UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARIA DAYANE DALYSSE DOS SANTOS

NÚMERO DE OURO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NA SALA DE AULA

MACEIÓ
2014

MARIA DAYANE DALYSSE DOS SANTOS

NÚMERO DE OURO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NA SALA DE AULA

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 10 de outubro de 2014 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Me. Viviane de Oliveira Santos.

MACEIÓ

2014

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Dilma Maria dos Santos Cunha

S237n Santos, Maria Dayane Dalysse dos.
Número de ouro na educação básica : construções geométricas na sala de aula / Maria Dayane Dalysse dos Santos. – Maceió, 2014.
77 f. ; il.

Orientadora: Viviane de Oliveira Santos.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática, 2014.

Bibliografia: f. 67-68.
Anexos : f.69-77.

1. Razão áurea – história. 2. Construções geométricas. 3. Sequência de Fibonacci. 4. Resistências. 5. Educação básica. I. Título.

CDU: 517.52

MARIA DAYANE DALYSSE DOS SANTOS

NÚMERO DE OURO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NA SALA DE AULA

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 10 de outubro de 2014 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários a obtenção do grau de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Viviane de Oliveira Santos

Profa. Ma. Viviane de Oliveira Santos (Orientadora)

Hilário Alencar da Silva

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva

Prof. Dr. Givaldo Oliveira dos Santos

À minha família.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, acima de tudo e em primeiro lugar, por estar sempre presente em minha vida.

À minha mãe Ilza, e aos meus irmãos David, Jessyka e Jullyadson pelo incentivo durante todo o tempo.

Ao meu noivo Luis Eduardo pela compreensão e, especialmente, pela ajuda na elaboração desse trabalho no que se refere às tecnologias da informação.

À minha orientadora Profª. Viviane Oliveira pela atenção, carinho e paciência, por ter dedicado seu tempo para que este trabalho se tornasse possível, estando sempre disponível nos momentos em que precisei.

Ao meu amigo Evison Rosalino pela ajuda ao longo do curso e, em especial, na elaboração desse trabalho.

Aos meus amigos do mestrado (PROFMAT) que colaboraram com o meu crescimento e aprendizado durante todo o curso e, principalmente, pelo incentivo na qualificação em especial ao Aldo Agustinho, André Carlos, André Oliveira, Elielson Magalhães, Elinelson Gomes, Josimar Santos, Leandro, Lindberg, Marcel Cavalcante, Marcelo e Vanessa Alves.

À minha amiga Maria Patrícia pela contribuição para a realização desse trabalho.

Ao Isnaldo Isaac pelas orientações para apresentação desse trabalho.

À Hosana Buarque e Camila Buarque pela ajuda nas correções gramaticais.

A todos os professores do programa do PROFMAT por terem contribuído para meu crescimento.

A banca examinadora: Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva e Prof. Dr. Givaldo Oliveira dos Santos que cederam uma parte de seu tempo precioso para poder contribuir com meu trabalho.

Aos alunos que aceitaram participar do projeto e à equipe da escola Esmeralda Figueiredo onde a proposta foi desenvolvida.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa concedida durante o mestrado.

RESUMO

Apresentamos, neste trabalho, um pouco da história de um número fascinante, conhecido entre outros nomes, por Razão Áurea. Mostramos também algumas curiosidades e propriedades matemáticas encontradas nesse número e sua relação com a sequência de Fibonacci. Além disso, apresentamos as definições e algumas propriedades do retângulo e triângulo áureos e do pentágono regular e pentagrama. Realizamos algumas construções geométricas relacionando-as com a Razão Áurea, retratamos como o conteúdo de construções geométricas foi perdendo espaço no Ensino Fundamental e Médio ao longo do tempo, e o resgate deste conteúdo no panorama atual da educação. Finalizamos este trabalho aplicando atividades que relacionam a Razão Áurea com as construções geométricas e com a sequência de Fibonacci, atividades estas aplicadas em uma escola pública do município de Rio Largo/AL, com turmas do Ensino Fundamental tendo como objetivo despertar o interesse dos alunos pela matemática e trabalhar com construções geométricas.

Palavras-chave: Razão Áurea. Construções Geométricas. Sequência de Fibonacci. História.

ABSTRACT

We present in this work a bit of history of a fascinating number, known, among other names, as the Golden Ratio. We also show some curiosities and mathematical properties found in this number and its relationship to the Fibonacci sequence. In addition, we present definitions and some properties of golden rectangles and triangles and of the regular pentagon and pentagram. We developed geometric constructions relating them to the Golden Ratio, and discussed how the content of geometric constructions has been losing space in the elementary and secondary curriculum over time. In order to rescue this content for the current landscape of education we suggest the use of activities that relate to the Golden Ratio, tying the geometric constructions to the Fibonacci sequence. The activities described were implemented in a public school in the city of Rio Largo / AL, with students at an elementary school. The goal was to arouse the interest of students in mathematics and in working with geometric constructions.

Keywords: Golden Ratio. Geometric constructions. Fibonacci sequence. History.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho surgiu com a intenção de despertar nos alunos de 8º ano da escola municipal Esmeralda Figueiredo a curiosidade para fazer a associação da matemática com a realidade fora da sala de aula, vendo assim a aplicação dos conteúdos estudados. Para atingir esse objetivo, escolhemos trabalhar com um interessante número - o Número de Ouro. Esse número possui propriedades bastante interessantes que iremos mostrar no decorrer do trabalho. Após a revisão bibliográfica, sentiu-se a necessidade de acrescentar um novo objetivo: utilizar o número de ouro para trabalhar alguns conceitos elementares de construções geométricas, o que se justifica por ser um conteúdo pouco trabalhado no ensino básico e por acreditarmos que, através das construções, o aluno desenvolve melhor os conceitos de geometria plana.

Os conceitos de construções geométricas que foram trabalhados nas atividades desenvolvidas com a turma envolveram construção de retas perpendiculares, mediatriz, circunferência, quadrado, retângulo, pentágono e divisão de segmento. Esse segundo objetivo é reforçado por textos oficiais, como o que encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2008, p. 89) que sugere o trabalho com "Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor".

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte maneira: no primeiro capítulo, contamos um pouco da história desse número que possui vários nomes como "Número Áureo", "Número de Ouro", entre outros; no segundo capítulo, apresentamos um pouco da trajetória das construções geométricas no ensino básico e algumas construções elementares; o terceiro capítulo foi dedicado ao estudo de algumas curiosidades e aplicações do Número de Ouro; e no quarto capítulo, apresentamos algumas atividades aplicadas em sala de aula, bem como uma análise dessas atividades.

1 PARTE HISTÓRICA DO NÚMERO DE OURO

Contaremos agora a história de um número fascinante que surgiu na Antiguidade, o Fi (Φ). Esse número é conhecido por diversos nomes: "Número Áureo", "Razão Áurea", "Seção Áurea" e "Proporção Divina" são alguns deles citados por Livio (2011, p. 13). Já Biembengut (1996) chama-o de Número de Ouro. Para contar esta história, tomaremos como base o livro de Mario Livio intitulado de *A História de Fi*.

A primeira definição clara da Razão Áurea foi dada por volta de 300 a.C. por Euclides de Alexandria. Euclides definiu uma proporção derivada da simples divisão de uma linha no que ele chamou de sua "razão extrema e média". Nas palavras de Euclides: "Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor"(LIVIO, 2011, p. 13-14).

Figura 1: Segmento Áureo

Fonte: Ramos, 2014

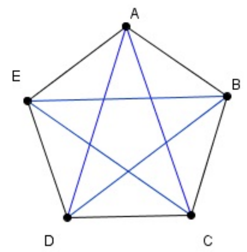
Até o início do século XX, usava-se a letra grega tau (τ), que em grego significa "o corte", para representar o Número de Ouro. Entretanto, o matemático americano Mark Barr, no início do século XX, começou a utilizar a letra Fi (Φ), em homenagem a Fídias (um escultor e arquiteto grego que viveu aproximadamente entre 490 e 460 a.C). Barr decidiu homenagear Fídeas porque alguns historiadores da arte sustentavam que ele utilizava a Razão Áurea nas suas esculturas, fato que não pode ser confirmado atualmente. As maiores realizações desse escultor foram o "Partenon de Atenas" e o "Zeus" no templo de Olímpia (LIVIO, 2011, p. 16).

Aparentemente, os pitagóricos usavam o pentagrama como o símbolo de sua irmandade e o chamavam de "Saúde". O pentagrama tem relação estreita com o pentágono regular. Conectando-se todos os vértices do pentágono por diagonais, obtém-se um pentagrama (Figura 2). Além disso, o pentagrama e o pentágono regular estão repletos de relações com Φ - algumas dessas relações serão mostradas adiante. Por isso, muitos pesquisadores sugerem que os pitagóricos foram os primeiros a descobrir a Razão Áurea e a incomensurabilidade [1], talvez

[1] Algo que não se pode medir

Hipaso de Metaponto. De acordo com um dos relatos de Iâmblico (c.[2] 245-325 d. C.), fundador da escola síria de Neoplatonismo, os pitagóricos ergueram uma lápide para Hipaso, como se ele estivesse morto, por causa da descoberta devastadora da incomensurabilidade.

Figura 2: Pentágono e Pentagrama



Fonte: Autora, 2014.

Embora seja possível que a incomensurabilidade e os números irracionais tenham sido descobertos através da Razão Áurea, a versão mais tradicional é que essa descoberta tenha surgido da razão entre a diagonal e o lado do quadrado (LIVIO, 2011, p. 50).

Platão (428/427 a.C.-348/347 a.C.) e Theaetetus (c. 417 a.C.-c. 369 a.C) se dedicaram ao estudo dos poliedros. Platão tentou explicar a estrutura da matéria usando os cinco sólidos regulares (ou poliedros), que já tinham sido investigados até certo ponto pelos pitagóricos e inteiramente por Theaetetus. Esses sólidos estão ligados à Razão Áurea, como, por exemplo, no fato de os 12 vértices de um icosaedro regular e os 12 centros das faces de um dodecaedro regular poderem ser divididos em três grupos de quatro pontos, sendo que os quatro pontos de cada grupo formam um retângulo áureo. Veremos no capítulo 3 a definição de retângulo áureo.

Pappus de Alexandria foi o último grego que se dedicou ao estudo da Razão Áurea. Após Pappus, passou-se um período sem grandes avanços no estudo desse fascinante número. Mas, na Idade Média, Leonardo de Pisa também chamado de Leonardo Fibonacci - trouxe contribuições importantes para o estudo do Número de Ouro.

> O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações. (LIVIO, 2011, p. 115).

O problema a que se faz referência acima é o seguinte:

[2]cerca de

Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá a luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

Este problema encontra-se no primeiro livro de Fibonacci, chamado de *Liber abaci* (Livro do ábaco), publicado em 1202.A solução será mostrada com mais detalhes no capítulo 3.

Alguns pintores famosos da história também foram matemáticos talentosos. Dentre eles podemos citar Piero della Francesca (c. 1412-1492). Três livros que Piero escreveu sobre Matemática foram preservados: *De Prospectiva pingendi* (Sobre a perspectiva na pintura), *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus* (Livro curto sobre os cinco sólidos regulares) e *Trattato d'Abaco* (Tratado sobre o ábaco). O primeiro livro se tornou o manual padrão para artistas, e nos dois últimos Piero apresenta alguns problemas e soluções que envolvem a Razão Áurea.

Outro pintor renascentista que contribuiu para o desenvolvimento do estudo da Razão Áurea foi Luca Paciolli (1445-1517) que escreveu o famoso livro chamado *Divina Proportione* (A proporção divina) que foi publicado em 1509 composto por três volumes.

O primeiro volume apresenta as propriedades da Razão Áurea e um estudo dos sólidos platônicos e outros poliedros. Encontra-se, também, neste primeiro volume, sessenta ilustrações de sólidos feitas por Leonardo da Vinci.

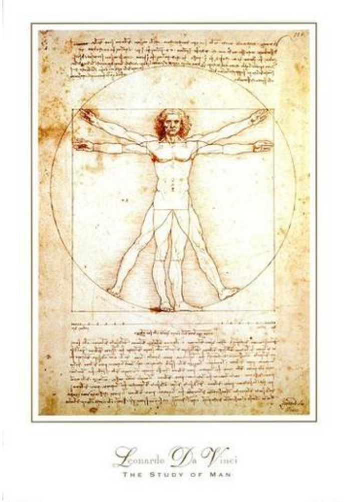
O segundo livro é um tratado sobre proporção e suas aplicações na arquitetura e na estrutura do corpo humano, e teve como base o trabalho do arquiteto Marcus Vitruvius Pollio (70-25 a.C.). Segundo Vitruvius apud Livio,

> [...] no corpo humano, o ponto central naturalmente é o umbigo. Porque se um homem for colocado deitado de costas, com as mãos e os pés estendidos e um compasso for centrado no seu umbigo, os dedos de suas mãos e de seus pés irão tocar a circunferência do círculo descrito a partir desse ponto. E assim como o corpo humano produz um contorno circular, uma figura quadrada também pode ser encontrada a partir dele. Pois se medirmos a distância das solas dos pés até o topo da cabeça e depois aplicarmos essa medida aos braços esticados, veremos que a largura será a mesma que a altura, como no caso de superfícies planas que são perfeitamente quadradas (LIVIO, 2011, p. 157).

A citação acima levou ao conceito do "homem vitruviano", desenhado por Leonardo da Vinci (Figura 3).

O terceiro volume é uma tradução para o italiano do *Cinco sólidos regulares*, de Piero. A publicação de *A Proporção Divina* foi responsável pela divulgação da Razão Áurea, que antes era conhecida apenas pelos matemáticos, mas após o livro de Pacioli tornou-se disponível para artistas.

Figura 3: Homem Vitruviano



Fonte: http://topicosmatematicos.blogspot.com.br/2008/11/homem-vitruviano.html.
Acesso em 13/07/2014.

