UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

SCIENTIA AD SAPIENTIAM

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MATEMÁGICA EM SALA DE AULA: UMA PROPOSTA LÚDICA USANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Vagner Lopes de Almeida

Instituto de Matemática

Maceió, Novembro de 2017

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

VAGNER LOPES DE ALMEIDA

MATEMÁGICA EM SALA DE AULA: UMA PROPOSTA LÚDICA USANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

MACEIÓ
2017

VAGNER LOPES DE ALMEIDA

MATEMÁGICA EM SALA DE AULA: UMA PROPOSTA LÚDICA USANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas sob coordenação nacional da Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: *Prof^a. Dr^a. Viviane de Oliveira Santos.*

MACEIÓ

2017

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária Responsável: Janaina Xisto de Barros Lima

A447m Almeida, Vagner Lopes de.
Matemática em sala de aula : uma proposta lúdica usando a resolução de problemas / Vagner Lopes de Almeida. – 2017.
52 f. : il.

Orientadora: Viviane de Oliveira Santos.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 49.
Apêndices: f. 50-52.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Método de Polya. 3. Lúdico. 4. Mágica. I. Título.

CDU: 511:373.5

Folha de Aprovação

VAGNER LOPES DE ALMEIDA

MATEMÁGICA EM SALA DE AULA: UMA PROPOSTA LÚDICA USANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 25 de novembro de 2017.

Banca Examinadora:

Viviane de O. Santos

Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos- UFAL (Presidente)

Gregório Manoel da Silva Neto

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto - UFAL

Márcio Silva Santos

Prof. Dr. Márcio Silva Santos – UFPB

MACEIÓ - 2017

Agradecimentos

À minha esposa Suylan dos Santos, que me viu passar noites em claro e por está sempre ao meu lado.

Aos meus filhos Saulo Vagner e Sávio Henry que me fortalecem.

A minha sogra e sogro, pela dedicação e carinho com que sempre me trataram e pelo auxílio e cuidado com meus filhos.

A minha família, em especial a minha mãe, que sempre torceu por mim.

A todos os professores do PROFMAT, que contribuíram para que eu chegasse até aqui.

A todos colegas do PROFMAT e aos que de alguma maneira contribuiram com este trabalho.

Por fim, agradeço à professora Dr ª Viviane Oliveira, minha orientadora, pelo suporte, paciência, disposição em responder meus questionamentos e pelas contribuições e sugestões na realização deste trabalho.

"Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real".
(Nicolai Lobachevsky)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo despertar o interesse pelo estudo da matemática e contribuir para melhoria da aprendizagem em matemática. Usamos as etapas da resolução de problemas de Polya e o lúdico como ferramenta para motivar o gosto pela matemática. Essas ferramentas podem melhorar a participação e aproveitamento dos alunos em sala de aula, estimular o raciocínio matemático, a criatividade, a capacidade de resolver problemas, desenvolver a concentração e a socialização, aumentando as interações do indivíduo com outras pessoas. Selecionamos e descrevemos uma lista de mágicas, onde detalhamos os conteúdos e habilidades predominantes em cada mágica, mostrando a matemática por trás de cada truque. Além do raciocínio lógico, basicamente usamos apenas o conhecimento de álgebra básica e aritmética para justificar cada truque. Ao revelar o segredo de cada mágica fica fácil perceber que podemos trabalhar vários conteúdos matemáticos que podem auxiliar a aprendizagem.

Palavras - Chave: Matemágica. Método de Polya. Mágica. Truque.

Abstract

This work aims to awake interest in the study of mathematics and contribute to the improvement of learning in mathematics. We use the steps of problem solving of Polya and the ludic one as a tool to motivate the taste for mathematics. These tools can improve student participation and the students' achievement in the classroom, stimulate mathematical reasoning, creativity, ability to solve problems, develop concentration and socialization, increasing the individual's interactions with the other people. We select and describe a magic list, where we detail the contents and abilities predominant in each magic, showing the math behind each trick. In addition to logical reasoning, we basically use only the knowledge of basic algebra and arithmetic to justify every trick. By revealing the secret of each magic it is easy to see that we can work various mathematical contents that can aid learning.

Keywords: Mathematics. Polya of Method. Magic. Trick.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de quadros

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É notável que o “fracasso” em matemática está frequentemente relacionado com a falta de motivação que origina falta de dedicação e empenho à disciplina, que por sua vez gera insucessos repetidos. Podemos usar truques matemáticos para envolver os alunos e fazer com que eles fiquem mais motivados e ativos nas aulas. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática, (BRASIL, 1997, p.28),

> Conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. Dentre elas [. . .] temos os jogos como recursos que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução.

A escolha do tema teve por base a minha íntima relação com o ilusionismo, a qual gerou belos trabalhos, como o “livro matemágicas - a arte da matemática (ALMEIDA, 2014)" apresentações e palestras. Neste trabalho vamos expor uma lista de mágicas, tais mágicas serão tratadas como problemas matemáticos e tais problemas serão resolvidos usando as etapas da resolução de problemas de Polya.

De acordo com Polya (2006),

> Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes. O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possivel. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma *parcela razoável do trabalho*.

De acordo com o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil:

> [...] para que as crianças possam exercer suas capacidades de criar é imprescindível que haja riqueza e diversidade nas experiências que lhes são oferecidas nas instituições, sejam elas voltadas às brincadeiras ou à aprendizagem que ocorrem por meio de uma intervenção direta. (BRASIL, 1997, p. 27).

O objetivo é usar o lúdico e o método de resolução de problemas como ferramentas alternativas para auxiliar o processo ensino-aprendizagem da matemática, essas ferramentas, estimulam o convívio em grupo, desenvolvem o raciocínio e possibilita uma aprendizagem divertida. Além disso, tais atividades estimulam a imaginação e a resolução de problemas cotidianos. Podemos usar as matemágicas para motivar ou introduzir algum conteúdo, despertando nos alunos a curiosidade e a vontade de desvendar o truque e aprender a matemática que está por trás de cada truque. Relacionamos diferentes conteúdos e estratégias na solução de cada problema selecionado.

A metodologia utilizada nesta dissertação foi constituída de uma longa pesquisa de truques abordando vários conteúdos matemáticos e na reflexão sobre os conceitos matemáticos e as propriedades numéricas que estão na base de cada “mágica”.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: No capítulo 2 mostramos a evolução da mágica e da matemágica, casos de professores que trabalham com truques matemáticos para motivar o gosto pela matemática. No capítulo 3 vamos expor as etapas do método de Polya para a resolução de um problema, veremos como as indagações do método de Polya pode ajudar a explicar cada truque matemágico e diante disso no capítulo 4 temos uma lista de mágicas que são explicadas com base no método de Polya. No apêndice mostramos algumas propriedades e como construir um quadrado mágico 3x3 e 4x4.

2 Evolução da Mágica e da Matemágica

Atualmente sabemos que não existe nada de sobrenatural na arte mágica, o ilusionista, isto é, o mágico usa seu conhecimento para entreter o público e sem dúvidas a arte mágica é uma prática que encanta o público, seja ele adulto ou infantil. Para Garat et al. (2005),

> A mágica, diferente da magia, misticismo, superstições populares, crenças e cultos religiosos, se apresenta como truque, farsa e entretenimento. A tafera dos grandes mágicos é seduzir, distrair e iludir o público. É através da surpresa provocada pelo jogo lúdico que o mágico conquista a atenção do indivíduo e o faz desejar entender o que aparenta ser inexplicável. Não se sabe precisamente quando a mágica surgiu, há indícios da presença da arte mágica desde a antiguidade, sendo cultivada pelos caldeus, egípcios, gregos, judeus, romanos e também por povos do Oriente, como China e Índia. No Egito, por exemplo, acreditava-se na mágica como força defensiva para as adversidades da vida e que ela estava associada à arte de adivinhar.

Não há como negar o fascínio que a mágica exerce sobre a mente humana, o de desejo de querer entender e explicar as coisas a nossa volta é algo natural. De acordo com Furtado (2008, p.20), (apud Oliveita et al, 2013, p.655),

> É isso que garante o encanto sobre a mágica realizada. O espectador sabe que não há nada de sobrenatural na magia realizada, mas precisa pensar muito para descobrir como ela foi realizada. Os mágicos mais famosos usam artifícios e efeitos mais elaborados, e que algumas vezes fogem ao raciocínio comum. Trata-se de uma arte alicerçada primordialmente na sua habilidade e na sua capacidade de persuadir. Seus efeitos são como um quebra-cabeça, que além de alegrar e divertir torna-se um desafio à inteligência dos espectadores, que não conseguem explicações lógicas para aquilo que vêem. (FURTADO, 2008, p.20).

