UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estimativas de Autovalores via Módulo de Continuidade para a Equação do Calor

Robson dos Santos Silva

Maceió, Brasil
Março de 2015

ROBSON DOS SANTOS SILVA

ESTIMATIVAS DE AUTOVALORES VIA MÓDULO DE CONTINUIDADE PARA A EQUAÇÃO DO CALOR

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Análise, submetida em 13 de Março de 2015 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante.

Maceió, Brasil
Março de 2015

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Valter dos Santos Andrade

S586e Silva, Robson dos Santos.
Estimativas de autovalores via módulo de continuidade para a equação do calor / Robson dos Santos Silva. – Maceió, 2015.
23 f.

Orientador: Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação em Matemática. Maceió, 2015.

Bibliografia: f. 23.

1. Equação do calor. 2. Autovalores. 3. Operador Laplaciano. 4. Módulo de Continuidade. I. Título.

CDU: 517.956.4

ROBSON DOS SANTOS SILVA

ESTIMATIVAS DE AUTOVALORES VIA MÓDULO DE CONTINUIDADE PARA A EQUAÇÃO DO CALOR

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Análise, submetida em 13 de Março de 2015 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Marcos Petrúcio de A. Cavalcante

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante (Orientador)

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva (UFAL)

Prof. Dr. José María Espinar Garcia (IMPA)

"Na guerra bélica da vida - o que não me faz morrer me torna mais forte"
(Friedrich Nietzsche)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, que sempre esteve ao meu lado e não deixou de me dar apoio mesmo quando foi dificil concordar com minhas decisões.

Agradeço também aos meus colegas de curso Rogério Vitório, Anderson Lima, Hugo Nunes, Diego Chicuta e Fabricio Lira pela ajuda que obtive de cada um deles ao longo deste curso.

Finalmente, quero agradecer ao meu orientador, o professor Marcos Petrúcio, primeiro por sua atenção e depois por ter conseguido ser paciente (e bem humorado) comigo, apesar de minhas faltas. Aproveito ainda para agradecer à banca examinadora pelas críticas e sugestões a respeito desta dissertação.

Resumo

Vamos estimar o módulo de continuidade das soluções de equações parabólicas quase-lineares em termos do módulo de continuidade inicial e tempo transcorrido. Fazendo isso em particular para soluções da equação do calor com fronteira de Neumann, obtemos uma cota inferior positiva para o primeiro autovalor positivo do Laplaciano em domínios convexos limitados do espaço Euclideano.

Palavras-chave: Equação do calor, Autovalores, Operador Laplaciano, Módulo de continuidade

Abstract

We bound the modulus of continuity of solutions to quasilinear parabolic equations in terms of the initial modulus of continuity and elapsed time. In particular, applying this to the heat equation with Neumann boundary conditions, we get a positive lower bound for the first positive eigenvalue of the Laplacian on bounded convex domains in Euclidean space.

Keywords: Heat equation, Eigenvalues, Laplacian Operator, Modulus of continuity

Sumário

Introdução

Nosso objetivo nesta dissertação é estimar o módulo de continuidade para soluções de equações parabólicas quase-lineares da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(Du,t) D_i D_j u,$$

em particular, para a equação do fluxo da curvatura média

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \frac{D_i u D_j u}{1+|Du|^2} \right) D_i D_j u$$

e para a equação do calor (sob condições de fronteira de Neumann)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

Dito de outra forma, queremos estimar a diferença $|u(y,t) - u(x,t)|$ em termos da distância $|y-x|$ (e do tempo transcorrido).

Como consequência da estimativa para a equação do calor, vamos obter uma cota inferior positiva para o primeiro autovalor positivo do operador Laplaciano, em um domínio compacto e convexo, sob condições de fronteira de Neumann. Dessa forma, vamos provar por métodos distintos um resultado obtido em 1960 por L. E. Payne e H. F. Weinberger [4].

Os métodos que adotaremos aqui baseiam-se nos trabalhos de Ben Andrews e Julie Clutterbuck [1], [2] e [3], e consistem em tornar negativa uma função dois - pontos do tipo

$$Z(x,y,t) = u(y,t) - u(x,t) - \varphi(|y-x|,t) - \varepsilon(1+t),$$

para alguma função φ, que deve ser escolhida de forma que Z seja inicialmente (para $t=0$) negativa. Observe que a função Z tem o dobro do número de variáveis espaciais da solução u, ou seja, se u é definida em $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ então Z é definida em $\mathbb{R}^{2n} \times [0,\infty)$. Este método de trabalho apoia-se numa importante propriedade da matriz hessiana (em relação as variáveis espaciais) de Z, a saber, que ela é semi-definida negativa em um ponto de máximo.

Capítulo 1

Módulo de Continuidade para Soluções de Equações Parabólicas Quase-lineares em uma Dimensão Espacial

Neste capítulo vamos estimar o módulo de continuidade para uma classe de equações parabólicas em uma dimensão espacial. Mostramos a estimativa básica, que controla o módulo de continuidade espacial de qualquer solução em termos de qualquer supersolução com dado inicial determinado pelo módulo de continuidade inicial. Vamos ilustrar isto, inicialmente, para o fluxo da curvatura, e em seguida tratamos de equações (em uma dimensão espacial) mais gerais.

Seja $u : \mathbb{R} \times [0, T) \to \mathbb{R}$ uma solução suave da equação do fluxo da curvatura

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u''}{1 + u'^2}. \tag{1.1}$$

Suponha $\operatorname{osc} u = \sup u - \inf u \leq M$ e $u(x + L, t) = u(x, t)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$. Nestas condições, vale o seguinte resultado:

Teorema 1.1 *Para todo $x \neq y$ em $\mathbb{R}$ e $t > 0$,*

$$|u(x, t) - u(y, t)| \leq 2M\varphi\left(\frac{|y - x|}{2M}, \frac{t}{M^2}\right)$$

onde $\varphi : [0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é a solução de (1.1) satisfazendo as condições

$$\varphi(x, t) \to \frac{1}{2} \;\; quando \;\; t \to 0 \;\; para \;\; x > 0,$$
$$\varphi(0, t) = 0 \;\; para \;\; t > 0$$

e

$$\varphi(x, t) \to \frac{1}{2} \;\; quando \;\; x \to \infty \;\; para\ qualquer \;\; t > 0.$$

Obs: A existência de φ segue dos resultados de Ecker e Huisken [4].

