UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

MARCELO DE ARAÚJO LIMA

UMA NOVA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

MACEIÓ-AL
MARÇO DE 2016

MARCELO DE ARAÚJO LIMA

UMA NOVA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 30 de março de 2016, à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacionalda Universidade Federal de Alagoas em associação com a sociedade Bresileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários à obenção do grau de mestre em Matemática.

MACEIÓ-AL
MARÇO DE 2016

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária Responsável: Janaina Xisto de Barros Lima

L732u Lima, Marcelo de Araújo.
Uma nova proposta didática para o ensino de análise combinatória / Marcelo de Araújo Lima. – 2016.
108f. : il.

Orientador: André Luiz Flores.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

Bibliografia: f. 100-101.
Anexos: f. 102-108.

1. Análise combinatória. 2. Professores. 3. Alunos. 4. Livros didáticos 5. Sequências. 6. Subconjuntos. I. Título.

CDU: 519.101

Folha de Aprovação

MARCELO DE ARAÚJO LIMA

UMA NOVA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 30 de março de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. André Luiz Flores (Orientador)

Luis Guillermo Martinez M

Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza

João Xavier da C. Neto

Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto

À minha mãe e meu pai que sempre acreditaram em minha capacidade e investiram em mim. À meus irmãos que torcem por mim num sentimento recíproco e que compreendem o meu esforço para ter chegado até aqui. À meus filhos: Matheus, Carol e Lucas a quem amo de verdade e à minha esposa "Chris", que me dá força para lutar todos os dias e a quem amo de verdade. E finalmente à Deus, que é o principal motivo de tudo isto.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus por tudo que me deu durante a vida: filhos, esposa, mãe, irmãos, amigos e a oportunidade de poder lecionar Matemática e por ter ido me buscar em casa em uma noite em que não sabia mais o que iria fazer na vida e me tornou o que sou hoje, o professor Marcelo. Muito obrigado Senhor!

Ao a meu orientador, Prof. Dr. André Flores, pela disponibilidade, pela atenção, pela colaboração que tanto ajudaram na elaboração desta dissertação.

A meus colegas do Profmat e em especial a Alberto e Ideogar, que compartilharam os momentos de alegrias, cansaço, realização, decepção. E uma dedicatória especial a meu amigo Marquirael que me acompanhou dois anos seguidos, esteve sempre a meu lado e cuja vida me mostrou que tenho mais um irmão que posso contar sempre e a quem estarei sempre disposto a ajudar.

A meus professores do Profmat, que me ajudaram a perceber que precisamos sempre nos reciclar e estudar cada vez mais para que possamos oferecer um serviço cada vez melhor aos nossos alunos.

A meus alunos do Colégio Diocesano de Caruaru, que colaboraram comigo nas pesquisas e na preocupação em saber como estava o curso.

A meus colegas de trabalho que sempre se mostraram interessados em saber se estava tudo bem comigo, com o curso e também trocando ideias que colaboraram com a elaboração desta dissertação.

A minha tia Carminha, que me ajudou nos momentos iniciais da vida, me ajudou a ter uma formação de qualidade e foi um ótimo exemplo que resolvi seguir na vida: como pessoa e profissionalmente.

A minha esposa Chris, a quem respeito muito pela sua integridade, honestidade e pela força que me dá nos momentos mais difíceis da vida e que também compartilha comigo as nossas vitórias. E por fim agradeço a minha mãe que sempre me apoiou e me deu a vida e me deu exemplo de ser humano fantástico e aos meus filhos, meus amores: Carol, Matheus e Lucas que me fazem a cada dia ser um homem melhor e a quem luto todos os dias para que cada um deles tenha uma vida maravilhosa baseada no amor de Deus e na paz de Cristo.

Agora, pois, permanecem a fé, a esperança e o amor, estes três, mas o maior destes é o amor.

1 Coríntios 13:13

RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar a importância de desenvolvermos o estudo da Análise Combinatória partindo da ideia central de cada tópico e desenvolvermos um estudo baseado na aplicação de modo mais geral dos princípios multiplicativo e aditivo. Para isso, partimos do princípio de que basicamente há dois tipos de formações de agrupamentos: os agrupamentos ordenados "Método de formação de sequências" e os agrupamentos não ordenados "Método de formação de subconjuntos".Através desse princípio, desenvolvemos os conceitos que hoje em dia são tratados como: arranjos, permutações e combinações. Analisamos e resolvemos problemas de Análise Combinatória através desses dois métodos (aditivo e multiplicativo), fazendo uma associação aos métodos aplicados nos livros didáticos, mostrando a importância que a compreensão desses dois métodos tem no desenvolvimento de um melhor entendimento do que se está estudando. Além disso, desenvolvemos uma técnica para o cálculo do número de subconjuntos que podemos formar a partir dos elementos de um conjunto fornecido, os baseando sempre na definição de subconjunto. Entregamos questionários a alunos do ensino médio e outro a professores de Matemática também do ensino médio e encontramos falhas nas compreensões dos tópicos abordados por alunos e professores, e também dificuldades dos professores em fazer seus alunos compreenderem as diferenças entre Arranjos, Combinações e Permutações. Mas os mesmos não têm procurado formular "caminhos"para tentar fazer com que seus alunos compreendam os conceitos abordados no assunto, aparentemente a ideia talvez seja de que fica mais fácil ensinar Análise Combinatória através de questões de fácil compreensão. Assim professores e alunos ficam satisfeitos. O aluno acredita que está apto a resolver problemas de combinatória e o professor acredita que conseguiu fazer seus alunos compreenderem os assuntos ensinados. Constatamos que tanto alunos como futuros professores tem grande dificuldade em compreender as ideias apresentadas em cada problema e as definições apresentadas nos livros didáticos, principalmente se essas ideias forem um pouco mais complexas, mas que entendem com maior facilidade os conceitos de sequências e subconjuntos. A partir daí, surgiu a seguinte indagação: Será que conhecer as fórmulas de Arranjos, Permutações e Combinações faz com que o aluno esteja apto a resolver problemas de Análise Combinatória. E pudemos verificar que a resposta à pergunta anterior é, não. Pois como dizemos anteriormente a maior dificuldade não é só cálculo, mas principalmente a compreensão do enunciado.

Palavras - chave: Análise Combinatória. Professores. Alunos. Livros Didáticos. Sequências. Subconjuntos.

ABSTRACT

The objective of this study is to show the importance of developing the study of Combinatorial Analysis starting from the central idea of each topic and develop a study based on more general application of multiplicative and additive principles . For this, we assume that basically there are two types of cluster formations : the ordered clusters "sequences training method"and those which have not ordered "subsets of training method". Through this principle we developed the concepts that today are treated as arrangements, permutations and combinations. We analyze and solve problems of Combinatorial Analysis through these two methods (additive and multiplicative), making an association methods applied in textbooks, showing the importance that understanding these two methods has to develop a better understanding of what is being studied. Furthermore, we have developed a technique for calculating the number of subsets that can form from the elements of a given set, always based on the subset definition. We deliver questionnaires to high school students and other mathematics teachers of high school and also found flaws in the understanding of the topics covered by students and teachers, and also difficulties of teachers to make their students understand the differences between arrangements, combinations and permutations. But we have not sought formmular "paths"to try to make their students understand the concepts covered in the matter, apparently the idea that maybe it is easier to teach Combinatorial Analysis through easily understood issues. So teachers and students are satisfied. The student believes he is able to solve combinatorial problems and the teacher believes that managed to make their students understand the subjects taught. We found that both students and future teachers have great difficulty in understanding the ideas presented in each issue and the definitions in textbooks , especially if these ideas are a bit more complex , but more easily understand the concepts of sequences and subsets . Since then , the following question arose: Would knowing the arrangements formulas, permutations and combinations makes the student is able to solve Combinatorial Analysis problems. And we could see that the answer to the previous question is no. Because as previously we say the biggest difficulty is not only calculating but mostly the understanding of the statement.

Keywords: Combinatorial Analysis. Teachers. Students. Textbook. Sequences. Subsets.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é dar uma contribuição ao ensino de Análise Combinatória, que é um dos conteúdos de matemática do ensino médio que mais gera dificuldades de comunicação entre professores e alunos, pois trabalha um campo do intelecto humano mais importante, o raciocínio. Não é de hoje que professores têm dificuldades em ensinar análise combinatória e os alunos têm dificuldades em compreendê-la, ao ponto de após o professor ter ensinado princípio multiplicativo, permutações simples e com elementos repetidos, arranjos e combinações, ao listar esses assuntos para uma eventual avaliação, muitos alunos ainda perguntem: "Professor! Também é para estudar Análise Combinatória"?. Ai se vê que quase nada foi compreendido.

O ensino de Análise Combinatória nos dias atuais acontece através de técnicas para se resolver problemas de contagem, o que não é totalmente falho, mas o primeiro contato do aluno com o conteúdo não deveria ser através de fórmulas e processos puramente mecânicos. Os livros didáticos apresentam o conteúdo de maneira tal que não encontramos métodos para que os alunos desenvolvam seu próprio raciocínio e que percebam a necessidade de um estudo mais aprofundado, limitando-os a raciocínios repetitivos e quando os mesmos se deparam com situações novas, não conseguem chegar à uma conclusão.

Pensar, criar hipóteses, buscar caminhos para se chegar à solução do que foi anteriormente projetado pelo pensamento não é uma atividade muito fácil e buscando praticidade nos perdemos em nossos próprios pensamentos ou muitas vezes não conseguimos alcançar a essência daquilo que estamos procurando compreender.

Perguntas, inicialmente nos parecem ser mais importantes do que respostas. Elas nos geram pensamentos, raciocínios, que nos são de fundamental importância para o crescimento como pessoa, pois o que somos é fruto do que pensamos. É a partir desses questionamentos que este trabalho se inicia. A preocupação em não deixar que um conteúdo que oferece a oportunidade de desenvolvermos cada vez mais as nossas mentes, que nos torna tão diferentes dos outros animais, ser tratado apenas com aplicações de regras, ou com modelos prontos para resolver problemas, como se o raciocínio dependesse de uma fórmula, de uma dica. Ora, não é a fórmula resultado proveniente de um pensamento?

Com isso não nos interessa menosprezar ou procurar "abolir" o uso de destas regras prontas, mas sim colocá-las em determinados momentos em segundo plano. Deixemos que as fórmulas nos pareçam e apareçam de modo natural, como resultados de padrões estabelecidos pelo próprio pensamento.

> Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas. Um processo seguro de tornar as coisas complicadas é começar assim: esse é um problema de arranjos ou de combinações? (LIMA, 2006, p. 137).

A ideia deste trabalho surgiu da necessidade de darmos respostas plausíveis as perguntas dos alunos no estudo de Análise Combinatória. Professor! Por que estamos estudando este conteúdo? Professor! Esse problema é de Arranjo ou de Combinação? Professor! Se na prova eu conseguir responder as questões apenas com o meu raciocínio, o senhor irá aceitar? E de procurarmos maneiras de ajudar na compreensão do conteúdo, pois são frequentes os questionamentos. Professor! Quando o senhor resolve um problema em sala de aula eu compreendo, mas quando vou responder outras questões eu não sei o que fazer, e muitas vezes não sei nem como começar. Professor! Quando vou responder um problema não sei se é de Arranjo, Combinação, Permutação ou se é apenas o Princípio Multiplicativo.

O senhor pode me ajudar?

Este último questionamento é muito difícil de se responder. E se o problema não envolver nenhum destes métodos, que resposta o aluno receberá do seu professor?

Neste trabalho, como dito anteriormente, deixaremos um pouco de lado as fórmulas e os padrões pré-definidos para resolvermos problemas de contagem, usaremos a essência do conteúdo, dando um novo direcionamento ao estudo da Análise Combinatória e mostraremos que as fórmulas são importantes, mas não são o único caminho para se resolver problemas de contagem, sendo muitas vezes o caminho mais longo.

O que se pretende observar na utilização destes métodos é a necessidade de percebermos, discutirmos e procurarmos implantar uma educação de qualidade, onde o educando se reconheça como um "ser pensante", que consiga abstrair de modo conciso e que possa colocar em prática o fruto do seu pensamento.

A metodologia utilizada

Para a realização deste trabalho, fizemos uso dos seguintes instrumentos de pesquisa:

- Análise de alguns livros didáticos mais usados nas últimas décadas, com vistas a identificar quais conteúdos e técnicas da Análise Combinatória são abordados, como são trabalhados, e em que série / ano se encontram e se são mencionadas as ideias de sequências e subconjuntos afim de esclarecer ao aluno um possível tipo de abordagem em que o mesmo não fique refém do uso de fórmulas e raciocínios prontos.

- Análise de provas da OBM de Nível 1, 6º e 7ºs anos, Nível 2, 8º e 9ºs anos e Nível 3, ensino médio, com vistas a identificar como são cobrados os conteúdos e técnicas da Análise Combinatória dos alunos que terminam o Ensino Médio ou o Ensino Fundamental. Assim como na análise dos livros didáticos o intuito de encontrar exercícios de Análise Combinatória em todos os níveis do ensino fundamental e médio, e mostrando como os mesmos poderiam ser resolvidos através dos conceitos de sequências e subconjuntos.

- Aplicação de três questionários a um grupo de alunos do ensino médio, de níveis variados e um a professores de matemática do ensino fundamental e médio, o primeiro com perguntas simples de raciocínio básico que são utilizados em praticamente todos os livros do ensino médio e o outro com questões mais elaboradas, que requerem interpretações e estratégias que não dependem apenas de aplicações de fórmulas. O questionário aplicado aos professores do ensino básico tem a finalidade de percebermos quais as visões do professores em relação a como seus alunos estudam análise combinatória e até onde compreendem o assunto.

- Análise das competências e habilidades sugeridas ao ensino de Análise Combinatória mediante questões que foram utilizadas nas provas do ENEM desde 1998 até os dias atuais, pois as competências e habilidades servem de parâmetro para se identificar o rumo que se está dando, não só ao ensino de Análise Combinatória, mas ao ensino de toda a matemática na educação básica.

A organização do trabalho

Capítulo 1: Neste capítulo procuramos evidenciar a importância de um ensino de qualidade, procurando sempre relacioná-la a uma educação transformadora e libertadora. Tornar o homem um sujeito ativo em relação a sociedade na qual o mesmo está inserido, deve ser um dos objetivos da educação de qualidade. Na seção 1.2 fizemos uma análise de como a Matemática está inserida no conceito "educação de qualidade", pois a mesma tem uma enorme contribuição no desenvolvimento do raciocínio e na formulação de estratégias, tornando o homem um ser cada vez mais preparado para utilizar os processos cognitivos afim de usá-los no desenvolvimento de conceitos que serão úteis na relação do homem com o meio em que vive.
Capítulo 2: Neste capítulo fizemos uma análise das propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais sobre os aspectos que norteiam o ensino da Análise Combinatória no ensino básico seguido de pesquisas relacionadas aos principais livros didáticos utilizados, pois acreditamos que os mesmos ainda são o principal recurso didático no ensino de Matemática em nosso país e isso gera ainda mais preocupações em relação ao ensino de Análise Combinatória. Ainda neste capítulo apresentamos dados em relação a quantidade de exercícios de cada tópico da Análise Combinatória, mostrando quais tópicos são mais abordados pelos autores, como esses tópicos são abordados, quais os aspectos qualitativos dos tópicos abordados, se mencionam a construção de sequências e se abordam o estudo da formação de subconjuntos.
Capítulo 3: Neste capítulo inserimos o método de formação de sequências, que é um dos principais métodos que podem ser utilizados para resolver problemas de Análise Combinatória. Iniciamos o capítulo com o Princípio Aditivo para conjuntos disjuntos e não disjuntos, em seguida apresentamos as sequências formadas por elementos distintos, sequências que possuem alguns elementos repetidos e sequências com elementos dispostos em círculo. Ainda neste capítulo, mostramos que o método de formação de sequências pode ser utilizado em substituição aos seguintes conceitos: Arranjos Simples e com repetição, Permutações Simples e com Repetição e Permutações Circulares.
Capítulo 4: Neste capítulo apresentamos o Método de Formação de Subconjuntos em substituição ao cálculo das Combinações. Mostramos que as Combinações de "k" elementos distintos que podemos formar a partir de um grupo de "n" elementos distintos representam o número de partições de "k" elementos distintos que podemos formar a partir dos "n" elementos distintos do conjunto dado. Além disso, mostramos também como calcular o número de partições "subconjuntos" através da formação de sequências e em seguida apresentamos um segundo método para calcular o número de subconjuntos através de um processo dedutivo (lógico), mas que possui um embasamento teórico matemático e que ganha credibilidade quando comparado com a teria já existente sobre o cálculo de Combinações.
Capítulo 5: Neste capítulo, apresentamos resoluções de questões do ENEM e das Olimpíadas de Matemática, pois consideramos que esses tipos de avaliações acabam evidenciando os objetivos que devem ser alcançados por professores e alunos da educação básica, neste caso, no ensino de Análise Combinatória. Mostramos como podemos aplicar os métodos de formação de sequências e subconjuntos nessas questões, analisando quais os tópicos mais abordados e no caso das Olimpíadas de Matemática, para quais séries as questões foram aplicadas e pudemos observar que a Análise Combinatória vem sendo cobrada desde o 6º ano (antiga 5ª série), por isso citamos em alguns momentos um trabalho de base no estudo de Combinatória, para que a mesma não fique restrita a determinada série do período escolar.
Capítulo 6: Apresentamos neste capítulo, os resultados quantitativos e qualitativos dos questionários aplicados a alunos do ensino médio, sendo um questionário de sondagem onde alunos que já tiveram contato com a Análise Combinatória através dos métodos mais clássicos: Arranjos, Permutações e Combinações, foram submetidos à resolução de questões utilizadas

na maioria dos livros didáticos, com o intuito de analisar o grau de compreensão do assunto segundo àqueles métodos. Em seguida apresentamos um questionários mostrando a dificuldade que a maioria dos alunos tem em compreender a diferença entre o Princípio Aditivo e o Multiplicativo, e outros dois questionários comparativos. Em um desses questionários os alunos deveriam resolver problemas de Combinatória com os conhecimentos adquiridos anteriormente pelos métodos clássicos, no outro eles responderiam questões que cobravam os mesmos conceitos do anterior e com praticamente o mesmo nível de dificuldade, mas com treinamento em formação de sequências e subconjuntos e notou-se um avanço considerável principalmente na compreensão dos tópicos abordados. Apresentamos também uma análise qualitativa dos resultados obtidos na tentativa de compreender e solucionar as principais dificuldades encontradas no assunto.

Capítulo 7: Neste capítulo apresentamos um questionário aplicado a professores do ensino básico. Este questionário não teve o intuito de analisar o nível dos professores no assunto, mas o de analisar como os professores trabalham o assunto com seus alunos, como eles veem a aprendizado dos alunos, se ensinam a resolver problemas fazendo aplicações de fórmulas e quais tópicos consideram mais importante. Após análise dos resultados obtidos com a pesquisa, fazemos uma análise qualitativa dos mesmos procurando perceber as principais dificuldades encontradas por professores e alunos no intuito de encontrarmos soluções para minimizarmos essas dificuldades.

1.1 Educação de qualidade

A educação em geral – e a educação escolar em particular – pode ser compreendida como uma forma de reproduzir o modo de ser e a concepção de mundo de pessoas, grupos e classes sociais, através da troca de experiências e de conhecimentos mediados pela autoridade pedagógica do educador. Essa reprodução desemboca numa série de práticas do cotidiano, tais como: preparação de jovens para o futuro, transmissão de cultura socialização de processos produtivos de bens materiais e espirituais.

O homem busca através de todo o tempo de sua vida um progresso social baseado na aquisição de bens materiais que supostamente o torna visível à sociedade, ou seja, o Homem passa a ser valorizado pelo que possui e não pelo que pensa "ser intelectual". Esse modo de pensar e agir faz com que o mesmo se torne cada vez mais manipulável pela própria sociedade. Essa busca imensa pela "quantidade" ao invés de "qualidade" é que está transformando o Homem dos dias atuais em "massa de manobra", sem direito a raciocinar, a refletir sobre o que é melhor para a sua vida.

Uma educação de qualidade teria o objetivo de colocar o Homem frente as suas ideias e concepções que o torne um sujeito ativo nessa sociedade, ou seja, uma educação que vise despertar o raciocínio do aluno para mais tarde torná-lo um cidadão crítico, um cidadão com anseios e um poder intelectual para realizá-lo. Para alcançar essa "educação de qualidade" o objetivo de todos que a constituem deve ser mudado de um processo quantitativo para um processo qualitativo.

> O processo quantitativo que é encontrado na maioria das escolas dos dias atuais premia a aquisição sistemática dos conteúdos sem se preocupar tanto com a qualidade dessa obtenção, ou seja, sem se preocupar com o fator de que o aluno pode aprender o conteúdo através de bases mais sólidas, que seria obter as informações através de um processo mais participativo do aluno "aprender fazendo". (RODRIGUES,1999)

Atualmente, comenta-se muito sobre a questão política e a questão social que estão diretamente ligada ao processo de ensino-aprendizagem, pois a política é que rege as ações e relacionamentos entre os cidadãos que fazem parte de um bairro, uma cidade, um estado, um país e até mesmo do mundo. Por isso não deve ser desvinculado a educação da questão política; assim uma educação de qualidade é aquela que prepara o cidadão para ser um agente participativo em sua comunidade, além de que não pode-se deixar de lado o fato de que o estudo prepara o cidadão para desempenhar uma função na sociedade. Apesar das dificuldades óbvias de tratamento desse tema, parece cabível concluir que o centro da questão qualitativa é o fenômeno participativo. É a melhor obra de arte do homem em sua história, por que a história que vale a pena é a participativa, ou seja, com o teor menor possível de desigualdade, de exploração, de pressão.

> A arte qualitativa do homem é a sociedade desejável que ele é capaz de criar. E isto passa necessariamente pela participação(RODRIGUES,1999)

O que está em jogo na educação de qualidade é a capacidade da comunidade se autogerir, a capacidade de inventar seu próprio espaço. Através do fenômeno de participação a aprendizagem passa a ser mais verdadeira pois o aluno está em contato direto com o objeto do estudo.

> Parece que grande parte das pessoas se acostuma facilmente com as sombras, a falsidade, as meias verdades, o engodo, a mentira. E quem quer que seja que adquira o amor a verdade, ao bem, ao justo, ao belo, corre o risco de ser eliminado, se tentar mostrar aos outros que eles estão vivendo o falso e o artificial, como se fossem a verdade e o real (RODRIGUES, 1999).

1.2 O ensino de Matemática e a educação de boa qualidade

O que parece ser evidente na Educação, é que a escola além de responsável pela transmissão dos conteúdos envolvidos em cada disciplina, que são extremamente necessárias para o convívio social, deve-lhe ser atribuída a condição de maior contribuinte para a formação intelectual, cultural e moral do cidadão. E para haver tal formação, o cidadão tem que estar preparado para enfrentar os desafios impostos pela sociedade através de um raciocínio rápido, e de uma organização das ideias para depois serem colocadas em prática.

> "Todo ato educativo deve objetivar, em primeiro lugar, formar o cidadão, dandolhe a capacidade de se tornar governante, isto é, de ser uma pessoa capaz de pensar, estudar, dirigir e controlar quem dirige" (RODRIGUES,1999).

Não há como dissociar habilidade de raciocínio, a formação de um ser pensante, da Educação Matemática. A constatação da importância do ensino de Matemática apoia-se no fato de que a Matemática desempenha um papel decisivo, pois permite resolver problemas do cotidiano, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilidade do raciocínio dedutivo.

A atividade Matemática escolar não é "olhar para as coisas prontas e definitivas", mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar a sua realidade. A aprendizagem em Matemática está relacionada à compreensão do significado de um objeto ou acontecimento e suas relações com outros objetos e acontecimentos.

A Matemática, surgida na Antiguidade por necessidades da vida cotidiana, converteu-se em um imenso sistema de variadas e extensas disciplinas. Como as demais ciências, reflete as leis sociais e serve de poderoso instrumento para o conhecimento do mundo. Mesmo com um conhecimento superficial da Matemática, é possível reconhecer certos traços que a caracterizam: abstração, precisão, lógica e extenso campo de aplicações. A Matemática move-se quase que exclusivamente pelo campo abstracional fazendo analogia a exemplos bem concretos, na descoberta de teoremas e métodos, que por sua vez são demonstrados por um rigoroso raciocínio lógico. Porém, a vitalidade do ensino da Matemática baseia-se no fato de que a mesma está fundamentada no mundo real e encontram muitas aplicações em outras ciências.

As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado. No entanto, apesar dessa evidência, tem-se buscado, sem sucesso, uma aprendizagem em Matemática pelo caminho da reprodução de procedimentos e da acumulação de informações; por exemplo, a exploração de materiais didáticos pode não contribuir para uma aprendizagem mais eficaz, por ser realizada de uma forma muitas vezes artificial.

É fundamental não subestimar a capacidade dos alunos, reconhecendo que têm a capacidade de resolver problemas, mesmo que os mais complexos, lançando mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscando estabelecer relações entre o já conhecido e o novo. O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele percebe entre os diferentes temas matemáticos. Ao relacionar ideias matemáticas entre si, podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição e inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes no trabalho com números e operações como em espaço, forma e medidas.

O estabelecimento de relações é tão importante quanto exploração dos conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, os conteúdos podem acabar representando muito pouco para a formação do aluno, particularmente para a formação da cidadania. O conhecimento da história dos conhecimentos matemáticos precisam fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação dos novos conhecimentos. Além disso, conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conhecimentos é de grande utilidade para que o professor compreenda melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos.

> O conhecimento matemático formalizado precisa, necessariamente, ser transformado para se tornar passível de ser ensinado/aprendido, ou seja; a obra e o pensamento do matemático teórico não são passíveis de comunicação direta aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino como cópias fieis dos objetos da ciência. (RODRIGUES,1999).

Tradicionalmente, a prática mais frequente no ensino de Matemática é aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupões que o aluno aprende pela reprodução. Essa prática de ensino mostra-se ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprende a reproduzir, mas não aprende. Em uma educação de qualidade o professor não é mais aquele que expõe todo o conteúdo aos alunos, mas também oferece informações suficientes para que os alunos obtenham o conhecimento. Além de promover confronto com as ideias dos alunos, mostrando que através desse processo chega-se à obtenção do verdadeiro conhecimento, onde não há somente a reprodução sucessivas dos conteúdos, onde há uma interiorização dos conteúdos estudados para uma melhor aplicação nos diversos ramos de atividades profissionais e atrações do cotidiano.

Como pode-se perceber, o ensino da Matemática em uma educação de qualidade possui um papel de transformador, formador de mentes mais preparadas para uma inclusão cada vez mais adequada na convivência social, onde há um grande número de divergências e uma necessidade cada vez maior de um pensamento de melhoria na sociedade. Essa transformação deve ser elaborada por todos que fazem parte do processo de ensino-aprendizagem, alunos, professores, diretores e dirigentes.

> "O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência em relação à sua aprendizagem" (BRASIL,1997, P. 15).

2. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Como mencionamos anteriormente, os livros didáticos ainda são os recursos didáticos mais acessíveis à alunos da educação básica, além de serem de grande importância pois servem de acompanhamento do desenvolvimento dos alunos em relação ao conteúdo em estudo. Por isso achamos que a análise dos mesmos é importante para dar suporte didático ao estudo da Análise Combinatória. Não queremos dizer que esse apoio não aconteça atualmente, mas precisamos analisar quais ideias ajudam os alunos na compreensão do conteúdo e quais as principais falhas que fazem com que os alunos não consigam desenvolver uma confiança plena no momento em que vão resolver os problemas propostos para os mesmos. Pude observar durante os anos em que leciono Matemática, no ensino médio, muitos os relatos de alunos que não compreenderam bem os conceitos da Análise Combinatória. Uma vez uma aluna me relatou a dificuldade encontrada pela mesma no momento em que foi resolver as questões propostas nos livros didáticos.