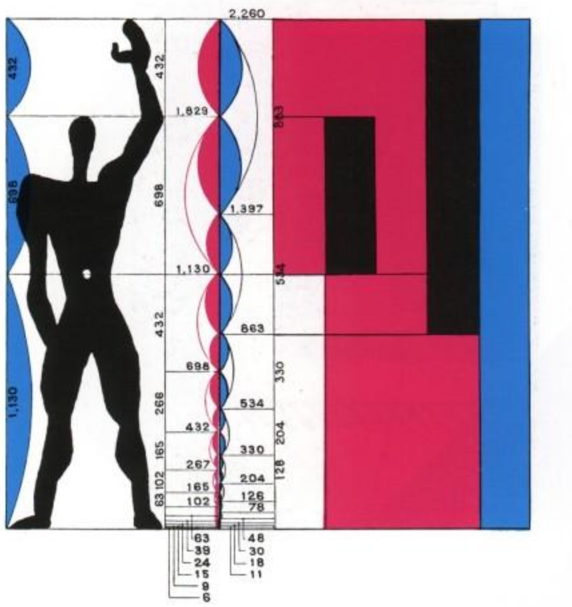
Johannes Kepler (1571-1630), conhecido pelas três leis do movimento planetário que levam seu nome, também foi um matemático talentoso e teve participação na história do Número de Ouro ou "Proporção Divina", como ele chamava. Seu modelo cosmológico era baseado nos sólidos platônicos conforme consta em seu livro *Mysterium Cosmographicum* (O mistério cósmico) publicado em 1597. No mesmo ano, ele escreveu para Mastlin, seu antigo professor, sobre o seguinte teorema: "Se numa linha dividida nas razões média e extrema se constrói um triângulo retângulo, de modo que o ângulo reto esteja sobre a perpendicular colocada no ponto da secção, então o lado menor terá o mesmo valor do maior segmento da linha dividida".

Kepler também descobriu que a razão entre dois números de Fibonacci consecutivos converge para a Razão Áurea, e que o quadrado de qualquer termo da sequência de Fibonacci difere no máximo por 1 do produto dos dois termos adjacentes na sequência. Em seu livro *Harmonice Mundi* (A harmonia do mundo), Kepler apresenta um trabalho sobre *tiling* (ladrilharia), ou mosaico, que também tem relação com a Razão Áurea.

Supõe-se que muitos pintores renascentistas e pré-renascentistas tenham utilizado a Razão Áurea em seus trabalhos, por supor propriedades estéticas no Retângulo Áureo. Entre esses pintores, destacamos Leonardo da Vinci. Porém, não existem estudos que possam confirmar a utilização desse número nos trabalhos realizados pelos artistas daquela época. Segundo Livio (2011, p. 193), o primeiro artista a utilizar a Razão Áurea provavelmente foi Paul Sérusier (1864-1927). Após Sérusier, muitos artistas utilizaram comprovadamente a Razão Áurea em seus trabalhos, como o escultor Jaques Lipchitz (1891-1973), e os pintores Juan Gris (1887-1927), Gino Severino (1883-1966), Salvador Dalí, entre outros.

O famoso arquiteto e pintor Le Corbusier (Charles-Édouard Jeanneret, 1887-1965) foi um dos maiores defensores da aplicação da Razão Áurea. Ele criou um novo sistema proporcional chamado "Modulor" que, segundo ele, daria proporções harmoniosas a tudo, de tamanhos de gabinetes e maçanetas a edifícios e espaços urbanos. O Modulor era baseado nas proporções humanas (Figura 4). Diferente de Le Corbusier, não se pode afirmar a utilização da Razão Áurea nas obras de Piet Mondrian (1872-1944).

Figura 4: Modulor

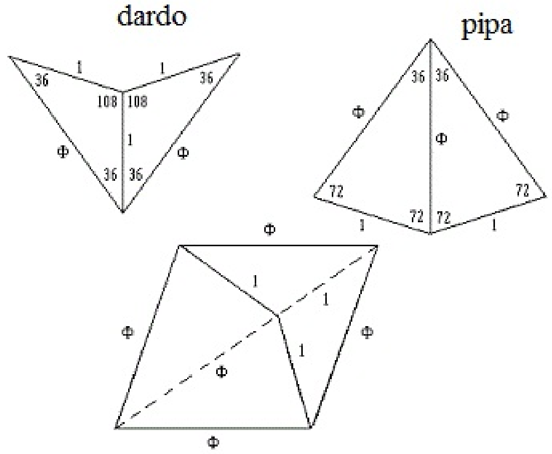


Fonte: http://coisasdaarquitetura.wordpress.com/2010/06/30/quem-acredita-no-modulor/
Acesso em 13/07/2014.

O Número de Ouro também está presente em instrumentos musicais, conforme encontramos em Livio (2011, p. 209) "O violino é um instrumento no qual a Razão Áurea de fato aparece com frequência". Contudo, o fato de que Mozart (1756-1791), Bartók (1881-1945) e Debussy (1862-1918) tenham usado a Proporção Divina em suas composições não é confirmado.

Falando agora da ladrilhagem periódica, que é a operação de cobrir o plano inteiro e conseguir um padrão que se repete a intervalos regulares, encontramos novamente uma relação com o Número de Ouro, pois é possível termos ladrilhagens periódicas com quadrados, triângulos equiláteros e hexágonos, mas não é possível com pentágonos regulares, que tem simetria quíntupla: por mais que você tente, sobrarão espaços vazios. Porém, "[...] em 1974, Roger Penrose descobriu dois conjuntos básicos de ladrilhos que podem ser encaixados, para preencher o plano todo e exibir a simetria rotativa quíntupla" (LIVIO, 2011, p. 230). As ladrilhagens de Penrose têm a Razão Áurea escrita em todas elas. Segue um par desses ladrilhos conhecidos como "dardo" e "pipa".

Figura 5: **Ladrilhos**



Fonte: http://www.seara.ufc.br/donafifi/fibonacci/fibonacci7.htm.
Acesso em 13/07/2014.

Atualmente são realizados estudos que envolvem a Razão Áurea, como é o caso da relação da Razão Áurea com a geometria fractal. Mais detalhes sobre esta geometria podem ser encontrados no capítulo 8 de Livio (2011).

2 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

As construções geométricas apresentam-se como uma excelente ferramenta para se trabalhar os conceitos e propriedades da geometria euclidiana. Elas ajudam na aprendizagem dos alunos, pois permitem que eles consigam representar e visualizar alguns conceitos matemáticos. Sobretudo, as construções são fundamentais para que os alunos do ensino fundamental compreendam as propriedades da geometria plana de forma efetiva. Eduardo Wagner defende o uso de construções geométricas no ensino da geometria quando diz que

> Naturalmente que no ensino de Geometria, a construção das figuras com régua e compasso é fundamental para a perfeita compreensão das suas propriedades. Para o aluno que se inicia no estudo dessa matéria, um esboço das figuras traçadas a mão livre não é suficiente. Ele precisa ver as suas figuras traçadas com precisão para compreendê-las perfeitamente. Quando o professor desenha um ovo e diz que aquilo é uma circunferência, ele está fazendo uma abstração que para si é muito natural (porque conhece suas propriedades), mas para os alunos iniciantes não é. Os alunos precisam ver e construir uma circunferência perfeita para entendê-la. Esse comentário vale para tudo; é preciso construir para entender de forma segura e permanente. Em resumo, o ensino da geometria não pode estar dissociado das construções. Com absoluta certeza, separar a Geometria de Desenho conduz a um aprendizado inseguro e não permanente (Wagner apud RAYMUNDO, 2010, p. 21).

Além disso, a aplicação dos conceitos da construção geométrica em outras áreas de conhecimento como a construção civil, as artes plásticas, a arquitetura, etc, faz com que os alunos percebam a aplicação dos conteúdos estudados, e favorece o desenvolvimento de habilidades motoras, pelo manuseio de instrumentos de desenho. O que é confirmado pelo pensamento de Silva, ao afirmar que

> O desenho geométrico é ministrado com o propósito de desenvolver habilidades motoras manuais nos alunos, pois as construções gráficas são executadas com instrumentos como compasso, régua, transferidor e esquadro, cujo manuseio requer coordenação motora para a obtenção das figuras geométricas pretendidas (2006, p. 49).

Durante algum tempo, as construções com régua e compasso foram ficando menos frequentes na educação básica do Brasil. Até 1960, o Desenho Geométrico tinha lugar de destaque no ensino. Com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) nº 4024 de 20 de dezembro de 1961, a disciplina de Desenho passa a ser complementar e a partir desse momento dá-se início ao processo de desvalorização do desenho geométrico. Raymundo (2010, p.

34) afirma que a LDB/61 juntamente à Lei 5540 de 28 de novembro de 1968, que estabelece a Reforma Universitária (LRU), foram responsáveis pela retirada da disciplina Desenho Geométrico das escolas, pois o exame vestibular eliminou esta disciplina por não constar na LDB, e as instituições de ensino não mantiveram a disciplina por não ser cobrada no vestibular.

Atualmente, com a implantação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNs), para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, a partir de 1998, pode-se notar um incentivo para incluir novamente o ensino das construções geométricas na disciplina de Matemática. Nos PCNs (1998, p.51), encontramos orientação para "que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações".

Os PCNs apresentam alguns conteúdos propostos para o ensino de Matemática no quarto ciclo, entre eles destacaremos a seguir alguns relacionados ao nosso objetivo:

- Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso;

- Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso;

- Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor;

- Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso (BRASIL, 1998, p. 87-89).

Observam-se vários conteúdos que podem ser trabalhados com o auxílio das construções geométricas, buscando uma aprendizagem mais significativa para o aluno. Para o desenvolvimento desse trabalho, escolhemos realizar duas construções elementares, que são: a construção de retas perpendiculares e a construção do ponto médio de um segmento. Em seguida, fazendo uso dessas construções elementares, relacionarmos alguns tópicos do Número Áureo, como o retângulo áureo, a divisão do segmento em proporção áurea, entre outras atividades apresentadas no capítulo 4.

2.1 Construções Elementares com Régua e Compasso

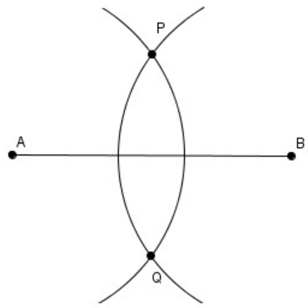
A seguir, apresentamos duas construções elementares: construção do ponto médio de um segmento de reta e construção de uma reta perpendicular, que serviram de base para a realização desse trabalho, tanto em algumas construções feitas para mostrar as propriedades do Número Áureo, que serão apresentadas no próximo capítulo, quanto nas atividades desenvolvidas em sala com os alunos e que se encontra no último capítulo.

2.1.1 Construção do ponto médio de um segmento de reta

Considere um segmento de reta $\overline{AB}$. Com a ponta seca do compasso em A e depois em B, traçamos dois arcos com a mesma abertura do compasso, que deve ser maior que a metade de $\overline{AB}$.

Chamamos de P e de Q os pontos em que os dois arcos se intersectam (Figura 6).

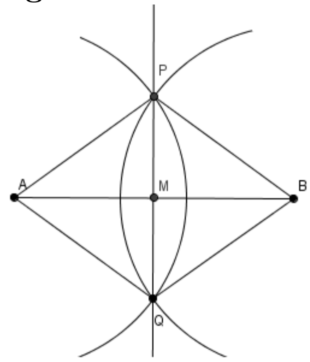
Figura 6: Construção do Ponto Médio



Fonte: Autora, 2014.

Traçamos a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, que intersecta o segmento $\overline{AB}$ em M, que é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ (Figura 7).

Figura 7: Ponto Médio



Fonte: Autora, 2014.

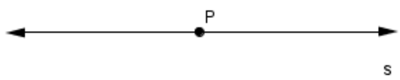
Observe que, nessa construção, a figura $APBQ$ é um losango, visto que $\overline{AP} = \overline{PB} = \overline{BQ} = \overline{QA}$ (abertura do compasso é a mesma). Logo, suas diagonais são perpendiculares e cortam-se no ponto médio.

A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é a reta perpendicular a $\overline{AB}$ que contém o seu ponto médio. A construção da mediatriz é a mesma construção do ponto médio feita acima.

2.1.2 Construção de uma reta perpendicular a uma reta dada que passe por um ponto pertencente à reta dada.

Considere uma reta s e um ponto P pertencente à reta s (Figura 8).

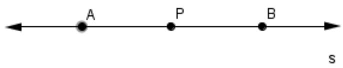
Figura 8: Reta s



Fonte: Autora, 2014.

Com abertura qualquer e ponta seca em P, marcamos o ponto A em s, à esquerda de P. Com a mesma abertura do compasso e ponta seca em P, marcamos o ponto B em s, à direita de P (Figura 9).

Figura 9: Construção de uma reta perpendicular

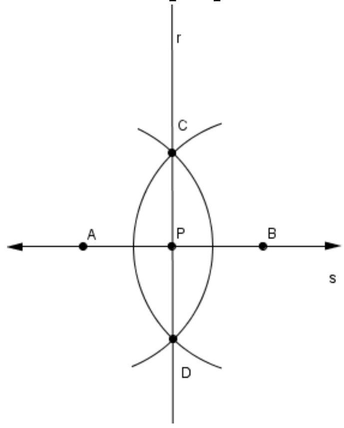


Fonte: Autora, 2014.

Com abertura maior que $\overline{AP}$ e ponta seca em A, depois em B, traçamos dois arcos com a mesma abertura do compasso, chamamos de C e D os pontos em que os dois arcos se intersectam (Figura 10).

A reta $\overleftrightarrow{CD}$ é a reta perpendicular à reta s que passa por P.

Figura 10: Reta perpendicular à reta s



Fonte: Autora, 2014.

3 NÚMERO DE OURO

Neste capítulo, apresentaremos como encontrar uma representação algébrica para o Número de Ouro partindo da representação geométrica. Falaremos de Fibonacci, um matemático que contribuiu bastante para o estudo da Razão Áurea. Além disso, apresentaremos algumas propriedades e curiosidades desse número, e algumas construções geométricas.

3.1 Segmento Áureo

Considere um segmento de reta $\overline{AB}$. Este segmento está dividido na razão média e extrema quando encontramos um ponto C pertencente a $\overline{AB}$, tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}, \text{com } \ \overline{AC} > \overline{CB}. \tag{1}$$

Em outras palavras, o ponto C divide o segmento de modo que, assim como o segmento todo está para a maior parte, a maior parte está para a menor parte.