Prova. Observe primeiramente que se $u(x,t)$ é solução de (1.1), então $v(x,t) := \frac{1}{M}u(Mx, M^2t)$ também é solução e $\operatorname{osc} v = \frac{1}{M} \cdot \operatorname{osc} u \leq \frac{1}{M} \cdot M = 1$. Assim, podemos assumir que $M = 1$. Seja $\varepsilon > 0$, e $Z : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0,T) \to \mathbb{R}$ definida por

$$Z(x,y,t) = u(y,t) - u(x,t) - 2\varphi\left(\frac{|y-x|}{2}, t\right) - \varepsilon(1+t).$$

Note que

$$\begin{aligned}
Z(x+L, y+L, t) &= u(y+L,t) - u(x+L,t) - 2\varphi\left(\frac{|(y+L)-(x+L)|}{2}, t\right) - \varepsilon(1+t) \\
&= u(y,t) - u(x,t) - 2\varphi\left(\frac{|y-x|}{2}, t\right) - \varepsilon(1+t) \\
&= Z(x,y,t),
\end{aligned}$$

e portanto Z é periódica sobre as faixas

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2nL \leq y + x \leq 2(n+1)L, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Logo podemos analisar o comportamento da função Z apenas no conjunto $S = \{(x,y,t) : 0 \leq x + y \leq 2L, t > 0\}$.

Como u é contínua e $|u(y,t) - u(x,t)| \leq \operatorname{osc} u \leq 1$, temos que Z é negativa perto da diagonal $\{y = x\}$, perto de $t = 0$ e quando $|y - x| \to \infty$. De fato,

$$\lim_{x \to y} Z(x,y,t) = u(y,t) - u(y,t) - 2\varphi(0,t) - \varepsilon(1+t) = -\varepsilon(1+t) < 0,$$

$$\lim_{t \to 0} Z(x,y,t) = \lim_{t \to 0}[u(y,t) - u(x,t)] - 2 \cdot \frac{1}{2} - \varepsilon \leq 1 - 1 - \varepsilon = -\varepsilon < 0$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{|y-x| \to \infty} Z(x,y,t) &= \lim_{|y-x| \to \infty}[u(y,t) - u(x,t)] - 2 \cdot \frac{1}{2} - \varepsilon(1+t) \\
&\leq 1 - 1 - \varepsilon(1+t) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Se $Z < 0$ para todo ponto de S então o resultado segue apenas fazendo ε tender a zero.

Suponha que Z não é negativa em S. Então, como Z é contínua, existe um primeiro $t_0 > 0$ e um ponto (x_0, y_0), com $x_0 \neq y_0$ (vamos tomar $x_0 < y_0$) , tal que $Z(x_0, y_0, t_0) = 0$. Observe também que sendo $Z < 0$ para $|x - y| \to \infty$, então existe $k > 0$ tal que $Z < 0$ para $|x - y| > k$. Agora, fixando $t = t_0$ e considerando x e y tais que $|x - y| \leqslant k$, temos que $Z(x,y,t_0)$ atinge um máximo na região

$$R_{t_0} = \{(x,y,t_0) \in S : |x - y| \leq k\}$$

pois essa região é compacta e Z é contínua. Além disso, como $Z(x,y,t) < 0$ para $t < t_0$, então, pela continuidade de Z, temos que $Z \leqslant 0$ em R_{t_0} e portanto (x_0, y_0, t_0) é um ponto de máximo local de $Z(x,y,t_0)$ em R_{t_0}. Neste ponto temos

$$0 = \frac{\partial Z}{\partial x} = -u'(x_0,t_0) + \varphi'\left(\frac{y_0 - x_0}{2}, t_0\right)$$

onde φ' denota a derivada de φ no primeiro argumento, e

$$0 = \frac{\partial Z}{\partial y} = u'(y_0,t_0) - \varphi'\left(\frac{y_0 - x_0}{2}, t_0\right).$$

Note que estas equações implicam que

$$u'(x_0,t_0) = u'(y_0,t_0) = \varphi'. \tag{1.2}$$

Como (x_0, y_0, t_0) é um ponto de máximo local, a matriz Hessiana $[D^2 Z]$ de $Z(x,y,t_0)$ é semi-definada negativa neste ponto e, portanto, temos

$$0 \geq [D^2 Z] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u''(x_0,t_0) - \dfrac{1}{2}\varphi'' & \dfrac{1}{2}\varphi'' \\ \dfrac{1}{2}\varphi'' & u''(y_0,t_0) - \dfrac{1}{2}\varphi'' \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Agora, considerando a função real $\zeta(t) = Z(x_0, y_0, t)$, e levando em conta que $\zeta(t_0) = 0$ e $\zeta(t) < 0$ para $t < t_0$, concluimos que, ou ζ é crescente num pequeno intervalo contendo t_0, ou ζ atinge um máximo local em t_0. Em todo caso, temos que

$$0 \leqslant \zeta'(t_0) = \frac{\partial Z}{\partial t}(x_0, y_0, t_0).$$

Como u satisfaz a equação (1.1), temos em (x_0, y_0, t_0),

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t}(y_0,t_0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \\ &= \frac{u''(y_0,t_0)}{1 + (u'(y_0,t_0))^2} - \frac{u''(x_0,t_0)}{1 + (u'(x_0,t_0))^2} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Por (1.2) e (1.3) isto implica que para qualquer valor de c,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2}\varphi''}{1 + (\varphi')^2} + \frac{\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2}\varphi''}{1 + (\varphi')^2} + 2c\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2}\varphi''\right) - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \\ &= \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1 + (\varphi')^2} & c \\ c & \dfrac{1}{1 + (\varphi')^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \end{bmatrix}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1 + (\varphi')^2} - 2c\right)\varphi'' - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1 + (\varphi')^2} - 2c\right)\varphi'' - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \end{aligned}$$

desde que a matriz

$$C = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+(\varphi')^2} & c \\ c & \dfrac{1}{1+(\varphi')^2} \end{bmatrix}$$

seja semi-definida positiva, pois dessa forma teremos $\mathrm{Tr}(C \cdot [D^2Z]) \leq 0$. Assim, escolhendo $c = -1/(1+(\varphi')^2)$, a matriz C torna-se semi-definida positiva e como φ foi escolhida de maneira a satisfazer a equação (1.1), chegamos a uma contradição:

$$0 \leq \frac{\partial Z}{\partial t} \leq 2\left(\frac{\varphi''}{1+(\varphi')^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \varepsilon = -\varepsilon < 0.$$

Isto contradiz a suposição de que Z é não negativa em algum ponto (x, y, t) de S com $x < y$. Portanto $u(y,t) - u(x,t) < 2\varphi\left(\dfrac{|y-x|}{2}, t\right) + \varepsilon(1+t)$ para todo $\varepsilon > 0$, e assim $u(y,t) - u(x,t) \leq 2\varphi\left(\dfrac{|y-x|}{2}, t\right)$ para todo $(x,y,t) \in S$ com $x < y$. Por um argumento similar, chegamos a mesma conclusão no caso $x > y$. Isto prova o Teorema. $\square$

O método da prova acima aplica-se em geral para equações da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(u')u'' \tag{1.4}$$

onde a função α é contínua e positiva. Diremos que uma função $u(x,t)$ é regular se ela é C^2 em relação a variável x e C^1 em relação a variável t.