Professor! Estou extremamente preocupada com Análise Combinatória, pois é um assunto aparentemente fácil. Quando meu professor estava explicando o assunto, eu achei muito fácil, mas esta semana fui revisar o conteúdo em casa e ao tentar resolver as questões do livro que usamos praticamente não resolvi uma, quer dizer resolvi as que são muito fáceis mas qualquer questão que tinha um raciocínio mais complexo eu não consegui resolver.

Outro fato que pude observar durante todos esses anos de ensino é que de acordo com o relato dessa aluna, os alunos, de modo geral, acham fácil o assunto no momento da aula, mas não conseguem reproduzir essa facilidade no momento em que são avaliados. Possivelmente pelo fato de que na hora da prova eles precisam desenvolver suas próprias técnicas de contagem e percebem que apenas ter memorizado as fórmulas e aparentemente sabem diferenciar os Arranjos das Combinações e Permutações, isso não é suficiente para resolver os problemas de Combinatória, principalmente aquelas que possuem um grau de dificuldade maior e que cobram técnicas diferentes das utilizadas nos livros didáticos, ou das que foram resolvidas em sala de aula. Por isso acreditamos ser tão importante a análise dos principais livros didáticos de autores conhecidos por professores e alunos do ensino básico, evidenciando possíveis acertos e erros (falhas) no ensino de Análise Combinatória.

2.1 A Análise Combinatória e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's)

Segundo os PCN's o papel da Matemática no Ensino Fundamental comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Faz parte da vida de todas as pessoas nas experiências mais simples como contar, comparar e operar sobre quantidades. Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics – NCTM, apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento “Agenda para Ação”. Nele destacava a resolução de problemas como foco do Ensino de Matemática nos anos 80. Também a compreensão da relevância dos aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares. Essas ideias influenciaram as reformas que ocorreram mundialmente, a partir de então. As propostas elaboradas no período 1980/1995, em diferentes países, apresentam pontos de convergência, entre os quais queremos destacar a Análise Combinatória:

> “importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no ensino fundamental, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender a demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos;” (BRASIL, 1997, P. 22)

> No Ensino Médio, a Contagem ou Análise Combinatória é vista ao mesmo tempo como instrumental para a Estatística e para a Probabilidade, e como forma de desenvolver uma nova maneira de pensar, denominada Raciocínio Combinatório. O Raciocínio Combinatório se refere à capacidade de organizar informações através da construção de um modelo simplificado e explicativo para contar os casos possíveis para uma determinada situação, com o objetivo de uma posterior tomada de decisão. Conteúdos- Princípio Multiplicativo e Problemas de Contagem Habilidades- Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou eventos; identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem; identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem. (BRASIL, 2006, p. 127).

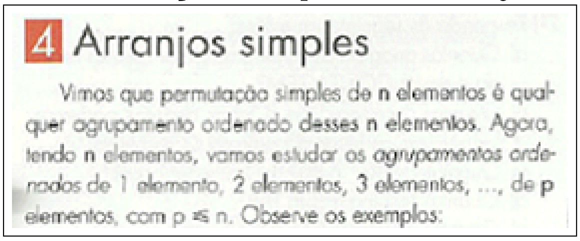
Como podemos perceber, segundo documento oficial dos PCN'S, um dos fatores que deve ser levado em consideração é a decisão sobre analisar qual a forma mais adequada de organização das informações e qual deverá ser o caminho tomado para se obter uma solução do problema proposto, então podemos inferir do texto citado acima que a ideia de que o aluno possa decidir sobre o método que usará para resolver problemas de contagem é mais importante do que seguir padrões pré-estabelecidos de contagem. Outro fato importante é que o texto não descarta a possibilidade de se formar padrões de cálculos mas indica que o mesmo deverá identificar padrões de regularidades para estabelecer regras e propriedades. De modo geral podemos dizer que o ensino de análise combinatória deve ser desenvolvido através de um processo mais longo do que o que temos atualmente, pois como o aluno poderá perceber essas relações “padrões” de contagem tendo um acesso mais restrito. Atualmente os alunos tem acesso a um estudo mais aprofundado apenas no 2º ano do ensino médio e mesmo tendo contato com a Análise Combinatória para desenvolver conceitos aprendidos anteriormente os mesmos não tiveram maturidade suficiente para perceber esses padrões ou percebem mas muitas vezes não conseguem relacioná-las com outras situações problemas, parecendo ser tudo isso apenas obra do acaso. Devido a este assunto estar relacionado ao desenvolvimento do próprio raciocínio humano, acreditamos que não há necessidade de que o aluno conheça definições e fórmulas para desenvolver um estudo sobre métodos de contagens, pois esses padrões podem ser desenvolvidos naturalmente, com o próprio desenvolver do raciocínio do aluno então há necessidade de deixar que o mesmo se desenvolva antes de definirmos esses padrões. Durante os últimos anos tem-se intensificado o número de discussões e análises sobre como adequar os conteúdos que fazem parte da grade curricular e os PCN'S, mas observamos que há um grande número de citações que não se adequam às ideias discutidas pelos PCN'S, com isso fizemos análises de livros didáticos de autores de renome no cenário nacional e comparamos com as ideias propostas, com a necessidade de observarmos se realmente as necessidades indicadas no documento estão sendo aplicadas em sala de aula.

2.2 Análise de livros didáticos.

2.2.1 DANTE, Luís Roberto. Matemática: Contexto e Aplicações(v. único). Editora Ática. São Paulo, 2004.

O livro analisado, do início do Século XXI, refere-se à segunda série do 2º Grau, série em que são trabalhados os conceitos referentes à Análise Combinatória. Neste livro, o autor inicia o conteúdo com um problema de formação de placas de automóveis, mas não o resolve, apenas indica que é para resolver problemas desse tipo que o conteúdo "Análise Combinatória" deverá ser estudado. Em seguida apresenta o Princípio da Multiplicação ou princípio fundamental de contagem utilizando a árvore das possibilidades e um diagrama de caminhos mostrando o número de possibilidades de se sair de uma cidade à outra e segue com exemplos resolvidos com "árvore das possibilidades" e princípio fundamental de contagem, logo após propõe seis exercícios, introduz o conceito de Permutações e do Fatorial seguidos de exercícios propostos. A seguir utiliza o conceito de Permutações para se introduzir o conceito de Arranjos, mostra um caminho para se chegar à formula através da "árvore das possibilidades", mas não menciona diretamente que esse método é para formar sequências ou grupos formados pela concatenação dos elementos de uma sequência "Sistema de Numeração". Observando a figura 01, podemos ver como o autor introduz o conceito de Arranjos usando Permutações simples de "n"elementos:

Figura 1: **Introdução do capítulo de arranjos simples**



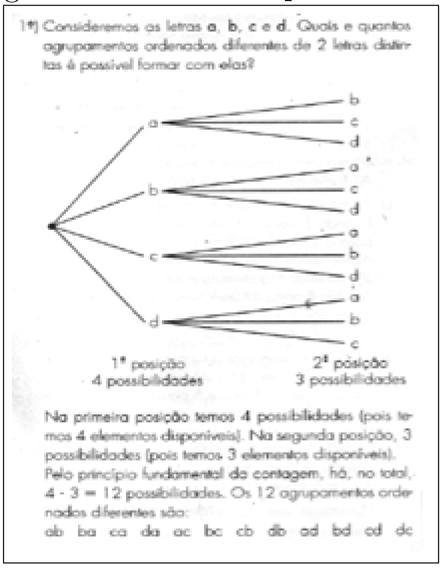
4 Arranjos simples

Vimos que permutação simples de **n** elementos é qualquer agrupamento ordenado desses **n** elementos. Agora, tendo **n** elementos, vamos estudar os *agrupamentos ordenados* de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ..., de **p** elementos, com p ≤ n. Observe os exemplos:

Fonte: DANTE, 2004, p.366.

A seguir (figura 02), o autor utiliza a àrvore das possibilidades para mostrar que a ordem dos elementos utilizados nos agrupamentos é importante para distinguí-los e cita que neste caso os agrupamentos formados são Arranjos. Pensamos que o momento não é ideal para utilizar o conceito "Arranjos"e caso o autor acredite ser tão importante a menção de tal conceito, o mesmo poderia aguardar um pouco mais, até que o aluno consiga comreender o conceito através do princípio multiplicativo e da árvore das possibilidades.Aplicar uma série de questões onde o aluno fosse, aos poucos, compreendendo a ideia dos arranjos simples seria algo bem interessante e desse modo, ficaria a cargo do aluno decidir se é realmente necessário aplicar fórmulas ou conceitos pré-definidos pra resolver questões de formações de sequências. O que fica claro, ao analisarmos este livro, é que o autor cita a formação de sequências de modo bem sutil, às vezes nem dá para perceber, e utiliza a ideia para aplicar fórmulas e resolver exercícios de raciocínios mais básicos, não levando em conta um desenvolvimento natural do raciocínio humano através de aplicações de níveis diferentes de situações-problemas. O "aplicar", neste caso torna-se mais importante do que o pensar e isso ocorre toda vez que não dispomos de tempo para analisar o conteúdo. Essa falta de tempo acaba transformando o ensino-aprendizagem, num procedimento mais "seco", afim de obtermos apenas resultados sem os importarmos com o caminho utilizado para se chegar a esse resultado e seria através das tentativas, erros e acertos que o objeto de estudo se concretizaria.

Figura 2: **Árvore das possibilidades**



1º) Consideremos as letras **a**, **b**, **c** e **d**. Quais e quantos agrupamentos ordenados diferentes de 2 letras distintas é possível formar com elas?

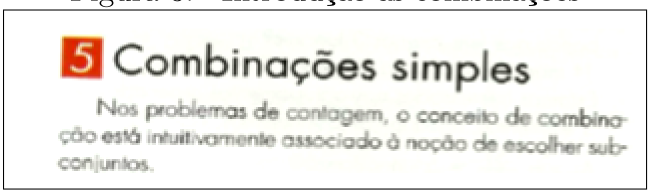
Na primeira posição temos 4 possibilidades (pois temos 4 elementos disponíveis). Na segunda posição, 3 possibilidades (pois temos 3 elementos disponíveis). Pelo princípio fundamental da contagem, há, no total, $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades. Os 12 agrupamentos ordenados diferentes são:

ab ba ca da ac bc cb db ad bd cd dc

Fonte: DANTE, 2004, p.366.

No estudo das combinações o autor começa fazendo associação a construção de subconjuntos, mas logo a seguir mostra a fórmula para o cálculo de combinações e define o que são combinações complementares e o exercícios começam do mesmo modo, bem tradicionais, apenas sugerindo o cálculo de combinações simples e a referência aos números binomiais. Apresenta logo após, as Permutações com elementos repetidos. E finaliza com um exercício envolvendo vários tipos de agrupamentos. Notamos, na análise desse livro a falta das permutações circulares, das combinações com repetição e uma tendência muito grande de gerar muito rapidamente uma fórmula para resolver problemas. Apesar da introdução do conteúdo ser feita de modo a tornar o assunto bem compreensível, logo após há um processo de não aproveitamento dos conceitos abordados para se gerar as definições. Com isso, o aluno não é levado a construir conceitos e deduzir métodos e fórmulas, pois os mesmos são apresentados praticamente de modo simultâneo a definição.

Figura 3: **Introdução às combinações**



5 Combinações simples

Nos problemas de contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos.

Fonte: DANTE, 2004, p.366.

Na tabela abaixo podemos ver como varia a abordagem de cada tópico da Análise Combinatória, quais são tratados como relevantes e quais são tratados como irrelevantes. Nesta tabela podemos verificar que o autor dá ênfase ao estudo das combinações, por isso acreditamos que o tópico poderia ter sido trabalhado de um modo mais intuitivo, dando um tempo maior até que o aluno assimile a ideia de formar subconjuntos, pois essa foi a abordagem feita na introdução do conteúdo.

Tabela 1: Análise quantitativa do livro de Dante

Tópico abordado	Nº de questões	Percentual (%)
Princípio Aditivo	0	0,0
Princípio Multiplicativo	11	13,5
Arranjos	17	21,0
Permutações Simples	6	7,5
Permutações com repetição	5	6,0
Permutações Circulares	0	0,0
Combinações	41	50,5
Combinações com repetição	1	1,5
Total de questões	81	100,0

Fonte: DANTE, 2004

2.2.2 FERNANDEZ, Vicente Paz e YOUSSEF, Antônio Nicolau. Matemática para o 2º grau – curso completo. Editora Scipione. São Paulo, 1994.

Neste livro, o autor inicia o conteúdo através do princípio fundamental de contagem utilizando a árvore das possibilidades associando-os, e já nos exercícios faz uma introdução ao conceito de anagramas seguido de uma série de exercícios, o que geralmente só é feito na maioria dos livros didáticos quando se chega em permutações. A seguir introduz o conceito de Arranjos como grupos ordenados e através do princípio multiplicativo chega às fórmulas de Arranjos com repetição e ao Arranjos Simples define somente como $A_n^p = n.(n-1).(n-2).(n-3)...(n-p+1)$, pois o fatorial ainda não foi definido. Resolve três exemplos, o primeiro sendo bem tradicional e o terceiro como preparação a definição de Permutações, utiliza esse conceito para gerar o fatorial e retoma aos Arranjos simples para concluir a fórmula $A_{n,p} =$. Em seguida aplica uma série de exercícios e introduz o conceito de combinações citando que as mesmos diferenciam-se apenas pela ordem dos elementos ou pela natureza dos elementos. Através de árvores das possibilidades, mostra a diferença entre Arranjos e Combinações chegando a obter uma fórmula de combinações simples, ver figura a seguir:

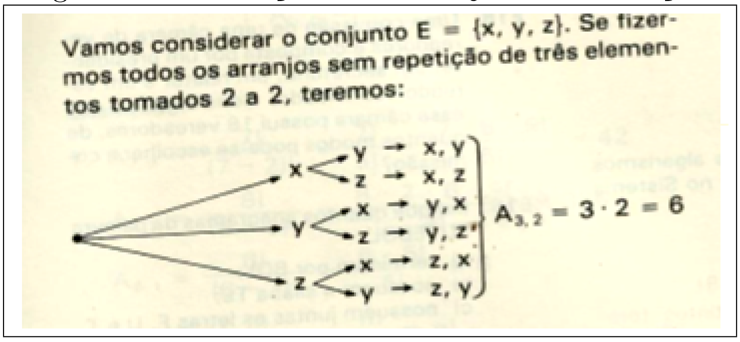
Em seguida, para finalizar, uma série de exercícios e quando menos se espera, entre eles, um resolvido, fazendo uma introdução às Permutações com repetição. De acordo com a proposta deste trabalho encontramos também nesse exercício a seguinte questão:

"E23. Quantos subconjuntos de quatro elementos possui um conjunto com oito elementos?" (Fernandez, p.244)

Provavelmente a ideia é que o aluno consiga associar a formação de subconjuntos às combinações simples, o que se deseja incluir no ensino de Análise Combinatória como indicado na seção 3.9 deste trabalho.

Na figura abaixo, temos um exercício idêntico ao mostrado anteriormente (seção 3.7.1, problema nº 03), seguido de uma solução através de formações de sequências com alguns elementos repetidos e outra solução de acordo com a expectativa dos autores do livro.

Figura 4: **Diferença entre Arranjos e Combinações**



Fonte: FERNANDEZ, 1994, p.242.

Na tabela abaixo podemos ver como varia a abordagem de cada tópico da Análise Combinatória, quais tópicos são tratados como relevantes e quais são tratados como irrelevantes.

Tabela 2: Análise quantitativa do livro de Fernandez

Tópico abordado	Nº de questões	Percentual (%)
Princípio Aditivo	0	0,0
Princípio Multiplicativo	6	16,7
Arranjos	7	19,4
Permutações Simples	8	22,2
Permutações com repetição	5	13,9
Permutações Circulares	0	0,0
Combinações	10	27,8
Combinações com repetição	0	0,0
Total de questões	36	100,0

Fonte: FERNANDEZ,1994

2.2.3 IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo, DEGENSZAJN, David e PÉRIGO, Roberto. Matemática(v. único). Editora Atual. São Paulo 2002.

Neste livro temos a introdução ao estudo da Análise Combinatória feita também através de Princípio Multiplicativo, mas desta vez os exercícios possuem um grau de dificuldade maior, propondo desafios mais interessantes principalmente nos exercícios propostos. Encontramos exercícios relacionados a assuntos do Ensino Fundamental como o cálculo do número de divisores de um número natural através do princípio multiplicativo, mas no geral o livro apresenta as mesmas características de todos os outros, definições seguidas de demonstrações de fórmulas e aplicações de exercícios. Um diferencial deste livro é que ele apresenta no final do conteúdo dois desafios, onde encontramos um exercício em que se cobra que o aluno relembre o critério da divisibilidade por 3 e no outro ele terá que desenvolver uma técnica para resolver um problema de combinações com repetição, pois esse conceito não foi abordado anteriormente. O problema é saber se depois de tantas aplicações diretas de exercícios simples e poucas construções por parte dos alunos, os mesmos serão capazes de desenvolver um problema mais complexo. Mas, se ele utilizar os conceitos abordados no problema 05 da subseção 3.4.1 ou no problema 08 da seção 3.6, o mesmo poderia resolvê-lo de forma mais pratica.

Na tabela abaixo podemos ver como varia a abordagem de cada tópico da Análise Combinatória, quais tópicos são tratados como relevantes e quais são tratados como irrelevantes.

Tabela 3: Análise quantitativa do livro de Iezzi

Tópico abordado	Nº de questões	Percentual (%)
Princípio Aditivo	0	0,0
Princípio Multiplicativo	30	32,5
Arranjos	7	7,5
Permutações Simples	24	27,0
Permutações com repetição	4	4,5
Permutações Circulares	0	0,0
Combinações	26	27,5
Combinações com repetição	1	1,0
Total de questões	92	100,0

Fonte: IEZZI,2002

2.2.4 BEZERRA, Manoel Jairo. Matemática para o ensino médio. Editora Scipione. São Paulo, 2001.

Neste livro não há nada diferente em relação aos outros, o capítulo chama-se Contagem, mas os assuntos abordados são os mesmos: princípio fundamental de contagem, permutações simples, permutações com repetição e arranjos simples e combinações. O livro ainda traz um material de apoio aos professores com exercícios propostos para uma avaliação, o que parece-nos de boa intensão. Mas acreditamos que uma avaliação é um processo e por isso os exercícios devem ficar a critério do próprio professor, de acordo com o desenvolvimento de sua turma e diante dos objetivos que desejam alcançar. A ideia de chamarmos estes exercícios de tradicionais é que eles são encontrados em praticamente todos os livros didáticos, inclusive a resolução sugerida de cada questão pelo autor do livro baseia-se em aplicações diretas das fórmulas de arranjos, combinações, permutações e do princípio fundamental de contagem. Notamos também uma preocupação em não aprofundar os conceitos, de modo que o assunto seja abordado de modo bem superficial. O mesmo ocorre nos exercícios propostos aos alunos, apesar de o autor ser muito bem conceituado entre os professores de matemática e de ser bastante citado em biblografias de concursos e vestibulares, acreditamos que este livro não ajuda os alunos a desenvolver suas potencialidades na resolução de problemas que envolvam mais variáveis, exercícios que possam conduzir os alunos a uma compreensão mais completa do assunto.

Na tabela abaixo podemos ver como varia a abordagem de cada tópico da Análise Combinatória, quais tópicos são tratados como relevantes e quais são tratados como irrelevantes.

Tabela 4: Análise quantitativa do livro de Bezerra

Tópico abordado	Nº de questões	Percentual (%)
Princípio Aditivo	0	0,0
Princípio Multiplicativo	9	26,4
Arranjos	3	9,0
Permutações Simples	5	14,7
Permutações com repetição	4	11,7
Permutações Circulares	0	0,0
Combinações	13	38,2
Combinações com repetição	0	0,0
Total de questões	34	100,0

Fonte: BEZERRA,2001

2.2.5 SILVEIRA, Ênio e MARQUES, Cláudio. Matemática: Compreensão e prática. Editora Moderna. São Paulo, 2013.

A proposta de uma Matemática baseada no desenvolvimento do raciocínio do aluno e menos em aplicações de fórmulas nos deixa bastante empolgados ao lermos a apresentação do mesmo.
"Na educação, as informações são o meio, e a formação, o fim. Nosso objetivo ao escrever Matemática: compreensão e prática foi contribuir com o desenvolvimento das suas potencialidades, e não, simplesmente, inundar sua mente com fórmulas matemáticas. Desse modo, acreditamos que chegaremos juntos ao saber científico, que não se esgota em si mesmo, mas nos impulsiona para novas descobertas". (SILVEIRA, p. 03).

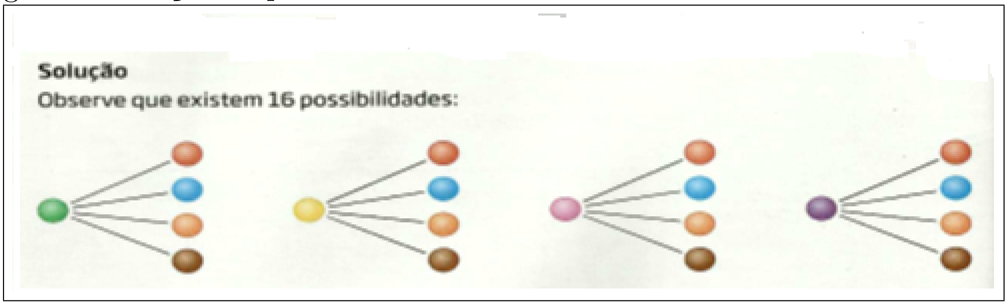
E mais empolgados ainda quando encontramos no sumário, o capítulo 8: Possibilidades e Estatística, pois nos mostra uma nova perspectiva do ensino de Análise Combinatória no ensino fundamental. O que nos frustra bastante é o fato de o estudo das possibilidades ficar restrito a apenas duas páginas. Na primeira, os autores mostram duas situações onde precisamos dar mais de uma resposta a uma determinada pergunta e logo após aplicam um exercício com apenas 7 questões até por que os problemas de contagem são apresentados para posteriores aplicações na Estatística. Por outro lado, o fato de que os alunos do 6º ano ainda não tiveram acesso ao estudo de arranjos, combinações e permutações é um avanço muito grande, pois o mesmo terá que usar estratégias do próprio raciocínio para resolver os problemas, de acordo com a ideia deste trabalho. No 7º ano, há um capítulo "Probabilidade e Estatística" onde aparecem algumas questões onde aplicamos o princípio de contagem, mas sempre relacionando ao cálculo das probabilidades e aplicações na Estatística.

Em seguida o autor mostra a solução do problema, utilizando a árvore das possibilidades, mostrando as duplas de bolas possíveis.

Figura 5: **Exemplo introdutório sobre árvore das possibilidades**

Fonte: SILVEIRA, 2013. p.210.

Figura 6: **Solução do problema das bolas coloridas contidas em caixas distintas**



Fonte: SILVEIRA, 2013. p.210.

2.2.6 BARROSO, Juliane Matsubara. Matemática: Conexões com a Matemática (v. único). Editora Moderna. São Paulo, 2012.

Neste livro, a autora desenvolve o assunto Análise Combinatória na mesma sequência de muitos outros livros de Matemática do ensino médio, porém mesmo usando fórmulas para resolver problemas de Arranjos, Combinações e Permutações, em alguns momentos os termos sequências e subconjuntos são usados para desenvolvê-los.

Nos exercícios resolvidos a autora cita que os problemas de Arranjos podem ser resolvidos apenas usando o Princípio Multiplicativo, fazendo com que o aluno escolha a maneira que acha mais adequada para resolver os problemas posteriores. Apesar das ideias usadas para explicar os conteúdos estarem de acordo com o que desejamos desenvolver neste trabalho, sentimos falta de problemas envolvendo o princípio de adição, as permutações circulares e as combinações com repetição e de exercícios que direcionem os alunos a aplicar os conceitos de sequências e subconjuntos para resolvê-los. Ao invés disso, a autora deixa o aluno livre para escolher a método e como sabemos a maioria dos alunos preferem o que for menos trabalhoso, não se importando tanto com a qualidade de seu estudo e sim, com a quantidade de exercícios que fez e se a resposta está certa, ou não. Pois, sabemos que muitas vezes na resolução de problemas o que os interessa saber é se o aluno compreendeu a pergunta, se ele conseguiu criar um modelo (ilustração) de como seus agrupamentos devem ficar, se iniciou corretamente a resolução do exercício,... e não achar que uma mera aplicação de fórmulas substituirá o raciocínio e a interpretação do exercício.

Na tabela abaixo podemos ver como varia a abordagem de cada tópico da Análise

Combinatória, quais tópicos são tratados como relevantes e quais são tratados como irrelevantes.

Tabela 5: Análise quantitativa do livro de Barroso.

Tópico abordado	Nº de questões	Percentual (%)
Princípio Aditivo	0	0,0
Princípio Multiplicativo	19	30,0
Arranjos	13	20,5
Permutações Simples	11	17,5
Permutações com repetição	5	8,0
Permutações Circulares	0	0,0
Combinações	15	24,0
Combinações com repetição	0	0,0
Total de questões	63	100,0

Fonte: BARROSO,2012.

2.2.7 BARROSO, Juliane Matsubara. Matemática: construção e significado (*vol*.2). Editora Moderna. São Paulo, 2008.

Neste livro a autora, a mesma do livro analisado no item 2.2.6, desenvolve o assunto Análise Combinatória na mesma sequência de muitos outros livros de Matemática do Ensino Médio, porém mesmo usando fórmulas para se resolver problemas de Arranjos, Combinações e Permutações, em alguns momentos os termos sequências e subconjuntos são usados para desenvolver Arranjos, Permutações e Combinações. Nos exercícios resolvidos a autora cita que os problemas de Arranjos podem ser resolvidos apenas usando o Princípio Multiplicativo, fazendo com que o aluno escolha a maneira que acha mais adequado para resolver os problemas posteriores. As ideias usadas para explicar os conteúdos estão de acordo com o que desejamos desenvolver neste trabalho.

Além disso encontramos problemas envolvendo o Princípio de Adição, as Permutações Circulares, mas não encontramos menção, nem mesmo questões, que envolvam o Princípio Aditivo de Contagem em às Combinações com repetição.

O interessante é que mesmo sendo um livro mais antigo que o analizado no item anterior a autora, que é a mesma, apresentou mais conceitos do que no livro mais moderno. Não porque preferiu levar o aluno a desenvolver seus próprios métodos na resolução de questões que envolvam esses tópicos, pois como pode-se ver na avaliação do item 2.2.6, esses tópicos nem foram abordados.

Na tabela abaixo podemos ver como varia a abordagem de cada tópico da Análise Combinatória, quais tópicos são tratados como relevantes e quais são tratados como irrelevantes.

Tabela 6: Análise quantitativa do livro de Barroso.

Tópico abordado	Nº de questões	Percentual (%)
Princípio Aditivo	0	0,0
Princípio Multiplicativo	32	34,0
Arranjos	13	14,0
Permutações Simples	16	17,0
Permutações com repetição	5	5,5
Permutações Circulares	3	3,0
Combinações	25	26,5
Combinações com repetição	0	0,0
Total de questões	94	100,0

Fonte: BARROSO,2008.