Já a arte de usar propriedades matemáticas para fascinar o público com truques, desafios, adivinhações ou previsões, vamos chamar de *matemágicas*. De acordo com Bastos (2015, p.18),

> Wade H. Sherard, no seu livro 'Mathemagic in the classroom', refere que, historicamente, se pode considerar que a magia matemática teve origem no século XVII. Vários truques aritméticos estão incluídos em 'Problèmes plaisons et délectables' de Claude Gaspar Bachet publicado em 1612 e 1624 e em 'Créations mathématiques et physiques' publicado em 1694, em Paris. Alguns dos problemas apresentados por Bachet foram baseados em escritos de matemáticos anteriores como Alcuin, Luca Pacioli di Burgo,Tartaglia e Cardano. No manuscrito 'De Viribus Quantitatis', de Luca Pacioli, (1490), é descrito pela primeira vez um truque relacionado com matemática. Girolamo Cardano, no seu livro 'Subtilitate rerum', (1551), apresentou pela primeira vez a descrição de um truque de cartas. No entanto, o interesse atual pela magia matemática pode ser atribuído aos escritos de W W Rouse Ball (1850-1925) e Martin Gardner (1914-2010), grandes impulsionadores da matemática recreativa. Ball foi professor no Trinity College em Cambrige e publicou o seu clássico 'Mathematical Recreations & Essays', em 1892, que se tornou uma fonte de material

> em magia matemática. Martin Gardner, falecido em 2010, ficou conhecido pela publicação dos artigos ‘Mathematical Games’ na revista Scientif American entre 1957 e 1981. Muitos desses artigos eram dedicados à magia matemática. O seu livro ‘Mathematics, Magic and Mistery’, publicado pela primeira vez em 1956, é talvez a primeira etapa da atual magia matemática. Muitos dos seus livros publicados posteriormente e relacionados com a matemática recreativa também contêm muito material relacionado com magia matemática. A literatura de magia matemática cresceu rapidamente e hoje inclui uma grande variedade de truques desde os mais simples até aos mais elaborados. Podemos encontrá-los, por exemplo em ‘Mathemagic in the Classroom’ (1983 e 1998) de Wade Sherard, ‘Magia Matemática’ (2012) de Miguel Capó Dolz, ‘Xavier e a Magia Matemática’ (2010) de Paulo Afonso e ‘A Magia da Matemática’ (2010) de Ilydio Pereira de Sá. Existem também muitas publicações onde podemos encontrar diversos desafios matemáticos, atividades lúdicas, curiosidades numéricas, quebra-cabeças, etc.

Atualmente no Brasil, (SAMPAIO; MALAGUTTI, 2006) Pedro Luiz Aparecido Malagutti e João Carlos Vieira Sampaio, colaboram com a divulgação científica em Matemática, ministrando palestras e oficinais sobre matemágicas e seus mistérios.

De acordo com (iG São Paulo, 2017) [1], foi noticiado o caso da professora Leila. A professora Leila Graziela de Mendonça e Castro, que leciona na Escola Estadual Professor Djalma Octaviano, de Campinas, realmente decidiu levar os truques de mágica e ilusionismo para implementar suas aulas de matemática para alunos do ensino médio, essa abordagem ajudou a elevar notas de alunos do ensino médio.

Figura 1 – Caso da Professora Leila

Divulgação/Escola Estadual Djalma Octaviano

Cercada por estudantes e por colega, a professora Leila Graziela segura carta de baralho usada em uma de suas aulas

Fonte: <http://ultimosegundo.ig.com.br/educacao/2017-04-04/matematica-magica.html>

[1] (Em: <http://ultimosegundo.ig.com.br/educacao/2017-04-04/matematica-magica.html>. Acesso em: 07 outubro 2017.)

Num passe de mágica, uma professora da rede estadual de São Paulo conseguiu superar um dos maiores desafios enfrentados em salas de aula Brasil afora: ela passou a fascinar e a receber a atenção de seus alunos, mesmo lecionando uma disciplina considerada difícil para a maioria a tão temida matemática.

É notável que para muitos alunos a matemática é considerada uma ciência complexa, que a maioria dos alunos tanto do ensino fundamental, como do médio apresentam dificuldades. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN 1997, p. 20) temos que "[...] é importante destacar que a matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação".

Como veremos, as atividades lúdicas desse trabalho estimula o raciocínio e a imaginação, temos então uma alternativa para estimular a confiança e a aprendizagem dos alunos. De acordo com Oliveira (2007, p.5)

> Ensinar Matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Nós, como educadores matemáticos, devemos procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, a concentração, estimulando a socialização e aumentando as interações do indivíduo com outras pessoas.

Além disso, pelo dicionário Aurélio (2001, p.465), lúdico é um adjetivo, relativo a jogo, brinquedos e divertimentos. Conforme o psicanalista inglês Donald Winnicott (1975, p.80) "É no brincar, e somente no brincar, que o indivíduo, criança ou adulto pode ser criativo e utilizar sua personalidade integral: e é somente sendo criativo que o indivíduo descobre o eu (self)"

Portanto, um professor que estimula seus alunos em sala de aula se torna uma peça chave no ensino-aprendizagem, proporcionando formas diferenciadas de conhecimento e tornando o aluno mais independente, isso quer dizer que o professor passa a ser um mediador do conhecimento, tendo um papel de auxiliador. Veremos como podemos usar as estratégias de Polya na resolução de problemas.

3 O Método da Resolução de Problemas

Notaremos que no processo de resolução de problemas é preciso compreender, estabelecer um plano, executar um plano e fazer a verificação. Tal processo pode auxiliar a construção do conhecimento matemático que permite resolver problemas, tendo o professor como mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento.

Polya desenvolveu algumas estratégias que hoje julgamos fundamentais para a resolução de problemas, tais estratégias nos auxilia no processo de resolução de vários problemas matemáticos. A resolução de problemas é feita em quatro fases, de acordo com Polya (2006, p.4).

> Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a idéia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

Segundo Polya (2006, p.4),

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. [. . .] Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os [. . .] O professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar.

De acordo com Polya (2006), entre os vários tipos de problemas, temos os problemas de determinação e os de demonstração. Neste contexto notaremos que as mágicas aqui expostas serão nada mais do que problemas de determinação ou de demonstração. Conforme Polya (2006, p.142-143),

> O objetivo de um ‘problema de determinação’ é encontrar um certo objeto, a incógnita do problema. A incógnita é aquilo que se procura ou de que necessita. Para resolver um ‘problema de determinação’ é preciso conhecer, com grande exatidão, as suas partes principais, a incógnita, os dados e a condicionante. Por outro lado, o objetivo de um ‘problema de demonstração’ é mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou, então, que é falsa. Se o ‘problema de demonstração’ for um problema matemático comum, suas partes principais serão a hipótese e a conclusão do teorema que tiver de ser provado ou refutado.

Quadro 1 – Resumo do Método de Polya

	COMPREENSÃO DO PROBLEMA
Primeiro É preciso compreender o problema	Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é acondicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separa asdiversas partes da condicionante. É possível anotá-las?
	ESTABELECIMENTO DE UM PLANO
Segundo Encontra a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para a resolução.	Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! Procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá- lo ainda de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Ou um que seja mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixa a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
	EXECUÇÃO DO PLANO
Terceiro Executa o seu plano.	Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
	RETROSPECTO
Quarto Examine a solução obtida.	É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte: POLYA, 2006.

4 Mágicas em Sala de Aula

No presente capítulo selecionamos algumas mágicas envolvendo vários conteúdos matemáticos. Iniciamos com as mágicas que envolvem expressões algébricas. Seguindo os livros didáticos, podemos trabalhar essas mágicas a partir do sétimo ano. Usando as mágicas que envolvem expressões algébricas, podemos trabalhar, execitar e introduzir conteúdos que envolvem expressões algébricas, como equação do primeiro grau, sistemas de equações e algébra básica dos monômios e polinômios. Em seguida temos as mágicas que envolvem os múltiplos de nove. De acordo com os livros didáticos a partir do sexto ano podemos trabalhar assuntos como múltiplos, divisores, divisibilidade e o sistema de numeração decimal. Logo adiante, temos as mágicas que envolvem propriedades aritméticas que podem ser usadas a partir do sexto ano como motivação e introdução de conteúdos que envolvem propriedades numéricas, como comutatividade e associatividade. Consequentemente temos as mágicas que envolvem mudança de base, em especial a base 2 e podemos trabalhar conteúdos como potenciação, algoritmo da divisão e mostrar que o sistema de numeração vai além do sistema decimal. Por fim, temos uma miscelânea de truques que são um pouco mais desafiantes e podem ser usados como desafios. Analisando a maturidade da turma, podemos saber o nível adequado de abordagem para cada mágica, se é necessário ou não a demonstração de todos os resultados.

4.1 Mágicas envolvendo expressões algébricas

A álgebra é uma linguagem fundamental da matemática, pois a partir dela, foi possível a introdução de símbolos mais precisos para operar com números e representar situações genéricas. Segundo Campagner (2009, p.3)

> Para representar os problemas da vida real em linguagem matemática, muitas vezes utilizamos letras que substituem incógnitas (os valores que você não conhece, e quer descobrir). É aí que entram os famosos x, y, z, etc. O ramo da matemática que utiliza símbolos (normalmente letras do nosso alfabeto latino e do grego) para a resolução de problemas é chamado álgebra.

No segundo passo da resolução de problemas de Polya (2006, pp.7-8), temos que criar um plano. Polya elaborou alguns questionamentos que podem nos auxiliar na resolução: Algum problema correlato? Semelhante? É possível reformular o problema? Algum problema semelhante mais genérico? ou mais espefícifo? É possível utilizar seu método? Seu resultado? Nesse sentido as mágicas que envolvem expressões algébricas são semelhantes e basicamente o método usado na explicação dessas mágicas é o mesmo. Na compreensão do problema, das mágicas envolvendo expressões algébricas, temos os seguintes questionamentos para auxiliar na compreensão: Qual é a incógnita? Quais os dados? Existe alguma notação adequada?

Notaremos ao longo das explicações de cada mágica, que necessariamente não precisamos usar todos os questionamentos de Polya para ter sucesso na resolução de cada mágica. A lista de mágicas que envolvem expressões algébricas podem ser trabalhadas a partir do sétimo ano.

Mágica - Um número pensado

Pense em um número e multiplique ele por 3. Some 6 ao resultado, divida o resultado por 3 e tire o número pensado. Não importa o número pensado, magicamente ao final teremos 2 como resultado.

Explicação:

De acordo com Polya, podemos classificar essa mágica, como um problema de demonstração, pois devemos mostrar que seguindo as etapas do truque ao final teremos 2 como resultado. Seguindo as etapas e questionamentos elaborados por Polya, temos:

Questionamentos para compreensão: Qual é a incógnita? Quais os dados? Existe alguma notação adequada?

