

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
DOUTORADO

IVAN ARAÚJO CORDEIRO DE ALBUQUERQUE

O CONCEITO DE ÂNGULO: REFLEXÕES COM ESTUDANTES
INGRESSANTES NO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

MACEIÓ
2017

IVAN ARAÚJO CORDEIRO DE ALBUQUERQUE

O CONCEITO DE ÂNGULO: REFLEXÕES COM ESTUDANTES INGRESSANTES NO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Tese apresentada à banca examinadora da Universidade Federal de Alagoas, do Programa de Pós-Graduação em Educação, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientadora: Profa. Dra. Mercedes Bêta Quintano de Carvalho Pereira dos Santos.

MACEIÓ
2017

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas

Biblioteca Central

Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

A345c Albuquerque, Ivan Araújo Cordeiro de.
 O conceito de ângulo : reflexões com estudantes ingressantes no curso de
Licenciatura em Matemática / Ivan Araújo Cordeiro de Albuquerque. – 2017.

155 f. : il.

Orientadora: Mercedes Bêta Quintano Carvalho Pereira dos Santos.

*Tese (doutorado em Educação) – Universidade Federal de Alagoas. Centro
de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação, Maceió, 2017.*

Bibliografia: f. 151-155.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Geometria. 3. Ângulos. 4. Professores –
Formação. I. Título.

CDU: 514: 371.315

Universidade Federal de Alagoas
Centro de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação

O CONCEITO DE ÂNGULO: REFLEXÕES COM ESTUDANTES INGRESSANTES NO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

IVAN ARAÚJO CORDEIRO DE ALBUQUERQUE

Tese de Doutorado submetida à banca examinadora, já referendada pelo
Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de
Alagoas e aprovada em 11 de setembro de 2017.

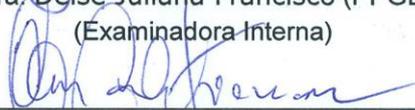
Banca Examinadora:



Profa. Dra. Mercedes Bêta Quintano De Carvalho Pereira Dos Santos
(PPGE/UFAL)
(Orientadora)



Profa. Dra. Deise Juliana Francisco (PPGE/UFAL)
(Examinadora Interna)



Prof. Dr. Elton Casado Fireman (PPGE/UFAL)
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra (PPGECIM/UFAL)
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Marcelo Almeida Bairral (UFRRJ)
(Examinador Externo)

À minha mãe, Norma Araújo de Albuquerque (*in memoriam*)
A meu pai, Inácio Cordeiro de Albuquerque
Sem os quais não teria tido a oportunidade dessa existência.

A você, Maria do Carmo Peixoto de Lima,
Esposa, companheira, amiga,
Ouvido, voz e luz
Tangendo solidão e escuro
Para léguas do meu caminho,
Porto seguro!

.
A Danilo Peixoto Guimarães dos Santos, filho, sobrinho, neto,
pela oportunidade de exercer o amor e pelo apoio em momentos
cruciais do meu trajeto.

A meu irmão Ivando.
Às minhas irmãs: Ivone, Nelbe e Normery.
Aos meus sobrinhos: Ítalo France, Leonardo Túlio, Raissa
Morgana, Rossana Manuela, Thatiane Munick e Ygor Manoel.
A dois homens, tão fundamentais em minha adolescência: João
Franco Pacheco, (*in memoriam*) e João Franco Pacheco Filho,
(*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

A DEUS, axioma fundamental de toda existência e não existência, que pelo seu amor permitiu-me chegar até aqui.

À Prof.^a. Dr.^a. Mercedes Bêta Quintano de Carvalho Pereira dos Santos, pela dedicação, pela tolerância, pela presença e pela mão estendida com que me orientou por esses caminhos da educação matemática, conduzindo-me até aqui.

A Nataly Almeida de Castro, que doando do seu tempo e com muita competência socorreu-me naquele momento decisivo.

Ao corpo Docente e Administrativo, que mantêm o funcionamento do PPGE-UFAL.

Aos meus mestres Prof.^a. Dr.^a. Kátia Maria Silva de Melo, Prof.^a. Dr.^a. Lenira Haddad, Prof. Dr. Luís Paulo Leopoldo Mercado, Prof.^a. Dr.^a. Maria do Socorro Aguiar de Oliveira Cavalcante, e Prof. Dr. Walter Matias Lima que ao comunicarem de suas experiências e conhecimentos ampliaram nossos horizontes na construção do conhecimento.

À banca examinadora composta pelos professores e professoras: Dr. Carloney Alves de Oliveira, Dr.^a. Deise Juliana Francisco, Dr. Ediel Azevedo Guerra, Dr. Elton Casado Fireman, e Dr. Marcelo Almeida Bairral.

Aos colegas que compõem o Instituto de Matemática da UFAL, pelo apoio e incentivo, tão necessários.

Às colegas Juliane dos Santos Medeiros, Clésia Maria Hora Santana e Lílian Kelly de Almeida Figueiredo Voss pela generosidade, companheirismo, incentivo e apoio.

A Maria Patrícia Félix pelo apoio, presença e colaboração em momentos decisivos.

A Rosemeire Roberta de Lima, pelas conversas pertinentes, sempre bem-humoradas, e pela ajuda.

Aos alunos e professores do curso de licenciatura do IM – UFAL que colaboraram voluntariamente possibilitando este estudo.

Ao Prof. Me. Ewerton Roosevelt Bernardo da Silva pela atenção, ouvidos atentos nas conversas em que o tema era: ângulo.

A todos aqueles que na condição de aluno me deram a oportunidade de aprender, na prática docente, restritas à sala de aula ou fora dela, que o ensinar e o aprender ocorrem também na interação dialógica professor-aluno.

Aos funcionários e bolsistas que compõem o setor administrativo, as coordenações dos cursos, a biblioteca setorial.

Ao pessoal que presta serviços no Instituto de Matemática tornando o ambiente físico propício e ecologicamente adequado.

Uma consciência crítica deve desconfiar da evidência imediata do sentido que ela entende e da qual se apropria naturalmente. Ela deve aceitar que esse sentido possa ser posto à distância pelo desvio decapante de uma explicação que denuncie as ilusões da consciência. (GRONDIN, 2012, p. 103).

RESUMO

Esta pesquisa é fruto das minhas reflexões sobre o ensino do conceito de ângulo na formação inicial dos alunos, futuros professores de matemática. A partir de um estudo exploratório em que participaram, voluntariamente cinco alunos da disciplina Projetos Integradores 1, buscamos investigar sobre as definições de ângulo na geometria euclidiana plana elementar identificando as ambiguidades e incoerências que apresentam o que nos levou a propor uma definição que pudesse melhor atender às necessidades dos futuros professores de matemática. Para tanto, após trabalho realizado na disciplina em que se discutiu o conceito de ângulo, foram realizadas cinco entrevistas semi-estruturadas gravadas em áudio e transcritas para posterior análise. Subsidiaram as análises das entrevistas Bardin (2011), Fiorentini (2009), Tardif (2011), D'Ambrosio (1996), Shulman (1986), Ponte (2009) e Lorenzato (2010). As definições analisadas vieram de Euclides (2009), Hilbert (1996), Barbosa (1985), Muniz Neto (2013) e Gomes & Ralha (2005). Os aspectos matemáticos tiveram nos autores: Halmos (1974), Lima (1970), Monteiro (1971) e Dean (1974) seus pilares. Para ancorar as análises sob os aspectos do ensino de matemática Lorenzato, Fiorentini, Bicudo & Borba (2004) e D'Ambrosio serviram de referência. Os dados revelaram o quanto o conceito de ângulo é complexo, tanto do ponto de vista matemático, pelas várias concepções em que é apresentado, e também pela grande quantidade de definições em uso. Em consequência, seu ensino e sua aprendizagem encontram obstáculos para que se possa fazer compreendê-lo, e compreender. Depreendeu das análises das definições tratadas uma proposta de definição, isenta das dificuldades apontadas nas análises dos dados colhidos, que é apresentada nas considerações finais. Apêndices foram incluídos com a finalidade de possibilitar uma melhor compreensão, fora do senso comum, do que é uma rotação bem com se faz uma sugestão de abordagem da definição proposta no que diz respeito a seu ensino, a luz, das idéias trazidas por Edwards (1984).

PALAVRAS CHAVE: Ensino, Geometria, Ângulo, Formação, Professor.

ABSTRACT

This research is a result of my reflections about teaching the concept of angle in mathematics students' initial formation - future mathematics teachers. From an exploratory study in which five students of 'Integrating Projects 1' voluntarily participated, we sought to investigate the definitions of angle in Euclidean elementary plane geometry, identifying the ambiguities and inconsistencies that led us to propose a definition that could best meet the needs of future mathematics teachers. In order to do so, after evaluating the work done in the discipline where the concept of angle was discussed, five semi-structured interviews were recorded in audio and transcribed for later analysis. The interviews were subsidized by Bardin (2011), Fiorentini (2009), Tardif (2011), D'Ambrosio (1996), Shulman (1986), Ponte (2009) and Lorenzato (2010). The definitions analyzed came from Euclides (2009), Hilbert (1996), Barbosa (1985), Muniz Neto (2013) and Gomes & Ralha (2005). The mathematical aspects were guided by the authors: Halmos (1974), Lima (1970), Monteiro (1971) and Dean (1974) and their pillars. To anchor the analyzes under the aspects of mathematics teaching Lorenzato, Fiorentini, Bicudo & Borba (2004) and D'Ambrosio served as reference. The data uncovered how much the concept of angle is complex, both from the mathematical point of view, by the various conceptions in which it is presented, and also by the great amount of definitions in use. Consequently, both understanding and teaching this concept becomes a baffling task. From the analysis of the definitions treated, a definition proposal was found, exempt from the difficulties pointed out in the analysis of the data collected, which is presented in the final considerations. Appendices have been included in order to provide a better understanding, outside of common sense, of what a rotation is as well as a respectful suggestion on how to approach the proposed definition brought by Edwards (1984).

KEY WORDS: Teach, Geometry, Angle, Formation, Teacher.

LISTA DE FIGURAS

| Figura | Página |
|---|--------|
| 1. Geometria Prática..... | 26 |
| 2. Possibilidades de ângulos..... | 32 |
| 3. Ângulo como inclinação..... | 33 |
| 4. Linhas quebradas..... | 35 |
| 5. Ignorados por Apolônio..... | 35 |
| 6. Ângulo em Chaput..... | 36 |
| 7. Ângulo em Hilbert..... | 38 |
| 8. Interior de um ângulo..... | 39 |
| 9. Ângulo em Barbosa..... | 42 |
| 10. Ângulo raso..... | 43 |
| 11. Ângulo nulo..... | 43 |
| 12. Transferidor..... | 46 |
| 13. Medida ambígua..... | 47 |
| 14. Ângulo convexo e ângulo não convexo..... | 49 |
| 15. Direções distintas..... | 50 |
| 16. Semirretas opostas..... | 51 |
| 17. Semirretas coincidentes..... | 51 |
| 18. Ângulo em Muniz Neto..... | 53 |
| 19. Ângulo como rotação..... | 56 |
| 20. Rotação: semirretas na mesma direção..... | 57 |
| 21. Semirretas dadas a priori..... | 59 |
| 22. Rotação: semirretas dadas a priori..... | 59 |
| 23. Superfície ou linha?..... | 60 |
| 24. Orientação à direita..... | 63 |
| 25. Orientação à esquerda..... | 63 |
| 26. Giro à esquerda..... | 64 |
| 27. Giro à direita..... | 64 |
| 28. Bases do plano..... | 68 |
| 29. Mudança de base..... | 68 |

| | |
|--|-----|
| 30. A transformação..... | 68 |
| 31. Singularidade. | 69 |
| 32. Espaços adjacentes. | 77 |
| 33. Quem é o ângulo? | 80 |
| 34. Imagem representativa do trecho onde A5 fala: (a) e (b)..... | 83 |
| 35. O convexo em A1, (a) e (b). | 84 |
| 36. Retas concorrentes no ponto V..... | 87 |
| 37. União de semirretas. | 90 |
| 38. Conjunto convexo. | 90 |
| 39. Folha de papel. | 99 |
| 40. Vela. | 100 |
| 41. Espaço negativo..... | 100 |
| 42. Espaço positivo. | 101 |
| 43. Espaço negativo, Detalhe. | 101 |
| 44. Comparando espaços. | 102 |
| 45. Material. | 103 |
| 46. Ação 3. | 104 |
| 47. Ação 4..... | 104 |
| 48. Ação 6, (a) | 105 |
| 49. Ação 6, (b). | 106 |
| 50. Ação 7 (a). | 107 |
| 51. Ação 7 (b). | 107 |
| 52. Ação 9. | 108 |
| 53. Ação 12..... | 109 |
| 54. Giro. | 111 |
| 55. Orientação e giro. | 112 |
| 56. Giro completo. | 113 |
| 57. Volta fracionada. | 113 |
| 58. Arco e giro. | 114 |
| 59. Arcos orientados. | 115 |
| 60. Arcos discordantes. | 115 |
| 61. Operação com giros concordantes. | 116 |
| 62. Operação com giros discordantes. | 117 |

| | |
|---|-----|
| 63. Giro e nº real. | 118 |
| 64. O radiano. | 119 |
| 65. O plano. | 120 |
| 66. A semirreta. | 121 |
| 67. A reta. | 121 |
| 68. Par de semirretas. | 122 |
| 69. O ângulo. | 122 |
| 70. Transporte do ângulo nulo. | 123 |
| 71. Transporte do ângulo raso. | 124 |
| 72. Transporte do ângulo nem raso nem nulo. | 124 |
| 73. Ilustração do passo (i). | 125 |
| 74. Ilustração do passo (ii). | 125 |
| 75. Ilustração do passo (iii). | 126 |
| 76. Ilustração do passo (iv). | 126 |
| 77. Conclusão do transporte do ângulo. | 127 |
| 78. Transportar para a posição adjacentes os ângulos dados..... | 128 |
| 79. Fixando um dos ângulos pelo destaque do vértice..... | 129 |
| 80. Escolha o lado comum. | 129 |
| 81. Determinando os semiplanos. | 130 |
| 82. Determinando o lado. | 130 |
| 83. Ângulo transportado para a posição adjacente..... | 131 |
| 84. Ângulos dados. | 131 |
| 85. Depois do transporte. | 132 |
| 86. Ângulo transportados. | 133 |
| 87. Verificando congruência, (a). | 134 |
| 88. Verificando congruência, (b). | 134 |
| 89. Operação com ângulo, (a). | 136 |
| 90. Operação com ângulo, (b). | 137 |
| 91. Operação com ângulo, (c). | 137 |
| 92. Operação com ângulo, (d). | 138 |
| 93. Operação com ângulo, (e). | 138 |
| 94. Operação com ângulo, (f). | 139 |
| 95. Operação com ângulo, (a'). | 139 |

| | |
|----------------------------------|-----|
| 96. Operação com ângulo, (b'). | 140 |
| 97. Operação com ângulo, (c'). | 140 |
| 98. Operação com ângulo, (a''). | 141 |
| 99. Operação com ângulo, (b''). | 141 |
| 100. Operação com ângulo, (c''). | 142 |
| 101. Operação com ângulo, (d''). | 142 |
| 102. Operação com ângulo, (e''). | 143 |
| 103. Operação com ângulo, (f''). | 143 |
| 104. E associativa? (I). | 145 |
| 105. E associativa? (II). | 145 |
| 106. E associativa? (III). | 146 |
| 107. E associativa? (IV). | 146 |
| 108. E associativa? (V). | 147 |
| 109. E associativa? (VI). | 147 |
| 110. E associativa? (VII). | 148 |
| 111. E associativa? (VIII). | 148 |
| 112. E associativa? (IX). | 149 |
| 113. E associativa? (X). | 149 |
| 114. E associativa? (XI). | 150 |
| 115. Ângulos suplementares, (a). | 151 |
| 116. Ângulos suplementares, (b). | 151 |
| 117. Ângulos suplementares, (c). | 152 |
| 118. Bissetriz (1). | 153 |
| 119. Bissetriz (2). | 153 |
| 120. Bissetriz (3). | 154 |
| 121. Bissetriz (4). | 154 |
| 122. Ângulo reto (1). | 155 |
| 123. Ângulo reto (2). | 155 |
| 124. Ângulo reto (3). | 156 |
| 125. Ângulo reto (4). | 156 |
| 126. Ângulo reto (5). | 157 |
| 127. Ângulo reto (6). | 158 |

SUMÁRIO

| | |
|--|-----|
| 1- APRESENTAÇÃO..... | 16 |
| 1.1- Minha Relação Com a Matemática..... | 16 |
| 1.2- Atuação e formação docente..... | 17 |
| 1.3- Pesquisas sobre ângulo, o que dizem..... | 19 |
| 1.4- Propondo mudança..... | 20 |
| 2- CAPÍTULO I: O ENSINO DA MATEMÁTICA NO BRASIL: UMA TRAJETÓRIA..... | 22 |
| 2.1- Os missionários católicos e o ensino da matemática no Brasil..... | 22 |
| 2.2- A geometria na escola primária no Brasil..... | 24 |
| 2.3- Matemática moderna e o ensino da geometria..... | 27 |
| 3- CAPÍTULO II: ÂNGULO, ESSE ENTE GEOMÉTRICO..... | 30 |
| 3.1- Um percurso histórico..... | 30 |
| 3.2- Ângulo e a orientação no plano..... | 62 |
| 3.3- Uma abordagem intuitiva da ideia de orientação do plano..... | 62 |
| 3.4- Formalização da orientação no plano..... | 65 |
| 4- CAPÍTULO III: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS..... | 70 |
| 4.1- Cenário da Pesquisa..... | 71 |
| 4.2- Sujeitos da pesquisa..... | 71 |
| 4.3- Instrumentos de coleta de dados..... | 72 |
| 5- CAPÍTULO V: ANÁLISES DOS DADOS..... | 74 |
| 5.1- Ângulo, a aula..... | 74 |
| 5.2- Ângulo: uma definição..... | 76 |
| 5.3- Ângulo, como uma rotação..... | 78 |
| 5.4- Ângulo, como estímulo..... | 80 |
| 5.5- Ângulo, subconjunto convexo..... | 85 |
| 5.6- Ângulo, o que se aprendeu com as discussões?..... | 86 |
| 6- CONSIDERAÇÕES FINAIS..... | 93 |
| 7- APÊNDICE..... | 98 |
| 8- BIBLIOGRAFIA..... | 159 |

1- APRESENTAÇÃO

1.1- Minha Relação Com a Matemática

Era ainda uma criança quando despertei para o mundo da Matemática. O que me encantava, nele, era a possibilidade da descoberta de como ela se constituiu e a partir de uns poucos pressupostos possibilitava que se fizessem contagens, medições, cálculos, enfim, se resolvessem problemas. A curiosidade de buscar descobrir e compreender como, de fato, a Matemática funcionava foi o que me prendeu a ela, até o momento.

Em março de 1973 ingressei na Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, para estudar Matemática, concluindo o curso de Licenciatura Plena em dezembro de 1976. Tornei-me especialista em Matemática, pela UFPE, em 1978 e obtive o grau de Mestre em Matemática, na área de Geometria Diferencial pela Universidade Federal do Ceará, UFCE, em 1987.

Outro aspecto que me instigou, já formado, foi o ensino dessa disciplina. Como se pode ensinar matemática de maneira eficiente, ou seja, de um modo em que o aluno, o aprendiz, se aproprie dos conceitos, das leis e regras que permitem as diversas combinações e interpretações no âmbito de um conteúdo específico para que ele possa ler e resolver os problemas para os quais os conteúdos se mostrem adequados? A resposta a essa questão não é trivial. Requer uma vigilância incessante do que, para que e para quem ensinar. Envolve a utilização adequada de vários campos do conhecimento, ou seja: conhecimento do conteúdo específico, conhecimento das psicologias, conhecimento das didáticas, das filosofias, conhecimento econômico, etc.

Início minha carreira profissional em 1975, ao ingressar no ensino público oficial através da Secretaria de Estado da Educação Cultura e Desporto do estado de Pernambuco, como professor da educação básica, atuando no segmento que hoje equivale ao segundo segmento do ensino fundamental, que vai do sexto (6º) ano ao nono (9º) ano, onde permaneci até 1980. No ensino superior, minha primeira experiência ocorreu no Departamento de Matemática Básica da UFAL, hoje, Instituto de Matemática, durante o verão de 1977. Nesse mesmo ano, sou contratado como professor colaborador pela UFPE junto ao Departamento de Matemática de tal Universidade, onde permaneci até 1980. Em 1981 assumo, por ter sido aprovado em concurso público, a função de Professor Auxiliar de Ensino no Departamento de Matemática Básica da UFAL, instituição na qual ainda atuo. Portanto, há quarenta e dois anos estou atuando como professor de matemática, auxiliando gerações na sua formação e

compreensão dessa ciência tão necessária ao desenvolvimento científico e tecnológico e, por que não dizer, também, do ser humano, do homem mesmo, na formação de sua consciência crítica do mundo, e como consequência de sua libertação.

1.2- Atuação e formação docente

Como professor do ensino fundamental, minha preocupação foi sempre a de transmitir as ideias que poderiam levar aos alunos, de modo mais preciso possível, os conceitos e os procedimentos necessários à compreensão dos conteúdos curriculares a que a série estava vinculada. Sempre acreditei que a apreensão de conceito, algoritmos e o que lhe dão sustentação, colocariam o aluno em condições de eles mesmos, levarem a cabo a resolução de problemas, consolidando, assim, o seu aprendizado. Não procurava treiná-los mecanicamente em rotinas que, por falta de se compreender as razões pelas quais funcionavam, deixavam os alunos incapazes de assimilar os conteúdos e utilizá-los como ferramentas eficazes para resolução de problemas futuros.

Na docência superior, lecionei disciplinas para os cursos de Matemática (bacharelado e licenciatura), Física (bacharelado e licenciatura), Engenharia (Química e Civil) e Química (bacharelado, licenciatura, tecnológica e industrial). Mas, foi na Licenciatura em Matemática, por razões óbvias, que a preocupação com os aspectos didáticos, rigor no trato dos conceitos, sobretudo os matemáticos, se tornaram mais claras.

Alunos do curso de Licenciatura em Matemática podem responder a perguntas como: o que é um ângulo?; um ângulo reto, no plano, qual o significado da equação: $ax + by + c = 0$?; o que é o coeficiente angular de uma reta não vertical com respeito a um sistema de referência cartesiano canônico como representação, algebrizada, do plano, de forma surpreendentemente imprecisas, mas que soam, contudo, como corretas?

Ao analisarmos, criticamente, as respostas inadequadas às questões em tela podem sugerir, então, que os conceitos associados a elas, provavelmente, foram introduzidos de modo impreciso, ambíguo ou obscuro pelos docentes que ensinavam matemática aos alunos da licenciatura, pois, concordando com Veloso (1999), as definições, ainda que provisórias, não podem dar lugar a situações de indecisões.

Essas inquietações levaram-me a participar, a convite, do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, GPEM/UFAL, onde se discute a prática pedagógica do ensino da

matemática, com foco na educação básica. No grupo, me inteirei das teorias que davam suporte às discussões e pesquisas na área onde a ideia de me aprofundar neste universo se tornava cada vez mais forte.

Apesar de não atuar na educação básica há muito tempo, a condição de atuar em uma licenciatura em Matemática, portanto na formação inicial de professores, traz a mim a preocupação de possibilitar, ao futuro professor de geometria no ensino fundamental, um aprendizado que venha a solidificar seus conhecimentos específicos do conteúdo, para que na sua atividade docente possa, no processo de ensino e aprendizagem, levar os alunos a construir um aprendizado não mecanicista e capaz de utilizar tais aprendizados como instrumento seguro e eficaz na solução dos problemas emergentes.

Um professor, aquele profissional habilitado a ministrar aulas no ensino básico, ou seja, no nível fundamental e/ou médio do ensino oficial, o qual é instituído e regulamentado em nosso país por leis, não se forma exclusivamente e definitivamente em um curso de licenciatura, como estão previstos nas leis educacionais em nossas sociedades. Esse é o seu primeiro passo em busca de uma profissionalização como tal. É bem sabido, hoje, que a formação de um professor é, praticamente, interminável devido ao caráter dinâmico e complexo da sala de aula, em seus múltiplos aspectos, o que requer uma formação sólida nos conteúdos específicos a serem ensinados bem como, e tão importante quanto, conhecimentos didáticos e pedagógicos, profundos o suficiente para dar-lhe acesso às muitas teorias que fundamentam o processo de ensino e aprendizagem, Shulman (1986).

A complexa tarefa da formação do professor tanto inicial quanto continuada são estudadas por vários pesquisadores e dentre eles destacamos Tardif (2011), Shulman (1986,1987), Ponte (2009) e Fiorentini (2009), e a partir de diferentes temáticas, como: saberes, conhecimento, conteúdo, didática e ensino exploratório.

Tomando como exemplo Tardif (2011), em que os saberes docentes são temporais; plurais e heterogêneos; situados e localizados, mobilizados pelos professores “no contexto de sua profissão e da sala de aula” (TARDIF, 2011, p. 63) e que são mobilizados a partir de várias fontes como a história de vida, a história escolar, a sociedade, os lugares de formação e que para Shulman (1987) o exercício satisfatório da profissão docente, o conhecimento do conteúdo, da didática do conteúdo, do currículo, e em especial o

[...] conhecimento de conteúdos específicos de pedagogia é de especial interesse porque identifica os distintos campos de conhecimento para o ensino. Ele representa a mistura de conteúdo e pedagogia em uma compreensão de como temas particular, problemas ou questões são organizadas, representas, para o ensino. Conhecimento de conteúdos específicos de pedagogia é a categoria mais provável para distinguir a

compreensão do especialista daquela do pedagogo (SHULMAN, 1987, p. 8, tradução nossa).

Posso dizer, a grosso modo, que a minha formação e atuação profissional forjou-se, e ainda continua sendo forjada, a partir das concepções de Tardif (2011) e Shulman (1986), isso porque, inicialmente, obtive o grau de Licenciado em Matemática, tornei-me Mestre em Ciências (Matemática) na área de Geometria Diferencial, mas, sobretudo, aprendi muito adquirindo experiência com o trabalhar em sala de aula, no enfrentamento dos problemas que ali surgem ao buscar soluções para tais problemas no cotidiano da labuta, quer no ensino fundamental quer no ensino superior, vivenciando assim alguns de seus conflitos, de suas possibilidades e de seus limites. Como Chefe de Departamento e Coordenador de Curso, ampliei a minha compreensão sobre a formação do professor de Matemática. Assim sendo, partindo da premissa de que o conceito de ângulo da geometria euclidiana plana é desenvolvido sem explorar as fragilidades e ambiguidades das definições, esse trabalho busca abordar o tema ângulo a fim de investigar como o ensino de ângulo na geometria euclidiana plana é abordado no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática da UFAL, a partir de uma pesquisa qualitativa na modalidade de um estudo exploratório.

1.3- Pesquisas sobre ângulo, o que dizem

Em nossa busca por pesquisas relacionadas sobre o conceito de ângulo, encontramos uma realizada por Gadotti (2008) e outra por Vieira (2010). Gadotti investigou sobre definições formais do conceito de ângulo encontradas na literatura matemática, didática e não didática, e aquelas transmitidas por professores que ensinam matemática. As definições abordadas por ele enquadram-se nas categorias: par de semirretas, região do plano, e giro. Analisadas sob a ótica de sua ensinabilidade tiveram aí reveladas suas limitações. Não foram analisadas do ponto de vista matemático e, portanto, ambiguidade alguma foi revelada.

Vieira (2010), em sua pesquisa, investigou o conceito de ângulo objetivando desenvolver uma abordagem didática sobre o desenvolvimento do referido conceito, fundamentando-a na perspectiva da Abstração Progressiva segundo Mitchelmore e White (2000)¹. Durante o desenvolvimento de seu trabalho, revelou-se que a maioria dos professores

¹ Mitchelmore, M. C.; White, and P. Development of angle concepts by progressive abstraction and generalization.

aborda o conceito fora do plano sugerido por documentos oficiais e que ângulo como giro, como sugere o PCN, quase nunca é abordado.

Elaborada e testada em sala de aula, a proposta verificou-se sua adequação mostrando sua viabilidade.

Dificuldades apontadas nas pesquisas acima permitem questionar se seriam elas advindas do processo de formação do professor, pois em Fiorentini e Miorim (1990) e Almouloud et. al. (2004), verificaram que este questionamento já é feito por conta das dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem da matemática, em particular da geometria, no ensino fundamental. Podemos questionar se tais dificuldades não seriam oriundas do processo de formação de professores?

1.4- Propondo mudança

Se para Gadotti (2008) e Vieira (2010), as várias definições de ângulo são responsáveis pelas dificuldades de se ensinar e se aprender o conceito, nós arvoramos em propor uma definição de *ângulo*, considerações finais, que se faz necessária por conta das incompatibilidades e ambiguidades reveladas a partir das análises de algumas das principais definições, que surgem em contexto da formação docente.

A definição proposta aproxima-se, de maneira mais tímida que seja, do que propõem Vergnaud (1990)² com sua Teoria dos Campos Conceituais, onde é enfatizado que para o entendimento mais amplo que se possa ter de um conteúdo, um conceito, é lícito juntar ao seu redor quantos outros conceitos sejam necessários para sua melhor compreensão. Juntamos a esse estudo os apêndices A, B e C, versando sobre aspectos de sua ensinabilidade: A – Os alunos e o conceito de ângulo: possibilidades para a compreensão; B – Uma hermenêutica do giro; C – Ângulo: aspectos algébricos.

Nesta pesquisa, trabalhamos as definições de ângulo no sentido de identificar e superar dificuldades nelas percebidas e propor uma nova definição que resista às críticas a elas feitas.

O presente trabalho foi organizado em capítulos enumerados em ordem crescente, distribuídos como segue:

O capítulo 1 traz uma visão panorâmica do ensino da Matemática no Brasil e do ensino da geometria.

² *Esta teoría permite igualmente analizar la relación entre conceptos en tanto que conocimientos explícitos y las invariantes operatorias implícitas en las conductas del sujeto en situación; ella explicita también las relaciones entre significados y significantes.* VERGNAUD, G. 1990, p. 133.

O capítulo 2 versa sobre concepções e definições de ângulo ao longo do tempo, incoerências e ambiguidades inerentes a elas.

O capítulo 3 tem uma descrição e fundamentação do percurso metodológico adotado no trabalho.

O capítulo 4 traz as análises do material colhido durante a coleta de dados.

Por fim, constam as considerações finais.

2- CAPÍTULO I: O ENSINO DA MATEMÁTICA NO BRASIL: UMA TRAJETÓRIA

A matemática é, sem dúvida alguma, uma das ciências que mais tem implicação, direta ou indiretamente, sobre a vida dos seres humanos, modos de viver, de estar no mundo. Embora a matemática tenha se desenvolvido bastante enquanto procurava soluções para problemas concretos, na física, na astronomia, na arquitetura, nas artes, etc., ela desenvolveu-se também à medida que os pensadores procuravam fundamentação a suas teorias. Hoje, constitui-se, através de seus diversos ramos, no sistema mais complexo, completo e eficiente para compreensão e solução de problemas que diz respeito ao universo à natureza e à vida dos seres humanos no planeta. Seus métodos serviram, e ainda servem, de modelos para a consolidação e validação de umas tantas outras áreas do conhecimento científico, como nos faz ver Capra no filme *O ponto de mutação*, a partir do modo cartesiano de pensar.

O desenvolvimento que a matemática experimentou desde a civilização egípcia até a era moderna, e porque não dizer até os dias atuais, revestiu-a de uma aura de importância tamanha que seu ensino se consolidou como fundamental e imprescindível para o desenvolvimento científico, cultural, social e mesmo da sobrevivência das sociedades humanas, sendo assim, assegurado por qualquer que seja o sistema educacional instituído por elas.

2.1- Os missionários católicos e o ensino da matemática no Brasil

A primeira escola no Brasil foi fundada em 1538, pelos missionários franciscanos Frei Bernardo de Armenta e Frei Alonso Lebron, (STEPHANAU, 2010, p. 98). No entanto, o ensino da matemática teve início, ainda que da forma mais precária que possa ter sido, através da chegada da missão jesuíta na então colônia portuguesa, pois “desde que os jesuítas chegaram ao Brasil estabeleceram escolas e começaram a ensinar a ler, a escrever, *e a contar* e a cantar”, Paiva (PAIVA, 2010 p. 43, grifo nosso). Portanto, o ensino da matemática no Brasil inicia-se oficialmente com a instalação dos jesuítas em nossa terra a partir de 1550, doze anos após o surgimento da primeira escola. Muitos dos franciscanos, por seu reconhecido conhecimento em ciências, tornaram-se colaboradores em outras instituições como, por exemplo, “o Frei João do Amor Divino que foi indicado por seus Superiores em 1770, lente de Geometria junto aos militares a pedido do general da Capitania de São Paulo, Dom Luís Antônio de Souza” (STEPHANAU, 2010, p. 102). Estes missionários, com sua vocação pedagógica e educativa, entendiam que a preparação para o futuro estava na

educação e, assim, dão início às suas funções educativas na nova terra. Fundam escolas e colégios para atender às necessidades mais urgentes da sociedade colonial e, em todo caso, contribuem para a formação sócio-política-econômica-histórica e científica da embrionária nação.

Segundo Bastos (2006), a matemática foi ensinada no Colégio da Bahia como parte da estrutura curricular do curso de Artes, iniciado em 1572, sendo este, considerado de nível superior, o primeiro no Brasil. No Colégio do Rio de Janeiro inaugurado em 1573, teve início um curso de “lições de algarismo” onde se estudavam as quatro operações fundamentais da aritmética, a ler e escrever o qual gradativamente foi elevado à categoria do curso de Artes (BASTOS, 2006). Esses dois estabelecimentos, muito provavelmente, tinham como objetivo, entre outros, a preparação dos professores que alimentariam a rede de ensino instituída na Colônia.

Por volta de 1650, o governo português implanta as primeiras escolas de artilharia e fortificações, muito provavelmente com o objetivo de preparar na Colônia as condições para manter e garantir o seu domínio e a defesa da mesma. Coube, portanto, a razões de caráter político-militar a responsabilidade pelo ensino da matemática e sua difusão no nosso país, do ponto de vista da responsabilidade do governo colonial até que sejam implantadas, oficialmente, as primeiras escolas primárias em 1827, vivendo o Brasil seus primeiros anos de independência. Dez anos após a promulgação da lei que instituiu e deu forma ao ensino público no Brasil, foi inaugurado o Colégio Imperial Dom Pedro II (BASTOS, 2006, p. 39). Somente a partir desses importantes eventos é que se pode dizer que a matemática e seu ensino ganharam relevância, significação e presença no cenário educativo público brasileiro, até os nossos dias.

Com a implantação das escolas de artilharia e fortificações, pela natureza delas, não é possível imaginar que a geometria não fizesse constar nos currículos de matemática destas instituições e que as noções de ângulo ali fossem ensinadas.

Assim, segundo Valente e Silva (2014), oficialmente, a Matemática tem seu lugar garantido no cenário educacional brasileiro, para a instrução das primeiras letras, muito provavelmente por influência advinda do iluminismo francês, a partir da lei, promulgada pela Assembleia Geral Legislativa do Congresso Nacional em 15 de outubro de 1827.

De acordo com as pesquisas realizadas por Valente e Silva (2014) sobre a geometria nos primeiros anos escolares, no que diz respeito à geometria, o parlamentar Augusto Xavier

de Carvalho era contrário à inclusão desse conteúdo na proposta do programa do ensino primário com a justificativa de que

[...] o estado de atrasamento em que se acha desgraçadamente a educação no Brasil fará com que se formos a exigir de um professor do primeiro ensino, do qual depende a felicidade dos cidadãos, requisitos maiores, não tenhamos professores. Se exigirmos de um mestre de primeiras letras princípios de geometria elementar, dificilmente se acharão; [...] (MOACYR, 1936, p. 184).

Os argumentos do referido parlamentar nos mostram o quanto, já naquela época, os problemas da educação e suas possíveis soluções eram tidos como de pouca monta. Não havia uma preocupação real com a formação do professor além de se perceber um aligeiramento e acomodação da situação o que apontam no sentido de um sistema precário de educação.

Já Ferreira França, o parlamentar favorável à inclusão da geometria no programa, pode ter feito tanto por sua formação em matemática quanto pela absorção dos ideais libertários preconizados pela Revolução Francesa. Valente e Silva (2014), pautados nos estudos de Moacyr (1936) apontam que Ferreira França defendeu a inclusão da geometria no programa alegando que:

Não quero que o mestre ensine ou aponte o que é linha reta, quero que tome o compasso, descreva um triângulo sobre uma linha; isto não custa nada e é coisa mais fácil possível. Quero que o mestre prove o que ensina, que os meninos aprendam como o carpinteiro ou pedreiro. *Quero como o mestre ensine como há de dividir um ângulo retilíneo em duas partes iguais* [...]. (MOACYR, 1936, pp. 183-184, grifo nosso)

Percebe-se, com clareza, que a justificativa dada por Ferreira França, à proposta defendida por ele, aponta na direção de uma formação adequada do professor, sem a qual não poderá levar a cabo o programa de geometria proposto, apontando também no sentido de uma melhor preparação dos alunos no que diz respeito a sua possível profissionalização.

Entre os dois protagonistas Ferreira França e Xavier de Carvalho a proposta defendida pelo primeiro vence e torna-se lei, e, em seu texto, segundo Moacyr (1936) lê-se:

[...] ler, escrever, as quatro operações de aritmética, prática de quebrados, decimais e proporções, *as noções mais gerais de geometria prática*, a gramática da língua nacional, os princípios da moral cristã e de doutrina católica e apostólica romana [...]. (MOACYR, 1936, p. 562)

2.2- A geometria na escola primária no Brasil

De acordo com Silva (2014), tendo sido as *noções mais gerais de geometria prática* transformadas em saberes a ensinar, por força da lei de 15/10/1827, a qual determinava,

portanto, o seu ensino, logo surge pelas mãos de “A. F. de P. e Holanda Cavalcanti de Albuquerque” a obra *Princípios de Desenho Linear* compreendendo os de Geometria Prática, impressa na cidade do Rio de Janeiro no ano de 1829, com o objetivo de auxiliar o professorado no sentido de cumpri-la. Tal obra é uma adaptação do livro *Desenho Linear*, impresso em Paris, no ano de 1819, e teve como autor L.B. Francoeur.

O caráter prático da geometria no trabalho de Holanda Cavalcante constitui-se pelas construções de “linhas, de ângulos, de figuras e, mesmo, de desenhos em perspectivas de sólidos geométricos”, segundo nos revela Silva (2014, p. 31).