Definição 1.1 Seja $u \in C(\mathbb{R})$ periódica de período L, e seja $\psi \in C(0, L/2)$ positiva. ψ é um módulo de continuidade para u se para todo $0 < y - x < L$,

$$-2\psi\left(\frac{L+x-y}{2}\right) \leq u(y) - u(x) \leq 2\psi\left(\frac{y-x}{2}\right). \tag{1.5}$$

Teorema 1.2 *Seja u uma solução L-periódica regular de* (1.4) *em* $\mathbb{R} \times [0,T]$, *e* ψ *um módulo de continuidade para* $u(.,0)$. *Seja* $\varphi \geq 0$ *uma função contínua em* $[0, L/2] \times [0,T] \setminus \{(0,0), (L/2, 0)\}$, *regular em* $(0, L/2) \times (0, T]$ *com* $\varphi_t \geq \alpha(\varphi')\varphi''$, *e* $\varphi(z, 0) \geq \psi(z)$ *para todo* $z \in (0, L/2)$. *Então* $\varphi(.,t)$ *é um módulo de continuidade para* $u(.,t)$ *para cada* $t > 0$.

Prova. Seja $\varepsilon > 0$, e defina $Z(x,y,t) = u(y,t) - u(x,t) - 2\varphi\left(\frac{y-x}{2}, t\right) - \varepsilon(1+t)$ em $\{(x,y,t) : x < y < x + L, t > 0\}$. Z é negativa para valores pequenos de t pois, pela continuidade de u e φ, e por (1.5) temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} Z(x,y,t) &= u(y,0) - u(x,0) - 2\varphi\left(\frac{y-x}{2}, 0\right) - \varepsilon \\
&\leq u(y,0) - u(x,0) - 2\psi\left(\frac{y-x}{2}\right) - \varepsilon \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Além disso, como $\varphi \geq 0$ e u é L-periódica, Z é negativa quando $y-x$ e $L+x-y$ são pequenos para qualquer t. De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to x} Z(x,y,t) &= u(x,t) - u(x,t) - 2\varphi(0,t) - \varepsilon(1+t) \\
&\leq 0 - \varepsilon(1+t) \\
&< 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to x+L} Z(x,y,t) &= u(x+L,t) - u(x,t) - 2\varphi\left(\frac{L}{2}, t\right) - \varepsilon(1+t) \\
&\leq 0 - \varepsilon(1+t) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Observe também que, assim como no Teorema 1.1, Z é periódica sobre as faixas

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2nL \leq y + x \leq 2(n+1)L, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Se Z não é negativa em todo o seu domínio então existe um primeiro $t_0 > 0$ e $x_0 < y_0 < x_0 + L$ tal que $Z(x_0, y_0, t_0) = 0$. Por argumentos análogos aos usados no Teorema 1.1, vemos que neste ponto valem as condições nas derivadas de primeira ordem (1.2) e a condição na matriz Hessiana (1.3). Como u satisfaz a equação (1.4),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial t}(x,y,t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(y,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(\frac{y-x}{2}, t\right) - \varepsilon \\
&= \alpha(u'(y,t))u''(y,t) - \alpha(u'(x,t))u''(x,t) - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(\frac{y-x}{2}, t\right) - \varepsilon \\
&< \alpha(\varphi')\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\varphi''}{2}\right) + \alpha(\varphi')\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\varphi''}{2}\right) + 2c\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} - \frac{\varphi''}{2}\right) - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t} \\
&= \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} \alpha(\varphi') & c \\ c & \alpha(\varphi') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \end{bmatrix}\right) + (\alpha(\varphi') - c)\varphi'' - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t}.
\end{aligned}$$

A expressão envolvendo as derivadas de segunda ordem de Z na última linha é não positiva desde que a matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha(\varphi') & c \\ c & \alpha(\varphi') \end{bmatrix}$$

seja semi-definida positiva. Escolhendo $c = -\alpha(\varphi')$ chegamos a uma contradição:

$$0 \leqslant \frac{\partial Z}{\partial t} < 2\left(\alpha(\varphi')\varphi'' - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \leqslant 0.$$

Segue-se que Z é negativa, e fazendo ε tender a zero obtemos a desigualdade no lado direito de (1.5). Substituindo y por $x+L$ e x por y e usando a periodicidade de u, temos que

$$\begin{array}{rrcl} & u(y,t) - u(x,t) & \leqslant & 2\varphi\left(\dfrac{y-x}{2}, t\right) \\ \Rightarrow & u(x+L,t) - u(y,t) & \leqslant & 2\varphi\left(\dfrac{x+L-y}{2}, t\right) \\ \Rightarrow & u(x,t) - u(y,t) & \leqslant & 2\varphi\left(\dfrac{L+x-y}{2}, t\right) \\ \Rightarrow & -2\varphi\left(\dfrac{L+x-y}{2}, t\right) & \leqslant & u(y,t) - u(x,t), \end{array}$$

o que nos dá a desigualdade no lado esquerdo de (1.5). $\square$

Capítulo 2

Módulo de Continuidade para Soluções de Equações Parabólicas Quase-lineares em Dimensões Altas

Neste segundo capítulo usaremos métodos análogos àqueles do capítulo anterior, com o objetivo de extender os resultados obtidos a dimensões espaciais altas. Ou seja, vamos estimar o módulo de continuidade para soluções periódicas do fluxo da curvatura média, agora em $\mathbb{R}^n$.

Consideremos a equação do fluxo da curvatura média

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \frac{D_i u D_j u}{1 + |Du|^2} \right) D_i D_j u. \tag{2.1}$$

O gráfico de uma solução desta equação comporta-se de tal forma que, em cada ponto, a componente normal de sua velocidade é igual a curvatura média.

Vamos mostrar que o módulo de continuidade das soluções limitadas de (2.1) é controlado por uma solução particular φ do fluxo da curvatura em uma dimensão espacial:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi''}{1 + (\varphi')^2}. \tag{2.2}$$

Esta solução φ é suave em $[0, \infty) \times (0, \infty)$, não-decrescente em x, com $\varphi(0, t) = 0$ para $t > 0$, e $\varphi(x, t) \to \frac{1}{2}$ quando $t \to 0$ para qualquer $x > 0$ ou quando $x \to \infty$ para qualquer $t > 0$. Note que para qualquer $M > 0$, a função

$$\phi(x, t) = M \varphi \left(\frac{x}{M}, \frac{t}{M^2} \right)$$

é ainda uma solução de (2.2).

Fixe um conjunto linearmente independente $\Gamma = \{v^1, ..., v^n\}$ em $\mathbb{R}^n$. Uma função f em $\mathbb{R}^n$ é chamada Γ-periódica se para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e $1 \leqslant i \leqslant n$, $f(x + v^i) = f(x)$.