Questionamento para estabelecer o plano: Existe um problema mais específico? Algum problema correlato? Semelhante? É possível reformular o problema? É possível resolver parte do problema? É possivel variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles? Todos os dados foram usados? Todas as condições?

Algo mais especifíco e natural seria testar alguns números, por exemplo, suponha que o número pensado tenha sido 5, temos, $(3.5+6) \div 3 = 7$ e $7-5=2$. Esse teste pode auxiliar a compreensão do problema e o estabelecimento do plano.

Execução do plano:

Sendo x o número pensado, temos, $\dfrac{3x+6}{3} - x = \dfrac{3x}{3} + \dfrac{6}{3} - x = x+2-x = 2.$

Questionamentos para retrospectiva: É possível verificar o resultado ou argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Podemos usar outras propriedades, por exemplo, temos que $(3x+6) = 3.(x+2)$ e ao dividir essa expressão por 3, temos, $(x+2)$ e assim $(x+2)-x=2$.

Sugestões e Observações:

Essa é uma boa mágica para introduzir conteúdos com álgebra básica: expressões algébricas e equações do primeiro grau.

Mágica - Enquanto você pensa em pizza, descubro sua idade

Considerando o ano atual 2017, faça as seguintes contas:

1) Primeiro de tudo, pense no número de vezes por semana que você sente vontade de comer pizza (tente pensar em mais de uma vez, mas menos que dez);

2) Multiplique esse número por 2;

3) Some 5;

4) Multiplique o resultado por 50;

5) Se você já fez aniversário este ano, some 1767, se ainda não fez, some 1 766;

6) Agora, subtraia os quatro dígitos do ano que você nasceu do resultado que obteve.

Você deve ter obtido um resultado de três dígitos, o primeiro dígito desse resultado é o número de vezes que você pensou em comer pizza na semana e os dois últimos dígitos representam sua idade.

Explicação:

Essa mágica pode ser classificada como um problema de demonstração. Pois devemos mostrar que seguindo as etapas da mágica ao final devemos ter um número de três dígitos, onde o primeiro dígito corresponde o número de vezes que a pessoa pensou em pizza e os dois dígitos finais representam a idade. Seguindo o roteiro de Polya, algumas perguntas que nos auxiliam na demonstração desse resultado, são:

Compreensão do problema: Qual a incógnita? Existe alguma condição? Alguma notação adequada?

Estabelecimento do plano: Conhecemos algum problema semelhante? A mágica do número pensado pode nos auxiliar? Podemos usar seu método? Existe algum problema mais específico?

Para facilitar a compreensão, vamos analisar algo mais espefícifo, por exemplo, considere uma pessoa que tenha nascido no ano 1 984 e que ainda não fez aniversário em 2 017, supondo que o número de vezes que ela pensa em pizza seja 6, teremos:

$(6.2+5).50+1766-1984 = 6\mathbf{32} = 6.100+32 = 600+32$. Onde o dígito das centenas é o número de vezes que a pessoa pensa em pizza na semana e os dois últimos dígitos é a idade, nesse caso 32 anos.

Execução do plano:

De modo geral, sendo x o número de vezes que a pessoa pensou em pizza, de acordo com o anunciado, temos:

$(2x+5).50 = 100x+250$. Supondo que o espectador tenha feito aniversário em 2017, temos:

$100x+250+1767 = 100x+2017$. Aplicando o passo 6), temos,

$100x+2017-1984 = 100x+33$.

Caso o espectador, não tivesse feito aniversário em 2017, teríamos,

$100x+250+1766 = 100x+2016$.

Aplicando o passo 6), teríamos, $100x+2016-1984 = 100x+32$.

Retrospectiva: É possível verificar o resultado ou argumento?

Basicamente, temos que se o ano atual é 2017, para achar a idade da pessoa fazemos:

i) $2017-1984$ (ano de nascimento) $= 33$, caso a pessoa tenha feito aniversário em 2017.

ii) $2016-1984$ (ano de nascimento) $= 32$, caso ela ainda não tenha feito aniversário em 2017.

Sugestões e Observações:

Além de equações e álgebra básica, ficar atento a condicionante espectador ter feito aniversário ou não no ano atual é fundamental para a mágica ter o resultado desejado.

Mágica - Descobrindo dois números - Peça de Dominó

Peça a um amigo que escolha uma peça qualquer de um dominó em segredo. Agora peça-lhe que multiplique um dos números dessa peça por 5, some 7 ao resultado, em seguida multiplique o resultado por 2, adicione a esse resultado o outro número da peça de dominó e que finalmente tire 12 do resultado. Agora revelando o resultado final, saberemos qual foi a peça de dominó escolhida.

Explicação:

Temos que dado o resultado final, devemos determinar dois números. Podemos considerar essa mágica como um problema de determinação. De fato, seguindo o roteiro de Polya, temos:

Compreensão do problema: Qual é a incógnita? Quais os dados? Qual é a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Existe alguma notação adequada?

Nesse caso, temos duas incógnitas e temos uma notação adequada.

Estabelecimento do plano: Existe algum problema semelhante? Algum problema que possa ser útil? Algum problema correlato que já foi resolvido antes? É possível utilizar seu resultado? É possível utilizar seu método?

Vamos usar o mesmo método das mágicas anteriores, isto é, já conhecemos problemas semelhantes.

Execução do plano:

De acordo com Polya (2006) podemos classificar essa mágica como um problema de determinação. De fato, sendo x e y os números da peça de dominó, isto é, $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $x \leq 6$ e $y \leq 6$, queremos determinar x e y, temos:

$(5x+7).2+y-12 = 10x+14+y-12 = 10x+y+2$. Supondo que o resultado final seja 25, temos, $10x+y+2 = 25$, assim, $10x+y = 23 = 10.2+3$, assim, $x = 2$ e $y = 3$.

Retrospectiva: É possível chegar a conclusão por um caminho diferente?

Temos a condição $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $x \leq 6$ e $y \leq 6$. Fazendo uma retrospectiva do problema, temos que x representa a quantidade de dezenas e y a quantidade de unidades. Portanto ao usar esse roteiro para descobrir dois números, temos que para o truque funcionar, x e y são naturais tais que, $x \leq 9$ e $y \leq 9$. Outra possibilidade é usar o algoritmo da divisão, isto é, dado $10x+y = 23$, temos que x é o quociente da divisão de 23 por 10 e y é o resto.

Sugestões e Observações:

Podemos trabalhar conteúdos como: expressões algébricas, equações do primeiro grau, sistema de numeração decimal e o algoritmo da divisão. É notável que, matematicamente, a mágica pode ser feita de maneira mais simples, mas o número de operações ajuda o mágico a iludir os espectadores. O professor como mediador pode pedir aos alunos que criem outras mágicas a partir desse exemplo.

Mágica - Descobrindo o número de telefone

Supondo que um número de telefone seja constituído de 8 dígitos, o mágico pede a um espectador que faça as seguintes ações:

1) Pegue os 4 primeiros dígitos de seu telefone e multiplique por 80;

2) Some 1 ao resultado;

3) Multiplique o resultado por 250;

4) Agora, some os últimos 4 dígitos do número do seu telefone;

5) Agora, tire 250 desse resultado;

6) Por fim, some novamente os últimos 4 dígitos do número do seu telefone ao resultado.

O mágico então pergunta ao espectador qual foi o resultado. Em segredo, o mágico divide o resultado por 2, onde a divisão corresponde ao número de telefone do espectador.

Explicação:

Temos um problema de determinação, pois de acordo com o enunciado, temos que determinar o número de telefone do espectador.

Compreensão do problema: Quais são as incógnitas? Quais são os dados? Qual a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Alguma notação adequada?

Como incógnitas, temos dois números, os 4 primeiros dígitos do telefone e os 4 últimos.

Estabelecimento do plano: Já vimos o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhecemos algum problema correlato? É possível usar seu método? Conhecemos algum problema que possa ser útil?

Vamos usar o mesmo método que usamos nas mágicas anteriores, isto é, já conhecemos problemas semelhantes que basicamente recai na solução de uma equação.

Execução do plano:

As mágicas anteriores são ligeiramente semelhantes a essa, então vamos usar o mesmo método e ideias na execução do plano.

Sendo x o número formado pelos primeiros 4 dígitos do telefone e y o número formado pelos 4 últimos, temos,

$(80x+1).250+y-250+y = 20000x+250+2y-250 = 20000x+2y = 2.(10000x+y)$, assim dividindo por 2, teremos $10000x+y$.

Retrospectiva:

Se o número do telefone for 9875 6652, temos,

$10000.(9875)+6652 = 9875\ 0000+6652 = 9875\ 6652.$

Sugestões e Observações:

Assim como na mágica anterior, podemos trabalhar conteúdos como: expressões algébricas, equações do primeiro grau, sistema de numeração decimal e o algoritmo da divisão.

4.2 Mágicas envolvendo múltiplos de nove

Mágica - O Dígito Oculto

O mágico pede a um espectador que pegue um número com 5 algarismos diferentes e some esses algarismos. Em seguida, subtraia a soma do número original. Oculte um dos algarismos desse resultado e finalmente o mágico pede ao espectador que informe a soma dos algarismos restantes. Sabendo a soma dos algarismos restantes, o mágico revela qual foi o dígito ocultado pelo espectador.

Explicação:

Estamos diante de um problema de determinação, pois devemos determinar o dígito oculto, sabendo a soma dos algarismos restantes.

Compreensão do problema: Quais os dados? Quais as condições? Qual a incógnita?

Pelo enunciado os cinco algarismos são distintos e devemos somar os algarismos. Conhecemos alguma notação adequada?

