valor, na mesma escala da habilidade  $z$ , no eixo horizontal, correspondente a posição do ponto de inflexão da curva. E o parâmetro  $c$ , é o valor da probabilidade por onde passa a assíntota inferior.

## 5. O USO DO GEOGEBRA 3D NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

- 1) Determinar as posições relativas entre as retas suporte às arestas de um cubo, Entre a reta suporte a aresta e um plano suporte a uma face do cubo, e entre dois planos suporte do cubo.

Assunto: Geometria espacial de posição:

- Posições relativas entre duas retas, uma reta e um plano e dois planos.
- Propriedades do paralelismo e perpendicularismo.

Objetivos:

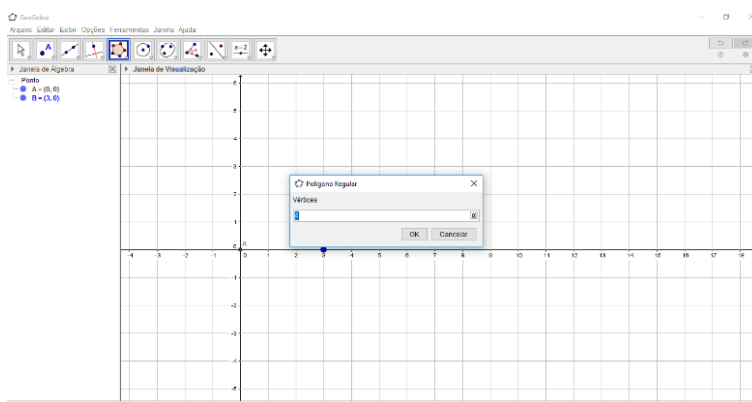
- Compreender as posições relativas entre duas retas, reta e plano e dois planos;
- Reconhecer as propriedades de paralelismo e perpendicularismo no espaço;

Observações:

- Reta suporte a uma aresta é a reta que contém a aresta.
- Plano suporte a uma face é o plano que contém a face.

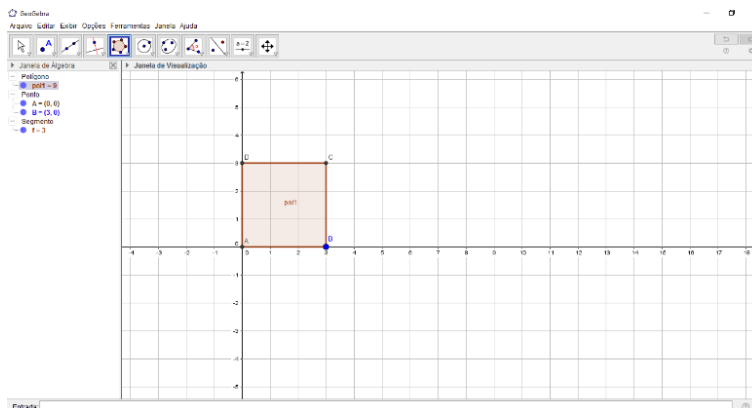
Neste primeiro momento, vamos mostrar como criar o cubo no geogebra. Na janela de visualização 2D, selecionar “polígono regular” no ícone polígono. Marque os pontos  $A = (0,0)$  e  $B = (3,0)$ , informe o número de vértices – Nesse caso, 4 para formar um quadrado – clique em ok. (Ver figuras 1 e 2). Na guia “exibir”, selecionar “Janela de visualização 3D”. Não há perda de generalidade na construção.

Figura 1: Escolha do número de vértices do polígono regular (4 lados)



Fonte: Autor

Figura 2: Base quadrada de lado 3

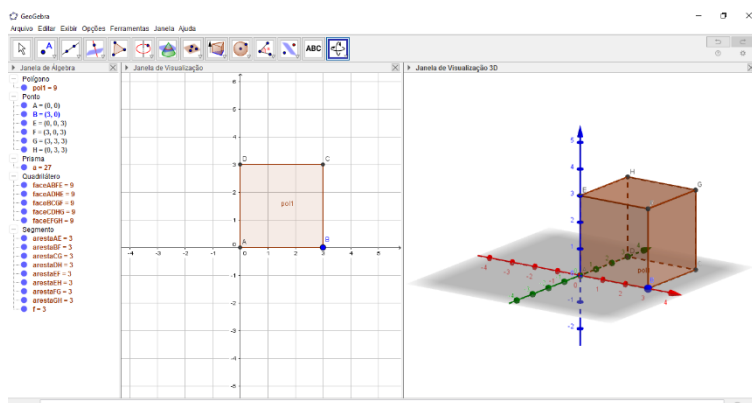


Fonte: Autor

No geogebra existe um recurso para verificar os ângulos internos de um polígono. Não é o caso de usarmos esse recurso, pois já estamos usando os eixos ortogonais do próprio sistema como base. Note que os lados  $AB$  e  $AD$  são perpendiculares pois estão sobre os eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente.

No ícone pirâmide, selecione “Fazer extrusão para prisma ou cilindro”, clique no polígono, na janela 3D, informe a altura 3 do prisma e clique em ok. Note que o prisma formado é um cubo de aresta medindo 3. (Ver figura 3).

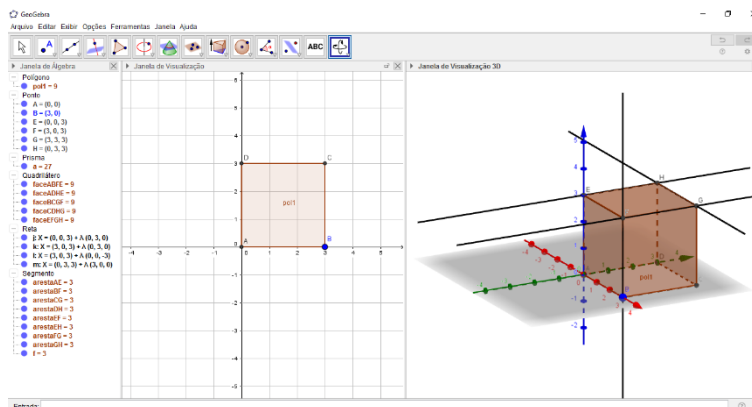
Figura 3: Janela de visualização 3D e formação do cubo



Fonte: Autor

Clique no ícone “reta” e clique nos pontos  $E$  e  $H$ . A reta  $EH$  é a reta suporte a aresta  $EH$ . Faça o mesmo procedimento para formar as retas suporte  $BF$ ,  $HG$  e  $FG$ . (Ver figura 4).

Figura 4: Retas suporte e suas respectivas posições relativas

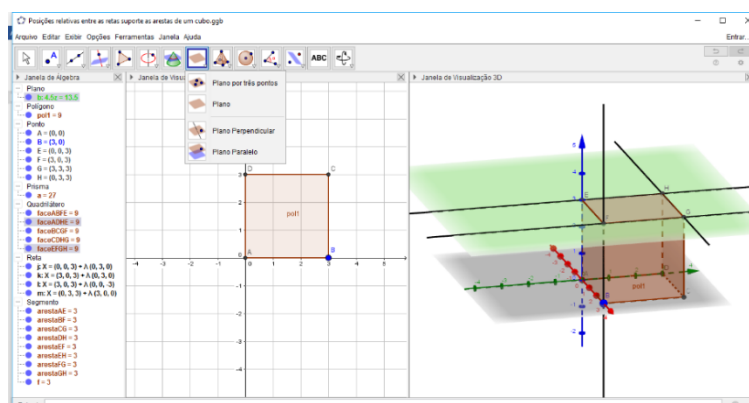


Fonte: Autor

As arestas  $EH$  e  $FG$  são paralelas, pois são coplanares e não tem ponto comum.  $EH$  e  $GH$  são concorrentes e se intersectam no ponto  $H$ , mais ainda, são também perpendiculares, pois são retas suporte as arestas de um quadrado onde o ponto  $H$  é vértice desse quadrado. Como os ângulos internos de um quadrado são retos, o ângulo entre as retas  $EH$  e  $GH$  também é reto em  $H$ . O mesmo acontece aos pares de retas  $HG$  e  $FG$ . Assim podemos concluir que, como  $EH$  e  $FG$  são paralelas, se  $GH$  é perpendicular a  $EH$  então  $GH$  também é perpendicular a  $FG$ . A reta  $BF$  e a reta  $EH$  são reversas, pois, não são coplanares. (O aluno pode tentar formar um plano que contenha as duas retas).

No Menu, selecione “plano” e clique na face  $EFGH$ . Observe que as retas  $EH$ ,  $GH$  e  $FG$  são coplanares e a reta  $BF$  intersecta o plano, ou seja,  $BF$  é concorrente ao plano  $EFGH$ . (Ver figura 5).

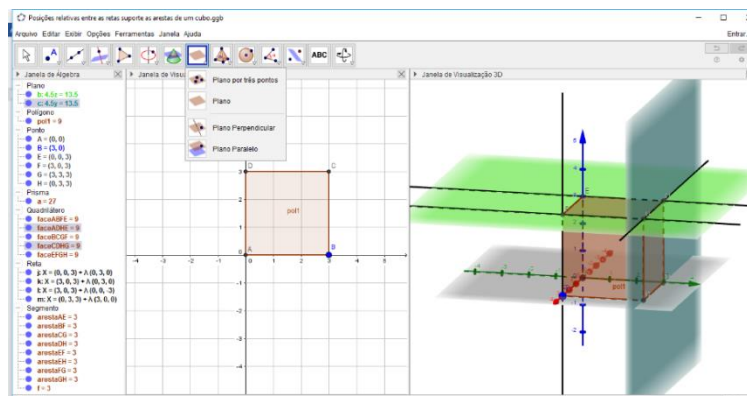
Figura 5: Plano suporte



Fonte: Autor

No Menu, selecione “plano” e clique na face  $CDHG$ . A reta  $GH$  está contida nos planos  $EFGH$  e  $CDHG$ , assim, esses dois planos são secantes, mais ainda, são perpendiculares. A reta  $BF$  que é paralela ao plano  $CDHG$ , é perpendicular ao plano  $EFGH$ . Ou ainda, as retas  $FG$  e  $EH$  que estão contidas no plano  $EFGH$  são perpendiculares ao plano  $CDHG$ . (Ver figura 6).

Figura 6: Planos suporte e suas respectivas posições relativas



Fonte: Autor

## 2) Estudo dos poliedros:

- Formar um poliedro não convexo e justificar de duas maneiras distintas porque ele não é convexo.
- Formar todos os poliedros regulares e verificar se esses poliedros são de Platão.

Assuntos: Geometria espacial métrica

- Poliedros

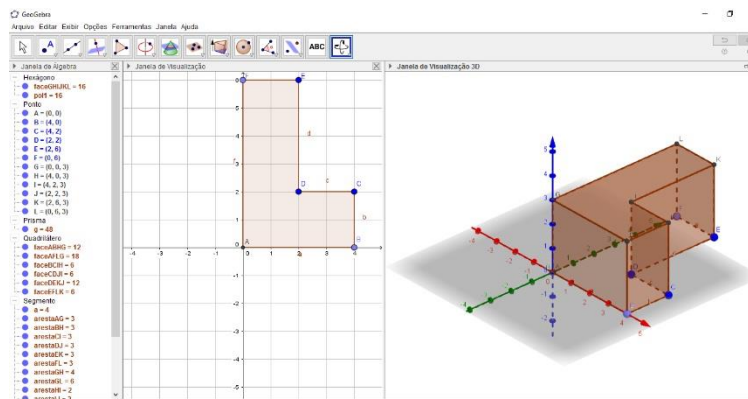
Objetivos:

- Distinguir os sólidos geométricos entre poliedros e não poliedros;
- Distinguir poliedros convexos de poliedros não convexos;
- Reconhecer os poliedros de Platão.

Solução do item a) na janela de visualização 2D, insira os pontos  $A = (0,0,0)$ ,  $B = (4,0,0)$ ,  $C = (4,2,0)$ ,  $D = (2,2,0)$ ,  $E = (2,6,0)$ ,  $F = (0,6,0)$ . Na guia exibir, selecione Janela de visualização 3D. Clique em polígono e depois clique nos pontos  $A, B, C, D, E, F, A$ , nessa ordem, e depois, na opção pirâmide (ou prisma), selecione Extrusão para prisma ou cilindro, clique no polígono e informe a altura 3, clique em ok. (Ver figura 7). Neste caso também não há perda de generalidade.



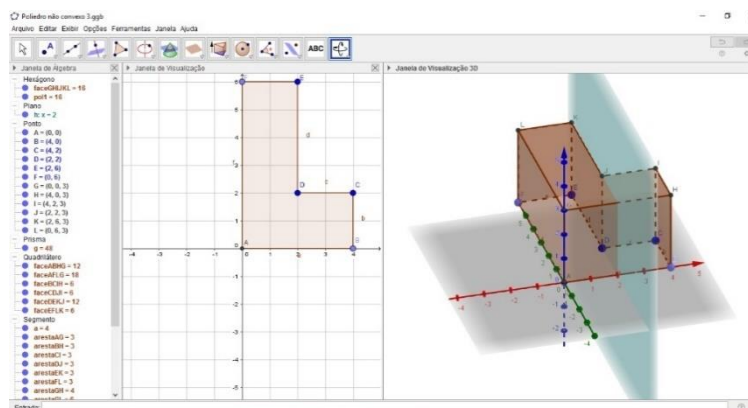
Figura 7: Poliedro não convexo



Fonte: Autor

Uma das maneiras de verificar se um poliedro não é convexo é encontrar um plano que divida o poliedro em duas partes. O plano que contém a face  $DEKJ$ , por exemplo, divide esse poliedro em dois paralelepípedos. Verifique clicando na opção plano e clicando na face  $DEKJ$ . (Ver figura 8).

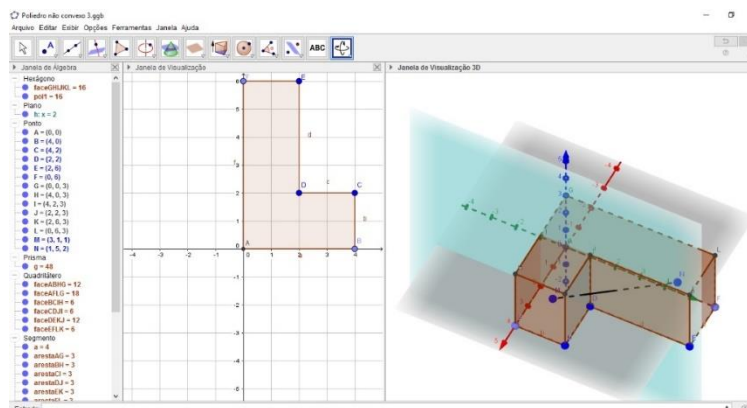
Figura 8: Plano que caracteriza um poliedro não convexo



Fonte: Autor

Uma outra maneira seria traçar um segmento de reta de forma que uma parte desse segmento se posicionasse internamente ao poliedro e outra parte externamente. Por exemplo, o segmento de reta de extremos nos pontos  $M = (3,1,1)$  e  $N = (1,5,2)$ . Verifique inserindo os pontos  $M$  e  $N$  no campo entrada e depois ainda no campo entrada digite *Segmento*[< Ponto >, < Ponto >] e substitua cada < Ponto > pelos pontos  $M$  e  $N$  nessa ordem, teclando "Enter". Observe que uma parte central do segmento é externa ao poliedro. (Ver figura 9).

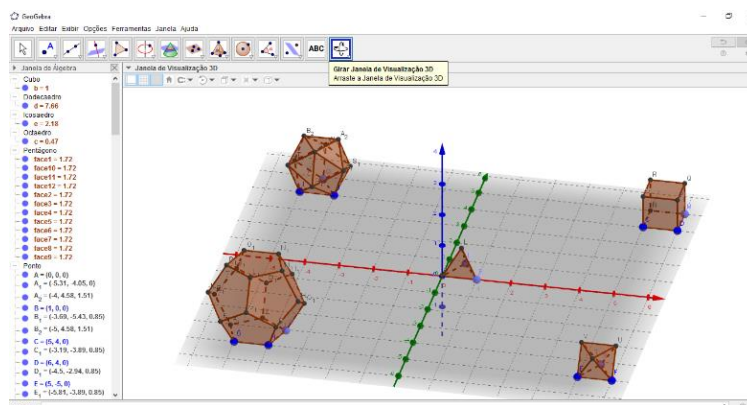
Figura 9: Segmento de reta que caracteriza um poliedro não convexo



Fonte: Autor

Solução do item b) na janela de visualização 3D, no campo entrada, digite os pontos  $A(0,0,0)$ ,  $B(1,0,0)$ ,  $C = (5,4,0)$ ,  $D = (6,4,0)$ ,  $E = (5, -5,0)$ ,  $F = (6, -5,0)$ ,  $G = (-5, -5,0)$ ,  $H = (-4, -5,0)$ ,  $I = (-5,4,0)$ ,  $J = (-4, -4,0)$ . Ainda no campo entrada digite *Tetraedro*[A,B] e tecla Enter. Para formar os outros poliedros digite a sequência *Cubo*[C,D], *Octaedro*[E,F], *Dodecaedro*[G,H] e *Icosaedro*[I,J], sempre teclando “Enter” ao final de cada poliedro. (Ver figura 10).

Figura 10: Os cinco poliedros regulares



Fonte: Autor

Para verificar se esses sólidos são poliedros de Platão devemos verificar três características importantes em cada um dos poliedros. São elas:

- i. Todas as faces do poliedro devem ter o mesmo número de lados. Por exemplo, no cubo, todas as faces são quadradas.

- ii. Para cada vértice do poliedro, partem três arestas. Por exemplo, no cubo, de cada vértice partem três arestas.
- iii. Vale a relação de Euler. Por exemplo, no cubo, o número de faces é 6, o número de vértices é 8 e o de arestas é 12, logo, se substituirmos esses valores na relação de Euler  $V + F = A + 2$  temos  $8 + 6 = 12 + 2$ , o que torna verdadeira a relação de Euler para o Cubo.

Assim percebemos que o cubo é um poliedro de Platão. (O aluno deve fazer essa análise para os outros quatro poliedros regulares). O professor deve deixar claro para os alunos que os cinco poliedros regulares não são os únicos poliedros de Platão, mas pertencem às classes de poliedros de Platão. Um exemplo é o paralelepípedo retângulo cujas dimensões tem medidas distintas, que é um poliedro de Platão, mas não é regular.

- 3) Formar um prisma oblíquo, a partir da definição, de base triangular regular de lado medindo 2 e altura do prisma medindo 5.

Assuntos: Prismas

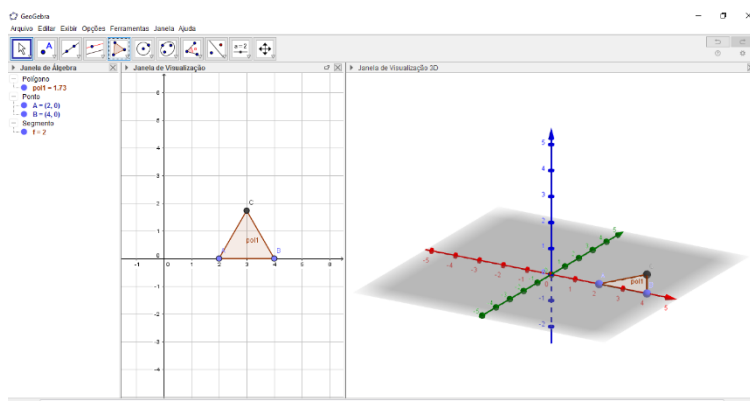
- Definição de prisma e classificação dos prismas quanto à forma (reto ou oblíquo)

Objetivos:

- Compreender a definição de prisma;
- Diferenciar prisma oblíquo de prisma reto.

Na janela de visualização 2D, insira os pontos  $A = (2,0)$  e  $B = (4,0)$ , Selecione Polígono regular na guia Polígono, clique em  $A$  e depois em  $B$ , informe o número de vértices – Nesse caso escolha 3 para formar um triângulo equilátero – clique em ok. Na guia exibir, selecione janela de visualização 3D. (Ver figura 11).

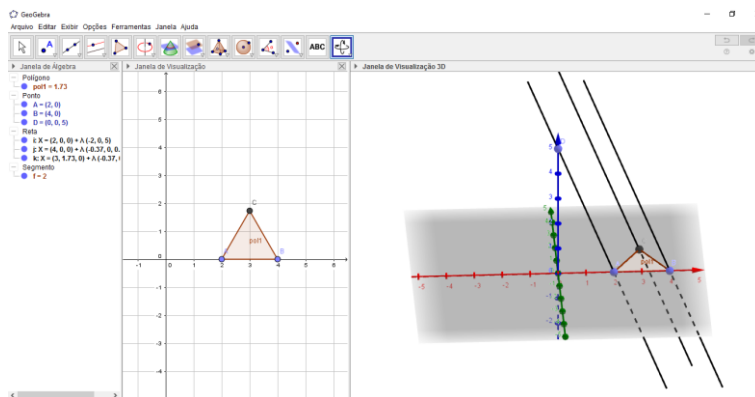
Figura 11: Base triangular equilátera de um prisma



Fonte: Autor

Insira o ponto  $D = (0,0,5)$ , perceba que a área do triângulo equilátero aparece na janela de álgebra como  $pol1 = 1,73$ . Selecione Reta e clique em  $A$  e depois em  $D$ . Selecione Reta Paralela, clique na reta  $AD$  depois no ponto  $B$  para criar a reta paralela a  $AD$  que passa por  $B$ . (Ver figura 12).