2.2.8 BEDAQUE, Paulo Sérgio...[et al]. Matematikós: ensino médio(vol. único). Editora Saraiva. São Paulo, 2010.

A introdução da Análise Combinatória, neste livro, é feita através de "Contagem" como nos outros livros analisados, mas com uma visão inovadora onde são usados problemas envolvendo: multiplicação, diagonais de um polígono, progressões aritméticas, funções e trigonometria, mostrando que o tema é muito mais abrangente do que imagina-se.

Outra observação interessante é que os autores usam tabelas para resolver problemas de Princípio Multiplicativo, onde em cada linha, eles colocam o número de possibilidades de cada etapa e na última o total de possibilidades.

Além dessas observações, há abordagens sobre o Princípio do desprezo da ordem e uma abordagem especial sobre subconjuntos, de acordo com a proposta deste trabalho e em boa parte do livro os autores não usam fórmulas e no final do capítulo eles mostram as fórmulas de arranjos, combinações, permutações simples e com repetição.

Acreditmos que mais interessante do que mostrar as fórmulas seria levar o aluno à dedução da fórmula, pois de acordo com os métodos aplicados pelos autores isso seria feito de modo bem natural e haveria um ganho substancial na aprendizagem dos mesmos.
Observamos a falta de exercícios do Princípio Aditivo, o mesmo sendo citado de modo subjetivo em um exercício resolvido e de problemas de Permutações Circulares e Combinações com Repetição.

Obs: Para inserir as quantidades de questões que foram utilizadas nos livros, usamos o princípio de que a questão era do tópico e foi abordada com sendo daquele tópico. Por exemplo: O tópico "Arranjos" foi abordado no livro, mas os exercícios que poderiam ser resolvidos com "Arranjos" foram abordados no "Princípio Multiplicativo".

Tabela 7: Análise quantitativa do livro de Bedaque.

Tópico abordado	Nº de questões	Percentual (%)
Princípio Aditivo	0	0,0
Princípio Multiplicativo	50	63,0
Arranjos	0	0,0
Permutações Simples	0	0,0
Permutações com repetição	0	0,0
Permutações Circulares	0	0,0
Combinações	0	0,0
Combinações com repetição	0	0,0
Princípio do desprezo da ordem	10	12,5
Subconjuntos	19	24,5
Total de questões	79	100,0

Fonte: BEDAQUE,2010.

2.2.9 SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. Matemática: ensino médio. Editora Saraiva (vol. 02). São Paulo, 2010.

Neste livro há uma introdução ao Princípio de Contagem onde as autoras desenvolvem o capítulo introduzindo-o através da árvore das possibilidades e uma série de 10 questões onde os alunos deverão em sua maioria, escrever as soluções dos mesmos, ou seja, para que os alunos percebam os diferentes tipos de agrupamentos que podem ser formados naAnálise Combinatória.

Os outros tópicos são abordados com aplicação imediata de fórmulas, inclusive no início de alguns exercícios as autoras mencionam que determinado exercício é aplicado com o intuito de uma melhor memorização de fórmulas, ideia contrária ao que estamos propondo, pois são exercícios de memorização de fórmulas e queremos que quando os alunos chegarem nas aplicações das fórmulas, já tenham compreendido os tópicos e talvez até mesmo possam desenvolver as fórmulas sozinhos, se assim acharem necessário.

Observamos a falta de exercícios do Princípio Aditivo, o mesmo sendo citado de modo subjetivo em um exercício resolvido e de problemas de Permutações Circulares e Combinações com Repetição, nos parece que as autoras acreditam que a resolução de aplicações diretas dos tópicos mais básicos é suficiente para um aluno da educação básica, quando se trata do estudo da Análise Combinatória.

Na tabela abaixo podemos ver como varia a abordagem de cada tópico da Análise Combinatória, quais tópicos são tratados como relevantes e quais são tratados como irrelevantes.

Tabela 8: Análise quantitativa do livro de Smole.

Tópico abordado	Nº de questões	Percentual (%)
Princípio Aditivo	0	0,0
Princípio Multiplicativo	30	39,0
Arranjos	20	26,0
Permutações Simples	2	2,5
Permutações com repetição	5	6,5
Permutações Circulares	0	0,0
Combinações	20	26,0
Combinações com repetição	0	0,0
Total de questões	77	100,0

Fonte: SMOLE,2010.

2.2.10 MACHADO, Antônio dos Santos. Matemática: ensino médio(vol. único). Editora Atual. São Paulo, 2012.

Neste livro o autor desenvolve o assunto Análise Combinatória na mesma sequência da maioria dos livros de Matemática do Ensino Médio, porém mesmo usando fórmulas para se resolver problemas de Arranjos, Combinações e Permutações o mesmo no início de Permutações Simples, Arranjos e Combinações insere uma quantidade de questões onde o aluno terá que formar os agrupamentos, no intuito que ele consiga perceber a diferença entre os tipos de agrupamentos, ou seja, se os agrupamentos são formações de sequências ou subconjuntos. Além disso o autor inicia o estudo de Análise Combinatória com o Princípio de Contagem e logo após apresenta o Princípio Aditivo seguido de uma série de exercícios, ou seja, o Princípio Aditivo não é usado de modo subjetivo, nesse livro.

Na tabela abaixo podemos ver como varia a abordagem de cada tópico da Análise Combinatória, quais tópicos são tratados como relevantes e quais são tratados como irrelevantes.

Tabela 9: Análise quantitativa do livro de Machado.

Tópico abordado	Nº de questões	Percentual (%)
Princípio Aditivo	7	11,6
Princípio Multiplicativo	15	25,0
Arranjos	12	22,0
Permutações Simples	10	16,6
Permutações com repetição	2	3,5
Permutações Circulares	0	0,0
Combinações	14	23,3
Combinações com repetição	0	0,0
Total de questões	60	100,0

Fonte: MACHADO,2012.

2.3 Análise quantitativa por tópicos abordados nos livros didáticos.

Para fazermos uma análise geral em gráficos dos tópicos de Análise Combinatória abordados nos livros didáticos, consideremos: Dante (D), Fernandez (F), Iezzi (I), Bezerra (B), Barroso 2012 (BA1), Barroso 2008 (BA2), Bedaque (BE), Smole (S) e Machado (M). E para a tabela a seguir: Princípio Aditivo (PA), Princípio Multiplicativo (PM), Arranjos (AR), Permutações Simples (PS), Permutações com Repetição (PR), Permutações, Circulares (PC), Combinações Simples (CS) e Combinações com Repetição (CR).

Tabela 10: Análise geral dos livros didáticos abordados, por tópico.

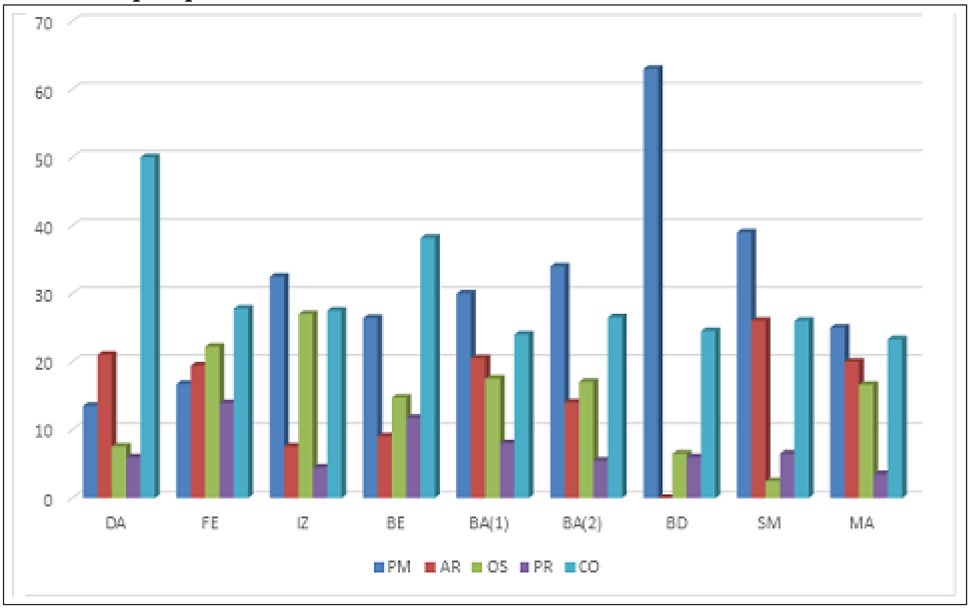
LIVRO	PA	PM	AR	PS	PR	PC	CS	CR
DANTE	0,0	13,5	21,0	7,5	6,0	0,0	50,5	1,5
FERNANDEZ	0,0	16,7	19,4	22,2	13,9	0,0	27,8	0,0
IEZZI	0,0	32,5	7,5	27,0	4,5	0,0	27,5	1,0
BEZERRA	0,0	26,4	9,0	14,7	11,7	0,0	38,2	0,0
BARROSO(1)	0,0	30,0	20,5	17,5	8,0	0,0	24,0	0,0
BARROSO(2)	0,0	34,0	14,0	17,0	5,5	3,0	26,5	0,0
BEDAQUE	0,0	63,0	0,0	6,0	6,5	0,0	24,5	0,0
SMOLE	0,0	39,0	26,0	2,5	6,5	0,0	26,0	0,0
MACHADO	11,6	25,0	20,0	16,6	3,5	0,0	23,3	0,0

Fonte: Análise comparativa dos livros didáticos, por tópicos.

Obs: Em BEDAQUE, o percentual de Princípio do Desprezo da Ordem, foi distribuído entre: Permutações Simples e Permutações com Repetição, os exercícios de subconjuntos para as Combinações Simples.

2.3.1 Análise gráfica do percentual de exercícios dos cinco tópicos mais abordados nos livros didáticos.

Figura 7: **Análise comparativa dos cinco tópicos de Análise Combinatória mais abordados nos livros didáticos pesquisados**



Fonte: Pesquisa dos livros didáticos.

Obs: Na análise quantitativa incluímos o Princípio Aditivo, e apenas MACHADO utiliza exercícios específicos do mesmo, cerca de 11,6

2.4 Análise qualitativa dos resultados obtidos nas análises dos livros didáticos.

Podemos observar através das análises feitas dos livros didáticos, que a maioria dos autores iniciam o conteúdo através do Princípio Multiplicativo e usam o recurso das árvores das possibilidades para mostrar ao aluno como ele pode construir alguns tipos de agrupamentos. Através dos gráficos e tabelas apresentados anteriormente fica evidente a grande preocupação que os autores têm em relação a aprendizagem dos alunos quanto ao Princípio Multiplicativo, isso realmente é muito importante, mas o que não deve-se passar desapercebido é o fato de que o Princípio Aditivo quase não é explorado nos livros. Muitas vezes o Princípio Aditivo é usado de modo bastante subjetivo, o que como veremos posteriormente isso trará prejuízos à compreensão de muitas questões de Análise Combinatória. Um destaque para o livro de (MACHADO), onde o autor explica o uso do Princípio Aditivo e ainda insere alguns exercícios para fixação pelos alunos. O que notamos em relação ao uso deste princípio é que todos os autores acabam deixando o Princípio Aditivo sem pouca exploração nos exercícios de Arranjos, Permutações e Combinações e quando o é, pouco se menciona nos exercícios resolvido, que é um dos momentos em que o autor tem para "conversar" com o aluno. O mesmo acaba ficando à mercê de sua intuição para finalizar a resolução dos exercícios. Um dos pontos principais de nosso trabalho é esclarecer o uso do Princípio Aditivo nesses tipos de exercícios.

Os Arranjos são abordados em menor escala, isso possivelmente deve-se à ideia de que as questões podem ser resolvidas pelo Princípio Multiplicativo. O que pudemos observar também é que o assunto "Arranjos" é abordado por alguns autores como método para calcular quantidade de "Sequências" de um certo número de elementos que podemos formar a partir de uma outra quantidade de elementos disponíveis que é, evidentemente, maior ou igual a quantidade de elementos que essas sequências irão possuir. Alguns autores ainda se detém a resolução de exercícios somente para que os alunos fixem a fórmula de Arranjos em suas mentes, como se fosse necessário decorar a fórmula para resolver os exercícios. Ora, os mesmos já haviam mostrado anteriormente como calcular Arranjos sem o uso de fórmulas.

Quanto às Permutações pudemos observar como os autores abordam o assunto geralmente após o Princípio Multiplicativo com o intuito de introduzir o conceito de "Fatorial" sendo o mesmo usado posteriormente para deduzir-se as fórmulas para calcular Arranjos e Combinações, mas pouco menciona-se nos livros sobre as Permutações Circulares. Como vimos nos dados apresentados apenas DANTE com 1 questão, IEZZI com 1 questão e BARROSO (2) com 3 questões sendo que a autora em seu livro posterior BARROSO (1) não apresenta este conceito. Um destaque especial para o livro de (BEDAQUE), onde o mesmo não se preocupa com que o aluno resolva os problemas de Arranjos, Permutações Simples e Permutações com Repetição logo no início dos conteúdos. Ele insere um certo número de questões onde os alunos têm que construí-los, sendo que essa mesma ideia ele usa para as Combinações. Para esta última podemos observar nos dados apresentados anteriormente que é o tópico mais explorado na maioria dos livros didáticos, por isso achamos muito importante que o aluno compreenda o cálculo de Combinações através da definição de subconjuntos, para que o mesmo resolva os exercícios compreendendo o que está fazendo. Lembramos que o estudo das Combinações se amplia no estudo do Binômio de Newton e das Probabilidades, talvez esse seja um dos motivos pelo qual os autores exploram tanto as questões envolvendo Combinações. De modo geral, podemos observar nos gráficos apresentados, que o tópico que possui uma abordagem mais uniforme é Combinações, isso quer dizer que os autores tem praticamente o mesmo pensamento sobre a importância do tema, mas o mesmo não acontece entre os outros temas.

A análise dos livros didáticos apresentada neste trabalho tem como objetivo principal: dar uma contribuição ao ensino de Análise Combinatória. Pois os livros didáticos representam um recurso disponível para a maior parte do alunos do ensino básico, sendo muitas vezes o único recurso por isso se faz necessário entender as ideias dos autores, os tipos de exercícios utilizados, os tópicos que são mais abordados e os caminhos sugeridos para a resolução dos exercícios.

> Sabe-se que um dos principais materiais didáticos nas escolas brasileiras é o livro didático, tanto para os alunos enquanto material de estudo, quanto para os professores enquanto material de estudo e de trabalho. Após um período mais restrito às escolas particulares, os alunos e os professores das escolas públicas também puderam ter acesso a esse material didático graças ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), do Ministério da Educação. Não há como negar que o livro didático atinge um grande contingente de alunos da escola básica brasileira. (ALVES, p. 02)

2.5 Pesquisa relacionada a processos que podem ser utilizados na resolução de problemas de análise combinatória e as principais dificuldades encontradas pelos alunos, nessas resoluções.

Como dissemos anteriormente, a Análise Combinatória é um assunto que gera grandes dificuldades de compreensão entre alunos e professores também pois os problemas podem variar muito mesmo quando abordados em um mesmo tópico. Portanto apenas conhecer as técnicas de resolução de problemas parece não ser suficiente pois muitas vezes os alunos reconhecem a técnica que deve ser utilizada em determinado problema, mas mesmo assim não conseguem resolver os problemas. Identificar os problemas que geram essas dificuldades será importante para um bom estudo de Análise Combinatória. Pudemos perceber ao longo de quase 20 anos de ensino de Matemática que os alunos possuem dificuldades em compreender processos que devem ser utilizados na resolução de problemas. Podemos citar alguns deles:

- Diferenciar entre elementos distinguíveis ou indistinguíveis;
- Identificar os elementos disponíveis;
- Identificar se os elementos podem ser repetidos ou não;
- Identificar se a ordem dos elementos é importante ou não;
- Identificar se o número de elementos disponíveis é maior, menor ou igual ao número de elementos necessários para compor os agrupamentos;
- Identificar se o problema será resolvido usando uma ou mais de uma técnica;
- Identificar quando devem ser usados o Princípio Aditivo ou o Multiplicativo.

Este último é uma das principais dúvidas entre os alunos, principalmente no momento de finalizar a resolução, muitos não sabem se é para somar ou para multiplicar. Com base nessas dificuldades e na preocupação em diminuí-las é que apresentaremos um suporte para que exista uma maior compreensão do conteúdo. Para isso, recorremos ao apoio "suporte" de duas outras pesquisas: a de ALVES, "O ensino de Análise Combinatória na educação básica e a formação de professores" e a de PINHEIRO, "O ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema". ALVES cita as dificuldades encontradas pelos alunos desde a interpretação dos problemas até o uso das técnicas para sua resolução. Cita também alguns pesquisadores do tema e suas contribuições para o ensino de Análise Combinatória.

> Tais dificuldades não passaram despercebidas ao longo do tempo pelos pesquisadores em Educação Matemática. Algumas pesquisas já feitas, como BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO (1996) e HADAR e HADASS (1981) abordam algumas das dificuldades mencionadas, bem como investigam o quanto cada uma pode influenciar no desenvolvimento do raciocínio combinatório, além de categorizarem os erros mais comuns cometidos pelos alunos na resolução de problemas combinatórios. Outras, como DUBOIS (1984), buscaram categorizar os tipos de problemas combinatórios, classificando-os seguindo certos critérios. (ALVES, p. 01)

Ainda segundo ALVES, “a teoria do Modelo Combinatório Implícito, desenvolvida por DUBOIS (1984), tem como objetivo classificar os problemas combinatórios. Tal teoria fornece as seguintes classificações, baseadas na situação principal presente no contexto dos problemas:

- Alocação / Correspondência: problemas cuja ideia principal do contexto é a de distribuir elementos de um conjunto em outro conjunto (com a mesma cardinalidade do primeiro ou não);
- Seleção: problemas cuja ideia principal do contexto é a de selecionar uma amostra de um conjunto dado;
- Partição: problemas cuja ideia principal do contexto é a de dividir um conjunto em subconjuntos.

Seguem-se três exemplos de problemas traduzidos de BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO, 1996, p. 17-18, classificados em Alocação, Seleção e Partição:

(1) Alocação: A garagem do prédio de Angel tem cinco vagas. Como o prédio é novo, até agora só há três carros: de Angel, Beatriz e Carmen, que podem colocar cada dia seu carro no lugar que preferirem, desde que não esteja ocupado. Este é o esquema da garagem: 1 2 3 4 5 Por exemplo, Angel pode parar seu carro na vaga do apartamento 1, Beatriz na do apartamento 2 e Carmen na do apartamento 4. De quantas formas possíveis eles podem estacionar seus carros na garagem?

(2) Seleção: Uma professora tem que escolher três estudantes para limpar o quadro. Para isso dispõe de cinco voluntários: Elisa, Fernando, Gérman, Jorge e Maria. De quantas formas ela pode escolher três destes alunos? Exemplo: Elisa, Fernando e Maria.

(3) Partição: Um grupo de quatro amigos, Andrés, Benito, Clara e Daniel, têm que realizar dois trabalhos diferentes: um de Matemática e outro de Linguagem. Para realizá-lo, decidem dividir-se em dois grupos de dois integrantes cada um. De quantas formas eles podem se dividir para realizar os trabalhos? Exemplo: Andrés e Benito podem fazer o trabalho de Matemática e Clara e Daniel o trabalho de Linguagem.

De um modo geral, o objetivo em um problema de alocação é o seguinte: desejo colocar m objetos em n casas. Outras palavras-chave que podem substituir a palavra colocar são: alocar, corresponder, introduzir, guardar. Dentro desta categoria, podemos fazer as seguintes distinções (DUBOIS, 1984 p.40, a tradução é nossa):

- Alocações ordenadas de m objetos distintos em n casas distintas;
- Alocações não ordenadas de m objetos distintos em n casas distintas;
- Alocações de m objetos indistinguíveis em n casas distintas;
- Alocações ordenadas de m objetos distintos em n casas indistinguíveis;
- Alocações não ordenadas de m objetos distintos em n casas indistinguíveis;
- Alocações de m objetos indistinguíveis em n casas indistinguíveis.

Quanto à cardinalidade, os problemas de alocação ainda podem ser classificados como:
(I) Injetivos, quando $m \leq n$ (um objeto em cada casa e podem sobrar casas vazias);
(S) Sobrejetivos, quando $m \geq n$ (há objetos em todas as casas, podendo haver mais de um objeto em alguma casa);
(B) Bijetivos, quando m=n (há um objeto em cada casa, sem sobra de objetos e nem de casas). (ALVES, p. 25)

De acordo com PINHEIRO, faz-se necessário o estudo sobre uma sequência didática para uma melhor compreensão do estudo de Análise Combinatória. "Entendo que seja necessário avançar nas discussões acerca das sequências didáticas para o ensino de Análise Combinatória. Pois, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais: As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicada as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatístico e probabilístico são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (BRASIL, 1999, p. 257).

> É exatamente essa cuidadosa abordagem dos conteúdos, citada no documento oficial, que traz a questão da necessidade de mais desenvolvimento de pesquisas no campo do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, bem como Estatística e Probabilidade. Nesse sentido, levantei a seguinte questão de pesquisa: Uma sequência de ensino, enfatizando a resolução de problemas como ponto de partida, proporciona condições favoráveis para que sejam institucionalizados conceitos básicos de Análise Combinatória? e como questão derivada da primeira, É possível a partir do ensino oferecido, que os alunos tenham desenvolvido habilidades básicas para resolverem os problemas de Análise Combinatória?" (PINHEIRO, p. 16).

3 MÉTODO DE FORMAÇÃO DE SEQUÊNCIAS

No estudo da Análise Combinatória podemos perceber a necessidade de aprendermos a calcular o número de possibilidades distintas, ou seja, de maneiras diferentes de formarmos a partir de um grupo de elementos distintos: senhas de bancos, números de telefones, placas de automóveis, número do R.G ou C.P.F de um cidadão, contas de bancos e seus códigos de acesso entre outras situações. Podemos perceber que são inúmeras as situações onde o emprego da Análise Combinatória se faz importante e entre as situações citadas podemos perceber que todas se referem a formação de sequências ou à concatenação dos termos de uma sequência. Essa situações fazem parte do nosso cotidiano entre outras que também fazem parte, mas que não sentimos tanta necessidade de fazermos uma análise mais intensa, como: formar filas de pessoas, dispor pessoas sentadas em cadeiras lado a lado, posar um grupo de pessoas para uma fotografia, entre outras. Mesmo essas situações mais hipotéticas são usadas para desenvolvermos o raciocínio combinatório, pois geralmente, o princípio utilizado para formar filas com pessoas pode ser o mesmo utilizado para saber quantas senhas poderão ser formadas para os clientes de um banco. A partir do instante em que o aluno compreende que o que diferencia os tipos de problemas muitas vezes não é o assunto, mas que função cada elemento poderá desempenhar no grupo ao qual ele fará parte. Desse modo, o processo de resolução passará a ser mais simples, sendo muitas vezes feito de modo intuitivo. Nas próximas seções deste capítulo iremos substituir os termos Arranjos e Permutações pela ideia de sequência, com a tentativa de mostrar que a palavra “sequência” dá um sentido mais claro ao estudo dos Arranjos e das Permutações. Anteriormente ao estudo da formação de sequências faremos um estudo sobre a aplicação de Princípio Aditivo de Contagem, até mesmo por que iremos precisar mais adiante para resolvermos alguns problemas que envolvam mais de uma operação combinatória.

3.1 Princípio aditivo para conjuntos disjuntos

O princípio aditivo é uma das técnicas para se resolver problemas de contagem mais importantes e também uma das mais interessantes. Apesar disso, esse método vem sendo pouco utilizado nos livros didáticos como vimos no capítulo anterior, e muitas vezes o aluno fica restrito ao uso da dedução para resolver exercícios. Perceber e diferença entre um método de contagem onde se necessita o uso da adição ao invés da multiplicação é um dos fatos que mais geram dúvidas entre os alunos. Isto será abordado em nossas pesquisas nos capítulos posteriores. O que mostraremos a seguir são ideias de como se resolver problemas com o uso do princípio aditivo. Para isso usamos notações de conjuntos. Lembremos a definição da união de dois conjuntos: $A \cup B = \{x/x \in Aoux \in B\}$, ou seja, o que caracteriza a união de dois conjuntos é o conectivo “ou”, basta agora lembrarmos que os conjuntos A e B podem ser disjuntos ou não.

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ou seja, $A \cap B = \oslash$ e seja $n\left(A \cup B\right)$ o número de elementos de A união B, então:

$$n\left(A \cup B\right) = n\left(A\right) + n\left(B\right)$$

Generalizando para n conjuntos disjuntos:
Sejam, $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, conjuntos disjuntos, ou seja, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n = \oslash$,o número de elementos da união desses conjuntos é dado por:

$$n\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n\right) = n\left(A_1\right) + n\left(A_2\right) + n\left(A_3\right) + ... + n\left(A_n\right)$$

Ex 01: Considere um baralho comum de 52 cartas formado por 4 naipes com 13 cartas cada: ouros, copas, paus e espadas. Os naipes: ouros e copas são vermelhos e os naipes: paus e espadas são pretos. Se uma pessoa deseja retirar uma carta, ao acaso, desse baralho. De quantos modos distintos poderá fazê-lo, se deseja retirar uma carta de copas ou uma carta de naipe preto?
Resolução: Seja n(A) o número de maneiras distintas de se retirar ao acaso, uma carta de copas então $n(A) = 13$ *e seja* $n(B)$, *o número de maneiras distintas de se retirar ao acaso, uma carta de naipe preto então* $n(B) = 26$. *Como as cartas de copas tem a cor vermelha,* $n(A \cap B) = \oslash$.
Logo, pelo Princípio Aditivo para conjuntos disjuntos, o número de maneiras de se retirar ao acaso, uma carta de copas ou de naipe preto será dado por: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 13 + 26 = 39$.

Ex 02: Um recepcionista de um hotel ao guardar as chaves dos apartamentos de um bloco contendo 6 apartamentos numa mesma gaveta, não viu que elas não estavam etiquetadas e agora não consegue diferenciá-las somente olhando. Assim ele optou em testar as chaves nas portas dos apartamentos até conseguir determinar a chave de cada um. Qual é o número mínimo de tentativas que ele terá que realizar para ter certeza de que encontrou a chave de cada apartamento?
Resolução: O recepcionista pode começar a testar todas as chaves no primeiro apartamento. É óbvio que ele poderá fazer no máximo 5 tentativas, pois se as 5 primeiras chaves não abrirem o apartamento então a sexta abrirá. Para abrir o segundo apartamento ele possui 5 chaves possíveis e fará no máximo 4 tenativas para abri-lo, pois se as quatro primeiras não abrirem o carro, a quinta abrirá. Analogamente, para o terceiro serão 3 tentativas, para o quarto será apenas 2 tentativas, para o quinto apenas 1 e para o último apartamento o número de tentativas será zero, pois só sobrou 1 chave e um apartamento. Logo: $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6) = (A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + n(A_5) + n(A_6) = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 15$.
Portanto, pelo Princípio da Adição, o recepcionista fará no mínimo 15 tentativas para descobrir as chaves de cada apartamento.