Estabelecimento do plano: Conhecemos algum problema semelhante? Algo mais específico?

Supondo por exemplo que o número de cinco algarismo seja 24 567, temos,

$24\ 567 = 2.10000+4.1000+5.100+6.10+7 = 2.10^4+4.10^3+5.10^2+6.10^1+7,$ seguindo o enunciado, devemos fazer, $24\ 567-(2+4+5+6+7) = 24\ 567-24 = 24\ 543.$ Suponha que o espectador oculte o dígito 5, então o espectador deve revelar ao mágico o resultado $(2+4+4+3) = 13.$

E ao saber que o resultado é 13, o mágico revela que o algarismo oculto foi o 5.

Execução do plano:

Suponha N sendo um número de 5 dígitos, isto é,

$N = abcde = 10^4.a + 10^3.b + 10^2.c + 10^1.d + e$. Então,

$10^4.a + 10^3.b + 10^2.c + 10^1.d + e - (a + b + c + d + e) =$

$= (10^4 - 1).a + (10^3 - 1).b + (10^2 - 1).c + (10 - 1).d = 9999.a + 999.b + 99.c + 9.d$, isto é, temos como resultado um múltiplo de 9. Sabemos que um número natural é divisível por 9, se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 9. Na nossa suposição, o espectador revelou o resultado 13, como a soma deve ser um múltiplo de 9, temos que o dígito oculto é 5, pois 5 + 13 = 18.

Retrospectiva:

De modo mais geral, seja A um número natural formado pelos algarismos $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

Se $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, então, $(A - S)$ é um múltiplo de 9.

A demonstração do resultado utiliza a representação decimal do número A, isto é,

$A = 10^{n-1}.a_1 + 10^{n-2}.a_2 + \cdots + 10.a_{n-1} + a_n$ e $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Então,

$A - S = (10^{n-1} - 1).a_1 + (10^{n-2} - 1).a_2 + \cdots + 9.a_{n-1}$, isto é,

$A - S$ é um múltiplo de 9.

Sugestões e Observações:

A utilização da notação facilitou a explicação da mágica, além disso, podemos introduzir conteúdos como: divisibilidade, sistema de numeração decimal e expressão algébrica.

Mágica - O Número 1089

Faça as seguintes contas:

$1^\circ)$ Pegue um número de três dígitos distintos e não nulos;

$2^\circ)$ Inverta a ordem dos dígitos desse número, por exemplo, se o número for 357, no $2^\circ)$ passo teremos 753.

$3^\circ)$ Fazer a diferença entre o maior e o menor dos números dos passos $1^\circ)$ e $2^\circ)$, isto é, $753 - 357 = 396$.

$4^\circ)$ Inverter a ordem do resultado obtido em $3^\circ)$, isto é, 693.

$5^\circ)$ Finalmente, fazer a soma dos resultados dos passos $3^\circ)$ e $4^\circ)$,

ou seja, $396 + 693 = 1089$.

Explicação:

Podemos considerar essa mágica, um problema de demonstração, isto é, devemos provar que ao final sempre teremos como o resultado o número 1 089.

Compreensão do problema: Quais os dados? Quais as condições? Conhecemos alguma notação adequada?

O número é constituído de três dígitos e esses dígitos são não nulos. Podemos representar um número de três dígitos da seguinte forma: $ABC = 100A + 10B + C$, isto é, conhecemos uma notação adequada.

Estabelecimento do plano: Conhecemos algum problema correlato? Conhecemos algum problema que possa ser útil? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar seu método?

Esse problema nos faz lembrar o problema anterior, vamos usar seu método.

Execução do plano:

Sendo ABC um número de três dígitos distintos, temos,

$ABC = 100A + 10B + C$.

No $2^{\circ})$ passo teremos $CBA = 100C + 10B + A$, fazendo a diferença temos,

$100A + 10B + C - (100C + 10B + A) = 99A - 99C = 99.(A - C)$.

Assim no $3^{\circ})$ passo temos como resultado um número múltiplo de 99. Como A é no máximo 9 e C é no mínimo 1, então, $(A - C) \leq 8$.

Analisando as possibilidades temos:

99.1 = 99, 99.2 = 198, 99.3 = 297, 99.4 = 396, 99.5 = 495, 99.6 = 594, 99.7 = 693, 99.8 = 792.

Para qualquer uma dessas possibilidades, fazendo a soma dos resultados dos passos $3^{\circ})$ e $5^{\circ})$ sempre teremos como soma 1 089.

Sugestões e Observações:

O número ser de três dígitos distintos e não nulos é condição fundamental para o resultado desejado. Podemos trabalhar conteúdos como: Expressões algébricas, equações do primeiro grau, divisibilidade e sistema de numeração decimal.

Mágica - Bom de Ouvido

O mágico pega uma caixa de fósforos com 40 palitos e pede a um espectador que retire, às escondidas, um certo número de palitos; em seguida, que some os algarismos desse número e reponha essa quantidade de palitos. Depois de retirar os palitos e repor a soma, o espectador devolve a caixinha ao mágico que surpreendente balança a caixinha e acerta a quantidade de palitos que ficou nela.

Explicação:

Podemos considerar esse truque um problema de determinação, pois seguindo as etapas do truque ao final devemos determinar a quantidade de palitos que ficou na caixinha.

Compreensão do problema: Quais os dados? Quais as condições? Alguma notação adequada? Qual a incógnita?

O espectador retira um certo número de palitos e em seguida soma os algarismos desse número, então temos como parte do problema um número de dois dígitos e temos uma notação adequada para representar um número de dois dígitos.

Estabelecimento do plano: Conhecemos algum problema semelhante? Algo mais específíco?

Dado que a caixa tem 40 palitos, vamos supor que o espectador tire 25 palitos, assim a caixa ficará com $(40-25) = 15$ palitos, em seguida ele vai repor $(2+5) = 7$ palitos, assim a caixa ficará com $15+7 = 22$ palitos, isto é, se a caixa inicialmente tem 40 palitos e ao final tem 22 palitos é por que foi tirado dela 18 palitos.

Execução do plano:

Seja xy um número de dois algarismos que representa a quantidade de palitos retirados da caixa.

Observe que $xy = 10x+y$. Logo, temos:

$40-(10x+y)+(x+y) = 40-10x-y+x+y = 40-9x.$

Isto é, no fim a quantidade retirada é um múltiplo de 9.

Retrospectiva:

Figura 2 – Mágica Bom de Ouvido

Retirando		... sobram
0	→	40
9	→	31
18	→	22
27	→	13
36	→	4

Fonte: Explorando o ensino da matemática vol 2, 2004, p.80.

Agora é só treinar o ouvido, pois para cada quantidade retirada teremos um som diferente.

Sugestões e Observações:

Podemos trabalhar essa mágica ao introduzir assuntos como expressões numéricas, sistema de numeração decimal, equações do primeiro grau e múltiplos de um número.

Mágica - Um Número e Um Baralho

Usando um baralho comum, o mágico em segredo coloca a carta 5♦ (cinco de ouros) na décima posição, contando as cartas pelo topo do baralho. O mágico então pede a um espectador que ele escolha um número natural entre 10 e 20. Vamos supor que o espectador escolha o número 16, o mágico então passa 16 cartas para a mesa, contando uma a uma, após essa contagem o mágico pergunta qual é a soma de 1 + 6, o mágico então pega o montinho de 16 cartas e passa para a mesa 7 cartas, contando uma a uma e mostra a última carta que passou para a mesa que é magicamente o 5♦.

Explicação:

Podemos considerar esse truque um problema de demonstração, pois seguindo as etapas do truque devemos mostrar que ao final a última carta é 5 ♦.

Compreensão do problema: Quais os dados? Quais as condições? Alguma figura, desenho ou diagrama que possa ajudar?

Esse é um problema onde ter um baralho pode ajuda na compreensão.

Estabelecimento do plano: Conhecemos algum problema semelhante? É possível usar o método do problema anterior? Podemos usar algo mais espeficíco?

Pelo enunciado o espectador escolhe um número natural entre 10 e 20, isto é, temos como parte do problema que a escolha do espectador consiste em escolher um número de dois dígitos e já conhecemos um problema semelhante (mágica bom de ouvido).

Execução do plano:

Ao fazer a contagem das dez primeiras cartas para a mesa contando uma a uma, a décima carta (5♦) ficará no topo do baralho, ou seja será a primeira carta, o mágico então continua a contagem até o número 16 por exemplo, então temos a décima carta (5♦) + 6 cartas quaisquer em cima dela, então somando 1 + 6 = 7 e contando 7 cartas, uma a uma para a mesa desse montinho de 16 cartas, teremos que a sétima carta será (5♦).

Retrospectiva: É possível verificar o resultado ou argumento? É possível chegar ao resultado por um outro caminho?

Outra justificativa é que dado um número de dois digitos, fazendo a diferença entre o número dado e a soma dos digitos teremos um múltiplo de 9, pois, sendo o número da forma $xy = 10x + y$, temos, $10x + y - (x + y) = 9x$, como o número escolhido pertence ao intervalo $]10;20[$ e sabemos que tal número é natural, então $x = 1$, assim, a diferença entre o número de dois dígitos e a soma dos dígitos nesse caso é exatamente 9, então ao fazer a contagem das 16 cartas, passando uma a uma para a mesa e em seguinda pegando as 7 primeiras cartas desse montinho de 16 cartas vamos notar que a carta do fundo desse monte de 7 cartas é justamente (5♦) e fazendo a contagem dessas 7 cartas para a mesa, contando uma a uma, o (5♦) será a carta do topo, isto é, (5♦) será a primeira carta o que explica o truque.