Silva (2014) ainda nos traz os seguintes autores: Emilio Achilles Monteverde e José Theodoro de Souza Lobo. Monteverde, autor do *Manual Encyclopédico* lançado no ano de 1838, obra largamente difundida alcançando a sua 11ª edição no ano de 1879. Até a sua 9ª edição, ocorrida em 1870, já contava a obra com uma expressiva tiragem de 156.000 exemplares, o que, pode-se dizer, foi um grande sucesso. Houve ainda mais duas edições do referido compendio. Nesta obra o que se propôs de geometria foram as “Definições Geométricas”, ocupando não mais que uma dúzia de páginas. Vale salientar que esta obra foi “aprovada pelo Conselho superior da Instrução Pública” e impressa pela “Imprensa Nacional, em Lisboa (Silva 2014, p. 32; apud Boto 2005, pp. 12-13)”. Souza Lobo, publica em 1874 o livro intitulado *Primeira Aritmética Para Meninos* que alcança a sua quadragésima edição em 1935. Na *Primeira Aritmética Para Meninos*, a geometria é abordada nos termos em que foi abordada no trabalho de Monteverde. Souza Lobo deu a conhecer um outro livro intitulado *Segunda Aritmética*, que atinge sua 28ª edição em 1930³. A geometria tratada na obra de Souza Lobo versa sobre os temas: “ponto”, “reta”, “ângulos”, “triângulos”, “quadriláteros” e o estudo breve das figuras geométricas (Silva 2014, p. 38). É de relevante importância para a história do ensino da geometria no Brasil a publicação do Dr. Abílio César Borges⁴, o Barão de Macaúbas, intelectual e homem ligado à causa educacional, intitulada *Desenho linear ou elementos de geometria prática popular* cuja segunda edição data de 1882⁵, uma compilação da primeira edição de 1878, destinava-se apenas “às escolas primárias da Corte e de todo Império”, (BORGES, 1882, apud TRINCÃO, 2007, p. 128). A obra de César Borges alcança

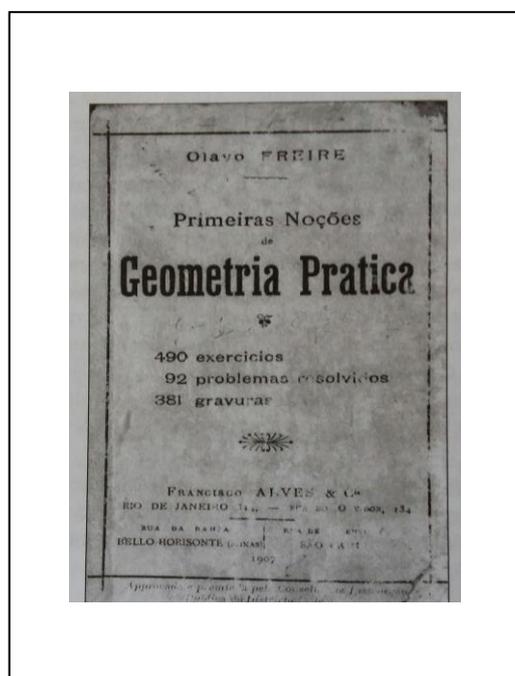
³ Há registro da 39ª edição do livro “Segunda Aritmética” de J. Th. de Souza Lobo no ano de 1952 pela Editora Globo, disponível em: www.troca.com.br/livro/165457/segunda-aritmetica acesso em 15/10/2014.

⁴ Dr. Abílio César Borges (1824-1891) baiano, nascido na então Vila de Minas do Rio das Contas. Disponível em: seer.ufrgs.br/asphe/article/download/29274/pdf acesso em 30/10/214.

⁵ A primeira edição da obra do Dr. Abílio César Borges, *Desenho linear ou elementos de geometria prática popular*, destinava-se “às escolas primárias e normais, nos liceus e colégios, nos cursos de adultos e por artistas e operários de qualquer ramo da indústria na corte” (TRINCÃO, 2007 p 128). Disponível em: seer.ufrgs.br/asphe/article/download/29274/pdf , acesso em 30/10/214.

a sua 42ª edição oitenta e quatro anos após a sua primeira edição no ano de 1960. Segundo Silva, 2014, outro importante autor de livro didático para o ensino da geometria no curso primário foi Sr. Olavo Freire. Este autor publicou o livro *Primeiras noções de geometria prática*, no ano de 1894, pela Livraria Francisco Alves. Tendo sido considerado o primeiro livro didático no segmento, a obra de Olavo Freire em 1942 foi editada pela trigésima nona vez e influenciou o ensino da geometria no curso primário por quase meio século. O ângulo é tratado na obra de Olavo Freire, edição de 1907. De acordo com Silva (2014) a congruência é abordada no problema proposto na página 34, “*Construir um ângulo igual a outro ângulo dado*” (SILVA 2014, p. 55), e na página 35 propõe-se: “*Traçar a bissetriz de um ângulo ou dividi-lo em duas partes iguais*” (SILVA, 2014, p. 55). Essa obra atravessou décadas apoiando o ensino da geometria, do ângulo, na educação matemática dos nossos jovens. A figura 1, abaixo, traz uma indicação, gravada na capa da obra, de que uma das estratégias empregadas no ensino do conteúdo, baseava-se no apelo à memória e padronização de soluções. Lê-se: *490 exercícios, 92 problemas resolvidos*.

Figura 1. Geometria Prática



Fonte: produzido pelo autor, adaptado de Silva (2014), 2017.

É óbvio que, ainda que de forma intuitiva, alguma “definição” de ângulo deve ter sido dada. Há evidência de que se trabalhava o ângulo reto na obra de Olavo Freire, haja visto que

Silva (2014, p. 57) diz que nos acervos do Centro de Documentação do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (Ghemat) constam: “... um caderno de desenho, em que se encontram construções com régua e compasso, como *traçado de uma perpendicular pela metade de um segmento de reta*, paralelas, divisão de um ângulo em duas partes iguais...” (SILVA, 2014, p. 57, grifo nosso) e a 39ª edição “do livro de Olavo Freire, provavelmente usado como referência para as construções do caderno⁶.” De relevante importância para o ensino da geometria no início do curso primário, foi o professor Miguel Milano (1885 – 1971) autor das obras: *Manual do ensino primário 1º ano* e *Manual do ensino primário 3º ano*, publicados respectivamente em 1938 e 1942, pela Livraria Francisco Alves. De acordo com Silva (2014), na página 90 do segundo título, descreve a resolução do problema “do traçado da bissetriz de um ângulo”.

2.3- Matemática moderna e o ensino da geometria

Decorrente do pensamento filosófico que se impunha em meados do século XX, o estruturalismo, em todos os ramos do conhecimento científico da época, a matemática é atingida por este e, conseqüentemente, como me parece natural, o seu ensino. Inicia-se assim um movimento internacional denominado “Movimento Matemática Moderna (MMM)” que, entre outras preocupações, buscava a uniformização do ensino dos conteúdos matemáticos escolares em termos de eixos norteadores, tais como: teoria dos conjuntos, topologia, álgebra e estrutura de ordem. A tarefa não era simples e diversos setores do conhecimento através de alguns representantes mais destacados em seu setor foram “chamados” ao debate. Assim, matemáticos, psicólogos, pedagogos, professores de matemática e o pessoal da lógica encontraram no movimento ambiente propício para suas críticas e formulação de proposições para o ensino da matemática.

O Movimento Matemática Moderna tem, no grupo de pesquisadores franceses, denominado Nicolas Bourbaki, o mais eficiente veículo de divulgação e produção das ideias estruturalistas na matemática e no seu ensino. Entre os componentes do grupo Nicolas Bourbaki, estava o francês Jean Dieudonné (1906–1994), matemático, professor de matemática e autor de livros didáticos de matemática, o qual em abril de 1952, durante um congresso ocorrido nos arredores de Paris sobre estruturas matemáticas e estruturas mentais,

⁶ Tanto o caderno de desenho como o exemplar da 39ª edição do Livro de Olavo Freire intitulado: Primeiras noções de geometria prática foram doados ao Ghemat pela família de Ariovaldo Ferreira de Abreu que foi aluno do 2º ano primário no Ginásio Stafford na cidade de São Paulo - SP. (Silva, 2014 p. 57).

encontra-se com o psicólogo, biólogo e epistemólogo suíço Jean William Fritz Piaget (1896-1980). Enquanto o primeiro ministra uma conferência sobre estruturas matemáticas, o segundo conferenciou sobre estruturas mentais que explicam como se organiza o pensamento na criança. Segundo Aczel (2009), “Para surpresa de ambos os conferencistas, ficou claro que tratavam do mesmo assunto” (ACZEL, 2009, p. 140).

O MMM, ao priorizar a Teoria Dos Conjuntos, a Topologia, a Álgebra e a Estrutura de Ordem, deixa a geometria secundarizada. O clássico caminho derivado de “Os Elementos”, obra milenar da cultura matemática, pareceu aos olhos dos estruturalistas obsoleta e inadequada para transmissão aos alunos do conhecimento geométricos. A partir dessa visão, reuniões, seminários e congressos abrigaram as discussões em torno do ensino da geometria, produzindo pesquisas e propondo caminhos. Nomes como Piaget, Dienes, Lunkenbein estiveram envolvidos com a temática do ensino da geometria, na perspectiva do estruturalismo.

Piaget, com sua obra *A representação do espaço na criança*, trata logo de ligar a geometria, conseqüentemente seu ensino, a uma das estruturas centrais da matemática, a topologia, ao dizer:

[...] a análise abstrata das geometrias tende a demonstrar que as noções espaciais fundamentais não são euclidianas: são “topológicas, isto é, repousam simplesmente nas correspondências qualitativas bi contínuas que recorrem aos conceitos de vizinhança e de separação, de envolvimento e de ordem etc., mas ignoram qualquer conservação das distâncias [...] (PIAJET E INHELDER, 1993, p. 12).

É acompanhado por Dienes ao declarar que;

uma criança, desde seu nascimento, explora o espaço. Primeiramente o olha, depois o sonda com seus braços e pernas visando à descoberta, e enfim se desloca nele. [...]. A primeira noção de geometria não tem nada a ver com a medida. Uma criança preocupa-se muito pouco com a distância exata dos objetos [...] (DIENES E GOLDING, 1977, p. 1).

É relevante mencionar que apesar das orientações impostas pelo MMM e os trabalhos desenvolvidos na psicologia para subsidiar o ensino da geometria na perspectiva do movimento, apontam uma contradição, segundo Keller (2011), entre o último trabalho de Piaget, *Psicogênese e história das ciência*, publicado em 1983, com seus trabalhos: *La représentation de l'espace chez l'enfant* (1947) ou *La géométrie spontanée de l'enfant* (1948), no tocante à ordem genética e a ordem histórica serem inversas, o que se mostrou não ser verdade.

O fracasso do MMM no Brasil, quiçá no mundo, em meu entender, se deu nem tanto pelo excesso de formalismo a que se estava submetendo a geometria, conseqüentemente seu

ensino, mais, e, sobretudo, à falta de preparo da grande maioria dos agentes responsáveis para levá-lo adiante, os professores. Segundo Hönig e Gomide (1979), o MMM foi um desastre e explica:

em boa parte, pelo entusiasmo dos professores secundários por certas partes fácies, mas aparentemente avançadas, da Matemática. [...]. Infelizmente reportava-se a partes da Matemática cujo conteúdo é irrelevante e levou a que tópicos clássicos, de real significado e importância, fossem às vezes completamente abandonados. (HÖNIG e GOMIDE, 1979, p. 38,39)

Contudo, nomes como: Osvaldo Sangiorgi e Scipione di Pierro Netto, entre outros, revelaram-se simpatizantes e divulgadores do movimento, no Brasil, contribuindo com a produção de textos para o ensino básico, participando de eventos sobre as ações e desenvolvimento do MMM, destacando-se o primeiro como nos faz ver Valente (2008)⁷.

⁷ OSVALDO SANGIORGI E O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NO BASIL, Rev. Diálogo Educ., Curitiba, v. 8, nº 25, p. 583-613, set./dez. 2008.

3- CAPÍTULO II: ÂNGULO, ESSE ENTE GEOMÉTRICO

3.1- Um percurso histórico

Um dos conceitos fundamentais em geometria plana é o conceito de ângulo. E, apesar de não se saber ao certo em que momento da história do pensamento matemático surge, efetivamente, na geometria este conceito, atribui-se ao gênio matemático e filósofo grego Tales de Mileto, que se supõe ter vivido entre 624-547 a.C. Alguns resultados, envolvendo o conceito de ângulo, chegaram até nossos dias pelas vias da cultura e da história, como, por exemplo: *todo ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto*. Esse resultado é conhecido também como "Teorema de Tales". Ao creditar-se, realmente, este resultado ao filósofo, ou, pelo menos, ao se admitir que este tenha tido conhecimento dele, constata-se que o conceito atravessou mais de dois mil e seiscentos anos de história e continua vigoroso até o presente momento. Além disso,

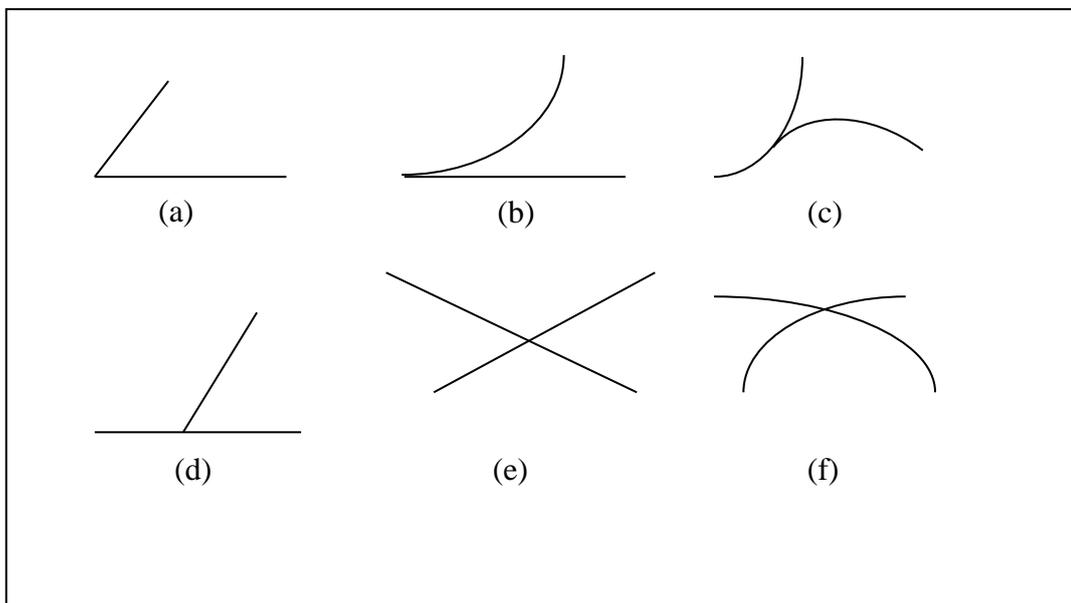
os babilônios antigos, [...] Diferentemente dos egípcios, conheciam o fato que o ângulo inscrito num semicírculo é reto, proposição geralmente conhecida como teorema de Tales, apesar de Tales ter vivido bem mais de um milênio depois dos babilônios terem conhecido e usá-la. (BOYER, 1974, p. 30).

Segundo Boyer, “nem egípcios, nem babilônios introduziram uma medida de ângulo no sentido moderno” (BOYER, 1974, p. 26). Deduz-se, do que diz esse mesmo autor, que os babilônios conheciam a proposição: “o ângulo inscrito num semicírculo é *reto*.”, conhecida como Teorema de Tales, uma vez que ela “pode ter sido aprendida por Tales durante suas viagens à Babilônia” (BOYER, 1974, p. 34). Fato curioso é que os babilônios a conheciam a aproximadamente um milênio, antes de Tales ter vivido, segundo Boyer (1974). Conclui-se, portanto, que o conceito de ângulo já atravessou pelo menos 3.500 anos de história.

A natureza excessivamente intuitiva na apreensão do objeto ângulo pode ter sido a responsável por certa dificuldade na sua teorização, como por exemplo, defini-lo de uma maneira mais precisa, mais consistente. As definições mais antigas de ângulo que nós temos conhecimento estão registradas na obra *Os Elementos*, escrita há, aproximadamente, mais de 2.300 anos, de autoria atribuída a Euclides (Euclides de Alexandria). Esse autor, no livro I de sua obra, traz as seguintes definições de ângulo: “definição 8: ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta; definição 9: É quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo” (EUCLIDES, 2009 p. 97).

Na época em que Euclides escreveu a obra *Os elementos*, a intuição exercia uma influência, um poder, muito forte no pensamento matemático. A definição 8 de ângulo plano, por exemplo, inicia-se tomando o termo ângulo como sendo a *inclinação* entre duas linhas, mas, deixando implícito, e não claro, o significado desse termo. Isso nos leva a crer que o termo, inclinação, já tinha um significado geométrico, suficientemente claro, a ponto de no texto não se fazer menção alguma sobre o seu significado técnico e matemático, como se fez com a palavra ângulo. Segundo Ferreira (2010) um significado para a palavra inclinação é: “1. Ato ou efeito de inclinar(-se)”, enquanto traz para inclinar(-se) os significados: “2. Colocar obliquamente com relação a um plano ou uma direção” e “7. Desviar-se da linha reta, vertical ou horizontal.” (FERREIRA, 2010, p. 417). Obliquamente deriva-se da palavra “oblíquo” que ainda segundo Ferreira, significa: “1. Não perpendicular, inclinado.” (FERREIRA 2010, p. 539). Entre os significados da palavra “*linha*” está registrado, por esse mesmo autor, o que segue: “7. Traço contínuo numa só dimensão.” (FERREIRA 2010, p. 469), que, absorve plenamente o significado gráfico, intuitivo, dos seguintes objetos geométricos: segmentos de retas, semirretas, arcos de parábolas, arcos de hipérbolas, arcos de elipse, arcos de circunferências etc. – entendendo aqui “arco de ...”, como sendo um subconjunto, limitado ou não, do lugar geométrico a que se faz referência, compreendendo todos os pontos compreendidos entre dois de seus pontos ou a partir de um deles – só para citar algumas possibilidades. A frase: “*que se tocam e não estão postas sobre uma mesma reta*” nada diz a respeito da natureza, da maneira, como elas se tocam, de como esse toque ocorre exigindo, tão somente, que estas linhas não estejam postas, colocadas, contidas sobre uma mesma reta, o que nos assegura que cada uma das imagens mostradas na figura 2 abaixo seja, de fato, um ângulo a luz das definições de ângulo dadas em Euclides. Além do mais, explicitamente, a frase exclui a possibilidade da definição 8 abranger os ângulos *raso* e *nulo* como os entendemos hoje.

Figura 2. Possibilidades de ângulos



Fonte: elaborada pelo autor, 2017.

As imagens mostradas na figura 2, logo acima, são parte do que os autores Tall & Vinner (1981) chamam de *imagem conceitual* associada a um conceito, no caso, o conceito de ângulo. Em linhas gerais, dizem eles:

The *concept image* consists of all the cognitive structure in the individual's mind that is associated with a given concept. This may not be globally coherent and may have aspects which are quite different from the formal concept definition.” (TALL & VINNER (1981), p. 151, grifo nosso).

A definição seguinte, definição 9, traz o que Euclides chama de *ângulo retilíneo*. Percebe-se, claramente, neste enunciado, uma classificação no conjunto de todos os objetos abrangidos pela definição 8. Com efeito, explicitamente, ele diz: “E quando as linhas que contém o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo.” Dito de outro modo: o ângulo é chamado retilíneo, quando as linhas que o contém sejam retas, o que deixa claro o caráter classificatório desse enunciado. Lembrando que a palavra “contém” expressa bem o fato de que o ângulo não se constitui, especificamente, das linhas, mas também pela “inclinação” entre elas ou sugerida por elas.

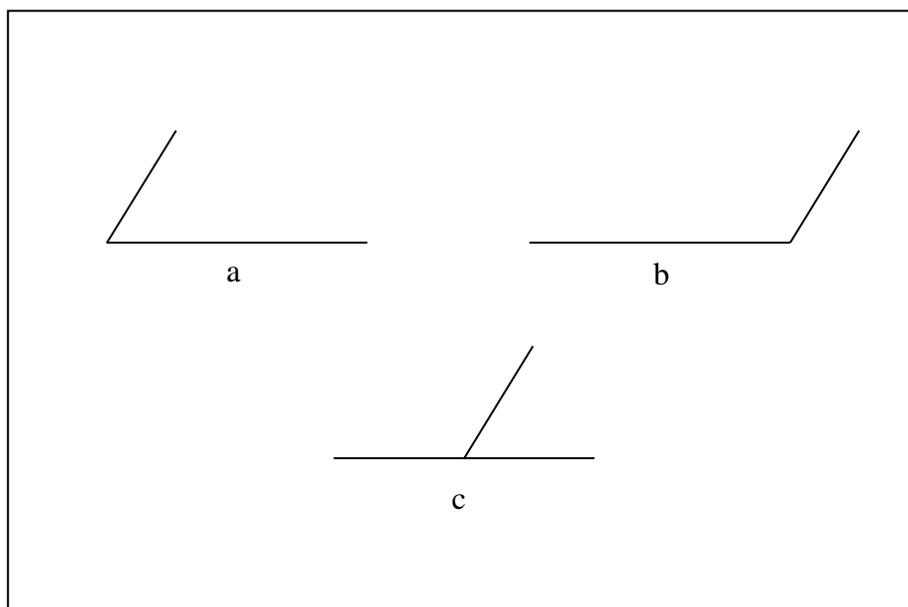
Observe a figura 3 que segue. Nela, encontram-se três imagens de linhas que se tocam, e, nas imagens (a) e (b), temos um segmento horizontal, tocados cada um, por segmentos paralelos, ocorrendo o toque em (a) no extremo do segmento que fica à sua esquerda e em (b) no extremo à sua direita. Esses “ângulos” são percebidos por nós como diferentes, apesar das

características dos segmentos e do fato de que a inclinação possa ser tida como a mesma, pois os segmentos não horizontais em (a) e em (b) são paralelos entre si. Isso evidencia a importância do ponto de contato e, sobretudo, a fragilidade do que significa, de fato, “inclinação”.

Particularmente, a imagem (c), na figura, pode ser interpretada como dois ângulos distintos, pois, as linhas nessa imagem estão dispostas de forma que evocando o *conceito imagem* possamos percebê-las como uma representação de dois ângulos, tidos como adjacentes e suplementares.

É possível mostrar, à luz do cálculo diferencial, para sermos precisos, ou mesmo por técnicas de desenho geométrico, que em cada uma das três imagens a “inclinação” entre as duas linhas envolvidas seja a mesma, o que permitiria concluir, segundo a definição de Euclides, que se trata do mesmo ângulo. Contudo, cada uma das imagens na figura 4 parece reclamar-nos de outra coisa: uma identidade própria como ângulo.

Figura 3. Ângulo como inclinação



Fonte: elaborado pelo autor, 2017.

Particularmente, a imagem (c), na figura, pode ser interpretada como dois ângulos distintos, pois, as linhas nessa imagem estão dispostas de forma que evocando o *conceito imagem* possamos percebê-las como uma representação de dois ângulos, tidos como adjacentes e suplementares.

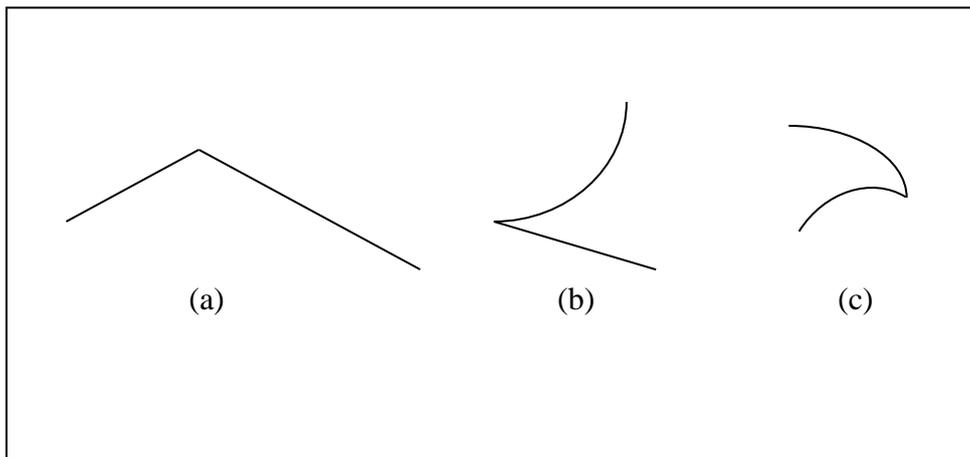
É possível mostrar, à luz do cálculo diferencial, para sermos precisos, ou mesmo por técnicas de desenho geométrico, que em cada uma das três imagens a “inclinação” entre as duas linhas envolvidas seja a mesma, o que permitiria concluir, segundo a definição de Euclides, que se trata do mesmo ângulo. Contudo, cada uma das imagens na figura 3 parece reclamar-nos de outra coisa: uma identidade própria como ângulo.

Um ângulo como inclinação causou estranheza ao “filósofo neoplatônico Proclus (410-485)” (BOYER, 1974, p. 35) que, segundo Hearth (1956), referindo-se a um comentário crítico sobre as definições de Euclides trazido à luz em um trabalho atribuído ao filósofo, onde este faz a seguinte pergunta: “como, se um ângulo é uma inclinação, uma inclinação pode produzir dois ângulos?” (HEARTH, 1956, p. 176). O que deixa evidente um certo desconforto em se tomar um ângulo como inclinação. Hearth (1956), cita que Proclus, referindo-se a antigas definições de ângulos, em trabalho, chama a atenção daquela atribuída por ele a Apolônio de Praga, em suas palavras: “Apollonius defined an angle as *a contracting of a surface or a solid at one point under a broken line or surface [...]*⁸, where again an angle is supposed to be formed by *one* broken line or surface.” (HEARTH, 1965, p. 176, grifo do autor).

Esta definição, como critica as definições de Euclides, impedem que sejam chamadas de ângulo as imagens (c), (d), (e) e (f), contidas na figura 3 tratada mais acima. O que é uma linha quebrada? Então, do ponto de vista intuitivo observa-se na figura 4, mais abaixo, alguns exemplos do que entendemos, do ponto de vista intuitivo, ser uma linha quebrada e que atenda às características das definições dadas por Euclides – que, na verdade, são linhas do ponto de vista atual representações de linhas contínuas e não deriváveis em um de seus pontos. A linha quebrada é uma linha contínua que, tomada como trajetória a ser percorrida por um ponto móvel, indica uma mudança abrupta na direção do percurso em um determinado ponto da mesma, o ponto onde ela quebra.

⁸O trecho compreendido em [...] traz o original em grego.

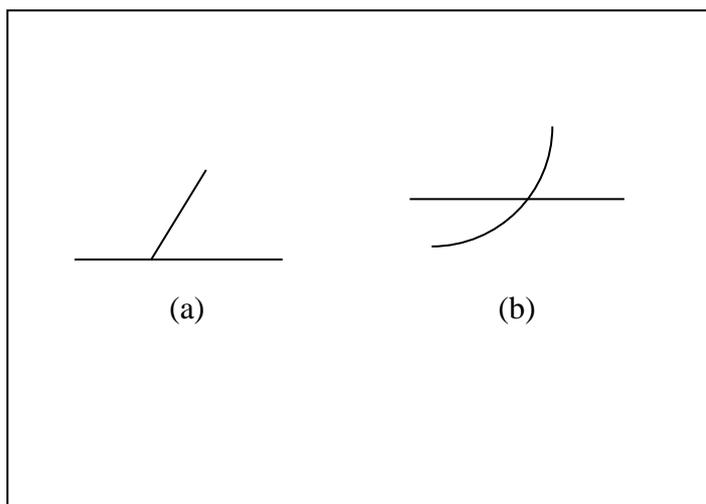
Figura 4. Linhas quebradas. As imagens (a), (b) e (c) são exemplos de linhas quebradas.



Fonte: elaborado pelo autor, 2017.

A linha, aqui, em um sentido mais técnico, menos intuitivo, será entendida como uma curva $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, contínua em I e diferenciável⁹ em $I - \{t_o\}$, onde $t_o \in \text{int } I$ é o ponto onde ela “quebra”, onde ela não é diferenciável. Essa definição de Apolônio põe uma ordem na questão de como as linhas se tocam. Elas se tocam de modo a formar uma linha, no sentido já citado anteriormente, e a não permitir uma situação como a que se mostra, por exemplo, nas imagens (a) e (b) da figura 5 abaixo.

Figura 5. Ignorados por Apolônio. Exemplo de duas linhas que se tocam, onde há uma inclinação, mas que não se pode interpretá-las como um ângulo, segundo Apolônio



Fonte: elaborado pelo autor, 2017.

⁹ Veja uma definição de *Curva diferenciável* em, por exemplo, DO CARMO (2014).

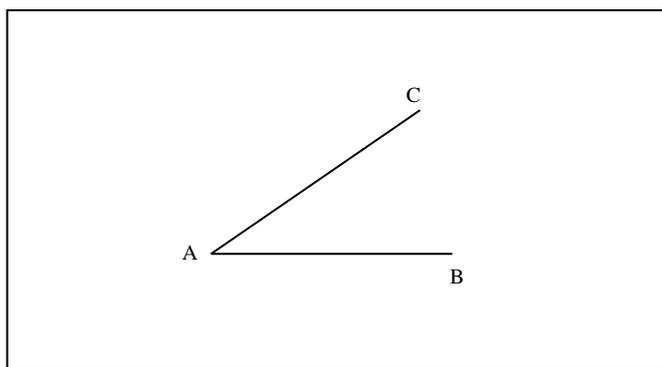
As definições de ângulo em Euclides são, de fato, as que se tem registradas há mais de dois mil e trezentos anos, porém, até agora, a questão identitária do ângulo não está absolutamente resolvida, pois a pergunta: *o que é de fato um ângulo*, não conhece, até então, uma resposta que vá além de aproximações.

A não reflexão, por parte de quem ensina, sobre as definições trazidas por Euclides, e transmitindo-as em sua aceção, puramente intuitiva, não evidencia as fragilidades que ela comporta. Ao ser mostrado um desenho a uma criança, como o que se ver na imagem (a) ou (b) da figura 5 acima, como representação de um ângulo, ele muito dificilmente atentará que a imagem (c) contida na figura 4 é também um ângulo, pois não fere em nada a definição em questão. Esse aspecto estritamente intuitivo no definir e no ensinar se constitui em um verdadeiro obstáculo epistemológico, como nos fez crer Bachelard (1996).

Ao longo dos tempos, o conceito experimentou outras definições que não são apenas modificações linguísticas, mas, sim, tentativas de definir-se o conceito de forma mais rigorosa e clara como um objeto geométrico fundamental nesse ramo da matemática e em todos os outros que se utilizam dela; como as que podemos encontrar em alguns livros didáticos da educação básica, tais como as que seguem relacionadas abaixo:

1. “Um ângulo retilíneo é a figura formada por duas retas que partem do mesmo ponto.”¹⁰ que se faz acompanhar da figura 6 que segue.

Figura 6. Ângulo em Chaput. Reprodução da figura que defini um ângulo em Chaput (1946).



Fonte: Chaput (1946).

2. “Um ângulo é a união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta.”¹¹. Ressaltando que “ângulo” é simplesmente um conjunto.

¹⁰ CHAPUT, Frère Ignace. **Elementos de Geometria**, 1946, p. 5.

3. “Uma região do plano, convexa, limitadas por duas semirretas de mesma origem, não opostas e não coincidentes é denominado ângulo”¹².
4. “Chama-se ângulo à região convexa do plano em que duas semirretas de mesma origem, e não opostas, dividem esse plano”¹³.
5. “Giro ou rotação. A rotação de uma semirreta em torno da origem descreve um ângulo”¹⁴.
6. “A essa ideia de abertura associada ao giro denominamos ângulo”¹⁵.

Em sua trajetória científico-pedagógica, o conceito de ângulo experimenta uma abordagem oferecida pelo eminente matemático e professor alemão, David Hilbert (1862 - 1943). De acordo com Boyer (1974), em 1899,

ele havia publicado um volume pequeno, mas famoso chamado *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da geometria). Essa obra, traduzidas nas línguas principais ^[13], exerceu forte influência sobre a matemática do século vinte, (BOYER 1974, p. 446). Grifo do autor.

A primeira tradução em língua portuguesa, baseada na 7ª edição alemã, datada de 1930, tem lugar em 1951 e nela se lê: “Não é este um livro de texto de geometria elementar, mas esta tradução é dedicada aos nossos professores da matéria e aos estudantes de matemática das nossas Universidades.” (HILBERT, 2003, grifo nosso). Fica implícito uma preocupação com a formação de professores e futuros professores de matemática no tocante ao conteúdo específico de geometria, devido ao fato de que, conforme Boyer (1974), “foi nos *Grundlagen* de Hilbert que um esforço foi feito pela primeira vez para dar-lhe o caráter puramente formal que tinham a álgebra e a análise”. (BOYER, 1974, p. 446, grifo nosso), o que contribuiu para consolidação da escola axiomática que influenciou tanto o pensamento quanto o ensino da matemática contemporânea.

O conceito de ângulo recebe nos *Grundlagen* a seguinte definição:

Seja α um plano qualquer, e sejam h, k duas semi-rectas quaisquer, diferentes, no plano α , que partem do ponto O e que pertencem a rectas distintas. Ao sistema destas semi-rectas h, k chamamos **ângulo** e representamo-lo por $\angle(h, h)$ ou $\angle(k, h)$. (HILBERT, 2003, p. 10-11).

¹¹RESENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**, São Paulo: Unicamp, 2008, p. 21.

¹² GIOVANNI, CASTRUCCI, GIOVANNI JR. **A conquista da Matemática (A + nova)**, 5ª série, São Paulo: FTD, 2002 p.130.

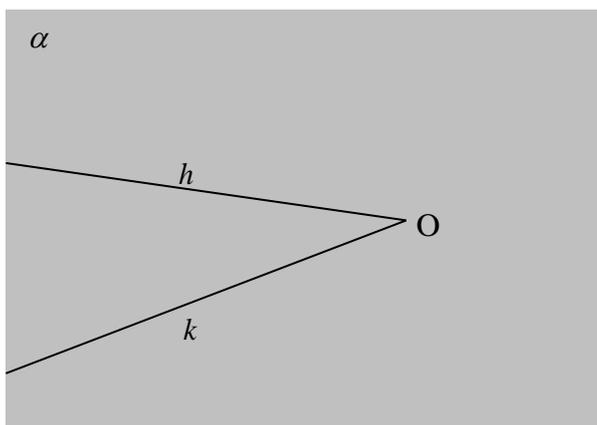
¹³ SÍPIONI DI PIERRÔ NETTO. **Matemática Sipioni**, 6ª série, São Paulo : Sipioni, , 1997 p. 179. - In GADOTTI (2008) – Dissertação de Mestrado.

¹⁴ **Matemática Ensino Fundamental 5**, Projeto Araribá. Ed. Moderna, 2004, p. 84

¹⁵ LONGEN, Adilson. **Matemática em Movimento**. 5ª Serie, São Paulo: Editora do Brasil, 1999, p. 205.

A figura 7, que segue abaixo, é uma tradução gráfica da definição acima, que, juntamente com ela, faz parte, de acordo com o que diz Tall & Vinner (1981), sobre a imagem do conceito, e, em particular, da imagem do conceito de ângulo em Hilbert.

Figura 7- Ângulo em Hilbert. Representação gráfica do ângulo $\angle(h,k)$ no plano α .



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Hilbert, logo após definir ângulo, insiste em advertir-nos de que o ângulo *nulo* e o ângulo *raso* estão excluídos dela. Essa advertência já dá conta do alcance limitado desta definição, uma vez que se admite explicitamente a existência desses ângulos pelo que declarou, diz então: “Por esta definição são excluídos os ângulos *raso e nulo*.” (HILBERT 2003, p. 11, grifo nosso). Na sequência, somos conduzidos pelo autor no sentido de concluirmos pela existência de (três) subconjuntos do plano caracterizados por ele a partir do sistema que, segundo ele, define ângulo e do que se percebe, claramente, como consequência do trecho que segue:

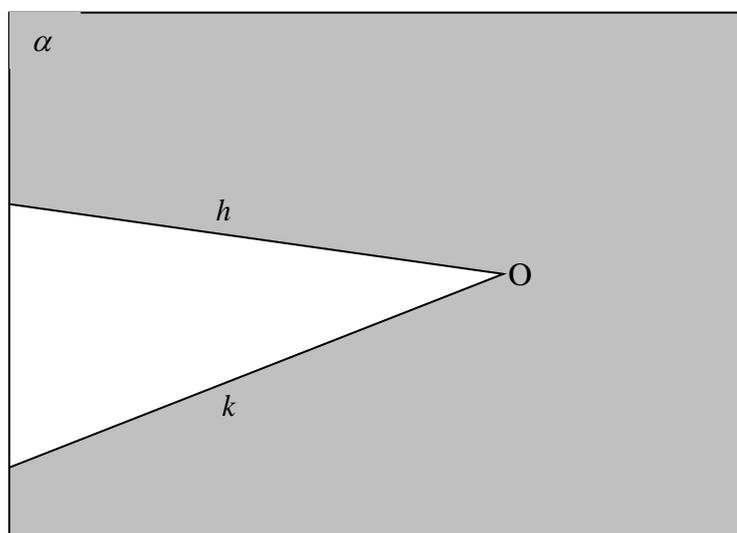
Sejam \bar{h} a recta a que pertence a semi-reta h e \bar{k} a recta a que pertence a semi-reta k : As semirretas h e k tomadas juntamente com o ponto O repartem os restantes pontos do plano em dois domínios: de todos os pontos que estão com h do mesmo lado da recta \bar{k} e com k do mesmo lado de \bar{h} , diz-se que estão no *interior* do ângulo $\angle(h,k)$; de todos os outros pontos diz-se que estão fora ou no *exterior* deste ângulo (HILBERT, 2003, p. 11).

Além do mais, os conjuntos (domínios) caracterizados acima, com interior e com exterior do ângulo $\angle(h,k)$, não contém nenhum dos pontos das semirretas h e k de acordo com o enunciado do:

TEOREMA 8. Cada reta recta a que está num plano α separa os pontos deste plano que não estão nela, em dois domínios nas seguintes condições: cada ponto A dum domínio determina com cada ponto B do outro domínio um segmento AB no interior do qual está um ponto da recta a ; pelo contrário, dois pontos quaisquer A e A' dum mesmo domínio determinam um segmento AA' , o qual não contém nenhum ponto de a (HILBERT 2003, p. 7, grifos nosso).