Teorema 2.1 *Seja $u : \mathbb{R}^n \times [0, T) \to \mathbb{R}$ uma solução suave da equação (2.1) com oscilação limitada $|u(x, t) - u(y, t)| \leqslant M$, e com u Γ-periódica. Então para todo x e y em $\mathbb{R}^n$ e $t > 0$,*

$$|u(y, t) - u(x, t)| \leqslant 2M\varphi\left(\frac{|y - x|}{2M}, \frac{t}{M^2}\right).$$

Prova. Seja $\varepsilon > 0$, e defina

$$Z(x, y, t) = u(y, t) - u(x, t) - 2\phi\left(\frac{|y - x|}{2}, t\right) - \varepsilon(1 + t)$$

em $\{y \neq x\} \times (0, \infty)$, onde $\phi(\xi, t) = M\varphi(\xi/M, t/M^2)$.

Observe que Z é estritamente negativa perto da fronteira $\{y = x\}$ e quando t é suficientemente pequeno.

Como u é periódica sobre o lattice $\Gamma = \{v^1, ..., v^n\}$, Z é periódica sobre as regiões

$$\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^{2n} : 2nv^i_j \leq x_j + y_j \leq 2(n + 1)v^i_j\},$$

onde $v^i = (v^i_1, \cdots, v^i_n)$. Em qualquer uma destas regiões, note que

$$Z(x, y, t) \leq M - 2 \cdot M \cdot \frac{1}{2} - \varepsilon(1 + t) < 0$$

quando $|y_j - x_j| \to \infty$. Logo, para estudar o sinal de Z, prescisamos apenas considerar x e y em uma região limitada, de forma que a função $Z(x, y, t)$ atinge um máximo para cada t fixado. Se Z não é negativa para todo $(x, y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$, então existe $t_0 > 0$ e $y_0 \neq x_0$ em $\mathbb{R}^n$ tal que

$$Z(x_0, y_0, t_0) = \max\{Z(x, y, t_0) : x, y \in \mathbb{R}^n\} = 0.$$

Neste ponto, temos as seguintes condições nas derivadas de primeira ordem:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial Z}{\partial x^i} &= -\frac{\partial u(x, t)}{\partial x^i} + \phi' \frac{y^i - x^i}{|y - x|} \\ 0 = \frac{\partial Z}{\partial y^i} &= \frac{\partial u(y, t)}{\partial y^i} - \phi' \frac{y^i - x^i}{|y - x|}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Estas equações tornam-se simples se escolhermos coordenadas tais que $e_1 = (y - x)/|y - x|$: Então

$$\begin{aligned} &D_1 u(x, t) = \phi', \\ &D_j u(x, t) = 0 \qquad \text{para } j = 2, ..., n, \\ &D_1 u(y, t) = \phi', \\ &D_j u(y, t) = 0 \qquad \text{para } j = 2, ..., n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

As derivadas de segunda ordem de Z são como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Z}{\partial x^i \partial x^j} &= -\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\phi''(y^i - x^i)(y^j - x^j)}{2|y-x|^2} - \frac{\phi'}{|y-x|}\left(\delta_{ij} - \frac{(y^i - x^i)(y^j - x^j)}{|y-x|^2}\right),\\
\frac{\partial^2 Z}{\partial y^i \partial y^j} &= -\frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^i \partial y^j} - \frac{\phi''(y^i - x^i)(y^j - x^j)}{2|y-x|^2} - \frac{\phi'}{|y-x|}\left(\delta_{ij} - \frac{(y^i - x^i)(y^j - x^j)}{|y-x|^2}\right),\\
\frac{\partial^2 Z}{\partial x^i \partial y^j} &= \frac{\phi''(y^i - x^i)(y^j - x^j)}{2|y-x|^2} + \frac{\phi'}{|y-x|}\left(\delta_{ij} - \frac{(y^i - x^i)(y^j - x^j)}{|y-x|^2}\right).
\end{aligned}$$

Escolhendo coordenadas como antes obtemos

$$\begin{aligned}
Z_{x^1x^1} &= -D_1D_1u(x,t) - \frac{1}{2}\phi'', \\
Z_{x^ix^i} &= -D_iD_iu(x,t) - \frac{\phi'}{|y-x|} && se\ i > 1, \\
Z_{x^ix^j} &= -D_iD_ju(x,t) && se\ i \neq j, \\
Z_{y^1y^1} &= D_1D_1u(y,t) - \frac{1}{2}\phi'', \\
Z_{y^iy^i} &= D_iD_iu(y,t) - \frac{\phi'}{|y-x|} && se\ i > 1, \\
Z_{y^iy^j} &= D_iD_ju(y,t) && se\ i \neq j, \\
Z_{x^1y^1} &= \frac{1}{2}\phi'', \\
Z_{x^iy^i} &= \frac{\phi'}{|y-x|} && se\ i > j, \\
Z_{x^iy^j} &= 0 && se\ i \neq j.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

A matriz $2n \times 2n$ das derivadas segundas de Z é semi-definida negativa:

$$0 \geq [D^2Z] = \begin{bmatrix}
Z_{x^1x^1} & \cdots & Z_{x^1x^n} & Z_{x^1y^1} & \cdots & Z_{x^1y^n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
Z_{x^nx^1} & \cdots & Z_{x^nx^n} & Z_{x^ny^1} & \cdots & Z_{x^ny^n} \\
Z_{y^1x^1} & \cdots & Z_{y^1x^n} & Z_{y^1y^1} & \cdots & Z_{y^1y^n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
Z_{y^nx^1} & \cdots & Z_{y^nx^n} & Z_{y^ny^1} & \cdots & Z_{y^ny^n}
\end{bmatrix}$$

No ponto de máximo, a derivada de Z em relação a variável t é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t}(y,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - 2\frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \frac{D_i u(y) D_j u(y)}{1+|Du(y)|^2}\right) D_i D_j u(y,t) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \frac{D_i u(x) D_j u(x)}{1+|Du(x)|^2}\right) D_i D_j u(x,t) - 2\frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon \\
&< \left(1 - \frac{D_1 u(y) D_1 u(y)}{1+|Du(y)|^2}\right) D_1 D_1 u(y,t) + \sum_{i\geqslant 2} \left(1 - \frac{D_i u(y) D_i u(y)}{1+|Du(y)|^2}\right) D_i D_i u(y,t) \\
&\quad - \sum_{i\neq j} \left(\frac{D_i u(y) D_j u(y)}{1+|Du(y)|^2}\right) D_i D_j u(y,t) \\
&\quad - \left(1 - \frac{D_1 u(x) D_1 u(x)}{1+|Du(x)|^2}\right) D_1 D_1 u(x,t) - \sum_{i\geqslant 2} \left(1 - \frac{D_i u(x) D_i u(x)}{1+|Du(x)|^2}\right) D_i D_i u(x,t) \\
&\quad + \sum_{i\neq j} \left(\frac{D_i u(x) D_j u(x)}{1+|Du(x)|^2}\right) D_i D_j u(x,t) - 2\frac{\partial \phi}{\partial t} \\
&= \frac{1}{1+(\phi')^2}\left(Z_{y^1y^1} + \frac{1}{2}\phi''\right) + \sum_{i\geqslant 2} Z_{y^iy^i} + (n-1)\frac{\phi'}{|y-x|} - 0 \\
&\quad + \frac{1}{1+(\phi')^2}\left(Z_{x^1x^1} + \frac{1}{2}\phi''\right) + \sum_{i\geqslant 2} Z_{x^ix^i} + (n-1)\frac{\phi'}{|y-x|} + 0 - 2\frac{\partial \phi}{\partial t} \\
&= \frac{1}{1+(\phi')^2}\left(Z_{y^1y^1} + Z_{x^1x^1}\right) + \frac{\phi''}{1+(\phi')^2} + \sum_{i\geqslant 2}(Z_{x^ix^i} + Z_{y^iy^i}) \\
&\quad + 2(n-1)\frac{\phi'}{|y-x|} - 2\frac{\partial \phi}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Seja Λ a última expressão obtida na desigualdade acima e consideremos a matriz