Sugestões e Observações:

Assim como na mágica anterior podemos trabalhar assuntos como expressões numéricas, sistema de numeração decimal, múltiplos de um número e o raciocínio lógico.

4.3 Mágicas Aritméticas

Podemos usar a lista de mágicas aritméticas para trabalhar assuntos como divisibilidade, múltiplos, sistema de numeração decimal, propriedades numéricas, números primos, fatoração e expressões algébricas.

Mágica - Números da Sorte

Escolha um dos números do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Vamos supor que o número escolhido seja 4, assim o mágico pede ao espectador que multiplique 12345679 por 36 e magicamente teremos: $12\ 345\ 679 \times 36 = 444\ 444\ 444$. Agora escolha um número de dois dígitos, vamos supor que o número escolhido seja 27, então o mágico pede ao espectador que faça o produto entre 3 367 e 81 e teremos: $3\ 367 \times 81 = 27\ 27\ 27$.

Explicação:

Estamos diante de um problema de determinação, pois conhecendo o número escolhido podemos determinar qual é o número que deve ser multiplicado por 12345679 e qual número deve ser multiplicado por 3367.

Compreensão do problema: Quais os dados? Qual a pergunta? Qual o objetivo?

Temos dois problemas, um envolvendo o número 12345679 e outro envolvendo o número 3367. Pelo enunciado o espectador inicia escolhendo um número natural positivo menor que 10. Chamando de N esse número natural, o espectador deve fazer $12345679 \times y = NNN\ NNN\ NNN$, onde o mágido deve determinar o valor de y. Na segunda parte da mágica o espectador escolhe um número natural de dois dígitos, isto é, um número da forma AB e faz $3367 \times z = AB\ AB\ AB$. Onde o mágico deve determinar o valor de z.

Estabelecimento do plano: Algum problema semelhante? Algo mais específico?

De acordo com o enunciado, temos:

$12\ 345\ 679 \times 36 = 444444444 \Rightarrow 12\ 345\ 679 \times 9 \times 4 = 444\ 444\ 444 = 4 \times 111\ 111\ 111$, assim, $12\ 345\ 679 \times 9 = 111\ 111\ 111$. Em relação a dezena da sorte, temos,

$3\ 367 \times 81 = 272727$, então, $3367 \times 3 \times 27 = 272727 = 270000 + 2700 + 27 =$

$= 27(10000 + 100 + 1) = 27.(10101)$, isto é,

$3367 \times 3 \times 27 = 27.(10101) \Rightarrow 3367 \times 3 = 10101$.

Execução do plano:

Sabemos que $12\ 345\ 679 \times 9 = 111\ 111\ 111$. Assim, o espectador escolhendo um número N, pedimos para que ele faça o produto $12\ 345\ 679 \times 9.N = NNN\ NNN\ NNN$. Onde $y = 9N$. Sabendo que $3\ 367 \times 3 = 10\ 101$ e sendo AB um número de dois dígitos, temos, $3\ 367.(3.AB) = 10\ 101.AB = AB\ AB\ AB$, pois, $10\ 101.(AB) = (10\ 000 + 100 + 1).(10A + B) =$

$= 100\ 000A + 1\ 000A + 10A + 10\ 000B + 100B + B = ABABAB$. Logo, $z = 3.AB$.

Sugestões e Observações:

Podemos trabalhar assuntos como: sistema de numeração, expressões algébricas, fatoração, números primos e divisibilidade.

Mágica - Soma Surpresa

O mágico pede que um espectador escreva um número de 4 dígitos no quadro, o número escrito é 5436, vendo o número escrito, o mágico então escreve em segredo a seguinte previsão 25434. O mágico pede que o espectador escreva mais dois números de quatro dígitos abaixo do número 5436 e os números escritos são 2015 e 4591, o mágico então coloca mais dois números de 4 dígitos abaixo desses, a saber os números colocados pelo mágico são 7984 e 5408. O Mágico então pede que o espectador some as 5 parcelas e ao somar temos magicamente como resultado a previsão 25434.

Figura 3 – Mágica Soma Surpresa

$$\begin{array}{r} 5\,436 \\ 2\,015 \\ 4\,591 \\ 7\,984 \\ +\,5\,408 \\ \hline 25\,434 \end{array}$$

Fonte: AUTOR, 2017.

Explicação:

Podemos considerar esse truque um problema de determinação, pois dado o número inicial podemos determinar o resultado final correspondente à soma das cinco parcelas.

Compreensão do problema: Quais os dados? Qual o objetivo?

Temos cinco parcelas, ao somar essas parcelas obtemos a previsão do mágico. Ao ver o número inicial, como o mágico consegue prever o resultado da soma das cinco parcelas? sabemos que dessas cinco parcelas, duas foram colocadas pelo mágico. Como o mágico escolhe essas duas parcelas?

Estabelecimento do plano: Algum problema semelhante? Algo mais específico? É possível reformular o problema?

De acordo com o enunciado, o espectador escreve o número 5436 e ao ver esse número o mágico escreve a previsão 25434, em seguida são acrescentadas quatro parcelas, a saber 2015, 4591, 7984 e 5408. Temos que a diferença entre a previsão do mágico e o número inicialmente escrito pelo espectador é $(25434 - 5436) = 19998$. Temos então que $5436 + 19998 =$ previsão do mágico $= 25434$. Então o mágico deve fazer com que a soma das quatro parcelas acrescentadas ao número inicialmente escrito pelo espectador seja 19998.

Execução do plano:

1^a parcela = 5436, 2^a = 2015, 3^a = 4591, 4^a = 7984 e 5^a = 5408.

Basta notar que 2^a parcela + 4^a parcela = 9999 e $3^a + 5^a = 9999$.

Assim, $2015 + 4591 + 7984 + 5408 = 9999 + 9999 = 19998 = 20000 - 2$.

Logo, temos $5436 + 20000 - 2 = 25436 - 2 = 25434$.

Sugestões e Observações:

Um fator interessante dessa mágica é a rapidez com que o mágico escreve as duas parcelas. Podemos trabalhar a observação de padrões, propriedades aritméticas como associação, comutatividade e raciocínio lógico.

Mágica - Previsão Insistente

O Mágico dispõe de 9 cartões. Cada cartão tem um número pertencente ao conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ em uma face e na outra face, uma das figuras: quadrado, triângulo ou um círculo. Além disso a face oposta à numerada, tem uma das seguintes cores: vermelho, azul ou verde. Três pessoas são escolhidas e cada uma escolhe três cartões, um de cada cor. Cada uma delas então informa ao mágico os números que se encontram na outra face de seus cartões, em uma certa ordem, por exemplo: cartão vermelho, cartão azul e cartão verde. Os três números informados, por cada pessoa, são considerados como centena, a dezena e a unidade, de um número de três dígitos. Os números de 3 dígitos assim formados, são somados e magicamente o resultado é 1665, resultado que o mágico escreveu previamente.

Os cartões são recolhidos e novamente embaralhados. Agora as pessoas escolhem novamente os cartões, seguindo a sequência de figuras: triângulo, quadrado ou círculo.

Novos números são formados, com os cartões sendo chamados, de cada pessoa, na ordem: triângulo, quadrado e círculo, os três números formados são somados e mais uma vez temos como soma 1665.

Explicação:

Estamos diante de um problema de determinação, pois seguindo as etapas do truque devemos determinar o resultado final que é 1665.

Compreensão do problema: Quais os dados? Qual o objetivo? Algum desenho ou diagrama que possa ajudar?

Três pessoas são escolhidas, cada uma escolhe três cartões, isto é, para cada pessoa o mágico consegue formar um número de três dígitos. Logo, temos três parcelas, cada parcela é constituída por um número de três dígitos, ao somar essas três parcelas obtemos 1665.

Estabelecimento do plano: Algum problema semelhante?

De acordo com o enunciado inicialmente temos:

Tabela 1 – Previsão Insistente

Centena Vermelho	Dezena Azul	Unidade Verde	Ou	Centena Triângulo	Dezena Quadrado	Unidade Círculo
8	1	6		8	3	4
3	5	7		1	5	9
4	9	2		6	7	2
1 6	6	5		1 6	6	5

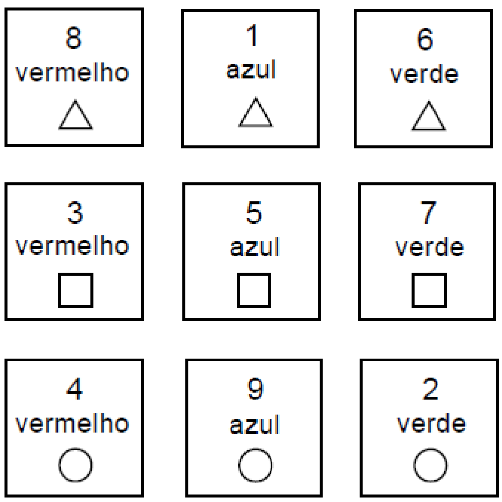
Fonte: AUTOR, 2017.

Observando a tabela 1, em relação aos números das cores, observando as colunas da tabela temos,

$8+3+4=15$, $1+5+9=15$ e $6+7+2=15$. Em relação aos números relativos as figuras, nas colunas temos, $8+1+6=15$, $3+5+7=15$ e $4+9+2=15$.

Execução do plano: Nosso problema agora se resume em construir um quadrado mágico 3 x 3, onde a soma mágica deve ser 15.

Figura 4 – Previsão Insistente Quadrado 3x3



Fonte: AUTOR, 2017.

Notamos então que as parcelas são formadas pelos números das linhas ou colunas do quadrado mágico acima. Por exemplo em relação as cores temos: 816 + 357 + 492 = 1665. E em relação as figuras temos: 834 + 159 + 672 = 1665 (ver tabela 1 - previsão insistente).