Ao desenharmos o par de semirretas com a mesma origem, seu interior e seu exterior, segundo Hilbert, ficam automática e simultaneamente determinados. A figura 8 que segue ilustra os conjuntos caracterizados acima por Hilbert (2003) com respeito ao ângulo.

Figura 8 – Interior de um ângulo. Representação gráfica do ângulo $\angle(h,k)$ no plano α , com seu interior, em branco, e seu exterior, em cinza.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Não é difícil concluir que quando dois pontos A e A' estejam no interior do ângulo, conforme Hilbert, então o segmento de reta determinado por eles também esteja aí contido o que sustenta a afirmação de que o interior do ângulo $\angle(h,k)$ é um subconjunto convexo do plano. Topologicamente, o interior do ângulo é um subconjunto aberto do plano, cuja fronteira é o próprio ângulo. Observe ainda que as imagens contidas na figura 8 também fazem parte da imagem do conceito no sentido trazido por Tall & Vinner (1981).

A atenção dada por Hilbert aos domínios, interior e exterior ao ângulo, não se constituem absolutamente em acessórios ornamentais para embelezar o conceito, mas em peças fundamentais possibilitando, por exemplo, uma abordagem classificatória dos ângulos sob a perspectiva da mensuração, da medida, da comparação, como se vê claramente nas definições de: ângulo agudo, ângulo obtuso e de como se decide quando um ângulo é maior (ou menor) que outro. Além disso, insere o ângulo em uma abordagem topológica, pois ao

definir o interior (exterior) de um ângulo, coloca-o como fronteira, comum, desses domínios no sentido definidos em um espaço topológico¹⁶.

Em Hilbert (2003), não se percebe a questão de se mensurar um ângulo através de algum sistema particular que lhe atribua um valor numérico. Medem-se ângulos pelo aspecto essencial do que significa, de fato, mensurar, medir: *o ato de comparar*. Nesse sentido, tem papel fundamental o teorema 20, assim enunciado por ele:

Sejam dados dois ângulos quaisquer $\angle(h, k)$ e $\angle(h', l')$. Se o deslocamento de $\angle(h, k)$ a partir de h' para o lado de l' determina uma semi-recta k' interior, então o deslocamento de $\angle(h', l')$ a partir de h para o lado de k determina uma semi-recta l exterior e reciprocamente (HILBERT, 2003, p. 20).

Decorre desse resultado uma maneira de se medir, comparar, dois ângulos através de processo intrinsecamente geométrico, o deslocamento, ao dizer:

Se o deslocamento de $\angle(h, k)$ referido no teorema 20 determina uma semi-recta k' interior a $\angle(h', l')$ então dizemos: $\angle(h, k)$ é menor do que $\angle(h', l')$, simbolicamente: $\angle(h, k) < \angle(h', l')$; se ele determina uma semi-recta exterior, então dizemos: $\angle(h, k)$ é maior do que $\angle(h', l')$, simbolicamente: $\angle(h, k) > \angle(h', l')$ (HILBERT, 2003, p. 20).

Outra consequência do que acima está escrito, a congruência entre ângulos como pensada por ele em termos de deslocamentos, encontra no que se colocou em destaque logo acima, como decorre da afirmação: “Reconhecemos que para dois ângulos α e β se tem sempre *um e um só dos três casos* $\alpha < \beta$ e $\beta > \alpha$, $\alpha \equiv \beta$, $\alpha > \beta$ e $\beta < \alpha$.” (HILBERT, 2003, p. 20, grifo do autor). Percebemos essas ideias tanto na definição de ângulo adjacente suplementar como na definição de ângulo reto, quando Hilbert (2003) assim os definiu:

¹⁶ Definições:

I – “A fronteira de um subconjunto S de um espaço topológico X é o conjunto, $fr.(S)$, formado por todos os pontos $x \in X$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de S e do complementar $X-S$.”, Lima (1970), p. 72).

II – “Seja S um subconjunto de um espaço topológico X . Um ponto $x \in S$ chama-se um ponto interior de S quando existe um aberto A de X tal que $x \in A \subset S$.”

O interior de S é o conjunto, denotado por: $int.(S)$, formado pelos pontos interiores de S ”, Lima (1970), p. 71)

III – “O exterior de um conjunto S num espaço topológico X é o conjunto

$ext(S) = \{x \in X; \text{existe } A \text{ aberto, com } x \in A \subset X - S\}$.”, Lima (1970), p. 101).

IV – Aqui o plano euclidiano é entendido como um espaço topológico derivado do espaço métrico constituído do

plano euclidiano e da métrica canônica: $d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ onde:

$A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$.

Dois ângulos que têm o vértice e um lado comum e cujos lados não comuns constituem uma recta, chamam-se *ângulos adjacentes suplementares*. [...]. Um ângulo que é congruente ao seu ângulo adjacente suplementar, chama-se *ângulo recto* (HILBERT, 2003, p. 13).

A partir do ângulo reto, ele vinculou o que chama de *ângulo agudo* e de *ângulo obtuso* nos seguintes termos:

Um que é maior que o seu ângulo adjacente suplementar, ou maior do que um ângulo recto, chama-se um ângulo *obtusos*; um que é menor do que o seu ângulo adjacente suplementar, ou do que um ângulo recto, chama-se um ângulo *agudo*. (HILBERT 2003, p. 22).

Aqui não se viu o aspecto numérico ser empregado explicitamente.

É importante observar que se aplicando as ideias de: *maior que e menor que*, ao conjunto dos objetos definidos como ângulo em Hilbert (2003), instala-se nele, naturalmente, uma estrutura de *ordem*¹⁷, que se verifica *ordem total*¹⁸, ao passo que ao incluirmos o ângulo raso e o ângulo nulo, neste conjunto, a estrutura deixa de ser de ordem total.

Olhando o subconjunto do plano de que esta imagem é constituída, figura 7 já mostrada, o ângulo em Hilbert, do ponto de vista topológico, é exemplo de um subconjunto do plano que coincide com sua própria fronteira, não possui nenhum ponto no seu interior, portanto, não pode ter, desse ponto de vista, um subconjunto não vazio que lhe seja interior.

Apesar do que foi dito acima, Hilbert parece que, sentindo pouco alcance na definição que deu de ângulo, define um novo conjunto ao qual denominou de: *interior do ângulo*. Embora topologicamente ele não seja, de fato, o interior do que ele definiu como ângulo, apesar de desempenhar um papel fundamental para que ele pudesse trabalhar algumas questões relativas à sua mensuração e dar ao conjunto formado por todos eles uma estrutura de ordem.

É fato que, ao desenharmos esse sistema no plano, simultaneamente ‘desenha-se’ dois outros subconjuntos do plano, que vão constituir-se no que, segundo Edward (1984), denominou de espaço negativo dessa linha que desenhamos. Note que sempre é possível percebermos, ao concluir-se o desenho do sistema, do ângulo, três conjuntos: o efetivamente desenhado, seu espaço negativo, que por sua vez é constituído da união de um conjunto convexo e um não convexo, embora essa percepção não pareça ser tão óbvia, é preciso voltar à atenção sobre a ação acabada, e, quase sempre, fazer as perguntas: o que você vê, além do que efetivamente foi desenhado? Como consequência de sua ação, pode identificar propriedades nestes subconjuntos? Buscando respondê-las à luz de propriedades topológicas,

¹⁷ Ver definição de ordem em Halmos, Paul R. 1970, p. 59.

¹⁸ Ver definição de ordem total em Halmos, Paul R. 1970, p. 59

e/ou geométricas destes. O espaço negativo associado à representação do ângulo em Hilbert, nada mais é, do ponto de vista da matemática, que a união dos conjuntos que ele define como interior e como exterior do ângulo, os quais são respectivamente: convexo e não convexo.

O conceito de ângulo é abordado por Barbosa (1985) sob uma perspectiva axiomática e intuitiva. Intuitiva, por quanto faz uso de imagem gráfica, ‘figura’, para trazer, para evocar a definição desse conceito. Enuncia então: “Chamamos de **ângulo** a figura formada *por duas semirretas com a mesma origem.*” (BARBOSA 1985, p. 23, grifo nosso).

Duas semirretas com a mesma origem podem pertencer à mesma direção¹⁹ ou a direções diferentes. Pertencendo à mesma direção, elas podem ser opostas ou coincidentes – opostas quando apenas a origem pertence a ambas e coincidentes quando qualquer outro ponto, além da origem, pertença a ambas. Observando que no enunciado da definição de ângulo em Barbosa (1985) nenhuma objeção é explícita ou implicitamente feita quanto a elas pertencerem ou não à mesma direção, poderíamos, assim, dizendo de outra maneira, que ângulo é a figura formada por *todo e qualquer par de semirretas com mesma origem.* A sequência de figuras²⁰ 9, 10 e 11, que segue abaixo, traz exemplos do que se disse.

Figura 9 – Ângulo em Barbosa. Reprodução da representação gráfica da definição de ângulo, figura 3.1. Exemplo de ângulo formado por duas semirretas com mesma origem e pertencentes a direções distintas.

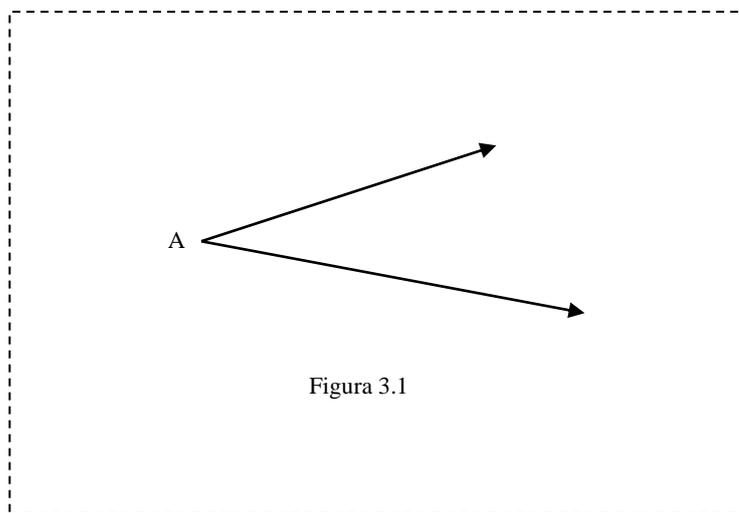


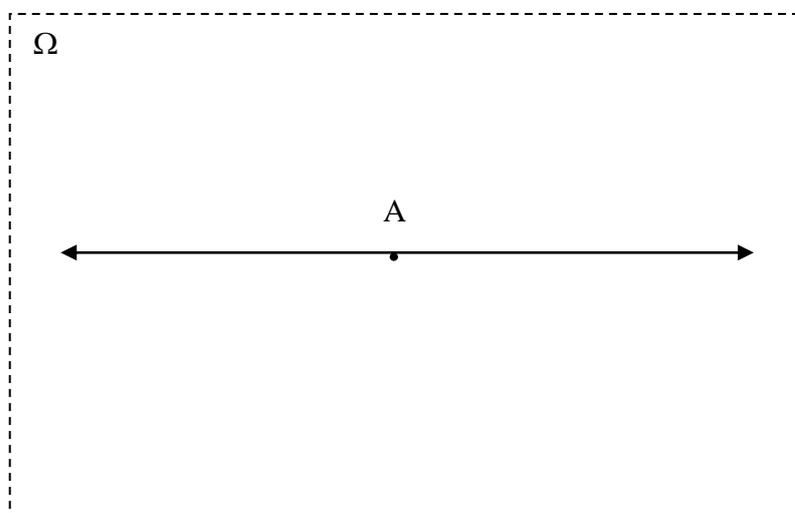
Figura 3.1

Fonte: BARBOSA (1985, p. 23).

¹⁹ Uma *direção* no plano é o conjunto constituído de todas as retas paralelas entre si.

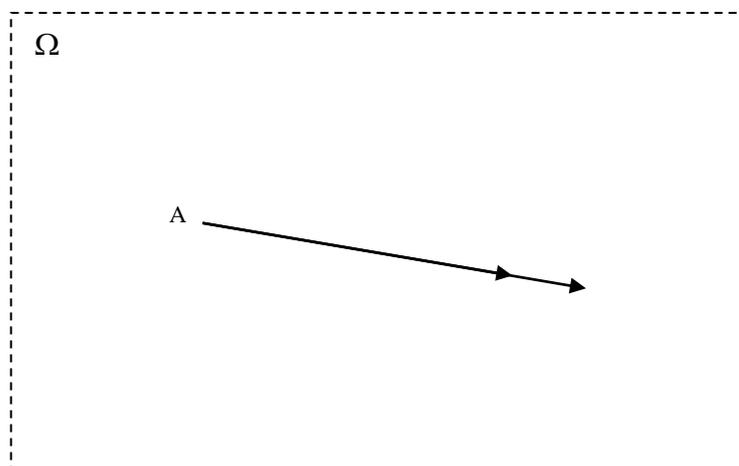
²⁰ A representação de uma semi-reta por via de uma flecha é aqui mantida no sentido de preservar a notação usada pelo autor.

Figura 10 – Ângulo raso. Representação do ângulo raso. Duas semirretas distintas, com mesma origem e contidas numa mesma reta (numa mesma direção).



Fonte: BARBOSA (1985, p. 23).

Figura 11 – Ângulo nulo. Representação gráfica do ângulo constituído por duas semirretas coincidentes.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

O ângulo como definido em Barbosa (1985) é, obviamente, uma figura geométrica que se representa, graficamente, por uma linha, entenda linha no sentido trazido por Ferreira (2010). Como subconjuntos do plano, entendido este como um espaço topológico, qualquer ângulo tem seu interior²¹ vazio, e, eles próprios coincidem, cada um, com sua própria

²¹ Seja X um espaço topológico e $S \subset X$. "Um ponto $x \in S$ chama-se um ponto interior de S quando existe um aberto A de X tal que $x \in A \subset S$.", (LIMA 1970, p.71).

fronteira²². Além do mais, os ângulos nulos e os rasos são, ambos, subconjuntos convexos do plano, enquanto que os ângulos nem nulo nem raso, são subconjuntos não convexo do plano.

A mensurabilidade do ângulo definido em Barbosa (1985) é abordada de maneira axiomática. Inicia-a com o seguinte enunciado: “Todo ângulo tem *uma medida em graus* maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, ele é constituído por duas semirretas coincidentes. Todo ângulo raso mede 180° .” (BARBOSA, 1985, p. 25), que lhe dá o status de axioma, embora, a palavra axioma segundo Ferreira (2010), signifique: “verdade evidente por si mesma.”, (FERREIRA, 2010, p. 84). O enunciado deixa claro que o ângulo pode ser medido e, além disso, que esta medida se faz através da utilização do sistema de graus, pelo que se lê, explicitamente, no seguinte trecho da redação do axioma: “Todo ângulo *tem uma medida em graus* [...]”. Qual a razão dessa escolha? Há alguma razão matemática que indique essa escolha? Que evidência implica essa escolha? Não encontramos essas respostas. Seria pela simplicidade operacional envolvendo medidas de ângulos nesse sistema?

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Fundamental 3º – nenhuma sugestão é feita a esse respeito. A questão do “por quê?”, exatamente, o sistema de *graus* foi escolhido para figurar no enunciado do axioma, pois há outros sistemas como, por exemplo, o radiano, não encontra uma razão evidente para sua escolha, senão, o fato puramente histórico como se pode inferir do que dizem Boyer (1974) e Costa (1997). O primeiro nos induz a perceber que nem egípcios nem babilônios conheciam um sistema de medição de ângulos semelhante aos sistemas modernos de que dispomos hoje e sendo o sistema de graus engendrado a partir da divisão da circunferência em 360 arcos de mesmo comprimento, o que ocorreu muitos séculos antes da existência de Euclides, colocando um período de mais de três mil anos entre o surgimento do sistema de graus e o sistema de radianos, que conforme diz o segundo:

O radiano, em sua origem, contrasta com o grau. Ele surgiu num trabalho do físico Thomson em 1873. Ele e o matemático Thomas Muir acharam necessário uma nova unidade angular e escolheram o nome radiano, que é uma combinação de radial ângulo (COSTA, 1997, p. 30).

Assim, o status de axioma mostra fragilidade, pois, parece-nos que só para Barbosa (1985) o sistema de graus é *absolutamente óbvio* ao ponto de dispensar explicações.

Neste sentido, Souza (2012) é mais esclarecedor ao argumentar: “para termos a ideia da medida de um grau, podemos imaginar um círculo dividido em 360 partes, setores

²² “A fronteira de um subconjunto S de um espaço topológico X é o conjunto $\text{fr.}(S)$ formado por todos os pontos $x \in X$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de S e do complementar $X - S$.”, (LIMA 1970, p.72).

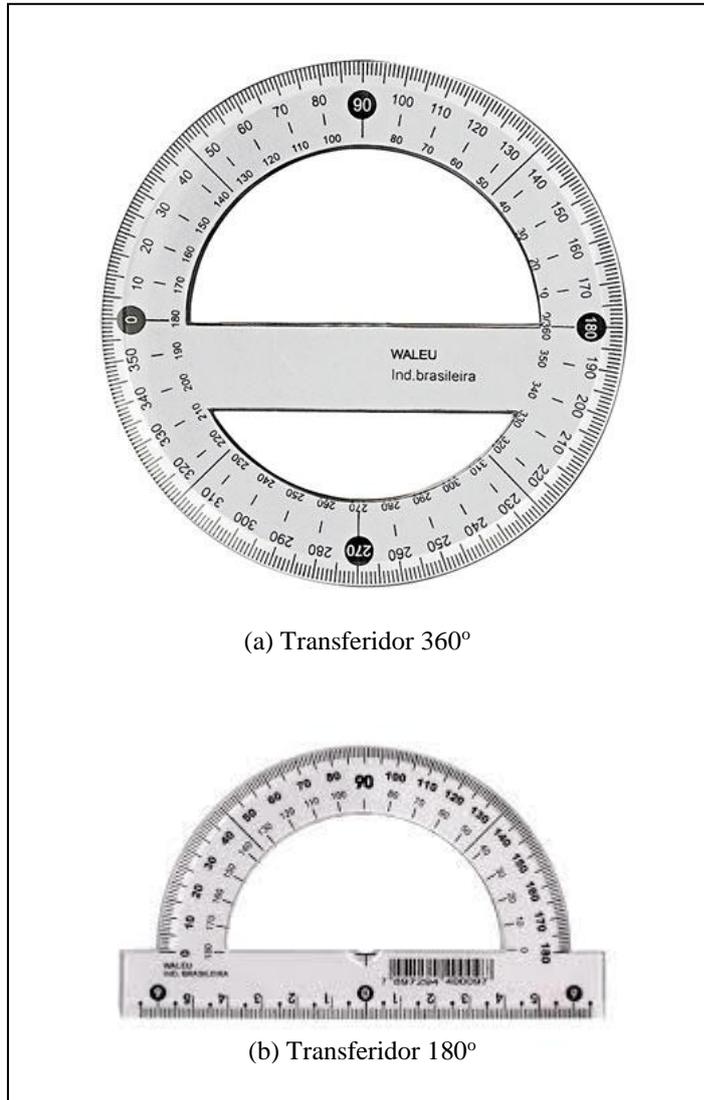
circulares²³, iguais. Um grau corresponde a cada uma dessas partes ...”, (SOUZA, 2012, p. 207).

Nas escolas, para se medir um ângulo, geralmente se usa um instrumento chamado de transferidor, esse, um disco com indicação de seu centro, com a indicação de um diâmetro (a linha de fé)²⁴ e cuja circunferência está graduada em graus, até 360°, ou uma semicircunferência graduada em 180°. Observe que nos modelos de transferidor exibidos abaixo a valorização da graduação é disposta de acordo com as duas orientações possíveis para o plano, conforme a figura 12 abaixo. Souza ainda explica como se deve fazer, ao tomar, a medida de um ângulo com um transferidor a partir da instrução: “posicionamos o seu centro no vértice do ângulo e a linha de fé deve coincidir com um dos lados do ângulo.” (SOUZA, 2012, p. 207). Há ainda uma questão: Entre as duas semirretas há uma única quantidade de graus? De uma semirreta até a outra existem quantidades distintas de graus, exceto quando estas semirretas forem opostas de acordo com a figura 13 abaixo. Conforme o modo de como tomamos essa medida, ou seja: se tomarmos a medida envolvendo o subconjunto convexo ou o subconjunto não convexo do plano, determinado pelo “ângulo”, tem-se, obviamente, valores em graus, ou outro sistema distinto.

²³ *Setor circular*: é o subconjunto convexo de um círculo delimitado por dois de seus raios, não alinhados, e o arco de circunferência compreendido entre eles.

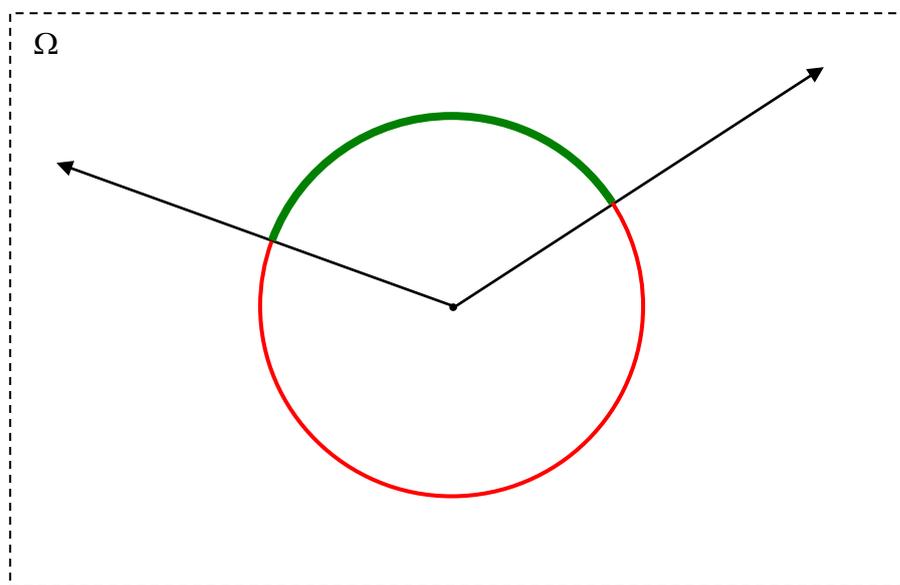
²⁴ Linha de Fé em um transferidor é o segmento de reta formado por um diâmetro com indicação do seu ponto médio, o centro do círculo.

Figura 12. Transferidor. Tipos de transferidores.



Fonte: [google.com.br/search?q=transferidor+de+grau+360&](https://www.google.com.br/search?q=transferidor+de+grau+360&) / acesso: maio de 2017

Figura 13. Medida ambígua. O ângulo, como definido em Barbosa (1985), onde as semirretas não são opostas, pode admitir dois valores para sua medida no mesmo sistema, por exemplo, o sistema de graus.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Souza (2012), orientando sobre como aferir um ângulo, de acordo com a representação que dá para este, diz: “[...] a medida do ângulo é lida no transferidor no sentido anti-horário, [...]”, (SOUZA, 2012, p. 165) e, além disso, diz como se deve tomar a medida de um ângulo. Em suas palavras: “Para isso, posicionamos o centro do transferidor no vértice do ângulo. A linha marcada com o zero, ou seja, alinha de fé, deve coincidir com um dos lados do ângulo.”, (SOUZA, 2012, p. 165).

As orientações em Souza, adaptadas para o ângulo como definido em Barbosa (1985), mostram-se frágeis, pois, as medidas tomadas podem variar, como podemos comprovar experimentalmente, visto que elas dependem de qual lado seja utilizado para iniciarmos a medição, da orientação adotada para o plano ainda que se mantenha a mesma orientação, podendo-se obter valores diferentes. A medida de um ângulo, em respeito ao que ele é como objeto, deve ser um atributo dele próprio, invariante dentro de um mesmo sistema que possamos escolher para medi-lo. O que sustenta, de forma imperativa, a escolha da opção? Uma convenção sobre, ou a imposição, a exigência, do próprio instrumento de medida, o transferidor, o modo como ele foi confeccionado, o que, afinal? Assim, o axioma não se sustenta para além do entendimento do senso comum, pois, do ponto de vista lógico-matemático tem dificuldades de se afirmar.

Além disso, o ideal didático não pode permitir que em seu nome sejam criadas abordagens que não ponha luz aos conteúdos a ensinar através de processos que mais velam do que revelam a verdade, e também, que as adaptações necessárias a uma boa transposição didática, no sentido tratado por Chevallard (1981), não venham a descaracterizar, também, o objeto a ensinar conduzindo-nos por caminhos inconsistentes e que possam deixar dúvidas.

Dois fatores podem constituir obstáculo ao conhecimento do “ângulo”, e como consequência ao seu ensino de forma completa: o caráter eminentemente intuitivo na abordagem do mesmo, pois concordamos com Bachelard (1996) quando diz:

[...], o primeiro obstáculo é a experiência primeira, a experiência colocada antes e acima da crítica – crítica esta que é, necessariamente, elemento integrante do espírito científico. Já que a crítica não pode intervir de modo explícito, a experiência primeira não constitui, de forma alguma, uma base segura. (BACHELARD, 1996, p. 29),

E seu emprego mecanicista e utilitário como quantidade numericamente expressa, que mais se parece atender a alguma conveniência circunstancial do que à própria necessidade do objeto. A definição de ângulo trazida por Barbosa (1985) apresenta problemas de unicidade de valor, quando da sua mensuração.

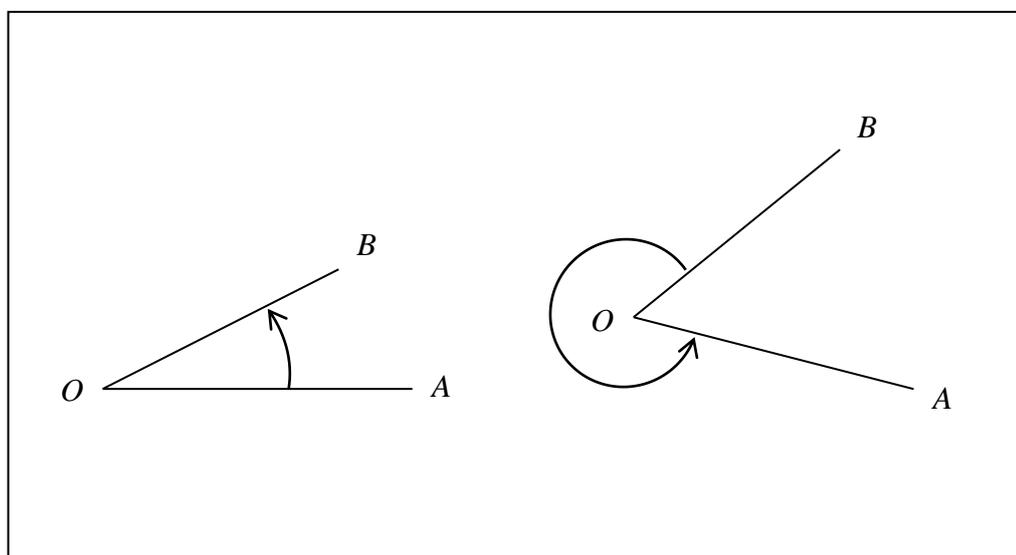
Medir vai além da utilização de um método um instrumento. Medir requer, essencialmente, conhecer por completo o objeto a ser medido, a eficácia do método e a precisão do instrumento de aferição, “é preciso *refletir* para medir, em vez de medir para refletir”, (BACHELARD 1996, p. 262).

Muniz Neto (2013), para dar significado matemático à palavra ângulo, faz isso ao oferecer uma definição expressa nos seguintes termos: “Dadas, no plano, duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , um **ângulo** (ou **região angular**) de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .” (MUNIZ NETO, 2013, p. 11). As regiões de que trata o enunciado podem ser percebidas, claramente, a partir de um par de semirretas com mesma origem como se pode deduzir da notação utilizada no texto para referenciá-las quando se lê: “[...] pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .”, grifo nosso, (MUNIZ NETO, 2013, p. 11). Essas semirretas são designadas no texto da definição de *lados do ângulo* (ou **região angular**), mas dele, não se pode deduzir que elas próprias façam parte efetiva do ângulo (ou **região angular**) e isso tem consequências como veremos mais adiante. Tanto as semirretas quanto as regiões que as têm como limite podem ser consideradas como subconjuntos do plano, considerando o próprio plano como conjunto universo, o que nos permitirá uma análise a luz da Teoria dos Conjuntos, possibilitando uma análise mais

consistente do que significa, ou possa significar, o enunciado da definição em tela, aplicando-se desta teoria, conceitos e resultados que se fizer necessário, para conhecer esta definição mais claramente.

Muniz Neto (2013) faz uso do conceito de conjunto (subconjunto) convexo no plano para classificar os ângulos (ou regiões angulares) submetendo-os a este ao dizer: “um ângulo pode ser convexo ou não convexo” (MUNIZ NETO, 2013, p. 11) e exemplifica através da figura 14.

Figura 14. Ângulo convexo e ângulo não convexo. Reprodução da figura 1.11 à p. 11 referida no texto como exemplos de ângulo convexo, a da esquerda e ângulo não convexo, a da direita.



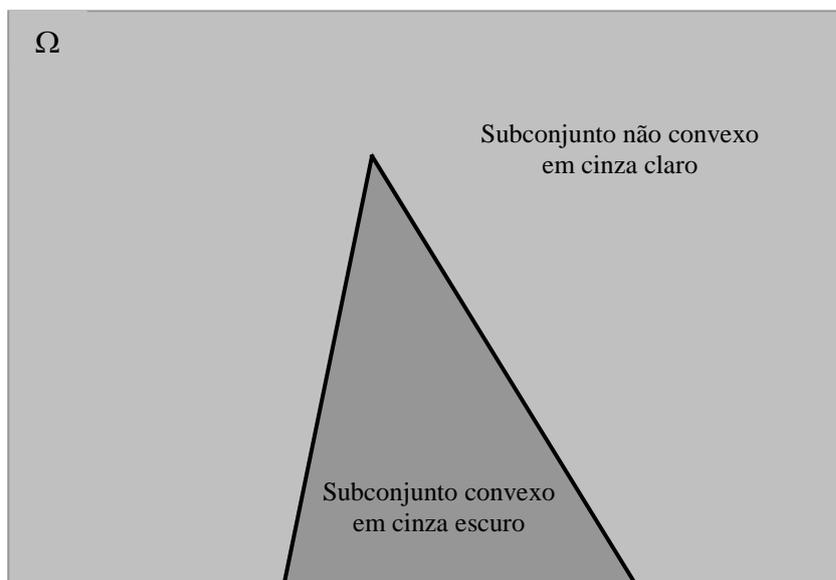
Fonte. Muniz Neto (2013, p. 11).

Apesar do ensino da teoria dos conjuntos, atualmente, não ocupar parte relevante na maioria dos currículos para o sexto ano do ensino fundamental, ou seu equivalente, em decorrência, talvez, do que encontramos nos PCN (1997), a respeito do ensino dessa teoria ao referir-se ao período em que o ensino da matemática esteve sob a influência do Movimento da Matemática Moderna no país, declarando: “A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, foi introduzida com tal ênfase que a aprendizagem de símbolos e de uma terminologia interminável, comprometia o ensino do cálculo, da geometria e das medidas.” (PCN, 1997, p. 20), essa teoria é de fundamental importância nas matemáticas e seu ensino, ocupando lugar como linguagem e como um campo da Matemática. O que de fato ocorreu, e ainda ocorre, foi uma formação precária e a improvisação de professores de Matemática,

como até hoje ainda ocorre em grande parte do sistema de ensino, mais precisamente fora da rede pública oficial de ensino. Felizmente, conceitos fundamentais dessa teoria, como o de complementar de um conjunto, que utilizamos, pode ser levado aos alunos de uma forma lúdica quando se percebe, de maneira inequívoca, que as ideias de *espaço negativo* e *espaço positivo*, segundo explicado por Edward (1984) podem ser interpretadas sob a luz da teoria dos conjuntos, do conceito de complementar de um conjunto e assim podemos utilizá-lo para levar o conceito de complementar de uma forma menos formal e direta aos alunos. Portanto, ao desenharmos, ou imaginarmos no plano, duas semirretas com origem comum, o que chamamos de espaço positivo por decorrência da ação, mental ou física para criá-las, simultânea e automaticamente, percebemos a existência de outro conjunto, o espaço negativo a elas associada, que, do ponto de vista da teoria dos conjuntos, nada mais é que o complementar, desse par de semirretas, com relação ao plano, entendidas elas como subconjunto do plano. O complementar do par de semirretas pode ser percebido como:

1- a união disjunta de um subconjunto convexo e outro não convexo – sempre que as semirretas com mesma origem pertençam a direções distintas, figura 15;

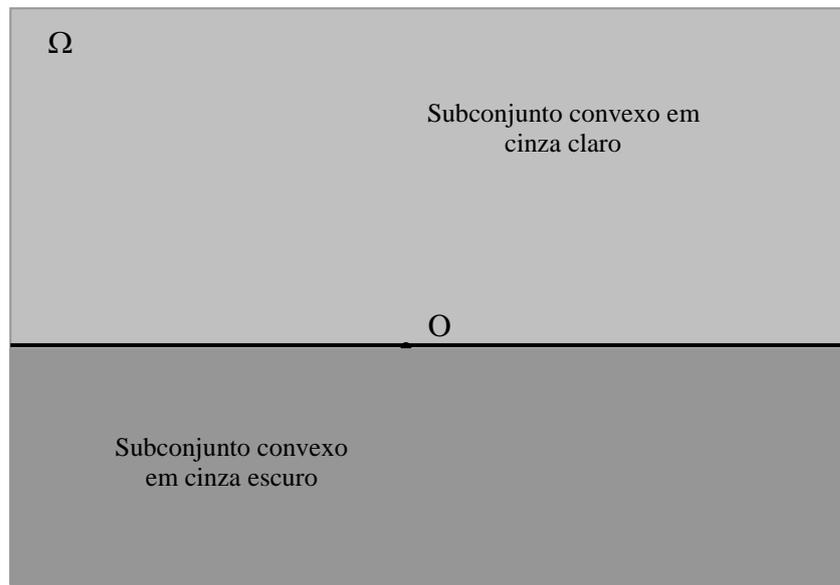
Figura 15 – Direções distintas. Complementar do par de semirretas com origem comum como união dos subconjuntos convexo e não convexo.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

ou um subconjunto não convexo formado pela união disjunta de dois conjuntos convexos – quando as semirretas são opostas, figura 16;

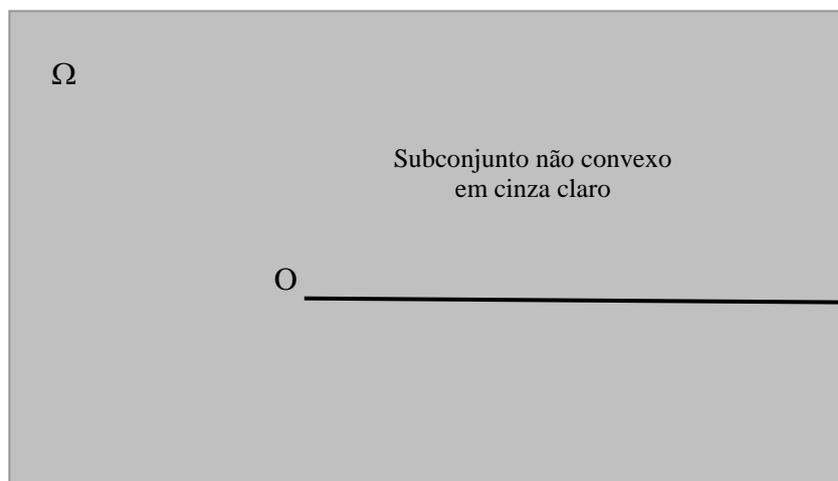
Figura 16 – Semirretas opostas. Complementar do par de semirretas com origem comum e na mesma direção, como união do de subconjuntos convexo.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

2- ou ainda um subconjunto não convexo no qual quaisquer dois de seus pontos podem, sempre, ser extremos de uma poligonal. Figura 17 abaixo

Figura 17 – Semirretas coincidentes. Conjunto não convexo coincidindo com o complementar do par de semirretas com origem comum e coincidentes.

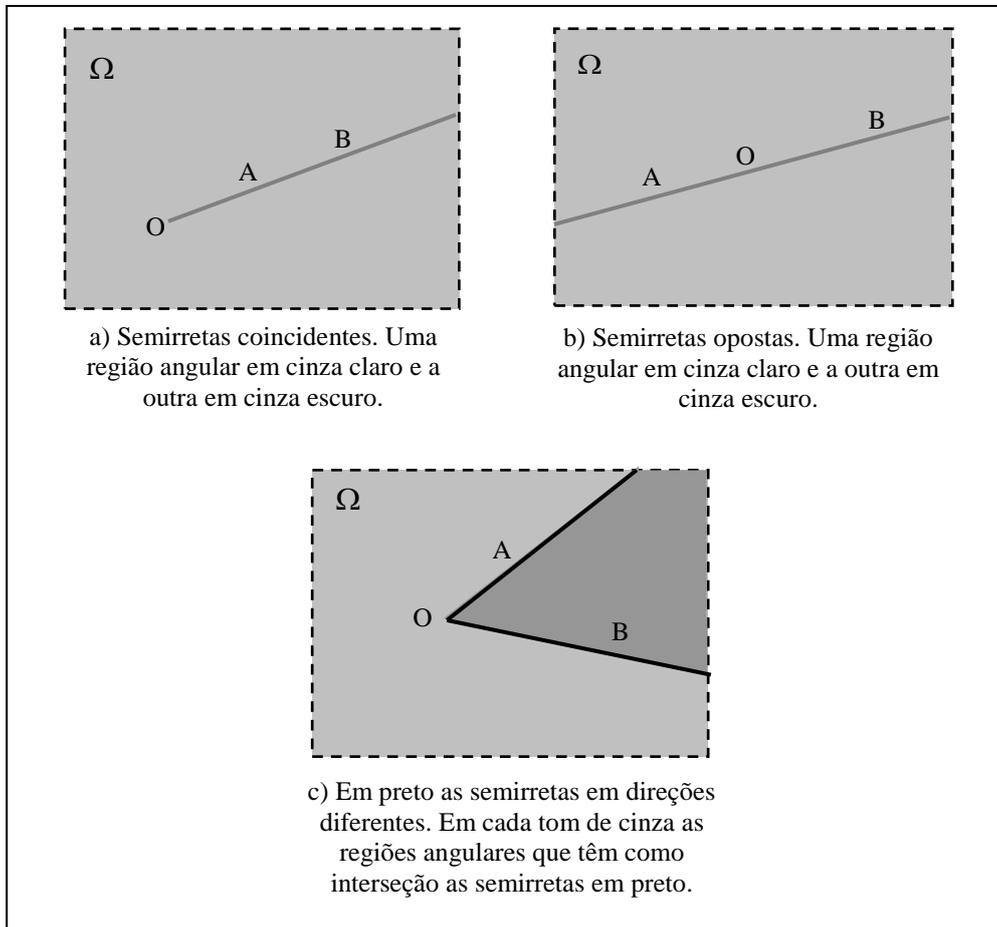


Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Ernst (1991), afirma: “O desenho é, na verdade ilusão”, (ERNST, 1991, p.26), pois poderá torna real, ou fazer parecer real, como desenho, uma impossibilidade real de natureza física, com por exemplos alguns trabalhos de Mourits Cornelis Escher. Por essa razão, faz-se

necessário dizer que é possível demonstrar matematicamente as informações contidas nas figuras 15, 16 e 17 e, além disso, utilizarmos desse recurso para traduzir a definição de ângulo aqui tratada através da figura 18, que segue mais abaixo. Esta figura contém três imagens que são, cada uma delas, um exemplo das infinitas possibilidades de traduzir-se, em termos de representação gráfica, de imagem, o que quer dizer esta definição e que faz de cada uma delas, parte do que Tall & Vinner (1981) chamam de ‘imagem do conceito’. É importante convencer-se de que, a princípio, é legítimo traduzir todas as imagens semelhantes às imagens (a) ou (b) contidas na figura 18, como, efetivamente, um registro gráfico do que significa ângulo (ou região angular); isso não é difícil por conta do fato de que ao enunciar a definição não se fez qualquer restrição ao fato de que elas, as semirretas, estejam ou não na mesma direção e de que também fazem parte, como já foi dito, da imagem do conceito. Na imagem (a) da figura 18 vemos duas regiões do plano limitadas pelas semirretas em questão e, por conta do estímulo visual, captado pelo sentido da visão em nossa mente, como o próprio par de semirretas, que é convexo, e o seu complementar que é não convexo. Assim, as imagens podem ser interpretadas como ângulo (ou região angular), aparentemente de forma legítima, do ponto de vista intuitivo, mas que não resiste a uma análise mais elaborada como veremos adiante.