Ex 03:Em uma reunião de professores compareceram 10 pessoas. Todas se conhecem. Se as 10 pessoas se cumprimentarem, quantos serão os apertos de mãos?
Resolução:Suponha que os 10 professores chegaram para a reunião, mas ainda não se cumprimentaram. De repente um deles decide cumprimentar todos os outros, é óbvio que ele fará 9 cumprimentos. Então um segundo professor resolve cumprimentar todos os outros, logo ele fará apenas 8 cumprimentos, pois não irá cumprimentar a sí mesmo nem ao primeiro que já o cumprimentou. Segundo esse padrão, podemos afirmar que o terceiro irá cumprimentar 7 pessoas, o quarto 6, o quinto 5, o sexto 4, o sétimo 3, o oitavo 2, o nono 1 e o décimo nenhum, pois já foi cumprimentado por todos os outros professores. Assim, pelo Princípio Aditivo, podemos afirmar que o número total de cumprimentos é:$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup ... \cup A_10) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + ... + n(A_10) = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 45$.

Ex 04: Generalize o problema anterior para um número "m" pessoas.
Resolução: Seguindo a mesma linha de raciocínios do exemplo anterior podemos afirmar que a primeira das "m" pessoas irá cumprimentar "m-1" pessoas, a segunda "m-2", a terceira "m-3" e assim por diante até a m-ésima pessoa que não irá cumprimentar ninguém, pois

já foi cumprimentada por todas as outras. Assim, pelo Princípio Aditivo, podemos afirmar que o número total de cumprimentos é:$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup ... \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) + ... + n(A_n) = (m-1) + (m-2) + (m-3) + (m-4) + ... + 0$. *Utilizando a fórmula da soma dos termos da P.A., obtemos:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$S_n = \frac{(m-1+0).m}{2}$$

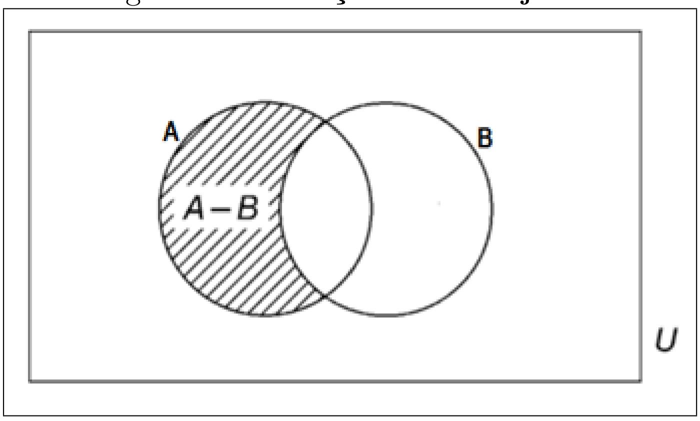
$$S_n = \frac{(m-1).n}{2}$$

$$S_n = \frac{m^2 - m}{2}$$

3.2 Princípio aditivo para conjuntos não disjuntos

Para demonstrarmos a propriedade da união de dois conjuntos não disjuntos, revisemos a definição da diferença de dois conjuntos.

Figura 8: **Diferença de dois conjuntos**



Fonte: O próprio autor, 2016

$$A - B = \{x/x \in Aex \notin B\}$$

e

$$B - A = \{x/x \in Bex \notin A\}$$

Assim:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

e

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$$

A partir daí e obsevando a figura "9"podemos afirmar que:

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$$

$$n(A\cup B)=n(A)-n(A\cap B)+n(A\cap B)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

Para demonstrarmos a propriedade da união de três conjuntos não disjuntos, utilizaremos o resultado encontrado anteriormente e a seguinte propriedade dos conjuntos:

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

.
Escrevamos:

$$n(A\cup B\cup C)=n[(A\cup B)\cup C]$$

e aplicando a propriedade da união de dois conjuntos, teremos:

$$n[(A\cup B)\cup C]=n(A\cup B)+n(C)-n[(A\cup B)\cap C]$$

Assim:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-n[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$$

e

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-[n(A\cap C)+n(B\cap C)-n((A\cap B\cap C)]$$

Portanto:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

Ex 01:Em uma urna há 100 bolas enumeradas de 1 a 100. De quantos modos distintos podemos retirar uma bola que tenha numeração que seja múltiplo de 2 ou múltiplo de 3?
Resolução: Usando o Princípio Aditivo para dois conjuntos não-disjuntos, encontremos primeiro o número de bolas cujo número é múltiplo de 2, como o último número da sequência

é par "100" então $n(A) = 100/2 = 50$*, encontremos agora o número de bolas cujo número seja múltiplo de 3. Como o último número múltiplo de 3 é 99 então* $n(B) = 99/3 = 33$*. Basta encontrarmos a quantidade de bolas cujo número seja múltiplo de 2 e de 3 simultaneamente. Para isso calculemos o menor múltiplo comum de 2 e de 3 simultaneamente "MMC=6"e como o maior múltiplo de 6 no conjunto é 96, então* $n(A \cap B) = 96/6 = 16$*. Logo, pelo Princípio Aditivo para conjuntos não disjuntos, o número de maneiras de se retirar ao acaso, uma bola múltiplo de 2 ou de 3 será dado por:* $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 50 + 33 - 16 = 67$.

Ex 02 : Em uma urna há 60 bolas enumeradas de 1 a 60. Qual é o número de maneiras distintas de retirarmos uma bola que seja múltiplo de 2, de 3, de 4 ou de 5?
Resolução: Usando o princípio aditivo para quatro conjuntos não disjuntos, encontremos primeiro o número de bolas cujo número é múltiplo de 2,3,4 e 5 , como o último número da sequência é "60" então $n(A) = 60/2 = 30$,$n(B) = 60/3 = 20$,$n(C) = 60/4 = 15$ *e* $n(D) = 60/5 = 12$*. Encontremos agora o número de bolas cujo número seja múltiplo de dois desses números* $n(A \cap B) = 60/6 = 10$*,* $n(A \cap C) = 60/4 = 15$*,* $n(A \cap D) = 60/10 = 6$*,* $n(B \cap C) = 60/12 = 5$*,* $n(B \cap D) = 60/15 = 4$ *e* $n(C \cap D) = 60/20 = 3$*. Vamos encontrar agora as bolas que possuem número múltiplo de três desses números simultaneamente,* $n(A \cap B \cap C) = 60/12 = 5$*,* $n(A \cap B \cap D) = 60/30 = 2$ *e* $n(B \cap C \cap D) = 60/60 = 1$ *e* $n(A \cap C \cap D) = 60/20 = 3$*. Basta encontrarmos a quantidade de bolas cujo número seja múltiplo dos quatro simultaneamente,* $n(A \cap B \cap C \cap D) = 60/60 = 1$*. Assim, a partir das propriedades apresentadas anteriormente podemos deduzir que:*
$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D) = 30+20+15+12-10-15-6-5-4-3+5+2+1+3-1 = 44$.

Ex 03 : Em um baralho comum de 52 cartas, quantas são de copas ou são representadas por uma figura, ou seja, rei, rainha ou valete?
Resolução:Seja A o conjunto das cartas de copas, desse modo:

$$A = \{rei, rainha, valete, A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

e
Seja B o conjunto das figuras, desse modo B será composto por: rei de copas, rei de espadas, rei de ouros, rei de paus, rainha de copas, rainha de espadas, rainha de ouros, rainha de paus, valete de copas, valete de espadas, valete de ouros e valete de paus
Podemos observar que:

$$A \cap B = \{reidecopas, rainhadecopas, valetedecopas\}$$

Portanto, utilizando o princípio aditivo, podemos afirmar que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 13 + 12 - 3 = 22.$$

3.3 Método de formação de sequências que possuem os elementos distintos.

A ideia central desse capítulo é utilizar a noção intuitiva de sequências para resolvermos problemas de contagem, sendo para isso necessário uma revisão da definição de sequências e a dedução de um método para construirmos sequências formadas a partir de elementos de um conjunto finito. Sabemos que uma sucessão ou sequência é um conjunto de elementos ordenados, distintos ou não.

Por ser um conjunto ordenado, podemos definir o primeiro termo, o segundo, o terceiro, ..., o n-ésimo termo por $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. Seja $S = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$, $n \in N$ uma sequência onde a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo, ..., a_n é o último termo, segue-se que:
i) $S = (a_1)$, é uma sequência de um único termo
ii) Se $a_1 \neq b_1$ ou $a_2 \neq b_2$ ou... ou $a_n \neq b_n$ então $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \neq (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$

A partir de "ii" podemos afirmar que para obtermos uma sequência diferente de S basta trocarmos algum elemento de posição ou trocarmos algum elemento por outro inexistente em S.

Para fazermos aplicações do Método de Formação de Sequências na Análise Combinatória, consideremos as sequências que podem ser formadas a partir de um conjunto finito de elementos. Por exemplo: Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, a partir dos elementos de A podemos formar as seguintes sequências de três elementos distintos:

$$(1, 2, 3)\,;(1, 3, 2)\,;(2, 1, 3)\,;(2, 3, 1)\,;(3, 1, 2)\,;(3, 2, 1)$$

Suponhamos agora que o conjunto B seja igual a: $B = \{1, 2, 3, 4\}$, para obtermos todas as sequências de três elementos distintos de B consideremos as 6 primeiras sequências formadas anteriormente:

$$(1, 2, 3)\,;(1, 3, 2)\,;(2, 1, 3)\,;(2, 3, 1)\,;(3, 1, 2)\,;(3, 2, 1)$$

Substituindo o elemento 1 pelo elemento 4, obteremos as seguintes sequências:

$$(4, 2, 3)\,;(4, 3, 2)\,;(2, 4, 3)\,;(2, 3, 4)\,;(3, 4, 2)\,;(3, 2, 4)$$

Substituindo nas 6 primeiras sequências, o elemento 2 pelo 4, obtemos:

$$(1, 4, 3)\,;(1, 3, 4)\,;(4, 1, 3)\,;(4, 3, 1)\,;(3, 1, 4)\,;(3, 4, 1)$$

E finalmente substituindo o elemento 3 pelo 4 nas mesmas 6 sequências iniciais, obtendo:

$$(1, 2, 4)\,;(1, 4, 2)\,;(2, 1, 4)\,;(2, 4, 1)\,;(4, 1, 2)\,;(4, 2, 1)$$

Obtemos portanto um total de 24 sequências.

Agora, suponhamos que a partir do conjunto B dado anteriormente desejássemos construir todas as sequências de quatro elementos distintos, assim a partir da sequência (1,2,3) teríamos que arrumar uma posição para o elemento 4. É óbvio que ele poderia ocupar a 1ª, 2ª ,3ª ou 4ª posição gerando as sequências:

$$(4,1,2,3)\,;(1,4,2,3)\,;(1,2,4,3)\,;(1,2,3,4)$$

Então podemos afirmar que para cada uma das seis sequências

$$(1,2,3)\,;(1,3,2)\,;(2,1,3)\,;(2,3,1)\,;(3,1,2)\,,(3,2,1)$$

teremos quatros novas sequências geradas pelo acréscimo do elemento 4 em todas as posições possíveis, perfazendo um total de 6 x 4 = 24 sequências.
Desse modo, para formarmos sequências do tipo (a_1, a_2, a_3, a_4), dispondo dos elementos 1,2,3 e 4, temos 4 possibilidades de ocuparmos a posição do elemento a_1, para cada uma dessas possibilidades apenas 3 elementos poderão ocupar a posição a_2, para cada uma dessas possibilidades apenas 2 elementos poderão ocupar a posição a_3 e finalmente teremos apenas 1 elemento que poderá ocupar a posição a_4. Assim o número total de possibilidades é dado por:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

A partir deste processo surge um dos conceitos mais importantes na resolução de problemas de Combinatória, o Princípio Multiplicativo. Esse princípio, como veremos a seguir servirá de base para os cálculos de Arranjos, Combinações e Permutações, e que como já foi mencionado anteriormente, chamaremos de formação de sequências e formação de subconjuntos.

3.4 Aplicações do método de formação de sequências que possuem os elementos distintos

A seguir apresentaremos alguns exemplos de como e em quais casos podemos aplicar o método de formação de sequências em associação ao princípio multiplicativo de contagem.

Ex 01:Uma bandeira é formada por 10 listras que devem ser pintadas apenas nas cores verde, azul e amarelo. De quantos modos distintos essa bandeira poderá ser pintada, de modo que cada listra só poderá ter uma cor e listras adjacentes devem ser pintadas de cores diferentes?
Resolução:Uma possível solução seria dada pela sequência (verde, azul, amarelo, azul, verde, azul, amarelo, verde, azul, verde) onde duas cores vizinhas não são iguais. Encontremos, agora, todas as outras sequências possíveis. Se p_1 *é o número de maneiras distintas de se pintar a primeira listra da bandeira, ou seja, escolher o 1º elemento da sequência, então* $p_1 = 3$*, se* p_2 *é o número de maneiras de se pintar a segunda listra então* $p_2 = 2$*, pois listras adjacentes devem ter cores distintas. Se* p_3 *é o número de maneiras de pintarmos a terceira listra, é só lembrarmos que essa só não pode ter a mesma cor da segunda. Assim* $p_3 = 2$ *e analogamente* $p_4 = p_5 = ... = p_10 = 2$*. Portanto, pelo método de formação de sequências, o número de maneiras de se pintar a bandeira será:*

$$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 512 = 1536$$

Ex 02: De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em uma fila de 5 cadeiras?
Resolução:Imaginemos o número de pessoas como o número de elementos de uma sequência, assim a sequência possuirá apenas 3 elementos. Se p_1 é o número de maneiras distintas de escolhermos uma cadeira para a primeira pessoa da sequência, assim $p_1 = 5$, a seguir a segunda pessoa escolherá uma cadeira para se sentar. Como só sobraram 4 cadeiras, então $p_2 = 4$ e obviamente $p_3 = 3$. Portanto, pelo Princípio de formação de sequências, o número de possibilidades será :

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

Ex 03: Carol nasceu em 18/09/1997 e Matheus em 30/03/2001 eles desejam abrir uma conta conjunta num banco que permite senha de no mínimo 4 e no máximo 6 dígitos distintos. Se eles desejam formar uma senha usando apenas os dígitos das datas de nascimento, podendo misturar dígitos das duas datas, então quantas são as possíveis senhas que eles poderão fazer, para abrir uma conta neste banco?
Resolução: Os dígitos disponíveis são: 0, 1, 2, 3, 7, 8 e 9 já que não podem ser repetidos. Para formar senhas de 4 dígitos distintos eles terão: 7 maneiras de escolher o primeiro, 6 maneiras de escolher o segundo, 5 para escolher o terceiro e 4 para escolher o quarto dígito. Ao todo serão:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

Para formar senhas de 5 dígitos distintos, eles terão:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

e para formar senhas de 6 dígitos distintos, eles terão:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5040.$$

Como eles poderão formar senhas de quatro, cinco ou seis dígitos distintos, então pelo princípio aditivo, eles terão:

$$840 + 2520 + 5040 = 8400$$

3.5 Método de formação de sequências para resolver problemas de arranjos simples e permutações simples.

Permutar significa trocar de posição, trocar de lugar. Nos livros didáticos os problemas que envolvem permutações são muito explorados, principalmente no cálculo de anagramas de uma palavra, pois anagramas são palavras com sentido ou não, que podem ser construídas com as letras de uma outra palavra, apenas trocando as letras dessa palavra de posição, ou seja, permutando-se as letras. Por exemplo, os anagramas da palavra AMOR são:AMOR, AMRO, AOMR, AORM, AROM, ARMO, MAOR, MARO, MRAO, MROA, MOAR, MORA, OAMR, OARM, OMAR, OMRA, ORAM, ORMA, RAMO, RAOM, RMAO, RMOA, ROAM, ROMA.

Como podemos perceber para construirmos sequências através de "Permutações", temos que utilizar sempre todos os elementos disponíveis. O mesmo não é necessário ocorrer nos Arranjos, pois neste caso as sequências não precisam ser formadas usando-se todos os elementos disponíveis. Por exemplo: Dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, podemos formar os seguintes números de dois algarismos distintos:

$$12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54$$

Como podemos ver, cada número formado possui apenas dois algarismos dos cinco disponíveis. Neste caso os agrupamentos não são formados apenas pelas trocas de posições entre os cinco elementos disponíveis, então não temos um caso de "Permutações", mas de "Arranjos". Trocar esses dois conceitos por um único (sequências) nos parece mais confortável, pois torna-se mais fácil de compreensão e com a mesma eficiência. Um outro caso interessante na formação de sequências é o de termos que colocar um certo número de elementos em uma quantidade de locações que é maior que a quantidade de elementos.

Exemplo: De quantos modos distintos duas pessoas podem se sentar em uma sala de aula que possui 50 cadeiras, inicialmente vazias? Neste caso podemos considerar que existem 50 possibilidades para uma dessa pessoas escolher uma cadeira para se sentar e feita essa escolha, existirão 49 possibilidades para a segunda pessoa escolher sua cadeira. Desse modo, o número total de possibilidades será:

$$50 \times 49 = 2450$$

Como podemos perceber, neste exemplo temos um caso de formação de sequências. Pois, se representarmos as pessoas por A e B e as cadeiras por $C_1, C_2, C_3, ..., C_50$ e se escolhermos a pessoa A para se sentar na cadeira C_13 a pessoa B na cadeira C_48, essa escolha é diferente da possibilidade da pessoa A sentar-se na cadeira C_48 e de a pessoa B sentar-se na cadeira C_13. Essa ideia é a mesma que formarmos sequência de duas cadeiras distintas, escolhidas de um conjunto de 50 cadeiras distintas.
O método para formar sequências com "n" elementos distintos a partir de um grupo de "n" elementos distintos é o mesmo que pode ser usado para construir sequências com 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou ...ou n elementos distintos dispondo-se de um grupos de "n" elementos distintos, como veremos a seguir. Porém consideremos em primeiro lugar, as definições abaixo, extraídas de alguns livros didáticos.

Permutações simples - Se temos n elementos distintos, então Permutações Simples são todos os agrupamentos ordenados de n elementos que podemos formar. $(DANTE, 2004, p.361)$.

Arranjos simples - Se temos n elementos distintos, então Arranjos Simples são todos os agrupamentos ordenados de 1, 2, 3, ..., de p elementos que podemos formar $p \leq n$. $(DANTE, 2004, p.363)$.

Através das definições apresentadas anteriormente é fácil verificar que Arranjos Simples e Permutações Simples são métodos utilizados para se calcular a quantidade de sequências de p elementos distintos a partir de n elementos distintos disponíveis e como essa diferença é mínima os alunos muitas vezes não compreendem a diferença entre eles, mas o que queremos nesta seção é esclarecer que não é tão fundamental a ideia de separarmos os dois conceitos, pois através da formação de sequências podemos desenvolver o estudo de modo mais geral. Quando o professor, em sala de aula, diz a seus alunos que todas as questões de Permutações podem ser resolvidas com Arranjos, mas o contrário não acontece, isso gera sérios problemas no entendimento do assunto. Muitas vezes acaba desconstruindo um processo que até então poderia estar sendo bem sucedido. No processo de formação de sequências, o aluno não precisa passar por esse processo complexo de compreensão, basta ele identificar que os agrupamentos que serão formados no problema são ordenados (sequências) e que a partir dos "n" elementos distintos disponíveis ele poderá construir sequências com 1 ou 2 ou 3, ... ou n elementos distintos de acordo com a necessidade do exercício. Vejamos os exemplos a seguir:

Ex 01: Quantos números de três algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9?
Resolução:Para encontrarmos a quantidade total de números de três algarismos distintos basta encontrarmos a quantidade de sequências de três algarismos distintos que podemos formar, pois se considerarmos como exemplo a sequência $(2, 7, 8)$ *através da concatenação de seus elementos obtemos o número 278. Assim para escolhermos o primeiro elemento da sequência temos 9 possibilidades, para o segundo 8 e para o terceiro 7, perfazendo um total de* $9 \times 8 \times 7 = 504$ *sequências, consequentemente 504 números de três algarismos distintos.*

Ex 02: Quantos números de três algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9?
Resolução:Primeiro calculemos o número de sequências que podemos formar com os 10 elementos, assim teremos: $10 \times 9 \times 8 = 720$. *Agora lembremos que entre as 720 sequências obtidas algumas são como por exemplo* $(0, 9, 8)$ *cuja concatenação de seus elementos formará o número 98 "de dois algarismos distintos" o que não nos serve, então calculando todas as sequências do tipo* $(0, -, -)$, *temos que para escolher o segundo algarismo temos 9 possibilidades e para o terceiro apenas 8, perfazendo* $9 \times 8 = 72$ *sequências. Assim o número total de números de três algarismos distintos é dado por:* $720–72 = 648$.

Outra resolução para o exemplo 02:
Para calcular o número de sequências do tipo $(1, -, -)$, *basta calcularmos o número de maneiras de escolhermos os dois próximos elementos. Assim:*
N^o de possibilidades de escolha para o 2^o elemento = 9 possibilidades;
N^o de possibilidades de escolha para o 3^o elemento = 8 possibilidades.
Logo, o número de maneiras de escolhermos os dois elementos é: $9 \times 8 = 72$.
O mesmo ocorre para os outros dígitos, exceto o "zero" que não pode figurar na 1^a posição.
Desse modo teremos: $9 \times 72 = 648$ *possibilidades.*

Ex03:Quantos anagramas "palavras tendo sentido ou não, formadas a partir das letras de outra palavra", distintos podemos formar com as letras da palavra BRASIL?
Resolução:Por concatenação temos (B, R, A, S, I, L) *= BRASIL,* (B, R, A, S, L, I) *= BRASLI,* (R, A, S, B, I, L) *= RASBIL, e assim por diante. Então o número de sequências que podemos formar com todos os elementos da palavra BRASIL é:*

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

.

Ex 04: Listando em ordem alfabética todos os anagramas da palavra LUCAS, a própria palavra LUCAS, aparecerá em qual posição?
Resolução: Como os anagramas devem ser colocados em ordem alfabética, então comecemos pelos que iniciam pela letra A:

$$(A, -, -, -, -) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Agora, os que começam pela letra C, segunda na ordem alfabética:

$$(C, -, -, -, -) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Como a próxima letra na ordem alfabética é L, que é a primeira da palavra que estamos procurando, então precisamos fazer a escolha da segunda letra:

$$(L, A, -, -, -) = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Agora os anagramas devem começar por LC, assim teremos:

$$(L, C, -, -, -) = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Como a próxima segunda letra na ordem alfabética é U, então precisaremos fazer a escolha da terceira letra. Assim teremos:

$$(L, U, A, -, -) = 2 \times 1 = 2$$

Agora os anagramas devem começar por LUC, assim teremos apenas 1 opção para a quarta letra que é o A e a última que só pode ser o S:

$$(L, U, C, A, S) = 1$$

Logo, aplicando o Princípio Aditivo de Contagem, teremos: $24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 1 = 63^a$ *posição.*

3.6 Princípio multiplicativo de contagem e o fatorial

Dispondo de n elementos distintos, para obtermos o número de sequências do tipo $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ de n elementos distintos, consideramos que existem n possibilidades para escolhermos a_1, $n - 1$ possibilidades para a_2, $n - 2$ para a_3, ... e 1 para a_n. Logo, teremos $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$ sequências. Essa expressão pode ser abreviada por $n!$. Desse modo: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$. Assim:

- $1! = 1$
- $2! = 2 \times 1 = 2$
- $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ e assim por diante.

Utilizaremos a notação do fatorial para generalizarmos algumas situações, deduzindo fórmulas. Mas, lembrando que em nosso trabalho o uso de fórmulas é facultativo, o importante é que o aluno consiga compreender a ideia do problema a ser resolvido. Após um amplo trabalho com a formação de sequências o mesmo poderá ser levado a deduzir fórmulas e generalizações. Para isso verifiquemos as seguintes propriedades do fatorial:

- $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 6 \times 5!$
- $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 6 \times 5 \times 4!$
- $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5 \times 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 6 \times 5 \times 4 \times 3!$

Ou seja,

- $n! = n \times (n-1)!$
- $n! = n \times (n-1) \times (n-2)!$
- ...
- $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times ... \times (n-p+1) \times (n-p)!$

Logo, se tivermos n elementos distintos disponíveis e se a partir deles queremos obter todas as sequências de p elementos distintos, teremos n possibilidades para escolhermos o termo a_1 da sequência, $n-1$ possibilidades para escolhermos a_2, n–2 para escolhermos a_3 , e assim por diante , ou seja , para formar sequências do tipo $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_p)$, onde $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq ... \neq a_p$ tomados a partir de n elementos distintos, consideremos que:

- $a_1 \mapsto "n" possibilidades$
- $a_2 \mapsto "n-1" possibilidades$
- $a_3 \mapsto "n-2" possibilidades$
- $a_4 \mapsto "n-3" possibilidades$
- $\ldots$
- $a_p \mapsto [n-(p-1)]" = (n-p+1)"$possibilidades

Ou seja, o número total de sequências de p elementos distintos que podemos formar a partir de n elementos distintos é dado por:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-p+1)$$

que podemos escrever como:

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p)!}{(n-p)!}$$

e ainda, podemos escrever:

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

Logo, o número total de sequências de p elementos distintos que podemos formar a partir de n elementos distintos é:$\frac{n!}{(n-p)!}$, com $p \leq n$. Como vimos anteriormente, o número de sequências de n elementos distintos possíveis de serem formadas dispondo dos mesmos n elementos distintos é n!. Então, considerando n = p, e usando a fórmula encontrada anteriormente em (4), temos que:

$$n! = \frac{n!}{(n-n)!}$$

Logo,

$$n! = \frac{n!}{0!}$$

$$0!.n! = n!$$

$$0! = \frac{n!}{n!}$$

$$0! = 1$$

3.6.1 Método de formações de sequências que possuem alguns elementos repetidos.

Como vimos anteriormente, Permutações são sequências que podemos formar a partir de um conjunto de elementos disponíveis onde todos os elementos são utilizados na formação de cada sequência. Na seção 3.5, calculamos o número de sequências de elementos distintos que podemos formar a partir de um grupo de elementos distintos. Mas, o que fazer se alguns elementos desse grupo forem repetidos. Por exemplo, trocando-se de posição todas as letras da palavra AMAR obteríamos:
AMAR, AMRA, AAMR, AARM, ARAM, ARMA, MAAR, MARA, MRAA, MRAA, MAAR, MARA, AAMR, AARM, AMAR, AMRA, ARAM, ARMA, RAMA, RAAM, RMAA, RMAA, RAAM, RAMA, ou seja, 24 possibilidades.

Como podemos ver, todas as palavras distintas aparecem duas vezes. Assim, eliminado uma de cada, teremos:
AMAR, AMRA, AAMR, AARM, ARAM, ARMA, MAAR, MARA, MRAA, RAMA, RAAM, RMAA. Logo, o número de anagramas distintos da palavra AMAR é 12.