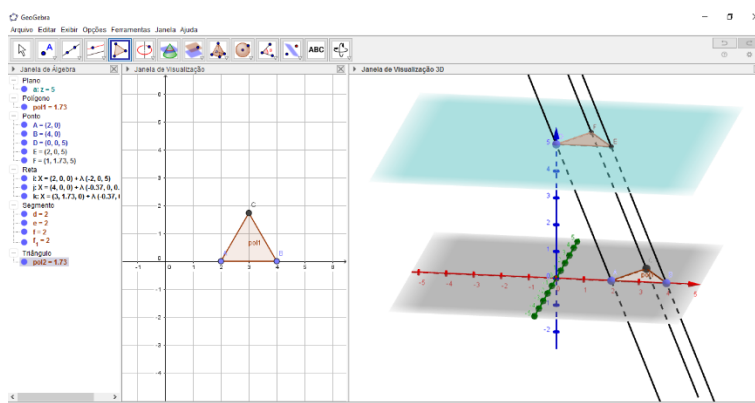
Figura 12: Retas paralelas suporte as arestas do prisma



Fonte: Autor

Selecione Plano Paralelo, clique no plano de base (cinza) e depois clique no ponto  $D$ . Selecione Ponto, clique na intersecção do novo plano com as duas retas paralelas a  $AD$ . Selecione Polígono e clique em  $D$ ,  $E$   $F$  e  $D$ . O triângulo  $DEF$  é congruente ao triângulo equilátero da base, a área aparece na janela de álgebra como  $pol2 = 1,73$ . (Ver figura 13). Não há perda de generalidade na construção.

Figura 13: Determinação da segunda base do prisma

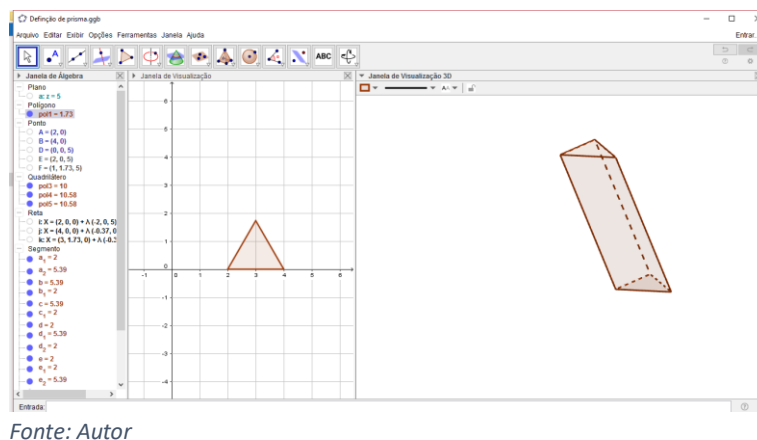


Fonte: Autor

Os paralelogramos  $ABED$ ,  $BCFE$  e  $ACFD$  são faces de um prisma oblíquo. Forme essas faces usando a opção Polígono clique na sequência dos vértices de forma que comece e termine no mesmo vértice, por exemplo, a face  $ABED$  é formada

clicando na sequência  $A, B, E, D$  e  $A$ . Também podemos escolher não exibir os objetos como as retas, os planos e os eixos. (Ver figura 14).

Figura 14: Visualização do prisma oblíquo de base triangular regular



- 4) Determine a área da superfície dos prismas retos:
- De alturas 5 e base quadrada de lado 3.
  - De altura 6 e base hexagonal regular de lado 2.

Assuntos: Prismas

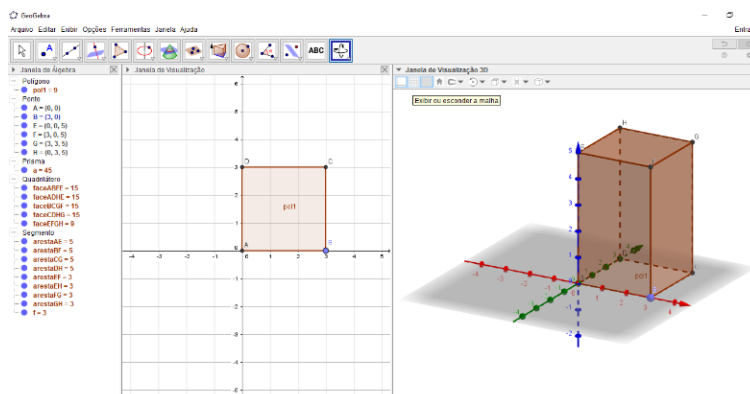
- Área da superfície do prisma

Objetivo:

- Utilizar propriedades geométricas para fazer estimativas de área da superfície do prisma.

Solução do item a) na janela de visualização 2D, insira os pontos  $A = (0,0)$  e  $B = (3,0)$ , clique em Polígono e selecione a opção Polígono regular. Clique em  $A$  e em  $B$  e informe o número de vértices (4), para criar um quadrado, clique em ok, ou tecla "Enter". Na guia Exibir, selecione Janela de visualização 3D, clique no ícone Pirâmide e selecione a opção Extrusão para prisma ou cilindro, clique no quadrado e informe a altura 5, tecla "Enter". O prisma de base quadrada está formado. Para facilitar a análise da área de sua superfície, devemos exibir uma malha quadriculada no plano de base (geralmente de cor cinza). Para isso, acima da janela 3D, é exibido uma seta com a descrição Janela de visualização 3D. Clique na seta e selecione a opção exibir ou esconder a malha. (Ver figura 15).

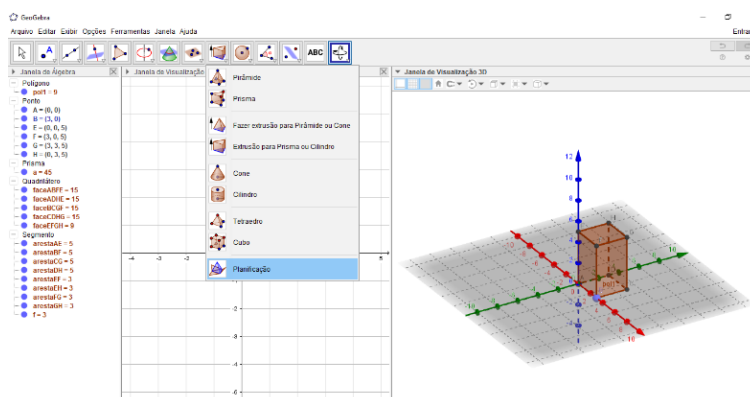
Figura 15: Prisma reto de base quadrada



Fonte: Autor

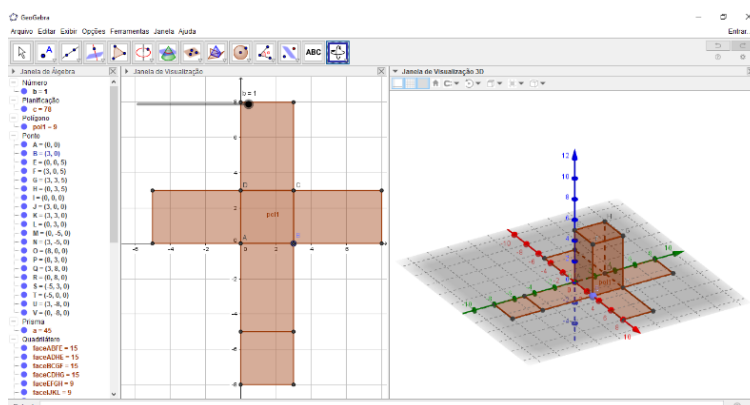
Vamos agora planificar o prisma. Na opção Pirâmide, selecione a opção Planificação e clique no prisma. (Ver figura 16). Depois de clicar no prisma, ele permanecerá lá, mas sua planificação é exibida no plano de base da janela 3D e exibido na janela 2D. (Ver figura17).

Figura 16: Planificação do prisma de base quadrada



Fonte: Autor

Figura 17: Prisma de base quadrada planificado

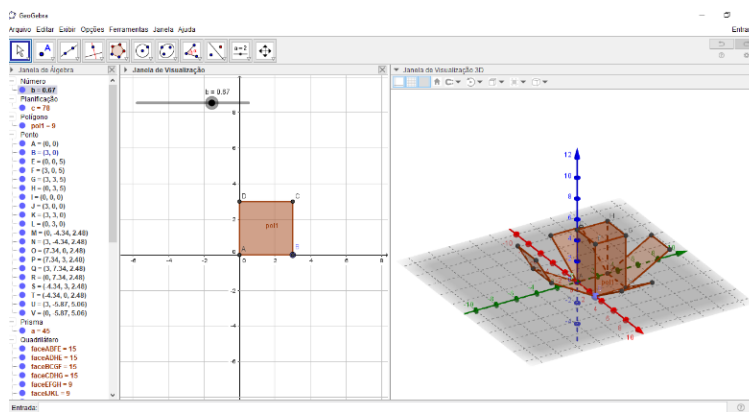


Fonte: Autor

Na janela 2D, se aproximarmos um pouco a planificação, veremos que cada face possui três quadrados na horizontal e cinco na vertical, ao todo, são 15 quadrados formando a face lateral. Cada quadrado é uma unidade de área e, portanto, a área de cada face lateral é 15. Como são 4 faces, a área da superfície lateral é  $4 \times 15 = 60$ . As bases são quadradas e seguem o mesmo raciocínio, são 9 quadrados no total que também podemos verificar multiplicando os 3 quadrados da horizontal com os 3 da vertical. Como são duas bases, a área das bases é dada por  $2 \times 9 = 18$ . Portanto, a área total da superfície do prisma é  $60 + 18 = 78$  unidades de área.

Note que um controle deslizante é exibido na janela de visualização 2D. Podemos movimentar essa planificação através do controle deslizante. (Ver figura 18).

Figura 18: Controle deslizante e animação da planificação do prisma de base quadrada

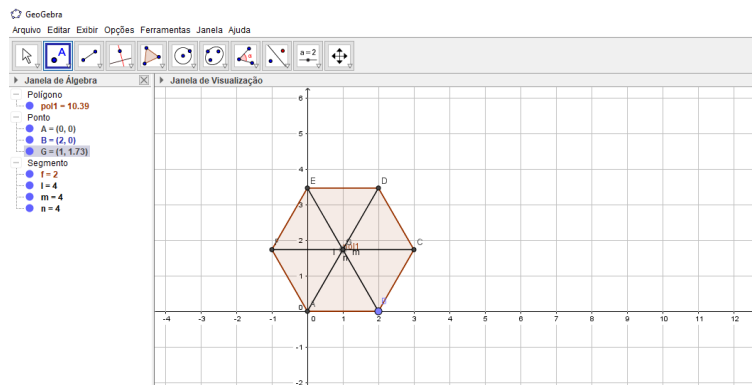


Fonte: Autor

Solução do item b) na janela de visualização 2D, insira os pontos  $A = (0,0)$  e  $B = (2,0)$ . No ícone Polígono, selecione a opção Polígono regular, clique no ponto  $A$  e depois no ponto  $B$ , informe o número de vértices do polígono (nesse caso 6) e tecla Enter (ou clique em ok). No ícone Reta, selecione a opção segmento, clique nos pares de pontos:  $A$  e  $D$ ;  $B$  e  $E$ ;  $C$  e  $F$ .

Essas diagonais formadas tem o centro da figura como interseção, a qual podemos destacar como ponto  $G$ . Note que, como a diagonal traçada mede 4, a metade da diagonal mede 2, que é a mesma medida do lado do hexágono. Dessa forma, o hexágono regular de lado 2 é formado por 6 triângulos equiláteros também de lado 2. Devemos notar que em um hexágono regular, o lado é congruente ao raio da circunferência que o circunscreve. (Ver figura 19).

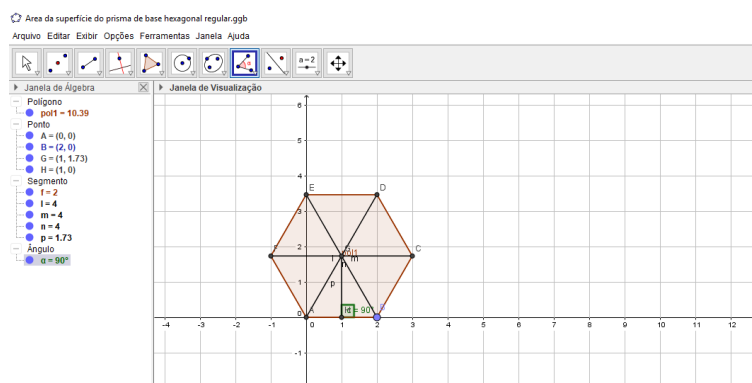
Figura 19: Diagonais e centro da base hexagonal regular



Fonte: Autor

No ícone Ponto, selecione a opção Ponto médio ou centro, clique no segmento  $AB$ . Este segmento é a base do triângulo. No ícone Reta, selecione a opção segmento e trace o segmento  $GH$ . Este segmento é o apótema da base hexagonal regular que, por sua vez, também é a altura do triângulo equilátero. A área do triângulo equilátero é dada por  $\frac{AB \times GH}{2}$ . Portanto, a área do hexágono regular é dada por  $6 \times \frac{AB \times GH}{2}$ . O segmento  $GH$  pode ser obtido usando o teorema de Pitágoras,  $BG^2 = GH^2 + BH^2$ . O aluno pode verificar que o ângulo  $B\hat{H}G$  é reto. Para isso basta clicar no ícone ângulo e depois na sequência  $B, H$  e  $G$  (Ver figura 20).

Figura 20: Apótema da base hexagonal regular



Fonte: Autor

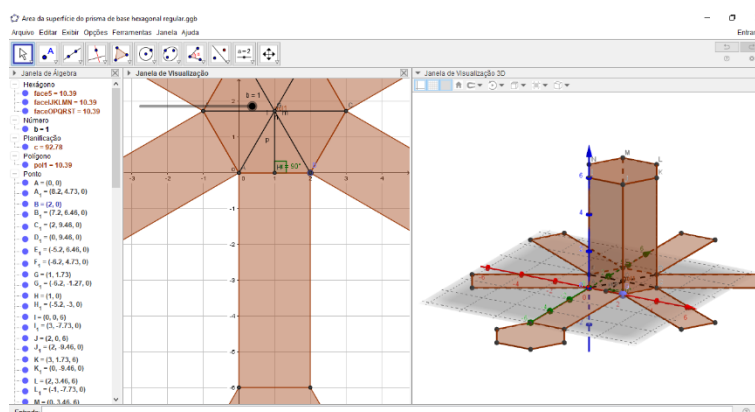
Como  $BH = 1$  e  $BG = 2$  temos que  $2^2 = GH^2 + 1^2 \Leftrightarrow 4 - 1 = GH^2 \Leftrightarrow GH = \sqrt{3} \cong 1,73$ . Portanto, a área do hexágono regular é  $6 \times \frac{AB \times GH}{2} = 6 \times \frac{2 \times 1,73}{2} = 6 \times 1,73 = 10,38$ . Note que esse valor é aproximado e, assim, se observarmos na janela de



álgebra, podemos ver que a área do polígono 1 é 10,39, isso porque o *software* utiliza mais casas decimais na aproximação de  $\sqrt{3}$ , embora na janela de álgebra o valor de  $GH = p = 1,73$ , que é o valor expresso. Como são 2 bases, a área das bases é  $2 \times 10,38 = 20,76$ .

Na guia exibir, selecione a opção Janela de visualização 3D. No ícone Pirâmide, selecione a opção Extrusão para prisma ou cilindro, clique no hexágono e informe a altura 6. Ainda no mesmo ícone, selecione a opção planificação e clique no prisma. A área de cada face lateral é  $6 \times 2 = 12$ , como são 6 faces, a área da face lateral é  $12 \times 6 = 72$ , assim, a área total da superfície do prisma reto de altura 6 e base hexagonal regular lado 2 é aproximadamente  $72 + 20,76 = 92,76$ . (Ver figura 21).

Figura 21: Prisma reto de base hexagonal regular planificado



Fonte: Autor

5) Usar o princípio de Cavalieri para mostrar que os volumes, de dois prismas de mesma altura e mesma área de base, são iguais.

Assuntos: Prismas:

- Princípio de Cavalieri;
- Volume do prisma.

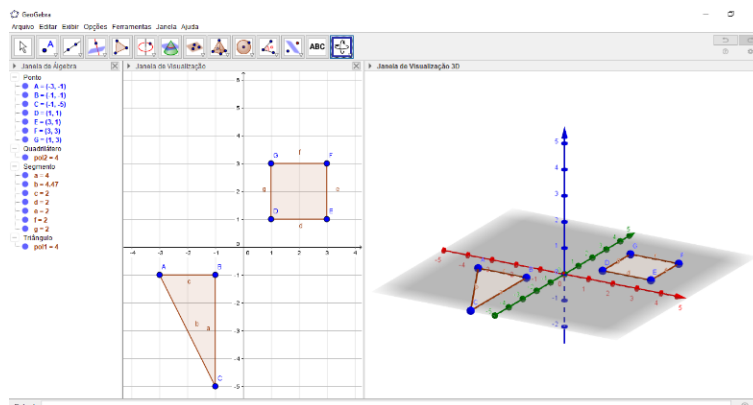
Objetivo:

- Utilizar propriedades geométricas para fazer estimativas de volume do prisma.

Na janela de visualização 2D, marque os pontos  $A = (-3, -1)$ ,  $B = (-1, -1)$ ,  $C = (-1, -5)$ ,  $D = (1, 1)$ ,  $E = (1, 3)$ ,  $F = (3, 3)$  e  $G = (3, 1)$ . Forme o triângulo  $ABC$  e o quadrado  $DEFG$ . Note que ambos, tem mesma área. A área do triângulo é

dada por  $\frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$  e a área do quadrado é dada por  $DE^2 = 2^2 = 4$ . Na guia exibir, selecione Janela de visualização 3D. (Ver figura 22).

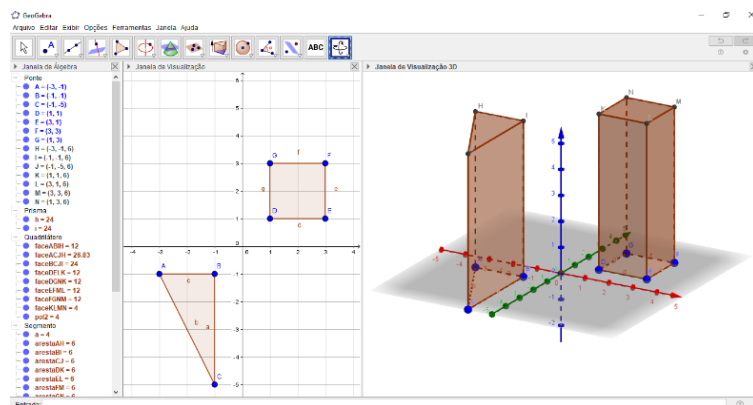
Figura 22: Bases quadrada e triangular retangular



Fonte: Autor

No ícone Pirâmide da janela 3D selecione Extrusão para prisma ou cilindro. Clique no triângulo e informe a altura 6, clique em ok, depois clique no quadrado e informe a altura 6, clique em ok. Foram formados, então, dois prismas retos. (Ver figura 23).

Figura 23: Prismas de bases quadrada e triangular retangular

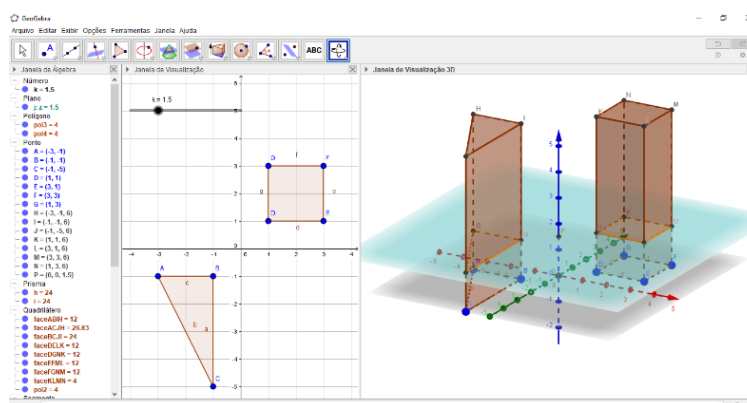


Fonte: Autor

Na janela de visualização 2 D, crie um controle deslizante  $k$  com valores mínimo 0 (zero) e máximo 6, incremento 0,01 e velocidade 2. No campo Entrada, digite o ponto  $P = (0,0,k)$  e tecele Enter. Note que o ponto  $P$  varia de acordo com o controle deslizante  $k$ . Volte a janela de visualização 3D e no ícone Plano por três pontos, selecione Plano paralelo, clique no plano de base (Cinza) e depois clique no ponto  $P$ . Note que um plano azul é formado. Clique no ícone Interseção de duas superfícies, posicione o mouse no plano paralelo azul de forma que apareça o polígono de

interseção entre o plano e o prisma – geralmente esse polígono é destacado em laranja – deve-se fazer esse procedimento com os dois prismas. (Ver figura 24).

Figura 24: Plano paralelo ao plano das bases seccionando os prismas



Fonte: Autor

Note que no início da janela de álgebra aparecem dois polígonos de mesma área que valem 4, se variarmos o plano paralelo em qualquer altura, esses valores não mudam, ou seja, todos os planos possíveis paralelos ao plano da base que seccionam os dois prismas formam secções de mesma área e que se todas as secções de cada prisma forem somadas formam seus respectivos volumes. O volume de cada prisma então totaliza 24, pois, se cada área vale 4 e somadas varrendo toda a altura do prisma que vale 6, temos que,  $\text{Área da base} \times \text{Altura} = 4 \times 6 = 24$ .

Observação: Podemos usar vetores para fazer o plano variar. O uso de vetores será usado em outra atividade.

6) Determinação geométrica do apótema da base pentagonal regular e do apótema da pirâmide. Cálculo da área da superfície da pirâmide.

Assuntos: Pirâmides:

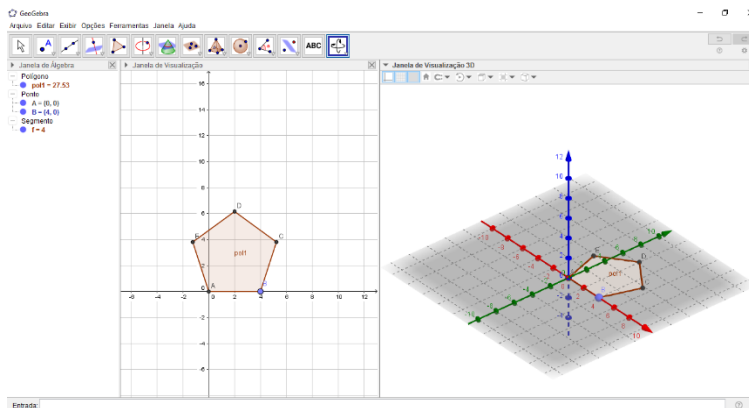
- Apótema da base e apótema da pirâmide;
- Área da superfície da pirâmide.