Figura 18. Ângulo em Muniz Neto. Interpretando Exemplos de imagens que se assemelham aos ângulos (ou regiões angulares).



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Na imagem (b), o que se apreende, no primeiro olhar, é uma reta no plano, e, como consequência imediata, os semiplanos determinados por elas. Ao permanecer essa interpretação, podemos perceber que a reta e cada um dos semiplanos por ela determinado compartilhará da mesma propriedade: *são regiões convexas do plano*. Só após apurarmos o “olhar”, respaldando-o na teoria dos conjuntos, é que, ao aplicarmos a definição de complementar de um conjunto, ao par de semirretas opostas, vistas como um conjunto, reconhecemos o seu complementar como uma região não convexa. Aqui também o que apenas se vê não resistirá à crítica.

Como restrição alguma se faz no enunciado da definição quanto às semirretas estarem contidas ou não em uma determinada reta ou que elas estejam contidas ou não nas regiões que as tem como limite. Assim, um par de semirretas coincidentes ou um par de semirretas

opostas podem ser, a princípio, utilizadas como regiões, que fazem limite consigo mesma e com seu complementar no plano. E isso tem consequência importante como se mostra a seguir.

Insistimos que as semirretas em questão designam no plano, sempre, uma região (conjunto) convexa(o) e outra(o) não convexa(o). Então, se as semirretas com mesma origem pertencerem a uma mesma reta elas próprias são percebidas, sem dificuldade alguma, como subconjuntos convexos do plano e seu complementar, com respeito ao plano, como um subconjunto não convexo. Assim, a princípio, a existência do ângulo convexo e do ângulo não convexo está garantida.

No entanto, nessas duas situações ao se permitir que essas semirretas façam parte integrante do ângulo, ou seja, que o ângulo contenha seus lados, o que equivale a efetuar a união dos conjuntos: o par de semirretas, que neste caso é convexo, com o seu complementar, que é não convexo, obtendo como resultado dessa operação o próprio plano, que é convexo, e, portanto, o ângulo não convexo não poderia existir. Por outro lado, se admitirmos que o ângulo não contenha seus lados, agora, o ângulo convexo infringe o fato de que um conjunto contenha a si próprio, quando na teoria dos conjuntos se afirma: todo conjunto contém a si próprio. Concluimos, assim, que a definição em tela leva a uma dificuldade essencial: o ângulo convexo e o ângulo não convexo poderiam não coexistir amparados pela definição em questão.

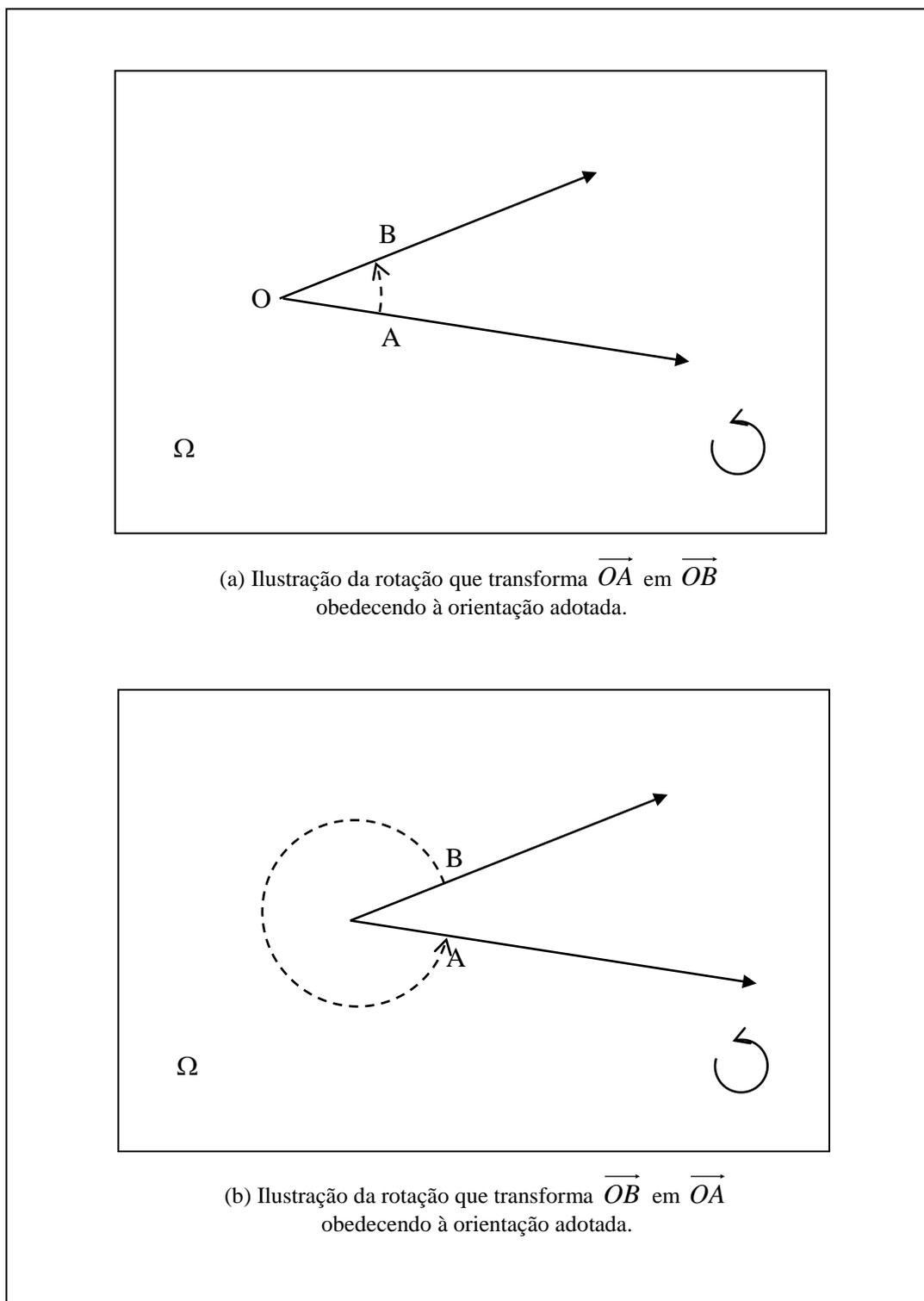
Alexandra Gomes e Elfrida Ralha nos mostram uma definição de ângulo, atribuída, segundo Calado (1955), aos autores A. Snnia e E. d'Ovídio, a qual segue transcrita: “*o ângulo é uma rotação, operação que transforma uma semi-recta noutra semi-recta com mesma origem*”²⁵ (GOMES & RALHA). Essa definição, de concepção dinâmica, traz a palavra ângulo como significando uma *ação*, um *movimento* que atua sobre uma semirreta transformando-a em outra semirreta, ambas com origem no mesmo ponto. Não se percebe no enunciado de que forma esta ação, este movimento, de fato se realiza e isso tem consequências diferentes conforme a rotação venha a ser realizada. Uma rotação em torno de um ponto P só pode ser realizada de duas maneiras, a saber: conforme a orientação adotada para o plano, chamada de orientação positiva, ou de acordo com a orientação contrária a ela. Vamos mostrar

²⁵ O CONCEITO DE ÂNGULO: experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo / Alexandra Gomes (magomes@iec.uminho.pt) & Elfrida Ralha (eralha@math.uminho.pt) - Universidade do Minho.

que transformar uma semirreta em outra de mesma origem através de uma rotação, embora o resultado final desta ação seja o mesmo, pode haver uma diferença essencial em função de como realizamos esta rotação. Analisemos duas possibilidades impostas pelas próprias semirretas quanto às direções do plano que podem possam assumir, ou seja: pertencerem à mesma direção ou não. Vejamos então.

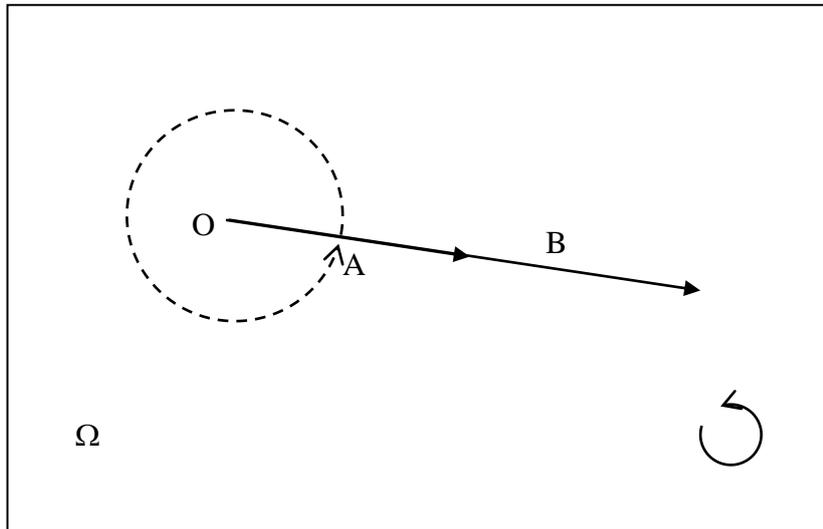
1. As duas semirretas estão em direções diferentes. Neste caso, qualquer que seja a orientação escolhida para o plano haverá, sempre, duas rotações levando uma semirreta na outra, uma que concorda com a orientação escolhida e outra que não concorda com esta orientação. Por exemplo, sejam O, A e B pontos do plano, dois a dois distintos, e considere as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} . Podemos optar por transformar \overrightarrow{OA} em \overrightarrow{OB} ou \overrightarrow{OB} em \overrightarrow{OA} . Obteremos, para cada opção feita, segundo a definição de ângulo em questão, ângulos que resultam diferentes, pois suas medidas são distintas, como evidenciado na figura 16 abaixo.
2. As semirretas estão na mesma direção. Duas possibilidades podem ocorrer. Em uma as semirretas são coincidentes e neste caso verifica-se a existência de dois ângulos a semelhança do que se fez no item (1) logo acima. Na outra, as semirretas são opostas, e, independente da orientação que se adote para o plano e da escolha de qual semirreta será transformada na outra haverá ainda dois ângulos distintos – pois não há problema com a lógica – ainda que suas medidas sejam iguais. As figuras 19 e 20 ilustram o que aqui se diz.

Figura 19. Ângulo como rotação. Imagens (a) e (b) ilustrando como uma rotação transforma uma semirreta em outra com mesma origem, respeitando a orientação adotada no plano.

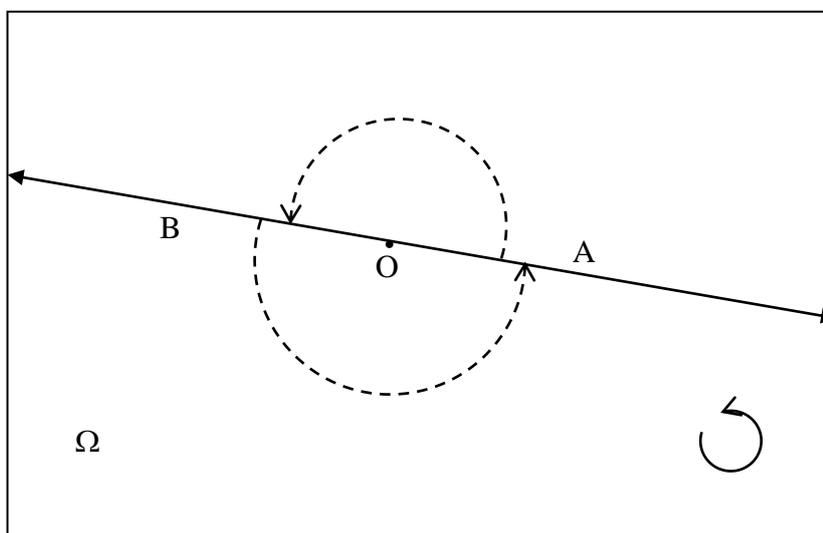


Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 20. Rotação: semirretas na mesma direção. Imagens (a) e (b) ilustrando como uma rotação transforma uma semirreta em outra com mesma origem, respeitando a orientação adotada no plano.



(a) Ilustração da rotação que transforma \vec{OA} em \vec{OB} , rotação nula, subentendida, e a que transforma \vec{OB} em \vec{OA} obedecendo à orientação adotada explícita.
Fonte autoral



(b) Ilustração da rotação que transforma \vec{OA} em \vec{OB} , tracejado superior, e \vec{OB} em \vec{OA} , tracejado inferior, obedecendo à orientação adotada.
Fonte autoral

Fonte: produzido pelo autor, 2017.

No plano, identificado com R^2 , há uma família de funções a um parâmetro real que consiste em aplicar o ponto X no ponto $F_\theta(X)$, o qual corresponde a girar, rotacionar, o ponto X em torno da origem até a posição $P = F_\theta(X)$. Especificamente, para cada θ temos $F_\theta : R^2 \rightarrow R^2$ definida por $F_\theta(X) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot (X)$ que, segundo O'Neill (1972), é um exemplo de isometria²⁶ no plano, mais precisamente *uma rotação*. O curioso é que esta rotação, $F_\theta(X)$, transforma a semi-reta \overrightarrow{OX} na semi-reta $\overrightarrow{OF_\theta(X)}$ e então, segundo a definição em tela, é *um ângulo* e depende necessariamente do parâmetro θ , que neste contexto, nada mais é que a medida em radianos da rotação, do **giro**, necessário para realizar a ação, ou seja: levar X em $F_\theta(X)$. Enfim: a rotação usada para definir a própria rotação em termos matemáticos. Outra função, $g : [0, \frac{\pi}{4}] \subset R \rightarrow R^2$ definida por $g(t) = (r \cos t, r \text{sen} t)$ onde r é uma constante real, descreve a rotação, em torno da origem do referencial canônico do plano, do ponto $g(0) = X_o = (r, 0)$, por exemplo, até o ponto $g(\frac{\pi}{4}) = X_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}r, \frac{\sqrt{2}}{2}r)$. Observe que esta função pode ser usada para interpretar a transformação da semi-reta $\overrightarrow{OX_o}$ na semi-reta $\overrightarrow{OX_1}$. Então, ela é, também, um ângulo, por conta da definição aqui tratada. E, quem é “t”? É a medida em radianos do giro necessário para movimentar X_o até $g(t)$. Desse modo, a intuição do que seja uma rotação, um giro, e o processo de defini-la matematicamente encontra-se diante de um sutil impasse, tornar a definição matemática da rotação impredicativa no mesmo sentido que Eves (2004) dá a essa palavra quando fala das antinomias da teoria aos conjuntos, à página 676.

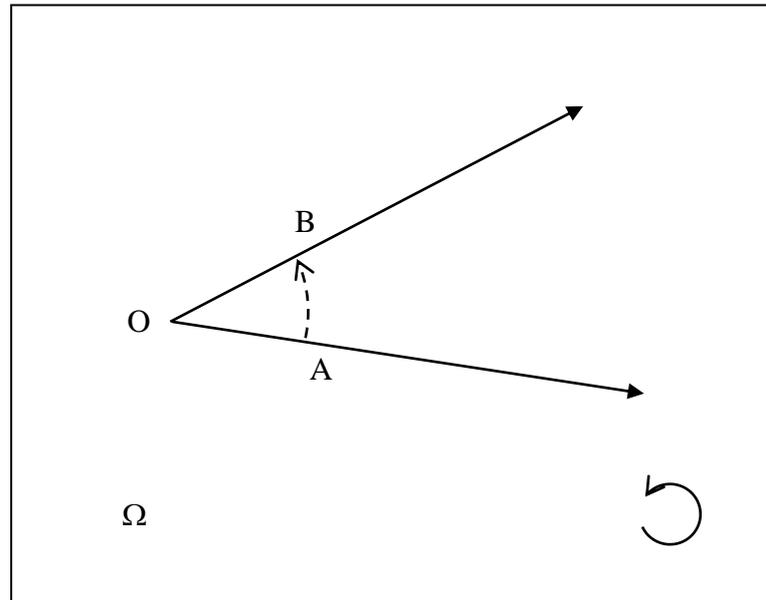
Ao transformar uma semirreta em outra de mesma origem pode evidentemente ser realizada através das funções F , no caso em que as semirretas são previamente dadas e o parâmetro θ é também dado, quando queremos traduzir o próprio movimento de transformação de uma semi-reta em outra. Veja as figuras 21 e 22 que seguem abaixo.

Quando se define o ângulo como uma rotação que leva uma semirreta em outra semirreta de mesma origem, surgem inconveniências quanto à mensurabilidade desse ângulo e

²⁶ Uma isometria F em R^2 é uma função $F : R^2 \rightarrow R^2$ tal que para todos os pontos $p, q \in R^2$ temos $d(F(p), F(q)) = d(p, q)$. (O'Neill 1972, p. 117).

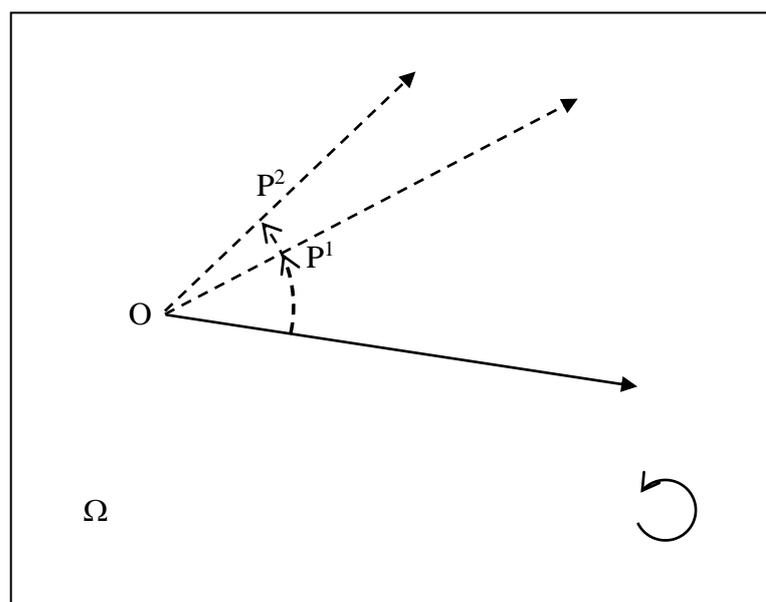
quanto à sua tradução matemática, sua identidade mesma. Isso, parece-nos, pode não ser bom para o ensino do conceito.

Figura 21. Semirretas dadas a priori. Ilustração de como uma rotação transforma uma semirreta em outra com mesma origem. É necessário que se conheça previamente o valor de θ na definição da função F .



Fonte produzido pelo autor, 2017.

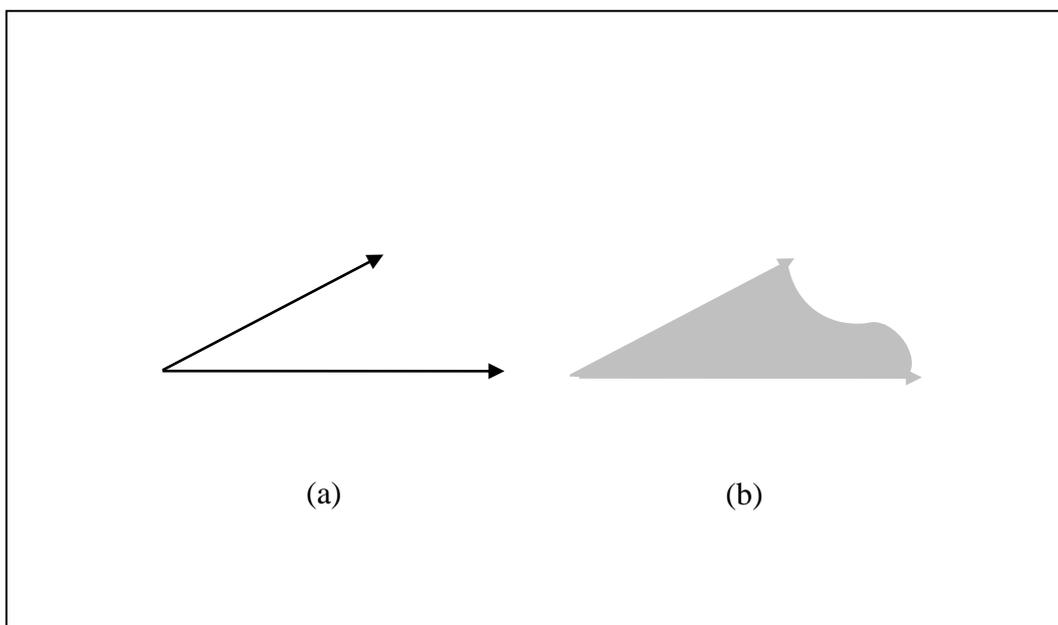
Figura 22. Rotação: semirreta dada a priori. Ilustração de como uma rotação, interpretada pela função 'g' transforma uma semirreta em outra com mesma origem.



Fonte produzido pelo autor, 2017.

A figura 23, abaixo, traz duas imagens (a) e (b) com a finalidade de levar ao aluno à compreensão do conceito de ângulo. É irrefutável que são imagens, “figuras”, distintas enquanto registro gráfico, um desenho. Entretanto, elas são ‘elevadas’ à categoria de definição, no caso, do conceito de ângulo. Nesse sentido, elas são ao mesmo tempo exemplo do objeto definido e de sua representação gráfica enquanto imagem. O registro linguístico a elas correspondentes, que seguem mais adiante, são, respectivamente, as traduções na língua das formas geométricas como percebemos nos seguintes enunciados:

Figura 23. Superfície ou linha? Representação gráfica de duas definições de ângulo, ditas “matematicamente corretas” e equivalentes enquanto produzem a mesma medida do ângulo.



Fonte: Silva &Valente org. (2014, p. 116)

- “[...], um ângulo é definido como a figura constituída por *duas semirretas*, distintas e não opostas, com uma mesma origem, [...]”, (Figueiredo & Pitombeira, 2014, p.116). Semelhante, por exemplo, ao que se vê na imagem (a) da figura 23 acima.
- “[.], alguns professores escolhem definir o ângulo como *a região* delimitada por *duas semirretas*, distintas e não opostas, com a mesma origem,” (Figueiredo & Pitombeira In: SILVA & VALENTE org. 2014, p.116), conforme a imagem (b) na figura já referida.

Sobre essas duas definições de ângulo, Figueiredo & Pitombeira dizem que: “Na verdade, *as duas são* matematicamente corretas, [...]” (2014, p. 116, grifo nosso) e que, “as duas definições são equivalentes, pois em ambos os casos – semirretas ou região – a medida do ângulo é a mesma, “(SILVA & VALENTE org. 2014, p. 116). Uma ponderação a esse respeito é a seguinte: medir o ângulo definido como sendo a imagem (a) na figura 23, como já foi dito em outra oportunidade neste trabalho, traz ambiguidade, a respeito de sua mensuração, enquanto defini-lo como a imagem (b) não causa ambiguidade. De modo que a afirmação de que, as duas definições são equivalentes, é, pelo menos, precipitada.

Apesar das duas imagens possuírem algo em comum, representarem subconjuntos do plano cujas fronteiras são constituídas por duas semirretas, com mesma origem; a primeira imagem, do ponto de vista topológico, reduz-se à sua própria fronteira, tem interior vazio, é num certo sentido unidimensional enquanto a segunda não se reduz a sua fronteira, possui interior não vazio, e é claramente bidimensional, além de como subconjunto contém propriamente a primeira.

Sendo o ângulo *definido* simplesmente como uma imagem, uma figura geométrica, nessa condição à palavra ângulo está associada, no mesmo contexto, figuras geométricas com propriedades matemáticas muito diferentes e não assemelhadas. Essas figuras não são equivalentes como ficou claro, nem do ponto de vista do sentido da visão nem como representante de um subconjunto de pontos do plano que compartilhem, um com o outro, ou tenham por equivalentes, todas as suas propriedades matemáticas entre si. O que as ligam, de imediato, é apenas a palavra *ângulo*, que lhes dão nome.

Assim, o mesmo nome, a mesma palavra, para designar dois objetos diferentes e tratados no mesmo contexto técnico científico, e, além disso, em uma situação de ensino, me parece, ser passível de provocar dúvidas importantes sobre o que se quer ensinar, o significado mesmo de ângulo. Nesse sentido, um conflito cognitivo pode se instalar, pois é muito provável que durante a formação geométrica do aluno, ele venha a defrontar-se com as duas concepções, em algum momento, e de alguma forma. Diante do exposto, não havendo uma discussão séria e esclarecedora a esse respeito, corre-se o risco de não promovermos o desenvolvimento integral do aluno se não nos preocuparmos e levarmos em consideração, por exemplo, que nomear seja um tipo de classificação e a observação feita por Figueiredo & Pitombeira (2014) de que:

Outra preocupação a tomar no trabalho de classificação das figuras geométricas é a de sempre deixar explícita para o aluno qualquer mudança nos critérios adotados. Quando essa mudança não fica clara, um dos possíveis frutos esperados desse

trabalho, que é o desenvolvimento do raciocínio lógico pode ser prejudicado. (FIGUEIREDO & PITOMBEIRA, 2014, p. 115-116),

O ângulo está sendo, aqui, definido como uma figura. Medir o ângulo definido como sendo a imagem (a) na figura 23, como já foi mostrado em outra oportunidade neste trabalho, causa ambiguidade, a respeito do valor da medida do ângulo, enquanto optando-se por defini-lo como a imagem (b) não a causa.

Assim, o cuidado com a definição de um conceito é de fundamental importância para a construção do conhecimento no aluno, pois dele pode depender o completo desenvolvimento de seu raciocínio lógico, sem o qual sua formação integral, se é o que se pretende, pode ficar prejudicada e esse cuidado deve ser considerado nos cursos de formação dos futuros professores de matemática.

3.2 Ângulo e a orientação no plano

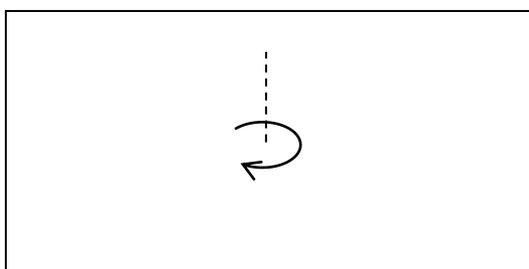
Concepções de ângulo, como o giro, rotação, que leva uma semirreta em outra com mesma origem, ainda se mostra insuficiente para a compreensão desse conceito e mesmo a escolha da orientação do plano supera essa dificuldade. Isso porque, escolhida uma orientação para o plano, e ao levar uma semirreta de mesma origem em outra, continua contando com várias possibilidades de se realizar, e o pior: modifica o valor atribuído em cada uma delas. Embora a ideia de orientação seja relativamente simples, do ponto de vista intuitivo, a sua formalização matemática não é, pois envolvem conhecimentos de Teoria dos Conjuntos, de Álgebra Linear, de Análise Real, etc. O licenciando deverá ser conduzido nesta direção, da formalização, para que, em sua prática, enquanto professor de matemática esteja mais bem fundamentada.

3.3 Uma abordagem intuitiva da ideia de orientação do plano

Nosso ponto de partida será a observação dos movimentos que se pode realizar com as nossas mãos, dispondo-as de maneira conveniente sobre uma superfície plana, o texto de uma mesa, por exemplo, como se descreve a seguir: repouse suas mãos sobre a superfície, com a palma de uma voltada contra a palma da outra, os dedos correspondentes postos lado a lado e os polegares voltados para o mesmo semiespaço, com relação ao plano sugerido pela superfície considerada, e em que sua cabeça se encontra. Planos imaginários e paralelos entre

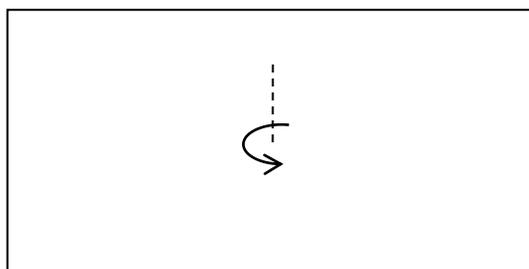
si devem conter cada uma das mãos e, além disso, serem perpendiculares à superfície. Afaste agora as mãos sobre a superfície mantendo-as paralelas e em seguida feche-as. O movimento que queremos ressaltar é o do fechamento das mãos a partir do instante em que se cessou de afastá-las, uma da outra, até uma distância conveniente que permita que se fechem completamente, cada uma delas, sem que venham a se tocarem. Nas figuras 24 e 25 que seguem abaixo, representa-se simbolicamente as explicações dos movimentos considerados.

Figura 24 – Orientação à direita. Representação gráfica do movimento realizado com a mão esquerda.



Fonte: produzido pelo autor, 2017

Figura 25 – Orientação à esquerda. Representação gráfica do movimento realizado com a mão direita.

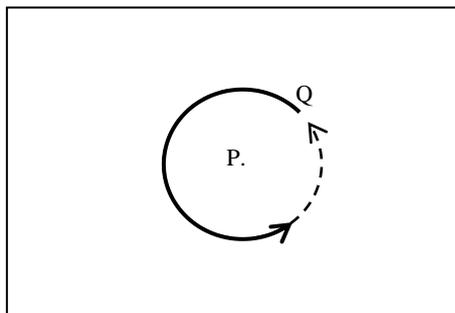


Fonte: produzido pelo autor, 2017

Inspirados nesses movimentos que acabamos de explicar, com um compasso, vamos realizar uma circunferência em uma superfície plana, tendo em mente a seguinte definição de circunferência: chama-se de circunferência ao lugar geométrico (subconjunto) do plano constituído por todos os pontos cuja distância a um dado ponto fixo C seja constante. Esse ponto fixo C é chamado de centro da circunferência e a distância de qualquer ponto dela até seu centro, C , é chamada de raio da circunferência. Chamamos a atenção de que essa definição é uma releitura moderna das definições encontradas em Euclides (2009, p. 97-98). Para se traçar uma circunferência com “régua e compasso” é necessário que sejam conhecidos

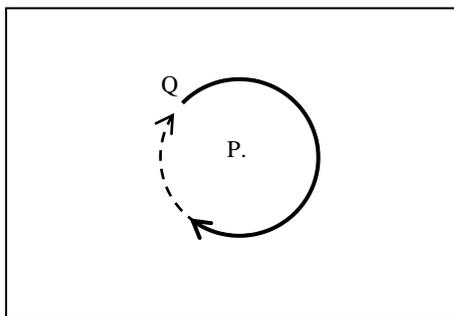
dois pontos P e Q; que se escolha qualquer um deles para ser seu centro e a distância entre eles como seu raio, como se pode deduzir do que afirma Eves (2004, p. 134). A materialização dessa circunferência se dá através de um movimento físico que se realiza deslocando-se o compasso, em movimento giratório, mantendo a ponta seca deste no ponto P, por exemplo, e abrindo-o de P até Q. A ação cumpre o objetivo quando atinge novamente o ponto de onde se iniciou o deslocamento. Em qualquer instante posterior ao de seu início em que a ação seja interrompida, dá-se qualquer um dos nomes: **giro**, **giro plano**, **rotação** ou **rotação plana** em torno do ponto P, e a ação completa chamar-se-á de **volta**, **giro completo**, em torno do ponto P. Há, obviamente, duas possibilidades para se realizar uma volta, um giro completo em torno de um ponto P, a saber: uma que inicia o movimento do compasso de forma que a haste, que não se mantém sobre o ponto P, seja movimentada de maneira semelhante ao do fechamento da mão direita, sobre uma superfície plana, ou o movimento análogo ao fechamento da mão esquerda, nas mesmas condições. Veja as figuras 26 e 27 abaixo.

Figura 26 – Giro à esquerda. Representação simbólica de um giro e de uma volta (tracejado) em torno do ponto P a partir do ponto Q concordando com o movimento da mão direita.



Fonte: produzido pelo autor, 2017

Figura 27 – Giro à direita. Representação simbólica de um giro e de uma volta (tracejado) em torno do ponto P a partir do ponto Q concordando com o movimento da mão esquerda.



Fonte: produzido pelo autor, 2017

Do ponto de vista absolutamente intuitivo, podemos associar legitimamente a qualquer uma das possibilidades de executar a ação que resultaram nos movimentos acima descritos e representados como uma **orientação no plano**. Escolhida uma delas, essa passa a ser chamada de **orientação positiva**, e, conseqüentemente, a outra se chamará **orientação negativa** do plano. Alerta-se para o fato de que a mudança das escolhas não causa nenhum impacto conceitual.

O que se disse acima é suficiente para se tente “inculcar” no aluno, principalmente no nível fundamental e no médio, a ideia de orientação do plano.

3.4- Formalização da orientação no plano

Do ponto de vista formal, orientar o plano é escolher uma base para o mesmo. Essa escolha, segundo Camargo (2005), fundamenta-se nos conceitos de: bases concordantes, no conceito de relação de equivalência, de classe de equivalência, determinante de uma transformação linear e de variação de vetores.

Representaremos o plano concebido na geometria elementar pelo símbolo Ω , letra maiúscula do alfabeto grego chamada de “ômega”. Represente o conjunto dos números reais pela letra maiúscula R , do alfabeto latino. Em termos notacionais a expressão simbólica: $\Omega \equiv R \times R = R^2$, representa, tradicionalmente, o plano Ω após ter sido identificado com o espaço vetorial²⁷ *finitamente gerado*²⁸ de dimensão dois sobre o corpo²⁹ dos números reais, denotado por R^2 . No que segue, permitimo-nos, aqui, por conta de simplificação da linguagem, nos reportamos a um espaço vetorial finitamente gerado, dizendo simplesmente espaço vetorial.

Algumas definições e/ou resultados da teoria dos espaços vetoriais são imprescindíveis à formalização do conceito de orientação no plano e nos referimos a eles livremente, sem a preocupação de defini-los ou prová-los, apenas indicando uma fonte onde possam encontrá-los.

²⁷Definição em: DEAN, Richard A. **Elementos de Álgebra Abstrata – Ao Livro Técnico e Científicos**. Rio de Janeiro, 1974.

²⁸ Um espaço vetorial V sobre um corpo F é dito *finitamente gerado* quando há um número finito de elementos de V : a_1, a_2, \dots, a_n , e igual quantidade de elementos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ do corpo F , tais que para todo elemento w em V têm-se: $w = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_n \cdot a_n$. O elemento w é então dito ser uma combinação linear dos elementos a_1, a_2, \dots, a_n .

²⁹ Uma definição de *corpo* pode ser vista, por exemplo, em Monteiro, 1971 p. 178.

Identificado o plano Ω com o espaço vetorial $V = R^2$, $\Omega \equiv R^2$, nosso objetivo é mostrar o porquê da escolha de uma base ordenada ser suficiente para orientá-lo. Sejam $S, \bar{S} \in B(\Omega)^{30}$ com $S = \{e_1, e_2\}$ e $\bar{S} = \{f_1, f_2\}$. Considere a transformação linear F , $F : R^2 \rightarrow R^2$ definido por $F(e_1) = f_1$ e $F(e_2) = f_2$ e seja $M(F)_S^{\bar{S}}$ sua matriz com respeito às bases S e \bar{S} a qual dá-se o nome de matriz de mudança da base S para a base \bar{S} , ou simplesmente matriz mudança de base. É conhecido o fato de que $\det[(M(F)_S^{\bar{S}})] \neq 0$. Esse fato permite que se defina uma relação \mathfrak{R} em $B(\Omega)$, chamada de relação de concordância entre bases, definida do seguinte modo: para dois elementos quaisquer $X, Y \in B(\Omega)$, diremos que X e Y são concordantes, o que representaremos simbolicamente por $X \mathfrak{R} Y$, se e somente se $\det[(M(F)_X^Y)] > 0$. Caso contrário, isto é, $\det[(M(F)_X^Y)] < 0$, diremos que X e Y são discordantes e indicamos isso escrevendo: $X \tilde{\mathfrak{R}} Y$, que se ler: X é discordante de Y . Dito de outra forma: $X \mathfrak{R} Y \Leftrightarrow \det[(M(F)_X^Y)] > 0$. A relação \mathfrak{R} é uma relação de equivalência³¹ em $B(\Omega)$. Dadas duas bases quaisquer em $B(\Omega)$, digamos S e \bar{S} é óbvio que apenas uma das afirmações é verdadeira: $S \mathfrak{R} \bar{S}$ ou $S \tilde{\mathfrak{R}} \bar{S}$. Considere as bases $S, \bar{S} \in B(\Omega)$ e sejam O^S a classe de equivalência de S com respeito a \mathfrak{R} e $O^{\bar{S}}$ a classe de equivalência de \bar{S} com respeito à \mathfrak{R} . Sabe-se que $O^S \cap O^{\bar{S}} = \{ \} \Leftrightarrow S \tilde{\mathfrak{R}} \bar{S}$, e que $B(\Omega) = O^S \cup O^{\bar{S}}$. Então, como orientar Ω é escolher uma base S para Ω , chamada de orientação positiva de Ω , a orientação negativa será aquela associada à escolha de outra base S' tal que $S \tilde{\mathfrak{R}} S'$, ou seja: $S' \in C(O^S)$, onde $C(O^S)$ é o complementar de O^S em $B(\Omega)$.