A seguir temos uma definição do que são Permutações com elementos repetidos, extraído de um livro didático, seguido de aplicações do Método de Formações de Sequências.
Permutações com elementos repetidos - O número de permutações de "n" elementos onde existem α elementos iguais a n_1, β elementos iguais a n_2 , γ elementos iguais a n_3, e assim por diante é dado por: $P_n^\alpha, \beta, \gamma, \ldots = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}$.(Morgado, p. 50)

Exemplo: Dispondo-se dos algarismos 1,2 e 3 o números de sequências que podemos formar com quatro algarismos onde o algarismo 2 aparece duas vezes é:
$(1,2,2,3)$, $(1,2,3,2)$, $(1,3,2,2)$, $(3,1,2,2)$, $(3,2,1,2)$, $(3,2,2,1)$, $(2,1,2,3)$, $(2,1,3,2)$, $(2,2,1,3)$, $(2,2,3,1)$, $(2,3,2,1)$, $(2,3,1,2)$ ou seja, 12 sequências.
Pela definição de permutações com elementos repetidos teríamos:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 4 \times 3 = 12.$$

3.6.1.1 Aplicações do método de formação de sequências com elementos repetidos.

Como vimos anteriormente o número de sequências distintas de 4 elementos distintos é dada por: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, mas na verdade temos dois elementos iguais a 2, então imaginemos que na sequência $S_1 = (1,2,2,3)$ trocássemos de posição um algarismo 2 com o outro algarismo 2, é óbvio que obteríamos a sequência $S_2 = (1,2,2,3)$, com $S_1 = S_2$. Assim, das 24 sequências obtidas apenas metade são distintas. Logo, pelo Método de formação de sequências teremos: $24 \div 2 = 12$ possibilidades.
Suponha, agora, que queiramos formar uma fila de 10 pessoas onde 5 estão com camisa vermelhas, 3 estejam com camisas azuis e 2 com camisas brancas. Uma das possibilidades de se formar a fila, considerando apenas as cores das camisas de cada pessoa é:

$$VVVVVAAABB$$

Assim para calcularmos o número de sequências que podemos formar com esses 10 elementos, vamos utilizar o método de formação de sequências que possuem elementos repetidos:

- N^o de sequências de 10 elementos distintos: $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
- N^o de sequências que poderiam ser feitas com as cinco letras V: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
- N^o de sequências que poderiam ser feitas com as três letras A: $3 \times 2 \times 1$
- N^o de sequências que poderiam ser feitas com as duas letras B: 2×1

Total de sequências:

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 2520$$

Vejamos os exemplos a seguir:

Ex 01: Anagrama é uma palavra, tendo sentido ou não, que podemos formar apenas trocando a ordem das letras de uma outra palavra. De acordo com essa definição, quantos são os anagramas da palavra CASA?
Resolução:Se as quatro letras da palavra fossem distintas, teríamos: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ *anagramas.*
Mas, como na palavra casa, se trocarmos as duas letras A de posição o anagrama obtido será igual ao anterior, então para trocarmos as letras A de posição entre si, teremos: $2 \times 1 = 2$, *que resultam em um mesmo anagrama.*
Logo o número total de anagramas que podemos formar com as letras da palavra CASA, é:

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 4 \times 3 = 12$$

Exemplo 02: Maria precisa acessar sua conta corrente num banco que adota senhas de seis dígitos repetidos ou não, para todos os seus clientes. Como Maria gosta do número 7 e do número 9, ela lembra-se que utilizou apenas essas dois dígitos para compor a sua senha e que esses dígitos aparecem em igualdade de vezes. Se o caixa eletrônico desse banco admite que uma pessoa possa fazer tantas tentativas quantas quiser afim de acessar a sua senha e se Maria fez todas as tentativas possíveis acertando apenas na última, quantas vezes ela tentou acessar a sua conta?
Resposta: Uma possível senha para a conta de Maria é 797979, assim basta ela escrever todas as sequências de seis dígitos onde três deles são iguais a 7 e os outros três são iguais a 9. Se todos os dígitos fossem distintos teríamos: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ *senhas. O números de sequências usando apenas os três algarismos 7, é:* $3 \times 2 \times 1 = 6$ *o mesmo ocorre para o algarismo 9:* $3 \times 2 \times 1 = 6$. *Desse modo, utilizando o Método de formação de sequências com elementos repetidos, teremos:*

$$\frac{720}{6 \times 6} = \frac{720}{36} = 20$$

Logo, Maria terá que fazer 20 tentativas, acertando somente na última.

Exemplo 03: Quantas são as soluções da equação linear : x+y+z=5, formadas por números inteiros não negativos?
Resolução:Primeiro lembremos que as soluções de uma equação linear são coordenadas de um ponto, então para distingui-las, além de observarmos os elementos que a compõem

também devemos observar as possíveis ordens desses elementos na solução. Por exemplo, são soluções distintas desta equação:

$$(5,0,0)\,,(0,5,0)\,e\,(0,0,5)$$

Podemos afirmar que o número de soluções do tipo (5,0,0) é igual ao número de sequência possíveis de se formar com 3 elementos onde 2 deles são iguais.

$$\frac{3\times 2\times 1}{2\times 1}=3$$

Outro tipo de solução é $(4,1,0)$*, o número de soluções deste tipo é igual ao número de sequências de três elementos distintos:*

$$3\times 2\times 1=6$$

Além disto teremos $(3,2,0)$ *que geram 6 soluções,* $(3,1,1)$ *que geram 3 soluções e* $(2,2,1)$ *que geram 3soluções. Logo, pelo Princípio Aditivo, teremos:* $3+6+6+3+3=21$ *soluções distintas.*
Obs: Podemos observar que o número de soluções da equação é dado por:

$$\frac{3!}{2!}+3!+3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}$$

$$\frac{3!+2!.3!+2!.3!+3!+3!}{2!}$$

$$\frac{7\times 3!}{2!}$$

Multiplicando-se o numerador e denominador por "5!", obtemos:

$$\frac{7\times 6\times 5!}{2!\times 5!}$$

$$\frac{7!}{2!.5!}$$

que pode ser interpretado como:

$$\frac{(n+k-1)!}{k!.\,(n-1)!}$$

onde a equação pode ser representada por: $x_1+x_2+...+x_n=k$.

Ex 04: De quantos modos podemos comprar 3 sorvetes, de sabores distintos ou não, em uma sorveteria que os oferece em dez sabores distintos?
Resolução: A sorveteria possui 10 sabores distintos, mas queremos 3 sorvetes que podem ser de sabores distintos ou não. Assim representando por $x_1,x_2,\ldots,x_10$ *cada sabor de sorvete teremos a equação:*

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_10=3$$

Então, a partir de (5) podemos afirmar que o número de soluções distintas da equação é:

$$\frac{(10+3-1)!}{3!.\,(10-1)!}=\frac{12!}{3!\times 9!}=\frac{12\times 11\times 10\times 9!}{3\times 2\times 1\times 9!}=\frac{1320}{6}=220$$

Ex 05: Pedrinho possui 10 bolas idênticas e deseja guardá-las em três caixas de brinquedos: uma azul, outra vermelha e a terceira, branca. De quantos modos distintos ele poderá guardar as 10 bolas nessas caixas, se em cada caixa deve haver pelo menos duas bolas?
Resolução: Seja x o número de bolas a mais que serão guardadas na caixa azul, y o número de bolas a mais que serão guardadas na caixa vermelha e z as da caixa branca. Agora, basta encontrarmos o número de soluções não negativas da equação:

$$(x+2)+(y+2)+(z+2)=10 \Longleftrightarrow x+y+z=4$$

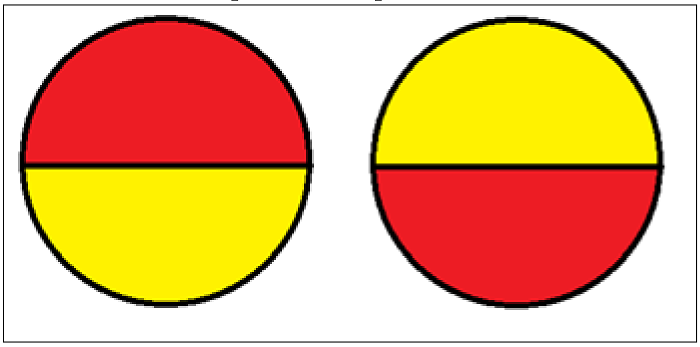
Logo aplicando (5) teremos:

$$\frac{(n+k-1)!}{k!.\,(n-1)!}=\frac{(3+4-1)!}{4!\,(3-1)!}=\frac{6!}{4!2!}=\frac{6\times5\times4!}{4!2\times1}=\frac{30}{2}=15$$

3.7 Método de formação de sequências circulares

Para entendermos bem como funcionam as sequências em círculos, imaginemos a seguinte situação: Uma pessoa deseja pintar um prato dividido igualmente por um de seus diâmetros. Se ela deseja pintar uma das regiões de vermelho e a outra de amarelo, de quantas maneiras distintos poderá fazê-lo?
Aparentemente, teríamos duas maneiras de pintar esse prato, como se pode observar na figura abaixo:

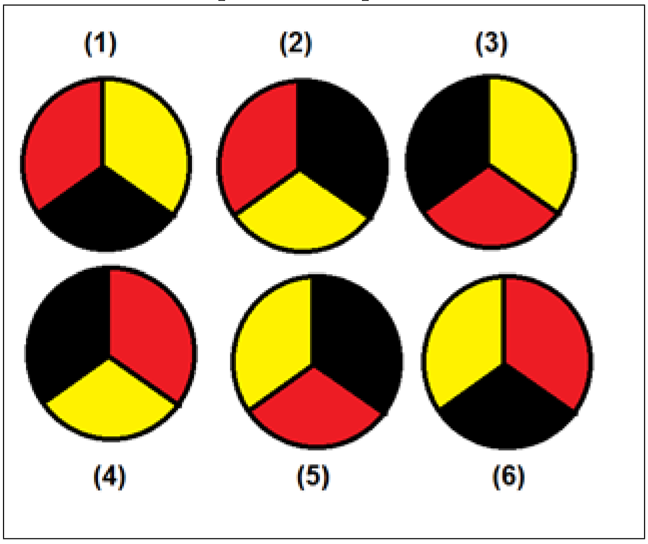
Figura 9: **Maneiras de pintar um prato com duas cores distintas**



Fonte: Permutações circulares.

Mas, podemos perceber que rotacionando um dos círculos, este coincidirá com o outro. Portanto temos apenas 1 maneira para pintar o prato.
E se dividirmos o mesmo prato em três setores iguais e desejarmos pintar cada região nas cores: vermelho, amarelo e preto, de quantas possibilidades terá para pintá-lo?
Aparentemente teríamos 6 possibilidades. Ver figura abaixo:

Figura 10: **Maneiras de pintar um prato com três cores distintas**



Fonte: Permutações circulares.

Mas, se observarmos com atenção, por rotação: os discos 1, 4 e 5 coincidem e o mesmo acontece com os discos: 2, 3 e 6. Portanto temos apenas 2 maneiras de pintarmos esse prato.
Para obtermos sequência distintas, em círculo, devemos fixar um elemento e obtermos todos as sequências possíveis apenas trocando os outros elementos de posição. Isso evitará a coincidência por rotação. Desse modo se considerarmos um prato dividido em n regiões iguais, então para pintarmos esse pretos dispondo de n cores distintas, sendo cada região pintada de uma cor diferente, então teríamos:

$$(n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 = (n-1)!$$

Ex 01: Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?
Resolução:Se em todas as sequências o pai e a mãe devem ficar juntos "lado a lado" então devemos considerar apenas 5 elementos, mas como as pessoas serão dispostas em círculo, fixando um elemento, teremos:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Mas, como temos 2 maneiras de agrupar "pai e mãe" então o número total de possibilidades será:

$$24 \times 2 = 48$$

Ex 02:Em um jantar deve-se acomodar cinco pessoas (A, B, C, D e E) em mesa circular. Sabendo-se que A e B nunca se sentam lado a lado, quantas são as maneiras de se dispor as pessoas na mesa?
Resolução: Primeiro calculemos o número de maneiras de dispormos A, B, C, D e E em círculo. Como vimos anteriormente, teremos:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Como em algumas dessas disposições A e B aparecem lado a lado, o número de maneiras disso acontecer é obtida dispondo quatro elementos em círculo:$3 \times 2 \times 1 = 6$ *possibilidades .Como temos 2 maneiras de trocarmos A e B de posição, entre si, então:*$6 \times 2 = 12$.*Como não queremos A e B lado a lado, então teremos:* $24 - 12 = 12$ *maneiras.*

Ex 03: Três rapazes e três moças serão dispostos em círculo. De quantas maneiras eles podem se organizar de modo que cada moça fique entre dois rapazes?
Resolução:Primeiro suponhamos que apenas os três rapazes formem um círculo, então teremos:$2 \times 1 = 2$*maneiras. Agora para cada uma dessas duas possibilidades teremos três lugares que serão ocupados pelas três moças, então para organizá-las teremos:*$3 \times 2 \times 1 = 6$ *Logo, teremos:*$6 \times 2 = 12$*possibilidades.*

4. MÉTODO DE FORMAÇÃO DE SUBCONJUNTOS.

Conjunto é qualquer grupo não ordenado de elementos. A partir desta definição é que vamos iniciar o estudo sobre um dos tópicos mais importantes da Análise Combinatória, que é a contagem de subconjuntos que podemos formar a partir de um conjunto dado. Nos estudos mais clássicos, esse tópico é chamado de Combinações Simples, mas como mencionado anteriormente queremos dar uma nova roupagem a esse tópico, pois acreditamos que há uma melhor compreensão por parte dos alunos quando tratamos de formar subconjuntos, ou seja, formar partições de um conjunto. Partição de um conjunto é qualquer subconjunto que podemos formar usando-se elementos de um conjunto dado. Assim, por exemplo:$\{1\}, \{1,2\}\, e\, \{1,2,3,4\}$são partições do conjunto$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.Cada partição de um conjunto A é chamada de subconjunto do conjunto A. Desse modo para o estudo das partições de um conjunto A qualquer devemos considerar as seguintes propriedades:

- $\oslash \subset A$
- $A \subset A$

Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B, se todos os elementos do conjunto A pertencem também ao conjunto B. Se um conjunto contém todos os possíveis subconjuntos formados a partir dos elementos de um conjunto A dado, então esse será chamado de conjunto das partes de A.
Exemplo 1: Seja $A = \{a, b\}$, o conjunto das partes de A será dado por:

$$P(A) = \{\oslash, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Exemplo 2: Seja $B = \{a, b, c\}$, então:

$$P(B) = \{\oslash, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Podemos observar que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto e que todo conjunto é subconjunto de si mesmo de acordo com as propriedades mencionadas anteriormente. Lembremos também que dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos, independente da ordem na qual esses elementos possam aparecer, ou seja, dois conjuntos serão considerados distintos se, e somente se, existe algum elemento de um conjunto que não pertence ao outro conjunto. A partir desta definição podemos dizer que:

Um conjunto de dois elementos distintos pode ser escrito de duas maneiras distintas, $\{a, b\} = \{b, a\}$, ou seja, $2 \times 1 = 2$ formas de representar o mesmo conjunto. Logo temos apenas um conjunto.

Um conjuntos de três elementos distintos pode ser escrito de seis maneiras distintas, $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$, ou seja, $3 \times 2 \times 1 = 6$ formas de representar o mesmo conjunto. Logo temos apena um conjunto.

Um conjunto com "p" elementos distintos pode ser escrito de: $p \times (p-1) \times (p-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 = p!$ formas diferentes. Esta definição é de fundamental importância para estudarmos o comportamento desse tipo de agrupamento, pois perceber a diferença entre formar sequências e subconjuntos deve ser um dos primeiros passos na resolução de um problema de combinatória.

4.1 Método de formação de subconjuntos e o estudo das combinações.

Quando usamos, em sala de aula, as palavras "Arranjos" e "Combinações" acreditamos que os alunos estão compreendendo o que queremos dizer, mas muitas vezes isso não é real. Essas palavras parecem não esclarecer o sentido de cada conceito, porém quando usamos as palavras "sequências" e "subconjuntos" elas acabam falando por si, pois esses conceitos já foram definidos em outros estudos e possuem aplicações em vários assuntos. Antes de apresentarmos nosso método, consideraremos a definição de Combinações utilizada em um livro didático do ensino médio:
Combinações Simples – Denominamos combinações simples de n elementos distintos tomados k a k os conjuntos formados de k elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. (MACHADO, p. 342)

Apresentaremos a seguir, dois métodos para calcularmos o número de subconjuntos de p elementos distintos que podemos formar a partir de um grupo de n elementos distintos. Para isso, devemos lembrar que cada sequência de p elementos distintos pode ser escrita de p! modos distintos e que para cada uma dessas p! sequências, apenas 1 subconjunto pode ser formado. Assim o número de subconjuntos de p elementos distintos que podemos formar a partir de um grupo de n elementos distintos disponíveis é igual ao número de sequências de p elementos distintos que podem ser formadas usando-se esses mesmos elementos: $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1)$ ideia apresentada na seção 3.6, dividido por $p!$. Logo o número de conjuntos que podemos formar nessa situação é:

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1)}{p!} \quad (06)$$

Ex 01: Uma escola tem 9 professores de matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 professores de matemática são possíveis?
Resolução: Primeiro calculemos o número de maneiras de formarmos sequências de 4 professores, a partir dos 9 disponíveis, então teríamos: $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ *sequências. Mas, não queremos formar sequências, pois comissões são agrupamentos não ordenados (subconjuntos).*
Desse modo, aplicando (6), obteremos:

$$\frac{9 \times (9-1) \times (9-2) \times (9-4+1)}{4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

Ex 02: Em uma reunião de professores compareceram 10 pessoas. Todas se conhecem. Se as 10 pessoas se cumprimentarem, quantos serão os apertos de mãos?
Resolução: Como um aperto de mãos é um agrupamento não ordenado de duas pessoas, então para resolvermos este problema basta calcularmos a quantidade de subconjuntos de dois elementos distintos que podemos formar a partir dos 10 elementos disponíveis. Assim o número de subconjuntos de dois elementos que podemos formar a partir dos 10 elementos disponíveis é:

$$\frac{10 \times (10-1)}{2!} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = \frac{90}{2} = 45$$

Ex 03: Em uma escola há 5 professores de Matemática e 4 de Português. Quantas comissões de 4 professores podem ser formadas com igual número de professores de Matemática e Português?

Resolução: Como comissões são agrupamentos não ordenados (subconjuntos) então para selecionarmos de professores de Matemática, teremos:

$$\frac{5 \times (5-1)}{2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$$

E para escolhermos os dois de Português, teremos:

$$\frac{4 \times (4-1)}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 122 = 6$$

Como as comissões devem ter 2 professores de Matemática e 2 de Português, o conectivo "e" indicada o produto das possibilidades. Assim teremos: $10 \times 6 = 60$ *comissões.*

Ex 04: Dispondo de "n" pessoas quantos comissões de "p" pessoas podem ser formadas?
Resolução:Calculemos primeiro o número de sequências de "p" pessoas que podemos formar a partir de "n" pessoas.

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $(n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$, *obtemos:*

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}$$

Que é o mesmo que:

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

Como comissões são agrupamentos não ordenados "subconjuntos", sabemos que o número de conjuntos iguais de "p" elementos distintos é dado por:

$$p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = p!$$

Logo o número de comissões de "p" pessoas escolhidas a partir de "n" pessoas, é dado por:

$$\frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} \times \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

4.2 Segundo método de formação de subconjuntos.

Seja X um conjunto dado por $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, o número de subconjuntos vazios que podem ser formados a partir dos elementos do conjunto X é igual a 1, pois $\oslash$ está contido em qualquer conjunto e é único.
O número de subconjuntos unitários que podemos formar a partir dos elementos de X é "n", pois, chamando de X_1 o conjunto formado pelos subconjuntos unitários de X, então:

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

Para formarmos subconjuntos com dois elementos basta considerarmos que temos n subconjuntos de 1 elemento e que para escolhermos o segundo elementos temos as outras "n

– 1” possibilidades. Suponha ainda que para incluirmos um segundo elemento no conjunto $\{x_1\}$, esse poderia aparecer em duas situações distintas, conforme esquema abaixo:

$$\{x_1, -\}\,, \{-, x_1\}$$

Como é indiferente a posição desse segundo elemento no conjunto, então podemos afirmar que sua inclusão será expressa pelo fator: $\frac{n-1}{2}$.
Desse modo o número de subconjuntos distintos de dois elementos distintos que podemos formar a partir de um conjunto com n elementos distintos será dado pelo produto:

$$\frac{n \times (n-1)}{2}$$

Suponha agora que a partir de cada um dos subconjuntos de dois elementos distintos que pudemos formar queiramos incluir um terceiro elemento entre os “n – 2” elementos distintos disponíveis. Ver esquema abaixo:

$$\{x_1, x_2, -\}\,, \{x_1, -, x_2\}\,, \{-, x_1, x_2\}$$

Como é indiferente a posição em que vai figurar esse terceiro elemento podemos afirmar que sua inclusão será dada pelo fator: $\frac{n-2}{3}$
Desse modo o número de subconjuntos distintos de três elementos distintos que podemos formar a partir de um conjunto com n elementos distintos será dado pelo produto:

$$\frac{n \times (n-1)}{2} \times \frac{n-2}{3}$$

De modo geral o número de subconjuntos com “p” elementos distintos \(X_p)” a partir dos “n” elementos do conjunto X é:

$$\frac{n \times (n-1)}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \ldots \times \frac{n-(p-1)}{p}$$
$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!}$$
$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p)!}{p! \times (n-p)!}$$
$$\frac{n!}{p! \times (n-p)!} (7)$$

Ex01: Quantas comissões de três pessoas podemos formar a partir de um grupo contendo 6 pessoas “José, João, Maria, Ana Carolina, Mateus e Chris”? E quantas comissões de 4 pessoas podem ser formadas?
Resolução: Em primeiro lugar calculemos o número de maneiras de formarmos comissões de duas pessoas a partir das seis citadas:

$$\frac{6 \times (6-1)}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Então para cada uma das 15 comissões de duas pessoa temos 4 maneiras de escolhermos uma terceira pessoa e como vimos anteriormente apenas $\frac{1}{3}$ dessas comissões de três pessoas são distintas, então teremos:

$$6 \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{120}{6} = 20$$

Para formarmos comissões de 4 pessoas basta considerarmos as 20 comissões de 3 pessoas, então temos 3 maneiras de escolhermos o quarto elemento e sabemos que de todos os subconjuntos de 4 elementos distintos apenas $\frac{1}{4}$ são distintos, usemos o mesmo princípio aplicado anteriormente:

$$6 \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{360}{24} = 15$$

Ou, aplicando a fórmula encontrada em (7),

$$n(X_p) = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} = \frac{6!}{4! \times (4-2)!} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = \frac{30}{2} = 15$$

Ex02: Marcam-se 10 pontos distintos sobre uma circunferência. Quantos triângulos distintos com vértices nesses pontos, podemos formar?
Resolução: Em primeiro lugar lembremos que nesse problema temos um caso de formações de subconjuntos pois: $\Delta ABC = \Delta ACB = \Delta BAC = \Delta BCA = \Delta CAB = \Delta CBA$. *Então para formarmos triângulos precisamos apenas calcular o número de subconjuntos de 3 elementos distintos. Desse modo teremos:*

$$n(X_3) = 10 \times \frac{9}{2} \times \frac{8}{3} = \frac{360}{3} = 120$$

Ex03: Quantos paralelogramos são determinados por um conjunto de 7 retas paralelas distintas, interceptando um outro conjunto de quatro retas paralelas distintas?
Resolução: Paralelogramo é todo quadrilátero que possui lados opostos paralelos. O número de maneiras de escolhermos duas retas distintas de um conjunto de 7 retas distintas é dado por:

$$\frac{7 \times (7-1)}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

e o número de maneiras de escolhermos duas retas distintas a partir de um conjunto de 4 retas distintas é:

$$\frac{4 \times (4-1)}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Logo, aplicando o Principio Multiplicativo teremos: $21 \times 6 = 126$ paralelogramos distintos.

Ex 04: Qual é o número de diagonais de um polígono de 6 lados "hexágono". E de um polígono de "n" lados?
Resolução: Sejam A, B, C, D, E e F vértices consecutivos de um hexágono. Para encontrarmos o número, de suas diagonais calculemos o número de subconjuntos de dois elementos distintos que podemos formar com esses elementos. Assim:

$$n(X_2) = \frac{6 \times 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

mas desses 15 subconjuntos 6 representam os lados do hexágono, que são AB, BC, CD, DE, EF e FA, então o número de diagonais é: $15 – 6 = 9$.

Consideremos, agora, um polígono de "n" lados cujos vértices consecutivos são: $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$. Para formarmos subconjuntos de dois elementos distintos a partir dos n elementos disponíveis temos:

$$n(X_2) = n \times \frac{(n-1)}{2} = \frac{n \times (n-1)}{2}$$

Assim se "d" é o número de diagonais do polígono, então:

$$d = \frac{n \times (n-1)}{2} - n = \frac{n \times (n-1) - 2n}{2} = \frac{n \times [(n-1) - 2]}{2} = \frac{n \times (n-3)}{2}$$

4.3 Utilizando o jogo da mega sena.

A utilização do exemplo do jogo da loteria "mega sena" pode ser interessante na compreensão de que alguns agrupamentos são obtidos a partir da formação de sequências e outros são formados a partir da formação de conjuntos. Pois é um jogo de loteria, muito conhecido pela população onde devemos escolher seis números que são chamados de "dezenas" de serão sorteados de um conjunto de sessenta "dezenas". Outro fator importante nesse jogo é que uma pessoa será considerada ganhadora se acertar as seis dezenas sorteadas, sem importar a ordem do sorteio de cada dezena. Por isso cada jogo simples da Mega Sena é um subconjunto de seis elementos distintos que pode ser formado a partir de sessenta números distintos disponíveis. Além dessas observações, também vale apena considerar que é um assunto que desperta em sala de aula, o interesse dos alunos. Isso faz esse jogo ser uma boa ferramenta no ensino de Análise Combinatória.
Observemos os exemplos a seguir:
Ex 01: O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de 6 números chamados de dezenas de um conjunto de 60 dezenas disponíveis variando de 01 a 60. Para ser ganhadora da Mega Sena uma pessoa deve acertar os seis números sorteados, não importando a ordem em que eles são sorteados, então temos um caso de formação de subconjuntos de 6 elementos distintos obtidos a partir de um conjunto de 60 elementos distintos disponíveis. Desse modo o número de jogos distintos que podemos formar é dado por :

$$\Longrightarrow n(X_6) = 60 \times \frac{59}{2} \times \frac{58}{3} \times \frac{57}{4} \times \frac{56}{5} \times \frac{55}{6}$$

$$\Longrightarrow n(X_6) = 30 \times \frac{59}{2} \times \frac{58}{6} \times 19 \times 14 \times 11$$

$$\Longrightarrow n(X_6) = 50.063.860$$

ou usando o Princípio Multiplicativo, se os jogos fossem formações de sequências teríamos:

$$60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55$$

Mas, como o número de subconjuntos iguais de 6 elementos é:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Portanto, o número de subconjuntos de 6 elementos distintos obtidos a partir do 60 disponíveis é dado por:

$$\frac{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 59 \times 29 \times 19 \times 14 \times 11 = 50.063.860$$

Ex 02: O jogo da Mega Sena sorteia 6 dentre os números de 1 até 60. Quantas vezes

maior é a chance de ganhar de um jogador que aposta 10 números, em relação a um outro jogador que aposta 8 números?
Resolução: Se uma pessoa aposta 10 números no mesmo cartão e como só precisa acertar 6, basta calcularmos o número de subconjuntos de 6 elementos distintos escolhidos a partir dos 10 disponíveis. Assim teremos:

$$10 \times \frac{9}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{7}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{5040}{24} = 210$$

A pessoa que apostou 8 números, terá:

$$8 \times \frac{7}{2} \times \frac{6}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{56}{2} = 28$$

Assim a pessoa que apostou 10 números terá em relação a quem escolheu 8 números: $\frac{210}{28} = 7,5$ *vezes mais chances.*

Ex 03: Maria sonha em um dia ganhar sozinha uma quantia milionária, na Mega Sena. Para isso toda semana ela faz uma aposta simples, ou seja, 6 dezenas distintas escolhidas de um conjunto de 60 dezenas distintas. Quantas possibilidades existem para Maria acertar a quadra, ou seja, quatro dezenas distintas das seis dezenas escolhidas?
Resposta: Para Maria acertar a quadra ela deverão ser sorteados 4 dos seis números escolhidos e 2 dos números não escolhidos. Assim para sortearmos 4 dos 6 escolhidos, teremos:

$$6 \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{30}{2} = 15$$

E para sortearmos 2 entre os 54 números não escolhidos, teremos:

$$54 \times \frac{53}{2} = 27 \times 53 = 1431$$

Logo, como queremos 4 dos seis escolhidos e 2 dos não escolhidos, o conectivo "e" indica que o total de possibilidades será dado pelo Princípio Multiplicativo:

$$15 \times 1431 = 21465$$

4.4 A diferença entre o conectivo "e"e o conectivo "ou".

Como citamos anteriormente, uma das principais dificuldades dos alunos é compreender a diferença entre arranjos e combinações. Essa dificuldade é tão comum que não percebemos uma outra dificuldade, que é mais simples, porém de grande importância na resolução de problemas de combinatória. É muito comum nas aulas de Análise Combinatória, os alunos perguntarem sobre a finalização da resolução dos problemas. Muitas vezes os problemas envolvem uma quantidade maior de variáveis e faz-se necessário diferenciar a utilização do princípio aditivo (regra do ou) e do princípio multiplicativo (regra do e). A maioria dos alunos não sabe quando é para somar ou para multiplicar e essa simples dificuldade gera erros enormes. O que propomos a partir de agora é a resolução de alguns problemas onde faz-se necessário a aplicação desses princípios, pois os mesmos podem ser utilizados em qualquer tópico de Análise Combinatória. Para isso escolhemos alguns exercícios bem interessantes e que foram propostos em alguns livros didáticos de autores muito utilizados na maioria das escolas brasileiras.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática (vol. único). 1ª Ed. São Paulo. Editora Ática, 2008.