$$C = \begin{bmatrix}
\frac{1}{1+(\phi')^2} & 0 & \cdots & 0 & c^{11} & c^{12} & \cdots & c^{1n} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & c^{21} & c^{22} & \cdots & c^{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & c^{n1} & c^{n2} & \cdots & c^{nn} \\
c^{11} & c^{21} & \cdots & c^{n1} & \frac{1}{1+(\phi')^2} & 0 & \cdots & 0 \\
c^{12} & c^{22} & \cdots & c^{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c^{1n} & c^{2n} & \cdots & c^{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}.$$

Lembrando que $Z_{x^i y^j} = 0$, para $i \neq j$, temos que

$$\mathrm{Tr}(C \cdot [D^2 Z]) \;=\; \frac{1}{1+(\phi')^2}(Z_{x^1x^1} + Z_{y^1y^1}) + \sum_{i\geqslant 2}(Z_{x^ix^i} + Z_{y^iy^i}) + 2\sum_{i=1}^{n} c^{ii} Z_{x^iy^i}.$$

Escolhendo

$$\begin{aligned} c^{11} &= -\frac{1}{1+(\phi')^2} \\ c^{ii} &= 1 \quad \text{se } i > 1 \\ c^{ij} &= 0 \quad \text{se } i \neq j \end{aligned}$$

a matriz C torna-se semi-definida positiva, e como a matriz $[D^2 Z]$ é semi-definida negativa obtemos

$$\mathrm{Tr}(C \cdot [D^2 Z]) \leqslant 0.$$

Logo, por (2.5), vale a seguinte desigualdade no ponto de máximo:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{\partial Z}{\partial t} < \Lambda &\leqslant \Lambda - \mathrm{Tr}(C \cdot [D^2 Z]) \\ &= \frac{\phi''}{1+(\phi')^2} + 2(n-1)\frac{\phi'}{|y-x|} - 2\frac{\partial \phi}{\partial t} - 2\sum_{i=1}^{n} c^{ii} Z_{x^iy^i} \\ &= \frac{\phi''}{1+(\phi')^2} + 2(n-1)\frac{\phi'}{|y-x|} - c^{11}\phi'' - 2\frac{\phi'}{|y-x|}\sum_{i=2}^{n} c^{ii} - 2\frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= \frac{\phi''}{1+(\phi')^2} + 2(n-1)\frac{\phi'}{|y-x|} + \frac{\phi''}{1+(\phi')^2} - 2(n-1)\frac{\phi'}{|y-x|} - 2\frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= 2\left(\frac{\phi''}{1+(\phi')^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esta contradição prova que $Z(x, y, t) < 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e todo $t \geqslant 0$. Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos a prova do Teorema. $\square$

Capítulo 3

Estimativa Inferior para o Primeiro Autovalor do Laplaciano via Módulo de Continuidade para a Equação do Calor

Neste capítulo os métodos utilizados anteriormente para o caso periódico são adaptados para o problema de Neumann em um domínio convexo. O principal objetivo é obter uma cota inferior positiva para o menor autovalor não-trivial do laplaciano, sob condições de fronteira de Neumann.

A definição de módulo de continuidade que veremos a seguir é ligeiramente diferente daquela que vimos no capítulo 1.

Definição 3.1 (módulo de continuidade) Seja $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função não negativa. Dizemos que ψ é um módulo de continuidade para uma função v em $\mathbb{R}^n$, se para todo x, y em $\mathbb{R}^n$,

$$|v(y) - v(x)| \leqslant 2\psi\left(\frac{|y - x|}{2}\right).$$

Considere a equação de evolução

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(Du, t) D_i D_j u, \tag{3.1}$$

onde $A(p, t) = [a^{ij}(p, t)]$ é semi-definida positiva.

Suponha que existe uma função contínua $\alpha : \mathbb{R}^+ \times [0, T] \to \mathbb{R}^+$ com

$$0 < \alpha(R, t) \leqslant R^2 \inf_{|p|=R, (v \cdot p) \neq 0} \frac{v^T A(p, t) v}{(v \cdot p)^2}. \tag{3.2}$$

Seja $\psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ não-negativa, e suponha que $\varphi : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ é regular, não-decrescente na primeira variável($\varphi'(x,t) \geqslant 0 \; \forall \; x, \; t$ fixado), não-negativa e satisfaz

$$\varphi_t \geqslant \alpha(|\varphi'|, t)\varphi'' \tag{3.3}$$

com $\varphi(z,0) \geqslant \psi(z)$ para $z > 0$.

Teorema 3.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave, convexo e limitado, e seja u uma solução regular do problema de Neumann*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(Du,t) D_i D_j u \\ D_\eta u(x,t) &= 0 \qquad \text{para} \;\; x \in \partial\Omega, \; t > 0 \end{aligned}$$

onde η é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ em x. Se ψ é um módulo de continuidade para $u(\cdot,0)$, então $\varphi(\cdot,t)$ é um módulo de continuidade para $u(\cdot,t)$ para cada $t \geqslant 0$.

Prova. Defina como antes

$$Z(x,y,t) = u(y,t) - u(x,t) - 2\varphi\left(\frac{|y-x|}{2}, t\right) - \varepsilon(1+t),$$

e note que $Z < 0$ quando $t = 0$, e quando $|x-y|$ é pequeno para qualquer $t > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} Z(x,y,t) &= u(y,0) - u(x,0) - 2\varphi\left(\frac{|y-x|}{2}, 0\right) - \varepsilon \\ &\leq u(y,0) - u(x,0) - 2\psi\left(\frac{|y-x|}{2}\right) - \varepsilon \\ &< 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{y\to x} Z(x,y,t) &= u(x,t) - u(x,t) - 2\varphi(0,t) - \varepsilon(1+t) \\ &\leq 0 - \varepsilon(1+t) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Suponha que Z não é negativa em $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0,\infty)$. Então existe um primeiro $t_0 > 0$ e pontos $x_0, \; y_0 \in \overline{\Omega}$ tais que $Z(x_0,y_0,t_0) = 0$. Observe que (x_0,y_0,t_0) é um ponto de máximo de $Z(x,y,t_0)$ pois $Z(x,y,t) \leqslant 0$ em $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times [0,t_0]$.