Mudar de uma base para outra, como é bem conhecido, é sempre possível. Mas, quando essas bases não forem concordantes, isso não ocorrerá sem que para isso tenhamos que transformar um de seus elementos em um múltiplo de algum outro, em outras palavras: torná-los paralelos. Mostraremos isso a seguir.

³⁰ A notação $\mathbf{B}(\Omega)$, representará o conjunto constituído por todas as bases de $\Omega \equiv R^2$.

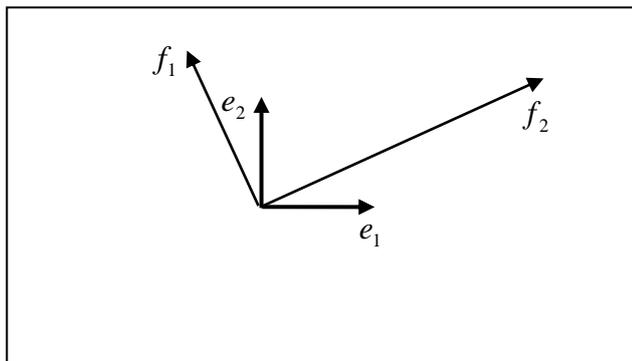
³¹ Para uma definição de relação de equivalência ver Halmos, 1970, p. 30.

Sejam $S = \{e_1, e_2\}$ e $\bar{S} = \{f_1, f_2\}$ e defina para cada $1 \leq i \leq 2$ as funções: $\Phi_i : [0,1] \rightarrow R^2$ por $\Phi_i(t) = f_i + (1-t)e_i$, que transforma o vetor e_i , respectivamente, no vetor f_i . Diremos que a base \bar{S} é *variação direta* da base S , se, e somente se, $\det[(\Phi_1^T(t), \Phi_2^T(t))] \neq 0 \forall t \in [0,1]$. Então, se \bar{S} for variação direta de S , juntamente com o fato de que $\det[(\Phi_1^T(t), \Phi_2^T(t))]$ é uma função contínua em $[0,1]$, que não se anula em $[0,1]$, permite concluir que ela não mudará de sinal em $[0,1]$. Diremos também que uma base \bar{S} é uma *variação* da base S , se existirem bases G_1, G_2, \dots, G_n tais que: G_1 seja variação direta de S ; G_i é variação direta de G_{i-1} , para $2 \leq i \leq n$, e \bar{S} variação de G_n . Camargo (2005) traz uma demonstração de que: duas bases S e \bar{S} são concordantes, se, e somente se, \bar{S} é variação de S .

Quando as bases $S = \{e_1, e_2\}$ e $\bar{S} = \{f_1, f_2\}$ forem discordantes, $S \not\Re \bar{S}$, mostra-se que os vetores $\Phi_1(t) = tf_1 + (1-t)e_1$ e $\Phi_2(t) = tf_2 + (1-t)e_2$ serão paralelos para algum $t_0 \in [0,1]$. Com efeito, seja $\begin{pmatrix} \alpha & \bar{\alpha} \\ \beta & \bar{\beta} \end{pmatrix}$ a matriz do operador que transforma a base S na base \bar{S} chamada de matriz mudança da base S para a base \bar{S} , ou simplesmente matriz mudança de base. Seja $F : [0,1] \rightarrow M_{2 \times 2}(R)$ definida por $F(t) = \begin{pmatrix} t(\alpha-1)+1 & t\bar{\alpha} \\ t\beta & t(\bar{\beta}-1)+1 \end{pmatrix}_E$. Para cada $t \in [0,1]$, $F(t)$ é a matriz da transformação linear definida por $F_t(e_1) = \Phi_1(t)$ e $F_t(e_2) = \Phi_2(t)$. Seja $m : [0,1] \rightarrow R$ definida por $m(t) = \det[F(t)]$, como sabemos a função m é uma função contínua em $[0,1]$. Ora: $m(0) = 1 > 0$ e $m(1) = \det(F(1)) = \det\left[\begin{pmatrix} \alpha & \bar{\alpha} \\ \beta & \bar{\beta} \end{pmatrix}\right]$. Como, por hipótese $S \not\Re \bar{S}$, $\det[F(1)] < 0$, portanto $\exists t_0 \in [0,1]$ tal que $m(t_0) = 0$. Isso significa, do ponto de vista geométrico, que os vetores $\Phi_1(t_0) = t_0 f_1 + (1-t_0)e_1$ e $\Phi_2(t_0) = t_0 f_2 + (1-t_0)e_2$ são paralelos.

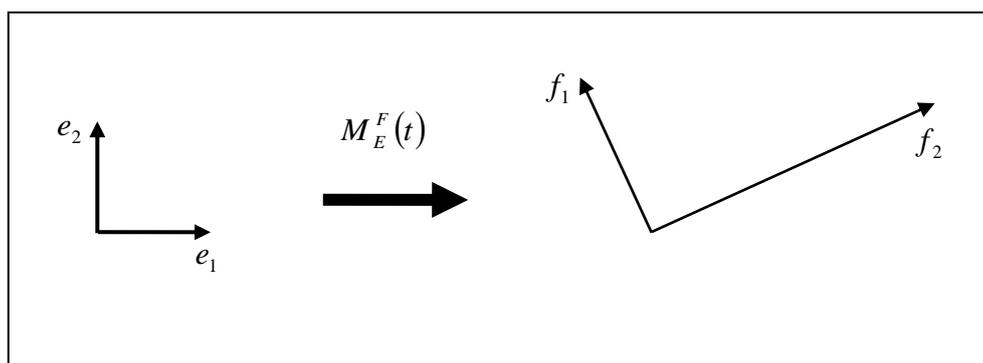
Isso mostra que \bar{S} não é variação direta de S , e, do fato de que, duas bases S e \bar{S} são concordantes, se e somente se, \bar{S} é variação de S , como demonstrado em Camargo (2005), que \bar{S} também não é Variação de S . A sequência de figuras: 28, 29, 31 e 31 que seguem abaixo ilustra o processo.

Figura 28 – Bases do plano. Representação gráfica das bases E e F como referencial.



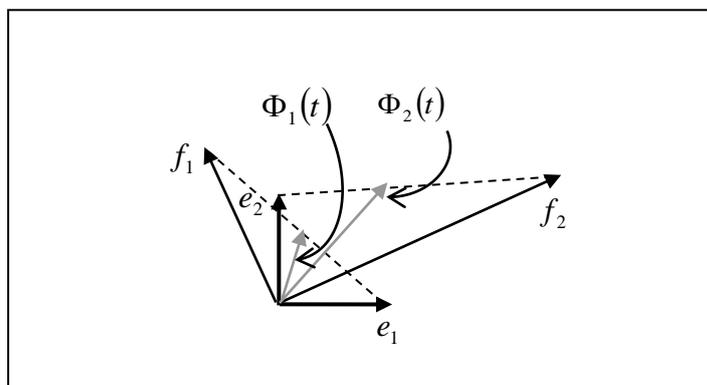
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 29 – Mudança de base. base E será transformada na base F .



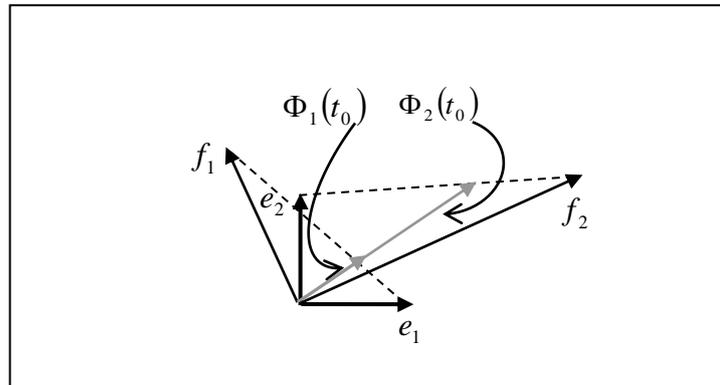
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 30. A transformação. Fase intermediária da transformação da base E na base F , $M_E^F(t)$.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 31. Singularidade. O que acontece quando $\det[M_E^F(t_0)] = 0$ para algum $t = t_0$.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Nesse ponto, é mais que razoável que se defina uma orientação do plano escolhendo O^S , para alguma base S de $B(\Omega)$ e chame-a de sua orientação positiva. Então, se escolhermos uma base S de plano a orientação derivada dela, orientação positiva, será indicada pela notação:

$$\text{⌚} \equiv O^S.$$

A orientação negativa, associada a S denota-se então por:

$$\text{⌚} \equiv O^{\bar{S}} \text{ onde } \bar{S} \cong S.$$

Assim sendo, essa temática poderá subsidiar os futuros professores na perspectiva de melhor compreender e levar futuramente à sala de aula ao integrar aspectos intuitivos, porém, fundamentados por uma abordagem formal que julgamos importante para sua formação.

4- CAPÍTULO III: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Por meio de uma pesquisa qualitativa, na modalidade de estudo exploratório, com a finalidade investigar o problema geral: *como o ensino do ângulo é desenvolvido na Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Alagoas.*

Como pesquisa qualitativa, Lüdke (1986), concordando com Bogdan e Biklen (1982), entende como sendo aquela que “*envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes*”. (LÜDKE, 1986, p. 13)

Já a pesquisa exploratória

tem como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, com vistas na formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores. De todos os tipos de pesquisa, estas são as que apresentam menor rigidez no planejamento. (GIL, 1995, p. 44)

Gil (1995) e Gerhardt (2009) estão de acordo quanto ao fato de que a pesquisa exploratória envolve ou pode ser classificada até como estudo de caso. Segundo Fiorentini, “o estudo de caso busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra [...]”, (FIORENTINI, 2009, p.110). Mas em que consiste mesmo o estudo de caso? Fiorentini (2009), citando Gil (1988), esclarece: “*É o estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos, com contornos claramente definidos permitindo seu amplo e detalhado conhecimento*” (GIL 1988, p. 58, grifo nosso). É nessa concepção de *Estudo de Caso* que se buscou desenvolver esta Pesquisa Exploratória.

O problema escolhido é um tema constante do programa de matemática, na área de geometria, sugerido pelo PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais, que sugerem a orientação e organização dos currículos do segmento e, de certa forma, o ensino oficial em suas diferentes fases. Os estudantes têm seu primeiro contato com o tema ainda no ensino fundamental, e para compreensão e formação do pensamento matemático deles é de suma importância. Também, e muito fortemente, porque a literatura disponível para o segmento traz uma gama de definições que, quando menos, poderá causar problemas de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, este estudo buscou explorar qual o tratamento dado a esse conceito nos cursos de formação inicial dos professores que ensinarão matemática na Educação Básica.

4.1- Cenário da Pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida no âmbito do curso de Licenciatura em Matemática, oferecido pela Universidade Federal de Alagoas no campus A. C. Simões (Maceió). O curso tem um formato próprio de acordo com seu Projeto Político Pedagógico, atendendo, no entanto, às diretrizes oficiais para funcionamento das licenciaturas no país.

No primeiro momento, organizamos a pesquisa para coletarmos dados a partir de uma entrevista semiestruturada envolvendo dois professores do curso e uma atividade, sobre o conteúdo ângulo, a ser aplicada aos respectivos alunos dos professores que seriam entrevistados.

Porém, de acordo com dados coletados e apresentados na qualificação, optamos por realizar uma oficina, um minicurso, com a temática sobre ângulo, destinado a alunos interessados no curso. O curso foi organizado e ofertado na Licenciatura, no ano de 2016. Porém, houve pouco interesse dos discentes, agravado, ainda, por uma greve de três meses nas universidades brasileiras. Entretanto, com o fim da greve e a volta das atividades acadêmicas, vislumbrei na disciplina Projetos Integradores 1³², após intervenção de um aluno, a oportunidade de discutir com eles o conceito de ângulo e, assim, buscar responder ao problema da pesquisa. Assim, essa disciplina transformou o cenário da pesquisa e, dos trinta alunos, cinco (5) deles, voluntariamente, atenderam ao convite de serem entrevistados sobre a temática ângulo desenvolvida durante a disciplina.

Quanto às análises preliminares das entrevistas com os professores e atividades apresentadas preliminarmente na qualificação, foram trabalhados para apresentação de artigos científicos em periódicos e congressos.

4.2- Sujeitos da pesquisa

Foram sujeitos da pesquisa, além de mim, um grupo de cinco (5) alunos regularmente matriculados no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática, IM / UFAL, cursando, à época, a disciplina: Projetos Integradores 1, sob minha responsabilidade, tais alunos participaram de livre e espontânea vontade.

³² Disciplina integrante da grade curricular do curso de licenciatura em Matemática do IM / UFAL, obrigatória, que objetiva tratar do ensino de temas relativos ao programa do 6º ano do ensino fundamental.

4.3- Instrumentos de coleta de dados

A coleta de dados para subsidiar esta pesquisa foi realizada em dois momentos:

1. Análise das definições encontradas em alguns dos livros utilizados no ensino superior.
2. Entrevista que, segundo Laurence Bardin (2011), é um importante método de coleta de dados, e, em consonância com essa afirmação, Fiorentini (2009) nos diz:

A entrevista, além de permitir uma obtenção mais direta e imediata dos dados, serve para aprofundar o estudo, complementando outras técnicas de coleta de dados de alcance superficial ou genérica como, por exemplo, a observação e o *survey* com aplicação de questionários [...]. (FIORENTINI, 2009, p. 120).

Fiorentini vai mais além, enfatizando que: “[...] ela também pode ser vantajosa com pessoas com grande conhecimento, pois permite ao entrevistado fazer emergir aspectos que não são normalmente contemplados por um simples questionário”, (FIORENTINI 2009, p. 120). Portanto, conclui-se que a entrevista semiestruturada constitui-se em um legítimo instrumento de investigação.

As entrevistas se basearam nas dez perguntas que seguem mais abaixo e, com elas, buscamos compreender melhor, sob o ponto de vista dos participantes, questões como: características da aula; as diversas definições de ângulo; ambiguidades trazidas pelas definições; como receberam a concepção que o professor tinha de ângulo; e o problema da imagem do conceito. As perguntas foram:

- 1 - Em meio a uma aula da disciplina Projeto Integradores 1, que tratava das operações numéricas no ensino fundamental, um aluno interveio querendo saber sobre a concepção que o professor tinha do conceito de ângulo. O que você achou da intervenção do aluno e do modo como o professor tratou o tema?
- 2 - Ao ser interpelado, o professor respondeu de imediato à questão ou preparou o ambiente para trazer sua concepção de ângulo até eles?
- 3 - Diante da definição “ângulo” e a figura formada por duas semirretas com mesma origem, você percebe alguma ambiguidade com relação à sua medida?
- 4 - No seu entender, as atividades sugeridas pelo professor foram capazes de tornar a concepção que ele tinha mais clara?
- 5 - Conhece alguma definição que use a rotação para definir ângulo?

- 6 - A definição: ‘ângulo é uma rotação, operação que transforma uma semi-recta noutra semi-recta com mesma origem’³³, traz dificuldades? Quais?
- 7 - Você pode identificar, no plano, a partir de duas semirretas com mesma origem, um conjunto convexo e outro não convexo, limitados pelas semirretas?
- 8 - Que relação há entre os conjuntos limitados por duas semirretas com mesma origem?
- 9 - Quais imagens se formam em sua mente quando você vê ou ouve a palavra ângulo?
- 10 - Você já havia participado de um estudo ou evento sobre o tema ângulo e como vê agora essa temática?

As entrevistas foram gravadas em áudio pelo pesquisador e transcritas para posterior análise.

³³ Referida por Calado (1955).

5- CAPÍTULO IV: ANÁLISES DOS DADOS

No decorrer das atividades da disciplina de Projetos Integradores 1, quando alunos e professor preparavam-se para iniciar a aula, um determinado aluno, que aqui será designado por A1 (aluno 1), fez a seguinte indagação ao professor: “professor, qual a sua concepção de ângulo?” Como trabalhavam na classe fazendo uso de alguns textos de matemática para o sexto ano do ensino fundamental, de diferentes autores, e neles o conteúdo ângulo era tratado, o professor abordou algumas das definições sob a perspectiva de fazê-los ver algumas dificuldades que elas apresentavam. Esse evento acabou sendo integrado ao estudo por se caracterizar como *aula exploratória* sobre o conceito de ângulo, no contexto da sala de aula e da educação matemática. Assim, foram convidados alunos regularmente matriculados naquela disciplina a participarem voluntariamente, como sujeitos dessa pesquisa, a conceder uma entrevista sobre o tema ângulo. Aceitaram participar cinco deles.

As entrevistas buscaram observar a compreensão dos alunos acerca do que é um ângulo. Entre outras categorias para análises, surgidas delas elegemos: ângulo, a aula; ângulo, uma definição; ângulo como uma rotação; ângulo como estímulo; ângulo, subconjunto convexo e; ângulo, o que se aprendeu com as discussões.

5.1- Ângulo, a aula

Durante a entrevista, foi questionado o aluno A1 sobre o porquê de ter trazido durante a aula o assunto ângulo. De acordo com a sua resposta, depreende-se que ele se sentiu provocado a querer saber mais sobre o tema.

... depois de conversar com alguma pessoa sobre o assunto, sobre a definição de ângulo, e ela ter citado o que o senhor tem alguma pesquisa nessa área, algumas ideias bacanas, eu realmente me questionei: será o que é um ângulo realmente? É aquilo que está entre duas semirretas ou são as próprias semirretas? Comecei a me questionar sobre aquilo, então foi por isso mesmo o sentido da pergunta, eu achei que eu deveria saber mais um pouquinho sobre aquilo e quis ouvir o que o senhor próprio, o professor, tinha a falar a respeito da opinião dele e a respeito do que ele sabia sobre ângulo. (A1)

Entretanto, esse questionamento culminou em uma discussão positiva durante a aula em que os demais alunos tomaram consciência de que as concepções de ângulo que construíram, ao longo de todo ensino básico, são impotentes para responderem a alguns aspectos que envolvem questão a respeito de: mensurabilidade, aspectos topológicos de como

são interpretados à luz da teoria dos conjuntos, enfim, da relação do objeto ângulo com a Matemática e seu processo de ensino. As análises das definições revelaram problemas.

A5, outro aluno entrevistado ao ser questionado sobre o questionamento do colega comenta:

A intervenção dele foi muito boa porque, assim, ele fez com que a gente parasse para debater um assunto que já foi imposto para a gente desde a definição de ângulo dada, lá no Ensino Fundamental. Aí ele chamou atenção para mostrar para gente que tem alguma coisa errada que não era aquilo, e a gente começou a debater que não define é isso, foi quando a gente viu que nem uma definição se encaixava [...]. (A5).

E o entrevistado A2, em sua entrevista, além de concordar com o questionamento de A1 também faz alusão ao ensino básico.

Eu achei uma intervenção boa, foi uma pergunta muito boa porque no ensino básico quando os professores abordam assuntos de ângulo, eles abordam uma coisa muito superficial, isto é, em alguns livros eles não definem ângulos, eles dão a ideia para você ter uma noção do que é um ângulo, mas eles deixam isso muito aberto, muito aberto como se a dúvida dele poderia ser a dúvida de muitas pessoas, aí com isso surgiu as propostas de aula sobre o tema [...]” (A2).

Assim, conjecturamos, pelos depoimentos, que esses alunos tinham uma concepção consolidada acerca de ângulo, forjada durante o ensino básico, porém, no curso de licenciatura em matemática, a perspectiva é que continue a fazer uso de algumas delas por conta da pouca (ou ausência total) de crítica dedicada à questão.

Ainda questionando os entrevistados sobre a condução da aula a partir do momento em que o professor foi interpelado sobre “o que é um ângulo”, depreende-se do que consta das entrevistas que o professor poderia, simplesmente, dar a definição e justificá-la. Entretanto, o docente preferiu trabalhar o conceito, sob um clima de investigação na sala de aula.

[...] ele nos levou a pensar realmente o que seria um ângulo. Ele nos levou a pensar sobre as diversas definições que existem e que diversas pessoas definem ângulo de uma forma diferente – nas palavras de A1;

[...] ele foi ele foi nós mostrando que nossas definições chegavam a um momento que elas ficaram vazias. E aí foi preparando o terreno para que a gente fizesse muitas pesquisas. (A5);

preparou o terreno, nos fez ver onde é que essa definição que o livro trazia tinha uns pontos positivos e aqueles pontos negativos, onde deixaria uma brecha, então, o professor, realmente, preparou o terreno, não deu aquela resposta imediata, aquele negócio seco de dizer "é isso e ponto" (A4).

Observa-se, do que disseram os entrevistados, ao referirem-se ao docente, que este possa ter características das que Tardif (2011), Shulman (1986?), Ponte et. all. (2009) e D'Ambrosio (1996) apontam como relevantes para a prática de um professor, na perspectiva atual da educação matemática. Pode-se conjecturar, em decorrência do que falaram, que o docente se aproxima, no sentido trazido por D'Ambrosio (1996), de que ele não tenha “mais vocação para caçador” (D'AMBROSIO, 1996, p.85) e possa pertencer à “classe do que eu considero um educador” (ibid p. 85).

Já A3, quando entrevistado, entendeu a intervenção do colega como curiosidade, porém contribuiu para despertar o interesse da classe e gerar, ali, um ambiente propício à discussão, quando o professor se pronunciou sobre a concepção que tinha sobre ângulo:

creio que foi mesmo uma curiosidade porque a gente não ouve muito falar sobre essa questão [...] (A3).

foi aí que despertou na nossa cabeça o que é mesmo um ângulo que até hoje a gente não tem muita noção de que é. (A3).

assim que o nosso colega perguntou o professor mandou ele escrever no quadro, mandou um outro colega escrever no quadro o que era ângulo, ..., dar uma definição. A partir daquilo o professor foi falando sobre a questão dos ângulos. (A3).

Depreendemos que o professor ao instigar seus alunos a pensarem em suas definições possibilitou que eles revissem conceitos e percebessem que as definições que traziam não os atendiam, tornando-as, quando muito, definições provisórias.

[...] ele foi nós mostrando que nossas definições chegavam a um momento que elas ficaram vazias. E aí foi preparando o terreno para que a gente fizesse muitas pesquisas. (A5);

o professor trouxe o tema, [...] mostrando o que realmente seria um ângulo (A2).

5.2- Ângulo: uma definição

Durante a entrevista, foi apresentada uma definição para ângulo: *ângulo é a figura formada por duas semirretas com mesma origem*. Objetivando perceber se os participantes da pesquisa observavam ambiguidade nesta definição.

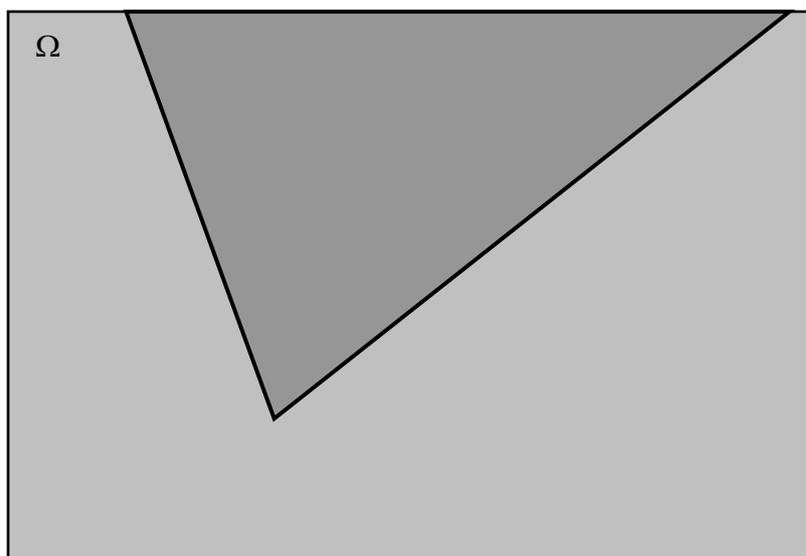
Quando o professor vai definir a medida de um ângulo, ele normalmente vai falar daquela região do plano que não pertence aquela reta. Mais aí o aluno vai se perguntar: Qual região? [...]. E isso em certo sentido é prejudicial ao aluno porque ele não vai ter uma ideia concreta do que é um ângulo, ele vai simplesmente se atrapalhar, ele vai ficar sem entender realmente o que é um ângulo. (A1)

Sim, normalmente quando a gente fala sobre o que é a medida entre duas semirretas de mesma origem a gente olha para a parte menor [...] pode ser que o livro esteja perguntando a questão do ângulo maior. (A3).

Sim, há ambiguidade nessa definição, porque a gente tem o ângulo interno, ou seja: o espaço entre elas, e o ângulo externo.”, A5.

Podemos depreender dos excertos das entrevistas que suas respostas, apesar do que diz expressamente a definição a eles apresentada, baseiam-se nos espaços adjacentes as duas semirretas com a mesma origem, indicando que o entendimento sobre ângulo, quando leem ou ouvem a referida definição não é o que ela expressamente diz, e sim os espaços adjacentes ao par de semirretas com mesma origem, ou seja: os espaços representados na figura 32, abaixo.

Figura 32. Espaços adjacentes – a partir de duas semirretas com mesma origem.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Assim, conjecturamos que esses espaços estejam a revelar a ambiguidade na aferição do que se definiu como ângulo.

Ainda foram questionados sobre se as atividades sugeridas pelo professor foram suficientes para esclarecer o conceito de ângulo trazido.

As análises que o professor fez nos ajudou [...] nos ajudou muito no sentido em que nós pudemos analisar a concepção que o professor tinha, que cada livro tinha ... (A1).

Sim, porque logo no início eu não entendia o porquê de ângulo ser aquilo [...]. (A2)

Eu acho que as atividades do professor, pelo menos para mim me permitiu poder tentar definir o que é ângulo e vê que as definições, todas elas, todas que passaram, que durante toda minha trajetória escolar foram dadas diversas definições, cada

livro tem uma definição diferente, e perceber que há uma falha e que se dá para chegar na definição de ângulo. (A2)

Sim, porque a gente, como foi mencionado há alguns minutos atrás, a gente trabalhou em algumas aulas com o conceito de ângulo, tanto é que nós vimos uma apresentação de slides que mostrava como esse conceito vem se dando e tudo mais, e ficou um pouco mais claro essa definição a partir do ponto de vista do senhor. Porque tem aquela questão onde tem essas definições que a gente acabou de falar que geram uma ambiguidade e a partir do momento que você tem uma ambiguidade e não é trabalhada você leva a dúvida para o resto da vida. Então foi bem legal. (A5)

Percebe-se, no que dizem acima os entrevistados, que o professor não conduziu seu trabalho valendo-se da estratégia da aula expositiva, optou por trabalhar na perspectiva de uma aula exploratória se aproximando do que diz Ponte (2009): “A riqueza de explorações [...] facilita o entendimento de conexões entre temas matemáticos, aspecto que, por vezes é descurado na prática [...], (PONTE et. all., 2009, p. 140)

5.3- Ângulo, como uma rotação

Ainda buscando observar sobre o que os alunos poderiam compreender sobre o conceito de ângulo, foi-lhes apresentado uma definição de ângulo como uma rotação, defendida por alguns autores, discutida nos encontros das aulas Projetos Integradores I, e foram questionados se já haviam trabalhado, no ensino básico, com alguma definição semelhante à que lhes apresentamos. Pelas respostas dos entrevistados uma novidade, porém ao mesmo tempo gerou ambiguidades, **isso porque ao definir ângulo como uma rotação não fica claro qual reta será rotacionada, nem a orientação escolhida para o plano para realizar a rotação.**

Antes de entrar aqui na UFAL, eu realmente ainda não tinha visto por rotação, *nunca tinha visto*, [...] recentemente tivemos um trabalho, no Projetos Integradores I tinha a questão da rotação, [...], mas gera ambiguidade [...] Em uma parte do livro ele deu uma definição de ângulo como sendo duas semirretas que até aí "tudo bem". Só que mais a frente ela trata o ângulo por rotação e ele não havia definido antes, aí isso na cabeça do aluno já gera uma confusão imensa [...] (A4)

Ela tem algumas implicações negativas, [...]” e aponta uma: “[...], como qual a reta a gente vai rotacionar? É o primeiro questionamento [...] a gente vai ter duas semirretas, então o aluno vai se perguntar: Qual semirreta ele vai rotacionar? Vai ser a que está nessa posição ou a outra semirreta? Então aí a gente já começa com uma ambiguidade (A1)

Os entrevistados, ao falarem da ambiguidade, além de discutirem qual a reta será rotacionada, também consideram que ainda que definida sempre há pelo menos duas maneiras de realizar a rotação dependendo da orientação que se escolha no plano.

Já o entrevistado A3 disse ter tido contato com esse assunto na Licenciatura em Matemática, porém sempre apresentou dúvidas em relação ao conceito de rotação.

Eu sempre tive desde pequena, uma dúvida: é a questão a rotação. Eu vim conhecer essa teoria, essa definição agora, mas uma coisa que me deixou confusa. No caso a medida seria daqui até aqui ou daqui até aqui? Porque é diferente, daqui é maior se for calcular a rotação aqui é maior, esse espaço é maior, tem um palmo e aqui tem dois dedos. (A3)³⁴

O entrevistado A2 faz alusão ao livro didático que foi usado durante as aulas para comentar sobre o conceito de rotação, porém sem maiores comentários.

Dante define ângulo, no seu livro de sexto ano para as crianças, ele dá uma ideia intuitiva e depois ele diz que poderia ser uma rotação. (A2)

Como os entrevistados A1 e A4 fizeram comentários sobre as ambiguidades de se trabalhar com a definição de rotação, buscou-se aprofundar a discussão e foram questionados sobre as possibilidades de efetivamente se realizar essa ação, a fim de compreender como eles interpretam ou entendem o ângulo como uma rotação.

Quando a gente vai transferir uma semirreta através de rotação, para que ela coincida com outra semirreta, a gente pode fazer esse processo de muitas maneiras, o que vai causar para um aluno uma certa confusão [...]. Então ele vai ter que se perguntar de que maneira a gente vai fazer isso? Ou ele pode fazer da forma que ele achar conveniente e não perceber o problema que há ali. O que é um mal porque isso vai trazer outras confusões, outros desentendimentos [...] (A1)

Tem mais de duas maneiras de se fazer, você pode fazer no sentido horário e no sentido anti-horário. (A2)

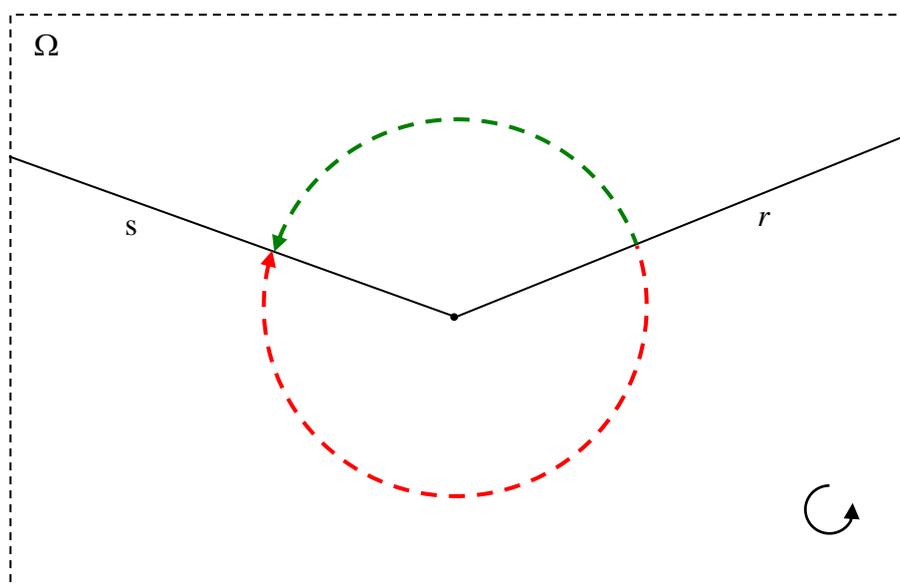
A1 em sua entrevista comenta o problema que esta definição pode gerar com alunos da educação básica, devido a não ficar claro em qual sentido e qual reta será rotacionada, enquanto que em seu depoimento comenta sobre a rotação acontecer no sentido anti-horário. Tais inferências procedem, mas esses entrevistados comentam, apenas, a orientação **da rotação** no plano, permitindo-nos conjecturar que eles entendem que para a rotação há duas possibilidades de se realizar, conforme o depoimento do entrevistado A3 que explicou fazendo gestos no ar: “[...], a rotação pode ter vinda daqui para cá, ou a rotação pode ter dado uma volta até aqui.”

Mas, mesmo A3 indicando entender que ele percebe mais de uma possibilidade de rotacionar, não é possível observar que ele percebe claramente dois ângulos. A figura 33

³⁴ O entrevistado ao comentar sobre rotação fazia gestos no ar.

abaixo indica as possibilidades de rotação, em linha tracejada, que são cada uma um ângulo na concepção da definição abordada.

Figura 33. Quem é o ângulo? Rotações que levam a reta r na reta s .



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Dando continuidade à entrevista, A4 diz mais ou menos a mesma coisa:

Existe, você levar pelo menor espaço e pelo maior. [...] você teria no caso dois ângulos de diferentes medidas e se você leva pelo menor espaço você tem um ângulo menor que cento e oitenta, menor até que noventa. Se você levar pelo maior você tem um ângulo de trezentos e sessenta, duzentos e setenta e assim vai.

O seu comentário indica que ele percebe a ambiguidade que a maneira de se efetuar a rotação provoca.

5.4- Ângulo, como estímulo

Buscou-se observar, também, qual representação gráfica os entrevistados criavam em suas mentes, enquanto estímulo, em um contexto matemático, a fim de investigar como o conceito de ângulo poderá ser acessado. Nesse sentido, o entrevistado A1 disse: “Hoje a

imagem que forma na minha mente quando eu escuto a palavra ângulo é de duas semirretas com a mesma origem.”

Faz, no entanto, uma ponderação ao declarar:

Essas semirretas normalmente distintas porque quando eu vejo duas semirretas com a mesma origem e elas coincidentes, para mim aquilo é só uma semirreta porque é um conjunto com dois elementos iguais, ou seja, é um conjunto com um único elemento. (A1)

Em sua ponderação, podemos depreender que A1 deixou transparecer o aspecto intuitivo e que esse é o nosso primeiro recurso para que se possa compreender algo, porém em muitas ocasiões não possibilita a nossa reflexão à luz da Lógica formal. Ele também amplia a sua representação ao justificar seu argumento por meio da teoria dos conjuntos.

Mas quando eu era mais jovem, a concepção que eu tinha era de duas retas não paralelas encontrando-se em um certo ponto, então ali eu tinha quatro regiões do plano que elas determinariam e iria ficar uma coisa muito mais ambígua do que eu tenho na minha mente hoje. [...]. Então ao longo do tempo a minha concepção a minha concepção mental de ângulo mudou e como eu já citei aqui, a atual é de duas semirretas com a mesma origem. (A1)

Podemos perceber o quanto a figura mais simples fixou-se na mente de A1 por conta de gerar *menos confusão* para ele, a julgar pela sua entrevista.

Corroborando com A1, A2 diz: “[...], na minha mente, vem do ponto de mesma origem de duas semirretas [...] só que ela vai formar ângulos internos e externos [...]”.

Ao perceber as duas semirretas com a mesma origem, em sua mente, percebe ainda as regiões do plano limitadas por elas, assim podemos depreender que esses entrevistados, ao pensar em ângulo, elabore, em sua mente, a figura formada por duas semirretas de mesma origem. Mas, o que ele entende por ângulo é, na verdade, as regiões limitadas por essas duas semirretas de mesma origem, por conta do que disse acima.

Assim como o entrevistado A3 também indicou não intuir figura alguma em mente, porém, acabou por dizer: “Eu desenharia duas retas de mesma origem [...] É mais o ângulo agudo, é o único que vem na minha cabeça quando fala ângulo rapidamente.”

O comentário do entrevistado indica, claramente, que ele relaciona a figura que intui com um tipo específico de ângulo, o ângulo agudo.

A representação gráfica, em sala de aula, de retas, semirretas e segmentos de reta realizada pelo professor ao trabalhar geometria, por conta das limitações do suporte que tem para escrever, desenhar, como: papel, quadro (branco ou negro) são representadas geralmente por um segmento de reta, o que implica em deixar subentendido o caráter infinito desses

entes. Aqui, o intuitivo pede uma explicação além do estímulo gráfico efetivo, para que passe a significar o que realmente se quer: desenha-se um segmento de reta e diz-se: isto representa uma reta; de outro segmento de reta dizem: isto é uma semirreta. O estímulo visual já não dá conta do que se quer dizer, além do mais, representação de um segmento de reta contribuindo para que o aluno possa considerar reta e segmento de reta como entes comuns.

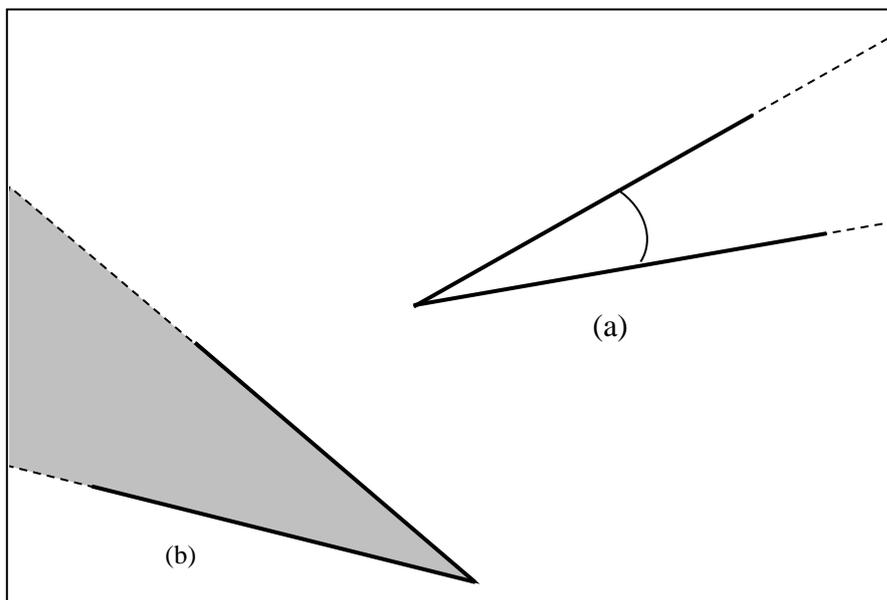
Portanto, quando A3 disse “...duas retas de mesma origem ...”, muito provavelmente talvez quisesse dizer: *duas semirretas de mesma origem*. O entrevistado A4 revela, de forma clara, que imagem ocorreu em sua mente: duas semirretas com mesma origem, pois é o que depreende do que disse: “De cara tem as duas semirretas [...] De mesma origem” (A4)

O entrevistado A5 também alude à figura de duas semirretas com a mesma origem como a imagem que imediatamente ocorre quando ouve a palavra ângulo.