Ex1:Um guardador de carros cuidava de 5 carros e guardou as chaves desses carros em uma gaveta, misturando-as. Agora, ele precisa descobrir qual é a chave de cada um, antes que os donos desses carros cheguem. Qual o número mínimo de tentativas que ele precisará fazer para ter certeza da descoberta das chaves de cada carro?
Resolução: O guardador pode começar a testar todas as chaves no primeiro carro. É óbvio que ele poderá fazer no máximo 4 tentativas, pois se as 4 primeiras chaves não abrirem o carro então é lógico que a quinta chave abrirá. Para abrir o segundo carro ele possui 4 chaves possíveis e terá no máximo 3 chances para abri-lo, pois se as três primeiras não abrirem o carro, a quarta abrirá. Analogamente, para o terceiro serão 2 tentativas, para o quarto será apenas 1 tentativa e para o último carro o número de tentativas será zero, pois só sobrou 1 chave e um carro. Logo, pelo princípio aditivo teremos: $4+3+2+1+0=10$. *Portanto, o guardador de carros fará no máximo 10 tentativas para descobrir as chaves de cada carro.*

Smole, Kátia Stocco e Diniz, Maria Ignez. Matemática: Ensino Médio, vol 2. Editora Saraiva 6ª edição. São Paulo 2010.

Ex2:Usando os algarismos 0,4,5,7 e 9, quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar?
Calculemos primeiro o número de sequências que terminam pelo dígito "0":
$(-,-,0)$, *temos 4 possibilidades para o primeiro dígito e 3 para o segundo. Logo teremos:* $4\times 3=12$ *possibilidades.*
Para as sequências que terminam em 4, teremos:
$(-,-,4)$, *3 possibilidades para o primeiro "já que não pode ser zero" e 3 possibilidades para o segundo. Logo teremos:* $3\times 3=9$ *possibilidades.*
Como os números que queremos podem terminar em "0" ou "4", então o conectivo "ou" indica que para finalizar a resolução devemos aplicar o princípio aditivo. Portanto teremos: $12+9=21$ *números pares de três algarismos distintos.*

MACHADO, Antônio dos Santos. Matemática: ensino médio (vol. Único). Atual. São Paulo, 2012.

Ex3:Empregando os algarismos 1,3,4,5,7 e 8, quantos números naturais de 3 algarismos distintos podemos formar, divisíveis por 2 ou por 5?
Resolução: Um número é divisível por 2 quando é par, neste caso quando terminar em 4 ou 8 e é divisível por 5 quando terminar em 0 ou 5, como não temos o zero, então queremos números de três algarismos distintos que terminam em 4 ou 5 ou 8. A intersecção dos números divisíveis por 2 e 5 são os divisíveis por 10, ou seja, os que terminam em zero. Mas, como não temos o algarismo "0" então os conjuntos são disjuntos. Assim:
$(-,-,4)$, *pelo método de formação de sequências:* $5\times 4=20$,
$(-,-,5)$, *pelo método de formação de sequências:* $5\times 4=20$,
$(-,-,8)$, *pelo método de formação de sequências:* $5\times 4=20$.
Logo, aplicando o princípio aditivo para conjuntos disjuntos, teremos: $20+20+20=60$.

MORGADO, Augusto C. O. et al. Análise Combinatória e Probabilidade. 7ª Ed. Rio de Janeiro. SBM, 2005.

Ex4:De quantos modos podemos colocar 8 Torres iguais em um tabuleiro 8 x 8, de modo que não haja duas Torres na mesma linha ou na mesma coluna? E se as Torres fossem diferentes?
Resolução: Se p_1 *é o número de maneiras distintas de escolhermos uma "casa" de uma das linhas ou colunas do tabuleiro, então* $p_1 = 8$*, ou seja 8 maneiras de escolhermos o 1º elemento de uma sequência de 8 termos onde cada termo é uma casa de uma coluna. Suponhamos que fora escolhida uma casa da primeira coluna, então para a segunda peça não poderemos usar essa coluna e nem a mesma linha da casa onde se encontra a Torre. Assim escolhemos uma outra coluna e colocamos a segunda Torre, então* $p_2 = 7$*. Analogamente para as próximas colunas e linhas,* $p_3 = 6$*,* $p_4 = 5$ *,* $p_5 = 4$ *,* $p_6 = 3$ *,* $p_7 = 2$ *e* $p_8 = 1$*. Portanto, pelo Princípio de formação de sequências e considerando que as Torres sejam iguais, o número de possibilidades será:*

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$$

No segundo caso as Torres são distintas, então para cada uma das 40320 possibilidades encontradas anteriormente teremos:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$$

, maneiras distintas de trocarmos as Torres, entre si, de posição. Portanto, pelo Princípio de formação de sequências e considerando que as Torres sejam distintas, o número de possibilidades será:

$$40320 \times 40320 = 1.625.702.400$$

MORGADO, Augusto C. O. et al. Análise Combinatória e Probabilidade. 7ª Ed. Rio de Janeiro. SBM, 2005.

Ex5:Um vagão do metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 em sentido contrário. De 10 passageiros, 4 preferem se sentar de frente, 3 preferem se sentar em sentido contrário e os demais não tem preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?
Resolução: Primeiro calculemos o número de maneiras de colocarmos as pessoas que desejam se sentar de frente. Como temos 5 bancos e 4 pessoas que desejam se sentar assim, então para a primeira pessoa se sentar, ela terá 5 possibilidades, para a segunda 4, para a terceira 3 e para a quarta 2, formando pelo Princípio de formação de sequências:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

Agora calculemos o número de maneiras das 3 pessoas se sentarem em sentido contrário, pelo princípio de formação de sequências teremos:

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

Só falta colocarmos as 3 pessoas que sobraram nos bancos vazios. Como elas não tem preferências então teremos:

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

Considere agora as sequências do tipo (sentar de frente, sentar em sentido contrário, não tem preferências), então o número de sequências desse tipo é:

$$120 \times 60 \times 6 = 43.200$$

BEDAQUE, Paulo Sérgio...[et al]. Matematikós: ensino médio (vol. único). Editora Saraiva. São Paulo, 2010.

Ex6:De quantos modos 5 rapazes e 5 moças podem se sentar em 5 bancos de dois lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?
Resolução: Uma das possibilidades de organizar essas pessoas nos bancos é:

$$R_1M_1, R_2M_2, R_3M_3, R_4M_4, R_5M_5$$

Como em cada dupla dessas só poderá haver um rapaz, então para posicioná-los teremos:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Agora para posicionar as mulheres há um banco vazio ao lado de cada rapaz. Assim teremos:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Por fim, para cada dupla de um rapaz e uma moça teremos 2 possibilidades para coloca-los em ordem entre si. Assim serão:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

Logo, ao todo teremos:

$$120 \times 120 \times 32 = 460.800$$

MORGADO, Augusto C. O. et al. Análise Combinatória e Probabilidade. 7ª Ed. Rio de Janeiro. SBM, 2005.

Ex7:Quantas são as permutações dos números 1,2,3,4,...,10 nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3?
Resolução: Para que o cinco esteja à direita do 2 e à esquerda do 3, uma das possibilidades será:

$$(-, -, 2, -, 5, -, -, -, -, 3)$$

Agora calculemos o número de maneiras de distribuirmos o 5, o 3 e o 2 nos 10 lugares possíveis:

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

Mas, somente 1/6 dessas possibilidades nos servem, pois a cada 6 sequências possíveis apenas 1 nos servirá:

$$(2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 5, 2), (3, 2, 5), (5, 2, 3), (5, 3, 2)$$

Logo teremos: 720/6 = 120 possibilidades
Agora devemos alocar os 7 elementos restantes nas 7 casa disponíveis. Assim teremos:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

Basta lembrarmos que temos um caso de intersecção pois para ordenar os 10 dígitos temos que ordenar os elementos 2, 3 e 5 e após isso ordenar os outros sete nas casas restantes. Logo teremos:

$$120 \times 5040 = 604800$$

MORGADO, Augusto C. O. et al. Análise Combinatória e Probabilidade. 7ª Ed. Rio de Janeiro. SBM, 2005.

Ex8:Uma fila de cadeiras no cinema tem 20 poltronas. De quantos modos 6 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?
Resolução: Em primeiro lugar calculemos o número de sequências com elementos repetidos que podemos formar com 6 lugares duplos e 8 simples:

$$DDDDDDSSSSSSSS$$

Sequências de 14 letras:

$$14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Sequências de letras "D":

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

, mas somente 1 é valida.

Sequências de letras "S":

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

, mas somente 1 é válida.

Total de sequências:

$$\frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3003$$

Para alocar cada homem ao lado de sua mulher teremos:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$$

Agora para distribuir os 6 casais entre si, teremos:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Como queremos alocar 6 casais em 20 poltronas e cada casal deve estar sempre juntos e não existe uma ordem definida para cada casal, utilizaremos o princípio multiplicativo para finalizar a resolução do problema: Total de possibilidades:

$$3003 \times 64 \times 720 = 138.378.240$$

CESPE/CEBRASPE-CONCURSO PÚBLICO-TRE/MA 2009.

Ex9:Uma cerimônia será realizada em um auditório e as dez cadeiras da primeira fila serão ocupadas por dez autoridades convidadas que confirmaram suas presenças. Por ordem de chegada, o primeiro convidado poderá ocupar qualquer uma das dez cadeiras e cada um dos outros, ao sentar-se, deverá ocupar uma cadeira ao lado de algum convidado já sentado. Nessa situação, o número de modos possíveis de esses convidados ocuparem os dez lugares na primeira fila é igual a:

- (A) 512
- (B) 1.024
- (C) 2.400
- (D) 4.800
- (E) 5.120

Resolução: Suponhamos que o convidado X seja o primeiro a chegar e que tenha escolhido o primeiro lugar à esquerda:

$$(X, -, -, -, -, -, -, -, -, -)$$

Assim existe apenas uma maneira de alocarmos os outros nove candidatos.
Se o candidato X escolher o segundo lugar à esquerda:

$$(-, X, -, -, -, -, -, -, -, -)$$

Então para ocuparmos o lugar à sua esquerda, teremos 9 possibilidades. Os outros oito convidados terão apenas um maneira de sentar-se à direita do convidado X.
Se o candidato X escolher o terceiro lugar à esquerda:

$$(-, -, X, -, -, -, -, -, -, -)$$

Então para ocuparmos os dois primeiros lugares à sua esquerda, teremos:

$$9 \times \frac{8}{2} = 36$$

Os outros sete convidados terão apenas um maneira de sentar-se à direita do convidado X.
Se o candidato X escolher o quarto lugar à esquerda:

$$(-, -, -, X, -, -, -, -, -, -)$$

Então para ocuparmos os três primeiros lugares à sua esquerda, teremos:

$$9 \times \frac{8}{2} \times \frac{7}{3} = 84$$

Os outros seis convidados terão apenas um maneira de sentar-se à direita do convidado X.
Se o candidato X escolher o quinto lugar à esquerda:

$$(-, -, -, -, X, -, -, -, -, -)$$

Então para ocuparmos os quatro primeiros lugares à sua esquerda, teremos:

$$9 \times \frac{8}{2} \times \frac{7}{3} \times \frac{6}{4} = 126$$

Os outros cinco convidados terão apenas um maneira de sentar-se à direita do convidado X.
A partir daí, os cálculos serão os mesmos, pois ao escolher o sexto lugar à esquerda sobrarão quatro lugares à direita e se escolhermos esses lugares para calcularmos o número de agrupamentos iremos obter 126, que é o número de maneiras de ocuparmos os quatro lugares à esquerda e assim por diante.
Logo teremos:

$$1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512$$

5. ANÁLISE DE QUESTÕES DE PROVAS DO ENEM E DA OBM.

Para verificar como a Análise Combinatória vem sendo cobrada dos alunos egressos da educação básica, optamos por analisar dois tipos de provas: ENEM e OBM. Tanto os testes de larga escala quanto as provas do ENEM são aplicados a um grande número de alunos, com o objetivo de avaliar os conhecimentos adquiridos na educação básica. Tais avaliações não são feitas com o objetivo de avaliar determinados grupos de alunos ou escolas, mas sim avaliar qualquer aluno egresso da escola básica que realize as provas, seja para diagnóstico de problemas do ensino ou para uma seleção. Assim, tais testes se revelam úteis para avaliar, com objetividade e imparcialidade, os alunos, as escolas, e as redes de ensino. De certo modo essas avaliações medem de forma mais geral o grau de conhecimento dos alunos da escola básica brasileira frente aos conteúdos contemplados nessas séries, neste caso, a Análise Combinatória. Com o objetivo de verificar como a análise combinatória vem sendo cobrada em tais sistemas de avaliação, optamos por analisar as provas:

- do ENEM(Exame Nacional do Ensino Médio), de 1998 a 2014;
- da Olimpíada Brasileira de Matemática(OBM), de 2012, 2013 e 2014, este exame foi escolhido devido ao fato de avaliar tanto os alunos do ensino médio quanto os alunos do ensino fundamental, separados em nível 1 (6° e 7° anos), nível 2 (8° e 9° anos) e nível 3 (médio).

5.1 Análise de questões da OBM (Olimpíada brasileira de matemática)

Em relação às questões de Análise Combinatória aplicadas em provas da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) um fato importante é que o assunto é abordado em provas a partir do 6º ano (5ª série) e que geralmente os livros didáticos apresentam o conteúdo no 2º ano do ensino médio. Essa observação é muito relevante diante do nosso estudo pois um aluno de nível fundamental geralmente ainda não teve contato com Arranjos, Combinações e Permutações, isso nos mostra que esses tópicos são irrelevantes no estudo de Análise Combinatória, se abordados do modo clássico com uso de fórmulas e regras pré-definidas. Geralmente os alunos do nível 1 (6º s e 7º s anos) e do nível 2 (8º s e 9º anos) são submetidos a questões que abordam um princípio de contagem que não necessariamente o Princípio Multiplicativo, os princípios aditivo e multiplicativo e não diretamente, os Arranjos e as Combinações. Os alunos do nível 3 (ensino médio) são submetidos a questões mais variadas, com maiores graus de complexidade como veremos a seguir. As questões que abordaremos a seguir, são mostradas mediante resolução através dos métodos de formação de sequências e subconjuntos que tanto alunos do nível médio como do fundamental podem utilizar para resolver problemas de Combinatória.

5.1.1 ENEM/2015 Questão-155 Caderno 5-Amarelo Página-24

Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve ele sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente.Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido. De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

- (A) $20 \times (8!) + (3!)^2$
- (B) $8! \times 5! \times 3!$
- (C) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^8}$
- (D) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^2}$
- (E) $\frac{16!}{2^8}$

Rsolução: Como na primeira locação, ele irá alugar um filme de ação e outro de comédia, então ele terá: 8×5 possibilidades, na segunda locação, como ele irá alugar outro de ação e outro de comédia, então o mesmo terá: 7×4 possibilidades e assim por diante, até se acabarem os filmes de comédia. Logo, teremos:

$$(8 \times 5) \times (7 \times 4) \times (6 \times 3) \times (5 \times 2) \times (4 \times 1)$$

Agora, ele irá começar a locar os de drama, mas ele só tem disponíveis, 3 de ação e 3 de drama. Desse modo ele poderá locar um de cada, até acabarem-se as opções simultaneamente. Logo, teremos:

$$(3 \times 3) \times (2 \times 2) \times (1 \times 1)$$

Portanto, ao todo teremos:

$$(8 \times 5) \times (7 \times 4) \times (6 \times 3) \times (5 \times 2) \times (4 \times 1) \times (3 \times 3) \times (2 \times 2) \times (1 \times 1) = 8! \times 5! \times 3!$$

Alternativa (B)

5.1.2 ENEM/2014 Questão-158 Caderno 5-Amarelo Página-25 Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é

- (A) $\frac{62^6}{10^6}$
- (B) $\frac{62!}{10!}$
- (C) $\frac{62!4!}{10!56!}$
- (D) $62! - 10!$
- (E) $62^6 - 10^6$

Resolução: As senhas anteriores são formadas por seis algarismos escolhidos a partir de um connjunto de 10 disponíveis. Assim o total de senhas é:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$$

As novas senhas são formadas por seis símbolos, entre 62 disponíveis (26 letras maiúsculas, 26 letras minúsculas e 10 dígitos).Assim o total de senhas é:

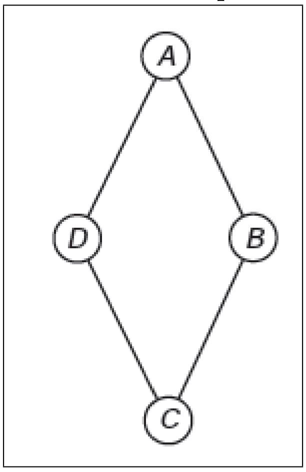
$$62 \times 62 \times 62 \times 62 \times 62 \times 62 = 62^6$$

Desse modo, o coeficiente de alteração recomendada é: $\frac{62^6}{10^6}$ *Alternativa (A)*

5.1.2 ENEM/2014 Questão-161 Caderno 5-Amarelo Página-26

Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma jóia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.

Figura 11: **Jóia com quatro pedras**



Fonte: ENEM/2014 Questão-161 Caderno 5-Amarelo Página-26.

Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

- (A) 6
- (B) 12
- (C) 18
- (D) 24
- (E) 36

Resolução:Suponha que no vértice A, coloquemos a pedra vermelha, então nem B nem D serão vermelhos e C poderá ser vermelho. Assim, teremos 3 possibilidades para o vétice A, 2 para o B , 1 para D e 1 para C, se A e B possuem cores diferentes. Desse modo teremos:

$$3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$$

As 6 possibilidades encontradas servem para dispormos as pedras de A até C ou de C até A, até porque se invertermos a figura, obteremos o mesmo losango. Mas, precisamos agora dispor as pedras de D até B ou de B até D, mesmo caso anterior. Se colocarmos a pedra vermelha no vértice D, nem A nem C poderão ser vermelhas e B poderá ser vermelha. Como isso ocorre também para as outras cores, então teremos 3 possibilidades para D, 2 para A, 1 para C e 1 para B. Desse modo teremos:

$$3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$$

Portanto o total de possibilidades será: $6 + 6 = 12$ *Alternativa (B)*

5.1.3 ENEM/2012 Questão-136 Caderno 5-Amarelo Página-19

O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada. O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

- (A) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- (B) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- (C) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- (D) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- (E) 290 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Resolução:A ideia desta questão é numa primeira etapa, descobrir o objeto escondido entre os 5 disponíveis. Numa segunnda etapa, descobrir quem o escondeu entre os 6 personagens disponíveis e numa terceira e última etapa, em qual cômodo ele foi escondido, entre os 9 disponíveis. Logo, pelo método de formação de sequências, obtemos:

$$5 \times 6 \times 9 = 270$$

Como nós dispomos de 280 alunos, então é lógico que algum deles irá acertar. Pois cada um dará uma resposta diferente e há 10 alunos a mais que o número de respostas.
Alternativa (A)

5.1.4 ENEM/2012 Questão-173 Caderno 5-Amarelo Página-29

O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras. Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012. (adaptado) De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

- (A) 14
- (B) 18
- (C) 20
- (D) 21
- (E) 23

Resolução: O Número de cores primárias é 3, para formarmos cores secundárias a partir dessas três cores primárias é igual ao número de subconjuntos de dois elementos distintos que podemos formar a partir dos três:

$$3 \times \frac{2}{2} = 3$$

Além disso temos o preto e o branco, formando um total de: $3 + 3 + 2 = 8$ *cores. Para as cores primárias e secundárias ainda temos mais duas possibilidades "claro ou escuro", formando um total de:* $(3 + 3) \times 2 = 12$ *cores. Logo, o total de cores que podemos formar neste sistema é :*$8 + 12 = 20$.

5.2 Análise de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática.

5.2.1 OBM/2012 Nível-1 Questão-01

Laurinha tinha em sua carteira somente notas de 10 reais e moedas de 10 centavos. Ela pagou uma conta de 23 reais com a menor quantidade possível de moedas. Quantas moedas ela usou?

- (A) 3
- (B) 6
- (C) 10
- (D) 23
- (E) 30

Comentário: Esta questão foi utilizada no nível 1, para alunos do 6º e 7º anos, e envolve apenas um princípio de contagem e o uso de lógica a fim de que o aluno, além de encontrar soluções para o problema, ainda saiba minimizar o número de moedas utilizadas. Para isso, ele poderia utilizar duas notas de 10,00 e faltariam 3,00 para ser composto com moedas de 0,10. Assim seriam: 2 notas de 10,00 mais 30 moedas de 0,10.
Logo, o número mínimo de moedas é 30.
Alternativa (E)

5.2.2 OBM/2012 Nível-1 Questão-15

Para Mariazinha, existem somente quatro números que ela considera atraentes: 1, 3, 13 e 31. Qualquer outro número será quase atraente somente se puder ser expresso como soma de pelo menos um de cada um dos quatro números atraentes. Por exemplo, 1+3+3+3+13+31 = 54 é quase atraente. No mínimo, quantos números atraentes devem ser somados para mostrarmos que 2012 é um número quase atraente?

- (A) 68
- (B) 70
- (C) 72
- (D) 100
- (E) 2012

Comentário: Esta questão foi apresentada aos três níveis de provas. Do mesmo modo apresentado na questão 01, o aluno poderia pensar em minimizar as soluções possíveis, dessa maneira o mesmo poderia pensar em usar o 31 a maior quantidade de vezes. Como $2012 = 64 \times 31 = 28$, *basta agora escrevermos o 28 como:* $2 \times 13 + 2$ *e o 2 como:* $1 + 1$. *Assim como:* $2012 = 64 \times 31 + 2 \times 13 + 2 \times 1$, *então 0 número 2012 poderá ser escrito com, no mínimo,* $64 + 2 + 2 = 68$ *números atraentes.*
Alternativa (A)

5.2.3 OBM/2012 Nível-1 Questão-15

Quantos números existem entre 23456 e 65432 tais que o produto de seus algarismos é um número ímpar que não é um múltiplo de 7?

- (A) 128
- (B) 256
- (C) 512
- (D) 1024
- (E) 2048

Comentário: Esta é uma questão que envolve necessariamente a análise combinatória e ainda mais interessante é que também foi proposta para alunos de 8º e 9ºs anos, que não possuem análise combinatória em seu conteúdo programático nas respectivas séries. Para resolver o problema basta o aluno pensar que para que o produto dos algarismos seja ímpar é necessário que todos os algarismos sejam ímpares. Assim os números que podemos formar tem que começar com 3 ou 5. Outro detalhe desta questão é que só podemos usar 1,3,5 ou 9 já que o produto não pode ser múltiplo de 7 e além disso, os algarismos podem ser repetidos. Logo, para a quantidade de números que começam com 3, que é igual ao número de sequências do tipo (3,-,-,-,-) temos: $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ *maneiras e para o número de sequências do tipo (5,-,-,-,-) temos:* $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ *Logo, o total de números com essas* *características é:*

$$256 + 256 = 512$$

Alternativa (C)

5.2.4 OBM/2013 Nível-3 Questão 9

Dizemos que duas retas ou segmentos de retas são reversas quando não existe um plano que contém ambas as retas ou segmentos de retas. De quantas maneiras podemos escolher três arestas de um cubo de modo que quaisquer duas dessas arestas são reversas?

- (A) 6
- (B) 8
- (C) 12
- (D) 24
- (E) 36

Comentário: Esta questão foi utilizada no nível 3, para alunos do ensino médio. Na figura abaixo mostramos 1 solução:
Então, o número de possibilidades de escolhermos uma reta vertical é 4, para cada reta vertical temos apenas duas possíveis reversas a ela e finalmente para escolhermos mais uma reta reversa a duas já escolhidas temos apenas 1 possibilidade. Logo, teremos: $4 \times 2 \times 1 = 8$ *possibilidades.*
Alternativa (B)

5.2.5 OBM/2013 Nível-3 Questão-15

De quantos modos podemos distribuir 10 bolas brancas e 8 bolas vermelhas em cinco caixas iguais, de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola e que em cada caixa haja um número diferente de bolas brancas?

- (A) 330
- (B) 348
- (C) 512
- (D) 676
- (E) 900

Comentário: Esta questão foi utilizada no nível 3, para alunos do ensino médio. Esta é uma questão que pode ser resolvida mais "facilmente", se usarmos a fórmula (5) seção 3.7, para descobrirmos o número de soluções da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = k$$

Em primeiro lugar lembremos que temos 10 bolas brancas e cinco caixas iguais, assim para distribuirmos as bolas brancas que são em quantidades distintas, teremos apenas a possibilidade: 4, 3, 2, 1 e 0. Sejam as caixas a, b, c, d, e, assim uma das caixas está vazia. Desse modo para colocarmos as 8 bolas vermelhas nas caixas lembremos que obrigatoriamente uma tem que ser colocada na caixa vazia (obrigação imposta pelo exercício). Logo, supondo que "a" seja a vazia, teremos:

$$(a+1)+b+c+d+e=8?a+b+c+d+e=7$$

Usando (5), teremos:

$$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}=\frac{(5+7-1)!}{7!(5-1)!}=\frac{11!}{7!4!}=\frac{11.10.9.8.7!}{7!4.3.2.1}=330$$

Alternativa (A)

5.3 Análise qualitativa das questões do ENEM e da Olimpíada Brasileira de Matemática

Como pudemos ver nas questões abordadas na seção 5.2, as questões do ENEM abordadas nos últimos anos tem o carácter de desenvolver no aluno egresso do Ensino Médio das escolas brasileiras,o raciocínio. Pudemos perceber uma maior aplicação do "'Princípio Multiplicativo", ao invés de fazer o candidato ficar preso ao uso de fórmulas, limitando o seu pensamento. Mas, o que preocupa é o fato do ensino de Análise Combinatória ficar limitado a exercícios que envolvam poucas variáveis, a raciocínios que não levam o mesmo a deduções mais complexas. Talvez, o fato de a prova de Matemática do Enem possuir 45 questões, as mesmas sejam elaboradas para simples aplicações do raciocíno matemático. Devido a esta última situação, seria mais interessante que a prova tivesse questões para um desenvolvimento um pouco mas profundo do intelecto humano. Por otro lado, temos as questões da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática) com aplicação de técnicas mais elaboradas nas resoluções de problemas de contagem. Pudemos observar a aplicação da Análise Combinatória desde o sexto ano (quinta série), onde a mesma é aplicada a questões que envolvam princípios básicos de contagem e a aplicações de lógica para resolver os mesmos. Quando observamos as questões do nivel 3, percebemos a necessidade de aplicações de técnicas mas aprofundadas. Temos aí, um caminho mais distante da realidade das provas do Enem. A preocupação também se estende aos livros didáticos que estão procurando se adaptar cada vez mais ao ENEM, que não aprofundam os conceitos abordados, fazendo com que a maioria dos alunos fiquem limitados a aplicação de lógica, não conseguindo superar problemas mais complexos de contagem e fazendo com que o mesmo não tenha um desempenho muito bom quando o mesmo se depara com uma prova do tipo (OBM).

6. ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS APLICADOS À ALUNOS.

O primeiro questionário aplicado a um grupo de 30 alunos do ensino médio, teve a intenção de fazer uma sondagem, pois queríamos saber o que alunos do ensino médio que tiveram contanto com a Análise Combinatória, entenderam do conteúdo. Foram apresentadas aos mesmos, questões que possuíam a mesma ideia já encontrada na maioria dos livros didáticos, entre elas questões de níveis um pouco mais complexos para verificar se o mesmo tem condições de interpretar e buscar soluções não convencionais. A maioria das questões são de simples resolução, pois além de abordarem tópicos que os alunos já conhecem elas em sua maioria, exigem apenas um raciocínio combinatório. Queríamos observar quais os métodos que os alunos utilizariam para resolver as questões, se compreenderam bem a diferença entre Arranjos, Permutações e Combinações e se os conhecimentos adquiridos pelos mesmos eram suficientes para resolver questões mais complexas. O questionário foi composto das seguintes questões:

01-Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne e 3 bebidas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne e uma bebida. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido?

02-Quantas sequências de elementos distintos podemos formar com as seguintes condições: o 1º elemento da sequência tem que ser escolhido a partir dos elementos do conjunto $S = \{S_1, S_2\}$*, o 2º elemento tem que ser escolhido a partir dos elementos do conjunto* $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ *e o 3º elemento tem que ser escolhido a partir dos elementos do conjunto* $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ *?*

03-Dispondo dos algarismos 1, 3, 5 e 7, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

04-Dispondo dos elementos do conjunto $A = \{a, b, c, d\}$*, quantas sequências de 3 elementos diferentes podemos formar usando apenas elementos do conjunto* A*?*

05-Dispondo de 4 pessoas entre elas: Aline, Beatriz, Carlos e Dorival, quantas comissões de duas pessoas podemos formar?

06-Seja o conjunto $A = \{6, 7, 8, 9\}$*, quantos subconjuntos do conjunto* A *possuem apenas 2 elementos?*

07-O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de seis dezenas de um conjunto de sessenta possíveis (01, 02, 03, ..., 59, 60). A aposta mínima é feita escolhendo-se seis dessas dezenas. José pensou em oito dezenas diferentes, e resolveu fazer o maior número de apostas mínimas, combinando as oito dezenas escolhidas de todas as maneiras possíveis. Quantas apostas fez José?

08-De quantos modos diferentes pode-se comprar 3 sorvetes em uma sorveteria que os oferece em 10 sabores distintos?

09-João possui 6 caixas, nas cores: azul, verde, vermelho, amarelo, laranja e roxo e 4 bolas iguais. De quantos modos distintos João pode guardar suas 4 bolas nessas caixas colocando no máximo 1 bola em cada caixa?

6.1. Análise qualitativa e quantitativa dos resultados obtidos.

6.1.1 Análise da 1ª e 2ª questão.

01-Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne e 3 bebidas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne e uma bebida. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido?

02-Quantas sequências de elementos distintos podemos formar com as seguintes condições: o 1º elemento da sequência tem que ser escolhido a partir dos elementos do conjunto $S = \{S_1, S_2\}$, o 2º elemento tem que ser escolhido a partir dos elementos do conjunto $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ e o 3º elemento tem que ser escolhido a partir dos elementos do conjunto $B = \{b_1, b_2, b_3\}$?

Análise: Dos 30 alunos que tentaram resolver essas questões, todos tiveram êxito. Desses alunos, 28 utilizaram o princípio multiplicativo de contagem e apenas 2 utilizaram uma árvore das possibilidades. Apesar de todos terem êxito nos resultados, a questão apresentada é de simples raciocínio e os alunos já tiveram contato com uma série de questões idênticas, isso facilitou muito a resolução da questão. O que foi mais interessante nesses resultados foi o fato de que apenas 2 alunos utilizaram um princípio de contagem diferente, a árvore das possibilidades, e justamente o processo que é utilizado na maioria dos livros didáticos para mostrar a ideia inicial do princípio multiplicativo. O que fica claro é que o aluno prefere um caminho mais curto para resolver as questões mesmo que isso implique em um prejuízo no momento de resolver questões mais elaboradas. Outro fato interessante é que um desses dois alunos que utilizou a árvore das possibilidades para resolver a 1ª questão, utilizou o princípio multiplicativo para resolver a 2ª questão, como se as perguntas fossem totalmente distintas, mas elas são idênticas, deixando claro que a maioria dos alunos não refletem no que estão fazendo ao resolver as questões.

6.1.2 Análise da 3ª e 4ª questão

03-Dispondo dos algarismos 1, 3, 5 e 7, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

04-Dispondo dos elementos do conjunto A=a,b,c,d, quantas sequências de 3 elementos diferentes podemos formar usando apenas elementos do conjunto A?

Análise: Nestas questões, dos 30 alunos, 24 acertaram as duas. Nenhum aluno acertou apenas uma, isso se deve ao fato de que as duas perguntas são praticamente iguais, apenas duas das 24 usou "Arranjos" para resolver as duas questões, entre as que erram as duas questões, uma usou "Combinações" outra usou $4! = 4.3.2.1 = 24$*, apesar do resultado ser o mesmo mas o cálculo mostra que o aluno não entendeu o que representa "n!". O fato mais interessante é que apenas um aluno resolveu a questão usando contagem e acertou a questão, isso nos mostra novamente que a maioria dos alunos preferem um cálculo mais rápido, mesmo que não se chegue à conclusão correta a questão. A seguir mostramos o método aplicado pelo aluno citado para resolver a questão:*

$$135, 153, 351, 315, 531, 513, 357, 375, 537, 573, 735, 753$$

$$137, 173, 317, 371, 731, 713/157, 175, 571, 517, 751, 715$$

Total = 24

6.1.3 Análise da 5ª e 6ª questão

05-Dispondo de 4 pessoas entre elas: Aline, Beatriz, Carlos e Dorival, quantas comissões de duas pessoas podemos formar?

06-Seja o conjunto $A = \{6, 7, 8, 9\}$, quantos subconjuntos do conjunto A possuem apenas 2 elementos?

Análise: Nestas questões, todos os alunos acertaram a 5ª questão e apenas dois erraram a 6ª questão, apesar de as perguntas serem praticamente iguais, bastaria que os alunos percebessem que comissões e subconjuntos tem as mesmas características. O aluno que errou a 6ª questão utilizou "Arranjos" para calcular número de subconjuntos, formando uma ideia errada do tema. Todos os alunos que acertaram as questões utilizaram "Combinações", aplicando a fórmula.

6.1.4 Análise da 7ª questão

07-O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de seis dezenas de um conjunto de sessenta possíveis (01, 02, 03, ..., 59, 60). A aposta mínima é feita escolhendo-se seis dessas dezenas. José pensou em oito dezenas diferentes, e resolveu fazer o maior número de apostas mínimas, combinando as oito dezenas escolhidas de todas as maneiras possíveis. Quantas apostas fez José?

Análise: Todos os alunos acertaram esta questão, também usando a fórmula de combinações. Apesar do resultado de questões corretas, esse resultado é preocupante pois ninguém utilizou outro método para se chegar no resultado, ficaram limitados ao uso de fórmulas e aplicações diretas. Isso poderá ser prejudicial na resolução de questões mais elaboradas.

6.1.5 Análise da 8ª questão

08-De quantos modos diferentes pode-se comprar 3 sorvetes, distintos ou não, em uma sorveteria que os oferece em 10 sabores distintos?

Análise: Como já era de se esperar, de acordo com a análise das questões anteriores, mesmo com um grupo selecionado de alunos, nenhum deles chegou à conclusão correta deste exercício. Dos 30 alunos, 24 resolveram a questão como se fosse de "Combinações simples", ou seja, $C_10^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10.9.8.7!}{3.2.1.7!} = 120$. *Ora, se a pergunta fosse, de quantas maneiras podemos comprar três sorvetes de sabores distintos esses alunos estariam certos, os outros três resolveram da seguinte forma:* $10 \times 10 \times 10 = 1000$, *esses estariam certos se a pessoa fosse comprar um sorvete, depois voltaria para comprar outro e finalmente mais uma vez para comprar um terceiro, isso nos mostra novamente que os alunos estão prontos para resolver problemas mais tradicionais onde os mesmos já viram alguns exemplos semelhantes e eles só repetem os métodos. Como nesta questão a pergunta é: de quantas maneiras podemos comprar três sorvetes, a interpretação é que eles poderiam ser de sabores diferentes ou não, poderíamos utilizar os cálculos apresentados na seção 3.6.1.1, cuja resposta é 220. Isso nos faz pensar no que queremos ao ensinar Análise Combinatória, pois problemas de contagem não devem ficar restritos a algumas perguntas de raciocínios mais simples, o* *que queremos, é que os alunos sintam a necessidade de resolver diferentes situações e que procurem comprovar se realmente chegaram a uma resposta correta, que procurem caminhos diferentes para se resolver problemas de contagem, ou seja, que não fiquem limitados. Pois há diferentes tipos de raciocínios nos problemas de contagem.*

6.1.6 Análise da 9ª questão

09-João possui 6 caixas, nas cores: azul, verde, vermelho, amarelo, laranja e roxo e 4 bolas iguais. De quantos modos distintos João pode guardar suas 4 bolas nessas caixas colocando no máximo 1 bola em cada caixa?

Análise: Nesta questão voltamos a ter todas as repostas corretas, comprovando a análise feita no exercício anterior.

6.1.7 Análise qualitativa dos resultados

Podemos observar, pelos resultados acima que os alunos pesquisados compreenderam bem a 1ª questão onde se trabalha a união de três conjuntos disjuntos porém nas questões 02 e 04 boa parte desses alunos erraram as questões pois não perceberam que os conjuntos não são disjuntos pois na 2ª questão o evento A: "escolher uma dama" e o evento B: "escolher uma carta de espadas" possuem intersecção, que é a "dama de espadas", na questão 03 a maioria calculou o número de possibilidades de possibilidades de se retirar a primeira a segunda e a terceira bola, em relação a quantidade mas esqueceram de analisar as cores. Na questão 05 temos uma quantidade muito pequena de acertos provavelmente pelo tipo de enunciado que se refere a uma forma de contagem que se desprende do uso de fórmulas, assim o aluno pesquisado teria que montar sua própria estratégia de contagem e como podemos perceber ao longo deste trabalho esse é um dos fatores que geram mais dificuldades nas resoluções de exercícios de análise combinatória, por isso a necessidade de se rever o ensino e o estudo da análise combinatória, como dito anteriormente nos parece que a maioria dos exercícios dos livros didáticos não impõem situações que explorem o raciocínio do aluno e usam de artifícios pré-programados, onde alguém, geralmente o professor, que conhece o artifício mostra ao aluno e o mesmo terá que a partir daí apenas reproduzir os mesmos artifícios. Na questão 06 os resultados certos aumentam pois o mesmo é um tipo de exercícios de aplicação prática e nas questões 08 e 09 os resultados aparecem numa decrescente e aí temos uma contradição entre as questões 01 e 08, pois cobram o mesmo conceito de união de conjuntos disjuntos, onde todos acertaram a 1ª questão e apenas 5 acertaram a 8ª questão, mostrando a dificuldade que o aluno tem em identificar quando se deve aplicar a adição ou a multiplicação para finalizar o exercício. Boa parte dos alunos resolveram corretamente o exercício 09 usando o princípio multiplicativo e nenhum conseguiu resolver corretamente a questão 10 como já era esperado, apesar de ser um exercícios de nível aparentemente fácil, muitos não perceberam que os sorvetes são distintos e tentaram distribuí-los somente em função da quantidade que cada filho receberia, sem pensar no sabor do sorvete. Com isso podemos perceber uma queda muito acentuada quando comparamos os resultados do questionário I com os resultados do questionário II, por isso devemos ter uma visão mais qualitativa do ensino, o ensino de análise combinatória deve ser feito de como que o aluno se depare com situações onde ele mesmo tenha que montar suas estratégias de contagem. Podemos verificar também dos resultados acima, uma certa dificuldade nas interpretações do enunciados e uma deficiência nos resultados encontrados devido muitas vezes a pressa de se encontrar os resultados, na tentativa de transformar a análise combinatória num assunto mais técnico do que lógico e isso poderá trazer consequências desastrosas na compreensão do assunto.

6.2 Método clássico x método de formação de sequências e subconjuntos.

O primeiro questionário aplicado a 30 alunos selecionados do 3º ano do ensino médio e teve a intenção de verificar se o aluno tem a noção de que algumas perguntas são praticamente iguais, pois o mesmo teria que relacionar arranjos e permutações com sequências e combinações com conjuntos. Também estava proposto no exercício que os alunos fossem submetidos a resolução de exercícios que mais aparecem na maioria dos livros didáticos seguidos de questões de níveis um pouco mais complexos para verificar se o mesmo tem condições de interpretar e buscar soluções não convencionais. Esses 30 alunos já estudaram Análise Combinatória no 2º ano do ensino médio, sabe-se que os mesmos ainda não tiveram contato com a proposta de estudo através dos princípios de contagem, da contagem de sequências e subconjuntos. Assim todos os resultados encontrados são baseados em aplicações de fórmulas de Arranjos, Combinações e Permutações, e no desenvolvimento do raciocínio de cada aluno, algo que não depende somente de técnicas para resolver problemas, mas de uma lógica pessoal. O 2º questionário foi composto de perguntas que implicam nos mesmos raciocínios das perguntas do 1º questionário, mas a diferença é que neste momento os alunos já tiveram contato com os métodos propostos neste trabalho e os dados que serão apresentados fazem um comparativo por tópicos abordados. Por isso apresentaremos por análise duas questões a primeira será sinalizada por Q1 que representará o questionário 1, onde o aluno ainda não teve contato com nossa proposta de estudo e a segunda será sinalizada por Q2 onde o aluno já teve contato com a nova proposta. Iremos avaliar sua preferência, suas compreensões e índices de acertos.

6.2.1 Questionário comparativo por tópico.

Apresentaremos a partir de agora dados comparativos de questionários aplicados a alunos do 3º ano do ensino médio. Para tal, em cada questão o índice Q1 indica que a questão foi apresentada ao aluno antes de o mesmo ter contato com os métodos descritos neste trabalho, ou seja, o aluno já estudou no 2º ano do ensino médio o assunto "Análise Combinatória", mas apenas usando fórmulas de Arranjos, Combinações e Permutações. O índice Q2 indica que o aluno resolveu a questão após ter contato com a nova proposta de estudo de Análise Combinatória, ou seja, através da formação de sequências e subconjuntos e dos princípios de contagem. Pois queríamos avaliar como a aprendizagem se desenvolveu neste intervalo de tempo, quais ideias os alunos mantiveram e quais eles trocaram pelas novas informações e apresentaremos também dados relativos a erros e acertos. Procuramos abordar em cada tópico, questões que abordem o mesmo tópico e com o máximo de proximidade entre os níveis, pois a ideia como dito anteriormente, é verificar o desempenho dos alunos em questões semelhantes após uma nova abordagem do conteúdo.

6.2.1.1 Questão 01.

Q1:Dispondo de 4 pessoas entre elas: João, José, Maria, Ana e Joana, quantas comissões de duas pessoas podemos formar?

Tabela 11: Questão 01 Q-01

Questão 01	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	25	83,3
Nº de erros	5	16,7
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 01 Q-01

Q2-Seja o conjunto $A = \{6, 7, 8, 9, a, b, c, d\}$, quantos subconjuntos do conjunto A possuem apenas 2 elementos?

Tabela 12: Questão 01 Q-02

Questão 01	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	28	93,3
Nº de erros	2	6,7
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 01 Q-02

6.2.1.2 Questão 02

Q1-De quantos modos diferentes pode-se comprar 3 sorvetes de sabores iguais ou não, em uma sorveteria que os oferece em 6 sabores distintos?

Tabela 13: Questão 02 Q-01

Questão 02	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	4	13,3
Nº de erros	26	86,7
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 02 Q-01

Q2-De quantos modos distintos podemos comprar três chocolates distintos ou não, em uma doceria que oferece os seguintes tipos: branco, ao leite, com amêndoas, com amendoim, com caramelo e amargo?

Tabela 14: Questão 02 Q-02

Questão 01	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	16	53,3
Nº de erros	14	46,7
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 02 Q-02

6.2.1.3 Questão 03

Q1-Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1,2,3,4,5 e 6, incluindo sempre o algarismo 5?
Obs: Todos os alunos pesquisados acertaram a resolução desta questão na 1ª pesquisa, então procuramos avaliar o método empregado nas resoluções.

Tabela 15: Questão 03 Q-01

Questão 03	Nº de alunos	Percentual (%)
Arranjos	8	26,7
Formação de sequências	22	73,3
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 03 Q-01

6.2.1.4 Questão 04

Q1:Quantos números naturais de três algarismos distintos começam ou terminam em 5?

Tabela 16: Questão 04 Q-01

Questão 04	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	6	20,0
Nº de erros	24	80,0
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 04 Q-01

Q2:Quantos números de 4 algarismos distintos começam ou terminam com o algarismo 1?

Tabela 17: Questão 04 Q-02

Questão 03	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	20	66,7
Nº de erros	10	33,3
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 04 Q-02

6.2.1.5 Questão 05

Q1:São dados 10 pontos em um plano, entre os quais não há 3 colineares. Quantos triângulos podem ser formados com vértices em 3 desses pontos?

Tabela 18: Questão 05 Q-01

Questão 05	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	18	60,0
Nº de erros	12	40,0
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 05 Q-01

Q2:Sobre uma circunferência marcam-se 12 pontos distintos. Quantos pentágonos convexos podemos formar com vértices nesses pontos? Verifique que o número de pentágonos é igual ao número de heptágonos?

Tabela 19: Questão 05 Q-02

Questão 05	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	28	93,3
Nº de erros	02	6,7
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 05 Q-02

6.2.1.6 Questão 06

Q1 De quanta maneiras diferentes um pai, uma mãe e um filho podem sentar-se em um banco de 6 lugares. De modo que o pai esteja sempre a direita de mão e a mãe a direita do filho?

Tabela 20: Questão 06 Q-01

Questão 05	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	5	16,7
Nº de erros	25	83,3
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 06 Q-01

Q2: Quantos números de 5 algarismos distintos podemos formar usando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 de modo que o 1 apareça sempre a esquerda do 3 e este à esquerda do 5?

Tabela 21: Questão 06 Q-02

Questão 05	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	13	43,3
Nº de erros	17	56,7
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 06 Q-02

6.2.1.7 Questão 07

Q1: Num grupo de 20 pessoas há 6 mulheres. Quantas comissões de 4 pessoas podem ser formadas, de modo que nelas haja pelo menos 1 mulher?

Tabela 22: Questão 07 Q-01

Questão 05	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	3	10,0
Nº de erros	27	90,00
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 07 Q-01

Q2: Em uma escola há 7 professores dos quais apenas 3 ensinam Matemática. Quantas comissões de 5 professores podemos formar de modo que em cada comissão haja no máximo 2 professores de Matemática?

Tabela 23: Questão 07 Q-02

Questão 05	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	22	73,3
Nº de erros	8	26,7
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 07 Q-02

6.2.1.8 Questão 08

Q1: Quantas números de 5 algarismos distintos podemos formar usando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, de modo que o 1 não seja dezena de milhar, nem o 2 seja unidade de milhar, nem o 3 centena, nem o 4 dezena, nem o 5 seja unidade? haja no máximo 2 professores de Matemática?

Tabela 24: Questão 08 Q-01

Questão 05	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	1	3,3
Nº de erros	29	96,7
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 08 Q-01

Q2:Dispondo de 6 pessoas: Ana, Beatriz, Carlos, Daniel, Elias e Fernanda, quantas sequências distintas, dispondo apenas dessas 6 pessoas, podemos formar desde que Ana não seja a primeira, Beatriz não seja a segunda, Carlos não seja o terceiro, Daniel não seja o quarto, Elias não seja o quinto nem Fernanda seja a sexta?

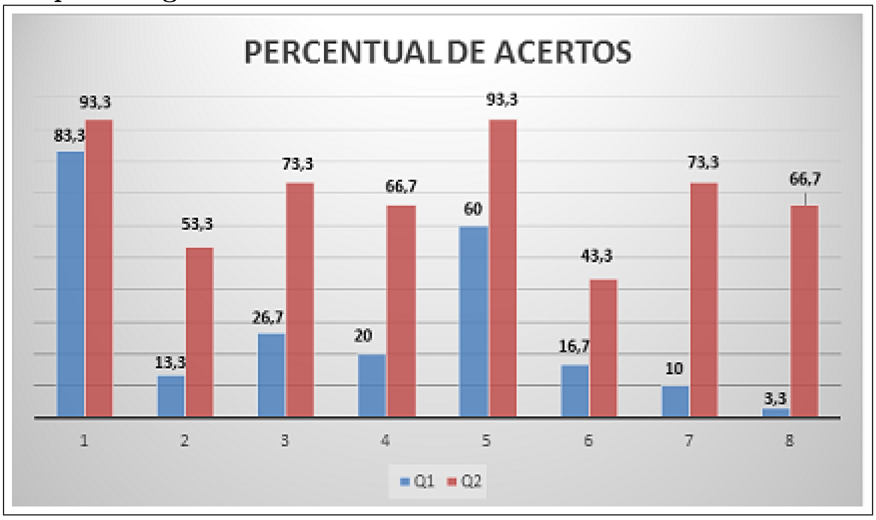
Tabela 25: Questão 08 Q-02

Questão 05	Nº de alunos	Percentual (%)
Nº de acertos	20	66,7
Nº de erros	10	33,3
Total de alunos	30	100,0

Análise quantitativa dos resultados da questão 08 Q-02

6.3 Comparação dos acertos e erros obtidos no questionário 1 e no questionário 2 simultaneamente por um gráfico de colunas.

Figura 12: **Comparação dos acertos e erros obtidos no questionário 1 e no questionário 2 simultaneamente por um gráfico de colunas**



Fonte: Pesquisa de campo.

No gráfico de colunas acima, as "colunas azuis"representam os resultados obtidos pelos alunos na resolução de questões de análise combinatória. Neste momento os alunos pesquisados já haviam estudado o conteúdo, pois os mesmos são alunos de terceiro ano do ensino médio e utilizam na maioria das vezes as fórmulas para calcular arranjos, permutações e combinações. As "colunas vermelhas"representam os resultados obtidos com os mesmos alunos após terem sido treinados de acordo com nossa proposta de ensino. Podemos verificar um crescimento substancial na compreensão de todos os tópicos abordados nas questões. Os alunos agora, perguntam menos sobre a diferença entre arranjos e combinações e estão mais aptos a resolver questões de uma maior complexidade. Essa melhor compreensão nos tópicos, não garante que o aluno irá ter facilidade em resolver questões do conteúdo, mas a intensão não é esta. O que queremos na verdade é uma melhora na interpretação e que o mesmo tenha uma quantidade maior de ferramentas próprias para criar seus esquemas e caminhos no momento da resolução e o que podemos observar nos resultados e que na maioria das vezes essa melhora na qualidade, gera uma elhora ainda maior na resolução correta dos exercícios.

6.4 Questionário destinado à professores do ensino básico.

Este questionário foi dedicado a 20 professores de Matemática do nível fundamental e do nível médio e tem o intuito de identificar alguns dos principais problemas no ensino e aprendizagem de Análise Combinatória. Os professores pesquisados tem atuação em escolas públicas e particulares de ensino, pois este trabalho como dito anteriormente tem a função de contribuir com o ensino de Análise Combinatória nos diferentes níveis de ensino e não nos diferentes estabelecimento de ensino. Por isso a visão do professor diante das habilidades ou das dificuldades de seus alunos é de fundamental importância para identificarmos problemas e procurarmos soluções. Entre conversas informais com colegas "professores"de trabalho, sempre observamos uma preocupação em tentar fazer o aluno commpreender o conteúdo, mas muitas vezes sem êxito. E a afirmação mais frequente é que nimguém consegue aprender de verdade a "tal da Análise Combinatória", term muitas vezes usados pelos colegas. Até mesmo entre os próprios professores temos percebido uma falta de compreensão de alguns tipos de problemas, principalmente aqueles que possuem uma diversidade de variáveis e inferências, tão necessárias para a resolução dos problemas propostos. A seguir, apresentamos as perguntas do questionário seguidas de uma análise quantitativa (gráficos) das respostas e uma análise qualitativa dos resultados.

01-Quais dos tópicos apresentados abaixo seus alunos têm mais dificuldades de entender?

- (A)Princípio Multiplicativo
- (B)Arranjos
- (C)Permutações simples
- (D)Permutações com repetição
- (E)Combinações simples

Tabela 26: Pergunta 01

Pergunta 01	Nº de professores	Percentual (%)
Princípio Multiplicativo	0	0,0
Arranjos	6	30,0
Permutações simples	0	0,0
Permutações com repetição	2	10,0
Combinações simples	12	60,0
Total de professores	20	100,0

Análise quantitativa das respostas dos professores à pergunta 01.

Podemos observar nos dados coletados na primeira pergunta destinadas a professores da educação básica que a maioria dos professores sentem dificuldades em fazer os alunos compreenderem a ideia das Combinações. Acreditamos que seja pela dficuldade que os alunos sentem em entender a formação de agrupamentos onde os elemetos não precisam ser ordenados. Por isso também acreditamos que o fato de o professor apenas mencionar que utilizamos Combinações para calcular o número de agrupamentos onde a ordem dos elementos não é importante,não tem sido suficiente para a compreensão dos alunos. Uma forma interessante de mostrar isso, seri associar as Combinações aos subconjuntos, mostrando, ajudando o mesmo a intuir e deduzir a ideia do conteúdo.

02-Com que frequência os alunos compreendem a diferença entre Arranjos, Permutações e Combinações?

- (A)Sempre
- (B)Quase sempre
- (C)Às vezes

- (D)Quase nunca
- (E)Nunca

Tabela 27: Pergunta 02

Pergunta 02	Nº de professores	Percentual (%)
Sempre	0	0,0
Quase sempre	1	5,0
Às vezes	10	50,0
Quase numca	6	30,0
Nunca	3	15,0
Total de professores	20	100,0

Análise quantitativa das respostas dos professores à pergunta 02.

Em relação a esta pergunta podemos perceber uma relação direta entre as dificuldades de compreensão dos tópicosde Análise Combinatória. A maioria dos professores responderam que às vezes os alunos compreendem os tópicos ou quase nunca compreendem. Isso nos leva à pensar se realmente é necessário que o aluno comece tentando compreender os tópicos ou se seria mais interessante levar o aluno a compreender intuitivamente esses conceitos e associando sempre a formação de sequências e subconjuntos.