Figura 11: Segmento Áureo

Fonte: Ramos, 2014.

Podemos encontrar um valor numérico para a razão em (1). Tomando $\overline{AC} = x$, $x > 0$ e $\overline{CB} = y$, temos $\overline{AB} = x + y$, logo

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por xy, obtemos

$$xy + y^2 = x^2 \Rightarrow x^2 - xy - y^2 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática acima na variável x, encontramos

$$x' = \frac{y(1+\sqrt{5})}{2} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{y(1-\sqrt{5})}{2}$$

Como $x, y > 0$, desconsideraremos o valor $x'' = \frac{y(1-\sqrt{5})}{2}$, por ser um número negativo. Portanto, a solução positiva nos dá o valor da Razão Áurea , ou seja,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x}{y} = \frac{\frac{y(1+\sqrt{5})}{2}}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...,$$

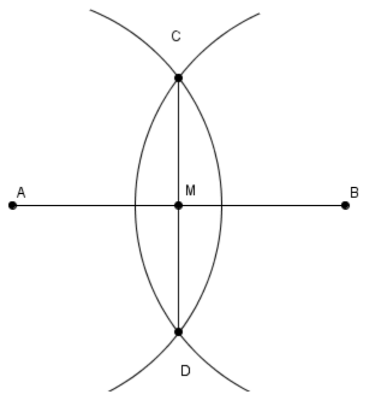
que será representada por Φ.

3.1.1 Construção do Segmento Áureo com régua e compasso

Podemos dividir um segmento em Razão Áurea utilizando régua e compasso. Para isso, considere um segmento $\overline{AB}$, e seguindo os passos abaixo, localizaremos o "ponto áureo", ou seja, o ponto que dividirá $\overline{AB}$ na Razão Áurea.

1. Marque o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$. Conforme construção da seção 2.1.1 do capítulo 2 (Figura 12).

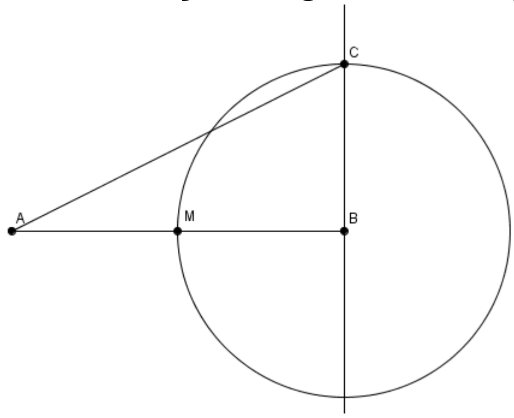
Figura 12: Construção do segmento áureo - passo 1



Fonte: Autora, 2014.

2. Pelo ponto B, trace um segmento perpendicular a $\overline{AB}$ (para a construção da reta perpendicular passando por B, ver seção 2.1.2 no capítulo 2). Com o centro do compasso em B e raio $\overline{BM}$, trace uma circunferência. Marque com o ponto C a interseção da circunferência com a reta perpendicular traçada anteriormente. Una os pontos A e C formando o triângulo retângulo ABC (Figura 13).

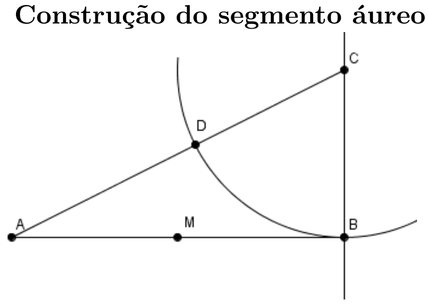
Figura 13: Construção do segmento áureo - passo 2



Fonte: Autora, 2014.

3. Com o centro do compasso em C e raio $\overline{CB}$, trace o arco de circunferência para obter o ponto D sobre a hipotenusa $\overline{AC}$. O ponto D é tal que $\overline{CD} = \overline{CB}$ (Figura 14).

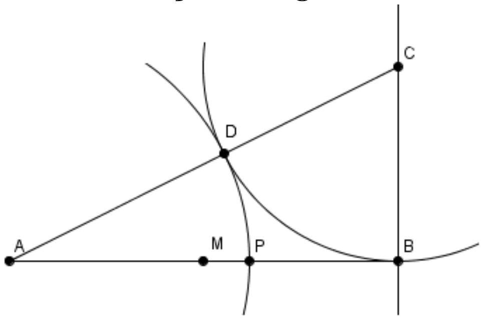
Figura 14: Construção do segmento áureo - passo 3



Fonte: Autora, 2014.

4. Com o centro do compasso em A e raio $\overline{AD}$, trace o arco de circunferência para obter o ponto P sobre $\overline{AB}$. O ponto P é tal que $\overline{AP} = \overline{AD}$. O ponto P obtido é o ponto que divide $\overline{AB}$ na Razão Áurea (Figura 15).

Figura 15: Construção do segmento áureo - passo 4



Fonte: Autora, 2014.

Agora, vamos mostrar algebricamente que, de fato, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \Phi$.

Suponha que $\overline{AB} = 2x$. Assim, $\overline{BC} = \overline{MB} = x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$$

$$\overline{AC}^2 = (2x)^2 + x^2$$

$$\overline{AC}^2 = 4x^2 + x^2$$

$$\overline{AC}^2 = 5x^2$$

$$\overline{AC} = x\sqrt{5}.$$

Por construção, temos que $\overline{AP} = \overline{AD}$ e $\overline{CD} = \overline{CB}$. Além disso,

$$\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD}$$

$$\overline{AD} = x\sqrt{5} - x$$

$$\overline{AD} = x(\sqrt{5} - 1).$$

Portanto

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{2x}{x(\sqrt{5} - 1)} \tag{2}$$

Racionalizando (2), temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

3.2 Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa, também conhecido como Leonardo Fibonacci (do latim filius Bonacci, filho da família Bonacci), nasceu na década de 1170, na cidade de Pisa, na região da Toscana (Itália), filho de um homem de negócios e funcionário do governo, chamado Guglielmo (LIVIO, 2011, p. 112).

Leonardo Fibonacci ou Leonardo Bigollo ("Bigollo" significa "viajante" nos dialetos toscano) ficou conhecido pelo seu papel na introdução dos algarismos indo-arábicos na Europa e pela famosa sequência numérica que o matemático francês Edouard Lucas no século XIX chamou de sequência de Fibonacci.

Segundo Livio (2011, p. 111), Fibonacci viajou para outros países mediterrâneos (entre eles: Grécia, Egito e Síria) e teve a oportunidade de estudar e comparar diferentes sistemas numéricos e métodos de operações aritméticas. Após concluir que os numerais indo-arábicos-que incluíam o princípio do valor de lugar-eram muito superiores a todos os outros métodos, ele dedicou os primeiros sete capítulos de seu livro *Liber abaci* (livro do ábaco-1202) a explicações sobre a notação indo-arábica e suas aplicações práticas. Boyer (2010, p. 173) chama o título desse livro de "título enganador" por não tratar sobre o ábaco e sim sobre problemas algébricos em que o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado.

Livio (2001, p. 115) cita que a contribuição mais importante de Fibonaci para a Razão Áurea (e a que mais trouxe fama para ele) foi um problema encontrado no Capítulo XII do *Liber abaci*.

O problema dizia o seguinte:

Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá a luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

Solução:

Vamos acompanhar o que acontece nos cinco primeiros meses:

- No 1º mês, temos apenas um par de coelhos (ainda filhotes);
- No 2º mês, continuamos com um par de coelhos (agora adultos);
- No 3º mês, nasce um par de filhotes. Logo, temos dois pares de coelhos (um par de adultos

e um par de filhotes);

- No 4º mês, o par inicial gera o seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos (o par inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes);

- No 5º mês, o par inicial gera o seu terceiro par de filhotes; já tem-se o par de filhotes gerado no mês anterior, agora adulto e o par de filhotes gerado no 3º mês que agora é adulto e fértil gera o seu primeiro par de filhotes. Logo, temos cinco pares de coelhos (três pares de adultos mais dois pares de filhotes);

- Etc.

Nota-se, que no próximo mês, o sexto, o número de pares de coelhos será a soma do número de pares de coelhos do mês atual mais o número de pares de coelhos adultos do mês anterior, pois serão estes que irão contribuir com o acréscimo do número de coelhos para o próximo mês, já que quando chegar o sexto mês estarão aptos a procriar. Logo, no sexto mês haverá oito pares de coelhos: os cinco pares presentes no quinto mês mais três pares de filhotes, gerados pelos pares adultos do 5º mês.

Com isso, podemos encontrar mais facilmente a quantidade de pares de coelhos em um ano. Pois os números de casais de coelhos, a cada mês, seguindo a observação acima, formam a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Portanto, teremos 144 pares de coelhos ao final de um ano.

Segue abaixo uma tabela com o número de coelhos em cada mês.

Tabela 1: Problema dos Coelhos

Mês	Nº de pares de adultos	Nº de pares de filhotes	Total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Fonte: Ramos, 2014

Considerando, no problema anterior, que o número de coelhos existentes no n-ésimo mês seja denotado por F_n, temos então que

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_1 = F_2 = 1.$$

Essas relações definem, por recorrência, uma sequência de números naturais, chamada de sequência de Fibonacci e seus elementos, chamados de números de Fibonacci.

Uma recorrência [1] do tipo

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \tag{3}$$

só permite determinar o elemento x_n se conhecermos os elementos anteriores x_{n-1} e x_{n-2}, que, para serem calculados, necessitam do conhecimento dos dois elementos anteriores, etc. Fica, portanto, univocamente definida a sequência quando são dados x_1 e x_2. A sequência de Fibonacci corresponde à recorrência (3), onde $x_1 = x_2 = 1$.

É interessante ver como essa sequência se relaciona com o Número de Ouro. Como exemplo, temos uma fórmula que nos permite calcular o n-ésimo termo da sequência sem precisar dos

[1]Uma recorrência é uma fórmula que define um elemento de uma sequência a partir de termos anteriores.

dois termos anteriores. O que é algo importante, quando se trata de recorrência. A fórmula é a seguinte:

Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se que

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \tag{4}$$

Esta fórmula é chamada de fórmula de Binet, pois segundo Livio (2011, p. 128) "Em meados do século XIX, o matemático francês Jacques Phillipe Marie Binet (1786 a 1856) redescobriu uma fórmula que, aparentemente, era conhecida no século XVIII pelo mais prolífico matemático da história, Leonard Euler (1707 a 1783), e pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667 a 1754)".

Outro fato que chama atenção na expressão acima é que, apesar de ser formada por potências de Φ, que é um número irracional, ela forma uma sequência de números naturais.

Para verificar a fórmula (4), devemos mostrar que, de fato, a fórmula de Binet nos permite encontrar todos os termos das sequência de Fibonacci. Para isso, devemos ter $F_1 = 1, F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$. Assim, usaremos o Princípio de Indução Matemática, mas antes iremos enunciá-lo.

Princípio de Indução Matemática: Seja $a \in \mathbb{N}$ e seja $p(n)$ uma sentença aberta em n. Suponha que

(i) $p(a)$ é verdade, e que

(ii) $\forall n \geq a, p(n) \Longrightarrow p(n+1)$ é verdade, então, $p(n)$ é verdade para todo $n \geq a$.

Vamos verificar que a sentença aberta (4) satisfaz as condições iniciais, ou seja, $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. Vejamos:

Para $n = 1$,

$$F_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1.$$

Para $n = 2$,

$$F_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = 1.$$

Portanto, as condições iniciais são verificadas.

Agora vamos mostrar pelo Princípio de Indução Matemática que a sentença aberta (4) é verdadeira, para todo número natural $n \geq 3$.

Para $n = 3$,

$$F_3 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} - \frac{1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}}{8}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{16\sqrt{5}}{8}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2.$$

Suponha que a sentença aberta (4) vale para $n > 3, n \in \mathbb{N}$. Vamos verificar que a sentença aberta também é verdadeira para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{2^2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{2^2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Logo, verificamos que a fórmula vale para $n + 1$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, a fórmula vale para todo $n \geq 3$.

Em Contador (2011, p.138-139), encontramos outro exemplo da relação da sequência de Fibonacci e Φ: ele mostra que quanto maiores forem os termos da sequência de Fibonacci, maior será a aproximação ao valor do Número Áureo ao se realizar a divisão entre dois termos consecutivos da sequência. Esta descoberta, segundo Livio (2011, p. 121), é atribuída a Kepler.

Vejamos alguns resultados dessa divisão na tabela abaixo:

Tabela 2: Razão entre Números de Fibonacci consecutivos

Razão	Resultado
1/1	1
2/1	2
3/2	1,5
5/3	1,666
8/5	1,600
13/8	1,625
21/13	1,6153
34/21	1,6190
55/34	1,6176
89/55	1,6181
144/89	1,6179

Fonte: Ramos, 2014

Podemos nos convencer de que realmente esta razão se aproxima de Φ, calculando o limite como segue abaixo.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}\right]}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^{n-1} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1 - \left(\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}}.$$

Como $-1 < \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) < 0$, então

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1} = 0.$$

Portanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{1} = \Phi.$$

3.3 Propriedades

O número Φ possui algumas curiosidades interessantes, como a relação existente entre as potências de Φ e os números de Fibonacci. Apresentamos, também, duas outras expressões que geram o número áureo e as propriedades únicas de produzir seu quadrado simplesmente somando 1 e produzir seu inverso subtraindo 1.