Eu acho que *o fato de ter sido tão imposto para mim que ângulo é encontro de duas semirretas de mesma origem [...] aquela definição que vem nos livros mesmo, as duas semirretas com o ângulo no meio, [...]* (A5)

Conjecturamos que A5 entende que apesar de uma figura de duas semirretas de mesma origem lembrar a definição que consta na maioria dos livros: “*as duas semirretas com o ângulo no meio*”, o que nos permite pressupor a existência de uma outra imagem semelhante à da figura 34.

Figura 34. (a) - Imagem representativa do trecho onde A5 fala: “[...], as duas semirretas com o ângulo no meio, [...]” representado por um segmento curvo no meio, que vai de uma até a outra, pelo menor espaço entre elas. Imagem (b) – Outra maneira de se representar graficamente o que disse A5.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Nas aulas em que foi discutido o conceito de ângulo a partir do questionamento de um dos alunos, buscou-se construir o referido conceito ao invés de simplesmente anunciar a concepção do docente sobre ângulo. Como esse conceito para melhor compreensão necessita de ancoragem na Teoria dos Conjuntos, como conceito de convexidade e sua negação, nas entrevistas, procurou-se observar como eles podem construir mentalmente esses conceitos e para tanto foram questionados: a partir de duas semirretas com mesma origem você pode identificar no plano um subconjunto convexo limitado por essas duas semirretas e cujo complementar com relação ao plano seja um subconjunto não convexo? “Consigo identificar quando essas duas semirretas elas não são opostas e pertencentes a uma mesma reta.” (A1)

Este entrevistado, de acordo com seu depoimento, de imediato, entende quando as semirretas estão em direções diferentes, mas indicou o que fazer, quando assim não for, ao esclarecer:

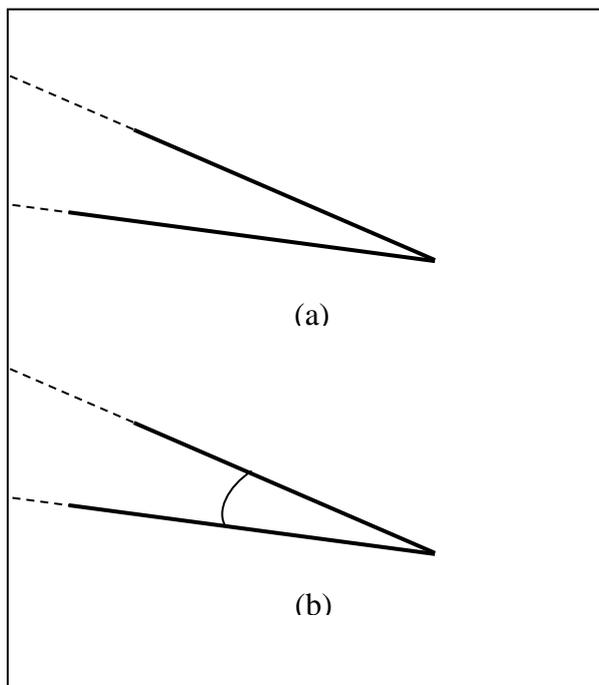
Nesse caso a gente pode ver através do processo de identificação de um conjunto convexo ou de um conjunto côncavo, qual desses conjuntos é convexo e ver que o seu complementar, ou seja, o outro conjunto formado que é o subconjunto do plano vai ser côncavo, a gente consegue identificar isso, eu consigo. [...]. Então a partir daí teríamos dois subconjuntos no plano, um complementar do outro [...] (A1)

Observa-se que o entrevistado ao falar de convexo e outro côncavo, na realidade não convexo, um sendo o complementar do outro, dá mostra de que percebe os conjuntos convexo e o não convexo, quando as semirretas estão em direções distintas, indo além, ao dizer que um é o complementar do outro. Ainda prossegue dizendo que quando as semirretas estão contidas em uma mesma reta, “Nesse caso a gente pode ver através do processo de identificação de um conjunto convexo ou de um conjunto côncavo, qual desses conjuntos é convexo e ver que o seu complementar [...] vai ser côncavo [...]”. Assim, há possibilidade de observar que A1 entendeu que dadas duas semirretas com mesma origem, existem o subconjunto convexo, o não convexo e um é o complementar do outro.

Por sua vez, A2 se utilizando de uma linguagem mais coloquial que matemática, ou seja, do intuitivo, sobre a mesma questão, demonstrou compreender os conceitos: “Sim, na parte interna. Eu consigo fazer isso na parte interna, sim.” (A2)

Certamente as semirretas que utilizou para organizar seu raciocínio não estão, a princípio, na mesma reta, assim a figura 35, abaixo, permite compreender o que tem por imagem do ângulo e como vê o subconjunto convexo, dela derivado.

Figura 35. O convexo em A1: (a) e (b) – (a) Imagem das semirretas: (b) – Imagem das semirretas com indicação do que de parte interna.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Na figura 35, acima, a imagem (a) é uma representação de duas semirretas com mesma origem. Já na imagem (b) o sinal que vai de uma semirreta a outra pelo menor espaço, é o que A1 pode estar chamando de parte interna, pois desenhada as duas semirretas com origem comum o plano fica dividido em três subconjuntos, a saber: i – formado pelos pontos constituintes das semirretas; ii- o constituído pelos pontos de um subconjunto convexo limitado pelas semirretas de mesma origem; iii – o definido por todos os pontos que não pertencem ao conjunto convexo limitado pelas semirretas de mesma origem, que é sempre não convexo.

Dando continuidade à entrevista com o objetivo de observar a compreensão deles sobre convexo ou não convexo A2 foi questionado sobre se a parte a interna do ângulo se caracteriza nesse contexto como a convexa ou a não convexa: “A convexa [...]” (A2)

Entretanto, não foi possível observar se o que “parte interna” como sendo o complementar desse conjunto. Já A5, ao responder a esta questão, disse que sim e complementa lançando mão de um compasso de madeira que estava ali perto fez uma abertura, colocou-o sobre a mesa e indicou o conjunto convexo e o não convexo: “Sim, dá [...] Convexo e o côncavo [...]”. (A5)

Assim, o conceito estava presente e o complementou sua indicação dizendo: “De forma intuitiva a gente percebe que o conjunto convexo, digamos que é a parte de dentro, do encontro de duas semirretas e o não convexo seria o complemento dele.” (A5)

Mesmo que os conceitos de subconjunto convexo, não convexo e complementar tenham sido discutidos pelo professor ao comentar a definição – “*Uma região, convexa, determinada por duas semirretas de mesma origem, é denominada ângulo.*” – posta por Giovanni, José Ruy (2012)³⁵ em um dos textos disponibilizados, entendemos que a questão do ensino da matemática, mesmo nesse âmbito pontual, não se resolve por simples informação de um caminho, é necessário levar os alunos a refletir sobre o que estão recebendo, provocando-os, buscando ativar a região de desenvolvimento proximal em cada um deles.

5.5- Ângulo, subconjunto convexo

Quando perguntamos aos entrevistados que lembrança a imagem do subconjunto convexo determinado por duas semirretas de mesma origem lhe trazia, A1 respondeu

³⁵ A conquista da matemática, 6º ano / José Ruy Giovanni, Benedicto Castrucci, José Ruy Giovanni Júnior. – São Paulo : FTD, 2012.

Ele traz uma lembrança de uma figura muito parecida com um triângulo, mas de certa forma um triângulo com uma área indefinida, ele é muito parecido com isso porque nós teríamos duas semirretas determinando uma região no plano e nós poderíamos caminhar por essas semirretas partindo do, ou melhor sobre essa região, partindo do vértice que é a união das duas semirretas de maneira infinita, a qual poderíamos nunca chegar a um (incompreensível) dessa região. Então a figura que se forma na mente do aluno é muito parecida com um triângulo. (A1)

Ao falar que a figura se assemelha a um triângulo, provavelmente devido à representação gráfica do plano representado na superfície do quadro, ou uma folha de papel, de qualquer formato, que são objetos limitados no mundo físico. Assim, ao falar que a figura que imagina é parecida com um triângulo, uma figura limitada no plano, está falando no sentido do senso comum. Retas, semirretas, os espaços limitados por elas são ilimitados conceitualmente, na imaginação, mas sua representação concreta, nunca. Assim, observamos um pequeno obstáculo didático para a compreensão de conceito. O entrevistado A1 durante a entrevista não mencionou a concepção de ângulo do professor, ou qualquer outra definição como, por exemplo, a que traz Giovanni (2012) em seu texto para o sexto ano do ensino básico. Tal fato nos possibilita depreender que a percepção de conceitos por mais simples que sejam não se faz, em geral, sem um tempo de maturação das ideias e compreensão eficiente das representações e a reflexão sobre elas, para que se possa diminuir o impacto provocado pela intuição imediata, pois uma vez que triângulo entre outras características possui área finita: “[...], mas de certa forma um triângulo com uma área indefinida, [...] Então, a figura que se forma na mente do aluno é muito parecida com um triângulo” (A1).

Mas (A1) não demonstrou que associou a imagem com o ângulo, sob a perspectiva do professor e sem tecer maiores comentários, os entrevistados A3, A4 e A5 responderam de forma concisa não nos permitindo deduzir se responderam por conta da definição trazida por Giovanni (2012) ou pela definição trabalhada pelo professor: “Com um ângulo.” (A3); “Ângulos” (A4); “Essa figura aqui dentro, o ângulo”. (A5)

Embora associem à imagem duas semirretas com mesma origem ao conceito de ângulo, apontando a região convexa do plano determinada por elas como sendo o ângulo, não o fizeram apresentando segurança ao falar.

5.6- Ângulo, o que se aprendeu com as discussões?

A partir das várias definições de ângulo trabalhadas na disciplina Projetos Integradores 1, buscamos saber como os entrevistados, que foram alunos desta disciplina, como

assimilaram as definições. A1 informou que até o momento em que a intervenção foi feita ele trazia fortemente ideias intuitivas sobre ângulo que se fixaram em sua mente durante sua formação no ensino básico e não se recorda de ter conhecido, explicitamente, nenhuma definição específica de ângulo nesse período. No entanto, trazia consigo a figura de duas retas concorrentes como a gênese do ângulo.

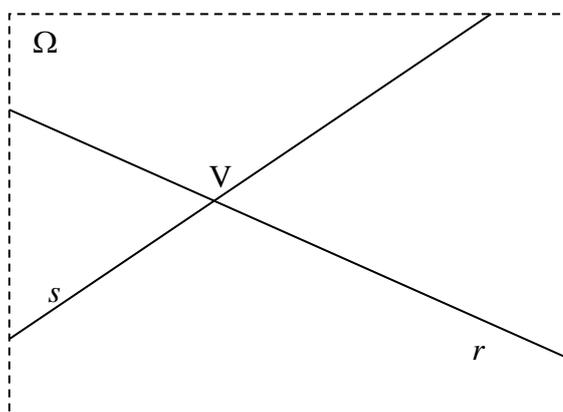
Antes da aula dessa disciplina, que lançou essa discussão sobre ângulo, eu vi e usei as ideias intuitivas de ângulo que eu aprendi no Ensino Médio e no Fundamental. Ali, eu não me recordo no Ensino Fundamental ao certo se o professor ele definiu ângulo, mas o que vem de imediato a minha mente é que ele não definiu. É que eu tinha uma ideia intuitiva por ver a figura de duas retas que se intersectam em um ponto, era isso o que eu tinha na minha mente. Então não havia uma definição precisa e o professor disse que ângulo era aquilo, sem especificar ao certo que parte daquela figura, no encontro de duas retas, eram um ângulo. [...] a figura de duas retas que se intersectam em um ponto, era isso o que eu tinha na minha mente. (A1)

Prossegue dizendo imediatamente que:

Então não havia uma definição precisa e o professor disse que ângulo era aquilo, sem especificar ao certo que parte daquela figura, no encontro de duas retas, era um ângulo [...], sem especificar ao certo que parte daquela figura, no encontro de duas retas, era um ângulo. (A1)

Observa-se nas entrelinhas de sua entrevista que foi ao lhe apresentarem a imagem das duas retas concorrentes dizendo-lhe que ângulo era aquilo, a figura toda, sem maiores esclarecimentos. Entendemos que esse aluno já sentia necessidade de algo mais esclarecedor. Havia dúvida sobre o que era de fato ângulo. Deduzimos, pelo excerto da entrevista, que ele percebe as partes que a figura lhe oferece, porém não as identifica, imediatamente, como ângulo, figura 36 abaixo, que embora nos pareça irrelevante, não é.

Figura 36. Retas concorrentes no ponto V. O ângulo foi posto para A1, como sendo qualquer uma das quatro regiões convexas determinadas pelas retas r e s concorrentes em V.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

A figura 36, acima, determina no plano quatro subconjuntos convexos, intuitivamente, os subconjuntos convexos limitados por cada par de semirreta com origem no ponto de concorrência, V, das retas. Há professores e livros texto que traz a concepção de ângulo exibindo uma figura semelhante a essa e dizendo: ângulo é qualquer uma das quatro regiões delimitadas por essas retas.

E conclui: “Então para mim, o que eu tinha na mente era: ângulo é isso aqui, mas isso aqui o que dessa figura? A figura de duas retas.” (A1)

Contudo, conjecturamos que para A1, apesar de ter construído um conceito sobre ângulo, as dúvidas permaneceram até então. Portanto, pressupomos que as discussões na disciplina contribuíram para:

1. Uma mudança implícita em sua concepção do conceito de ângulo como é possível deduzir, também, de “[...], o que *eu tinha* na mente *era*: [...]”, usando os verbos Ter e Ser no tempo passado.
2. Seu envolvimento com as atividades ali desenvolvidas a respeito do assunto não foi inócuo, pois dele é possível perceber que seu olhar sobre o assunto não é mais o mesmo, embora não tenha deixado explícito como enxerga-o agora.
3. Ao declarar: “[...], o que eu tinha na mente era: ângulo é isso aqui, mas isso aqui o que dessa figura? A figura de duas retas.”, alerta-nos para o fato de que a figura tão somente, ao menos para ele, não dava conta do que fosse um ângulo. É claro que ao observar o desenho das duas retas, percebia-as, mas também percebia os espaços determinados por elas no suporte – o quadro negro, branco, verde, a folha do caderno, etc. – e a percepção desses espaços trouxe-lhes dúvidas o que fica evidente nas falas: “[...], o professor disse que ângulo era aquilo, *sem especificar ao certo que parte daquela figura, no encontro de duas retas, era um ângulo.*” e “[...], mas isso aqui o que dessa figura? *A figura de duas retas.*”, daí a dúvida.

A2, ao responder a mesma questão, disse:

Só nas aulas eu tive a oportunidade de ter e presenciar uma discussão sobre ângulo e a partir das definições apresentadas pelo professor que contribuiu muito para mim, principalmente porque eu passei a enxergar ângulo de uma forma diferente e de uma forma distinta do que eu enxergava antes, por conta que no ensino básico, me impuseram o que era um ângulo, e para mim não era ângulo aquilo e pronto, mas sendo que não é verdade, a partir do pressuposto que se tem algumas ambiguidades podem ser algo que está mais correto que aqui. [...] Só nas aulas eu tive a oportunidade de ter e presenciar uma discussão sobre ângulo [...] (A2)

Esse entrevistado, ao afirmar que “teve a oportunidade de discutir sobre ângulo” indica que foi a primeira vez que teve a oportunidade de participar de um evento dessa natureza, como aluno, onde observou e participou das discussões sobre o tema e que nesses momentos explicita a mudança na maneira de compreender o que seja agora um ângulo diferentemente da concepção que anteriormente

[...] a partir das definições apresentadas pelo professor que contribuiu muito para mim, *principalmente porque eu passei a enxergar ângulo de uma forma diferente e de uma forma distinta do que eu enxergava antes*, [...], por conta que no ensino básico, *me impuseram o que era um ângulo*, e para mim não era ângulo aquilo e pronto, [...]. (A2)

Porém, não nos é possível inferir que ele tenha uma definição clara sobre ângulo, e conjecturamos que esse aluno já sentia algo que o incomodava quanto a aceitar, sem reticências, a definição que lhe foi imposta ao dizer: “[...], *me impuseram o que era um ângulo, e para mim não era ângulo aquilo e pronto* [...]” (A2)

Em sua entrevista, observamos um alerta na relação conteúdo-professor-aluno. É necessário que essa triangulação seja vivenciada com o máximo cuidado e perícia para eliminar dúvidas e facilitar a compreensão do que se pretende que seja apreendido, nunca apenas decorado, não refletido, enfim, trabalhar em sala de aula superficialmente possibilitando uma grande oportunidade de se alcançar o objetivo proposto, ou seja, a aprendizagem daquele conhecimento.

O entrevistado A4, ao se expressar, demonstra de maneira clara que havia nele uma lacuna, a necessidade de algum esclarecimento que fosse, a respeito do tema e isso pode ter aguçado sua curiosidade sua expectativa em poder preenchê-las. Apesar do assunto não tomar parte do programa da disciplina, que naquele momento se desenvolvia, achou por convencer-se de sua importância à medida que o debate avançava, pois diz:

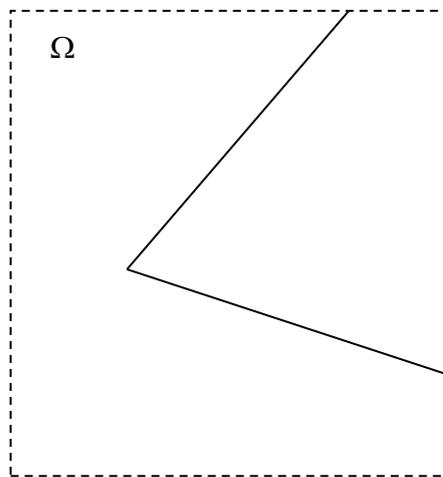
Eu gostei de quando esse assunto foi levantado. A princípio a gente até ficou perguntando a ele, isso não tem nada a ver com o que a gente está trabalhando, mas na medida em que o assunto foi prolongando e a gente foi trabalhando em cima, foi bem legal, porque na educação básica, pelo menos na minha, os professores, quando a gente chegava no assunto de ângulo, a ideia de ângulo o conceito mais, a gente não discutia definições de outros livros, nada, era aquela definição que o livro trazia e ponto final. Trabalhava em cima dela e acabou. As dúvidas que surgiam, basicamente o professor voltava para a definição, então meio que andava e chegava ao mesmo ponto. Mas só que aqui a partir da discussão foi bem interessante. [...], mas na medida em que o assunto foi prolongando e a gente foi trabalhando em cima, foi bem legal, [...] (A4)

E justificou:

[...], porque na educação básica, pelo menos na minha, os professores, quando a gente chegava no assunto de ângulo, a ideia de ângulo o conceito, *mais a gente não discutia definições de outros livros*, nada, era aquela definição que o livro trazia e ponto final. (A4)

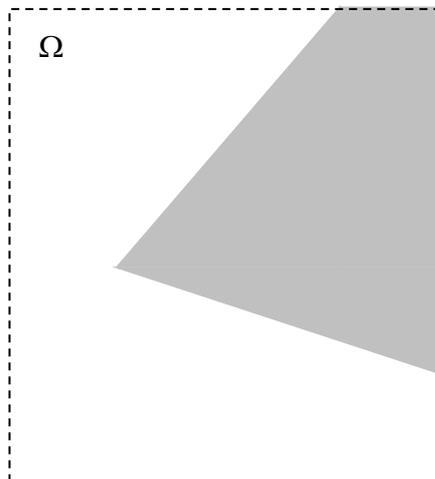
O que denuncia que ele conhece, de algum modo, outras definições além da que trabalhava naquela oportunidade. Isso é importante porque as definições não são equivalentes, apesar de a maioria delas quanto ao aspecto da mensuração, da medida, haver a possibilidade atribuir-lhes o mesmo valor, como sugerida pelas figuras 37 e 38 abaixo.

Figura 37– União de semirretas. O ângulo como união de duas semirretas de mesma origem.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 38– Conjunto convexo. O ângulo é o conjunto convexo delimitado por duas semirretas de mesma origem.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Esses ângulos são entidades de forma distintas, mas podem possuir a mesma medida. Complementando o que se diz os exemplos acima, já provocam uma interrogação na mente de muitos alunos e, apesar disso, parece que não se tem uma preocupação com esse estado de coisas.

Medir um ângulo, seja ele o que fosse, parece ter sido o mais importante conforme alguns autores como, por exemplo, Lobo da Costa (1997) ao dizer: “Lidar com ângulo significa lidar com suas medidas.”, (LOBO DA COSTA, 1997, p. 30)³⁶.

Já o entrevistado A5 ao responder à pergunta, diz:

Não, não, e na sala sempre o professor chegou, deu a definição e se contestasse algo ele simplesmente se fazia de desentendido e continuava a aula. Geralmente era assim. (A5)

Depreende-se que do ponto de vista dele algo ficou a desejar, um esclarecimento, uma explicação a mais, e, deixa que se perceba, ainda que de forma superficial, uma relação um tanto autoritária, impositiva, na condução do assunto por parte do professor a que se reportou, sem identificá-lo de modo algum, mas deixando claro uma insatisfação no preenchimento de suas expectativas onde se percebe, também, uma possível rigidez no contrato didático, nas bases estabelecidas em Brousseau (1996) e sua dinâmica de: quebra e retomada quase que continua, por sua unilateralidade no desenvolvimento e na condução da aula.

Essas percepções, tênues, por conta do que se observa na entrevista de A5, e não da observação direta do movimento no espaço vivo da sala de aula e seus atores, não são, de modo algum, impossíveis de acontecer e, um tanto remotamente, eram a praxe didático-pedagógica vigente onde o aprendiz era um ente absolutamente *passivo*. É claro que a oportunidade que teve de rever e debater alguns aspectos sobre o ângulo, ainda que acidentalmente. Ele deixa transparecer, implicitamente, em sua entrevista, uma satisfação, ainda que incompleta, de suas expectativas quanto ao modelo de abordagem adotado nas atividades decorrentes da intervenção, privilegiando o diálogo aberto entre eles e pelas reflexões sobre e os aspectos abordados quando diz: “[...], e na sala sempre o professor chegou, deu a definição e se contestasse algo ele simplesmente se fazia de desentendido e continuava a aula. [...]” (A5).

³⁶ COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. Funções Seno e Coseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador – Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 1997.

Quero ver nas palavras de A5 um apelo, ainda que de forma inconsciente, no sentido de que a formação do professor, em particular do professor de matemática, ultrapasse a dimensão da informação e treinamento de técnicas, muitas vezes estereis para eles, das quais não conseguem, em geral, atingir além da dimensão tecnicista, mecanicista e imediata, com a qual, por não apreender por completo o que lhes estende, diminui enormemente a sua ação na resolução de problemas, onde o conhecimento mais radical sobre o que se deveria aprender é absolutamente necessário. O comportamento do professor, pelo que se pode perceber na fala de A5, sugere que este está mais perto do que D'Ambrosio (1996) diz ter mais tendência para caçador do que para um educador. Além disso, a falta de diálogo o coloca em desacordo com Pestalozzi (2012), que fazia do diálogo parte integrante de sua prática educativa, um princípio mesmo. Nesse sentido, Oliveira (2015)³⁷ lembra que “Pestalozzi aponta que não se pode perder de vista que o ensino deveria ter por princípio metodológico as perguntas; ou seja, aquele mesmo princípio da conversação.” (OLIVEIRA, 2015, p. 38). Nessa perspectiva, pode-se deduzir que a informação de técnicas e treinamento das habilidades matemáticas não são suficientes para uma prática educativa desse campo de conhecimento, tão necessário para o desenvolvimento humano.

As entrevistas mostraram o quanto o conceito de ângulo é complexo, que alunos oriundos do ensino básico, apesar de terem, de alguma forma, construído uma concepção do conceito carregam muitas dúvidas.

A permanecer o estado da arte, pouca mudança significativa ocorrerá.

³⁷ Pestalozzi, **O método intuitivo e os saberes elementares aritméticos**. In, Caderno de trabalho / Wagner Rodrigues Valente, (org) – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

6- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já se pode ver, de Euclides até os dias de hoje, esse “objeto”, esse “ente”, esse conceito da geometria plana, elementar, denominado de ângulo conheceu inúmeras definições e abordagens, mas que não se fizeram suficientes para excluir, eliminar, de maneira satisfatória as contradições e controvérsias, com respeito às questões: ontológico-matemática, imersão e diálogo com as matemáticas. Tampouco possibilita, no espaço da sala, minimizar os obstáculos que oferece ao processo de ensino e aprendizagem, dificultando sua compreensão.

A definição que trazemos tem a pretensão de definir ângulo, livre de controvérsias e ambiguidades reduzindo, ao máximo, as dificuldades que lhes eram inerentes, para além da simples intuição.

Propriedades do plano euclidiano e noções da teoria dos conjuntos são pilares na constituição de uma definição de ângulo que possa, enfim, alcançar esses objetivos.

O que expomos é destinado aos professores em formação inicial, por exemplo, bem como os que já atuam no ensino fundamental e/ou médio, para que possam, em seu trabalho na sala de aula, através de uma transposição didática adequada, levando também em consideração, dialogarem com conceitos de outros campos já consolidados do conhecimento, no sentido de subsidiar argumentos e atitudes ao processos que os conduzam atingir seus objetivos, formando integralmente seus alunos na perspectiva de os tornar cidadãos críticos, conscientes e não “robotizados”.

Objetiva também que eles possam, aprofundando seus conhecimentos matemáticos, perceberem o diálogo entre conceitos de diferentes teorias e disciplinas matemáticas, incentivando seus alunos nesse sentido, de forma rigorosa, para que os conhecimentos adquiridos, assim, possibilitem um aprendizado menos superficial, sistêmico, dialógico, ampliando suas possibilidades no processo de ensino.

Autores que se preocupam com a questão do ensino desse conceito, tão fundamental, o ângulo, como, por exemplo, Gadotti (2008), traz em seu trabalho, às páginas: 79, 80, 81, 82, 83 e 84, algumas definições, reunidas em tabelas construídas a partir de livros didáticos e agrupadas em categorias, a saber: *par de linhas*, região do plano, como giro e não define/outras cobrindo os períodos: anterior, durante e posterior ao Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Esboçando um quadro semelhante, do estado da arte, Vieira (2010) concorda com Gadotti (2008) quanto à profusão de definições existentes, e lembra recomendação contida nos PCN que os professores devem levar o aluno a “reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos”

(BRASIL, 2008, p. 152). Essa recomendação, explicitamente, deixa clara a coexistência de concepções diferentes para ângulo. Sugere, na sequência, alternativa didática para o ensino do conceito, principal objetivo no seu trabalho. As autoras Diniz & Smole (2008) trabalharam a questão do ensino do ângulo propondo uma abordagem desse conceito como giro. Portanto, o problema das contradições e ambiguidades, bem como, os obstáculos epistemológicos nos processos de ensino e aprendizagem, não pareceram superadas em momento algum por nenhum deles.

Propomos, então, uma redefinição do conceito *ângulo*, lembrando que o eminente matemático e filósofo francês, Jean le Rond d’Alambert, 1717-1783, a respeito da importância, da necessidade, das definições diz ele:

[...] vê-se que existe um grande número de ciências em que, para chegar à verdade, basta saber fazer uso das noções mais comuns. Esse uso consiste em desenvolver as ideias simples que essas noções encerram, o que se chama *definir*. Não é sem razão que os matemáticos encaram essas definições como princípios, pois, nas ciências em que o raciocínio tem a melhor parte, é sobre definições límpidas e exatas que se apoia a maior parte de nossos conhecimentos. As definições são, portanto, um dos objetos a que mais se deve dar atenção [...]. (D’ALAMBERT, 2014, p. 32.)

É com esse espírito que propomos uma nova definição de ângulo: “**Ângulo** é qualquer subconjunto convexo³⁸ do plano, delimitado por duas semirretas com mesma origem, cujo complementar, com relação ao plano é não convexo”.

É tarefa fácil mostrar que ela supera as ambiguidades e obstáculos epistemológicos nas tarefas de ensinar e aprender, que a coloca como desafio didático para ser superado pelo professor ao, por exemplo, fazer uso de teorias como: Teoria das Transposições Didáticas, assentadas por Chevallard (1991) e da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1990).

Essa nova definição não destitui a grande maioria dos fatos consolidados sobre os resultados devido ao conceito, na geometria, mas vem colocar alguns aspectos de seu ensino e de si próprio mais às claras e de maneira coerente.

A educação dentro de uma sociedade é uma atividade complexa que visa atender as necessidades fundamentais de sua sobrevivência. Para tanto, disponibiliza condições para que seus membros sejam preparados teórica e tecnicamente para essa finalidade. A maneira como as diversas atividades educacionais são postas em prática, depende quase que exclusivamente da particular ideologia política por ela adotada e, implicitamente, organizada de acordo com

³⁸ Um subconjunto do plano é chamado de **convexo** se dados dois pontos quaisquer pertencentes a ele o segmento de reta determinado por eles estiver nele contido, caso contrário é dito não convexo.

as necessidades das classes que a compõe, no sentido de que cumpram seus objetivos. O homem, nesse cenário, quase sempre, é relegado à condição de objeto e, só a grande esforço, visto como ser de, e da, transformação.

Uma educação que não entenda o homem como ser transformador, dele próprio e de seu entorno, reduz-lhe a condição de coisa, capaz de ser adestrado, aprende, mas não tem autonomia, produzindo no tempo enquanto apenas reproduz, como um carimbo. Decretar que um homem seja reduzido à coisa, impondo-lhes condições adversas é de uma perversidade incomensurável, e como toda perversidade, inadmissível.

O que é mesmo um ângulo? Pergunta feita por um aluno de um curso superior de formação de professores de matemática confirma a suspeita de que esse conceito da geometria, tão antigo, ainda não está claro o suficiente, ao meu olhar, ou a forma de tratá-lo tampouco, enquanto era educado, levou-o a apropriar-se dele completamente. É basicamente sobre isso que tratou este trabalho.

Ao analisarmos algumas das mais frequentes definições de ângulo, pondo-as a dialogar e confrontando-as com outros conceitos matemáticos, evidenciou-se nelas incoerências que, olhando de perto, impõe-lhes revisão.

Propusemos uma definição que não apresenta os problemas que a análise deixou às claras nas que foram analisadas. O que isso significa? Significa que do ponto de vista matemático o conceito de ângulo, agora, está definido de forma coerente e precisa e livre de ambiguidades. Significa, também, do ponto de vista do processo educativo, que seu ensino e aprendizagem se tornem mais significativo, por conta de envolvermos na construção da definição aspectos formais da teoria dos conjuntos, aspectos geométricos e intuitivo colocando-a sob a perspectiva da Teoria Dos Campos Conceituais, devida a G. Vergnaud (1990).

A rotação (o giro) e o ângulo são agora entidades, por nós, separadas e autônomas, com seus lugares bem definidos na geometria e no ensino, sem prejuízo algum para a matemática já constituída e justificadas nos Anexos: A, B e C.

Do trabalho de Gadotti (2008) e Vieira (2010), apesar do primeiro apontar na direção de que as várias definições de ângulo são geradoras de dificuldades, nada sugere no sentido de mudar essa situação e o segundo, ao abordar o ângulo pelo aspecto de suas possibilidades didáticas, também não o faz. Acreditamos, então, que o estado da arte continue sem perspectiva de mudança.

Analisando a entrevista concedida pelos alunos, percebeu-se que eles não estão completamente alheios aos problemas que as definições do conceito acarretam, no sentido de responder à questão: Afinal, o que é um ângulo? Perceberam as dificuldades que cada uma delas carrega consigo e concordam que uma prática pedagógica fundamentada no diálogo, como já preconizado por Pestalozzi (1819), que venha a possibilitar uma formação do futuro professor de matemática, conectado com seu tempo, e afastando-se cada vez mais do que D'Ambrosio (1996) diz a respeito do que considera um professor caçador, ou seja:

[...] que não contam aquele truquezinho que se usa num certo tipo de equação. Deixam para pedir na prova [...]. E satisfeitos pensam: “*Agora consegui pegar esses alunos que se julgavam tão sabidos. Agora eles estão nas minhas mãos.*” [...]. Sua fama de *duro* corre; outros admiram *o quanto sabe* [...].

Em uma aula exploratória, onde o diálogo é necessário em torno de um assunto, o truque pode ser até despercebido, mas quando o aluno perguntar: como é mesmo que se faz isso aqui, tornar-se-á difícil não revelá-lo. Uma atividade exploratória “facilita o estabelecimento de conexões entre temas matemáticos” (PONTE et al., 2009, p. 140) e, em relação a um determinado conteúdo “pode revelar-se de tal forma produtivo que o professor já não vê a necessidade de voltar a trabalhá-lo” (PONTE et al., 2009, p. 141) por conta de promover resultados significativos e uma aprendizagem não calcada no uso excessivo da memória.

O problema da aquisição do conhecimento, em qualquer campo, evidentemente não reside apenas em suas possibilidades didáticas, mas também no fato de seus objetos estarem bem definidos. Quanto ao tema esperamos, sinceramente, que possa ser trabalhado, doravante, através de uma transposição didática mais eficiente, aplicada ao conteúdo ângulo, pelo menos, no âmbito do Curso de Licenciatura em Matemática.

Diz-se que a matemática do matemático é internalista, que seus objetos são de natureza simbólica. Há também a matemática da rua, a do não matemático, das coisas à vista, e, creio eu, cabe ao educador matemático buscar encurtar a distância entre essas “matemáticas”. Muitos falam que as definições em Euclides “são descrições do que já é e não poderia ser de outro modo” (Bicudo & Borba, 2004, p. 96)³⁹, entretanto, acredito que o caráter ontológico e simbólico pode contribuir para aquisição de um conhecimento, para além da intuição primeira. O esforço tem sido enorme, gigantesco, nesse sentido. No entanto faço minhas as palavras do eminente educador matemático Ubiratan D'Ambrosio, quando escreve:

³⁹ Educação Matemática: pesquisa em movimento / Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Marcelo de Carvalho Borba. – São Paulo: Cortez, 2004.

E finalmente, muito timidamente e geralmente em poucas páginas, o autor “força” algumas conclusões para não contrariar muito o que outros disseram. Geralmente as defesas são um lamentável desfile de esnobação sobre se o consagrado autor disse mesmo aquilo ou queria dizer outra coisa. (D’AMBROSIO, 1996, p. 82).

7- APÊNDICE

A - Os alunos e o conceito de ângulo: possibilidades para compreensão

Como estratégia para promover a compreensão dos alunos acerca da definição de ângulo apresentada nesse trabalho, uma sequência de ações foi desenvolvida, pois entendemos importante não negligenciar os fundamentos matemáticos que dão suporte à definição e, além do mais, ativar a parte direita do cérebro que controla as emoções, o senso estético e a intuição possibilitando, assim, um desenvolvimento mais significativo da capacidade intelectual e cognitiva do aluno.

Baseada nos estudos de Roger W. Sperry⁴⁰, Betty Edwards⁴¹ publica *Desenhando com o lado direito de cérebro* e no seu trabalho, ela explica o uso da ideia de *espaço positivo* e *espaço negativo*, (EDWARDS 1984, p. 112). Essa ideia reforça, no aluno, a possibilidade de uma melhor percepção do conceito de *complementar de um conjunto*⁴² em relação à forma como está definido na teoria dos conjuntos.

Em uma folha de papel retangular, representando o plano, ente fundamental da geometria euclidiana, também aqui entendido como um conjunto de pontos com relação ao qual será tomado o complemento de qualquer um de seus subconjuntos, a ideia de espaço “vazio”, o espaço “negativo” (EDWARDS 1984) será pensada, matematicamente, como conjunto universo e os elementos nele desenhados serão entendidos como espaço positivo, ou seja, os subconjuntos do plano com o qual se construirá o conceito de ângulo.

Objetivando executar as ações propostas a fim de minimizar, de dirimir incoerência nas representações gráficas, o aluno será orientado que a reta, segmento de reta e semirreta seguem as orientações:

- **Reta:** uma linha executada com uma régua comum que toque duas das bordas do papel, sem fazer parte de nenhuma borda.
- **Segmento de reta:** uma linha executada com uma régua comum, mas proibida de tocar qualquer das bordas.

⁴⁰ Prêmio Nobel de Medicina e Fisiologia de 1981

⁴¹ A Dr^a. Betty Edwards diz: “[...], comecei a ler vários livros acerca dos estudos efetuados por Roger W. Sperry e seus associados, durante os anos 50 e 60, no Instituto de Tecnologia da Califórnia (Cal. Tech), sobre a chamada *divisão cerebral*”. Em poucas palavras. O grupo da Cal Tech tinha verificado que ambos os hemisférios do cérebro humano têm a ver com as funções cognitivas superiores, mas que cada hemisfério emprega métodos ou modalidades diferentes de processamento de informações, (EDWARDS 1984, pp. 9, 10).

⁴² Segundo Halmos (HALMOS, 1970, p. 18), “Se A e B são conjuntos, a *diferença* entre A e B, mais freqüentemente conhecida como o *complemento relativo* de B em A, é o conjunto $A - B = \{ x \in A; x \notin B \}$ ”.

- **Semirreta:** uma linha executada com uma régua comum, tocando necessariamente em apenas um ponto pertencente a borda do papel.

Ações preliminares para os alunos a compreenderem, por completo, a definição em baila. Inicialmente, represente um plano, digamos Ω , por uma folha de papel como se vê na figura 55, abaixo.