Objetivos:

- Utilizar propriedades geométricas para fazer estimativas de área da superfície de pirâmides.
- Compreender os conceitos de apótema da pirâmide e apótema da base.

Abriu a janela de visualização 2D, selecionar “polígono regular” no ícone polígono. Clicar nos pontos  $(0,0)$  e  $(4,0)$ , informe o número de vértices – nesse caso informe 5 para formar um pentágono – clique em ok. Na guia “exibir”, selecionar “Janela de visualização 3D”. (Ver figura 25).

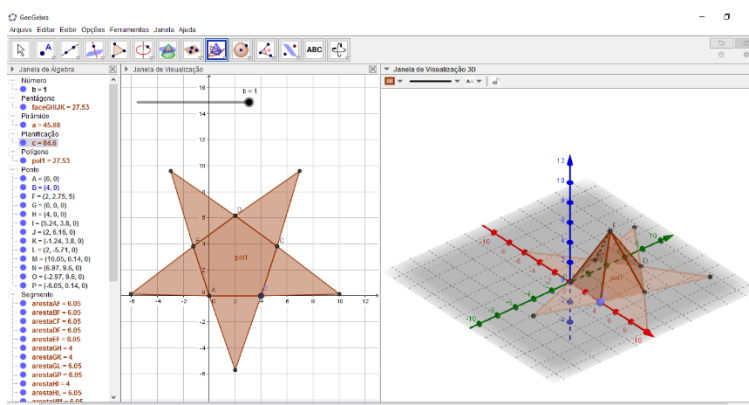
Figura 25: Base pentagonal regular



Fonte: Autor

No ícone pirâmide, selecione “Fazer extrusão<sup>1</sup> para pirâmide ou cone”, clique no polígono, na janela 3D, informe a altura da pirâmide – nesse caso informe o valor 5 - e clique em ok. Ainda no ícone pirâmide, selecione “Planificação” e clique na pirâmide. Na janela de álgebra, clique com o botão direito do mouse em “ponto” e clique na opção “exibir rótulo”. (Ver figura 26).

Figura 26: Pirâmide reta de base pentagonal regular e sua planificação



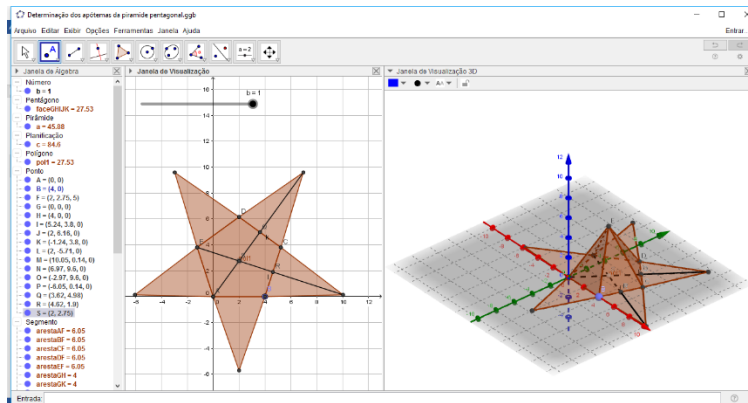
Fonte: Autor

<sup>1</sup> O termo extrusão, neste caso, tem o sentido de adquirir forma alongada. Segundo o dicionário do google, extrusão é substantivo feminino que significa saída forçada, expulsão; *tec* passada forçada, através de um orifício, de uma porção de metal ou de plástico, para que adquira forma alongada ou filamentosa.

Para determinar o centro do pentágono, clique em “ponto médio ou centro” no ícone ponto, clique no segmento  $DC$ . Desenhe um segmento partindo do vértice  $A$  passando pelo ponto médio de  $DC$  até o vértice da face triangular cuja base é  $DC$ .

Faça o mesmo procedimento usando o vértice  $E$  e o ponto médio do segmento  $BC$ . Marque o ponto de intersecção dos dois segmentos. (Ver figura 27).

Figura 27: Centro da base e apótemas da base e da pirâmide



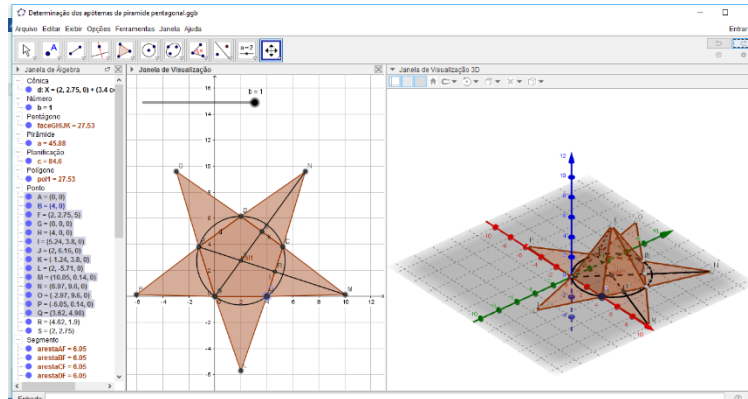
Fonte: Autor

Para testar se o ponto  $S$  de intersecção dos dois segmentos formados é realmente o centro do pentágono, desenhe a circunferência que circunscreve o pentágono usando  $S$  como centro e observe se a circunferência passa pelos cinco vértices. Para isso selecione “Círculo dados o centro e um de seus pontos”, clique em  $S$  e em um dos vértices do pentágono.

Observe que a circunferência se encaixa perfeitamente passando pelos cinco vértices. Isso ocorre porque o pentágono é regular. Clique com o botão direito do mouse em ponto na janela de álgebra e clique na opção “exibir rótulo”. Note que o segmento  $RS$  é o apótema da base e o segmento  $RM$  é o apótema da pirâmide.

Para saber suas medidas basta selecionar a opção segmento e clicar em  $R$  e depois em  $S$  para obter  $RS = 2,75$  e clicar em  $R$  e depois em  $M$  para obter  $RS = 5,71$ . (Ver figura 28)

Figura 28: Base pentagonal regular inscrita na circunferência



Fonte: Autor

A área da superfície da pirâmide é igual a área da base (pentágono regular) mais a área da superfície lateral (cinco triângulos). Note que o pentágono regular é formado por cinco triângulos isósceles congruentes de altura igual ao apótema da base e o lado da base é a base relativa a essa altura, portanto a área da base é dada pela expressão

$$5 \times \frac{(\text{Lado da base}) \times (\text{Apótema da base})}{2}.$$

Já a área lateral é formada por cinco triângulos isósceles de base igual ao lado do pentágono e altura igual ao apótema da pirâmide. Portanto a área lateral é dada pela expressão (semelhante à expressão da base)

$$5 \times \frac{(\text{Lado da base}) \times (\text{Apótema da pirâmide})}{2}.$$

Podemos então concluir que a área da superfície da pirâmide é dada pela expressão

$$5 \times \frac{(\text{Lado da base}) \times (\text{Apótema da pirâmide} + \text{Apótema da base})}{2}.$$

No caso da nossa pirâmide teremos

$$A_s = \frac{5}{2} \times AB \times (RM + RS) = \frac{5}{2} \times 4 \times (5,71 + 2,75) = 10 \times 8,46 = 84,6.$$

- 7) Determinação geométrica do apótema da pirâmide e do apótema da base da pirâmide de base hexagonal regular. Determinar a área da superfície da pirâmide.

Assunto: Pirâmides

Objetivos:

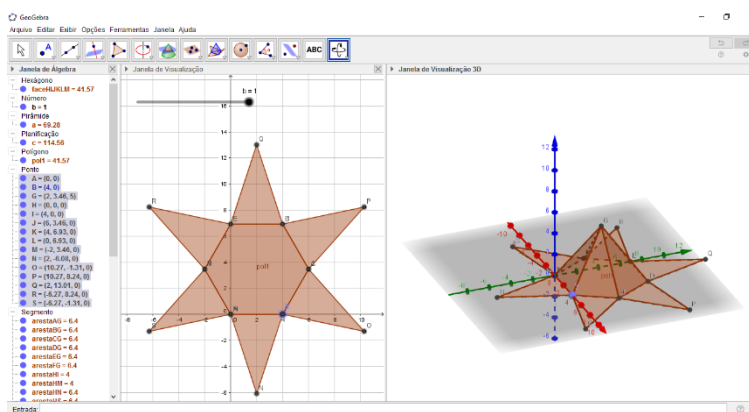
- Analisar a superfície de uma pirâmide a partir de sua planificação;
- Reconhecer geometricamente os apótemas da pirâmide e da sua base e se possível determina-los geometricamente.

Abrir a janela de visualização 2D, seleccionar “polígono regular” no ícone polígono. Clicar nos pontos (0,0) e (4,0), informe o número de vértices – nesse caso informe 6 para formar um hexágono – clique em ok. Na guia “exibir”, seleccionar “Janela de visualização 3D”.

No ícone pirâmide, selecione “Fazer extrusão para pirâmide ou cone”, clique no polígono, na janela 3D, informe a altura da pirâmide – nesse caso informe 5 - e clique em ok. Ainda no ícone pirâmide, selecione “Planificação” e clique na pirâmide.

Na janela de álgebra, clique com o botão direito do mouse em “ponto” e clique na opção “exibir rótulo”. (Ver figura 29).

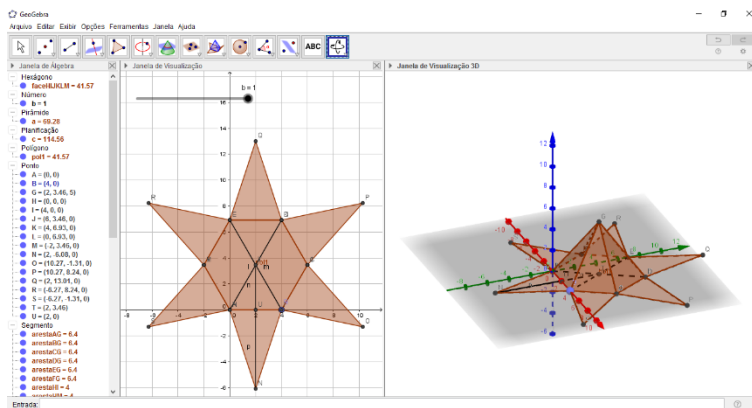
Figura 29: Pirâmide reta de base hexagonal regular, planificada



Fonte: Autor

Para determinar o centro do hexágono basta traçar as diagonais  $AD$  e  $BE$ . O ponto de intersecção é o centro procurado. Marque esse centro com um ponto  $T$  e marque o ponto médio de  $AB$  ( $U$ ). Os segmentos  $TU$  e  $NU$  são, respectivamente, os apótemas da base e da pirâmide. (Ver figura 30).

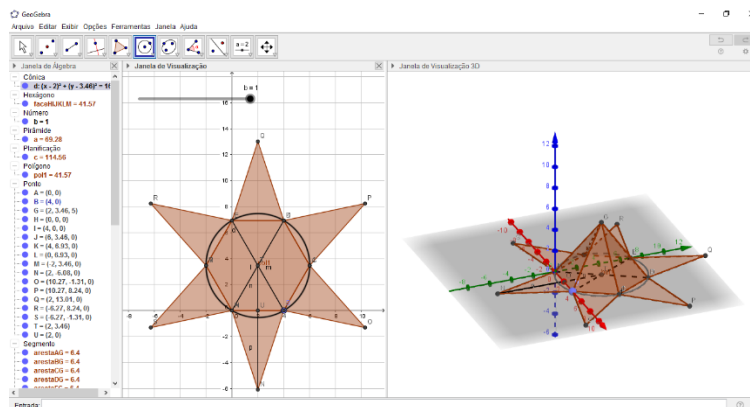
Figura 30: Diagonais e apótemas da base e da pirâmide hexagonal



Fonte: Autor

Para testar se o ponto  $T$  é realmente o centro do hexágono basta traçar a circunferência de centro em  $T$  e um de seus pontos sendo um dos vértices do hexágono. (Ver figura 31).

Figura 31: Base hexagonal regular inscrita na circunferência



Fonte: Autor

Selecionando a opção segmento e clicando nos pontos  $T$  e  $U$ , e depois nos pontos  $N$  e  $U$  obtemos os valores dos apótemas da base e da pirâmide respectivamente e iguais a  $TU = 3,46$  e  $NU = 6,08$ .

A área da superfície  $A_s$  dessa pirâmide é dada pela expressão

$$6 \times \frac{(\text{Lado da base}) \times (\text{Apótema da pirâmide} + \text{Apótema da base})}{2}$$

Já que a base possui 6 lados. Então teremos

$$A_s = \frac{6}{2} \times AB \times (RM + RS) = \frac{6}{2} \times 4 \times (6,08 + 3,46) = 12 \times 9,54 = 114,48.$$



- 8) Determinar, em uma pirâmide de base regular, através do teorema de Pitágoras, todas as relações entre lado da base, apótema da base, aresta lateral, apótema da pirâmide, altura da pirâmide e raio da base. (Sugestão: utilizar a base quadrada).

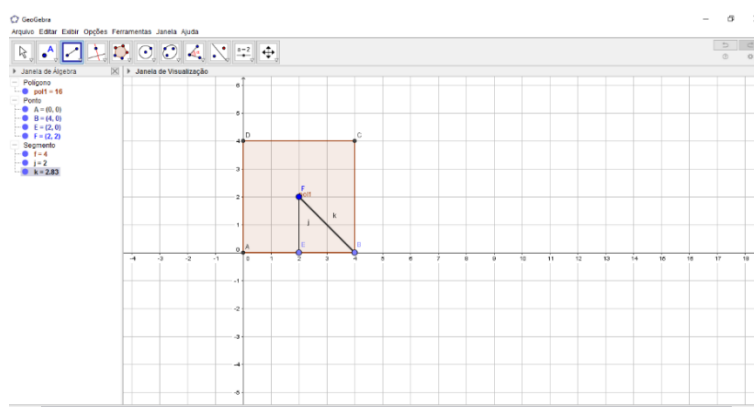
Assunto: Pirâmides.

Objetivos:

- Reconhecer o apótema da base como raio do círculo inscrito na base;
- Reconhecer o raio da base como raio do círculo que circunscreve a base.
- Utilizar o teorema de Pitágoras para determinar alguns elementos da pirâmide.

Começaremos pela janela de visualização 2D para criarmos um quadrado de lado 4. Insira os pontos  $A = (0,0)$  e  $B = (4,0)$  no plano. No ícone Polígono, selecione Polígono Regular e depois clique em  $A$  e em  $B$ . Informe o número de vértices igual a 4 e clique em ok. Insira mais dois pontos,  $E = (2,0)$  e  $F = (2,2)$ . No ícone Reta selecione Segmento, clique em  $E$  e em  $F$ , depois clique em  $B$  e em  $F$ . (Ver figura 32).

Figura 32: Quadrado de lado quatro e seus apótema e raio

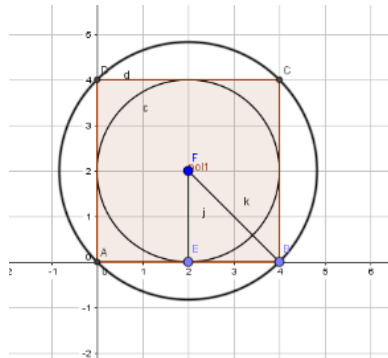


Fonte: Autor

O segmento  $AB$  representado por  $f = 4$  na janela de álgebra, é o lado do quadrado que por sua vez será a base de uma pirâmide (O quadrado foi escolhido para melhor visualização). Os segmentos  $EF$  e  $BF$  representados por  $j = 2$  e  $k = 2,83$ , são chamados respectivamente, de apótema do quadrado (ou da base) e raio do quadrado (ou da base).

Observe que, os dois são raios de circunferências. O primeiro, é o raio da circunferência inscrita no quadrado e o segundo é o raio da circunferência circunscrita no quadrado. Como mostra a figura 33.

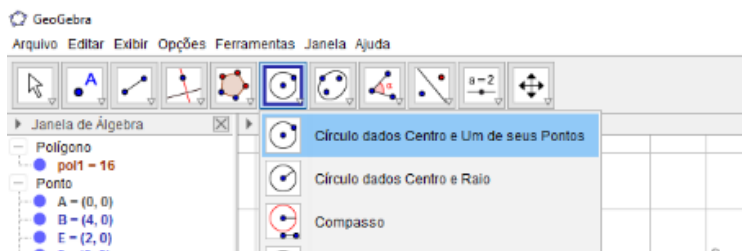
Figura 33: circunferências inscritas e circunscritas ao quadrado



Fonte: Autor

Para formar os círculos, devemos selecionar a opção *Círculo dados Centro e um de seus Pontos* (Ver figura 34).

Figura 34: Formação dos círculos



Fonte: Autor

Já se percebe que o triângulo  $BEF$  é retângulo em  $E$ . Para comprovar isto, podemos selecionar ângulo e clicar em  $B$ ,  $E$  e  $F$  nessa ordem e o ângulo de  $90^\circ$  aparecerá. Assim podemos aplicar o teorema de Pitágoras onde  $BF$  é a hipotenusa,  $EF$  e  $BE$  são os catetos.

$$\text{Logo, } BF^2 = EF^2 + BE^2.$$

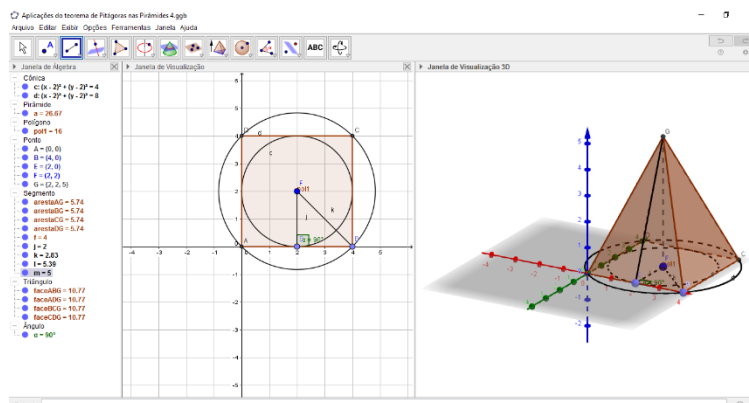
Podemos também utilizar  $i$ ,  $j$  e  $k$ , então podemos escrever

$$k^2 = i^2 + j^2.$$

Vamos então formar uma pirâmide reta de altura 5. Selecionamos a janela de visualização 3D na guia Exibir. No ícone Pirâmide, selecionamos Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone, clique no quadrado e informe a altura 5 da Pirâmide e clique em

ok. Inserimos mais dois segmentos,  $EG$  e  $FG$  que são o apótema da Pirâmide e a altura da Pirâmide, respectivamente. (Ver figura 35).

Figura 35: Pirâmide reta de base quadrada e seu apótema



Fonte: Autor

No campo Entrada digite  $u = (0, -1, 0)$  e depois Enter para criar o vetor  $u$ . Voltando a janela de visualização 2D, selecione “Controle deslizante” e clique dentro da janela 2D. No campo “Nome”, digite  $b$ . No valor mínimo, substitua -5 por 0 e clique em ok. No campo Entrada, digite os comandos a seguir teclando Enter ao final de cada um:

$$E' = E + b * u, F' = F + b * u \text{ e } G' = G + b * u.$$

Selecione Polígono e clique nos pontos  $E'$ ,  $F'$ ,  $G'$  e  $E'$  para criar o triângulo  $E'F'G'$ .

Na janela de álgebra, em Triângulo, clique com o botão direito do mouse em  $pol2 = 5$  e mude a cor para azul. Mude a velocidade para 3 e aumente a transparência para 50 e clique em ok. Selecione Ângulo e clique em  $G'$ ,  $F'$  e  $E'$ . Note que o triângulo  $E'F'G'$  é retângulo em  $F'$ . O triângulo  $E'F'G'$  é congruente ao triângulo  $EFG$  e, portanto,  $EFG$  é retângulo em  $F$ . Logo podemos aplicar o teorema de Pitágoras.  $E'G'$  é a hipotenusa e  $E'F'$  e  $F'G'$  são os catetos.

Assim, temos:

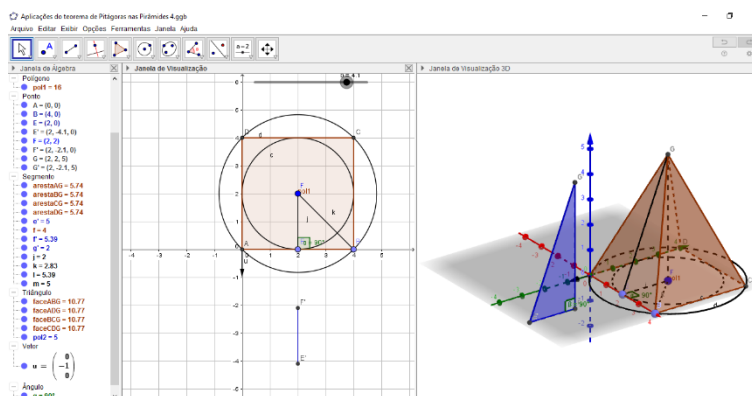
$$(E'G')^2 = (E'F')^2 + (F'G')^2 \text{ ou } (EG)^2 = (EF)^2 + (FG)^2.$$

Na janela de álgebra  $EG$  é representado por outra variável, provavelmente  $l$ , e,  $EF$  representado, provavelmente por  $m$ . O próprio geogebra cria as variáveis  $l$  e  $m$ .

$$\text{Logo } l^2 = m^2 + j^2.$$

As variáveis podem ser mudadas clicando com o botão direito do mouse na variável. (Ver figura 36).