03-Com que frequência você mostra para os alunos as fórmulas de Arranjos, Permutações e Combinações para depois resolver os problemas?

- (A)Sempre
- (B)Quase sempre
- (C)Às vezes
- (D)Quase nunca
- (E)Nunca

Tabela 28: Pergunta 03

Pergunta 03	Nº de professores	Percentual (%)
Sempre	15	75,0
Quase sempre	2	10,0
Às vezes	3	15,0
Quase numca	0	0,0
Nunca	0	0,0
Total de professores	20	100,0

Análise quantitativa das respostas dos professores à pergunta 03.

Podemos observar que a maioria dos professores explica o conteúdo apresentando primeiramente as fórmulas de Arranjos, Permutações e Combinações e isso pode ser um dos motivos pelos quais os alunos frequentemente não compreendem o conteúdo, segundo respostas dos professores.

04-Com que frequência você mostra a seus alunos como se obtém as formulas de Arranjos, Combinações e Permutações?

- (A)Sempre
- (B)Quase sempre
- (C)Às vezes
- (D)Quase nunca
- (E)Nunca

Tabela 29: Pergunta 04

Pergunta 04	Nº de professores	Percentual (%)
Sempre	1	5,0
Quase sempre	0	0,0
Às vezes	1	5,0
Quase numca	4	20,0
Nunca	14	70,0
Total de professores	20	100,0

Análise quantitativa das respostas dos professores à pergunta 04.

05-Quais dos itens abaixo, para você, fazem com que o ensino de Análise Combinatória se torne tão difícil?

- (A)o fato de que a análise combinatória não aparece na maioria dos livros didáticos do 6º ao 9º ano, isso faz com que o aluno não tenha um contato mais permanente com o assunto, como acontece com outros assuntos da matemática
- (B)existem poucos recursos didáticos para o ensino de Análise Combinatória, como: jogos, softwares, ...
- (C)os alunos sentem muita dificuldade em "ler" matemática e a Análise Combinatória depende muito de interpretação
- (D)não é difícil fazer os alunos compreenderem os problemas de combinatória.

Podemos perceber nessas respostas que os professores consideram que uma continuidade nas séries desde o fundamental até o médio seria muito importante para uma melhor compreensão do conteúdo. Além disso precisaríamos de mais materiais didáticos para o ensino de combinatória. Ainda boa parte dos professores acreditam que os alunos sentem dificuldades na leitura e interpretação, algo tão necessário para a compreensão do conteúdo.

Tabela 30: Pergunta 05

Pergunta 05	Nº de professores	Percentual (%)
Item A	10	50,0
Item B	5	25,0
Item C	5	25,0
Item D	0	0,0
Total de professores	20	100,0

Análise quantitativa das respostas dos professores à pergunta 05.

06-O que você pensa sobre o ensino de Arranjos, Combinações e Permutações?

- (A)para os alunos é fácil diferenciar essas técnicas de resolução de problemas
- (B)para os alunos é difícil diferenciar essas técnicas de resolução de problemas
- (C)os alunos acham fácil diferenciar essas técnicas, mas no momento em que vão resolver as questões o mesmo não acontece.

Tabela 31: Pergunta 06

Pergunta 06	Nº de professores	Percentual (%)
Item A	4	20,0
Item B	10	50,0
Item C	6	30,0
Total de professores	20	100,0

Análise quantitativa das respostas dos professores à pergunta 06.

07-O que você pensa sobre o ensino de sequência e subconjuntos?

- (A)os alunos entendem a diferença entre sequências e subconjuntos
- (B)os alunos não compreendem a diferença entre sequências e subconjuntos
- (C)não há necessidade de se compreender a diferença entre sequências e subconjuntos
- (D)há necessidade de se mostrar a diferença entre sequências e subconjuntos, mas a maioria dos livros didáticos não fazem isso.

A maioria dos professores pesquisados pensam que o ensino de combinatória através de sequências e subconjuntos, pois essa abordagem já é feita os livros didáticos, mas os mesmos não investem mais intensamente nesses conceitos e se o fizessem seria de grande proveito para umma melhor aprendizagem do conteúdo. E de acordo com o que propomos neste trabalho, vimos que isto é totalmente possível e de fato é muito proveitoso para uma melhor compreensão da Análise Combinatória. E depois que o aluno estiver ambientado

Tabela 32: Pergunta 07

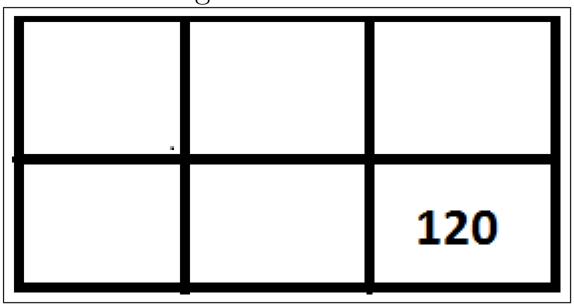
Pergunta 07	Nº de professores	Percentual (%)
Item A	3	15,0
Item B	2	10,0
Item C	0	0,0
Item D	15	75,0
Total de professores	20	100,0

Análise quantitativa das respostas dos professores à pergunta 07.

com o assunto, podemos aplicar fórmulas e conceitos, se necessário.

08-Observe a seguinte questão: “No tabuleiro abaixo escrevemos um número inteiro positivo em cada casa vazia de modo que o produto desses números seja igual ao número já escrito na sexta casa. Sendo os números todos diferentes, de quantas maneiras isto pode ser feito?”

Figura 13: **Tabela**



Fonte: Questão 08.

- A) 6
- B) 12
- C) 20
- D) 60
- E) 120

Na sua opinião, se esta questão for proposta a alunos do 8º ano e 9º ano, ela será considerada:

- (A)de nível fácil
- (B)de nível médio
- (C)de nível difícil

Tabela 33: Pergunta 08

Pergunta 08	Nº de professores	Percentual (%)
Item A	0	0,0
Item B	16	80,0
Item C	4	20,0
Total de professores	20	100,0

Análise quantitativa das respostas dos professores à pergunta 08.

09-Observe a seguinte questão: "O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras." Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012. (adaptado) De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

- a) 14
- b) 18
- c) 20
- d) 21
- e) 23

Na sua opinião, alunos do ensino médio achariam que esta questão é de:

- (A)de nível fácil
- (B)de nível médio
- (C)de nível difícil

Tabela 34: Pergunta 09

Pergunta 09	Nº de professores	Percentual (%)
Item A	0	0,0
Item B	10	50,0
Item C	10	50,0
Total de professores	20	100,0

Análise quantitativa das respostas dos professores à pergunta 09.

10-Possuo três jarros idênticos e desejo ornamentá-los com 18 rosas, sendo 10 vermelhas e 8 amarelas. Desejo que um dos jarros tenha 7 rosas e os outros dois, no mínimo 5 rosas. Cada um deverá ter, pelo menos, duas rosas vermelhas e uma amarela. Quantos arranjos florais poderei fazer usando as 18 rosas?

- A) 10
- B) 11
- C) 12
- D) 13
- E) 14

Em relação a essa questão, na sua opinião, para um aluno do ensino médio ela é considerada:

- (A)de nível fácil
- (B)de nível médio
- (C)de nível difícil

Tabela 35: Pergunta 10

Pergunta 10	Nº de professores	Percentual (%)
Item A	0	0,0
Item B	0	0,0
Item C	20	100,0
Total de professores	20	100,0

Análise quantitativa das respostas dos professores à pergunta 10.

Podemos observar pelas respostas dos professores as últimas três perguntas, que os mesmos consideram de médias a difíceis as questões propostas. Talvez pela quantidade de variáveis implicadas em cada questão, pois como vimos, os alunos tem acesso, nas aulas, a questões mais básicas, perguntas de respostas curtas e quando se deparam com questões que cobram raciocínios além dos que são propostos nos livros didáticos ou que até existem nos livros mas não são abordadas pelos professores em sala de aula,geralmente o aluno não consegue raciocinar o exercício plenamente e fica sujeito a talvez conseguir resolver uma parte do que foi pedido. Po isso defendemos um estudo mais abrangente da Análise Combinatória de modo que o aluno compreenda o enunciado proposto e formle hipóteses e aplique corretamente os cálculos sem ficar limitado a aplicações de meras fórmulas que em certo momento são muito importantes, mas não deveriam ser usadas de início como ferramenta de cálculo mas como resultados de generalizações, se necessário.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na introdução deste trabalho nos propusemos a refletir sobre o que é uma educação de qualidade e como a Análise Combinatória se enquadra neste contexto. Para isso analisamos alguns dos principais livros didáticos que são utilizados no Brasil, no intuito de avaliarmos o que os autores consideram importante e que o aluno da educação básica precisa entender do assunto. Pudemos observar nas análises das questões utilizadas nos livros didáticos que pouco menciona-se sobre Permutações Circulares, Combinações com Repetição, Princípio Aditivo e que a maioria dos autores mostram, no início de cada tópico, uma fórmula para resolver os problemas que serão apresentadas em cada seção, com exceção do livro de (BEDAQUE) que deixa para abordar as fórmulas só no final do conteúdo, quando os alunos já foram induzidos a resolver os problemas sem o uso de fórmulas. Também fizemos uma análise dos métodos utilizados para resolver problemas de Análise Combinatória, pois consideramos desde o início que o método utilizado pode contribuir enormemente para a compreensão do conteúdo. Além disso nos propusemos a desenvolver novas técnicas de resolução de problemas e outras não tão novas, mas que não estão sendo exploradas nas explicações dos conteúdos, pois queremos com este trabalho desmistificar o uso de fórmulas de Arranjos, Permutações e Combinações substituindo-os pelos conceitos de formações de sequências e conjuntos. Apresentamos as fórmulas como consequências "soluções" de problemas de generalização e através de algumas deduções, pois consideramos o uso facultativo de fórmulas, a ideia desde o início é que o aluno pudesse compreender através de uma boa leitura, interpretação e o uso da lógica associada principalmente aos princípios aditivos e multiplicativos, como as técnicas de resoluções de problemas de Combinatória se desenvolvem para posteriormente o aluno estar apto a fazer generalizações.

Procuramos dar algumas respostas as dúvidas mais frequentes dos alunos, como:

i) Se os elementos utilizados na resolução de problemas podem ser repetidos ou não;

ii) Se a ordem dos elementos nos agrupamentos, será importante ou não;

iii) Se para finalizar a resolução do problema, usa-se o método da adição ou da multiplicação.

7.1 Os métodos utilizados no estudo de Análise Combinatória.

Iniciamos pelo Princípio Aditivo de Contagem e posteriormente o Princípio Multiplicativo de Contagem pois acreditamos serem os dois pilares do ensino de Combinatória. Utilizamos o Princípio Multiplicativo para calcular o número de sequências de elementos distintos que podem ser formados a partir de uma certa quantidade de elementos disponíveis e mostramos que o conceito de sequências pode ser usado para substituir os Arranjos, as Permutações Simples, as Permutações com elementos repetidos e as Permutações Circulares, sempre considerando o princípio de que o aluno a partir daí tem uma ideia mais sólida do que está calculando. Logo após fizemos uma abordagem do conceito de subconjuntos e mostramos com calcular o número de subconjuntos a partir da formação de sequências. Após a aplicação desse método mostramos um 2^o método para calcular o número de subconjuntos de elementos distintos que podemos formar a partir de uma certa quantidade de elementos distintos disponíveis. Esses dois métodos foram apresentados em substituição as

Combinações Simples. Pudemos então mostrar que esses conceitos, que são muito abordados no ensino médio, não precisam ser desenvolvidos através um modelo padrão, ou seja, mediante fórmulas. Mas nosso objetivo é mostra que as fórmulas são importantes quando o aluo pode a partir da compreensão do conteúdo desenvolver uma fórmula que pode ser usada para calcular Arranjos, Permutações e Combinações, se for o desejo do mesmo. Encontramos também no livro didático de "BEDAQUE" uma proposta diferente da maioria dos livros didáticos, que segue praticamente no mesmo caminho no qual desenvolvemos nossa pesquisa. Em seu livro os autores utilizam apenas os princípios de contagem ao ponto de que em determinado momento o mesmo cita:

> "Você deve ter observado que até agora não utilizamos fórmulas na resolução dos problemas apresentados. Apenas sugerimos, através dos princípios, a análise das possibilidades, em etapas, e a aplicação constante do princípio fundamental de contagem". (BEDAQUE, p. 331).

7.2 Os questionários destinados a alunos e professores.

Além da análise dos livros didáticos também elaboramos questionários destinados a alunos do terceiro ano do ensino médio e a professores da educação básica. Os questionários destinados aos alunos tiveram o intuito de analisar como os alunos que já tiveram contato com o assunto, antes de serem expostos ao nosso método de ensino, lidavam com problemas de Combinatória e o que aconteceria com o seu desenvolvimento após um treinamento no novo método. Selecionamos um grupo de 15 alunos nos dois primeiros questionários e pudemos ver que os alunos tiveram um desempenho muito bom no primeiro questionário que continha tipos de questões abordadas nos livros didáticos com maior frequência, mas já pudemos perceber uma queda acentuada quando analisamos a questão nº 08 do mesmo questionário, ou seja, nenhum aluno conseguiu resolver a questão que era de “permutações com repetição”. No segundo questionário que tinha o objetivo de avaliar o conhecimento dos alunos em relação ao Princípio Aditivo e ao Princípio Multiplicativo e pudemos perceber uma queda acentuada nos exercícios que fogem dos padrões mais encontrados nos livros didáticos. A questão nº 05 do questionário, poucos alunos conseguiram resolvê-la e muitos nem conseguiram montar uma estratégia para resolvê-la, é uma questão que não adianta saber uma fórmula para calcular: Arranjos, Combinações ou Permutações e depende muito que o aluno monte sua própria estratégia e acreditamos que esse seja um dos motivos pelos quais os acertos foram tão poucos e por isso propomos uma renovação nos métodos de ensino de combinatória. Aplicamos também mais dois questionários com questões semelhantes e chamamos de questionários comparativos, pois queríamos avaliar a diferença de compreensão do conteúdo antes e depois do ensino através dos nossos métodos e pudemos perceber nos gráficos uma evolução em todos os tópicos abordados no questionário, mostrando que os alunos precisam compreender o assunto, serem treinados e o mais ele conseguirá desenvolver. Pudemos perceber também que a maioria dos alunos passaram a resolver as questão sem usar fórmulas, mas os que utilizaram não tiveram prejuízo no raciocínio, pois passaram a utilizá-las compreendendo a ideia de cada uma delas. No questionário aplicado a professores de nível básico, mostraram que os mesmos sentem mais dificuldades em fazer os alunos compreenderem a diferença entre Arranjos e Combinações e que a maioria começa a ensinar cada tópico aplicando fórmulas desde o início de cada assunto, com o intuito de que os alunos decorem-nas. Também pudemos observar que os professores acham que o aluno deve compreender bem a diferença entre Sequências e Subconjuntos, mas a maioria dos livros didáticos não colaboram para isto.

7.3 Contribuições da pesquisa.

Acreditamos que nossa pesquisa possa contribuir com alunos e professores da educação básica, pois são muitos os relatos de professores sobre a dificuldade que seus alunos têm em compreender a Análise Combinatória.Nosso trabalho permite que o professor possa ter uma boa ideia de como este conteúdo vem sendo trabalhado nos livros didáticos dos autores mais utilizados nas escolas brasileiras, tendo em vista os métodos utilizados, os tópicos abordados e o número de questões de cada tópico, fazendo com que o professor tendo em mãos esses dados possa se planejar de modo mais adequado para ministrar suas aulas com seus alunos e possa desenvolver seu trabalho de modo a preencher as lacunas deixadas pelos livros didáticos. Para os alunos, o nosso trabalho servirá como um apoio a resolução de questões mais complexas com uma nova abordagem, muitas vezes usando uma linguagem mais simples, sempre buscando explorar bem o conteúdo de acordo com as propostas dos PCN's, com o nível das questões do ENEM e das Olimpíadas Brasileiras de Matemática. Propomos também o esclarecimento das principais dúvidas da maioria dos alunos em relação a resolução dos problemas de Combinatória, com isso acreditamos que o aluno terá, em nosso trabalho, um material de apoio para uma melhor compreensão do assunto, permitindo com que o mesmo possa se desenvolver cada vez mais. Essas preocupações que norteiam esse trabalho, nos fizeram acreditar cada vez mais numa nova proposta para um melhor estudo da Análise Combinatória, pois não é difícil perceber a importância deste conteúdo em nossas vidas, suas aplicações no cotidiano e sua beleza ao nos propor desafios que nos ajudam a evoluir em algo tão importante para nossas vidas e ao mesmo tempo tão abstrato; o pensamento.

REFERÊNCIAS

[1] ALVES, Renato de Carvalho. **O ensino de Análise Combinatória na educação básica e a formação de professores**. Dissertação de Mestrado-UFRJ, 2010.

[2] BARROSO, Juliane Matsubara. **Matemática: construção e significado**. Moderna. São Paulo, 2008.

[3] BARROSO, Juliane Matsubara. **Matemática: Conexões com a Matemática (V. único)**. Moderna. São Paulo, 2012.

[4] BEDAQUE, Paulo Sérgio...et al. **Matematikós: ensino médio (vol. único)**. Editora Saraiva. São Paulo, 2010.

[5] BEZERRA, Manoel Jairo. **Matemática para o ensino médio**. Scipione. São Paulo, 2001.

[6] BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Brasília. MEC/SEB, 2006.

[7] BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília. MEC/SEB, 1998.

[8] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática (vol. único)**. 1ª Ed. São Paulo. Editora Ática, 2008.

[9] FERNANDEZ, Vicente Paz e YOUSSEF, Antônio Nicolau. **Matemática para o 2º grau – curso completo**. Scipione. São Paulo, 1994

[10] IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo, DEGENSZAJN, David e PÉRIGO, Roberto. **Matemática (V. único)**. Atual. São Paulo 2002

[11] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol.2. 1ª Ed. Rio de Janeiro. SBM, 2002.

[12] MACHADO, Antônio dos Santos. **Matemática: ensino médio (vol. Único)**. Atual. São Paulo, 2012.

[13] MORGADO, Augusto C. O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 7ª Ed. Rio de Janeiro. SBM, 2005.

[14] PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda. **O ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema**. Dissertação de Mestrado-UEPA, 2008

[15] RODRIGUES, Neidson. **Lição do Príncipe e outras Lições**. Cortez. São Paulo 1999.

[16] SILVEIRA, Ênio e MARQUES, Cláudio. **Matemática: Compreensão e prática**.

Moderna. São Paulo, 2013.

[17] SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. **Matemática: ensino médio**. Saraiva (vol. 02). São Paulo, 2010

Anexo A

QUESTIONÁRIO DE SONDAGEM

01-Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne e 3 bebidas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne e uma bebida. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido?

02-Quantas sequências de elementos distintos podemos formar com as seguintes condições: o 1º elemento da sequência tem que ser escolhido a partir dos elementos do conjunto $S = \{S_1, S_2\}$, *o 2º elemento tem que ser escolhido a partir dos elementos do conjunto* $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ *e o 3º elemento tem que ser escolhido a partir dos elementos do conjunto* $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ *?*

03-Dispondo dos algarismos 1, 3, 5 e 7, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

04-Dispondo dos elementos do conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, *quantas sequências de 3 elementos diferentes podemos formar usando apenas elementos do conjunto* A*?*

05-Dispondo de 4 pessoas entre elas: Aline, Beatriz, Carlos e Dorival, quantas comissões de duas pessoas podemos formar?

06-Seja o conjunto $A = \{6, 7, 8, 9\}$, *quantos subconjuntos do conjunto* A *possuem apenas 2 elementos?*

07-O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de seis dezenas de um conjunto de sessenta possíveis (01, 02, 03, ..., 59, 60). A aposta mínima é feita escolhendo-se seis dessas dezenas. José pensou em oito dezenas diferentes, e resolveu fazer o maior número de apostas mínimas, combinando as oito dezenas escolhidas de todas as maneiras possíveis. Quantas apostas fez José?

08-De quantos modos diferentes pode-se comprar 3 sorvetes em uma sorveteria que os oferece em 10 sabores distintos?

09-João possui 6 caixas, nas cores: azul, verde, vermelho, amarelo, laranja e roxo e 4 bolas iguais. De quantos modos distintos João pode guardar suas 4 bolas nessas caixas colocando no máximo 1 bola em cada caixa?

Anexo B

QUESTIONÁRIO APLICADO À PROFESSORES DE NÍVEL FUNDAMENTAL, MÉDIO OU SUPERIOR.

01-Quais dos tópicos apresentados abaixo seus alunos têm mais dificuldades de entender?

- (A)Princípio Multiplicativo
- (B)Arranjos
- (C)Permutações simples
- (D)Permutações com repetição
- (E)Combinações simples

02-Com que frequência os alunos compreendem a diferença entre Arranjos, Permutações e Combinações?

- (A)Sempre
- (B)Quase sempre
- (C)Às vezes
- (D)Quase nunca
- (E)Nunca

03-Com que frequência você mostra para os alunos as fórmulas de Arranjos, Permutações e Combinações para depois resolver os problemas?

- (A)Sempre
- (B)Quase sempre
- (C)Às vezes
- (D)Quase nunca
- (E)Nunca

04-Com que frequência você mostra a seus alunos como se obtém as formulas de Arranjos, Combinações e Permutações?

- (A)Sempre
- (B)Quase sempre
- (C)Às vezes
- (D)Quase nunca
- (E)Nunca

05-Quais dos itens abaixo, para você, fazem com que o ensino de Análise Combinatória se torne tão difícil?

- (A)o fato de que a análise combinatória não aparece na maioria dos livros didáticos do 6º ao 9º ano, isso faz com que o aluno não tenha um contato mais permanente com o assunto, como acontece com outros assuntos da matemática
- (B)existem poucos recursos didáticos para o ensino de Análise Combinatória, como: jogos, softwares, ...
- (C)os alunos sentem muita dificuldade em "ler" matemática e a Análise Combinatória depende muito de interpretação
- (D)não é difícil fazer os alunos compreenderem os problemas de combinatória.

06-O que você pensa sobre o ensino de Arranjos, Combinações e Permutações?

- (A)para os alunos é fácil diferenciar essas técnicas de resolução de problemas
- (B)para os alunos é difícil diferenciar essas técnicas de resolução de problemas
- (C)os alunos acham fácil diferenciar essas técnicas, mas no momento em que vão resolver as questões o mesmo não acontece.

07-O que você pensa sobre o ensino de sequência e subconjuntos?

- (A)os alunos entendem a diferença entre sequências e subconjuntos
- (B)os alunos não compreendem a diferença entre sequências e subconjuntos
- (C)não há necessidade de se compreender a diferença entre sequências e subconjuntos
- (D)há necessidade de se mostrar a diferença entre sequências e subconjuntos, mas a maioria dos livros didáticos não fazem isso.

08-Observe a seguinte questão: "No tabuleiro abaixo escrevemos um número inteiro positivo em cada casa vazia de modo que o produto desses números seja igual ao número já escrito na sexta casa. Sendo os números todos diferentes, de quantas maneiras isto pode ser feito?"

Figura 14: Tabela

		120

Fonte: Questão 08.

- A) 6
- B) 12

- C) 20
- D) 60
- E) 120

Na sua opinião, se esta questão for proposta a alunos do 8º ano e 9º ano, ela será considerada:

- (A)de nível fácil
- (B)de nível médio
- (C)de nível difícil

09-Observe a seguinte questão: "O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras." Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012. (adaptado) De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

- a) 14
- b) 18
- c) 20
- d) 21
- e) 23

Na sua opinião, alunos do ensino médio achariam que esta questão é de:

- (A)de nível fácil
- (B)de nível médio
- (C)de nível difícil

10-Possuo três jarros idênticos e desejo ornamentá-los com 18 rosas, sendo 10 vermelhas e 8 amarelas. Desejo que um dos jarros tenha 7 rosas e os outros dois, no mínimo 5 rosas. Cada um deverá ter, pelo menos, duas rosas vermelhas e uma amarela. Quantos arranjos florais poderei fazer usando as 18 rosas?

- A) 10
- B) 11
- C) 12
- D) 13
- E) 14

Em relação a essa questão, na sua opinião, para um aluno do ensino médio ela é considerada:

- (A)de nível fácil
- (B)de nível médio
- (C)de nível difícil

Anexo C

QUESTIONÁRIOS COMPARATIVOS

QUESTIONÁRIO DE ABORDAGEM DOS ALUNOS, ANTES DO MÉTODO DE FORMAÇÃO DE SEQUÊNCIAS E SUBCONJUNTOS.

01-Dispondo de 4 pessoas entre elas: João, José, Maria, Ana e Joana, quantas comissões de duas pessoas podemos formar?

02-De quantos modos diferentes pode-se comprar 3 sorvetes de sabores iguais ou não, em uma sorveteria que os oferece em 6 sabores distintos?

03-Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1,2,3,4,5 e 6, incluindo sempre o algarismo 5?

04-Quantos números naturais de três algarismos distintos começam ou terminam em 5?

05-São dados 10 pontos em um plano, entre os quais não há 3 colineares. Quantos triângulos podem ser formados com vértices em 3 desses pontos?

06-De quanta maneiras diferentes um pai, uma mãe e um filho podem sentar-se em um banco de 6 lugares. De modo que o pai esteja sempre a direita de mão e a mãe a direita do filho?

07-Num grupo de 20 pessoas há 6 mulheres. Quantas comissões de 4 pessoas podem ser formadas, de modo que nelas haja pelo menos 1 mulher?

08-Quantas números de 5 algarismos distintos podemos formar usando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, de modo que o 1 não seja dezena de milhar, nem o 2 seja unidade de milhar, nem o 3 centena, nem o 4 dezena, nem o 5 seja unidade? haja no máximo 2 professores de Matemática?

QUESTIONÁRIO DE ABORDAGEM DOS ALUNOS, APÓS ESTUDO DO MÉTODO DE FORMAÇÃO DE SEQUÊNCIAS E SUBCONJUNTOS.

01-Seja o conjunto $A = \{6, 7, 8, 9, a, b, c, d\}$, quantos subconjuntos do conjunto A possuem apenas 2 elementos?

02-De quantos modos distintos podemos comprar três chocolates distintos ou não, em uma doceria que oferece os seguintes tipos: branco, ao leite, com amêndoas, com amendoim, com caramelo e amargo?

03-Quantos números de 4 algarismos distintos começam ou terminam com o algarismo 1?

04-Sobre uma circunferência marcam-se 12 pontos distintos. Quantos pentágonos convexos podemos formar com vértices nesses pontos? Verifique que o número de pentágonos é igual ao número de heptágonos?

05-Quantos números de 5 algarismos distintos podemos formar usando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 de modo que o 1 apareça sempre a esquerda do 3 e este à esquerda do 5?

06-Em uma escola há 7 professores dos quais apenas 3 ensinam Matemática. Quantas comissões de 5 professores podemos formar de modo que em cada comissão haja no máximo 2 professores de Matemática?

07-Dispondo de 6 pessoas: Ana, Beatriz, Carlos, Daniel, Elias e Fernanda, quantas sequências distintas, dispondo apenas dessas 6 pessoas, podemos formar desde que Ana não seja a primeira, Beatriz não seja a segunda, Carlos não seja o terceiro, Daniel não seja o quarto, Elias não seja o quinto nem Fernanda seja a sexta?