Sugestões e Observações:

Podemos trabalhar esse truque a partir do sétimo ano. Observamos o papel fundamental da propriedade associativa da adição, além disso podemos trabalhar o raciocínio lógico e colocar como desafio a construção do quadrado mágico 3 x 3. Ver apêndices A e B.

4.4 Mágicas envolvendo mudança de base

Conforme Bastos (2015, p. 33),

> O sistema de numeração mais utilizado pelo homem é o sistema decimal (ou sistema de numeração na base 10). Neste sistema utiliza-se dez algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Cada algarismo tem um valor posicional, isto é, o seu valor depende da posição que ocupa no número onde aparece escrito. O sistema binário é o sistema mais utilizado por máquinas, uma vez que os sistemas digitais trabalham internamente com dois estados (ligado/desligado, verdadeiro/falso, aberto/fechado). No sistema binário (ou sistema de numeração na base 2) utiliza-se dois algarismos: 0 e 1. [...] É sempre possível converter números inteiros de uma base para outra, sendo esta conversão baseada em determinadas regras. Assim, por exemplo, para converter um número escrito na base 10 para a base 2, podemos proceder do modo seguinte:
>
> 1) Efetuar divisões sucessivas por 2 até obter um quociente inferior a 2;
>
> 2) Escrever ordenadamente o último quociente e todos os restos obtidos por ordem inversa.
>
> Vejamos o exemplo do número 52, em que fazemos divisões sucessivas por 2 até obtermos um quociente inferior a 2, (neste caso igual a 1), altura em que o algoritmo termina.
>
> $$\begin{array}{llllll} 52 & \underline{|\;2} & & & & \\ (0) & 26 & \underline{|\;2} & & & \\ & (0) & 13 & \underline{|\;2} & & \\ & & (1) & 6 & \underline{|\;2} & \\ & & & (0) & 3 & \underline{|\;2} \\ & & & & (1) & (1) \end{array}$$
>
> Escrevendo da direita para a esquerda os 0's e 1's da tabela, que representam o último quociente e os restos das divisões, vamos obter a representação do número 52 no sistema de numeração de base 2:
>
> $$(52)_{10} = (110100)_2$$
>
> .
>
> Para converter um número escrito na base 2 para a base 10, procede-se do modo seguinte:
>
> 1) Multiplica-se cada algarismo do número pela potência de base 2 e expoente correspondente à sua ordem;
>
> 2) Adiciona-se os produtos obtidos.
>
> Voltando ao exemplo anterior, vejamos como converter para a base 10 o número $(110100)_2$:
>
> $(110100)_2 = 1\times 2^5 + 1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 0\times 2^0 =$
> $= 2^5 + 2^4 + 2^2 = 32 + 16 + 4 = (52)_{10}$.

Mágica - Adivinho Indiscreto

Dada as 6 cartelas que seguem, o mágico vai mostrando cartela por cartela a um espectador e para cada cartela mostrada, o mágico pergunta se a idade do espectador está na cartela mostrada ou não, depois de mostrar as 6 cartelas e receber as respostas, o mágico revela a idade do espectador.

Figura 5 – Adivinho Indiscreto

Cartela 1

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

Cartela 2

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Cartela 3

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

Cartela 4

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

Cartela 5

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Cartela 6

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Fonte: AUTOR, 2017.

Explicação:

Estamos diante de um problema de determinação, pois seguindo as etapas do truque devemos determinar qual é a idade do espectador.

Compreensão do problema: Quais os dados? Qual o objetivo? Algum diagrama ou desenho que possa ajudar? Alguma notação adequada?

São dadas 6 cartelas, cada uma com 32 números. Vamos mostrar que usando o sistema de numeração binário podemos construir essas 6 cartelas. De fato mostraremos que escrever um número na base 2 é uma notação adequada para construir as 6 cartelas do adivinho indiscreto.

Estabelecimento do plano: Algum problema semelhante? Algum problema similar mais específico? É possível reformular o problema?

De maneira mais específica, vamos supor que a idade do espectador apareça apenas nas cartelas 2 e 5, assim temos:

Tabela 2 – Adivinho Cartelas 2 e 5

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Cartela 2

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Cartela 5

Fonte: AUTOR, 2017.

$$\text{Cartela } 2 \cap \text{Cartela } 5 = \{18,19,22,23,26,27,30,31,50,51,54,55,58,59,62,63\}.$$

Observando as cartelas restantes, temos que o número 18 é o único número que não aparece nas outras cartelas, assim a idade do espectador é 18 anos. Observamos que o primeiro número da cartela 2 é igual a 2 e o primeiro número da cartela 5 é igual 16, a soma desses primeiros números é $2+16=18$. Então, vamos demonstrar que para descobrir a idade do espectador, basta somar os primeiros números das cartelas que se encontram a idade do espectador.

Execução do plano:

No sistema decimal, um número a pode ser escrito como:

$$a = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \cdots + a_1.10^1 + a_0.10^0.$$

De modo análogo, o sistema binário utiliza na sua decomposição a base 2, assim um número natural a pode ser escrito como:

$$a = b_n.2^n + b_{n-1}.2^{n-1} + b_2.2^2 + b_1.2^1 + b_0.2^0.$$

Observe que, nesta decomposição os coeficientes que aparecem são apenas os números zero ou um, já que o divisor dois implica em resto um se o número for ímpar e resto zero se o número for par. Assim, todo número natural não nulo pode ser escrito como soma de potências de 2.

No caso das cartelas temos números de 1 a 63, podemos escrever qualquer um desses números como soma de potências de 2, isto é, seja n um natural pertencente ao intervalo $[1;63]$, temos,

$$n = b_5.2^5 + b_4.2^4 + b_3.2^3 + b_2.2^2 + b_1.2^1 + b_0.2^0.$$

Sendo os números $b_0, b_1, \cdots, b_5$ iguais a 0 ou l (e, neste caso, a representação do número n em base 2 é, exatamente, $b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0$). Por exemplo, temos:

$$18 = 16+2 = 2^4+2^1 = 0.2^5+1.2^4+0.2^3+0.2^2+1.2^1+0.2^0 = (10010)_2.$$

$$26 = 16+8+2 = 2^4+2^3+2^1 = 0.2^5+1.2^4+1.2^3+0.2^2+1.2^1+0.2^0 = (11010)_2.$$

Assim, basta observar que na primeira cartela do mágico estão os números para os quais $b_0 = 1$, isto é, aqueles que terminam em 1 quando escritos na base 2; na segunda lista estão os números com $b_1 = 1$, na terceira cartela estão aqueles para os quais $b_2 = 1$ e assim por diante. Isso mostra por que o truque funciona.

Sugestões e Observações:

Esse é um ótimo truque para usar na introdução do sistema binário. Usando essas 6 cartelas, a idade máxima que o mágico pode descobrir é 63 anos. Agora que sabemos o segredo podemos construir cartelas para descobrir idades superiores a 63 anos.

Mágica - Um Símbolo Pensado

Das 5 cartelas abaixo, existe uma com 15 símbolos. O mágico pede a um espectador que pense em um dos 15 símbolos.

Figura 6 – Variante do adivinho

Δ	%	&	□	Σ
+	δ	Z	X	$
O	T	#	@	∞

Cartela 1

∞	Δ	δ	Σ
&	O	X	#

Cartela 2

δ	∞	%	@
&	$	O	+

Cartela 3

δ	Σ	□	∞
#	T	@	+

Cartela 4

Z	#	X	@
T	O	$	∞

Fonte: AUTOR, 2017.

O mágico mostra as cartelas 1, 2, 3 e 4 ao espectador, perguntando se o símbolo pensado aparece na cartela mostrada ou não, ao saber quais são as cartelas que tem o símbolo pensado, o mágico revela qual foi esse símbolo.

Explicação:

Estamos diante de um problema de determinação, pois seguindo as etapas do truque, devemos determinar qual foi o símbolo escolhido pelo espectador.

Compreensão do problema: Quais os dados? Qual o objetivo? Algum diagrama ou desenho? Alguma notação adequada?

Temos 15 símbolos (figura 7), podemos associar cada símbolo a um número e assim temos um problema análogo ao anterior (adivinho indiscreto).

Estabelecimento do plano: Algum problema similar? Algo mais específico?

A mágica do adivinho indiscreto da idade é uma mágica semelhante a mágica do símbolo pensado, então vamos seguir o mesmo método, isto é, vamos usar o sistema binário associado aos símbolos.

Execução do plano:

Associando cada símbolo a um número, temos:

Figura 7 – Variante do adivinho associação numérica

Δ 1	% 2	& 3	□ 4	Σ 5
+ 6	δ 7	Z 8	X 9	$ 10
O 11	T 12	# 13	@ 14	∞ 15

Fonte: AUTOR, 2017.

Logo, teremos as cartelas abaixo.

Figura 8 – Variante do adivinho explicação

Cartela 1

∞= 15	& = 3	Σ = 5	δ = 7
X = 9	O = 11	# = 13	Δ = 1

Cartela 2

% = 2	∞= 15	& = 3	+ = 6
δ = 7	$ = 10	O = 11	@ = 14

Cartela 3

□ = 4	Σ = 5	+ = 6	∞= 15
δ = 7	T = 12	# = 13	@ = 14

Cartela 4

Z = 8	X = 9	$ = 10	O = 11
T = 12	# = 13	@ = 14	∞= 15

Fonte: AUTOR, 2017.

Para esse truque usamos o infinito (∞) como símbolo chave. Na cartela 1, o infinito está na posição 1, na cartela 2 ele está na posição 2, na cartela 3 está na posição 4 e na cartela 4 está na posição 8, então se o símbolo pensado pelo espectador estiver apenas nas cartelas 3 e 4, devemos fazer a soma 4 + 8 = 12, observe que pegamos os valores que associamos as posições do símbolo chave, que nesse caso é o infinito, então como o resultado da soma é 12, o símbolo escolhido nesse caso foi o T = 12.