Figura 36: Triângulo retângulo cuja hipotenusa é o apótema da pirâmide

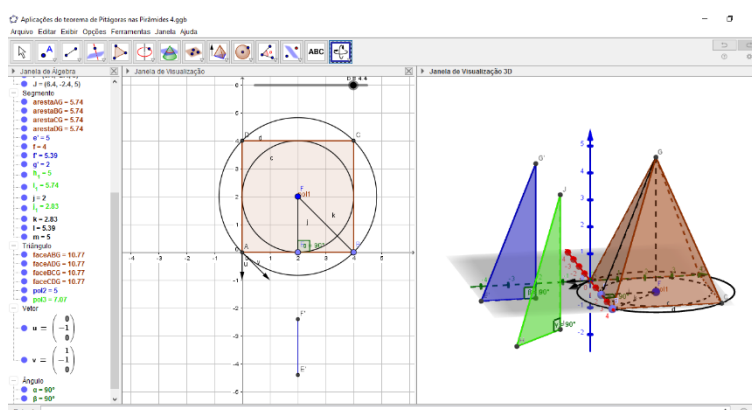


Fonte: Autor

O próximo triângulo a ser analisado é o  $BFG$ . No campo Entrada digitamos o vetor  $v = (1, -1, 0)$ . Digitamos também os pontos  $H = B + b * v$ ,  $I = F + b * v$  e  $J = G + b * v$ . Selecione Polígono e clique em  $H$ ,  $I$ ,  $J$  e  $H$ . Na janela de álgebra, em triângulo, clique com o botão direito do mouse em  $pol3 = 7,07$ , mude para a cor verde e transparência 50, na opção Propriedades. Selecione Ângulo e clique em  $J$ ,  $I$  e  $H$ . O triângulo  $HIJ$  é retângulo em  $I$  e portanto podemos aplicar o teorema de Pitágoras. Como o triângulo  $HIJ$  é congruente a  $BFG$ , o triângulo  $BFG$  é retângulo em  $F$ .

Assim, temos  $HJ^2 = HI^2 + IJ^2$  ou  $BG^2 = BF^2 + FG^2$ . (Ver figura 37).

Figura 37: Primeiro triângulo retângulo cuja hipotenusa é a aresta da pirâmide



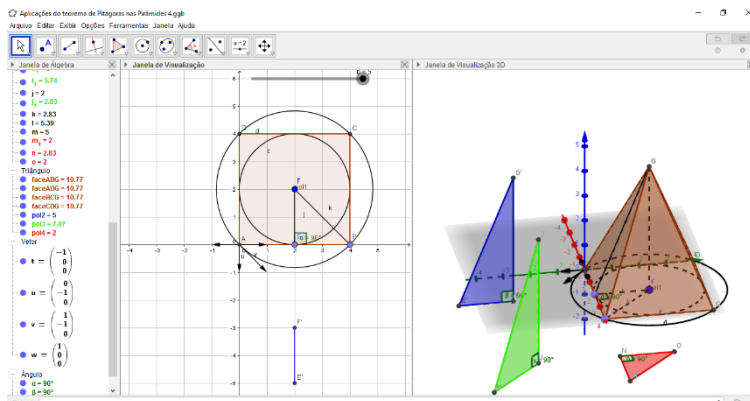
Fonte: Autor

Inserimos mais dois vetores,  $w = (1, 0, 0)$  e  $t = (-1, 0, 0)$ . Digite no campo Entrada, os pontos,  $M = B + b * w$ ,  $N = E + b * w$  e  $O = F + b * w$ . Selecione Polígono e clique nos pontos  $M$ ,  $N$ ,  $O$  e  $M$ . Na janela de álgebra, em triângulo, clique

com o botão direito do mouse em  $pol4 = 2$  e, em propriedades, troque a cor para vermelho e transparência 50 e clique em ok. Selecione Ângulo e clique em  $M$ ,  $N$  e  $O$  e o ângulo reto aparece no vértice  $N$ . Como o triângulo  $MNO$  é congruente ao triângulo  $BEF$ , o triângulo  $BEF$  também é retângulo em  $E$  e podemos aplicar o teorema de Pitágoras nos dois triângulos.

Assim, temos que  $MO^2 = MN^2 + NO^2$  e  $BF^2 = BE^2 + EF^2$ . (Ver figura 38).

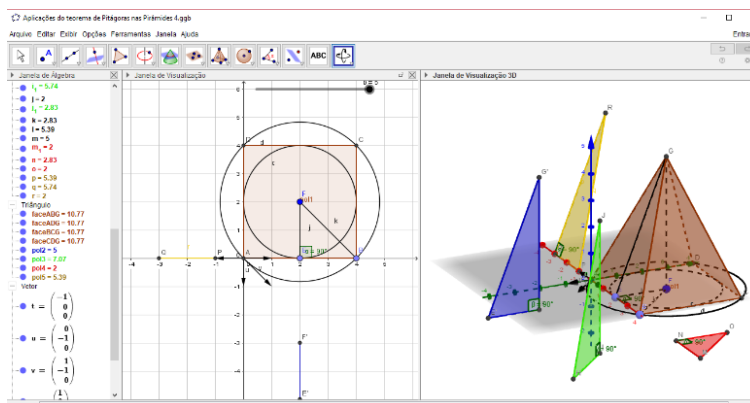
Figura 38: Triângulo retângulo cuja hipotenusa é o raio da base



Fonte: Autor

O triângulo  $BEG$  movimenta-se usando o vetor  $t$ . No campo entrada digite  $P = B + b * t$ , tecla Enter,  $Q = E + b * t$ , tecla Enter,  $R = G + b * t$ , tecla Enter e e por fim,  $Polígono[B,E,G]$ , tecla Enter. Mude a cor do triângulo  $BEG$  para amarela. Na janela de visualização 3D, clique no ícone Ângulo e depois clique em  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , note que o ângulo em  $Q$  é reto. (Ver figura).

Figura 39: Segundo triângulo retângulo cuja hipotenusa é a aresta da pirâmide



Fonte: Autor

Clicando com o botão direito do mouse na barra do controle deslizante  $b$ , podemos escolher a opção Animar, os triângulos coloridos se movimentarão de forma oscilatória se encaixando na pirâmide e saindo dela, possibilitando assim que se perceba triângulos retângulos extraídos da pirâmide para estudo de relação entre seus elementos.

Observação: A vantagem de usar vetores é que podemos escolher a direção e o sentido do movimento dos elementos trabalhados, nesse caso, os triângulos retângulos.

9) Deduzir (informalmente) que o volume da pirâmide é um terço do volume do prisma de mesma base e mesma altura.

Assunto: Pirâmides.

Objetivos:

- Utilizar propriedades geométricas para fazer estimativas de volume de prismas;
- Compreender o volume da pirâmide a partir do volume do prisma.

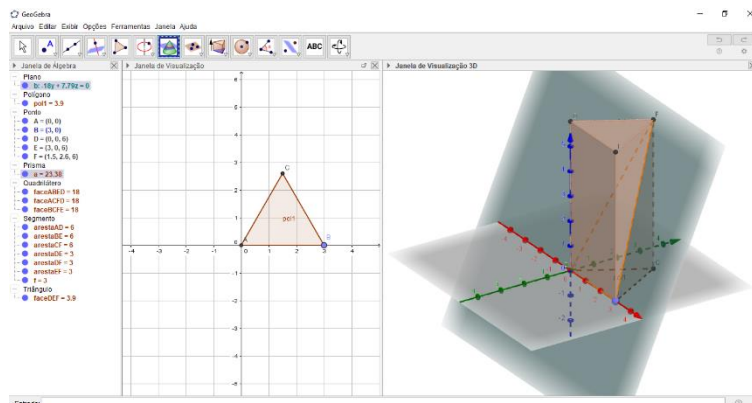
Na janela 2D, insira os pontos  $A = (0,0)$  e  $B = (3,0)$ . No ícone Polígono, selecione a opção polígono regular, clique nos pontos  $A$  e  $B$ , depois informe o número de vértices. Neste caso, vamos informar 3 vértices, pois podemos subdividir qualquer outro polígono em triângulos, logo, o que se aplicar ao prisma de base triangular, também se aplica a prismas com outras bases. Na guia exibir, selecione Janela de visualização 3D.

No ícone Pirâmide, selecione extrusão para prisma ou cilindro, clique no triângulo situado na janela 3D e informe a altura, que pode ser qualquer, nesse caso informamos 6.

Vamos seccionar o prisma com dois planos, mas não continuaremos com esse método, pois, ele é mais fácil de executar, porém, mais difícil de visualizar se comparado com o método de dividir o prisma e separar as pirâmides. Clique no ícone Plano por três pontos e selecione os pontos  $A$ ,  $B$  e  $F$ . Clique no ícone Interseção de

duas superfícies, posicione o ponteiro do mouse de forma que se destaque as linhas da interseção do plano com as faces do prisma. (Ver figura 39).

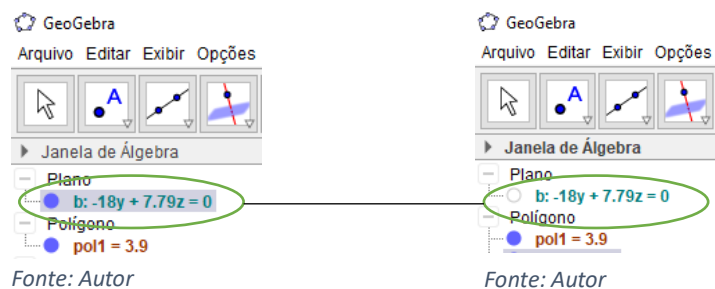
Figura 40: Primeiro plano seccionando o prisma reto de base triangular regular



Fonte: Autor

Na janela de álgebra, observe que, no início, a equação do plano está selecionada. Com o ponteiro do mouse no círculo azul, devemos clicar e retirar o círculo azul. (Veja o antes e o depois na figura 41).

Figura 41: Ocultando plano

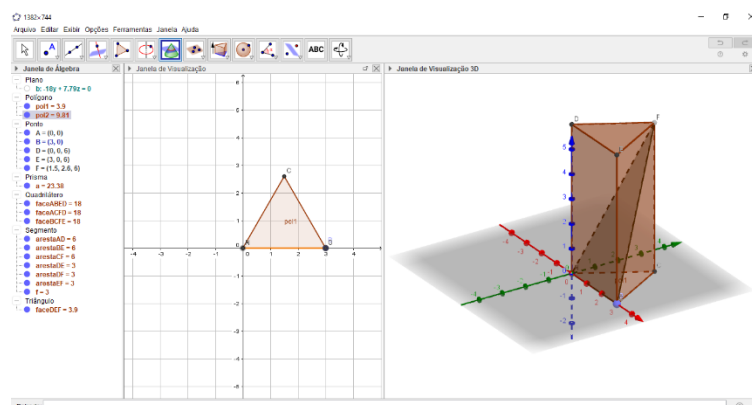


Fonte: Autor

Fonte: Autor

O plano ficará oculto mas sua interseção com o prisma não. (Ver figura 42).

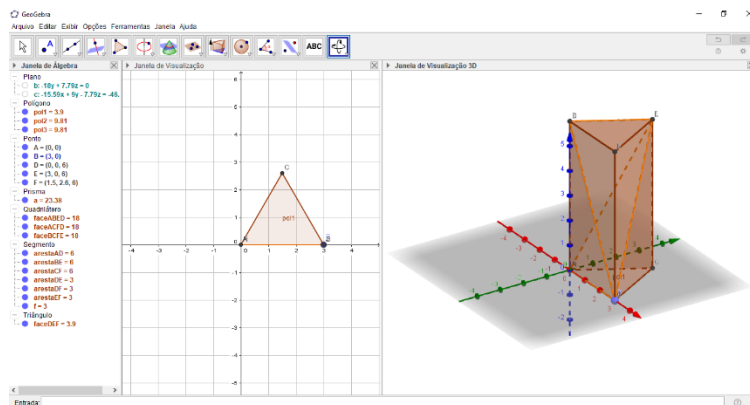
Figura 42: Vista da primeira secção no prisma



Fonte: Autor

Vamos seccionar o prisma com outro plano, desta vez passando pelos pontos  $D, F$  e  $B$ . Usando o mesmo procedimento e ocultando o plano posteriormente. (Ver figura 43).

Figura 43: Vista da segunda secção no prisma



Fonte: Autor

Note que o prisma foi dividido em três pirâmides, mas é difícil visualizar, por isso, vamos separar essas pirâmides.

Vamos começar inserindo três vetores, um para cada pirâmide. Isso nos permitirá movimentá-las na mesma direção e sentido do vetor. Os vetores podem ser:  $u = (1,0,0)$ ,  $v = (0,1,0)$  e  $w = (0,-1,0)$ .

Devemos escrevê-los no campo Entrada, lembrando que as letras  $u$ ,  $v$  e  $w$  devem ser minúsculas. Crie um controle deslizante  $k$  com intervalo entre 0 (zero) e 5, incremento 0,01 e velocidade 2.

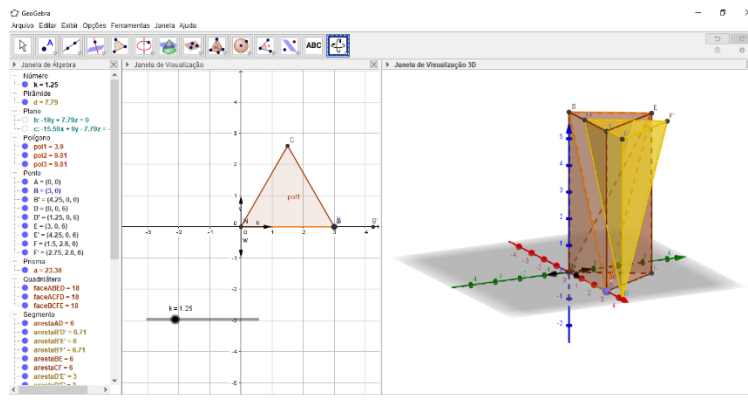
Escreva no campo Entrada os seguintes pontos:  $B' = B + k * u$ ,  $D' = D + k * u$ ,  $E' = E + k * u$ . e  $F' = F + k * u$ .

Selecione Pirâmide no ícone de mesmo nome e clique nos pontos  $B'$ ,  $D'$ ,  $E'$ ,  $B'$  e  $F'$ , nessa ordem. Se preferir, pode digitar no campo Entrada:  $\text{Pirâmide}[B', D', E', F']$ . Essa nova pirâmide pode se mover de acordo com o controle deslizante  $k$ .

Mudaremos a pirâmide de cor para destacá-la e diferenciá-la das outras pirâmides, que terão cores diferentes. Clique com o botão direito do mouse em pirâmide  $d$  na janela de álgebra, selecione Propriedades, selecione a guia Cor e mude para amarela com transparência de 50% e feche a janela de propriedades. (Ver figura 44).



Figura 44: Corte de uma pirâmide no prisma

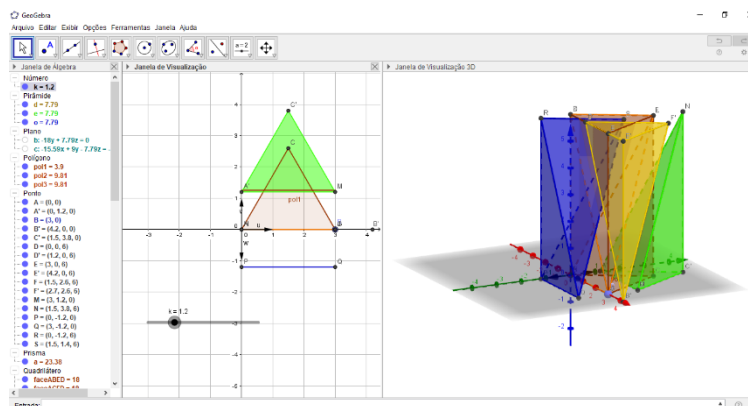


Fonte: Autor

No campo Entrada digite os seguintes pontos para formar a próxima pirâmide:  $A' = A + k * v$ ,  $C' = C + k * v$ ,  $M = B + k * v$  e  $N = F + k * v$ . Forme a pirâmide digitando no campo Entrada  $Pirâmide[A',M,C',N]$ . Mude-a para cor verde, com transparência de 50%.

Para formar a última pirâmide digite, no campo Entrada, os seguintes pontos:  $P = A + k * w$ ,  $Q = B + k * w$ ,  $R = D + k * w$  e  $S = F + k * w$ . Forme a pirâmide com esses vértices e mude para cor azul com transparência 50%. (Ver figura 45).

Figura 45: Separação das três pirâmides que formam o prisma



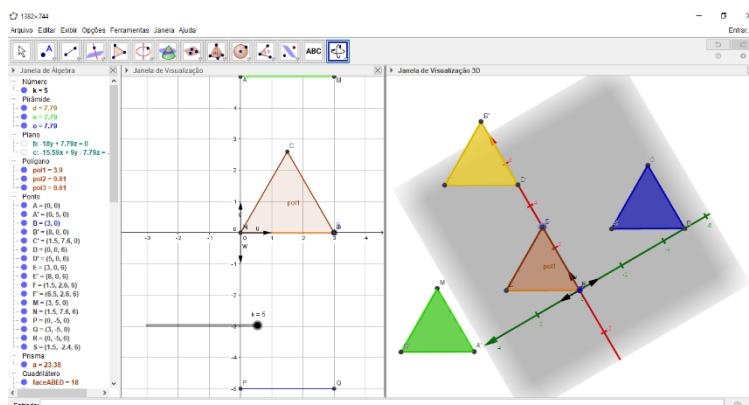
Fonte: Autor

Observe que as pirâmides amarela e verde tem a mesma altura do prisma  $EB = E'B' = NC'$  e tem a mesma base do prisma, ou seja, os triângulos  $DEF$ ,  $D'E'F'$  e  $A'MC'$  são congruentes. Logo, pelo princípio de Cavalieri, as pirâmides amarela e verde tem mesmo volume. A pirâmide azul e a pirâmide verde tem bases congruentes, se considerarmos as bases  $PRS$  na pirâmide azul e  $NC'A'$  na pirâmide verde. Essas duas

pirâmides também tem altura relativas as bases citadas, congruentes. Basta observar os sólidos na vista superior e perceber que os triângulos equiláteros tem mesma altura relativa as bases citadas. (Ver figura).

Logo, pelo princípio de Cavalieri, as pirâmides azul e verde tem mesmo volume e, conseqüentemente, as pirâmides azul e amarela também tem. Portanto, o volume do prisma é equivalente ao volume de três pirâmides, ou seja, o volume de uma pirâmide é um terço do volume de um prisma de mesma base e mesma altura. (Ver figura 46).

Figura 46: Vista superior das pirâmides que compõem o prisma, separadas



Fonte: Autor

10) Tronco de pirâmide: Construa o tronco de pirâmide descrito no Papiro de Moscou e calcule seu volume com a mesma técnica utilizada na época.

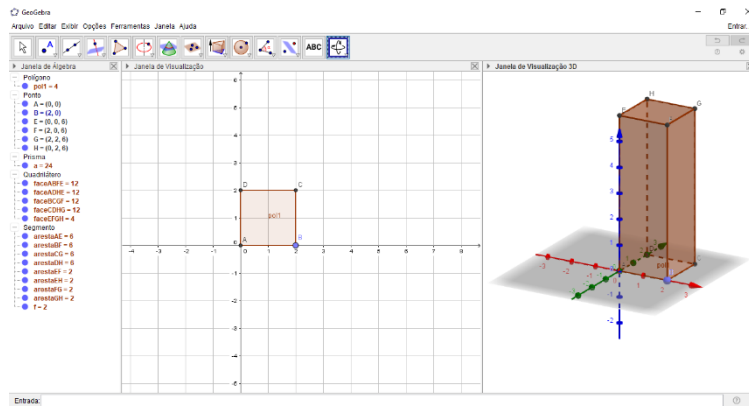
Assunto: Tronco de pirâmide.

Objetivos:

- Reconhecer os prismas e as pirâmides que compoem o tronco de pirâmide.
- Utilizar propriedades geométricas para fazer estimativas de volume de prismas e pirâmides para calcular o volume de um tronco de pirâmide.

Na janela de visualização 2D, forme um quadrado de lado 2. Na guia exibir, selecione janela de visualização 3D. No ícone Pirâmide, selecione Extrusão para prisma ou cilindro, informe a altura 6 e clique em ok. Está formado o primeiro prisma que compõe o tronco de pirâmide descrito no Papiro de Moscou. (Ver figura 47).

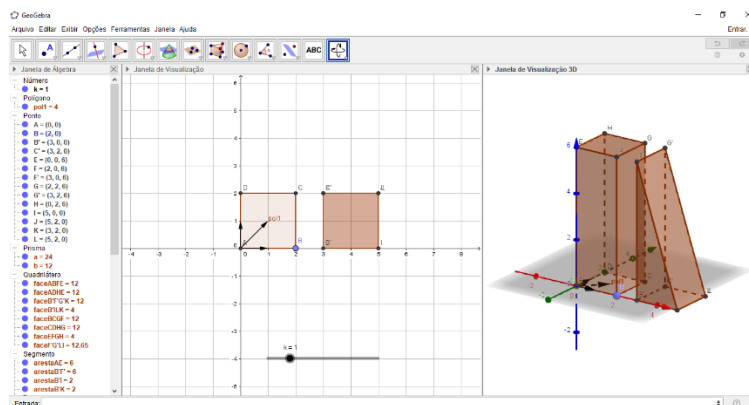
Figura 47: Prisma reto de base quadrada que compõe o tronco de pirâmide



Fonte: Autor

No campo Entrada, crie os seguintes vetores:  $u = (1,0,0)$ ,  $v = (0,1,0)$  e  $w = (1,1,0)$ . Na janela 2D crie um controle deslizante  $k$ , com intervalo de 0 (zero) a 5 (cinco) e incremento 0.01, velocidade 2. Ainda no campo Entrada crie os seguintes pontos:  $B' = B + u * k$ ,  $C' = C + u * k$ ,  $F' = F + u * k$ ,  $G' = G + u * k$ ,  $I = (4,0,0) + u * k$  e  $J = (4,2,0) + u * k$ . Na janela 3D, no ícone Pirâmide, selecione Prisma e clique na sequência de pontos  $F', B', I, F'$  e  $G'$ . Está formado o segundo prisma. (Ver figura 48).