Há dois casos a considerar:

Caso 1. (x_0,y_0) está no interior de $\Omega \times \Omega$.

Neste caso, as condições nas derivadas de primeira ordem (2.3) são satisfeitas em (x_0,y_0,t_0). Note que as equações (2.4) implicam que

$$Du(x,t) = D_1u(x,t)e_1 + D_2u(x,t)e_2 + \cdots + D_nu(x,t)e_n = \varphi'(x,t)e_1.$$

Além disso, a matriz das derivadas de segunda ordem $[D^2Z]$ é semi-definida negativa com entradas dadas por (2.5).
No ponto de máximo,

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t}(y,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \\
&< \sum_{i,j} a^{ij}(D_y u, t) D_i D_j u(y,t) \\
&\quad - \sum_{i,j} a^{ij}(D_x u, t) D_i D_j u(x,t) - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t} \\
&= a^{11}(\varphi' e_1, t) D_1 D_1 u(y,t) + \sum_{i=2}^{n} a^{ii}(\varphi' e_1, t) D_i D_i u(y,t) \\
&\quad + \sum_{i \neq j} a^{ij}(\varphi' e_1, t) D_i D_j u(y,t) \\
&\quad - a^{11}(\varphi' e_1, t) D_1 D_1 u(x,t) - \sum_{i=2}^{n} a^{ii}(\varphi' e_1, t) D_i D_i u(x,t) \\
&\quad - \sum_{i \neq j} a^{ij}(\varphi' e_1, t) D_i D_j u(x,t) - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t} \\
&= a^{11}(\varphi' e_1, t)\left(Z_{y^1 y^1} + \frac{1}{2}\varphi''\right) + \sum_{i=2}^{n} a^{ii}(\varphi' e_1, t)\left(Z_{y^i y^i} + \frac{\varphi'}{|y-x|}\right) \\
&\quad + \sum_{i \neq j} a^{ij}(\varphi' e_1, t) Z_{y^i y^j} + a^{11}(\varphi' e_1, t)\left(Z_{x^1 x^1} + \frac{1}{2}\varphi''\right) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n} a^{ii}(\varphi' e_1, t)\left(Z_{x^i x^i} + \frac{\varphi'}{|y-x|}\right) + \sum_{i \neq j} a^{ij}(\varphi' e_1, t) Z_{x^i x^j} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^{ii}(Z_{y^i y^i} + Z_{x^i x^i}) + a^{11}\varphi'' + 2\frac{\varphi'}{|y-x|}\sum_{i=2}^{n} a^{ii} + \sum_{i \neq j} a^{ij}(Z_{y^i y^i} + Z_{x^i x^i}) - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t} \\
&\quad + 2\sum_{i \neq j} c^{ij} Z_{x^i y^j} - c^{11} - 2\frac{\varphi'}{|y-x|}\sum_{i=2}^{n} c^{ii} \\
&= \mathrm{Tr}(A' \cdot [D^2 Z]) - 2\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (a^{11} - c^{11})\varphi'' + 2\frac{\varphi'}{|y-x|}\sum_{i=2}^{n}(a^{ii} - c^{ii}).
\end{aligned}
$$

Observe que na quinta etapa adicionamos e subtraimos o termo $2\mathrm{Tr}(C \cdot [Z_{xy}])$, para alguma matriz C de ordem n, onde

$$
\mathrm{Tr}(C \cdot [Z_{xy}]) = \sum_{i,j=1}^{n} c^{ji} Z_{x^i y^j} = \sum_{i=1}^{n} c^{ii} Z_{x^i y^i} = \frac{c^{11}}{2}\varphi'' + \frac{\varphi'}{|y-x|}\sum_{i=2}^{n} c^{ii}.
$$

Além disso, a matriz A' de ordem $2n$ que aparece na última etapa é definida por

$$A' = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & A \end{bmatrix},$$

assim

$$\mathrm{Tr}(A' \cdot [D^2 Z]) = \sum_{i=1}^{n} a^{ii}(Z_{x^i x^i} + Z_{y^i y^i}) + 2\frac{\varphi'}{|y-x|}\sum_{i=2}^{n} c^{ii} + \sum_{i \neq j} a^{ij}(Z_{x^j x^i} + Z_{y^j y^i}).$$

Se escolhermos C de forma que A' seja semi-definida positiva, então teremos

$$\mathrm{Tr}(A' \cdot [D^2 Z]) \leqslant 0.$$

Para fazer o coeficiente de $\varphi'/|y-x|$ anular-se, tomaremos $c^{ij} = a^{ij}(\varphi' e_1)$ para $(i,j) \neq (1,1)$.

Finalmente, escolhemos c^{11} de forma a maximizar o coeficiente de φ''. A condição $A' \geqslant 0$ é equivalente a

$$[\ v^T \quad u^T\ ] A' \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = v^T A v + u^T A u + 2 v^T A u - 2(a^{11} - c^{11}) v^1 u^1 \geqslant 0. \tag{3.4}$$

onde $u, v \in \mathbb{R}^n$. Agora, seja α definida por (3.2) com $p = \varphi' e_1$, $v = (v_1, \cdots, v_n)$ e $R = |\varphi' e_1| = |\varphi'|$. Assim,

$$0 < \alpha(|\varphi'|) \leqslant (\varphi')^2 \cdot \frac{v^T A v}{(v \cdot \varphi' e_1)^2} = (\varphi')^2 \cdot \frac{v^T A v}{(\varphi')^2 (v_1)^2} = \frac{v^T A v}{(v^1)^2}.$$

Escolhendo $c^{11} = a^{11}(\varphi' e_1) - 2\alpha(|\varphi'|)$ e substituindo em (3.4) obtemos

$$\begin{aligned} [\ v^T \quad u^T\ ] A' \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} &= v^T A v + u^T A u + 2 v^T A u - 4\alpha v^1 u^1 \\ &= (v+u)^T A (v+u) - 4\alpha v^1 u^1 \\ &= (v+u)^T A (v+u) - \alpha[(v^1 + u^1)^2 - (v^1 - u^1)^2] \\ &\geqslant (v+u)^T A (v+u) - \alpha(v^1 + u^1)^2 \\ &\geqslant 0, \end{aligned}$$

de forma que A' é semi-definida positiva. Finalmente, por (3.3), obtemos a seguinte desigualdade em (x_0, y_0, t_0):

$$0 \leqslant \frac{\partial Z}{\partial t} < 2\left(\alpha(|\varphi'|\varphi'' - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \leqslant 0,$$

uma contradição que prova que $Z(x,y,t) < 0$ para todo (x,y) e $t \geqslant 0$. A estimativa para $|u(y,t) - u(x,t)|$ é obtida fazendo-se $\varepsilon \to 0$.