3.3.1 Potências de Φ

Segundo Sodré (p.58, 2014), podemos calcular as potências de Φ, para isso, partimos do fato que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ logo,

$\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \Phi$

$\Phi^3 = \Phi.\Phi^2 = \Phi(1+\Phi) = \Phi + \Phi^2 = \Phi + 1 + \Phi = 1 + 2\Phi;$

$\Phi^4 = \Phi.\Phi^3 = \Phi.(1 + 2\Phi) = \Phi + 2\Phi^2 = \Phi + 2(1 + \Phi) = 2 + 3\Phi;$

$\Phi^5 = \Phi.\Phi^4 = \Phi.(2 + 3\Phi) = 2\Phi + 3\Phi^2 = 2\Phi + 3(1 + \Phi) = 3 + 5\Phi;$

$\Phi^6 = \Phi.\Phi^5 = \Phi.(3 + 5\Phi) = 3\Phi + 5\Phi^2 = 3\Phi + 5(1 + \Phi) = 5 + 8\Phi.$

Neste ponto, já é possível sugerir que $\Phi^n = a_{n-1} + a_n.\Phi$, para $n \geq 2$, onde a_n são os termos da sequência de Fibonacci.

Usando Indução Matemática, pode-se mostrar essa relação entre as potências de Φ e os números de Fibonacci. De fato, sabendo que $\Phi^2 = 1 + 1.\Phi = a_1 + a_2\Phi$ e que, na sequência de Fibonacci, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$, para $k \geq 3$, e supondo $\Phi^n = a_{n-1} + a_n.\Phi$, para algum $n \geq 2$, tem-se:

$\Phi^{n+1} = \Phi.\Phi^n = \Phi(a_{n-1} + a_n\Phi) = \Phi.a_{n-1} + a_n(1 + \Phi)$

$\Phi^{n+1} = \Phi.a_{n-1} + a_n + \Phi.a_n$

$\Phi^{n+1} = \Phi(a_{n-1} + a_n) + a_n$

$\Phi^{n+1} = \Phi.a_{n+1} + a_n.$

Portanto, para $n \geq 2$, está provado que $\Phi^n = a_{n-1} + a_n.\Phi$.

3.3.2 Uma interessante relação entre $\frac{1}{\Phi}, \Phi$ e Φ^2

Da propriedade de potência apresentada anteriormente, temos que:

- $\Phi^2 = 1 + \Phi \Rightarrow \Phi^2 = 2,6180339887...$

  Tomando o valor de $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, podemos calcular o inverso,

- $\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}.\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0,6180339887...$

Disto, concluímos que , $\frac{1}{\Phi}, \Phi$ e Φ^2 têm exatamente os mesmos dígitos após a vírgula. Isso significa que Φ tem as propriedades únicas de produzir seu quadrado apenas adicionando 1 e produzir seu inverso subtraindo 1.

3.3.3 Duas outras formas matemáticas de encontrar o Número de Ouro

Além da forma apresentada para encontrar o Número de Ouro, podemos encontrá-lo, por exemplo, através da expressão:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}$$

Uma forma de obtermos o valor da expressão é a seguinte:

Suponha que $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+....}}}}}$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação acima, temos

$$x^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$$

Substituindo $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}}$ por x, temos a equação

$$x^2 = 1+x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Observe que se trata da mesma equação encontrada na definição do Número de Ouro. Logo, como $x > 0$, temos que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Outra forma de definir o Número de Ouro é através da expressão

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}}. \tag{5}$$

Pode-se obter o valor da expressão (5). Fazendo $x = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}}$ e observando que o denominador da segunda parcela é o próprio x, obtemos

$$x = 1+\frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

E novamente calculando a raiz da equação quadrática, chegamos ao valor

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

3.3.4 O retângulo e o triângulo áureo

- **Retângulo Áureo**

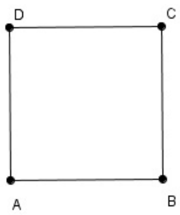
Definição - Um retângulo de base a e altura b é dito *áureo* quando $\frac{a}{b} = \Phi$, para $a > b$, ou $\frac{a}{b} = \frac{1}{\Phi}$, para $a < b$. Vamos trabalhar com o primeiro caso.

Construção do Retângulo Áureo com régua e compasso

Para construir o retângulo áureo com régua e compasso, vamos seguir os passos abaixo:

1. Construa um quadrado qualquer e nomeie os vértices desse quadrado por $ABCD$ no sentido anti-horário, de tal modo que $\overline{AB}$ corresponda a sua base. Este quadrado tem lado de medida a, (Figura 16).

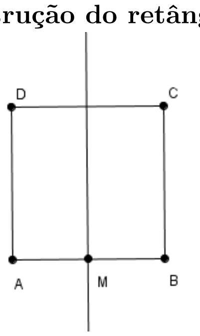
Figura 16: **Construção do retângulo áureo-passo 1**



Fonte: Autora, 2014.

2. Divida $\overline{AB}$ ao meio e marque ali o ponto M. Trace uma perpendicular a este ponto, dividindo o quadrado em dois retângulos (Figura 17).

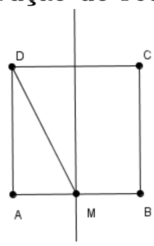
Figura 17: **Construção do retângulo áureo-passo 2**



Fonte: Autora, 2014.

3. Escolha um destes retângulos, digamos aquele com base $\overline{AM}$. Trace sua diagonal, passando por M (Figura 18).

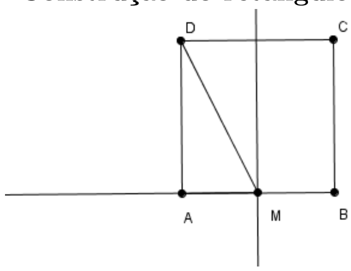
Figura 18: **Construção do retângulo áureo-passo 3**



Fonte: Autora, 2014.

4. Construa uma semirreta a partir de M, contendo $\overline{AM}$ (Figura 19).

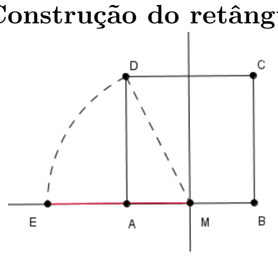
Figura 19: **Construção do retângulo áureo-passo 4**



Fonte: Autora, 2014.

5. Com a ponta seca do compasso sobre M, transfira a medida da diagonal para esta semirreta. Marque ali o ponto E (Figura 20).

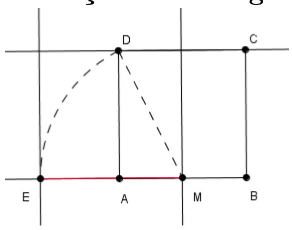
Figura 20: **Construção do retângulo áureo-passo 5**



Fonte: Autora, 2014.

6. Trace uma perpendicular passando pelo ponto E e prolongue o segmento $\overline{DC}$ até encontrar a perpendicular traçada anteriormente. Formando, assim, um retângulo com os pontos CBE como vértices (Figura 21).

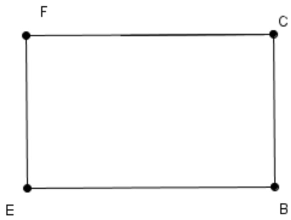
Figura 21: **Construção do retângulo áureo-passo 6**



Fonte: Autora, 2014.

Obtemos, assim, o Retângulo Áureo (Figura 22).

Figura 22: **Retângulo Áureo**



Fonte: Autora, 2014.

Vamos verificar algebricamente que $\frac{\overline{EB}}{\overline{CB}} = \Phi$.

Sendo $\overline{AB} = a$, na figura (3.6), como M é o ponto médio de $\overline{AB}$, (conforme passo 2), então $\overline{AM} = \frac{a}{2}$. Na figura (3.10) por construção temos que $\overline{DM} = \overline{EM}$ e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ADM, temos

$$\overline{DM}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{DA}^2$$

$$\overline{DM}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$$

$$\overline{DM}^2 = \frac{a^2}{4} + a^2$$

$$\overline{DM} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Logo

$$\overline{EB} = \overline{DM} + \overline{MB}$$

$$\overline{EB} = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}.$$

Portanto, temos um Retângulo Áureo, pois

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{CB}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

- **Triângulo Áureo**

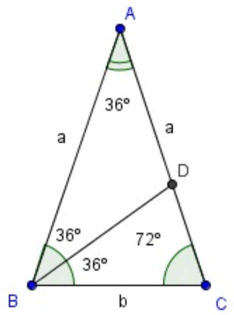
Definição - Chama-se *triângulo áureo* a todo triângulo isósceles cujos ângulos internos são 36º, 72º e 72º.

Proposição - Em um triângulo áureo, a bissetriz interna de um dos ângulos da base divide o lado oposto em média e extrema razão.

Demonstração

Considere o triângulo ABC de modo que $\hat{B} = \hat{C} = 72°$. Logo, $\hat{A} = 36°$. Sejam D a interseção da bissetriz de $\hat{B}$ com o lado $\overline{AC}, \overline{AB} = \overline{AC} = a$ e $\overline{BC} = b$ (Figura 23).

Figura 23: **Triângulo** ABC **e bissetriz interna**

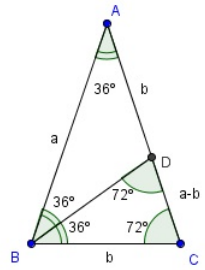


Fonte: Câmara, Rodrigues, 2008.

Do fato de $\overline{BD}$ ser bissetriz do ângulo $A\widehat{B}C$, resulta a divisão do triângulo ABC em dois triângulos também isósceles, o triângulo ABD de base $\overline{AB}$ e o triângulo BDC de base $\overline{DC}$. O que implica $\overline{BD} = \overline{AD}$ e $\overline{BC} = \overline{BD} = b$. Por transitividade, $\overline{AD} = b$.

Como $D \in \overline{AC}$, então $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC} = a$. Logo, $\overline{DC} = a - b$. Usando o fato de que , em qualquer triângulo, o maior lado opõe-se ao maior ângulo, concluímos que $\overline{BC} > \overline{DC}$, pois no triângulo BDC, $\overline{BC}$ é oposto a um ângulo de 72º e $\overline{DC}$ é oposto a um ângulo de 36º (Figura 24).

Figura 24: Triângulo ABC, bissetriz interna e ângulos



Fonte: Câmara, Rodrigues, 2008.

Da semelhança de triângulos existente entre os triângulos BDC e ABC (caso AAA), temos

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}.$$

Mas $\overline{BC} = \overline{AD}$, então

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}, \quad \text{com} \quad \overline{AD} > \overline{DC}.$$

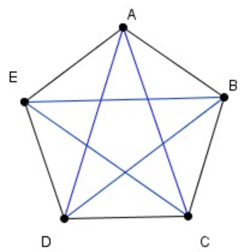
Então, pela definição de segmento áureo, D divide o lado $\overline{AC}$ na Razão Áurea e $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \Phi$.

3.3.5 O pentagrama e o pentágono

O pentagrama é provavelmente um dos símbolos mais antigos cultivados pela humanidade. Segundo Livio, (2001, p. 47) "Aparentemente, os pitagóricos usavam o pentagrama-a estrela de cinco pontas-como o símbolo de sua irmandade e o chamavam de 'saúde' ".

Podemos obter o pentagrama ao traçar as diagonais do pentágono regular, conforme figura 25.

Figura 25: Pentágono e Pentagrama

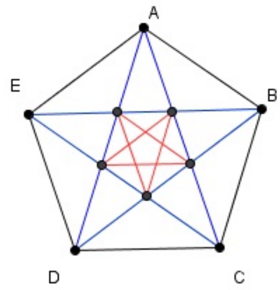


Fonte: Neto, 2014.

Ao unir as diagonais do pentágono, obtemos o pentagrama e um outro pentágono no centro. Traçando, agora, as diagonais do novo pentágono, teremos mais um pentágono e um pentagrama.

Esse processo pode ser continuado, infinitamente, obtendo pentágonos e pentagramas cada vez menores, conforme Figura 26. Esse processo é conhecido como autopropagação (Figura 26).

Figura 26: Autopropagação



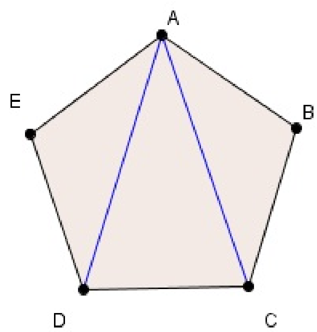
Fonte: Ramos, 2014.

Existem várias relações entre o pentágono regular e a razão áurea. Como exemplo, vamos mostrar duas dessas relações.

- *A razão entre a diagonal e o lado do pentágono é* Φ.

Considere o pentágono regular abaixo. Traçando as diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$, obtemos três triângulos isósceles: ABC, ACD e ADE, onde os triângulos ABC e ADE são congruentes (Figura 27).

Figura 27: Pentágono Regular



Fonte: Ramos, 2014.

Calculamos a soma dos ângulos internos de um polígono através da seguinte fórmula $S = (n-2)180^o$, em que n é o número de lados do polígono. Logo, a soma dos ângulos internos de um pentágono é 540^o. Como o pentágono que estamos trabalhando é regular, ele possui todos os ângulos iguais. Portanto, cada ângulo é igual a 108^o.

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º e usando o fato do triângulo ABC ser isósceles, temos

$$A\hat{C}B = C\hat{A}B = \frac{180^o - 108^o}{2} = 36^o.$$

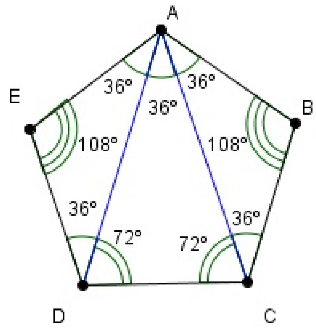
O triângulo ADE na figura (28) também é isósceles. Então, pela análise feita acima, $E\hat{A}D = A\hat{D}E = 36^o$. Assim, as medidas dos ângulos internos do triângulo ACD são

$$D\hat{A}C = 108^o - 36^o - 36^o = 36^o$$

e

$$A\hat{D}C = A\hat{C}D = 108^o - 36^o = 72^o.$$

Figura 28: Pentágono com duas diagonais



Fonte: Ramos, 2014.

Portanto, o triângulo ACD é um triângulo áureo, o que nos diz que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \Phi.$$

Ou seja, a razão entre a diagonal e o lado do pentágono é Φ.