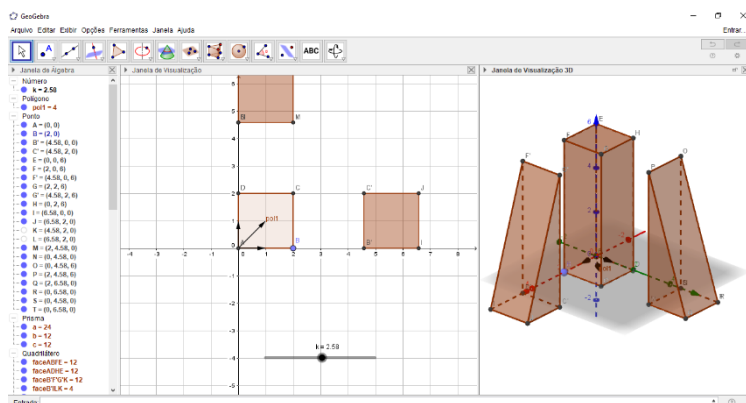
Figura 48: Primeiro prisma de base triangular que compõe o tronco de pirâmide



Fonte: Autor

Note que, quando  $k = 0$  as faces  $BCGF$  e  $B'C'G'F'$  se sobrepõem. Deveremos agora formar um outro prisma congruente a este último de tal forma que uma de suas faces se sobreponha a face  $CDHG$  do primeiro prisma. Para isso, no campo Entrada, crie os seguintes pontos:  $M = C + v * k$ ,  $N = D + v * k$ ,  $O = H + v * k$ ,  $P = G + v * k$ ,  $Q = (2,4,0) + v * k$  e  $R = (0,4,0) + v * k$ . Na janela 3D, no ícone Pirâmide, selecione Prisma e clique na sequência de pontos  $P, M, Q, P$  e  $O$ . Está formado o terceiro prisma. (Ver figura 49).

Figura 49: Segundo prisma de base triangular que compõe o tronco de pirâmide

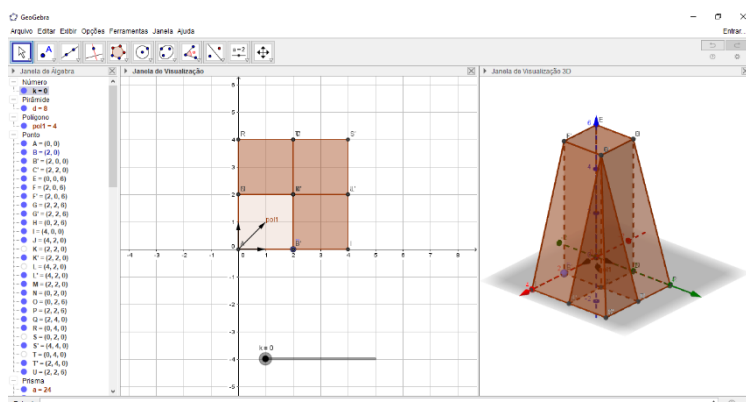


Fonte: Autor

Note que alguns pontos são criados automaticamente pelo sistema, por isso, não podemos mais utilizá-los quando tivermos de criar pontos. Por exemplo, os pontos  $K$ ,  $L$ ,  $S$  e  $T$ . Assim vamos utilizar  $K'$ ,  $L'$ ,  $S'$  e  $T'$ , para formar o quadrado da base da única pirâmide que compõe o tronco.

Devemos criar estes pontos então digitando no campo Entrada:  $K' = C + w * k$ ,  $L' = (4,2,0) + w * k$ ,  $S' = (4,4,0) + w * k$ ,  $T' = (2,4,0) + w * k$ . Devemos criar também o vértice da pirâmide  $U = G + w * k$ . Selecione Pirâmide no ícone de mesmo nome e clique na sequência de pontos:  $K', L', S', T', K'$  e  $U$ . Assim, está formada a pirâmide. Movemos agora o controle deslizante  $k$  até o zero. Nota-se então que o tronco de pirâmide formado com a junção dos poliedros criados, é o descrito no Papiro de Moscou, que deve ter seu volume igual a soma dos volumes dos desses poliedros. (Ver figura 50).

Figura 50: Tronco de pirâmide formado



Fonte: Autor

O primeiro poliedro é um prisma reto de altura 6 e base quadrada de lado 2. Logo, seu volume é igual a  $V_1 = 2^2 \times 6 = 4 \times 6 = 24$ . O segundo e o terceiro prismas

são congruentes, onde cada um tem base triangular retangular e altura relativa a essa base igual a 2. Portanto seu volume é igual  $V_2 = \frac{2 \times 6}{2} \times 2 = 6 \times 2 = 12$ . Por fim, a pirâmide de altura 6 e base quadrada de lado 2 tem volume igual a  $V_3 = \frac{2^2 \times 6}{3} = \frac{4 \times 6}{3} = \frac{24}{3} = 8$ . Portanto, o volume do tronco de pirâmide é igual a  $V = V_1 + 2 \times V_2 + V_3 = 24 + 2 \times 12 + 8 = 56$ .

11) Determinar os volumes de um cilindro e de um cone usando o princípio de Cavalieri.

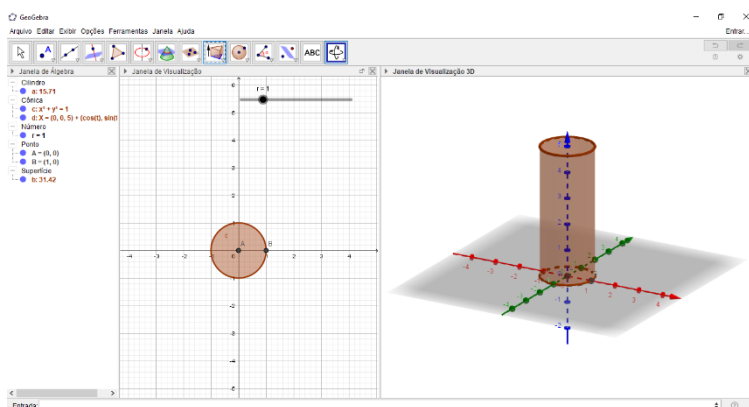
Assunto: Corpos redondos

Objetivos:

- Utilizar propriedades geométricas, inclusive o princípio de Cavalieri, para fazer estimativas de volume do cilindro e do cone.

Na janela de visualização 2D, crie um controle deslizante  $r$  variando de 0 (zero) a 5 (cinco), incremento 0.01 e velocidade 2. No campo entrada, digite os pontos  $A = (0,0)$  e  $B = (r, 0)$ . Clique no ícone Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos, depois clique em A como centro do círculo e clique em B como ponto do círculo. Na guia exibir, selecione janela de visualização 3D. No ícone Pirâmide, selecione Extrusão para prisma ou cilindro, clique no círculo da janela 3D e informe a altura 5, tecele Enter ou clique em ok. (Ver figura 51).

Figura 51: Cilindro circular reto de raio variável



Fonte: Autor

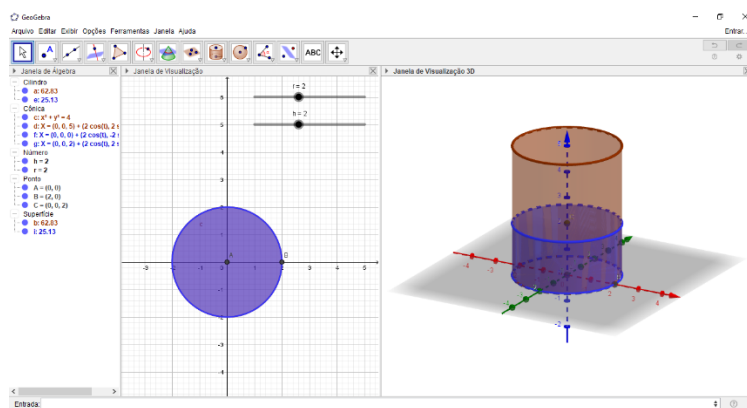
Crie um controle deslizante  $h$  com variação de 0 (zero) a 5 (cinco), incremento 0.01 e velocidade 2. No campo Entrada, digite o ponto  $C = (0,0,h)$ . Na janela de

visualização 3D, selecione Cilindro no ícone Pirâmide, clique em  $A$  depois em  $C$  e informe o raio  $r$ , clique em ok. Devemos notar que o primeiro cilindro varia de acordo com o raio  $e$ , o segundo cilindro varia de acordo com o raio e a altura.

Na janela de álgebra, deve aparecer, logo no topo, os volumes dos dois cilindros por ordem de formação. O primeiro cilindro tem volume  $a$  e o segundo cilindro tem volume  $e$ . Por exemplo, se movermos os controles deslizantes para os valores  $r = 2$  e  $h = 2$ , os volumes dos cilindros serão  $a = 62,83$  e  $e = 25,13$ .

Podemos mudar a cor do segundo cilindro para azul, para isso, clique com o botão direito do mouse em  $e = 25,13$ , clique em propriedades, na guia cor, selecione a cor azul e aumente a transparência para 50%. (Ver figura 52).

Figura 52: Cilindro circular reto de raio e altura variáveis



Fonte: Autor

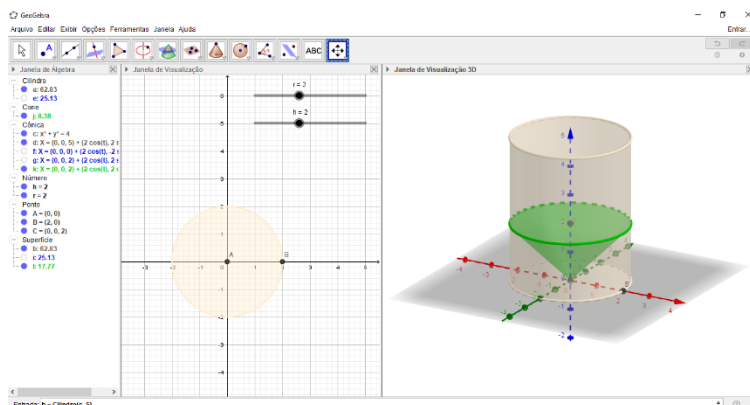
Aumentando o raio  $r$ , aumentamos também a área circular da base dos cilindros e conseqüentemente aumentamos o volume dos cilindros. Aumentando o valor de  $h$ , aumentamos também o volume do cilindro azul. Ou seja, o volume de um cilindro qualquer é diretamente proporcional ao seu raio e a sua altura e, mais precisamente, o volume  $V$  de um cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura,

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Verificando então, quando  $r = 2$  e  $h = 2$ , temos que o volume do segundo cilindro é  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,1415 \times 2^2 \times 2 \cong 25,13$ .

Para verificar o volume de um cone, deve-se fazer o mesmo procedimento, trocando apenas o segundo cilindro por um cone (verde). Deve-se tomar cuidado, para que na formação do cone, clicar primeiro no ponto  $C$ , depois no ponto  $A$  e informando o mesmo raio  $r$ . Mude a cor do primeiro cilindro para cinza claro. (Ver figura 53).

Figura 53: Cone circular reto de raio e altura variáveis

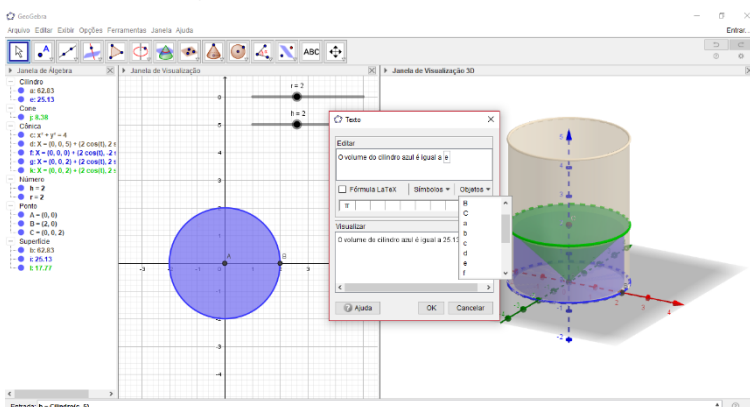


Fonte: Autor

As cores são escolhidas de acordo com a preferência do leitor. A figura também pode conter todos os três sólidos (cilindro azul, cilindro cinza e cone verde). Para expressar os valores dos respectivos volumes na janela 3D, devemos clicar no ícone Texto e escolher, na tela, um local apropriado para que o texto com informações sobre os volumes apareçam. Uma janela abrirá para ser preenchida com essas informações. No campo Editar, digite:

O volume do cilindro azul é igual a  $e$ . Onde  $e$  é na verdade selecionado na guia Objeto, situada a direita e abaixo do campo Texto. (Ver figura 54).

Figura 54: Exibição do valor do volume do cilindro

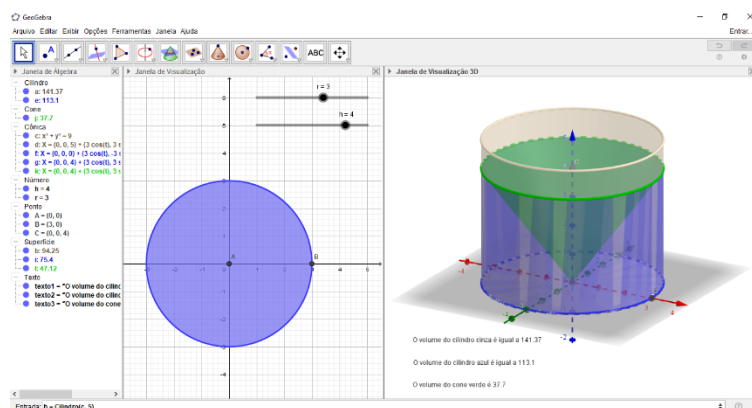


Fonte: Autor

Deve-se fazer o mesmo procedimento para os volumes  $a$  do cilindro cinza e  $e$  do cone verde. Para verificar os valores, atribuímos os valores  $r = 3$  e  $h = 4$  através dos controles deslizantes. Assim, Sejam  $V_C, V_A$  e  $V_V$  os volumes do cilindro cinza, do cilindro azul e do cone verde, respectivamente.

$V_C = \pi \times 3^2 \times 5 \cong 141,37$ ,  $V_A = \pi \times 3^2 \times 4 \cong 113,1$  e  $V_V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 \cong 37,7$ . (Ver figura 55).

Figura 55: Exibição os valores dos volumes dos dois cilindros e do cone



Fonte: Autor

12) Volume da esfera. Deduzir que o volume de uma esfera de raio  $R$  é dado pela diferença entre o volume de um cilindro equilátero de mesmo raio e o cone duplo de inscrito no cilindro.

Assunto: Corpos redondos.

Objetivos:

- Utilizar o Princípio de Cavalieri para determinar o volume da esfera.

Na janela de visualização 2D, crie dois controles deslizantes  $r$  e  $h$ ,  $h$  variando de 0 (zero) a 8 e  $r$  variando de 0 (zero) a 4, para ambos, configure incremento 0.01, vertical e velocidade 2. No campo Entrada, digite os seguintes pontos:  $A = (0,0)$ ,  $B = (r, 0)$ ,  $C = (0, 2 * r)$ ,  $D = (0, r)$  e  $E = (8, 0, 0)$ .

Escolha a opção *Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos*, escolha o ponto  $A = (0,0)$  como centro do círculo e o ponto  $B = (r, 0)$  como ponto do círculo. Escolha a opção *Extrusão* para prisma ou cilindro, clique no círculo e informe a altura  $2 * r$ .

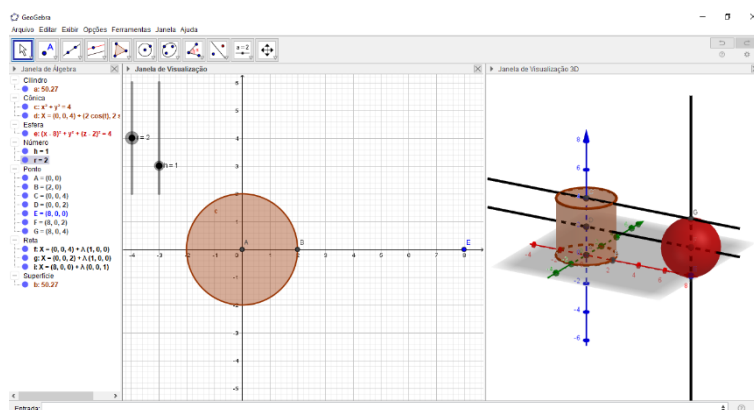


Assim, o cilindro é equilátero, ou seja, a altura é igual ao diâmetro da base. Mude o valor do raio para  $r = 2$  através do controle deslizante e note que tanto a altura quanto a base do cilindro aumentam. Selecione a opção Reta paralela, clique no *Eixo X* (vermelho) e clique no ponto  $C$ .

Repita o procedimento trocando o ponto  $C$  pelo ponto  $D$ . Repita o procedimento trocando o *Eixo X* por *Eixo Z* (azul) e trocando o ponto pelo  $E$ . Marque os pontos de intersecção das retas ( $F$  e  $G$ ). Escolha a opção Esfera Dados Centro e Um de Seus Pontos, clique em  $F$  e depois em  $G$ . (Ver figura 56).

Para retirar as retas, basta clicar com o botão direito do mouse em cada uma delas, na janela de álgebra ou na própria reta, e retire a marcação na opção Exibir objeto.

Figura 56: Cilindro equilátero e esfera, ambos de mesmo raio variável

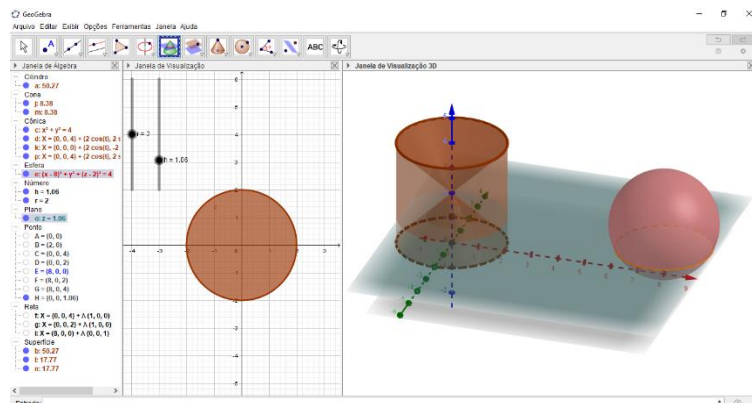


Fonte: Autor

Selecione a opção Cone, clique em  $A$  e depois em  $D$  e informe a altura  $r$ . Clique em  $C$  e depois em  $D$  e informe a altura  $r$ . Dois cones são criados dentro do cilindro. Os pontos também devem ser retirados. Diretamente na janela de álgebra, clicando com o botão direito do mouse no nome Ponto e desmarcando a opção Exibir objeto.

Com o intuito de usar o Princípio de Cavalieri, devemos agora passar um plano paralelo ao plano da base (cinza). Para isso devemos inserir, no campo Entrada, um ponto  $H = (0, 0, h)$ . Na janela 3D, selecione a opção Plano paralelo, clique no plano cinza e no ponto  $H$ . Selecione a opção Intersecção de Duas Superfícies, posicione o mouse de forma que apareça uma circunferência (provavelmente o geogebra formará na cor laranja) no plano paralelo ao plano cinza e na esfera. (Ver figura 57).

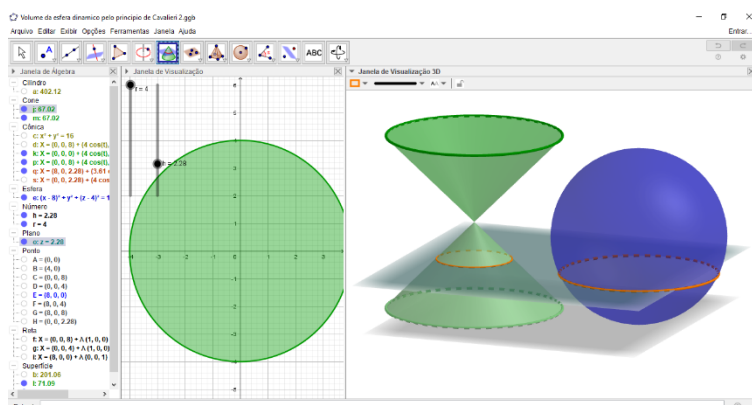
Figura 57: Plano secionando a esfera e o cone duplo interno ao cilindro



Fonte: Autor

Repita o procedimento para o cilindro e depois para cada um dos cones. Mude as cores dos sólidos para facilitar a visualização. Se houver dificuldade em achar o círculo de interseção do plano com os cones, sugere-se desmarcar a opção Exibir objeto, tanto para o cilindro quanto para o círculo de interseção do plano com o cilindro. (Ver figura 58).

Figura 58: Interseção do plano com a superfície do cone

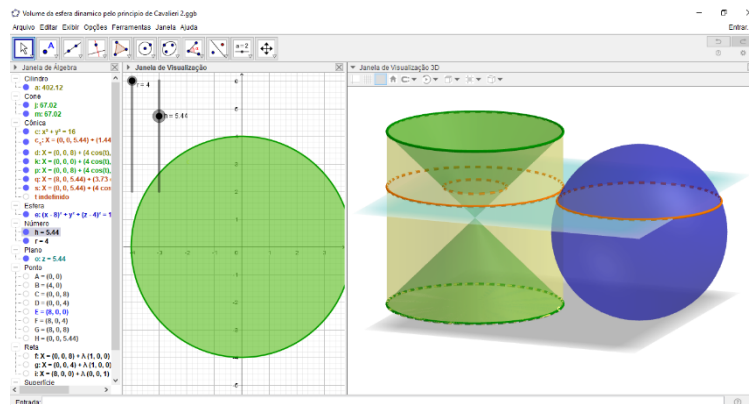


Fonte: Autor

É importante que esse procedimento seja feito com os dois cones, pois na janela de álgebra, cada cone aparece como uma cônica diferente e, portanto, são duas interseções diferentes. Marque a opção Exibir objeto para o cilindro e para sua interseção com o plano.

Observe que a interseção do plano com a porção do sólido formado entre o cilindro e o cone é uma coroa circular. (Ver figura 59).