Caso 2. O ponto (x_0, y_0) está na fronteira de $\Omega \times \Omega$

Considere o caso em que y está na fronteira $\partial\Omega$. Se tomarmos derivadas em y que estão em direções $\mu(y)$ que não têm componente normal na fronteira (direções de vetores tangentes), então, como (x_0, y_0, t_0) é um ponto de máximo de $Z|_{\partial\Omega}$, temos que $D_{\mu(y)}Z(x_0, y_0, t_0) = 0$. Por outro lado, seja $\eta(y)$ o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ em y. Assim,

$$\begin{aligned}
D_\eta Z(x, y, t) &= \frac{d}{ds} Z(x, y + s\eta(y), t)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds} u(y + s\eta(y), t)\Big|_{s=0} - \frac{d}{ds} u(x, t)\Big|_{s=0} - 2\frac{d}{ds}\varphi\left(\frac{|y + s\eta(y) - x|}{2}, t\right)\Big|_{s=0} \\
&\quad - \frac{d}{ds}\varepsilon(1 + t)\Big|_{s=0} \\
&= Du(y, t) \cdot \eta(y) - \varphi' \frac{y - x}{|y - x|} \cdot \eta(y) \\
&= 0 - \varphi' \frac{y - x}{|y - x|} \cdot \eta(y) \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

pois $Du(y_0, t_0) \cdot \eta(y_0) = D_\eta u(y_0, t_0) = 0$ pela condição de fronteira, $\varphi' \geqslant 0$ e $(y_0 - x_0) \cdot \eta(y_0) \geqslant 0$ pela convexidade de Ω. Se a desigualdade é estrita, então chegamos numa contradição, pois (x_0, y_0) não seria um ponto de máximo, uma vez que

$$Z(x_0, y_0 - s\eta(y_0), t_0) > Z(x_0, y_0, t_0)$$

para s pequeno. Assim $D_\eta Z = 0$ e podemos concluir que $D_y Z(x_0, y_0, t_0) = 0$.

Agora, ainda com y em $\partial\Omega$, consideremos a posição de x; ou x é um ponto interior de Ω, ou $x \in \partial\Omega$. No último caso, se ν é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ em x, deduzimos, como acima, que

$$\begin{aligned}
D_\nu Z(x, y, t) &= \frac{d}{ds} Z(x + s\nu(x), y, t)\Big|_{s=0} \\
&= -Du(x, t) \cdot \nu(x) + \varphi' \frac{y - x}{|y - x|} \cdot \nu(x) \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

Novamente, esta desigualdade não pode ser estrita pois (x_0, y_0) é um ponto de máximo de Z, e portanto $D_\nu Z = 0$. Como antes, as derivadas em outras direções também são nulas. Logo $D_x Z(x_0, y_0, t_0) = 0$.

Portanto, quando ambos x e y estão na fronteira de Ω, $DZ = 0$ e $[D^2 Z] \leqslant 0$.

No caso em que x está no interior de Ω, $D_x Z = 0$ e portanto $DZ = 0$ e $[D^2 Z] \leqslant 0$ (é claro que o caso em que y está no interior de Ω e $x \in \partial\Omega$ é análogo a este). Logo, em qualquer caso, podemos argumentar exatamente como no caso onde x e y são pontos interiores para obter uma contradição e concluir a prova do Teorema. $\square$

Corolário 3.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio convexo com diâmetro D, e $v(x,t)$ uma solução suave da equação do calor com fronteira de Neumann*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v & em\ \Omega \times [0,\infty) \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & em\ \partial\Omega \times [0,\infty) \end{cases} . \tag{3.5}$$

Suponha que $v(\cdot,0)$ tem módulo de continuidade ψ, onde $\psi : [0,D/2] \to \mathbb{R}$ é suave com $\psi(0) = 0$ e $\psi'(z) \geqslant 0$. Seja $\varphi : [-D/2,D/2] \to \mathbb{R}$ solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = \varphi''(x,t) & em\ [-D/2,D/2] \times \mathbb{R}^+ \\ \varphi'\left(\pm\dfrac{D}{2}\right) = 0 \end{cases} ,$$

tal que $\varphi(z,0) = \psi(z)$ para todo $z \in [0,D/2]$, $\varphi' \geqslant 0$ em $[-D/2,D/2] \times \mathbb{R}^+$ e $\varphi(0,t) \geqslant 0$ para cada t. Então $\varphi(\cdot,t)$ é um módulo de continuidade para $v(\cdot,t)$ para cada $t \geqslant 0$. Ou seja,

$$|v(x,t) - v(y,t)| \leqslant 2\varphi\left(\frac{|x-y|}{2}, t\right)$$

$\forall x,y \in \Omega, t \geqslant 0$.

Prova. A prova é análoga àquela do Teorema 3.1, com as devidas modificações nos domínios de φ e ψ, e tomando $a_{ij} = \delta_{ij}$ para obter

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}.$$

□

Vamos aplicar agora o Corolário 3.2 para dar uma nova prova de um resultado, obtido em 1960 por Payne e Weinberger [5], que dá uma estimativa inferior positiva para o primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano, em um domínio convexo e limitado, sob condições de fronteira de Neumann. A prova que exibiremos consiste em estimar o módulo de continuidade para soluções da equação do calor e foi obtida recentemente por Ben Andrews e Julie Clutterbuck, a partir dos resultados nos artigos [1], [2] e [3].

Mais prescisamente, vamos considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & em\ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & em\ \partial\Omega \end{cases} ,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio compacto e convexo, $\lambda \in \mathbb{R}$ e u é suave em Ω. Observemos primeiramente, que se λ é um autovalor de $-\Delta$ no problema referido acima, então $\lambda \geqslant 0$. De fato, seja $u \in C^\infty(\Omega)$ uma autofunção associada ao autovalor λ; assim, usando integração por partes, temos que

$$\begin{aligned}
\lambda \int_\Omega u^2 dx &= -\int_\Omega u(\lambda u) dx \\
&= -\int_\Omega u \Delta u dx \\
&= \int_\Omega |Du|^2 dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} u dS \\
&= \int_\Omega |Du|^2 dx \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Note que se $\lambda = 0$ então $\Delta u = 0$ em Ω, e portanto

$$\int_\Omega |Du|^2 dx = -\int_\Omega u \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0,$$

assim $|Du| = 0$ em Ω, e, como u é conexo, isto implica que u é constante em Ω. Reciprocamente, se u é constante em Ω, então

$$\lambda u = \Delta u = 0$$

em Ω, e como $u \neq 0$(pois u é autofunção), temos que $\lambda = 0$. Além disso, o conjunto dos possíveis valores de λ é enumerável e forma uma sequência não decrescente

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots,$$

com $\lim_{k \to +\infty} \lambda_k = +\infty$.

O teorema que provaremos a seguir nos dá uma estimativa inferior positiva para λ_1.