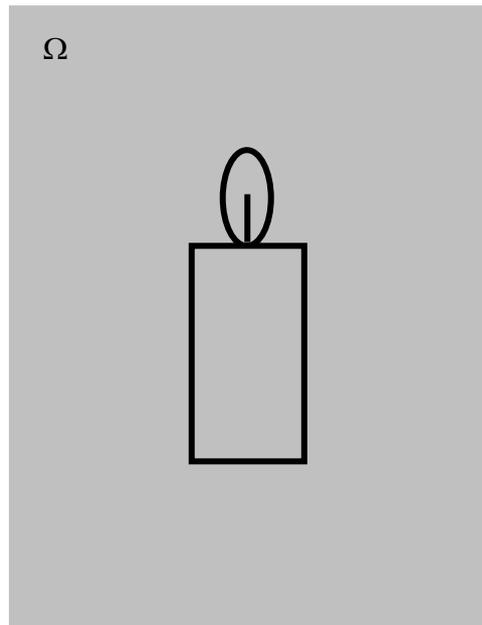
Figura 39. Folha de papel. O plano Ω , representado por uma folha de papel.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Nesse espaço, vamos colocar, desenhar, melhor dizendo, o contorno de um objeto, por exemplo, uma vela acesa, em preto, o que denominamos de espaço positivo. A imagem agora é semelhante à figura 56, abaixo.

Figura 40. Vela. Desenho do contorno de uma vela acesa.

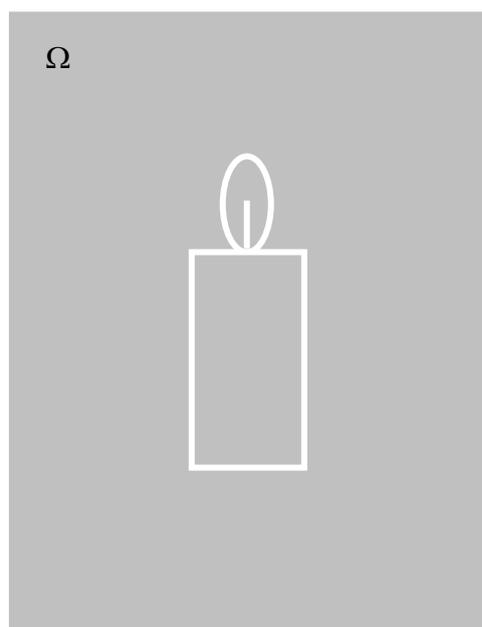


Fonte: produzido pelo autor, 2017.

A ação que resultou na figura 99 acima determina no plano, a folha de papel, a visão nítida de três conjuntos, mais precisamente três subconjuntos, que destacaremos a seguir:

- o espaço vazio, espaço negativo, na cor cinza, figura 100 abaixo.

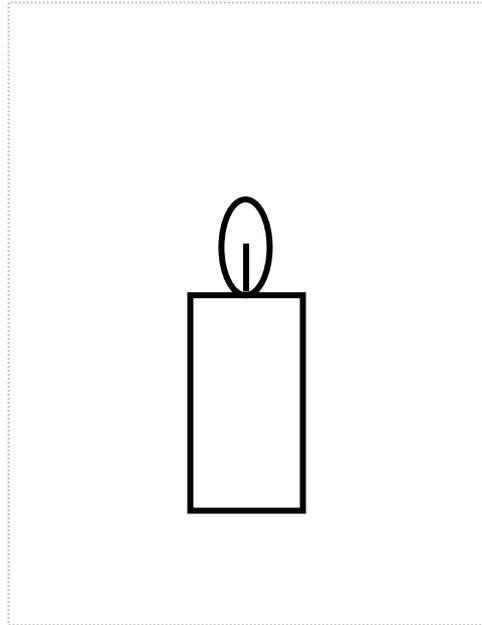
Figura 41. Espaço negativo. Representação do espaço negativo, em cinza relativo a figura 99. Obviamente é o conjunto complementar do contorno desenhado em preto na figura 5.



Fonte: produzido pelo autor, 2017

- o motivo desenhado, o espaço positivo, em preto, figura 101 abaixo;

Figura 42. Espaço positivo. O espaço positivo, o contorno de uma vela acesa.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 43. Espaço negativo, detalhe. Parte do espaço negativo associado ao motivo.



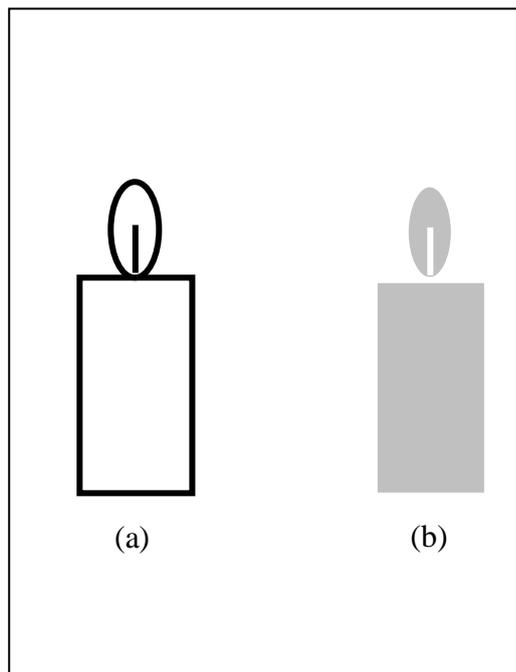
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

- uma parte do espaço negativo, intuitivamente interior ao motivo desenhado, figura 102 acima.

No momento em que se acaba de executar a ação que resultou na figura 103, os espaços positivos e negativos, em preto e cinza respectivamente, surgem simultaneamente.

É fundamental fazer com que percebam, claramente, os subconjuntos criados simultaneamente pela ação e sua relação com o motivo, o quanto eles denunciam o motivo. Tão importante quanto é fazer notar que embora a figura 103 (a) e (b) que seguem abaixo possam ter uma tradução racional semelhantes, usando a modalidade empregada pelo lado esquerdo do cérebro, elas não são o mesmo objeto, enquanto figura, nem traduzem graficamente os mesmos subconjuntos do plano. Isso pode, é claro, ser feito com os alunos como uma atividade, um exercício, na sala de aula.

Figura 44. Comparando espaços. Espaço positivo e parte do espaço negativo.



Fonte: produzido pelo autor, 2017

Essa sequência possibilita aos alunos compreenderem as propriedades do plano e do ângulo, enquanto objetos geométricos, apreendendo o conceito de uma forma lúdica e experienciando, em cada etapa, por cada um dos participantes.

A sequência de ações que seguem abaixo é uma sugestão de atividade que o professor pode propor aos alunos durante a abordagem prévia do conceito de ângulo no plano retilíneo, conforme nossa sugestão.

Ação 1. – Forneça ao aluno uma folha de papel colorida, por exemplo, na cor amarela, no tamanho A4 e identificada pela letra grega Ω , ômega.

Figura 45. Material. A folha de papel como representante do plano Ω , a ser distribuída aos alunos.

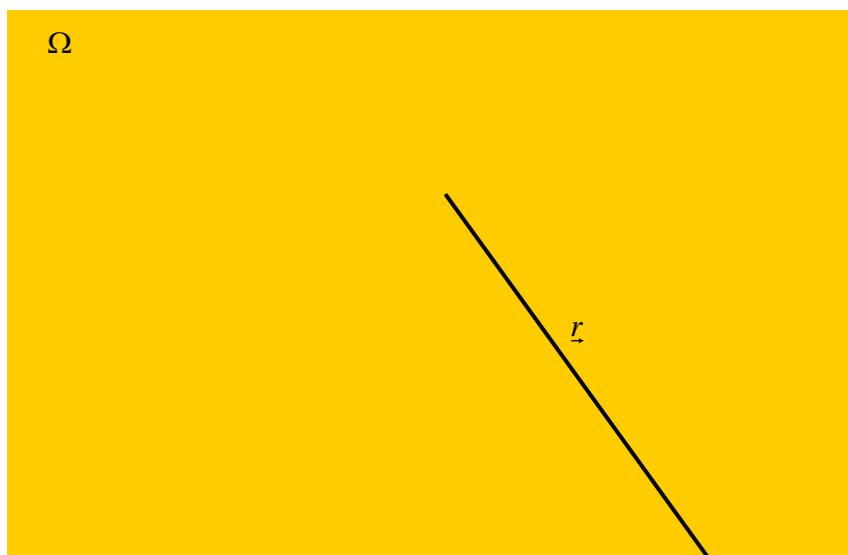


Fonte: produzido pelo autor, 2017

Ação 2. – Informe ao aluno que esta folha colorida, identificada pela letra Ω , representará o plano.

Ação 3. – Peça ao aluno que desenhe uma semi-reta, \vec{r} , com a origem mais ou menos no meio da folha fornecida

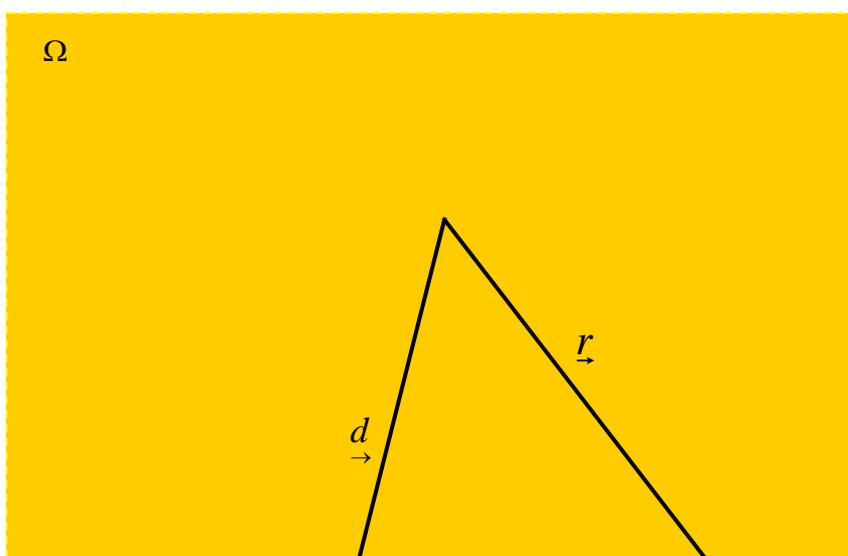
Figura 46. Ação 3. Representação no plano Ω da semi-reta.



Fonte: produzido pelo autor, 2017

Ação 4. – Convoque o aluno a desenhar, nessa etapa, outra semi-reta, \vec{d} , com a mesma origem da semi-reta \vec{r} , mas, de tal forma que a origem juntamente com os pontos extremos, de cada uma das semirretas, que pertencem à borda do papel, não estejam alinhados.

Figura 47. Ação 4. Representação no plano Ω das semi-retas \vec{d} e \vec{r} .



Fonte: produzido pelo autor, 2017

Ação 5. – Pergunte ao aluno se ele vê surgir em sua folha de papel, depois de concluída a ação 4, mais de uma figura, ou forma.

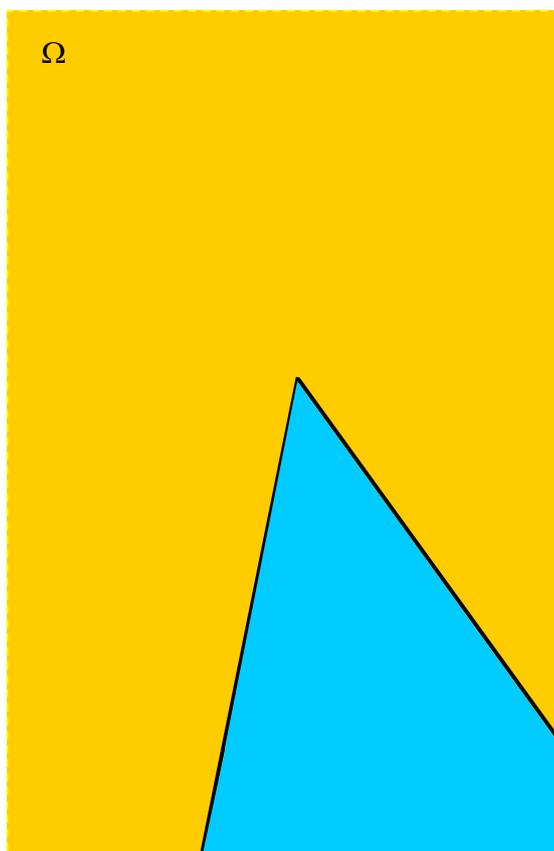
Observação – Nesse ponto, podem surgir várias respostas. A etapa seguinte deve ser iniciada após todos descobrirem, ou serem levados a descobrir, que há efetivamente três formas. O papel está na cor amarela e as semirretas em outra cor: azul, preta, vermelha, grafite, conforme elas tenham sido desenhadas com caneta esferográfica, lápis ou lapiseira.

Ação 6. – Como duas das três formas estão na cor amarela, peça aos alunos, que destaquem uma delas pintando-a de azul, por exemplo.

Duas possibilidades de execução:

Esta:

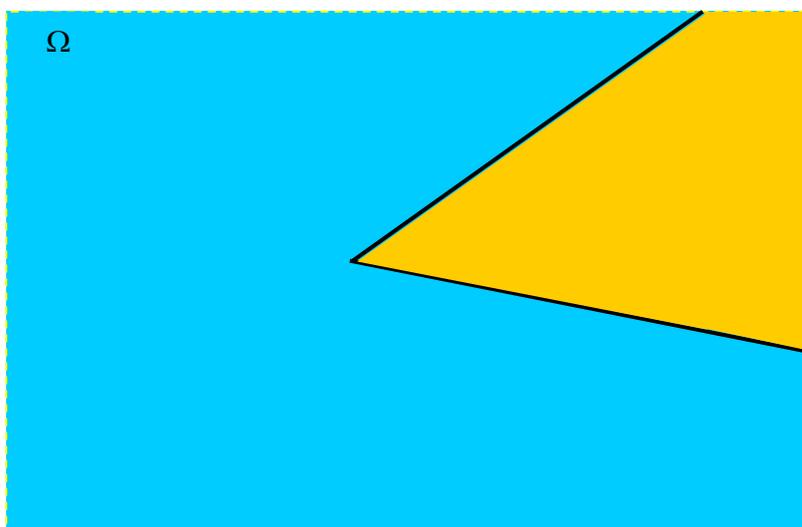
Figura 48. Ação 6 (a). Identificando formas a partir de duas semi-retas com a mesma origem desenhadas no plano.



Fonte: produzido pelo autor, 2017

Ou esta:

Figura 49. Ação 6 (b) outra possibilidade. Identificando formas a partir de duas semi-retas com a mesma origem desenhadas no plano.



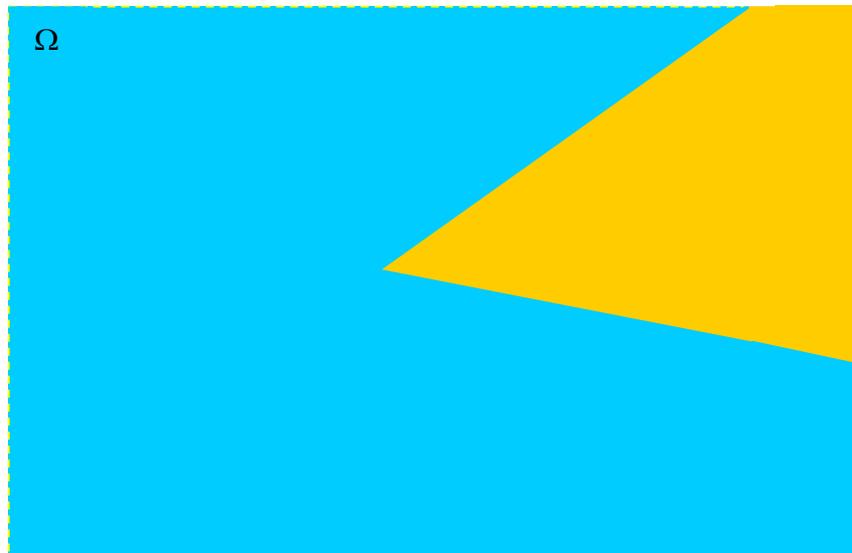
Fonte: produzido pelo autor, 2017

Ação 7. – Peça ao aluno que ele incorpore a parte em preto, as semi-retas, a apenas uma das duas figuras coloridas.

Obtêm-se então as possibilidades:

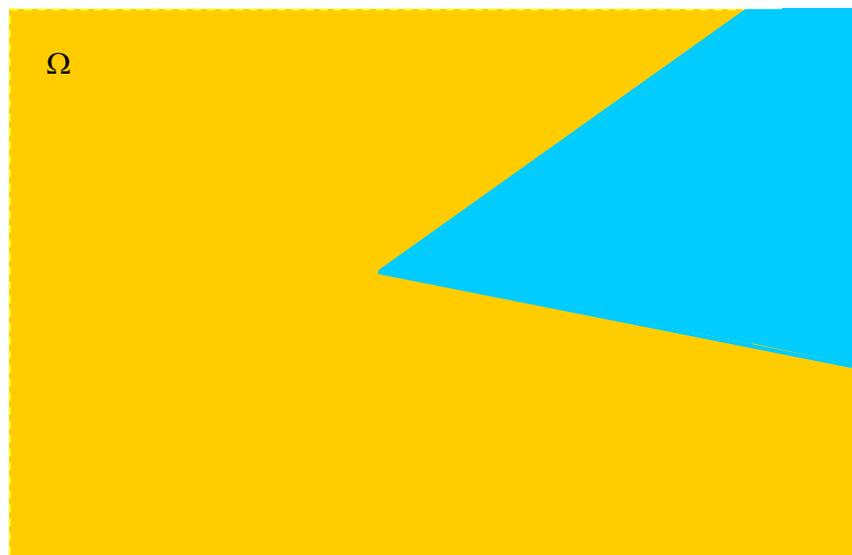
Observação. O resultado da ação é, portanto, uma das figuras que seguem abaixo.

Figura 50. Ação 7 (a) Identificando formas a partir de duas semi-retas com a mesma origem, desenhadas no plano após incorporar as semi-retas às formas.



Fonte: produzido pelo autor, 2017

Figura 51. Ação 7 (b). Identificando formas a partir de duas semi-retas com a mesma origem, em azul e amarelo, desenhadas no plano após incorporar as semi-retas às formas, colorindo em azul.



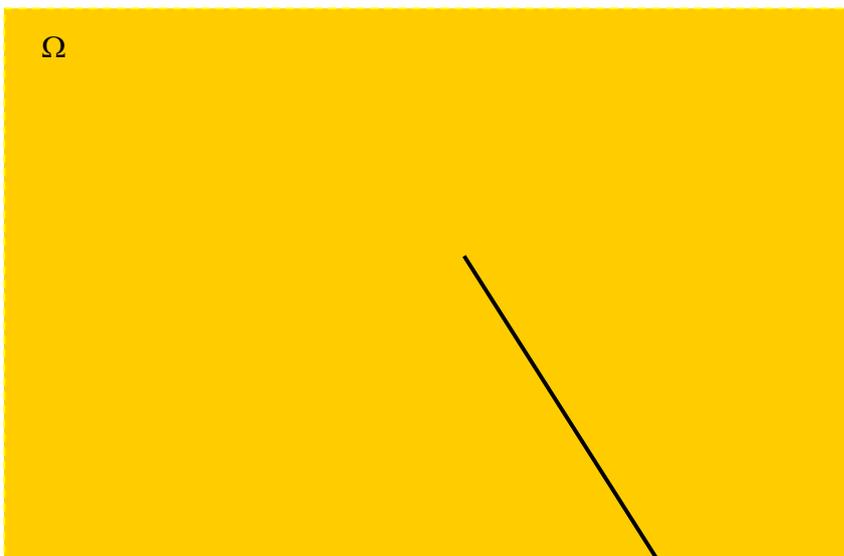
Fonte: produzido pelo autor, 2017

Com a incorporação das semirretas a uma das figuras em cor, exigimos a próxima ação.

Ação 8. – Peça a eles que identifiquem a figura convexa indicando qual a sua cor.

Ação 9. – Em outra folha, na mesma cor da anterior, ordene que os alunos, agora, desenhem uma semirreta com origem situada mais ou menos no centro da folha e, terminado o desenho, peça-lhes que repita a ação, desenhando por cima do que já estava desenhado.

Figura 52. Ação 9. Após executada a ação 9, convença-o de que apesar de só ver uma semi-reta ele desenhou na verdade duas.



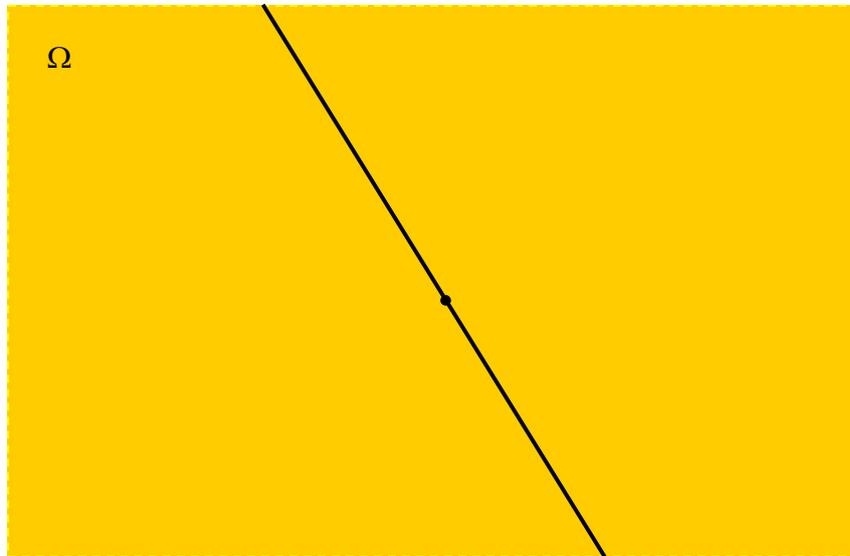
Fonte: produzido pelo autor, 2017

Ação 10. – Pergunte a ele quantas vezes ele desenhou essa semirreta.

Ação 11. – Faça-o ver que a semirreta é um conjunto convexo.

Ação 12. – Solicite do aluno que desenhe uma reta e determine um ponto sobre ela. Desse modo, ficam determinadas sobre a reta duas semirretas com origem comum, o ponto designado.

Figura 53. Ação 12. Representação das duas semi-retas ao concluir a ação. Nestas condições as semi-retas são ditas opostas.



Fonte: produzido pelo autor, 2017

Ação 13. – Convença-o de que a reta, ela mesma, é um conjunto convexo.

Ação 14. – Indague dos alunos sobre quem é o complementar, o espaço negativo, com relação ao plano, dos subconjuntos convexos que eles descobriram.

Ação 15. – Pergunte a eles se já sabem indicar nas figuras os subconjuntos que recebem o nome de ângulo.

Ação 16. – Peça-lhes, então, que identifiquem os ângulos por eles construídos.

Em outro momento, essas ações poderão ser estendidas para a aquisição, por parte dos alunos, da concepção de ângulo que não seja nulo ou raso.

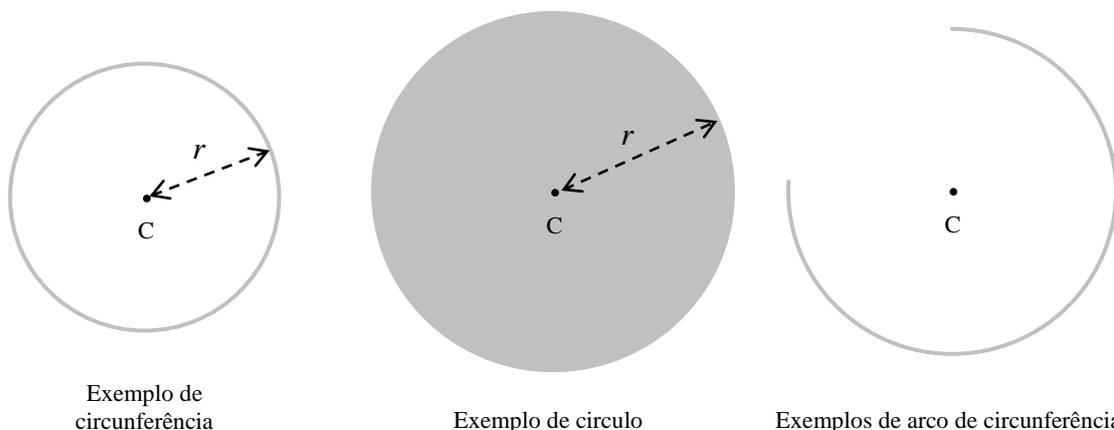
B- Uma hermenêutica do giro

B.1- O que é um giro?

O que é um giro em torno, ao redor, de um ponto P do plano? Na língua portuguesa, falada no Brasil, as palavras “giro” e “volta”, de acordo com Ferreira (2010, p. 379) são sinônimos. A palavra “volta”, ainda segundo esse autor, significa também “ato de girar” (p. 788). “Girar”, por sua vez, pode ter como significado os verbos “rodar” ou “circular” (p. 379). O verbo “rodar” significa também, “rodear” (p. 672). Este pode ainda ser tomado por fazer um caminho “circular” (p. 672), e a palavra circular, entre outros, tem por significado, legítimo, “mover-se circularmente”, “em forma de círculo” (p. 166).

Em geometria, como se sabe, a palavra *circular* evoca os objetos: circunferência, círculo ou arco de circunferência. A palavra circunferência significa geometricamente o subconjunto do plano constituído por todos os pontos que estão a uma mesma distância r de um ponto fixo C , e sua representação gráfica é uma curva fechada de mesmo nome. A palavra círculo, no mesmo contexto, significa o conjunto formado por todos os pontos do plano que estão a uma distância *menor ou igual* a r de um ponto fixo C . Arco de circunferência significa um subconjunto próprio da circunferência constituído de um só pedaço, ou seja: não é possível escrevê-lo como união disjunta de dois de seus subconjuntos próprios e não vazios. Para a circunferência, o círculo ou o arco de circunferência o número r e o ponto C são chamados respectivamente de raio e centro da circunferência, do círculo ou do arco de circunferência. Na figura 44 abaixo representamos uma circunferência, um círculo e um arco de circunferência.

Figura 54. Giro. Exemplo de: circunferência, de círculo e arcos de circunferência.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Um *giro* em torno de um ponto P do plano significará, aqui, genericamente, a ação acabada que realizou pelo menos um arco de circunferência com centro nesse ponto. Esse arco pode ir de Q até o próprio Q, sem que haja qualquer ação, neste caso diremos que o giro é nulo ou de Q até Q onde houve uma ação efetiva e neste caso o giro diz-se completo ou de uma volta ou que se deu uma *volta completa em torno do ponto P*. Se a ação se resumir a um arco de circunferência, ela será chamada de P-Giro. Se a ação completar a circunferência um número n de vezes, diremos que se deu n voltas em torno do ponto P. Se o giro completar um número inteiro n de voltas, indo mais além, mas não completando a volta $n+1$, diremos que se deu n -voltas-fracionada.

Orientado o plano, diremos que: o giro em torno do ponto P-Giro, a volta completa em torno do ponto P e a volta fracionada em torno do ponto P são positivos quando cada um deles for realizado em concordância com a orientação escolhida, caso contrário se diz que é negativo. Nestas condições passamos a chamá-los de giro orientado positivo (negativo), volta orientada positiva (negativa) e volta orientada fracionada positiva (negativa). Graficamente representaremos P-Giros orientados, volta orientada e volta fracionada orientada da seguinte forma:

1. P-Giro – Por qualquer *arco orientado*⁴³ de circunferência cujo centro seja esse ponto, se a ação não completar uma circunferência.

⁴³ Arco de circunferência onde se coloca um dos sinais: < ou > em apenas um dos extremos do arco efetivamente desenhado

2. Volta – Por uma *circunferência orientada*⁴⁴, com centro nesse ponto. Quando o giro corresponder a uma ou mais voltas completas em torno do ponto, indicando-se o número de voltas por um número inteiro positivo, m , escrito entre parênteses e colocado acima do desenho da circunferência.
3. Volta fracionada – Por uma circunferência, desenhada por linha tracejada, indicando o número de voltas completas, a semelhança do caso anterior, e colocando-se o arco orientado indicativo da fração correspondente.

A sequência de figuras 45, 46 e 47 abaixo ilustram o que foi dito acima.

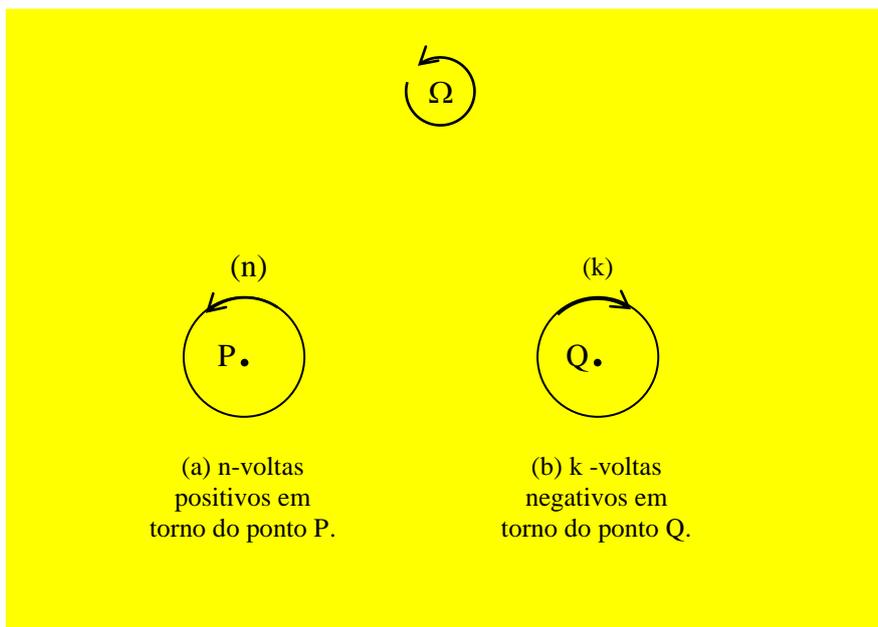
Figura 55. Orientação e giro. Exemplo de giros orientados positivo e negativo em torno dos pontos P e Q respectivamente.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

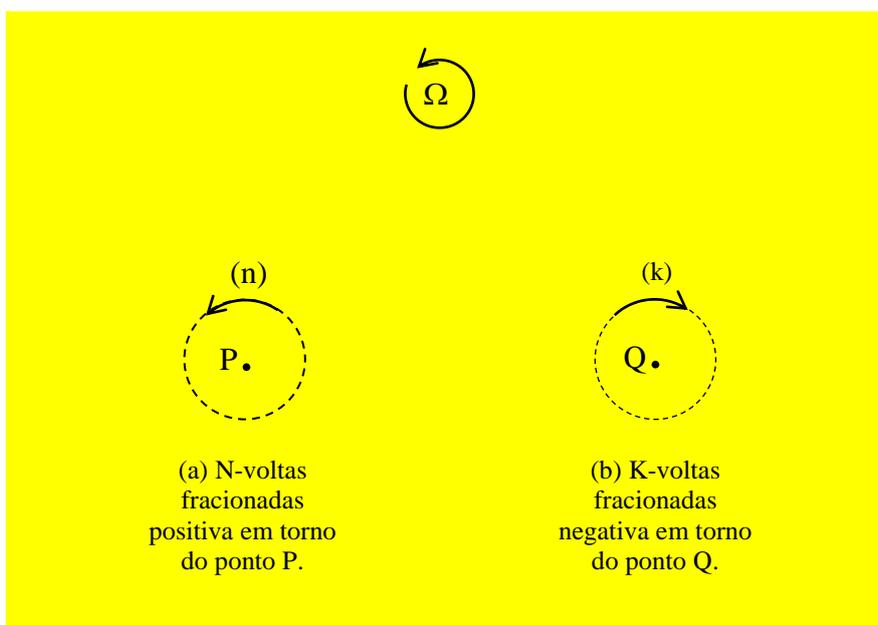
⁴⁴ Circunferência onde se coloca um dos sinais: < ou > em um ponto da mesma.

Figura 56. Giro completo. Exemplo de giros completos, voltas, positivas e negativas em torno do ponto P e Q respectivamente.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

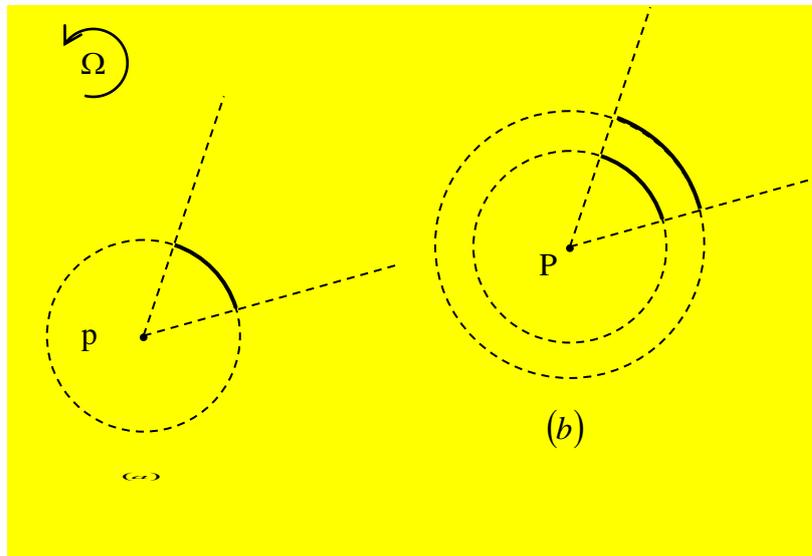
Figura 57. Volta fracionada. Exemplos de voltas fracionadas orientadas, positivas e negativas em torno do ponto P e Q respectivamente.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Sabemos que a representação de um giro por um arco de circunferência orientado não é única, veja figura 48 abaixo. Isso, no entanto, não se constitui em um obstáculo intransponível, como se mostrará a seguir.

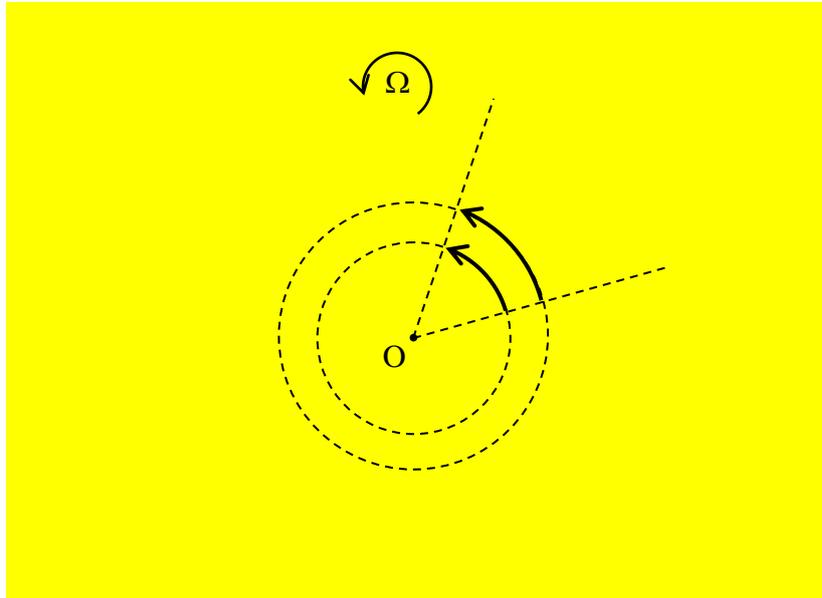
Figura 58. Arco e giro. Indicação gráfica de que o giro comporta vários arcos de circunferência.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

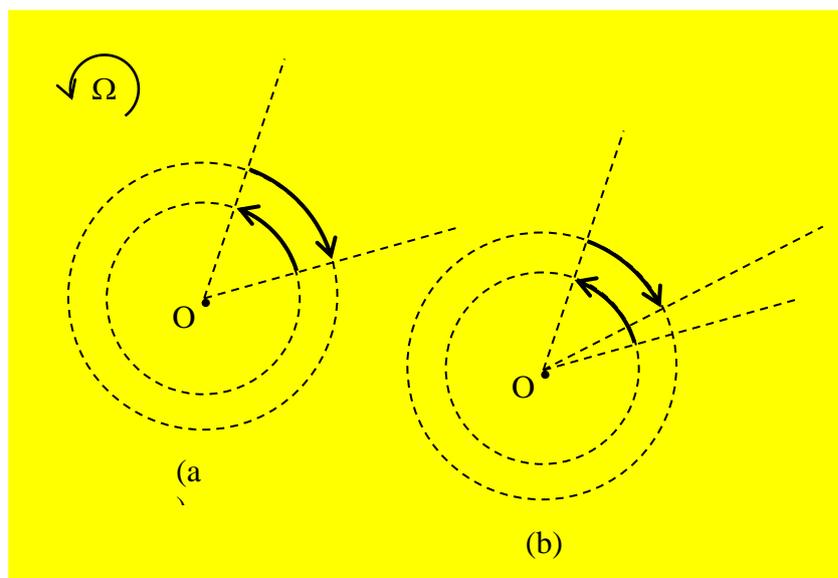
Então, diremos que dois arcos de circunferência orientados são concordantes quando a medida efetiva desses arcos em graus, por exemplo, coincidirem e eles estiverem na mesma orientação. Dito de outro modo: quando for possível obter circunferências concêntricas tais que as semirretas determinadas pelo centro comum, O , das circunferências e pelos pontos extremos de cada arco coincidirem e os arcos permanecerem no mesmo conjunto que tem como fronteira o par de semirretas. Caso isso não aconteça os arcos são declarados: não concordantes. As figuras 49 e 50 abaixo explicam melhor.

Figura 59. Arcos orientados. Exemplos de arcos de circunferências orientados e concordantes.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 60. Arcos discordantes. Exemplos de arcos de circunferência orientados e não concordantes.

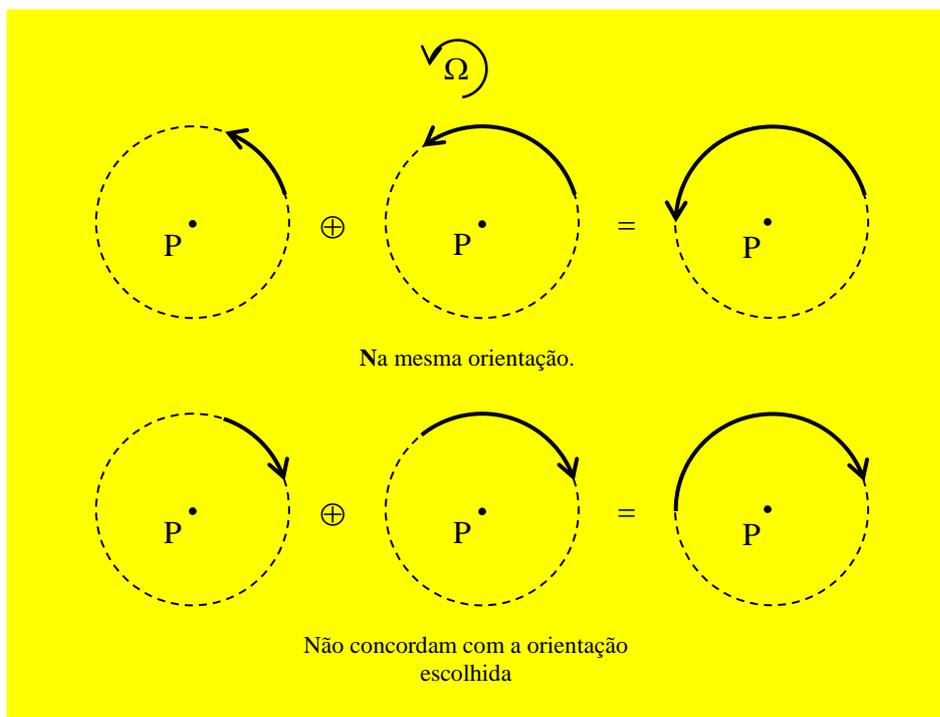


Fonte: produzido pelo autor, 2017.