Sugestões e Observações:

Na mágica do símbolo pensado usamos 15 símbolos, agora que sabemos como o truque funciona podemos aumentar essas possibilidades, além disso podemos usar outros símbolos, basta fazer a associação entre os símbolos e os números, por exemplo, poderiamos usar símbolos como: bandeiras, animais, nomes de pessoas, times de futebol...etc.

4.5 Outros Truques

Jogo de Martin Gardner

O mágico em segredo escreve o número 34 como previsão e pede a um espectador que escolha um dos números da tabela abaixo:

Tabela 3 – Jogo de Gardner

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Fonte: AUTOR, 2017.

Suponhamos que o espectador escolha o número 7. O mágico então risca os números situados na linha horizontal e na vertical a qual o 7 se encontra.

Tabela 4 – Gardner Performance 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} & 4 \\ \cancel{5} & \cancel{6} & 7 & \cancel{8} \\ 9 & 10 & \cancel{11} & 12 \\ 13 & 14 & \cancel{15} & 16 \end{bmatrix}$$

Fonte: AUTOR, 2017.

O mágico então pede ao espectador que escolha outro número, mas dessa vez o espectador deve escolher um dos números que ainda não estão riscados e o espectador escolhe o número 10.

Tabela 5 – Gardner Performance 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Fonte: AUTOR, 2017.

O mágico repete o processo, isto é, faz uma linha horizontal e uma vertical na qual o 10 pertence.

E o mágico continua com a dinâmica, pede ao espectador que escolha outro número dos que ainda não estão riscado e o espectador escolhe o número 1.

Tabela 6 – Gardner Performance 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Fonte: AUTOR, 2017.

O mágico então, faz uma linha horizontal e uma vertical na qual o número 1 pertence.

E finalmente, continuando a dinâmica o espectador agora tem que escolher o número 16.

Tabela 7 – Gardner Performance 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Fonte: AUTOR, 2017.

Temos então, quatro números escolhidos, a saber, 7, 10, 1 e 16. Ao somar os números escolhidos temos como resultado o número 34.

Explicação:

Podemos considerar esse truque um problema de demonstração, pois seguindo as etapas do truque devemos provar que o resultado sempre será 34.

Compreensão do problema: Quais os dados? Qual o objetivo? Algum desenho ou diagrama que possa ser útil? Alguma notação adequada?

O mágico fez uma previsão, isso significa que não importa quais são minhas escolhas, no final o resultado da soma sempre seria 34. Assim, temos de provar que seguindo a dinâmica do jogo de Gardner teremos como soma o número 34. Então temos um problema de demonstração.

Estabelecimento do plano: Algum problema semelhante que possa ser útil? Existe alguma relação entre linhas e colunas que possa ser útil? Algo mais específico que possa ajudar?

Tabela 8 – Gardner Explicação

+	**1**	**2**	**3**	**4**
0	1	2	3	4
4	5	6	7	8
8	9	10	11	12
12	13	14	15	16

Fonte: AUTOR, 2017.

Observando a matriz 4 x 4 do jogo de Gardner e pegando por exemplo a terceira linha dessa matriz temos, $a_{31} = 1+8 = 9,\ a_{32} = 2+8 = 10,\ a_{33} = 3+8 = 11,\ a_{34} = 4+8 = 12$, onde, a_{ij} é o número correspondente da linha i e da coluna j.

Execução da estratégia escolhida:

Nesse exemplo os números escolhidos foram: 7, 10, 1 e 16. Temos assim a relação:

$$\begin{cases} \mathbf{7 = 3 + 4} \\ \mathbf{10 = 2 + 8} \\ \mathbf{1 = 1 + 0} \\ \mathbf{16 = 4 + 12} \end{cases}$$

Somando membro a membro temos:

$7+10+1+16 = 34 = (1+2+3+4)+(0+4+8+12)$.

Retrospectiva:

Figura 9 – Gardner Retrospectiva

+	1	2	3	4
0				
4				
8				
12				

Fonte: AUTOR, 2017.

Percebemos então que cada número que o espectador escolhe é a soma entre um número da linha (1, 2, 3, 4) com um número da coluna (0, 4, 8, 12).

Assim temos que (1 + 2 + 3 + 4) + (0 + 4 + 8 + 12) = 34.

Sugestões e Observações:

Podemos introduzir o estudo de matrizes, quadrado mágico, trabalhar o raciocínio lógico e observações de padrões.

Variante do Jogo de Martin Gardner

O mágico apresenta a tabela que segue a um espectador:

Tabela 9 – Variante do Jogo de Gardner

11	7	20	16
13	9	22	18
10	6	19	15
12	8	21	17

Fonte: AUTOR, 2017.

O mágico estando de costas para a tabela, pede que o espectador selecione quatro números, de linhas e colunas diferentes e que os adicione, sem revelar o resultado. O mágico então olha para tabela e de imediato revela o total encontrado pelo espectador.

Explicação:

Podemos considerar esse truque um problema de demonstração, pois seguindo as regras do jogo vamos mostrar que a soma dos quatro números selecionados pelo espectador resulta 56.

Compreensão do problema: Quais os dados? Qual o objetivo? Algum diagrama ou desenho que possa ajudar? Alguma notação adequada?

Uma tabela de números é dada, isto é, o mágico construiu tal tabela. Como o mágico construiu essa tabela?

Estabelecimento do plano: Algum problema semelhante? Podemos usar seu método? Algo mais específico?

Já conhecemos um problema semelhante (Jogo de Gardner - Previsão 34) e podemos usar a demonstração que foi dada para concluir que a soma encontrada pelo espectador corresponde a soma dos elementos da diagonal principal da matriz acima (Tabela 9 - Variante do Jogo de Gardner), isto é, $11+9+19+17=56$.

Execução do plano:

A tabela foi preenchida do seguinte modo: a primeira linha contém números aleatórios, mas as seguintes obtiveram-se adicionando uma constante (positiva ou negativa) aos números da primeira linha.

Neste caso, sendo $a=11$, $b=7$, $c=20$ e $d=16$, a tabela é da forma:

Tabela 10 – Explicação da Variante de Gardner 1

a	b	c	d
a+2	b+2	c+2	d+2
a-1	b-1	c-1	d-1
a+1	b+1	c+1	d+1

Fonte: AUTOR, 2017.

Pelo método usado no jogo de Gardner da previsão do número 34, podemos montar a tabela que segue:

Tabela 11 – Explicação da Variante de Gardner 2

+	**a**	**b**	**c**	**d**
0	a	b	c	d
2	a + 2	b + 2	c + 2	d + 2
-1	a - 1	b - 1	c - 1	d - 1
1	a + 1	b + 1	c + 1	d + 1

Fonte: AUTOR, 2017.

Observe que para cada número escolhido, existe uma relação de soma entre os elementos da linha (a, b, c, d) e a coluna (0, 2, -1 , 1).

Figura 10 – Gardner Variante

+	**a**	**b**	**c**	**d**
0				
2				
-1				
1				

Fonte: AUTOR, 2017.

Assim, temos que a soma dos quatro números escolhidos corresponde a

$$(0+2+(-1)+1)+(a+b+c+d) = (a+b+c+d)+2 = a+(b+2)+(c-1)+(d+1).$$

Retrospecto:

Vamos supor que o espectador escolha os números destacados (10, 7, 22 e 17) a seguir:

Tabela 12 – Gardner Variante Retrospecto

11	**7**	20	16
13	9	**22**	18
10	6	19	15
12	8	21	**17**

Fonte: AUTOR, 2017.

Logo, teremos $7+22+17+10 = 11+9+19+17 = (11+7+20+16)+2 = 56$.

Sugestões e Observações:

Agora que conhecemos o truque podemos construir outras variantes, por exemplo nessa mágica usamos uma tabela 4 x 4, podemos usar uma tabela maior, por exemplo uma 5 x 5.

Mágica - Quadrados de Ordem ímpar

O mágico apresenta no quadro a tabela que segue a um espectador.

Em seguida pede ao espectador que usando um marcador, selecione um quadrado de ordem ímpar (3 x 3, 5 x 5, 7 x 7 ou 9 x 9). Depois disso propõe-lhe o desafio de ver qual dos dois consegue calcular primeiro a soma de todos os números que estão no interior desse quadrado e que serão no total 9, 25, 49 ou 81 números. O espectador pode usar a calculadora, mas o mágico fará os cálculos com papel e lápis. Obviamente, ganhará o mágico.

Tabela 13 – Subquadrados

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: BASTOS, 2015, p.87.

Explicação:

Podemos considerar esse truque um problema de determinação, pois dado um quadrado selecionado pelo espectador o mágico consegue determinar o resultado da soma de todos os números que estão no interior desse quadrado.

Compreensão do problema: Quais os dados do problema? Qual o objetivo? Alguma notação adequada?

O espectador seleciona uma tabela 3x3, 5x5, 7x7 ou 9x9 e o mágico consegue somar rapidamente todos os números que estão no interior da tabela selecionada. Uma tabela de números é dada e ao ver a tabela selecionada o mágico faz a soma rapidamente, como?

Estabelecimento do plano: Algum problema semelhante? Algum problema similar mais específico, mais simples? É possível reformular o problema?

Um problema mais simples seria pegar uma tabela menor de números, por exemplo, uma tabela 3 x 3. Entendendo a dinâmica de um caso particular poderemos generalizar.