- *O ponto de intersecção de duas diagonais quaisquer de um pentágono regular divide ambas na Razão Áurea.*

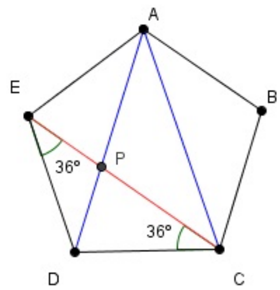
Considere o pentágono regular da figura 27. Traçando a diagonal $\overline{CE}$, obtemos o ponto P, ponto de intersecção das diagonais $\overline{CE}$ e $\overline{AD}$, figura 29. Temos que o triângulo EDC é isósceles e

$$C\hat{E}D = E\hat{C}D = \frac{180^o - 108^o}{2} = 36^o.$$

Logo, $\overline{EC}$ é bissetriz de $D\hat{C}A$, o que pela subseção (3.3.4) resulta

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \Phi.$$

Figura 29: Pentágono com duas diagonais e os ângulos



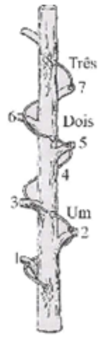
Fonte: Ramos, 2014.

Do triângulo ACE, que é um triângulo áureo, obtemos que $\frac{\overline{CP}}{\overline{PE}} = \Phi$, usando processo análogo ao mostrado acima.

3.4 A razão áurea e a botânica

Encontramos uma aplicação interessante do Número de Ouro também na botânica, onde se usa o termo filotoxia (phyllotaxis "arranjo de folhas", em grego) para se referir ao modo como as folhas crescem ao longo do galho ou os talos ao longo de um ramo. Observando a forma como um talo vertical cresce, pode-se perceber que ele produz folhas com um espaço regular entre elas (LIVIO, 2011, p.129). Porém, as folhas não crescem diretamente uma sobre a outra: elas crescem em forma de uma espiral (como na figura 30); e segundo Contador (2011, p. 213) "É fácil entender porque as folhas ao longo de um ramo de uma planta ou os galhos em torno do caule tendem a crescer de forma espiralada. Acontece que esta forma propicia um melhor aproveitamento de sua exposição ao sol, à chuva e ao ar."

Figura 30: Filotoxia



Fonte: Contador, 2011.

Segundo Livio (2011, p. 132), o que caracteriza a distribuição das folhas é o ângulo entre as linhas que ligam o centro do caule às folhas sucessivas. Em 1837, os irmãos Bravais descobriram que o ângulo entre as folhas é de aproximadamente $137,50^0$, este ângulo é conhecido como *Ângulo Áureo.*

Analisando agora o girassol (figura 31), verificamos que suas sementes estão distribuídas em várias espirais, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário. E a quantidade dessas espirais está relacionada com os números de Fibonacci, pois dependendo do tamanho do girassol, ele possui 21 espirais em um sentido e 34 no outro sentido, 34 espirais em um sentido e 55 em outro sentido, 55 e 89 ou 89 e 144, que são números de Fibonacci adjacentes (CONTADOR, 2011, p. 206).

Figura 31: Girassol

Fonte: http://www.fotosefotos.com/page_img/12827/girassol
Acesso em 18/07/2014.

Encontramos outros exemplos de flores, como é o caso da margarina (figura 32), que segue o mesmo padrão do girassol, como cita Livio

> Muitas pessoas já se valeram (pelo menos simbolicamente) em algum momento de suas vidas do número de pétalas de margaridas para satisfazer sua curiosidade sobre a seguinte pergunta: "Bem me quer, mal me quer?" A maioria das margaridas-do-campo tem treze, vinte e uma ou trinta e quatro pétalas, todos números de Fibonacci (Não seria bom saber de antemão se a margarida tem um número par ou ímpar de pétalas?) O número de pétalas simplesmente reflete o número de espirais de uma família (2011, p. 133).

Porém, deve-se entender que os dados encontrados na filotaxia são segundo (Coxeter apud Livio p. 136) "apenas uma tendência fascinantemente predominante." O que significa que, além do ângulo áureo, a planta precisa de outros fatores para crescer e que não podemos aplicar essas regras a todas as circunstâncias.

Figura 32: Margarida

Fonte: http://www.topblog.com.br/2011/blogs/wpcontent/uploads/2011/09/Margarida.jpg
Acesso em 18/07/2014.

4 APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

A pesquisa foi realizada na Escola Municipal Esmeralda Figueiredo, no município de Rio Largo - AL. Participaram da pesquisa 81 alunos do turno matutino durante período de abril a maio de 2014. Estes alunos fazem parte de duas turmas de 8º ano divididos da seguinte forma: a turma A com 40 alunos e a turma B com 41 alunos.

Para uso da imagem e das atividades realizadas pelos alunos, foi pedida autorização aos pais dos alunos através do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido que se encontra no final do trabalho. A análise das atividades foi realizada através das observações realizadas durante a aplicação das atividades, do material produzido pelos alunos e dos relatórios feitos por eles. Conforme consta no Termo, para identificar os alunos serão utilizados códigos. Os alunos da turma A são identificados pelos códigos de A1 até A40 e os alunos da turma B, de B1 até B41.

Objetivos Gerais

- Trabalhar um tópico que geralmente não é abordado no âmbito da Educação Básica;
- Trazer a Matemática para o cotidiano do aluno e mostrar sua presença em várias situações de uma maneira clara e objetiva;
- Desenvolver a coordenação motora dos alunos;
- Trabalhar construções geométricas com régua e compasso;
- Mostrar a aplicação de um número irracional em áreas distintas.

Material

Lápis, borracha, fita métrica, calculadora, esquadro, régua, compasso, transferidor e atividade impressa.

Tempo previsto

Doze horas/aula.

4.1 Atividade: Vídeos

Objetivo: Despertar o interesse dos alunos sobre a matemática e a relação dessa ciência com o dia a dia.

Inicialmente, foi discutido um pouco sobre a história do Número de Ouro e algumas das aplicações. Isso foi feito com uma apresentação em data show na sala de aula. Após a apresentação, os alunos assistiram a dois vídeos que tratam sobre o tema. O data show foi fornecido pela escola. Os dois vídeos encontram-se disponível na internet, um chama-se "Donald no País da Matemágica" e tem a duração de 27 min e o outro chama-se "Número de ouro - Arte e Matemática" e tem a duração de 25 min. Essa parte inicial foi feita em duas aulas de 1h de duração cada uma. A mesma atividade foi aplicada nas duas turmas.
Durante a apresentação dos slides e dos vídeos, os alunos prestaram bastante atenção, demonstrando interesse pelo assunto. Após a apresentação, iniciou-se um momento de discussão sobre o assunto objetivando ver o que os alunos haviam compreendido acerca do conteúdo e o que os chamou mais atenção. Seguem alguns comentários dos alunos:

Aluno A1:
"Eu entendi que é possível encontrar Números de Ouro em nosso dia-a-dia e também que existem quadros hoje que foram feitos com Número de Ouro".

Aluno A2 :
"Eu gostei muito da aula, gostaria que sempre tivesse aula assim. Este assunto é bem interessante ainda não tinha estuda isto".

Aluno A3 :
"A matemática é muito importante, tem matemática até na história, adorei ouvir falar de Leonardo da Vinci".

Com a fala dos alunos pode-se perceber o interesse pelo assunto e que eles começam a observar a existência da matemática em outras áreas como na arte isso ficou evidente na fala dos alunos A1 e A2. Nota-se também certa surpresa ao fazer a relação entre a matemática e a história na fala do aluno A3.

Aluno B1 :

"A aula sobre o Número de Ouro é melhor do que as aulas anteriores de fração, de equação e de expressão que são as que eu tenho mais dificuldade".

Aluno B2 :

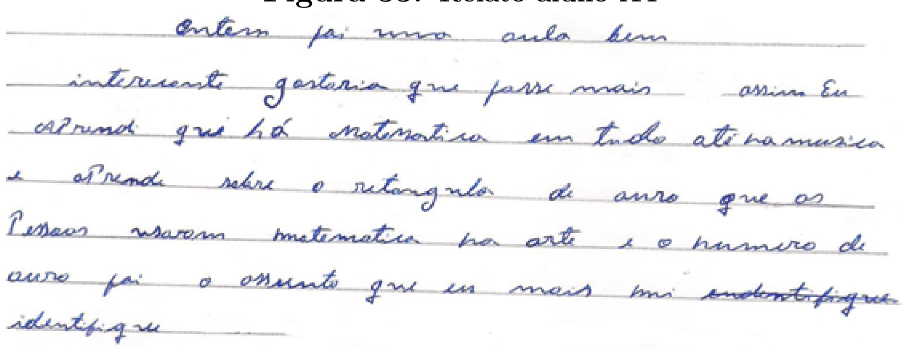
"Na minha opinião o Número de Ouro é muito interessante porque ele se destaca em vários lugares como na música, na arquitetura".

Com o comentário do aluno B1 observa-se que ele teve mais facilidade com o conteúdo e na fala do aluno B2 encontramos novamente a ligação da matemática com outras áreas.

No momento da discussão foram poucos os alunos que falaram, os demais não quiseram comentar sobre o tema justificando que ficavam envergonhados, então foi sugerido que eles escrevessem sobre o assunto e entregasse na próxima aula. Seguem alguns trechos sobre a opinião dos alunos nos relatórios.

"Ontem foi uma aula bem interessante gostaria que fosse mais assim. Eu aprendi que há matematica em tudo até na musica e aprendi sobre o retangulo de ouro que as pessoas usavam matematica na arte e o numero de ouro foi o assunto que eu mais mi identifiquei" (Figura 33).

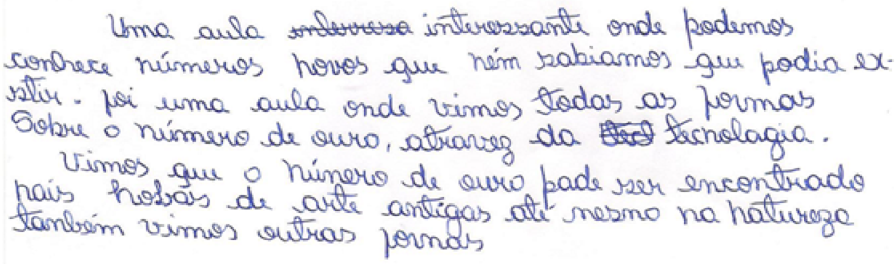
Figura 33: Relato aluno A4


Ontem foi uma aula bem
interessante gostaria que fosse mais assim Eu
aPrendi que há matematica em tudo até na musica
e aPrendi sobre o retangulo de ouro que os
Pessoas usavam matematica na arte e o numero de
ouro foi o assunto que eu mais mi ~~endentifique~~
identifiqu

Fonte: Autora, 2014.

“Uma aula interessante onde podemos conhece números novos que ném sabiamos que podia exstir foi uma aula onde vimos todas as formas sobre o número de ouro, atravez da tecnologia. Vimos que o número de ouro pode ser encontrado nais hobás de arte antigas até nesno na natureza tanbém vimos outras fornas” (Figura 34).

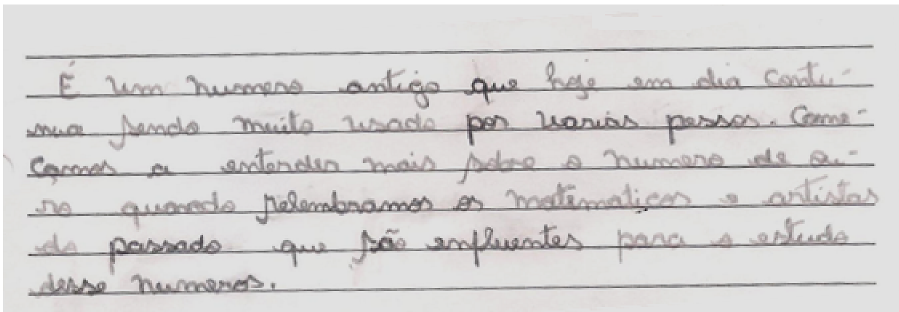
Figura 34: **Relato aluno B3**


Uma aula ~~interessa~~ interessante onde podemos
conhece números novos que ném sabiamos que podia ex-
stir. foi uma aula onde vimos todas as formas
Sobre o número de ouro, atravez da ~~tec~~ tecnologia.
Vimos que o número de ouro pode ser encontrado
nais hobás de arte antigas até nesno na natureza
tanbém vimos outras fornas

Fonte: Autora, 2014.

“É um número antigo que hoje em dia continua sendo muito usado por varias pessos. Começamos a entender mais sobre o numero de ouro quando lembramos os matematicos e artistas do passado que são enfluentes para o estudo desse numeros” (Figura 35).

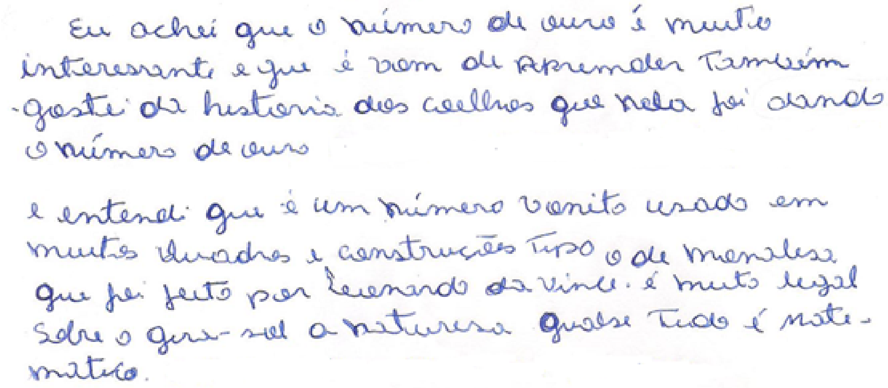
Figura 35: **Relato aluno B4**


É um numero antigo que hoje em dia conti-
nua sendo muito usado por varias pessos. Come-
çamos a entender mais sobre o numero de ou-
ro quando relembramos os matematicos e artistas
do passado que são enfluentes para o estudo
desse numeros.

Fonte: Autora, 2014.

"Eu achei que o número de ouro é muito interessante e que é bom de aprender também gostei da historia dos coelhos que nela foi dando o número de ouro e entendi que é um número bonito usado em muitos quadros e construções tipo o de monalisa que foi feito por Leonardo da Vinci é muito legal sobre o gira-sol a naturesa quase tudo é matematica" (Figura 36).