Figura 59: Interseção do plano com as superfícies do cilindro, do cone e da esfera



Fonte: Autor

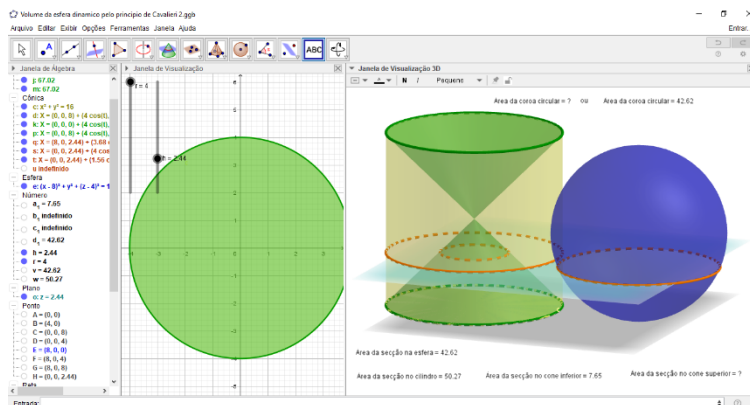
Na janela de álgebra, em Cônica, note que as secções da esfera, do cilindro, do cone superior e do cone inferior, são respectivamente,  $q$ ,  $s$ ,  $c_1$  e  $t$ . Note também que a área da coroa circular é dada por  $A_{c_1} = s - t$  para o cone inferior e  $A_{c_2} = s - c_1$  para o cone superior. Clique com o botão direito do mouse em  $c_1$  e renomeie como  $u$ . No campo entrada. Digite:  $v = \text{Área}[q]$ .

O valor da área da secção da esfera aparecerá na janela de álgebra. Se for digitado apenas  $\text{Área}[q]$ , o próprio Geogebra se encarrega de nomear essa área. Ainda no campo entrada, digite:  $w = \text{Área}[s]$ . O valor da área da secção do cilindro aparecerá na janela de álgebra. Digitando  $\text{Área}[t]$  e  $\text{Área}[u]$ , os valores das secções nos cones inferior e superior, respectivamente aparecerão na janela de álgebra como  $a_1$  e  $b_1$ .

Na janela de visualização 3D, clique no ícone Texto, escolha um local apropriado na janela 3D para escrever esse texto e clique no local. Uma janela de texto abrirá. Escreva: área da secção na esfera =  $v$ . O termo  $v$  é selecionado na guia Objeto posicionada à direita e abaixo da janela de texto. Os objetos  $w$ ,  $a_1$  e  $b_1$  também são obtidos da mesma forma. Assim, criamos mais três textos: Área da secção no cilindro =  $w$ , Área da secção no cone inferior =  $a_1$  e Área da secção no cone superior =  $b_1$ . Podemos também escrever a área da coroa circular, para isso, digitamos no campo Entrada  $w - a_1$ . Aparecerá na janela de álgebra, o valor de  $c_1 = w - a_1$ , para o cone inferior. Já para o cone superior, digitamos  $w - b_1$  e aparecerá o valor de  $c_1 = w - b_1$ .

Então, Escrevemos na janela 3D, Área da coroa circular =  $c_1$  ou Área da coroa circular =  $d_1$ . Perceba que em uma das duas áreas da coroa circular sempre aparecerá o valor da área da seção na esfera, ou seja, O volume da esfera é igual ao volume do cilindro subtraído o volume do cone. Chegamos a essa conclusão usando o Princípio de Cavalieri. (Ver figura 60).

Figura 60: Exibição dos valores das áreas das seções do cilindro, do cone e da esfera



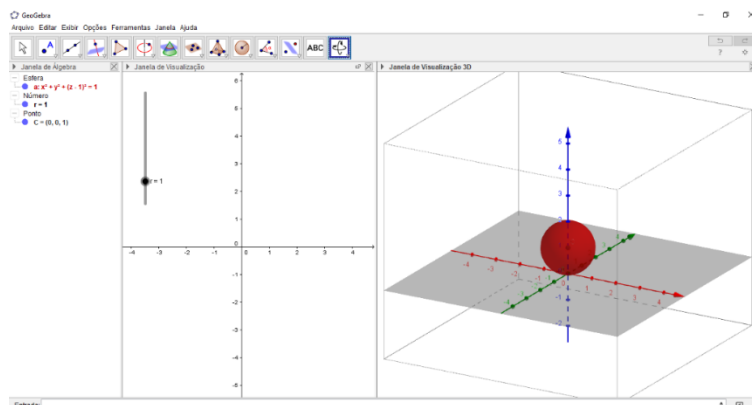
Fonte: Autor

13) Verificar o seguinte Teorema de Arquimedes:

- i) O volume de qualquer esfera é quatro vezes o do cone com base igual ao círculo máximo da esfera e com altura igual ao raio da mesma esfera; e
- ii) O volume do cilindro com base igual ao círculo máximo da esfera e altura igual ao diâmetro é  $1\frac{1}{2}$  vezes o volume da esfera.

Vamos começar pelo controle deslizante  $r$  variando de zero a cinco e incremento 0.01. A escolha da velocidade fica para o estudante. Na guia exibir, selecione janela de visualização 3D. No campo Entrada, digite o ponto  $C = (0,0,r)$ . Construa uma esfera de centro em  $C$  e raio  $r$ . (Ver figura 61).

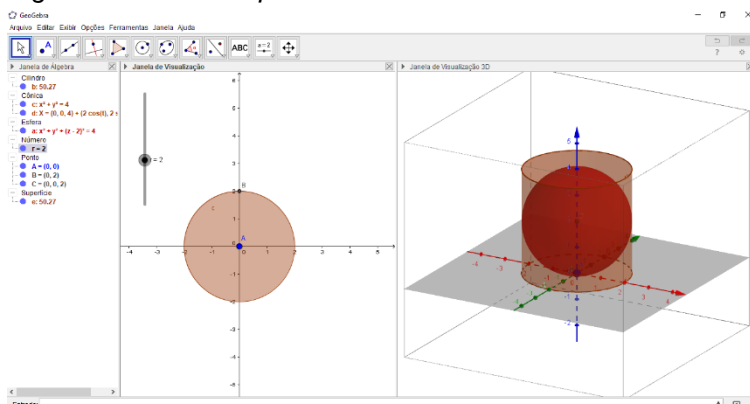
Figura 61: Esfera de raio variável (Teorema de Arquimedes)



Fonte: Autor

No campo Entrada, digite os pontos  $A = (0,0)$  e  $B = (0,r)$ . Forme o círculo de centro em  $A$  e raio  $AB$ . Ainda no campo Entrada digite  $cilindro[c, 2 * r]$ . (Ver figura 62).

Figura 62: Cilindro equilátero de raio variável e esfera inscrita de mesmo raio

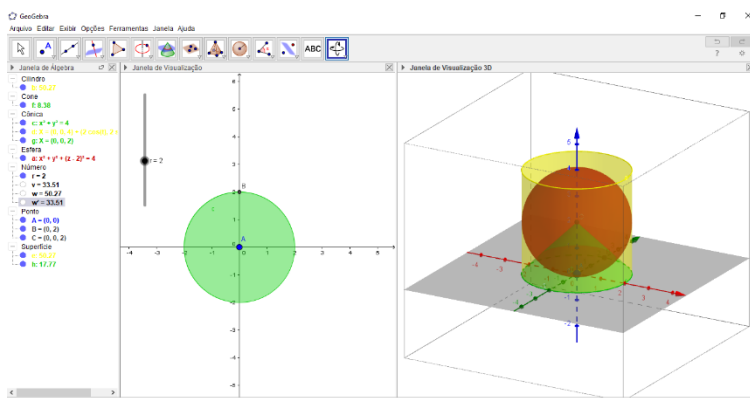


Fonte: Autor

Para calcular o volume da esfera, digite a fórmula do volume da esfera no campo Entrada:  $v = (4 * \pi * r^3)/3$ . Note que o volume do cilindro é indicado por  $b$  no topo da janela de álgebra. Digite no campo Entrada  $w = v + v/2$  e verifique que  $w = b$ . O que conclui a verificação de ii).

Agora vamos verificar i). No campo Entrada, digite  $cone[c,r]$ . Note que o volume do cone é indicado por  $f$  no topo da janela de álgebra, abaixo do volume do cilindro. Digite no campo entrada  $w' = 4 * f$  e verifique que  $w' = v$ . Concluindo assim a verificação de i). Modifique as cores do cilindro e do cone para melhor visualização. Varie o valor de  $r$  e perceba que  $w = b$  e  $w' = v$  para qualquer valor de  $r$ . (Ver figura 63).

Figura 63: Cilindro, cone e esfera, de raio variável (Teorema de Arquimedes)



Fonte: Autor

## 6. ANÁLISE DOS RESULTADOS DO TESTE USANDO A TRI

A TRI – Teoria de Resposta ao Item – aplicada ao teste foi simulada no *microsoft excel* com um suplemento chamado *eirt* obtido sem custo na internet. A simulação feita levou em consideração três parâmetros: discriminação (*a*), dificuldade (*b*) e resposta ao acaso (*c*). A análise a seguir trata item por item em cada uma das duas turmas e visa diagnosticar quais habilidades cada turma adquiriu com as respectivas metodologias e quais habilidades elas deixaram de ser adquiridas.

Tabela 3: Resultado do teste do 3° AC-B.

Resultados do Pré-teste - 3° AC-B Vespertino													
N°	Questões												Total de acertos por aluno
	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7	i_8	i_9	i_10	i_11	i_12	
Aluno 1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2
Aluno 2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	4
Aluno 3	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	3
Aluno 4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	3
Aluno 5	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
Aluno 6	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	4
Aluno 7	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	5
Aluno 8	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	6
Aluno 9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	3
Aluno 10	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	5
Aluno 11	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3
Aluno 12	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
Aluno 13	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3
Aluno 14	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	6
Aluno 15	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	4
Aluno 16	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	4
Aluno 17	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	5
Aluno 18	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	4
Aluno 19	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	8
	7	14	7	6	7	7	5	5	5	6	5	6	
a)	7	14	8	1	0	2	3	3	5	6	5	6	
b)	4	2	2	3	3	4	4	2	7	2	3	2	
c)	1	0	2	8	3	7	4	5	2	6	4	2	
d)	7	1	0	1	6	3	3	1	5	5	4	5	
e)	0	2	7	6	7	3	5	8	0	0	3	4	
%	37%	74%	37%	32%	37%	37%	26%	26%	26%	32%	26%	32%	
H	H7	H7	H7	H6	H7	H6	H9	H8	H8	H8	H9	H8	

Fonte: *eirt* (excel).

Nesta primeira tabela (Tabela 3) composta por 1's e 0's, considera-se 1 como acerto ao item e 0 como erro. Nas colunas tem-se os itens, nas linhas tem-se os

alunos. No fim da tabela ainda tem-se uma linha com o total de acertos de cada item, e na seqüência, uma linha para cada alternativa dos itens e, nas duas últimas linhas, tem-se a porcentagem de acertos de cada item e a habilidade (H) de cada item. Para utilizar o *eirt*, só devemos selecionar a tabela de 1's e 0's incluindo a coluna com os alunos e a linha com os itens. O mesmo acontece com a segunda tabela (tabela 4) com os resultados da segunda turma.

Tabela 4: Resultado do teste do 3° AGR.

Resultados do Pré-teste - 3° Agro Vespertino													
N°	Questões												Total de acertos por aluno
	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_10	I_11	I_12	
Aluno 1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	6
Aluno 2	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4
Aluno 3	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	8
Aluno 4	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	5
Aluno 5	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	9
Aluno 6	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	6
Aluno 7	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	6
Aluno 8	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	4
Aluno 9	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	4
Aluno 10	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	7
Aluno 11	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	9
Aluno 12	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	5
	7	11	8	7	6	9	6	3	3	4	5	4	
a)	1	11	2	2	2	0	0	1	3	0	5	4	
b)	1	0	0	1	1	2	0	1	4	4	2	4	
c)	0	0	2	1	1	9	2	3	2	4	1	0	
d)	7	1	0	1	2	0	4	3	3	4	3	1	
e)	3	0	8	7	6	1	6	4	0	0	1	3	
%	58%	92%	67%	58%	50%	75%	50%	25%	25%	33%	42%	33%	
H	H7	H7	H7	H6	H7	H6	H9	H8	H8	H8	H9	H8	

Fonte: *eirt* (excel).

Na seqüência das tabelas, tem-se, a estimativa dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  de cada turma, 3° ACB e 3° AGR, nas tabelas 5 e 6 respectivamente. As tabelas 7 e 8 são referentes a estimativa da variável latente para os alunos das turmas 3° ACB e 3° AGR, respectivamente.

Tabela 5: estimativa dos parâmetros – 3° ACB

Estimativa dos parâmetros – 3° ACB			
Item	Discriminação do item (a)	Dificuldade do item (b)	Acerto ao acaso (c)
<i>i</i> _1	1,079	1,354	0,172
<i>i</i> _2	0,656	-1,270	0,168
<i>i</i> _3	0,751	1,839	0,175
<i>i</i> _4	0,966	1,773	0,162
<i>i</i> _5	1,192	1,143	0,162
<i>i</i> _6	0,577	2,500	0,184
<i>i</i> _7	0,697	3,847	0,184
<i>i</i> _8	1,930	1,224	0,137
<i>i</i> _9	0,688	4,332	0,192
<i>i</i> _10	0,626	4,757	0,222
<i>i</i> _11	0,976	2,742	0,178
<i>i</i> _12	0,592	3,122	0,180

Fonte: eirt (excel).

Tabela 6: Estimativa dos parâmetros – 3° AGR

Estimativas dos parâmetros – 3° AGR			
Item	Discriminação do item (a)	Dificuldade do item (b)	Acerto ao acaso (c)
<i>l</i> _1	2,178	-0,106	0,159
<i>l</i> _2	1,510	-2,033	0,166
<i>l</i> _3	0,782	-0,560	0,171
<i>l</i> _4	0,700	0,005	0,168
<i>l</i> _5	0,337	1,648	0,180
<i>l</i> _6	0,829	-1,208	0,167
<i>l</i> _7	2,751	0,133	0,149
<i>l</i> _8	1,387	1,641	0,147
<i>l</i> _9	1,133	2,290	0,164
<i>l</i> _10	0,621	3,734	0,200
<i>l</i> _11	3,290	0,309	0,132
<i>l</i> _12	0,577	2,798	0,186

Fonte: eirt (excel).



Tabela 7: Estimativa de variável latente – 3° ACB

Estimativa da variável latente – 3° ACB			
Alunos	Z	Alunos	Z
Aluno 1	-0,624	Aluno 11	-0,453
Aluno 2	-0,545	Aluno 12	0,162
Aluno 3	-0,456	Aluno 13	-0,094
Aluno 4	-0,456	Aluno 14	0,643
Aluno 5	0,270	Aluno 15	-0,333
Aluno 6	-0,275	Aluno 16	-0,216
Aluno 7	0,453	Aluno 17	0,000
Aluno 8	0,853	Aluno 18	-0,346
Aluno 9	-0,514	Aluno 19	1,759
Aluno 10	0,160		

Fonte: eirt (excel).

Tabela 8: Estimativa de variável latente – 3° AGR

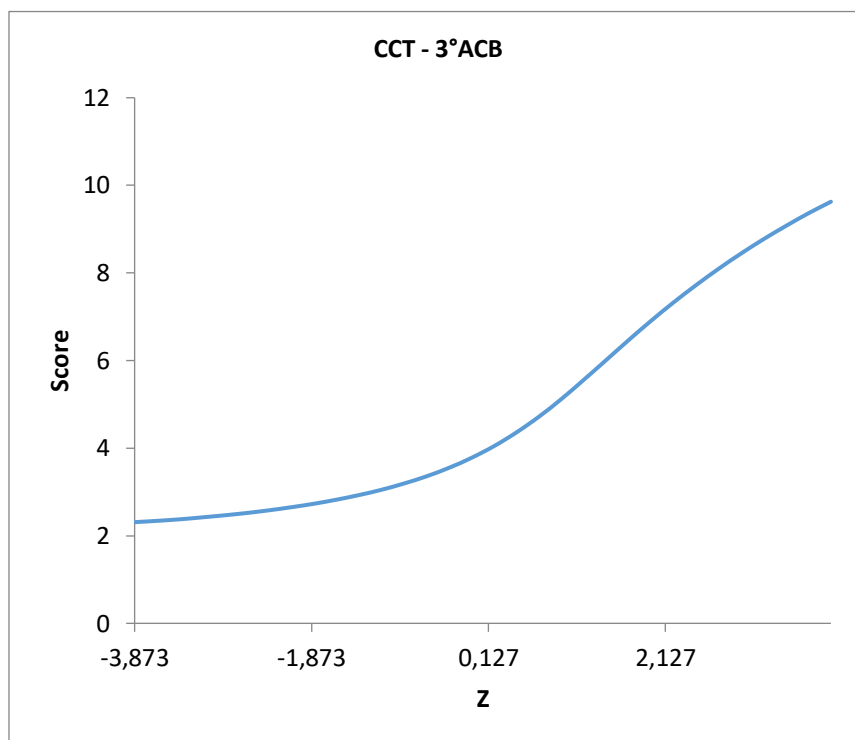
Estimativa da variável latente – 3° AGR			
Alunos	Z	Alunos	Z
Aluno 1	-0,658	Aluno 7	0,377
Aluno 2	-0,615	Aluno 8	-1,445
Aluno 3	0,892	Aluno 9	-0,801
Aluno 4	-0,389	Aluno 10	0,808
Aluno 5	1,226	Aluno 11	1,392
Aluno 6	-0,261	Aluno 12	-0,730

Fonte: eirt (excel).

A seguir, temos as curvas características das turmas CCT que mostra o escore dos alunos em função da habilidade  $z$  ou variável latente. Porém, são gráficos que mostram uma visão geral da turma. Cada item será analisado mais adiante. Não é objetivo deste trabalho analisar o aluno individualmente, pois não temos a pretensão de pontuar de acordo com escore nem analisar a variável latente (ou habilidade) individual de cada aluno. Faremos isso coletivamente, ou seja, analisaremos as turmas. Depois das CCT's, temos também os gráficos de todas as curvas

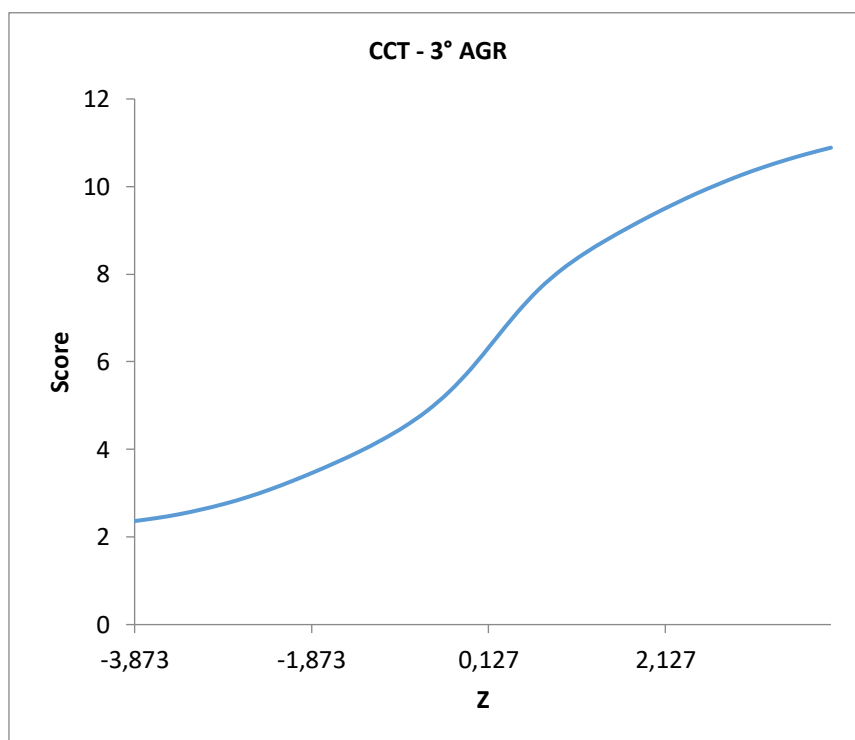
características dos itens por turma, mostrando a probabilidade de acertar um determinado item de acordo com a habilidade  $z$ .

Gráfico 2: Curva característica da turma – 3° ACB



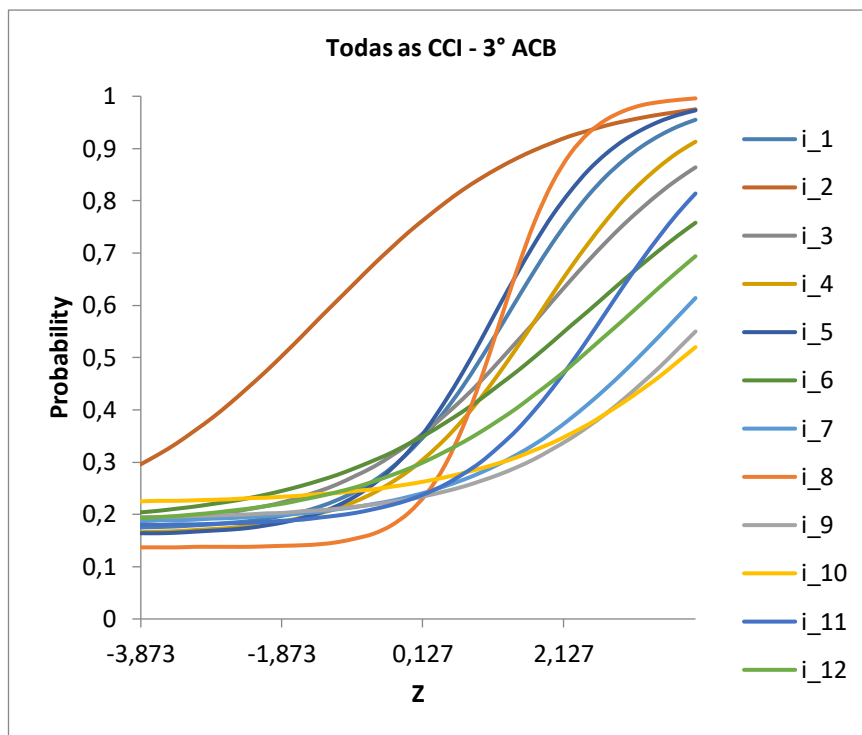
Fonte: eirt (excel).