Execução do plano:

Suponhamos que o espectador escolha um quadrado com 3 linhas e designemos por x o número que ocupa a posição central desse quadrado. Então a composição do quadrado será a seguinte:

Tabela 14 – Subquadrados Explicação

x-4	x-3	x-2
x-1	x	x+1
x+2	x+3	x+4

Fonte: AUTOR, 2017.

Somando esses números, temos,

$$(x-4)+(x-3)+(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)=9x.$$

Usando por exemplo um quadrado de ordem sete, temos:

Tabela 15 – Quadrado Ordem 7

$x-33$	$x-32$	$x-31$	$x-30$	$x-29$	$x-28$	$x-27$
$x-23$	$x-22$	$x-21$	$x-20$	$x-19$	$x-18$	$x-17$
$x-13$	$x-12$	$x-11$	$x-10$	$x-9$	$x-8$	$x-7$
$x-3$	$x-2$	$x-1$	x	$x+1$	$x+2$	$x+3$
$x+7$	$x+8$	$x+9$	$x+10$	$x+11$	$x+12$	$x+13$
$x+17$	$x+18$	$x+19$	$x+20$	$x+21$	$x+22$	$x+23$
$x+27$	$x+28$	$x+29$	$x+30$	$x+31$	$x+32$	$x+33$

Fonte: BASTOS, 2015, p.88.

Ao adicionarmos todas as expressões da tabela acima (tabela 15) obtemos $49x$.

Logo, qualquer que seja o quadrado escolhido pelo espectador, para determinar a soma pedida, basta que o mágico multiplique o número central desse quadrado pela quantidade de números que estão no seu interior, o que se faz rapidamente, dando assim a vitória ao mágico.

Retrospecto:

Vamos supor que o espectador faça a marcação que segue:

Tabela 16 – Subquadrados Retrospecto

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: BASTOS, 2015, p.88.

Temos assim que o número central é 77, então basta o mágico fazer $77 \times 25 = 1\,925$.

Sugestões e Observações:

Podemos trabalhar expressões algébricas, equação do primeiro grau e o raciocínio lógico.

5 Considerações Finais

Ao estudar matemática conheci a arte mágica e através da mágica conheci a Programação Neurolinguística. De acordo com a Programação Neurolinguística, para aprender o máximo possível em qualquer situação ou experiência, precisamos reunir informações a partir do maior número possível de pontos de vista. Diante disso é notável que o método de Polya, constituído de indagações, é uma ótima ferramenta para aprendizagem.

Como sabemos questionar os “porquês” faz parte da filosofia matemática e tais questionamentos fortalecem nossa aprendizagem. Descrevemos uma lista de truques matemáticos nos quais questionamentos do tipo “como ele fez isso?" é natural e assim vamos perceber que todas as indagações do método de Polya são naturais, qualquer pessoa que esteja realmente interessada em resolver um problema usará as indagações do método de Polya.

Neste trabalho, procuramos mostrar que o lúdico juntamente com o método de Polya é uma proposta que pode propocionar um ambiente instigante, desafiador e divertido podendo melhorar o processo de ensino e aprendizagem matemática. Vale lembrar que diante de qualquer problema existem indagações úteis que podem fazer toda diferença para solução de tal problema. Além disso, o ato de resolver problemas permite aos estudantes ampliar seus conhecimentos e informações, desenvolvendo sua capacidade de pensar matematicamente e resolver problemas do cotidiano. Assim, os alunos terão oportunidade de aumentar seus conhecimentos por meio de conceitos e procedimentos matemáticos bem como expandir a visão que têm dos problemas, da matemática, e do mundo em geral.

Podemos ainda acrescentar que o professor juntamente com a escola pode criar projetos que utilizem recursos que façam com que o aluno tenha oportunidade de aprender praticando e socializando o conhecimento, projetos como feira de ciências (matemática) e gincanas são bem vindos, o professor então pode usar o lúdico para estimular o desenvolvimento da aprendizagem.

Usando o lúdico podemos despertar o interesse do aluno e estando o aluno realmente interessado, ficará mais fácil para o professor ser mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem. É possível perceber que conhecer e praticar as etapas do método de Polya, não se trata apenas de compreender e desenvolver conteúdos, mas estamos dando a chance do aluno ter uma visão diferente de mundo, ajudando-o a ser um indivíduo que constrói e modifica o mundo que o cerca.

Referências

ALMEIDA, V.L. **Matemágica: a arte da matemática.** Maceió, Alagoas, 2014.

BASTOS, I. M. **Magia Matemática com Números.** Dissertação de Mestrado. Universidade de Aveiro, 2015.

BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC, vol 3, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 09 de out. 2017.

CAMPAGNER, C. A. **Álgebra: X? Y? Entenda os cálculos com letras.** Disponível em: <https://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/algebra-x-y-entenda-os-calculos-com-letras.htm>. Acesso em: 09 de out. 2017.

DRUCK, S. … [et al.] **Explorando o ensino da Matemática: atividades**, vol 2, Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004.

FERREIRA, A.B.H. **Miniaurélio Século XXI: O minidicionário da língua portuguesa**. Editora Nova Fronteira. Rio de Janeio, 2001.

FURTADO, P. C. **Brincadeiras envolvendo jogos de mágica e a matemática.** 53 f. Relatório de Pesquisa (Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade Comunitária da Região de Chapecó, Chapecó, 2008.

GARAT, F; ZAMBRONE, G; GUIMARÃES, L; RANI, T. **Abracadabra.** Julho/Dezembro 2005. Disponível em: <http://puc-riodigital.com.puc-rio.br/media/14%20-%20abracadabra.pdf>. Acesso em: 09 de out. 2017.

OLIVEIRA, S.A. **O lúdico como motivação nas aulas de Matemática**. 377°. ed. p.5. Jornal Mundo Jovem. jun. 2007.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, 2006.

SAMPAIO, J. C. ; MALAGUTTI, P. L. **Mágicas, Matemática e outros mistérios.** III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Universidade Federal de São Carlos, 2006.

WINNICOTT, D. W. **O brincar e a realidade.** Tradução José Octavio de Aguiar Abreu e Vanede Nobre. Imago Editora LTDA. Rio de Janeiro, 1975.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Quadrado Mágico e Soma Mágica

Teorema: Em um quadrado mágico de ordem n, com $n > 2$, usando os números naturais $1, 2, \ldots, n^2$ a sua constante mágica é $M = \dfrac{(n^3+n)}{2}$.

De fato, vamos iniciar com um problema mais simples, isto é, vamos descobrir a constante mágica de um quadrado mágico 3 x 3.

Tabela 17 – Quadrado Mágico 3x3

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Fonte: AUTOR, 2017.

Como se trata de um quadrado mágico, temos:

$$\begin{cases} a+b+c=N \\ d+e+f=N \\ g+h+i=N \end{cases}$$

Somando membro a membro, temos,

$(a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+i) = N+N+N = 3.N$, o lado esquerdo é a soma dos naturais de 1 até 9, logo, $1+2+3+\cdots+8+9 = 45 = 3.N$, então, $N = \dfrac{45}{3} = 15$. Assim em um quadrado mágico 3 x 3 a constante mágica é igual a 15.

De modo geral, em um quadrado mágico de ordem n, no lado esquerdo da igualdade teremos a soma dos naturais de 1 até n^2 e no lado direito teremos $n.M$, pois teremos n linhas, isto é,

$$1+2+3+\cdots+n^2 = n.M \Rightarrow \frac{(1+n^2).n^2}{2} = n.M \Rightarrow \frac{(1+n^2).n}{2} = M \Rightarrow M = \frac{(n^3+n)}{2} \blacksquare.$$

Sugestões e Observações:

Podemos trabalhar o raciocínio lógico, progressões aritméticas, equações do primeiro grau, expressões algébricas e temos um ótimo desafio: usar os números de 1 a 9 e construir o quadrado mágico de soma mágica igual a 15.

APÊNDICE B - Construção do quadrado mágico 4x4

Construção do quadrado 4 x 4, onde a constante mágica é 34.

1) Inicialmente distribua os números de 1 a 16, conforme a tabela abaixo:

Tabela 18 – Quadrado Mágico 4x4

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Fonte: AUTOR, 2017.

2) Inverter as diagonais em relação ao centro.

Tabela 19 – Quadrado Mágico 4x4 - Explicação

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Fonte: AUTOR, 2017.

Observe que a soma dos elementos das linhas, colunas e diagonais é 34.

Fonte: <https://docs.ufpr.br/~ewkaras/ic/karla10.pdf>

Propriedade Interessante:

Podemos trocar a posição das colunas centrais (ou das linhas centrais) e ele continuará sendo um quadrado mágico.

Tabela 20 – Propriedades do Quadrado Mágico 4x4

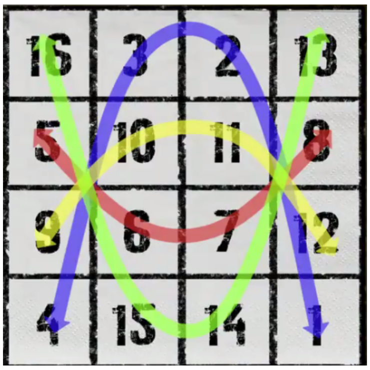
16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

16	2	3	13
9	7	6	12
5	11	10	8
4	14	15	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Fonte: AUTOR, 2017.

Figura 11 – Construção do Quadrado Mágico 4x4



Fonte: ALMEIDA, 2014, p.57.

Outras Possibilidades de Soma Mágica:

Tabela 21 – Outras Possibilidades - Quadrado 4x4

16	3		
5	10		

		2	13
		11	8

		7	12
		14	1

9	6		
4	15		

	10	11	
	6	7	

16			13
4			1

16		2	
9		7	

	3		13
	6		12

5		11	
4		14	

	10		8
	15		1

5			8
9			12

	3	2	
	15	14	

Fonte: AUTOR, 2017.