Figura 36: **Relato aluno B5**


Eu achei que o número de ouro é muito
interessante e que é bom de Aprender Também
gostei da historia dos coelhos que nela foi dando
o número de ouro
e entendi que é um número bonito usado em
muitos quadros e construções Tipo o de monalisa
que foi feito por Leonardo da Vinci. é muito legal
Sobre o gira-sol a naturesa quase Tudo é mate-
matica.

Fonte: Autora, 2014.

Os relatos acima confirmam as falas dos alunos em sala, mostrando o interesse dos estudantes pelo assunto e a relação que eles observaram da matemática com a realidade. O mesmo aconteceu com os outros relatórios.

Imagens da apresentação dos vídeos:

Figura 37: Vídeo 1

Fonte: Autora, 2014

Figura 38: Vídeo 2

Fonte: Autora, 2014

Figura 39: Vídeo 3

Fonte: Autora, 2014

4.2 Atividade: Medidas do corpo humano

Objetivo: Realizar algumas medições no corpo humano e realizar as razões para verificar se o valor se aproxima do Número de Ouro.

É fácil encontrar textos que relacionam a Razão Áurea com a beleza e afirmações de que "para o homem ser perfeito a razão entre as usas medidas como a sua altura e a distância do seu umbigo ao chão deve ser aproximadamente Φ"(Câmara, Rodrigues, 2008, p. 148). Porém, como encontramos em Lopes (2014), não existe nenhum registro que comprove essas afirmações. Esta explicação foi feita no momento da apresentação em slide com as turmas e retomada antes da realização dessa atividade, na qual os alunos discutiram o conceito de beleza para eles.

Antes de iniciar o exercício, a turma foi dividida em equipes com cinco componentes em média. Cada equipe recebeu uma fita métrica e a atividade impressa para o preenchimento dos dados pedidos. Cada aluno foi orientado a realizar a medição de um outro colega de modo que todos da equipe tivessem suas medidas anotadas por algum colega. Durante a realização do exercício, os alunos apresentaram dificuldades com as unidades de medida. Quando se tratava de unidades pequenas-como a medida do joelho até o chão-eles escreviam em centímetros, mas quando precisavam medir a altura do colega, eles não sabiam se escreviam em centímetros ou em metros. Outra dificuldade apresentada foi com o conceito de média aritmética. Para esclarecer esse conceito, foi necessário parar um pouco a atividade para realizar alguns exemplos. Após a realização das medidas e dos cálculos, cada equipe informou o aluno da sua equipe que tinha a média mais próxima do Número de Ouro. Essa informação era anotada no quadro e assim foi escolhido o aluno da turma com as medidas mais próxima do Número de Ouro. O resultado obtido para esse aluno foi 1,618 o que realmente é muito próximo da Razão Áurea. Porém, a grande maioria se distanciou desse número e a conclusão que a turma chegou após a atividade é que este número não retrata a beleza nas pessoas.

Segue a atividade realizada pelo aluno A8 e algumas fotos da atividade.

Figura 40: Atividade - Alunos A8

Utilizando uma fita métrica, preencha a tabela abaixo e calcule a média aritmética das razões.

Nome	A8
Medidas	
Da altura – a	1,70
Do umbigo até o chão – b	1,07
Do ombro até a ponta do dedo médio – c	0,75
Do cotovelo até a ponta do dedo médio – d	0,47
Da perna – e	0,92
Do joelho até o chão – f	0,55
Razões	
a/b	1,588...
c/d	1,595...
e/f	1,672...
Média Aritmética das 3 razões	1,618...

Fonte: Autora, 2014

Figura 41: Atividade - Aluno A9, A35 e A39

Fonte: Autora, 2014

Figura 42: Atividade - Aluno A5, A15 e A18

Fonte: Autora, 2014

4.3 Atividade: Sequência de Fibonacci

Objetivo: Construir a Sequência de Fibonacci e perceber a relação desta com o Número de Ouro.

Para esta atividade, a turma foi dividida em equipes com cinco componentes em média, e cada componente da equipe recebeu uma atividade impressa com o problema dos coelhos apresentado na seção 3.2 e uma tabela (como a que segue abaixo) para o preenchimento dos dados pedidos. Os alunos conseguiram compreender com certa rapidez o objetivo da atividade e muitos lembraram o que tinham visto no vídeo, em vários momentos ouviam-se comentários em relação ao vídeo. Esta atividade fez com que muitos alunos criassem métodos diferentes para o preenchimento da tabela como é comprovado pelos comentários no final da atividade. Após o preenchimento da tabela, eles discutiram sobre os valores encontrados nas razões dos termos e como esses valores se aproximam do valor do Número de Ouro. Não foram observadas dificuldades no preenchimento da tabela, apenas alguns comentários sobre a expressão "razões", pois alguns não lembravam o significado, o que foi esclarecido até por alunos da própria equipe. Para realizar as divisões, foi permitido o uso de calculadoras.

Seguem alguns trabalhos feitos pelos alunos.

"Eu percebi que se eu somo o numero de cima com o proximo eu vou ter a resposta desejada. Tem muitas semelhanças por que a maioria chega perto do valor de Φ" (Figura 43).

Figura 43: Atividade - Aluno A6

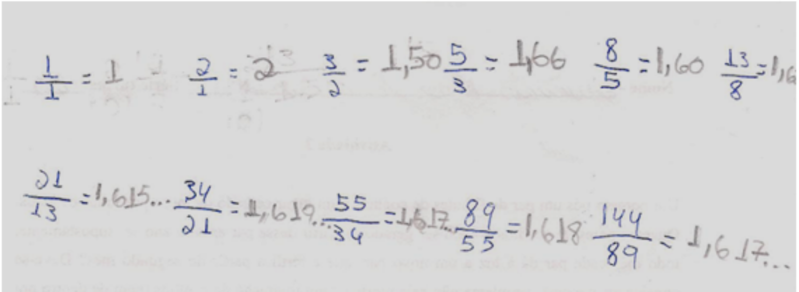
Mês	Nº de pares de adultos	Nº de pares de filhotes	Total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Agora calcule as razões sucessivas entre um termo da sequência e o seu anterior, partindo do segundo termo, o que você percebe? Tem alguma semelhança com o valor de ϕ?

Eu Persebi que se eu soma o numero de cima com o Proximo Eu vou Ter a resposta desejada. Tem Muitas semelhaças por que a maioria chega Perto do valor de Ø.

Fonte: Autora, 2014

Figura 44: Atividade - Aluno A6 parte 2

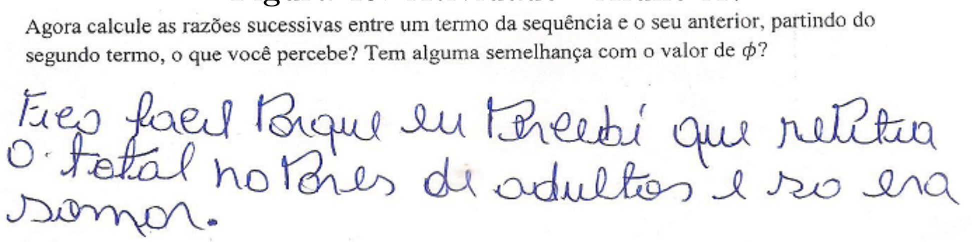


Fonte: Autora, 2014

O aluno A6 percebeu que, a partir de uma determinada linha, os termos da sequência de Fibonacci aparecem em todas as colunas. Ele utilizou isso para completar a tabela de forma mais rápida.

"Fico facil porque eu percebi que repetia o total no pares de adultos e so era somar" (Figura 45).

Figura 45: Atividade - Aluno A7

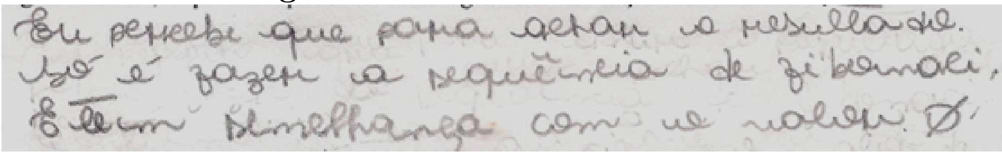


Fonte: Autora, 2014

Percebe-se com a fala acima (Figura 45) que os alunos não tiveram dificuldades com a atividade, o que os motivou. Nota-se, também, que as estratégias são diferentes: o aluno A7, por exemplo, repetia o número que aparecia na coluna "Total" linha 1, na próxima linha na coluna "N° de pares de adultos" e o número que aparecia na coluna "N° de pares de adultos" na linha 1, ele repetia na próxima linha na coluna "N° de filhotes", depois efetuava a soma da linha 2, obtendo um novo valor "Total". Continuando o procedimento citado ele conseguiu preencher toda a tabela.

"Eu percebi que para achar a resultado só é fazer a sequência de fibonaci. E tem semelhança com o valor Φ" (Figura 46).

Figura 46: Atividade - Aluno B7



Fonte: Autora, 2014

Nota-se que o aluno B7 lembrou o nome utilizado para representar essa sequência, que é a sequência de Fibonacci. No geral, os alunos perceberam a aproximação das razões com o Número de Ouro.

4.4 Atividades de Construção Geométrica

Três semanas antes da realização das atividades de construção geométrica, os alunos foram avisados de que precisariam levar para as aulas alguns instrumentos para realização das atividades. Os instrumentos eram: régua, compasso, esquadro e transferidor. Além do material citado, também foi pedido que levassem calculadora que poderia ser a do celular. No dia da atividade, foram levados materiais extra para o caso de algum aluno esquecer o seu. Mesmo assim, a quantidade foi insuficiente para todos, por isso precisou-se de mais tempo na aplicação das atividades.

4.4.1 Atividade: Divisão de um segmento na Razão Áurea

Objetivo: Construção de reta perpendicular com esquadro e construção do ponto médio através da divisão de um segmento em razão áurea.

Esta foi a primeira atividade de construção geométrica desenvolvida. Os alunos foram orientados a trabalhar em duplas, porém cada um dos alunos deveria realizar sua própria construção, seguindo a orientação que constava na atividade impressa. A comprovação de que realmente o segmento foi dividido em Proporção Áurea está na seção 3.1.1 deste trabalho, mas optamos por não realizá-la com os alunos por envolver conteúdos ainda não estudados por eles, como radiciação. Porém, dependendo da série em que esta atividade for aplicada, aconselhamos realizar a comprovação. Para esta atividade, foram utilizadas duas aulas de 60 minutos cada uma.

Inicialmente foi aberta uma discussão para averiguar os conhecimentos dos alunos acerca dos conceitos de ponto médio e reta perpendicular. Alguns alunos tinham noção dos conceitos, mas não sabiam como construir utilizando os instrumentos: régua, compasso e esquadro. Muitos alunos afirmaram que não conheciam os dois últimos instrumentos.

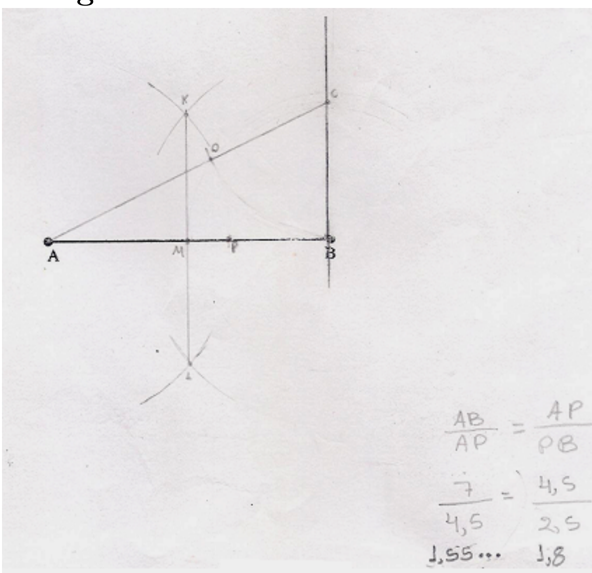
Nesta atividade, os passos foram feitos no quadro e os alunos observavam para realizá-los no material impresso. Para o primeiro passo, foi explicado o que é ponto médio e foi feita, então, a construção com régua e compasso. Também foi apresentada a justificativa para a construção utilizando as propriedades do losango. O procedimento para a construção do ponto médio de um segmento e sua justificativa encontram-se na seção 2.1.1. Nesse momento, foi observado que os alunos apresentaram bastante dificuldade em manusear o compasso. Para construir a perpendicular, que é o segundo passo da atividade, optou-se por utilizar o esquadro. Para os demais passos os alunos apresentaram mais facilidade.

Para verificar se o ponto realmente dividia o segmento em Razão Áurea, ao final da atividade foi pedido que os alunos medissem os segmentos $\overline{AB}, \overline{AP}$ e $\overline{PB}$ com a régua, e realizassem a divisão dos segmentos $\overline{AB}/\overline{AP}$ e $\overline{AP}/\overline{PB}$. Para isso, foi permitido o uso de calculadora. Nesse momento observou-se que os alunos apresentaram dificuldade com as medições quando era necessário utilizar milímetros.

Após as divisões, alguns alunos não encontraram os valores próximos ao número esperado, o que gerou uma nova discussão acerca dos motivos. A primeira resposta apontada por eles foi a falta de habilidade no uso do compasso; alguns afirmaram que era muito complicado utilizar o compasso. Além desse motivo, também foi comentado que existem instrumentos de desenho profissionais com um grau de precisão bem melhor do que o dos instrumentos escolares utilizados por eles.

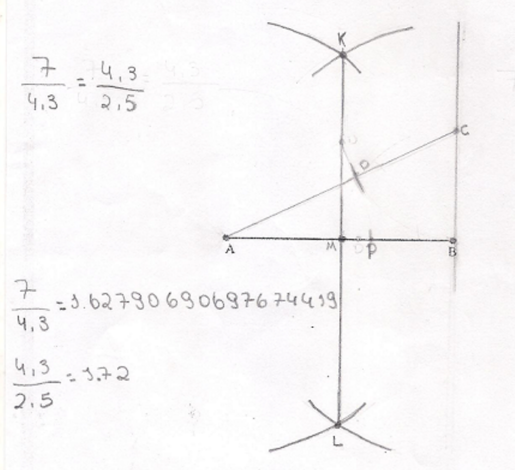
A seguir, temos alguns dos trabalhos feitos pelos alunos.