Gráfico 3: Curva característica da turma – 3° AGR



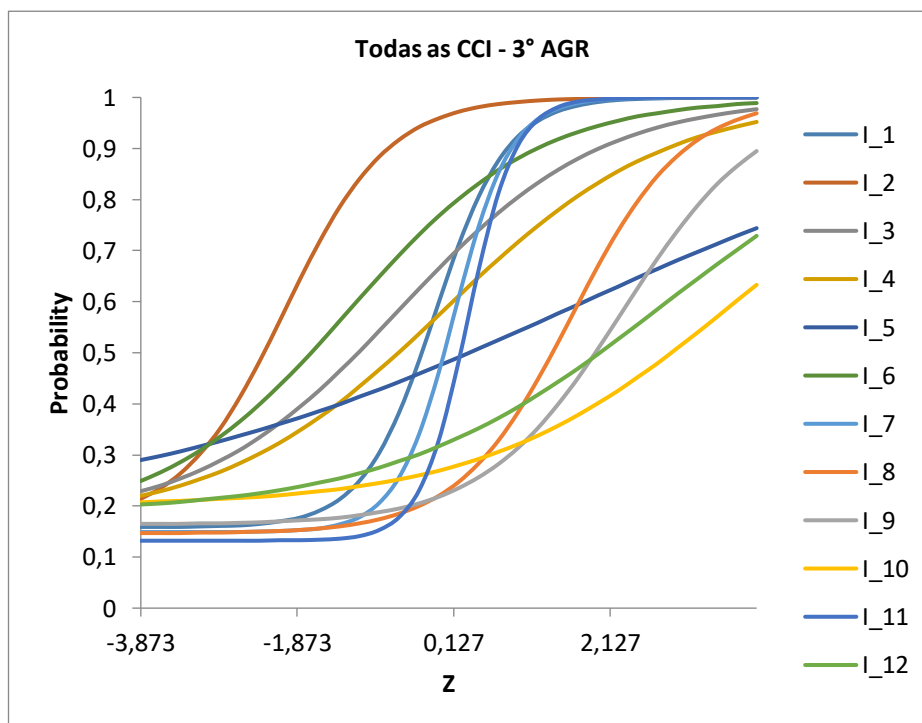
Fonte: eirt (excel).

Gráfico 4: Curvas características dos itens – 3° ACB



Fonte: eirt (excel).

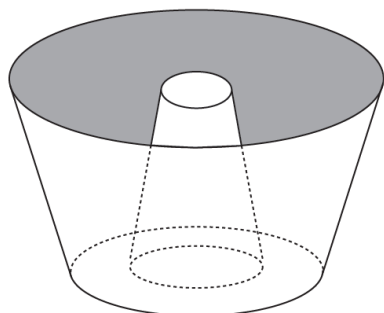
Gráfico 5: Curvas características dos itens – 3° AGR



Fonte: eirt (excel).

**ITEM 1 – Habilidade H7 – Gabarito D**

- 1) (ENEM) Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:

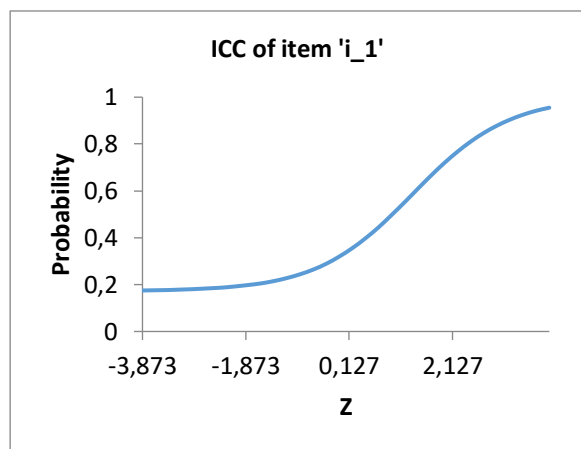


Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são

- um tronco de cone e um cilindro.
- um cone e um cilindro.
- um tronco de pirâmide e um cilindro.
- dois troncos de cone.
- dois cilindros.

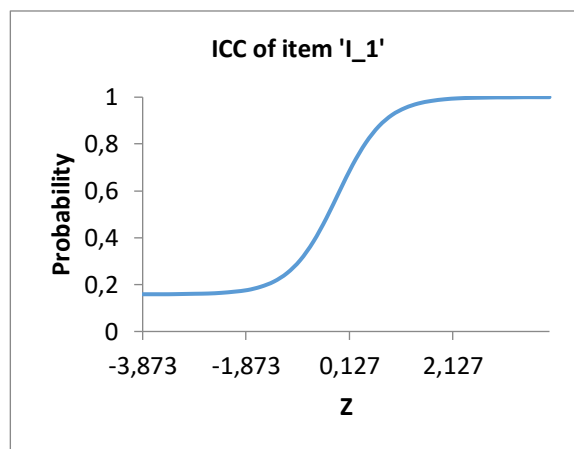
Fonte: INEP

Gráfico 6: CCI 1 – 3° ACB



Fonte: eirt (excel).

Gráfico 7: CCI 1 – 3° AGR

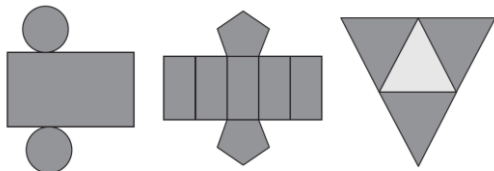


Fonte: eirt (excel).

Neste primeiro item, a turma 3° ACB teve bons parâmetros com  $a = 1,079 > 0,7$ , é considerado bom para um teste de matemática,  $b = 1,354$  considerado muito difícil e  $c = 0,172 < 20\%$ , dentro do limite aceitável. E a turma 3° AGR teve  $a = 2,178 > 0,7$ , considerado muito discriminativo, o que explica o gráfico com ângulo mais íngreme,  $b = -0,106$  considerado como moderado e  $c = 0,159 < 20\%$ , índices melhores que a primeira turma. Discriminação quase uma vez e meia maior.

## ITEM 2 – Habilidade H7 – Gabarito A

2) (ENEM) Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.

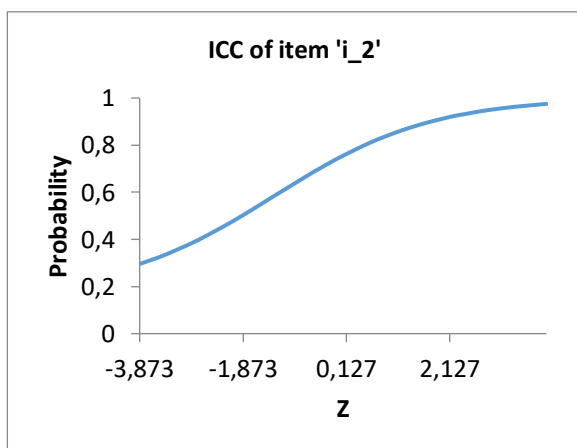


Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

- Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
- Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
- Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.
- Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
- Cilindro, prisma e tronco de cone.

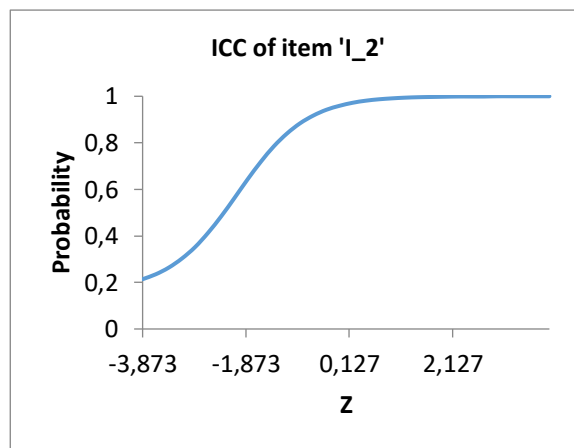
Fonte: INEP

Gráfico 8: CCI 2 – 3° ACB



Fonte: eirt (excel).

Gráfico 9: CCI 2 – 3° AGR

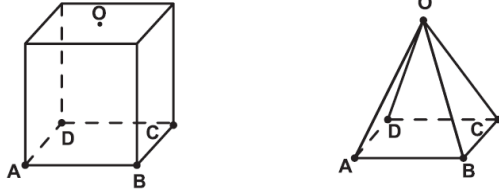


Fonte: eirt (excel).

No segundo item as duas turmas tiveram probabilidade de acerto ao acaso aceitáveis já que os valores ficaram abaixo dos 20%, sendo 3° ACB com  $c = 0,168$  e 3° AGR com  $c = 0,166$ . Os valores para o nível de dificuldade também foram excelentes já que foram ambos negativos, sendo 3° ACB com  $b = -1,270$  e 3° AGR com  $b = -2,033$ , considerado muito fácil para as duas turmas. Já a discriminação do item foi aceitável para o 3° AGR com  $a = 1,510$  enquanto que o 3° ACB com  $a = 0,656$  ficou abaixo de 0,7.

**ITEM 3 – Habilidade H7 – Gabarito E**

- 3) (ENEM) Um industria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.

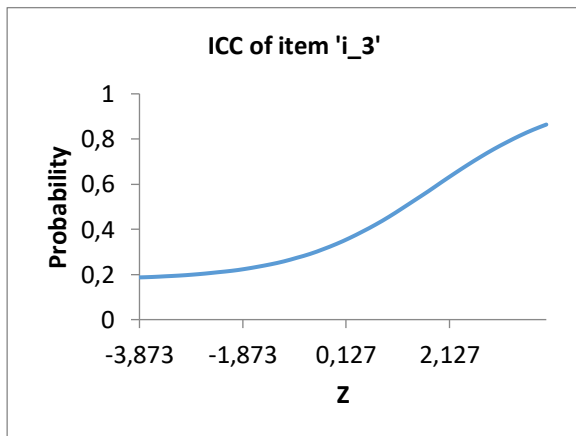


Os pontos A, B, C, D, e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção as arestas  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , nessa ordem. Após os cortes são descartados quatro sólidos. Os formatos dos sólidos descartados são

- Todos iguais
- Todos diferentes
- Três iguais e um diferente
- Apenas dois iguais
- Iguais dois a dois

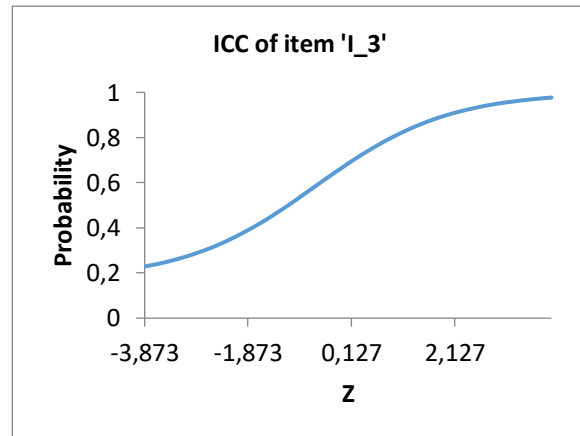
Fonte: INEP

Gráfico 10: CCI 3 – 3° ACB



Fonte: eirt (excel).

Gráfico 11: CCI 3 – 3° AGR



Fonte: eirt (excel).

Para este terceiro item, o parâmetro “chute” foi aceitável para as duas turmas ficando abaixo de 20%, sendo  $c = 0,175$  para o 3° ACB e  $c = 0,171$  para o 3° AGR. A discriminação do item ficou um pouco acima para ambas as turmas, mas muito próximo, de 0,7. Percebe-se que as duas curvas características não têm uma angulação muito acentuada devido o valor de  $a$ , porém, é aceitável. O 3° ACB teve muita dificuldade em responder esse item, com  $b = 1,839$  e, o 3° AGR teve um pouco

mais de facilidade com o valor de  $b = -0,560$ . Percebe-se no gráfico que para esta segunda turma, a curva está um pouco mais centralizada, enquanto que para a primeira turma, a curva está mais à direita, caracterizando assim, um pouco mais de dificuldade.

**ITEM 4 – Habilidade H6 – Gabarito E**

- 4) (ENEM) O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.



Figura 1

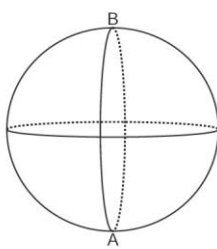
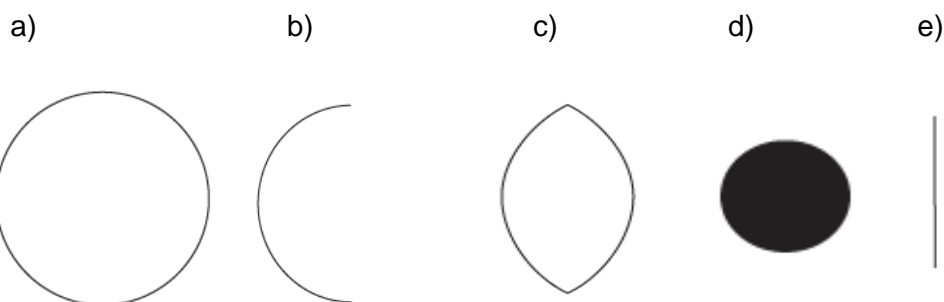


Figura 2

Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por

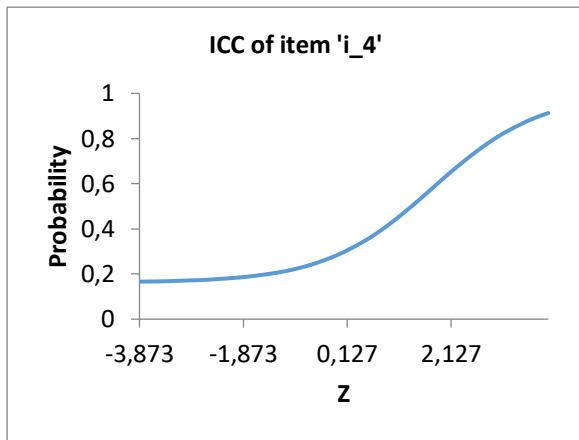


Fonte: INEP

Neste item, o parâmetro  $c$  está abaixo de 17% para ambas as turmas. Os valores do parâmetro  $a$  nas turmas 3° ACB e 3° AGR são, respectivamente, 0,966 e 0,700, que caracteriza o item pouco discriminativo para esta segunda turma. O parâmetro  $b = 1,773$  no 3° ACB indica que este item foi muito difícil para esta turma,

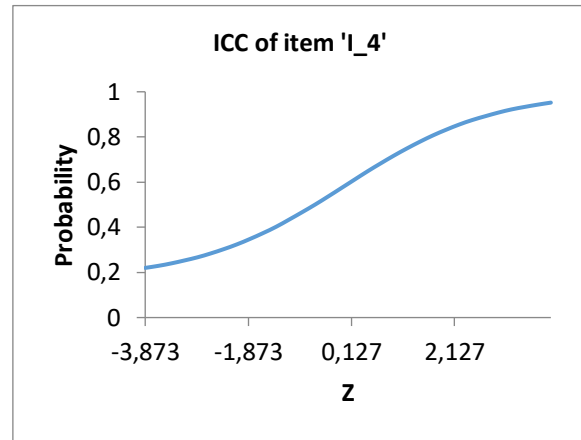
enquanto o 3º AGR obteve  $b = 0,05$ , um valor quase que central, que indica um nível mediano de dificuldade. A seguir, tem-se as curvas características deste item.

Gráfico 12: CCI 4 – 3º ACB



Fonte: eirt (excel).

Gráfico 13: CCI 4 – 3º AGR



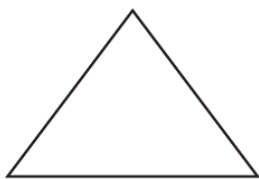
Fonte: eirt (excel).

## ITEM 5 – Habilidade H7 – Gabarito E

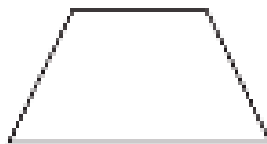
- 5) (ENEM) Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.

Qual deverá ser a forma do adesivo?

a)



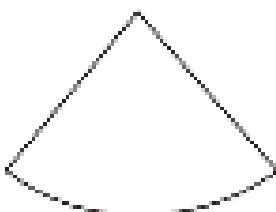
b)



c)



d)



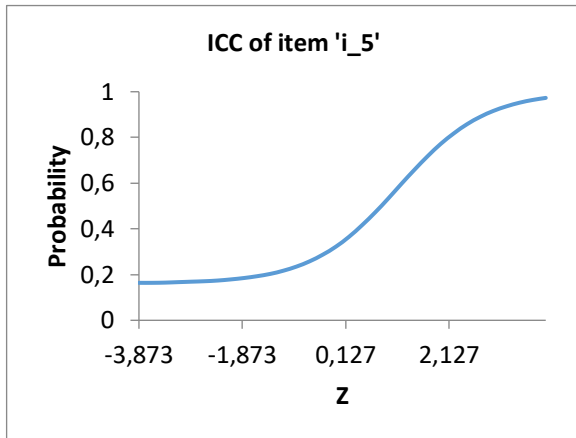
e)



Fonte: INEP

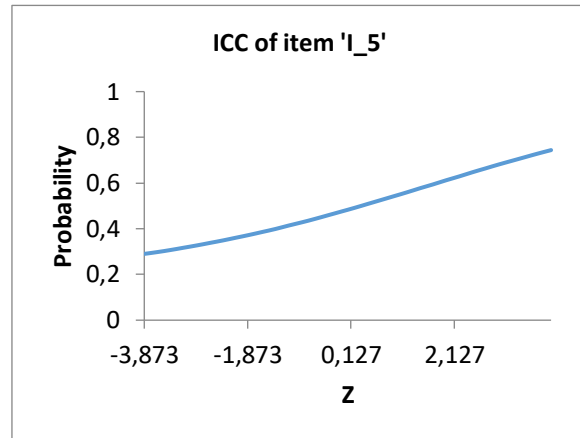


Gráfico 14: CCI 5 – 3° ACB



Fonte: eirt (excel).

Gráfico 15: CCI 5 – 3° AGR

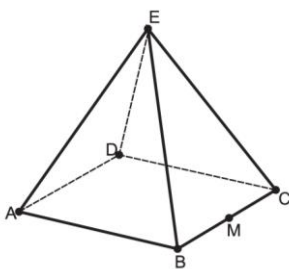


Fonte: eirt (excel).

O item 5 surpreendeu, mesmo que os valores de  $c$  tenham ficado dentro do limite máximo, ou seja, abaixo de 20%. O parâmetro  $a$  indicou que este item não obteve um valor aceitável para o 3º AGR, com valor igual a 0,337, contra 1,192 do 3º ACB, considerado muito bom. Percebemos a diferença nas curvas características acima. O nível de dificuldade foi considerado difícil para o 3º ACB e muito difícil para o 3º AGR com valores  $b = 1,143$  e  $b = 1,648$ , respectivamente.

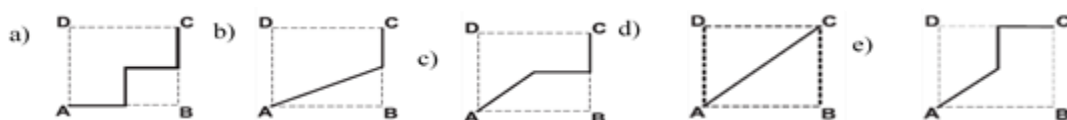
#### ITEM 6 – Habilidade H6 – Gabarito C

- 6) (ENEM) João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



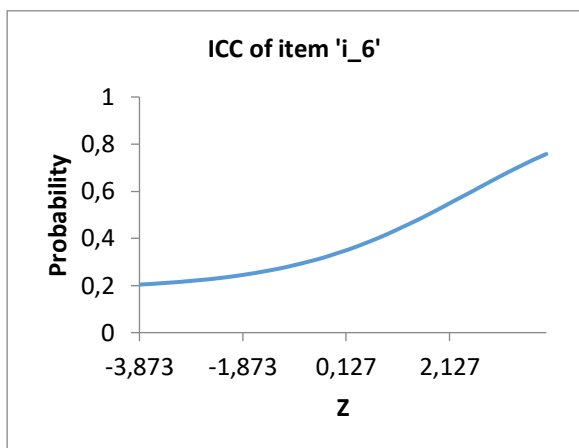
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

O desenho que Bruno deve fazer é



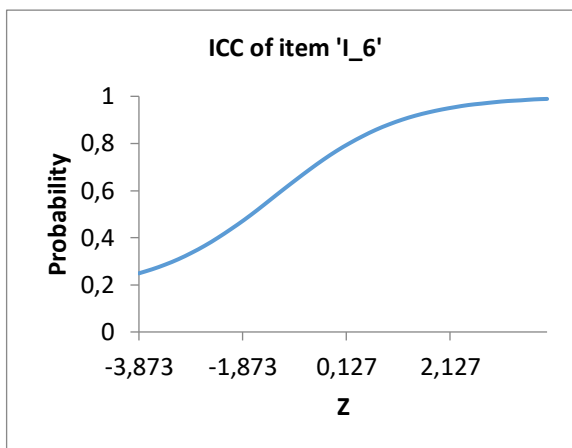
Fonte: INEP

Gráfico 16: CCI 6 – 3° ACB



Fonte: eirt (excel).

Gráfico 17: CCI 6 – 3° AGR

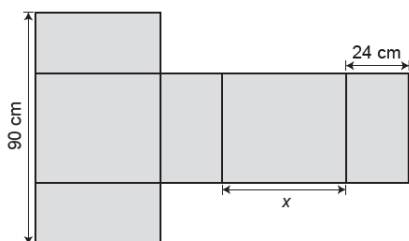


Fonte: eirt (excel).

O item 6 também teve valores aceitáveis para as duas turmas quanto ao parâmetro  $c$ , o acerto ao acaso, ambos menores que 20%. Porém o 3° AGR se saiu melhor do que o 3° ACB em relação aos outros dois parâmetros. O item foi muito difícil para o 3° ACB com  $b = 2,500$ , contra  $b = -1,208$  do 3° AGR, considerado fácil. Percebemos pelos gráficos das curvas características dos itens que, para o 3° AGR, se encontra mais à esquerda e possui angulação mais inclinada com  $a = 0,829$ , caracterizando assim, um bom item para esta segunda turma, contra  $a = 0,577$  do 3° ACB que ficou abaixo de 0,700 e por isso, não foi um bom item para discriminar os bons respondentes dos maus respondentes para esta turma.

### ITEM 7 – Habilidade H9 – Gabarito E

- 7) (ENEM) Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm. A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.