Teorema 3.3 (Payne - Weinberger) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio compacto e convexo, com diâmetro D, e seja (λ, u) um par autovalor-autofunção do problema de Neumann*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.6}$$

com $\lambda > 0$ e $u \in C^\infty(\Omega)$. Nessas condições, temos que

$$\lambda \geqslant \frac{\pi^2}{D^2}.$$

Prova. Seja (λ, u) um par autovalor-autofunção que resolve o problema (3.6) e considere a função

$$v(x,t) = e^{-\lambda t} u(x),$$

para $x \in \Omega$ e $t \geq 0$. Temos que

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = -\lambda e^{-\lambda t} u(x) = e^{-\lambda t}(-\lambda u(x)) = e^{-\lambda t} \Delta u(x) = \Delta v(x,t)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x,t) = e^{-\lambda t} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

Logo v satisfaz o Problema de Neumann (3.5). Vamos mostrar que existe uma constante positiva C tal que a função $\psi : [0, D/2] \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\psi(z) = C \sin\left(\frac{\pi z}{D}\right)$$

é um módulo de continuidade para $v(x,0) = u(x)$.

Afirmação: Existe uma constante $C > 0$ tal que $\forall x, y \in \Omega$, tem-se

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C \sin\left(\frac{\pi}{2D}|x-y|\right).$$

Observe que para $x = y$ nossa afirmação é obviamente verdadeira, pois os dois lados da desigualdade acima se anulam. Assim, suponhamos que $x \neq y$. Como Ω é compacto e u é suave em Ω, temos que

$$|u(x) - u(y)| \leqslant M|x-y|$$

$\forall x, y \in \Omega$, onde $M = \max_\Omega |u'(\xi)| > 0$. Se nossa afirmação for falsa, então $\forall C > 0$, $\exists\ x, y \in \Omega$ tais que

$$C \sin\left(\frac{\pi}{2D}|x-y|\right) < |u(x) - u(y)| \leqslant M|x-y|,$$

o que implica

$$\frac{C}{M} < \frac{|x-y|}{\sin\left(\frac{\pi}{2D}|x-y|\right)}.$$

Mas isto é um absurdo, pois a função $f : (0, D] \to \mathbb{R}$ dada por $f(r) = \dfrac{r}{\sin\left(\frac{\pi}{2D} r\right)}$ é limitada, uma vez que ela é contínua em $(0, D]$ e $\lim\limits_{r \to 0} f(r) = \dfrac{2D}{\pi}$. Logo nossa afirmação é verdadeira.

Note que a função ψ definida acima satisfaz as condições

$$\psi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \psi'(z) = \frac{C\pi}{D}\cos\left(\frac{\pi z}{D}\right) \geqslant 0 \;\; \text{em} \;\; [0, D/2].$$

Para seguir com a prova do Teorema, vamos definir a função $\varphi : [-D/2, D/2] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pondo

$$\varphi(z,t) = Ce^{-\frac{\pi^2}{D^2}t}\sin\left(\frac{\pi z}{D}\right),$$

onde a constante C é a mesma que aparece na definição de ψ. Note que $\varphi(z, 0) = \psi(z)$ para $z \geqslant 0$, $\varphi'(z,t) \geqslant 0$ em $[-D/2, D/2] \times \mathbb{R}^+$ e $\varphi(0,t) = 0$ para cada $t \geqslant 0$. Além disso, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(z,t) &= -\frac{C\pi^2}{D^2}e^{-\frac{\pi^2}{D^2}t}\sin\left(\frac{\pi z}{D}\right), \\ \varphi'(z,t) &= \frac{C\pi}{D}e^{-\frac{\pi^2}{D^2}t}\cos\left(\frac{\pi z}{D}\right) \end{aligned}$$

e

$$\varphi''(z,t) = -\frac{C\pi^2}{D^2}e^{-\frac{\pi^2}{D^2}t}\sin\left(\frac{\pi z}{D}\right),$$

temos que $\varphi_t = \varphi''$ em $[-D/2, D/2] \times \mathbb{R}^+$ e

$$\varphi'\left(\pm\frac{D}{2}, t\right) = \frac{C\pi}{D}e^{-\frac{\pi^2}{D^2}t}\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Logo, pelo Corolário 3.2, a função $\varphi(\cdot, t)$ definida acima, é um módulo de continuidade para a função $v(\cdot, t) = e^{-\lambda t}u(\cdot)$, para cada $t \geqslant 0$. Assim,

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t}|u(y) - u(x)| &= |v(y,t) - v(x,t)| \\ &\leqslant 2\varphi\left(\frac{|y-x|}{2}\right) \\ &= 2Ce^{-\frac{\pi^2}{D^2}t}\sin\left(\frac{\pi|y-x|}{2D}, t\right) \\ &\leqslant 2Ce^{-\frac{\pi^2}{D^2}t}. \end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados da desigualdade acima por $e^{\lambda t}$, obtemos que

$$|u(y) - u(x)| \leqslant 2Ce^{-\left(\frac{\pi^2}{D^2} - \lambda\right)t}. \tag{3.7}$$

Como a função u é não-constante, sabemos que

$$\mathrm{osc}_\Omega u = \sup_\Omega |u(y) - u(x)| > 0.$$

Fazendo $\theta = \text{osc}_\Omega u$ e tomando o $\sup_\Omega$ dos dois lados da desigualdade (3.7) obtemos

$$0 \;<\; \theta \leqslant 2Ce^{-\left(\frac{\pi^2}{D^2}-\lambda\right)t}$$

o que implica

$$\ln(\theta) \;\leqslant\; \ln(2C) - \left(\frac{\pi^2}{D^2} - \lambda\right) t,$$

e para $t > 0$, isto é equivalente a

$$\frac{\ln(\theta)}{t} \;\leqslant\; \frac{\ln(2C)}{t} - \left(\frac{\pi^2}{D^2} - \lambda\right).$$

Como a última desigualdade é válida para todo $t > 0$, fazendo $t \to +\infty$ concluimos que

$$\frac{\pi^2}{D^2} \leqslant \lambda \ ,$$

como queríamos mostrar. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] B. Andrews and J. Clutterbuck, *Lipschitz bounds for solutions of quasilinear parabolic equations in one space variable*, J. Differential Equations 246 (2009), no. 11, 4268-4283. MR2517770 (2010j:35237)

[2] B. Andrews and J. Clutterbuck, *Time-interior gradient estimates for quasilinear parabolic equations*, Indiana Univ. Math. J. 58 (2009), no. 1, 351-380. MR2504416 (2010k:35234)

[3] B. Andrews and J. Clutterbuck, *Proof of the fundamental gap conjecture*, J. Amer. Math. Soc. 24:3 (2011), 899-916. MR 2012d:35051 Zb1 1222.35130

[4] K. Ecker, G. Huisken, *Interior estimates for hipersurfaces moving by mean curvature*, Invent. Math. 105 (3)(1991)547-569, MR 1117150 (92i:53010).

[5] L. E. Payne and H. F. Weinberger, *An optimal Poincaré inequality for convex domains*, Arch. Rational Mech. Anal. 5 (1960), 286-292 (1960). MR0117419 (22:8198)