Figura 47: Atividade - Aluno B1



Fonte: Autora, 2014

Figura 48: Atividade - Aluno B6



Fonte: Autora, 2014

4.4.2 Atividade: Retângulo Áureo

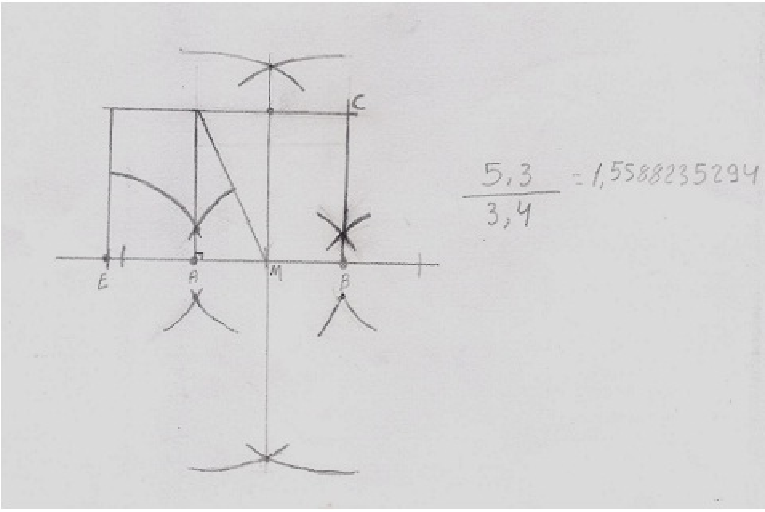
Objetivo: Construção de uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto pertencente à reta dada utilizando para isso a construção do Retângulo Áureo.

De forma semelhante à atividade anterior, os alunos formaram duplas para a realização dessa atividade, mas cada aluno recebeu um material impresso para realizar sua própria construção. Foi feita uma retomada da apresentação dos vídeos para relembrar a relação entre o Retângulo Áureo e o Número de Ouro. Em seguida, iniciou-se uma breve discussão a respeito do conceito de quadrado e retângulo, onde os alunos foram falando suas definições para os dois quadriláteros e sendo escritas no quadro cada definição. Algumas respostas para o que é um quadrado foram: "É uma forma geométrica"; "É uma figura de quatro lados iguais"; ao ouvir essa resposta, outro aluno complementou com a seguinte fala "só que com todos os ângulos retos". Partindo dessa discussão ficamos com o seguinte conceito para quadrado: "É um quadrilátero com quatro lados iguais e quatro ângulos retos". Para o retângulo, tivemos as seguintes respostas: "É um quadrado esticado"; "É como um quadrado só que não tem todos os lados iguais". Então ficamos com o seguinte conceito "É um quadrilátero com todos os ângulos retos". A partir daí, deu-se início à construção de um quadrado conforme era pedido no primeiro passo da atividade impressa.

Para essa atividade, foi necessária a construção de uma perpendicular por um ponto pertencente à reta suporte, na qual foi construída a base do quadrado, e esse era o objetivo da atividade. Tomamos como base a seção 2.1.2 para construção da perpendicular. A construção do retângulo e a comprovação algébrica de que o retângulo construído é um Retângulo Áureo encontra-se na seção 3.3.4. Com os alunos, a comprovação foi feita efetuando-se a divisão da medida do maior lado pelo menor lado do retângulo. Nem todos conseguiram encontrar um valor próximo ao valor do Número de Ouro, pelos mesmos motivos citados na atividades anterior. Dentre todas as atividades, essa foi a que os alunos tiveram mais dificuldade. Alguns acharam muito extensa, por isso foi necessário um tempo maior do que o que havia sido planejado. Para concluir todos os passos, foram utilizadas 3 aulas de 60 minutos cada uma.

Atividade realizada pelo aluno A5 (Figura 49).

Figura 49: Atividade - Aluno A5



Fonte: Autora, 2014

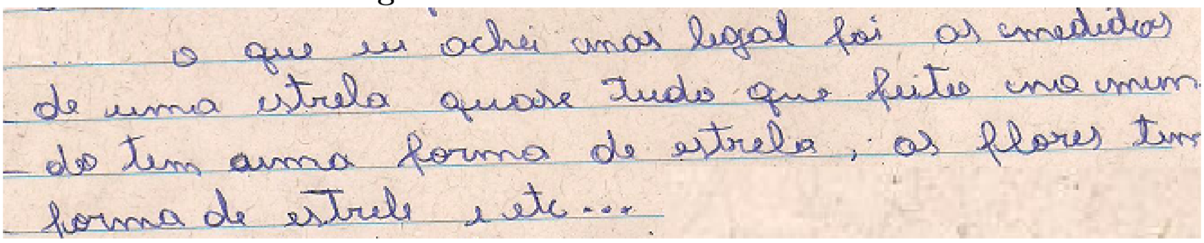
4.4.3 Atividade:Pentágono regular e Pentagrama

Objetivo: Utilizar as construções do pentágono regular e do pentagrama para fixar as construções de retas perpendiculares e mediatriz.

Para a realização dessa atividade, a turma foi dividida em grupos com três alunos em cada grupo. Antes do início da atividade, foi discutido um pouco sobre o pentágono regular e o pentagrama. Alguns alunos lembraram-se do que haviam visto nos vídeos e citaram alguns trechos que chamaram mais a atenção deles como, por exemplo, o símbolo usado pelos pitagóricos e os formatos encontrados na natureza que têm o formato de um pentagrama. Como segue no texto do aluno B8 (Figura 50).

"o que eu achei mas legal foi as medidas de uma estrela quase tudo que feito no mundo tem uma forma de estrela, as flores tem forma de estrela e etc ..."

Figura 50: Atividade - Aluno B8

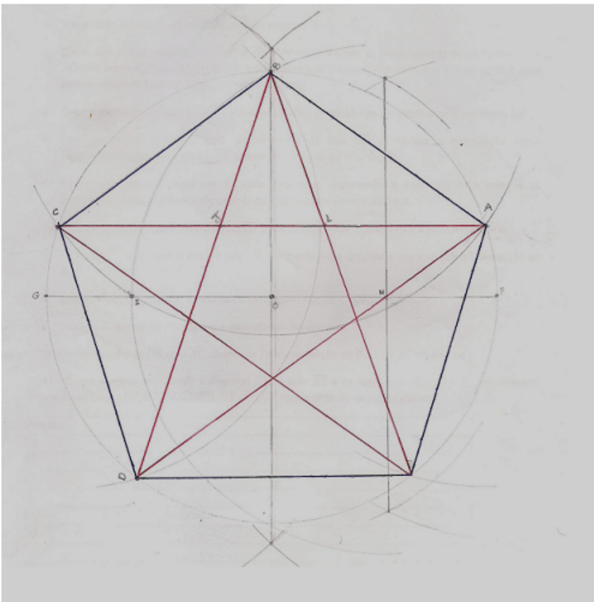

o que eu achei mas legal foi as medidas
de uma estrela quase tudo que feito no mun-
do tem uma forma de estrela, as flores tem
forma de estrela e etc...

Fonte: Autora, 2014

Esta atividade foi desenvolvida em uma aula de uma hora. Pelos relatos dos alunos, essa foi a construção que eles tiveram menos dificuldade. Para a construção, foram utilizadas as construções de retas perpendiculares e mediatriz já vistas nas atividades anteriores. Após a construção, foi pedido para que os alunos realizassem medições de alguns segmentos da figura e fizessem algumas razões para verificar a relação existente entre o pentágono e o pentagrama com o Número de Ouro.

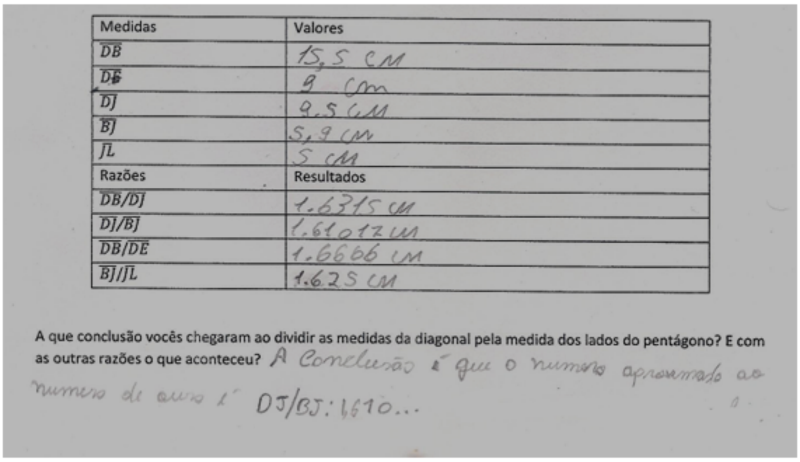
Segue a atividade feita pelos alunos B9, B10 e B11 (Figuras 51 e 52).

Figura 51: Atividade - Aluno B9, B10 e B11



Fonte: Autora, 2014

Figura 52: Atividade - Aluno B9, B10 e B11 parte 2



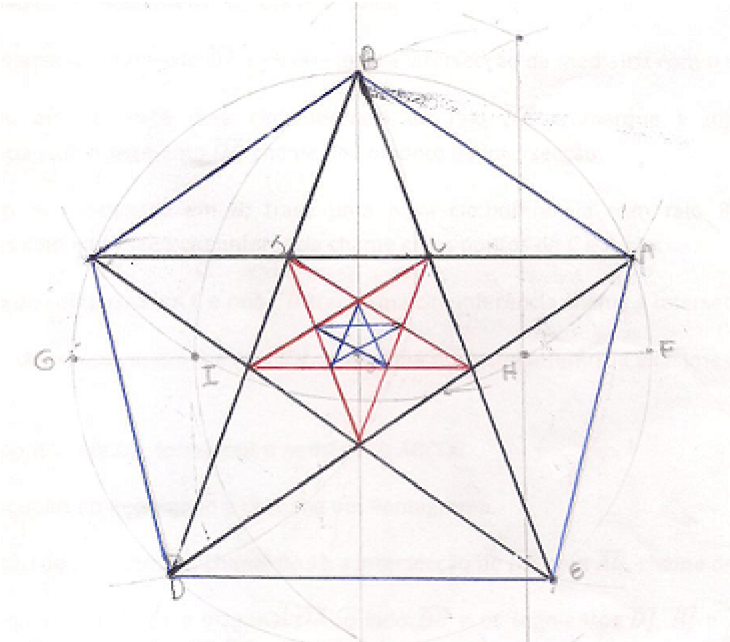
Medidas	Valores
$\overline{DB}$	15,5 cm
$\overline{DE}$	9 cm
$\overline{DJ}$	9,5 cm
$\overline{BJ}$	5,9 cm
$\overline{JL}$	5 cm
Razões	Resultados
$\overline{DB}/\overline{DJ}$	1.6315 cm
$\overline{DJ}/\overline{BJ}$	1.61017 cm
$\overline{DB}/\overline{DE}$	1.6666 cm
$\overline{BJ}/\overline{JL}$	1.625 cm

A que conclusão vocês chegaram ao dividir as medidas da diagonal pela medida dos lados do pentágono? E com as outras razões o que aconteceu? A Conclusão é que o numero aproximado ao numero de ouro é DJ/BJ: 1,610...

Fonte: Autora, 2014

Apesar da atividade só pedir para construir um pentágono e um pentagrama, alguns alunos lembram-se da propriedade da auto-propagação e pediram para continuar a construção, conforme figura 4.21 realizada pelos alunos B7 e B4, o que mostra o interesse dos alunos pela atividade e pelo conteúdo trabalhado.

Figura 53: Atividade - Aluno B4 e B7



Fonte: Autora, 2014

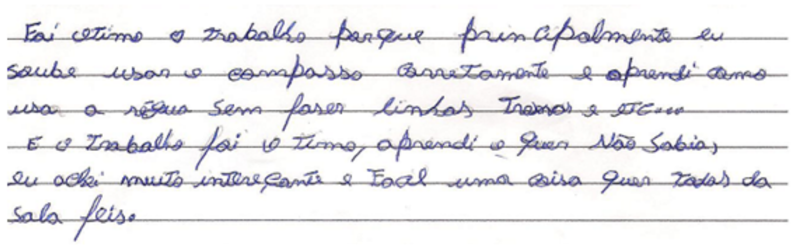
4.4.4 Opinião dos alunos quanto às atividades de construção geométrica

Após as atividades, foi discutido com os alunos para saber a opinião deles sobre as atividades de construção geométrica. A maioria dos alunos gostaram das atividades e falaram que gostariam que houvesse mais aulas sobre o conteúdo. Outra afirmação que se repetiu nas falas dos alunos foi quanto ao uso dos instrumentos de desenho, pois todos falaram que nunca haviam utilizado o compasso e o esquadro, e muitos tiveram dificuldade ao utilizá-los pela primeira vez. Além da discussão, alguns alunos registraram por escrito suas opiniões.

Seguem alguns trechos dos relatos dos alunos.

“Foi otimo o trabalho porque principalmente eu soube usar o compasso corretamente e aprendi como usa a régua sem faser linhas tronchas e etc... e o trabalho foi otimo, aprendi o quer não sabia, eu achei muito intereçante e facil uma coisa quer todos da sala feis” (Figura 54).

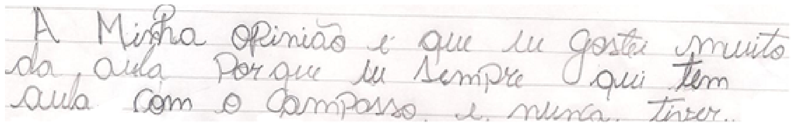
Figura 54: Atividade - Aluno B12


Foi otimo o trabalho porque principalmente eu
soube usar o compasso corretamente e aprendi como
usa a régua sem faser linhas tronchas e etc...
E o trabalho foi otimo, aprendi o quer Não Sabia,
eu achei muito intereçante e facil uma coisa quer todos da
sala feis.