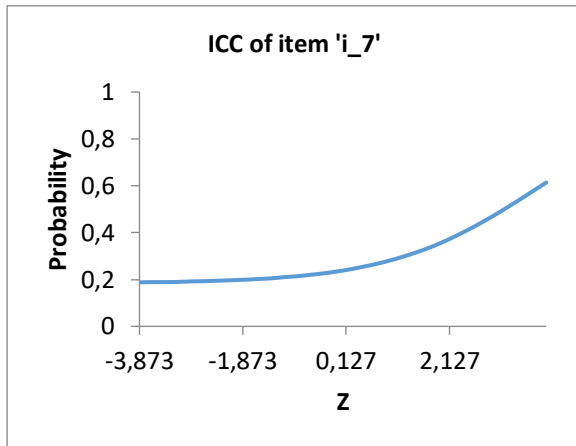


O maior valor possível para  $x$ , em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é

- a) 25.      b) 33.      c) 42.      d) 45.      e) 49.

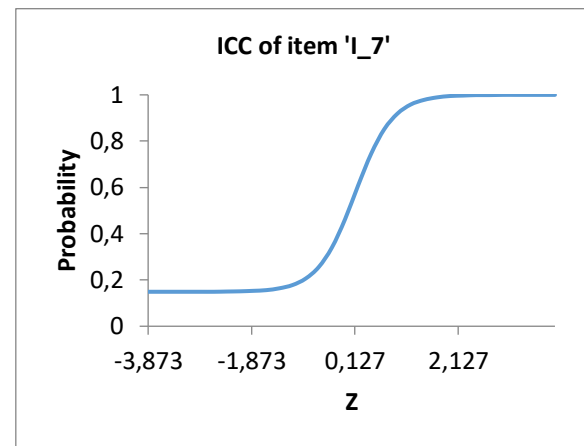
Fonte: INEP

Gráfico 18: CCI 7 – 3° ACB



Fonte: eirt (excel).

Gráfico 19: CCI 7 – 3° AGR

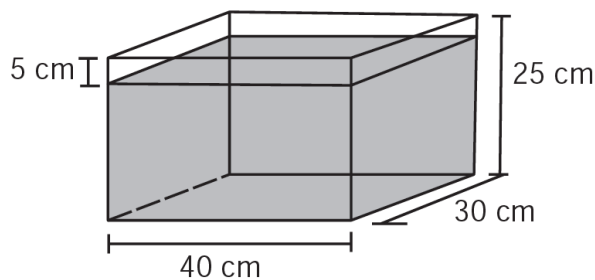


Fonte: eirt (excel).

Observando as curvas características, notamos que este foi um excelente item para o 3° AGR em relação aos parâmetros  $a = 2,751$ , e  $c = 149$ . O valor de  $b = 0,133$  caracteriza o item como muito difícil. Para o 3° ACB não foi um bom parâmetro sendo  $a = 0,697 < 0,700$ , ou seja, pouco discriminativo,  $b = 3,847$ , caracterizando o item como muito difícil e, apenas o parâmetro  $c = 0,184 < 20\%$  foi satisfatório.

### ITEM 8 – Habilidade H8 – Gabarito E

- 8) (ENEM) Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.

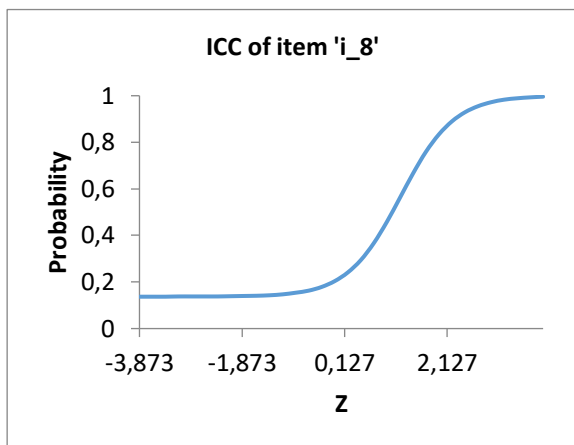


O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de  $2\,400\text{ cm}^3$ ?

- O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
- O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
- O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
- O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
- O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

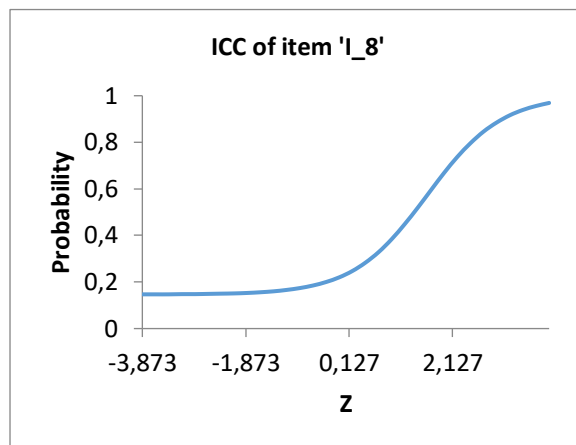
Fonte: INEP

Gráfico 20: CCI 8 – 3° ACB



Fonte: eirt (excel).

Gráfico 21: CCI 8 – 3° AGR

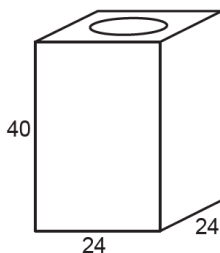


Fonte: eirt (excel).

O item 8 foi muito parecido para as duas turmas e foram considerados bons itens apesar da alta dificuldade, com parâmetros  $a = 1,930$ ,  $b = 1,224$  e  $c = 0,137$  para o 3° ACB e  $a = 1,387$ ,  $b = 1,641$  e  $c = 0,147$  para o 3° AGR, ou seja, boa discriminação, dificuldade alta e probabilidade de acerto ao acaso abaixo de 15%. Neste caso, devemos levar em consideração a habilidade H8, resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos sobre espaço e forma. Geralmente itens que envolvem cálculo de volume são considerados difíceis pelos alunos.

### ITEM 9 – Habilidade H8 – Gabarito D

- 9) (ENEM) Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.



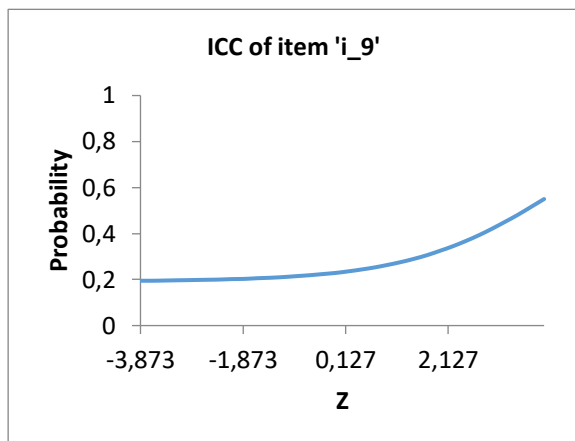
Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

- a) 14,4%
- b) 20,0%
- c) 32,0%
- d) 36,0%
- e) 64,0%

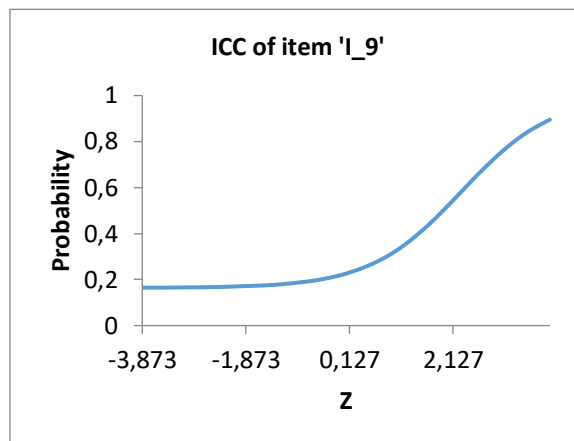
Fonte: INEP

Gráfico 22: CCI 9 – 3° ACB



Fonte: eirt (excel).

Gráfico 23: CCI 9 – 3° AGR



Fonte: eirt (excel).

O item 9 também teve resultados parecidos para as duas turmas, podemos compara os valores de  $a$  sendo 3° ACB com maior discriminação em relação ao 3° AGR cujos valores são iguais a 1,930 e 1,133, respectivamente. O parâmetro  $c = 0,192$  para o 3° ACB ainda está abaixo do limite de 20% e  $c = 0,164$  para o 3° AGR é um bom índice de “chute”. Os valores de  $b$  é que foram considerados anormais para o 3° ACB e muito difícil para o 3° AGR, nessa ordem,  $b = 4,332$  e  $b = 2,290$ . Quando o valor de  $b$  é maior que 4, normalmente se exclui o item da avaliação.

### ITEM 10 – Habilidade H8 – Gabarito C

10)(ENEM) É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

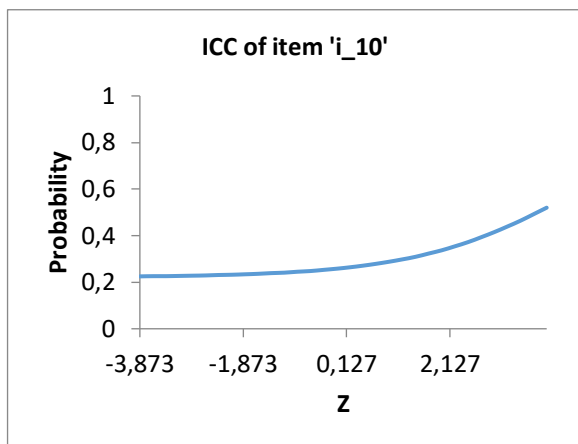
Ciência hoje das crianças, FNDE, Instituto Ciência Hoje, ano 19, n. 166, mar. de 1996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro. A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize  $\pi = 3$ )

- a) 20 ml
- b) 24 ml
- c) 100 ml
- d) 120 ml
- e) 600 ml

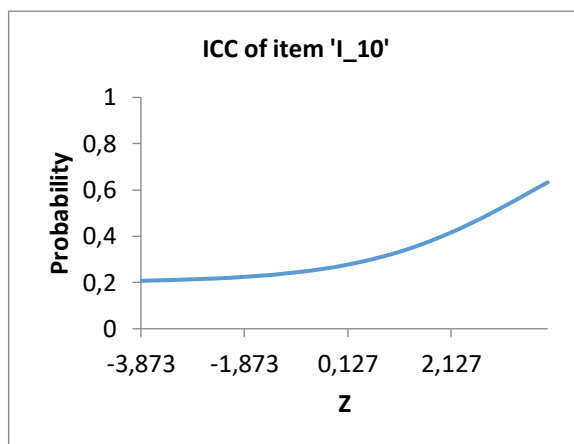
Fonte: INEP

Gráfico 24: CCI 10 – 3° ACB



Fonte: eirt (excel).

Gráfico 25: CCI 10 – 3° AGR



Fonte: eirt (excel).

O item 10 foi anormal para ambas as turmas, os valores de  $a$  foram menores que 0,7, os valores de  $c$ , acima de 20% e os valores de  $b$  próximos a 4. Em uma situação normal de avaliação, este item seria excluído. Deve-se reforçar que este item e o anterior não foram excluídos por que a finalidade é diagnosticar e não pontuar, por isso não consideramos os escores dos alunos nesta análise. Provavelmente o motivo não deve ter relação com a dificuldade do item, mas sim com o modelo trabalhado em sala de aula, que fez com que os alunos subestimassem esses dois últimos itens.

### ITEM 11 – Habilidade H9 – Gabarito A

11)(ENEM) Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

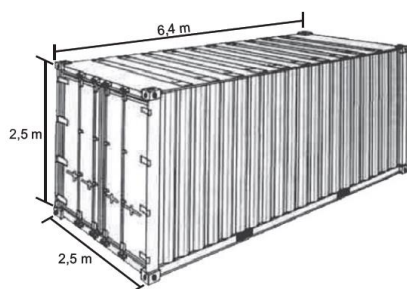


Figura 1



Figura 2

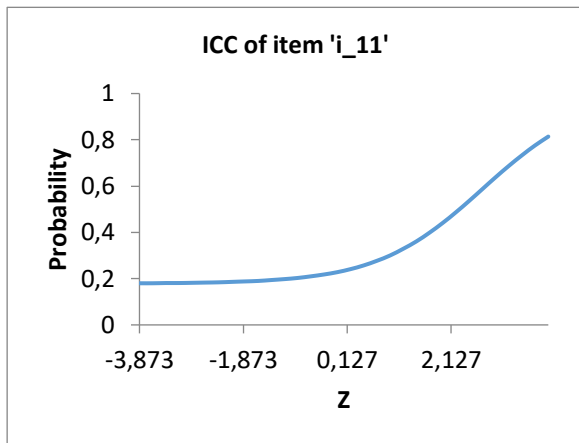
De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

- a) 12,5 m.      b) 17,5 m.      c) 25,0 m.      d) 22,5 m.      e) 32,5 m.

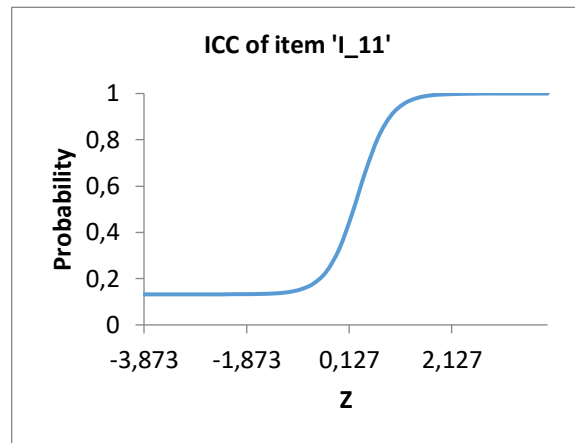
Fonte: INEP

Gráfico 26: CCI 11 – 3° ACB



Fonte: eirt (excel).

Gráfico 27: CCI 11 – 3° AGR



Fonte: eirt (excel).

O item 11 juntamente com o item 7, foram para o 3° AGR, os melhores de todo o teste. Os valores dos parâmetros são  $a = 3,290$  considerado excelente,  $b = 0,309$  considerado moderado e  $c = 0,132$  que foi o mais baixo índice de acerto ao acaso de todos os itens considerando as duas turmas. Para o 3° ACB, os valores são  $a = 0,976$  considerado bom,  $b = 2,742$  considerado muito difícil e  $c = 0,178$  considerado aceitável. Observando as curvas características dos itens 7 e 11 para o 3° AGR, percebemos com deve ser a caracterização de um item considerado muito bom.

### ITEM 12 – Habilidade H8 – Gabarito A

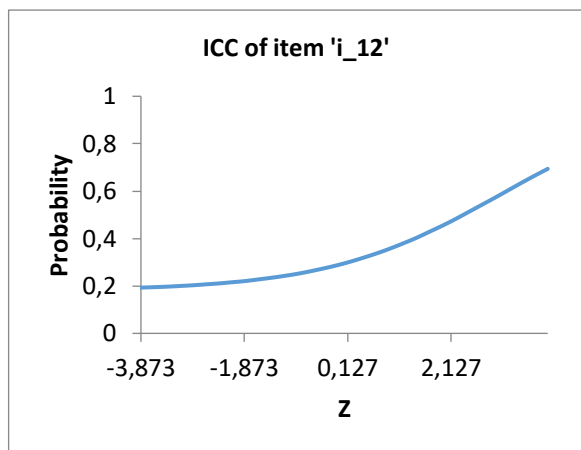
12)(ENEM) A insulina é utilizada no tratamento de pacientes com diabetes para o controle glicêmico. Para facilitar sua aplicação, foi desenvolvida uma “caneta” na qual pode ser inserido um refil contendo 3 mL de insulina, como mostra a imagem. Para controle das aplicações, definiu-se a unidade de insulina como 0,01 mL. Antes de cada aplicação, é necessário descartar 2 unidades de insulina, de forma a retirar possíveis bolhas de ar. A um paciente foram prescritas duas aplicações diárias: 10 unidades de insulina pela manhã e 10 à noite. Qual o número máximo de aplicações por refil que o paciente poderá utilizar com a dosagem prescrita?



- a) 25      b) 15      c) 13      d) 12      e) 8

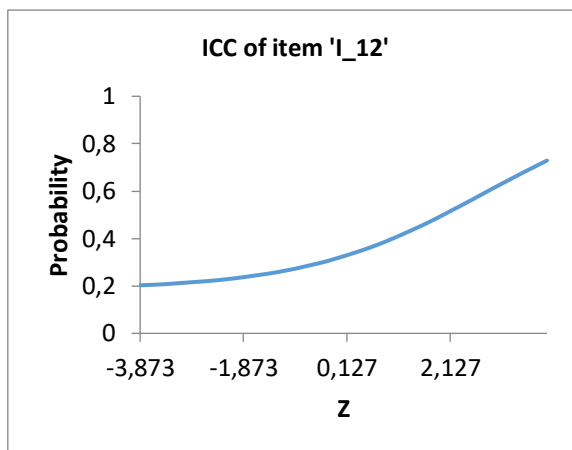
Fonte: INEP

Gráfico 28: CCI 12 – 3° ACB



Fonte: eirt (excel).

Gráfico 29: CCI 12 – 3° AGR



Fonte: eirt (excel).

Por fim, o item 12 também não foi dos melhores, dificuldade muito alta para as duas turmas, probabilidade de “chute” aceitável para as duas turmas e pouco discriminativo para as duas turmas. Este item completa o *hall* de itens com habilidade H8 que não deram resultados satisfatórios. Por curiosidade, os valores dos parâmetros foram para o 3° ACB e 3° AGR, respectivamente,  $a = 0,592$  e  $a = 0,577$  para a discriminação,  $b = 3,122$  e  $b = 2,798$  para a dificuldade e  $c = 0,180$  e  $c = 0,186$  para a probabilidade de acerto ao acaso.



## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Devemos admitir, que uma metodologia moderna por si só, não é a solução de todos os problemas da educação no Brasil, mas as abordagens feitas durante as aulas com uma metodologia diferente e mais interessante, é sem dúvida, de muita ajuda. Neste trabalho, tivemos problemas com a estrutura do laboratório de informática, com a carga horária muito baixa para a disciplina de matemática e principalmente de interesse dos alunos.

Enquanto os alunos de uma turma considerada por muitos colegas de trabalho como desinteressada e desmotivada, era levada toda semana ao laboratório de informática para aprender geometria espacial de forma diferente, outra turma considerada esforçada e mais motivada, não saiu da aula tradicional, com desenhos geométricos tridimensionais no quadro e usando fórmulas para fazer cálculos, que para a maioria dos alunos é chato, muito chato.

Apenas o item 10, cuja habilidade é a H8, teve os três parâmetros anormais. O caso do item 10 é importante para a reflexão sobre a escolha de metodologia. Escolher apenas a metodologia de uso do geogebra talvez não seja suficiente para essa habilidade.

As duas turmas tiveram desempenho semelhantes quanto a probabilidade de acerto ao acaso. Os itens 2, 6, 7, 9, 10 e 12 foram pouco discriminativos na turma do 3º ACB, ou seja, metade dos itens, enquanto que, no 3º AGR, apenas os itens 5, 10 e 12 não tiveram parâmetros ruins de discriminação, ou seja, 1/4 dos itens. O parâmetro dificuldade, foi extremamente alto em 9 dos 12 itens para o 3º ACB, equivalente a 75% dos itens, enquanto que, para o 3º AGR teve dificuldade alta em apenas três itens, equivalente a 25% desses itens. O grande diferencial, foram as habilidades H6 e H9, em que, o 3º AGR, teve um desempenho melhor. O bom desempenho na habilidade H6 deve-se ao uso dos movimentos dos elementos e a possibilidade de mudança de vistas dos sólidos. Os itens com habilidade H7 tiveram bons resultados no 3º AGR em três dos quatro itens com essa habilidade enquanto que no 3º ACB obteve bons resultados com essa habilidade apenas em um item, exatamente o item que foi ruim para a primeira turma. Portanto, uma turma desmotivada e desinteressada que obteve desempenho melhor em três das quatro

habilidades, comparada com a outra turma, mais participativa, esforçada e motivada nas aulas, é um indicativo de que o objetivo da metodologia foi alcançado.

Por fim, embora exista uma diferença de metodologia, tornando o ensino de geometria mais interessante ao se usar a tecnologia dos *softwares*, não devemos descartar os métodos e recursos que a educação oferece, como o uso de material concreto, uso de régua e compasso, o próprio livro didático, entre outros. O uso do laboratório de informática e o “fazer matemático” necessita de carga horária maior e estrutura melhor, para que se faça a diferença.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide, 2 ed. São Paulo : Blüncher, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (2000) *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília, MEC.

Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2).

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações / Luiz Roberto Dante. – São Paulo: Ática, 2010.

GIRALDO, Victor. Recursos computacionais no ensino de matemática / Victor Giraldo, Paulo Caetano e Francisco Mattos. – Rio de Janeiro: SBM, 2012.

IEZZI, Gelson. Matemática: ciência e aplicações, volume 2 : Ensino Médio / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périco e Nilze de Almeida. – 7. ed. – São Paulo : Saraiva, 2013.

MACÊDO, Ian Santana. **Facilitando o estudo da geometria espacial com o geogebra 3D – BA**, 2013, 127f. Dissertação (Mestrado em matemática) – Instituto de Matemática , Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013.

RABELO, Mauro. Avaliação Educacional: Fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro/ Mauro Rabelo. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SILVA, Rosivaldo Pereira. **Arquimedes e o método – AL**, 2015, 97f. Dissertação (Mestrado em matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2015.

SOUZA, Joamir Roberto de. Novo olhar matemática: 2 / Joamir Roberto de Souza. – 2. ed. – São Paulo : FTD, 2013.

SOUZA, Loana Araújo, **Uma proposta para o ensino da geometria espacial usando o geogebra 3D- PB**, 2014, 66f. Dissertação (Mestrado profissional em

matemática em rede nacional) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciência e Tecnologia, 2014.

<http://www.geogebra.org/> Acesso em: 09/03/2017

<https://sourceforge.net/projects/libirt/files/eirt/> Acesso em: 21/07/2017

<http://www.edocente.com.br/> Acesso em: 27/07/2017

<http://ogeogebra.com.br/site/> Acesso em: 04/05/2017

<https://www.youtube.com/watch?v=iipveZIL9IE&t=856s> Acesso em: 13/04/2017

## ANEXO