Fonte: Autora, 2014

“A minha opinião é que eu gostei muito da aula porque eu sempre quis tem aula com o compasso e nunca tiver” (Figura 55).

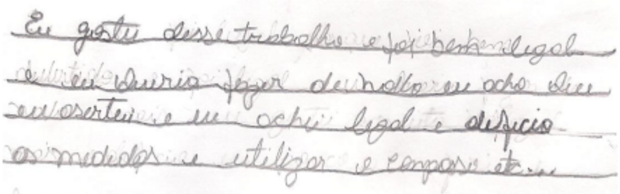
Figura 55: Atividade - Aluno A8


A Minha opinião é que eu gostei muito
da aula Porque eu Sempre qui tem
aula com o compasso e nunca tiver.

Fonte: Autora, 2014

“Eu gostei desse trabalho e foi bem legal e eu queria fazer de novo eu acho que eu asertei e eu achei legal e dificio as medidas e utilizar o compaso etc...” (Figura 56).

Figura 56: Atividade - Aluno B13



Eu gostei dessi trabalho e foi bem legal e eu quiria fazer de novo eu acho que eu asertei e eu achei legal e dificio as medidas e utilizar o compasso etc...

Fonte: Autora, 2014

5 CONCLUSÃO

Consideramos o Número de Ouro um número fascinante e que nos trás a oportunidade de trabalhar vários conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental e Médio. Como exemplo, podemos citar alguns conteúdos como Razão e Proporção, Geometria Plana, Construções Geométricas, Números Irracionais, Equações Quadráticas e Sequências Numéricas. Além de despertar a curiosidade dos alunos para aplicação da matemática fora da sala de aula fazendo a ligação da matemática com outras áreas do conhecimento como com a arte, a biologia e a arquitetura.

Diante de tantas possibilidades de relacionar o Número de Ouro com os conteúdos matemáticos, escolhemos trabalhar com as construções geométricas e observar a relação que os alunos fariam com a realidade e a matemática. De acordo com o que foi vivenciado durante a aplicação das atividades e com os relatórios produzidos pelos alunos, podemos dizer que foram satisfatórios os resultados obtidos tanto quanto à observação da aplicação da matemática no dia a dia feita pelos alunos, quanto aos resultados dos trabalhos de construção geométrica. No início das atividades de construção geométrica, percebemos muitas dificuldades em manusear os instrumentos de desenho, porém as dificuldades foram diminuindo à medida que eram aplicadas as atividades. Além disso, foram atividades que despertavam o interesse dos alunos tanto que até mesmo os alunos menos disciplinados estavam bastante atentos e participativos, fato que chamou atenção até dos próprios colegas, como fica evidente na fala do aluno B12, ao relatar que "eu achei muito intereçante e facil uma coisa quer todos da sala feis".

Outro ponto positivo foi a persistência e a vontade de realizar a atividade o mais perfeito possível, o que nem sempre ocorre com outros conteúdos onde eles já querem desistir na primeira tentativa.

Ao desenvolver este trabalho pudemos perceber que o estudo da Razão Áurea se mostra como uma excelente ferramenta para o estudo dos Números Irracionais, além de permitir a relação com outros conhecimentos. Este trabalho foi realizado em turmas do 8° ano, entretanto chamamos a atenção para a utilização do Número de Ouro em outras séries, bastando, para isso, fazer a adaptação dos exercícios.

REFERÊNCIAS

[1] BIEMBENGUT, Maria Salett. **Número de Ouro e secção áurea: Considerações e sugestões para a sala de aula.** Blumenau-SC: Ed. da FURB, 1996.

[2] BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : Matemática.** Brasília : MEC, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb /arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2014.

[4] CÂMARA, Marcos Antônio; RODRIGUES, Melissa da Silva. O Número Φ. FAMAT em Revista, nº 11, p. 81-184, 2008.

[6] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **A matemática na arte e na vida**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

[7] Donald no país da matemágica. Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v= TphWfs_OXkU>. Acesso em: 21 mar. 2014.

[8] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

[10] LIVIO, Mario. **Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente.** Tradução: Marco Shinobu Matsumura. 6. ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.

[11] LOPES, Marinho A. **A Mitologia e a Verdade da Razão de Ouro.** Disponível em: <http://sophiaofnature.wordpress.com/2014/01/07/a-mitologia-e-a-verdade-da-razao-de-ouro/>. Acesso em: 24 jul. 2014.

[12] NETO, Pablo Roberto de Sousa. **A aplicação do Número de Ouro como Recurso Metodológico no Processo de Ensino-aprendizagem.** Teresina, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/515>. Acesso em: 22 jan. 2014.

[13] Número de ouro - Arte e Matemática. Disponível em: <http://www.youtube.com/ watch?v=PFQAhsmHdRY>. Acesso em: 21 mar. 2014.

[14] RAMOS, Marcos Gertrudes Oliveira. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.** Ilhéus, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/ 123456789/248>. Acesso em: 22 jan. 2014.

[15] RAYMUNDO, Márcia Fonseca S. M. **Construção de Conceitos Geométricos: investigando a importância do ensino de Desenho Geométrico, nos anos finais do Ensino Fundamental.** Vassouras, 2010. Disponível em:<http://www.uss.br/arquivos;

jsessionid=878FE/3484470177F9A 43419B1A7EA8C0/posgraduacao/strictosensu/educacao Matematica/dissertacoes/2010/dissertacao-marcia-vfinal.pdf>. Acesso em: 31 mai. 2014.

[16] SILVA, Claudio Itacir Della da. **Proposta de aprendizagem sobre a importância do desenho geométrico e da geometria descritiva.** Curitiba, 2006. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucpr.br/tede/tde_arquivos/3/TDE-2007-03-09T122009Z-514/Publico/CLAUDIO%20EDUC.pdf>. Acesso em: 30 mai. 2014.

[17] SODRÉ, Leandro de Oliveira. **O NÚMERO 142857 E O NÚMERO DE OURO: curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas.** Juiz de Fora, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/174>. Acesso em: 22 jan. 2014.

[18] WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

.

ANEXOS

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Eu, ____ pai (mãe) ou responsável legal do(a) estudante(a) ____, autorizo meu filho(a) a participar da pesquisa desenvolvida pela Profª. Maria Dayane Dalysse dos Santos e orientada pela Prof.ª Me. Viviane de Oliveira Santos, do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Alagoas.

A pesquisa consistirá na realização de entrevistas, questionários, fotografias, intervenção pedagógica junto aos participantes do estudo e posterior análise dos dados.

A qualquer momento da realização desse estudo qualquer participante/pesquisado ou o estabelecimento envolvido poderá receber os esclarecimentos adicionais que julgar necessários. O sigilo das informações será preservado através de adequada codificação dos instrumentos de coleta de dados. Todos os registros efetuados no decorrer desta investigação serão usados para fins unicamente acadêmico-científicos e apresentados na forma de Dissertação, não sendo utilizados para qualquer fim comercial.

Em caso de concordância com as considerações expostas, solicitamos que assine este "Termo de Consentimento Livre e Esclarecido". Desde já agradecemos sua colaboração e nos comprometemos com a disponibilização à instituição dos resultados obtidos nesta pesquisa, tornando-os acessíveis a todos os participantes.

__________________________________	___________________________________
Maria Dayane Dalysse dos Santos	Prof.ª Me. Viviane de Oliveira Santos
Profª. Pesquisadora	Orientadora
PROFMAT/UFAL	PROFMAT/UFAL

Rio Largo, _____/______/2014.

Modelo da atividade impressa - 4.2

Nome - ______________________________ **Nº**_____ **Série/turma** _____

Utilizando uma fita métrica, preencha a tabela abaixo e calcule a média aritmética das razões.

Nome	
Medidas	
Da altura - a	
Do umbigo até o chão - b	
Do ombro até a ponta do dedo médio - c	
Do cotovelo até a ponta do dedo médio - d	
Da perna - e	
Do joelho até o chão - f	
Razões	
a/b	
c/d	
e/f	
Média Aritmética das 3 razões	

Modelo da atividade impressa - 4.3

Nome - ___________________________________ **Nº**_____ **Série/turma** _____

Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? Deve-se considerar que neste problema não haja morte e nem migração de coelhos (nem de dentro pra fora e nem de fora pra dentro). Para os cinco primeiros meses temos o seguinte:

- No 1º mês, temos apenas um par de coelhos (ainda filhotes);
- No 2º mês, continuamos com um par de coelhos (agora adultos);
- No 3º mês, nasce um par de filhotes. Logo, temos dois pares de coelhos (um par de adultos e um par de filhotes);
- No 4º mês, o par inicial gera o seu segundo par de filhotes, ficando um total de três pares de coelhos (o par inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes);
- No 5º mês, o par inicial gera o seu terceiro par de filhotes; o segundo par de adultos gera o seu primeiro par de filhotes e o par de filhotes gerado no mês anterior, agora adulto. Logo, temos cinco pares de coelhos (três pares de adultos mais dois pares de filhotes);
- Etc.

A tabela abaixo mostra a reprodução dos coelhos até o sexto mês. Com base nesse raciocínio, preencha o restante da tabela e encontre o que está sendo pedido.

Mês	Nº de pares de adultos	Nº de pares de filhotes	Total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º			
7º			
8º			
9º			
10º			
11º			
12º			

Agora calcule as razões sucessivas entre um termo da sequência e o seu anterior, partindo do segundo termo, o que você percebe? Tem alguma semelhança com o valor de Φ?

Modelo da atividade impressa - 4.4.1

Nome - ______________________________ **Nº**_____ **Série/turma** _____

Atividade

A partir do segmento $\overline{AB}$ abaixo, siga os passos para localizar o "ponto áureo", ou seja, o ponto que dividirá $\overline{AB}$ na Razão Áurea.

1. Marque o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$.
2. Pelo ponto B, trace o segmento $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{AB}$, com $\overline{BC} = \overline{MB}$, formando o triângulo retângulo ABC.
3. Com o centro do compasso em C e raio $\overline{CB}$, trace o arco de circunferência para obter o ponto D sobre a hipotenusa $\overline{AC}$. O ponto D é tal que $\overline{CD} = \overline{CB}$.
4. Com o centro do compasso em A e raio $\overline{AD}$, trace o arco de circunferência para obter o ponto P sobre $\overline{AB}$. O ponto P é tal que $\overline{AP} = \overline{AD}$.

O ponto P obtido é o ponto que divide $\overline{AB}$ na Razão Áurea.

Modelo da atividade impressa - 4.4.2

Nome - __________________________________ **Nº**_____ **Série/turma** _____

Atividade - Retângulo Áureo

Siga os passos abaixo para construir um Retângulo Áureo.

1. Construa um quadrado qualquer e nomeie os vértices desse quadrado de $ABCD$, de tal modo que $\overline{AB}$ corresponda a sua base. Este quadrado tem lado de medida a.

2. Divida $\overline{AB}$ ao meio e marque ali o ponto M. Trace uma perpendicular a este ponto, dividindo o quadrado em dois.

3. Escolha um destes retângulos, digamos aquele com base $\overline{AM}$. Trace sua diagonal, passando por M.

4. Passe uma semi-reta a partir de M, contendo $\overline{AM}$.

5. Com o compasso, com a ponta seca sobre M, transfira a medida da diagonal para esta semi-reta. Marque ali o ponto E.

6. Construa um novo retângulo utilizando os pontos CBE, como vértices.

Agora meça as dimensões do retângulo obtido e divida a medida maior pela menor, qual o resultado obtido?

Modelo da atividade impressa - 4.4.3

Nome - ___________________________________ **Nº**_____ **Série/turma** _____

Atividade: Pentágono e Pentagrama

Siga os passos abaixo para construir o Pentágono Regular e o Pentagrama.

1. Trace uma circunferência de raio qualquer e centro O.

2. Trace, agora, dois segmentos de retas perpendiculares entre si, interceptando-se no centro O da circunferência. Nas intersecções com a circunferência, marque os pontos F, B e G no sentido anti-horário iniciando do lado direito da reta horizontal.

3. Trace a mediatriz do segmento $\overline{OF}$ e chame de H a intersecção da mediatriz com o segmento $\overline{OF}$.

4. Com centro em H, trace uma circunferência de raio $\overline{HB}$ e marque a intersecção dessa circunferência com o segmento $\overline{OG}$ chame de I o ponto de intersecção.

5. Com centro do compasso em B, trace uma nova circunferência com raio $\overline{BI}$ e marque as intersecções com a primeira circunferência chame esses pontos de C e A. (C entre G e B, A entre B e F).

6. Com centro do compasso em C e raio $\overline{CB}$ trace uma circunferência chame a intersecção dessa circunferência com a primeira circunferência de D.

7. Com centro do compasso em A e raio $\overline{CB}$, trace uma nova circunferência e chame a intersecção dessa nova circunferência com a primeira circunferência de E.

8. Unindo os pontos $ABCDE$, formamos o pentágono $ABCDE$.

9. Trace as diagonais do Pentágono e obtenha um Pentagrama.

10. A intersecção de $\overline{DB}$ com $\overline{AC}$, chame de J e a intersecção de $\overline{BE}$ com $\overline{AC}$, chame de L.

11. Utilize a régua para medir a diagonal $\overline{DB}$, o lado $\overline{DE}$ e os segmentos $\overline{DJ}$, $\overline{BJ}$ e $\overline{JL}$, em seguida, calcule as razões $\overline{DB}/\overline{DJ}$, $\overline{DJ}/\overline{BJ}$, $\overline{DB}/\overline{DE}$ e $\overline{BJ}/\overline{JL}$, registrando-as na tabela abaixo.

Medidas	Valores
$\overline{DB}$	
$\overline{DE}$	
$\overline{DJ}$	
$\overline{BJ}$	
$\overline{JL}$	
Razões	Resultados
$\overline{DB}/\overline{DJ}$	
$\overline{DJ}/\overline{DB}$	
$\overline{DB}/\overline{DE}$	
$\overline{BJ}/\overline{JL}$	

A que conclusão vocês chegaram ao dividir as medidas da diagonal pela medida dos lados do pentágono? E com as outras razões o que aconteceu?