A concordância de giros implica, assim, que duas voltas completas são concordantes se estão na mesma orientação e o número de voltas for o mesmo; que duas voltas fracionadas são concordantes quando estão na mesma orientação, o número de voltas coincidirem e os arcos orientados, que representa a fração que define o giro como voltas fracionadas, sejam concordantes. Considere a relação em G , onde G é o conjunto constituído de todos os giros em torno de um ponto P , definida pela concordância de giros. Óbvio que a relação de concordância de giros é uma relação de equivalência. Sem perda de generalidade os giros em torno de um ponto P serão realizados sobre a circunferência de raio igual a 1 (um) centrada nesse ponto. Nestas condições defini-se em \hat{G} , conjunto das classes de equivalência derivadas da relação de concordância, uma operação representada pelo símbolo, \oplus , e chamada de adição, cujo resultado da adição de dois giros chamar-se-á de soma e efetua-se assim:

- i. Giros na mesma orientação – sua soma será representada por um giro cuja medida é a soma das medidas de cada um deles mantendo a orientação. Como se exemplifica na figura 51, abaixo,

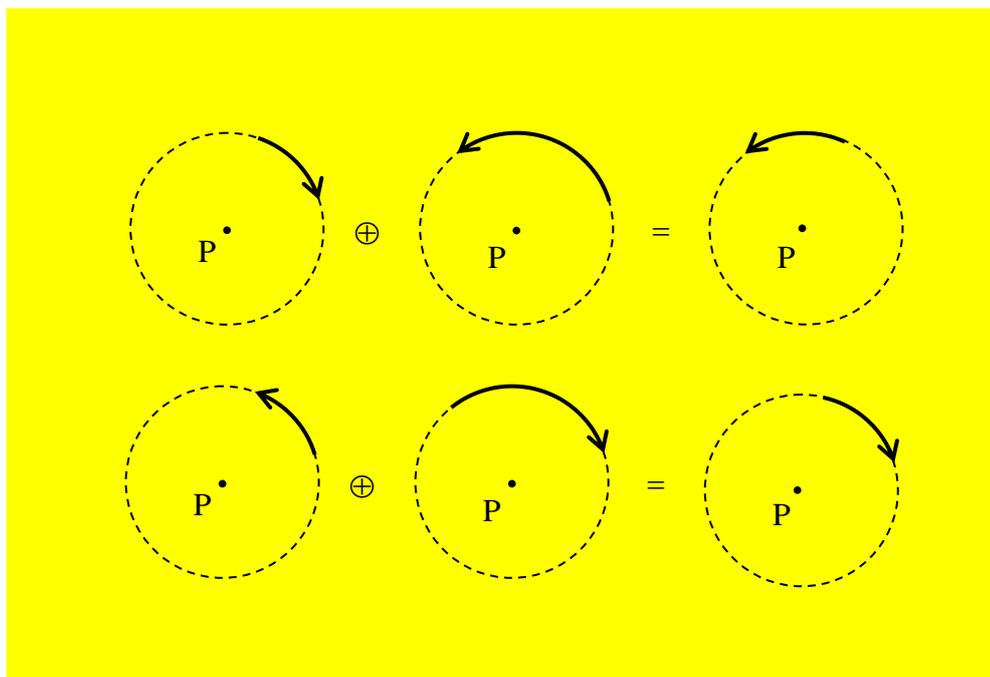
Figura 61. Operação com giros concordantes. Ilustrando como se opera com giros na mesma orientação.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

ii. Giros com orientação contrária – Subtraímos suas medidas e conservamos a orientação daquele cuja medida for maior, como se ver na figura 52 que segue abaixo.

Figura 62. Operação com giros discordantes. Operação com giro estando eles em desacordo quanto à orientação escolhida.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

É fácil verificar que a operação \oplus satisfaz as propriedades que tornam o conjunto \hat{G} , munido dela, um grupo⁴⁵.

A cada número real corresponde um giro orientado em torno de um ponto P. Essa afirmação é sustentada pelo fato de que existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e o conjunto de todos os giros em torno de um ponto P. O experimento que descrevemos a seguir sugere essa função.

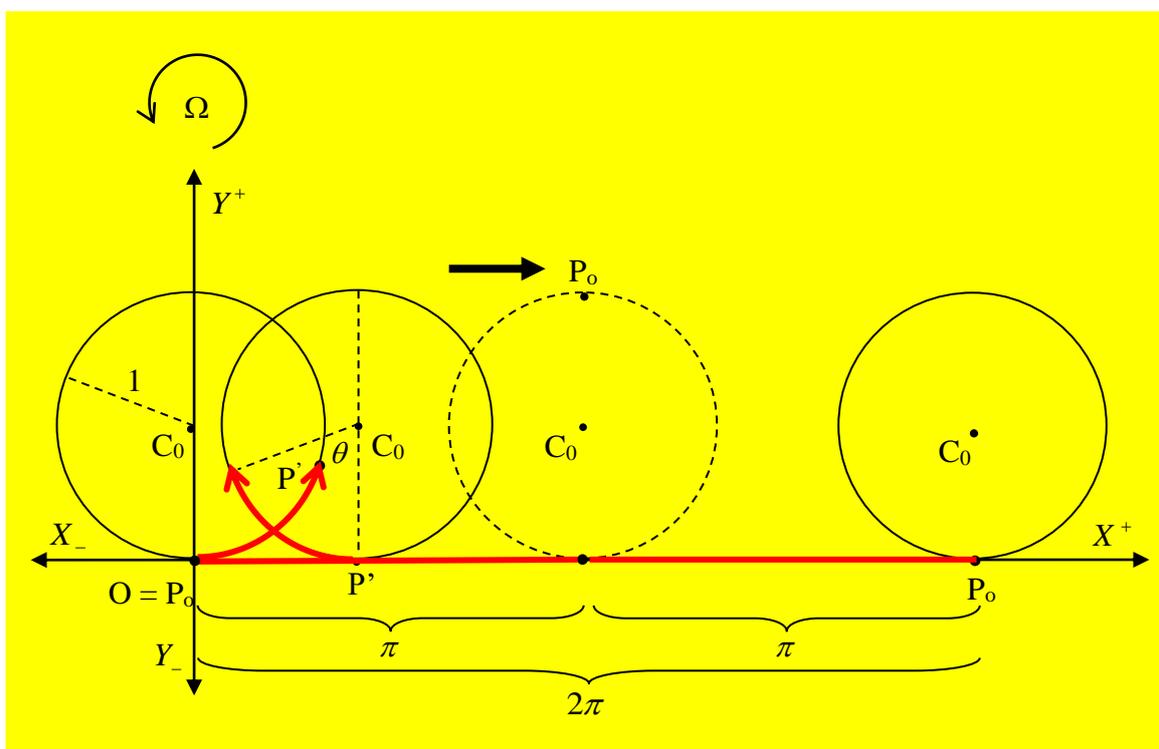
Considerem, no plano, duas retas perpendiculares em um ponto O do plano e seja Σ uma circunferência de raio r igual a um, $r = 1$, com centro no ponto C_0 pertencente a uma das retas e tangente⁴⁶ aquela que não o contém. Suponha que esta circunferência, ao tempo que gira em torno de seu centro, desloca-se, sem deslizar, sobre a reta que lhe é tangente de maneira análoga ao que está explicado em Rodriguez (1977) ao descreve o processo de

⁴⁵ Uma definição de grupo pode ser encontrada MONTEIRO, L. H. JACY - 1971

⁴⁶ Uma reta r é tangente a uma circunferência, em algum ponto P sobre ela, quando a reta r contém também o ponto P e é perpendicular ao raio da circunferência neste ponto.

construção da curva “Ciclóide”. A identificação dos números reais com os giros se dá à medida que a circunferência avança sobre a reta, e associamos ao ponto de contato entre ela e a reta a medida em graus, por exemplo, do arco descrito pelo giro, cujo comprimento coincide com o valor da distância desse ponto até o ponto O. Veja figura 53, abaixo. Óbvio que, assim, fica definida uma função bijetiva que associa os giros aos números reais.

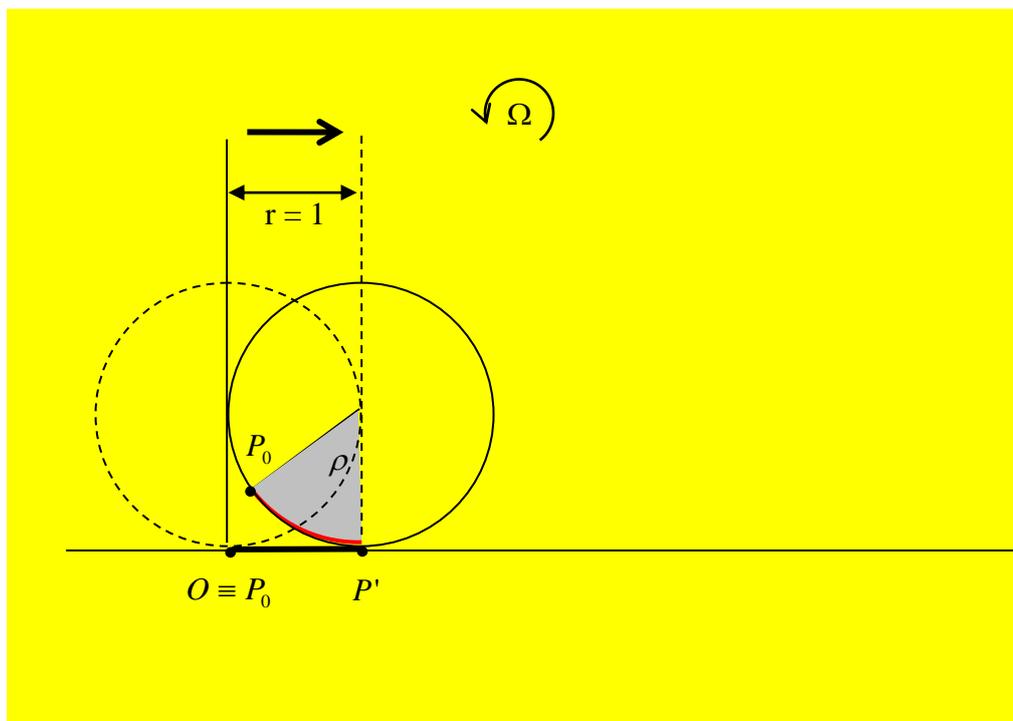
Figura 63. Giro e nº real. Descrição gráfica de como podemos identificar um número real x com uma quantidade θ , de giros em torno de um ponto.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Essa figura identifica do conjunto de todos os giros com o conjunto dos números reais da origem a um outro sistema para medir giros, chamado de radianos, onde o símbolo 1^{rad} , que se lê um radiano, é definido como o giro que corresponde ao ponto cuja distância até o ponto O é igual ao raio da circunferência unitária. Sua obtenção é ilustrada pela figura 54, logo a seguir.

Figura 64. O radiano. Representação gráfica da obtenção do giro correspondente a um radiano, $\rho = 1^{\text{rad}}$, equivalente ao arco em vermelho.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

C- Ângulo: Aspectos geométricos e algébricos

É lícito considerar o plano como um conjunto de pontos e, assim, todos os entes geométricos podem também ser considerados, naturalmente, como seus subconjuntos; dessa forma, podemos aplicar as leis e relações da teoria dos conjuntos com segurança. A propriedade de convexidade do plano é aplicada aos seus subconjuntos, e aqui ela é ingrediente fundamental e necessário para alcançarmos nosso objetivo, aliada ao conceito de complementar de um conjunto. Desenhar, ou imaginar, no plano um par de semirretas com origem comum é, de fato, a ação que faz surgir, no plano, subconjuntos dentre os quais se pode fazer a escolha adequada, aquela cujo subconjunto escolhido satisfará plenamente a definição.

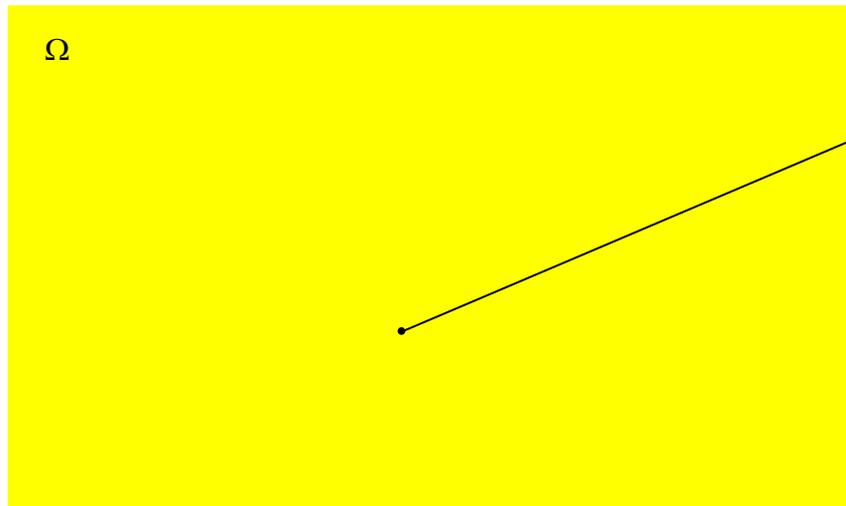
A sequência de figuras 65, 66, 67 e 68 representa o plano Ω , uma semirreta em Ω (perceba que podemos interpretá-la também como representante de duas semirretas coincidentes); a reta com um ponto sobre ela em destaque (as semirretas); duas semirretas com mesma origem e não coincidentes, como na figura 65.

Figura 65. O plano. Representação gráfica do plano Ω .



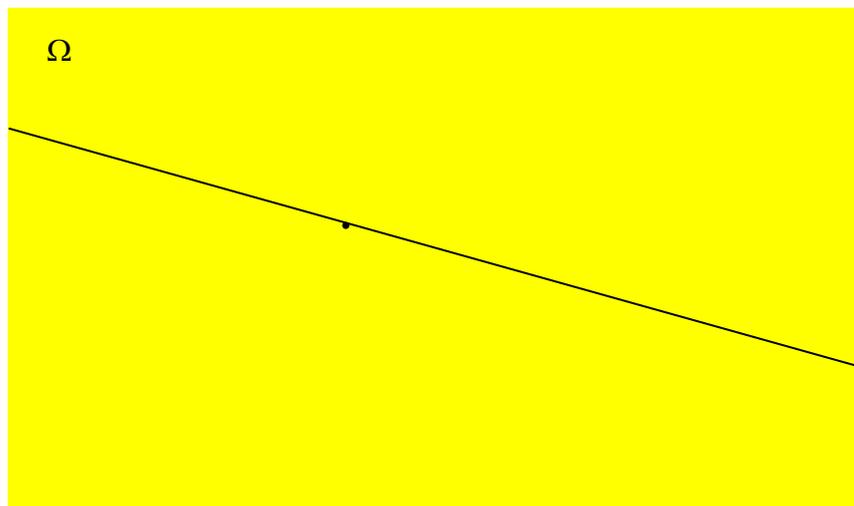
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 66. A semirreta. Representação de uma semirreta no plano com indicação de sua origem Ω .



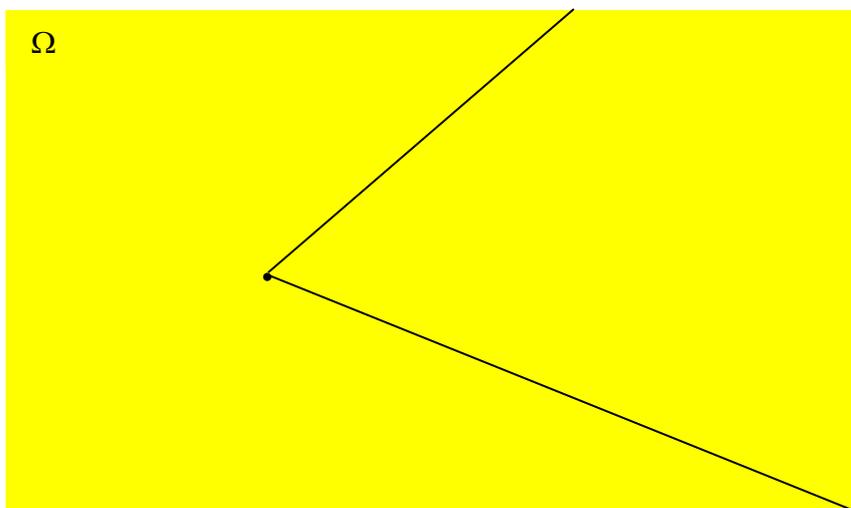
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 67. A reta. Representação de uma reta no plano Ω , ou duas semirretas, na mesma direção, com indicação de um ponto fixado sobre ela, a origem das semirretas.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

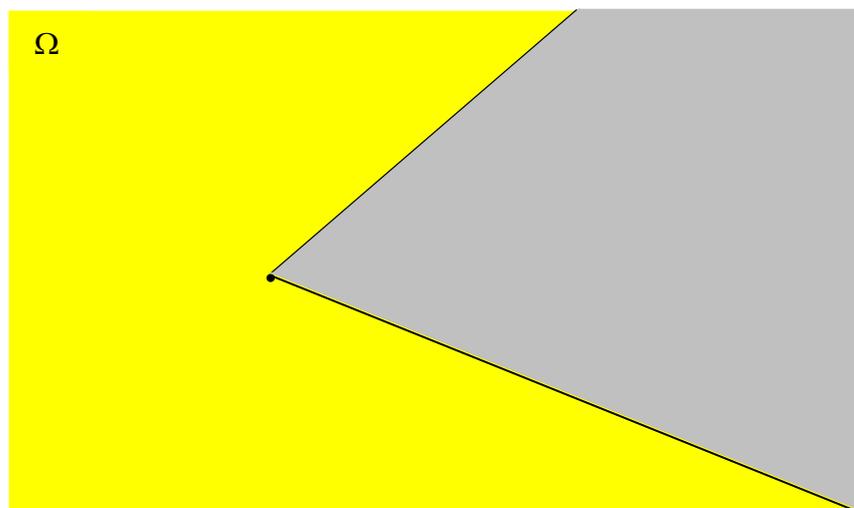
Figura 68. Par de semirretas. Representação de duas semirretas com a mesma origem que não coincidem.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Observando as semirretas representadas em preto nas figuras 33 e 34, após examiná-las à luz da definição em trazida nas considerações, é possível percebê-las, como ângulo. Nesse caso, chamados respectivamente de *ângulo nulo* e *ângulo raso*. Já a figura 35 da origem, sob a mesma definição, ao ângulo, que chamamos de: nem nulo nem raso, representado pela figura 36, abaixo.

Figura 69. O ângulo. Representação de um ângulo nem nulo, nem raso: espaço em cinza incluindo as semirretas em preto.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Para que o aluno compreenda e fixe o conceito de ângulo, o professor deve incentivar o aluno a representá-lo por completo destacando-o, por exemplo, em cor diferente da cor do papel em que estiver trabalhando.

C1- Elementos de um ângulo

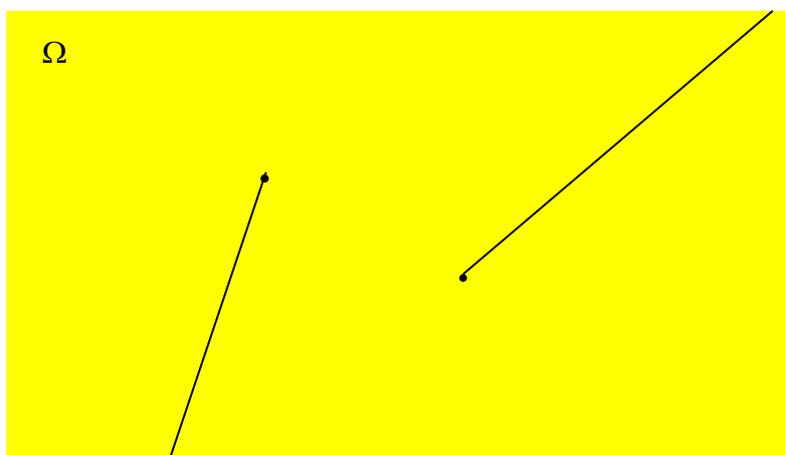
Dado um ângulo, matemos aqui a nomenclatura universalmente utilizada, que diz: *vértice do ângulo* é a origem comum das semirretas que o delimitam; *lados do ângulo* são as semirretas, elas próprias, usadas para construí-los. Esses dois entes definidos aqui são o que se entende por elementos do ângulo.

C2- O transporte de ângulo

Uma técnica muito simples de desenhar com régua e compasso, no sentido ingênuo, é eficaz para que possamos *reproduzir*, “copiar”, no plano, um determinado ângulo para outro local. Descrevemos no que segue essa técnica, encontrada também em Rivera (1986) e, neste trabalho, referimo-nos a ela por **axioma do transporte de ângulo**. Então, dado a representação gráfica de um ângulo nulo, um ângulo raso ou um ângulo nem raso nem nulo, seu transporte, se faz como descrito a seguir.

O ângulo nulo: Represente o ângulo nulo: transportá-lo é efetuar outra representação do ângulo nulo em outro lugar do plano, como se ver na figura 37 abaixo.

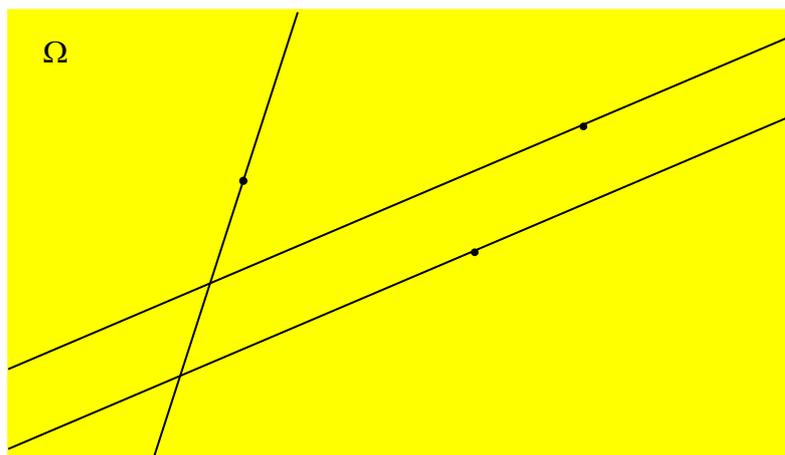
Figura 70. Transporte do ângulo nulo.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Ângulo raso: Seu transporte reduz-se a desenhar outro ângulo raso, em qualquer outro lugar do plano, como se indica na figura 38 abaixo.

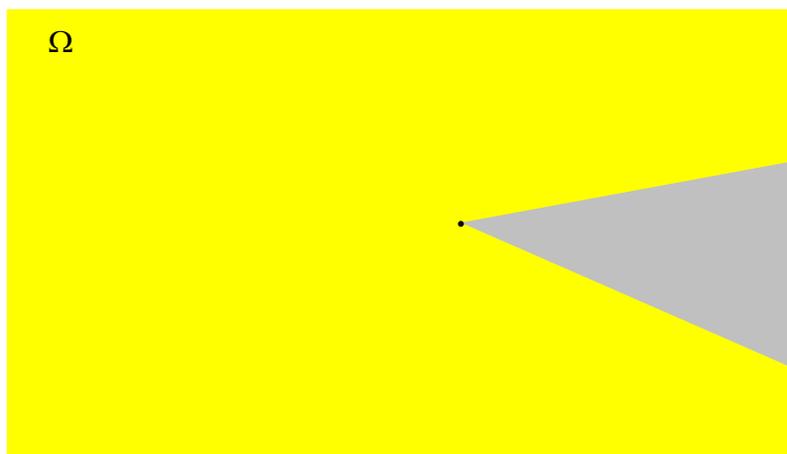
Figura 71. Transporte do ângulo raso



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Ângulo nem raso nem nulo: Figura 72, logo abaixo.

Figura 72. Transporte do ângulo nem raso nem nulo.

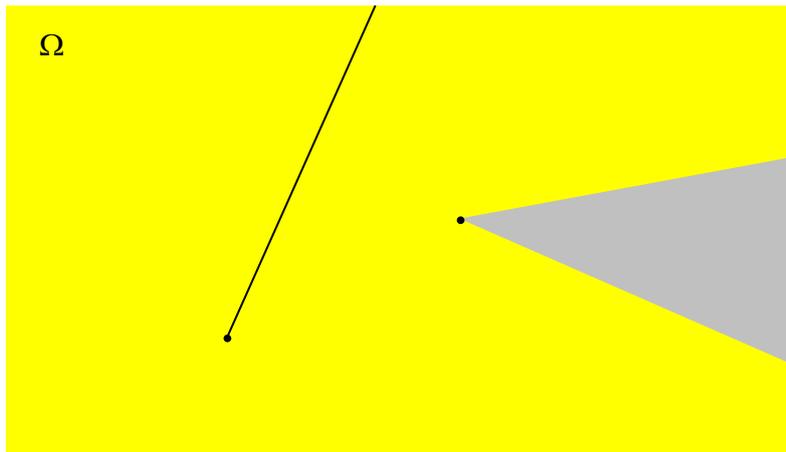


Fonte: produzido pelo autor, 2017.

O seu transporte se faz seguindo os passos ilustrados pela sequência de figuras que seguem abaixo:

i - Determina-se uma semirreta, como indicado na figura 40, logo abaixo.

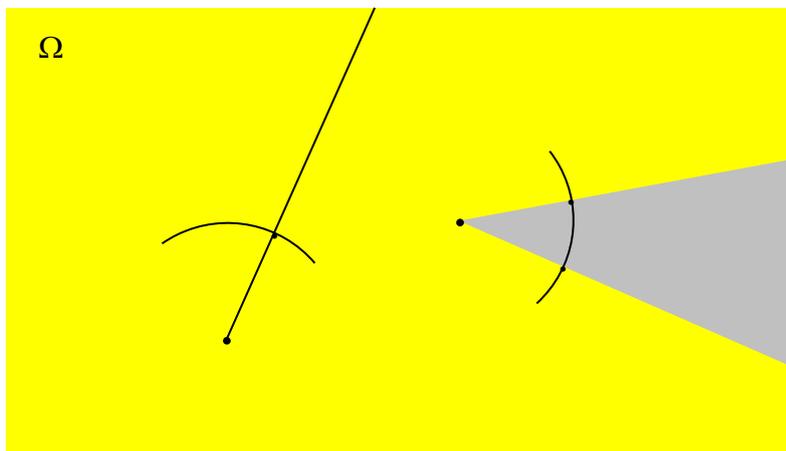
Figura 73. Ilustração do passo (i)



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

ii - Com um compasso, ponta seca no vértice do ângulo e abertura conveniente, traçamos um arco que possa interceptar os dois lados do ângulo dado. Mantenha a abertura do compasso e trace um novo arco, agora, com seu centro na origem da semi-reta traçada anteriormente interceptando-a. Observe a figura 41 abaixo.

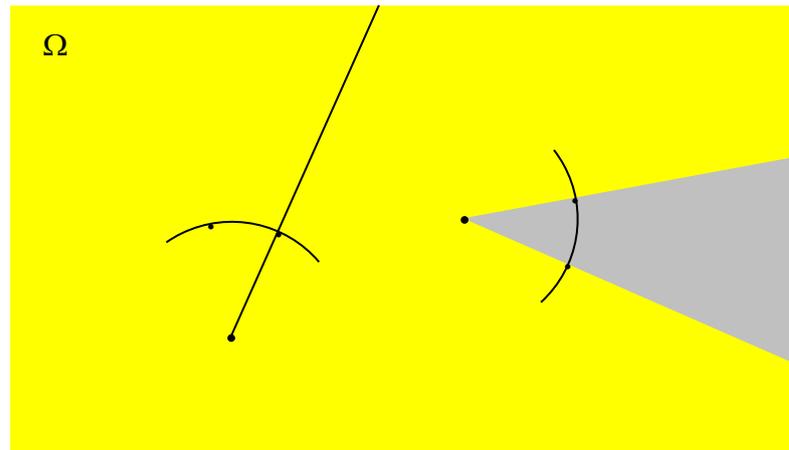
Figura 74. Ilustração do passo (ii).



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

iii - Fazendo uso ainda do compasso tome a “medida” do arco que no desenho intercepta o ângulo dado, distância entre esses pontos de interseção. Marque sobre o ultimo arco traçado um ponto cuja distância a intercessão desse arco com a semi-reta seja igual à distância entre os pontos de interseção do arco com o ângulo, figura 42.

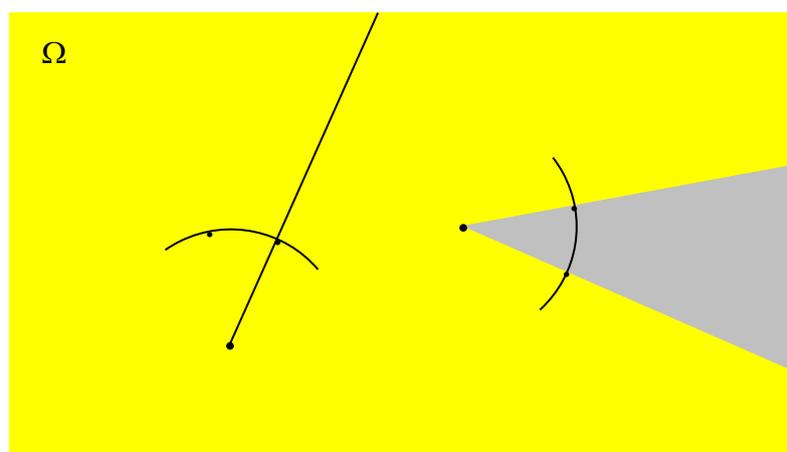
Figura 75. Ilustração do passo (iii).



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

iv – Construa, agora, uma semirreta com a origem coincidindo com a da semirreta anteriormente traçada e que passe pelo outro ponto que se determinou no arco como mostra a figura 43 abaixo.

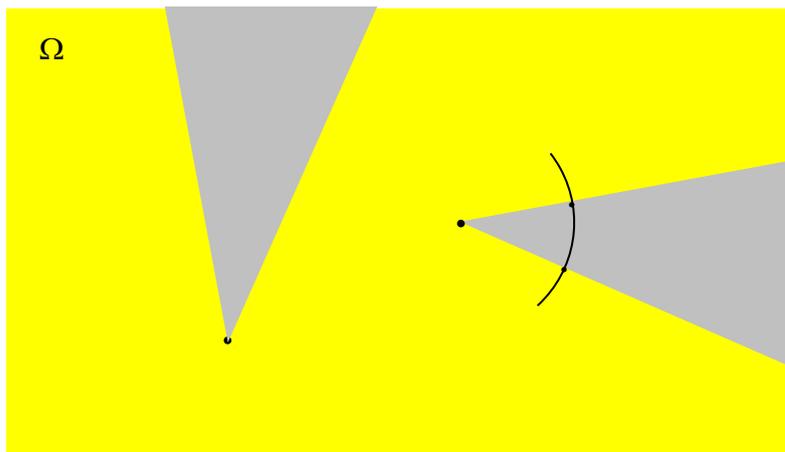
Figura 76. Ilustração do passo iv.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

v - Aplicando a definição de ângulo sobre os conjuntos delimitados por essas duas semirretas, obtêm-se, finalmente, o ângulo que é chamado de “cópia” do ângulo dado. Veja a figura 44 que segue.

Figura 77. Conclusão do transporte do ângulo



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Após concluir o transporte do ângulo, ou seja, executar a sequência de ações que a esse objetivo peça ao aluno que faça a comprovar empiricamente da eficácia do processo. Sugerindo-o recortar um dos ângulos e colocá-lo sobre o outro, perguntando-lhe: O que você está vendo agora? Onde está o outro ângulo? Pode vê-lo? Incentivando-o, sempre, no sentido de levá-lo a perceber completamente a eficácia das ações e que pode, de fato, torna os ângulos envolvidos como “cópia fiel” um do outro. Isso é muito importante para que venha a dominar totalmente a técnica e fundado na experiência, convencer-se da eficácia da mesma.

C3- Ângulos adjacentes

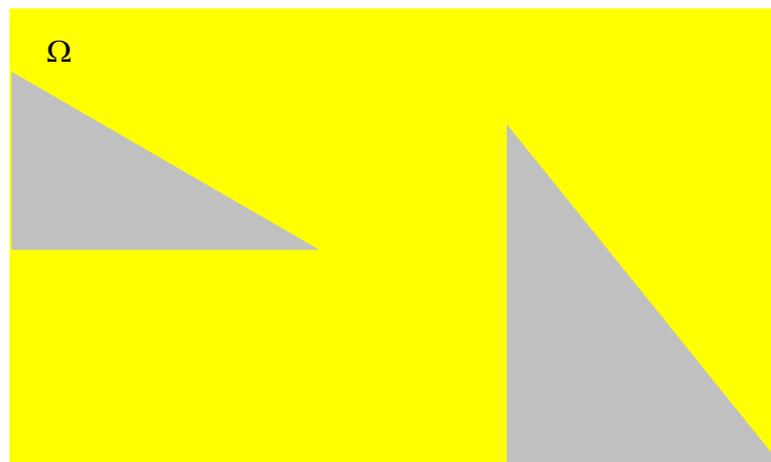
Explorando as possibilidades do transporte de ângulo, percebe-se, além do que foi dito, que se pode, sempre, colocar dois ângulos um ao lado do outro, mas não pertencentes ao mesmo semiplano, posição da qual se diz que os ângulos são adjacentes. Vamos descrever então como isso é feito. Dados dois ângulos, escolha qualquer um deles e mantenha-o ‘em seu lugar’, fixo. Agora transporte o outro ângulo de modo que:

1. Seu vértice coincida como o vértice do ângulo que está sendo mantido fixo.

2. Um de seus lados coincida, necessariamente, com um dos lados do ângulo fixado.
3. Identifique os semiplanos determinados pela reta que conterà os lados comuns, coincidentes.
4. Construa o outro lado do ângulo que será transportado, de forma que este lado não esteja contido no mesmo semiplano em que se encontra o ângulo mantido fixo.
5. O ângulo transportado assume, com relação o ao ângulo mantido fixo, uma posição da qual nos referimos a ela dizendo que os ângulos são adjacentes.

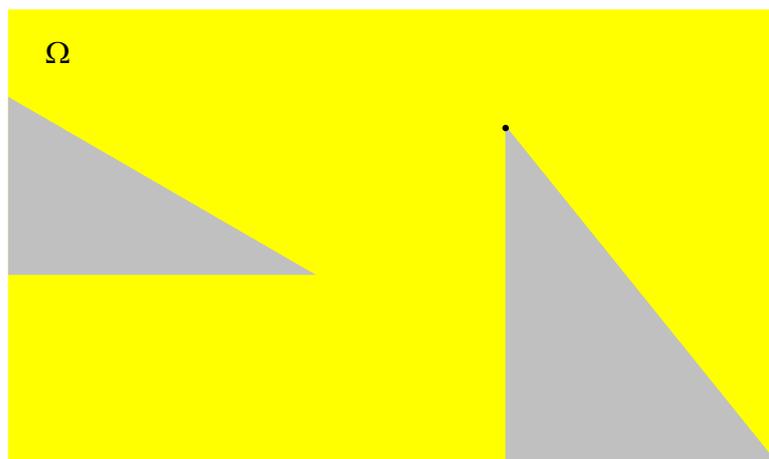
A sequência de figuras: 45, 46, 47, 48, 49 e 50 que seguem abaixo ilustram o que se diz nos itens acima.

Figura 78. Transportar para a posição adjacente os ângulos dados



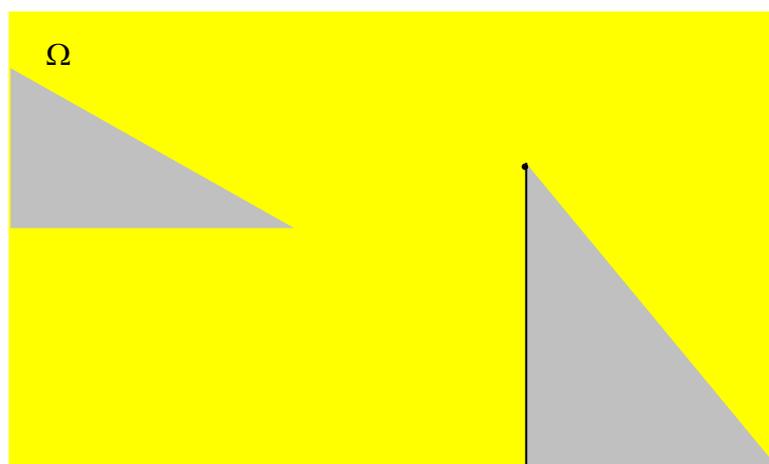
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 79. Fixando um dos ângulos pelo destaque de seu vértice.



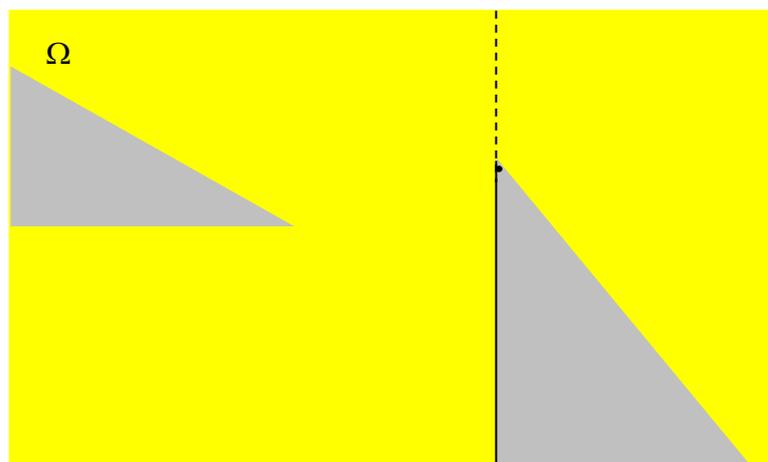
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 80. Escolha do lado comum



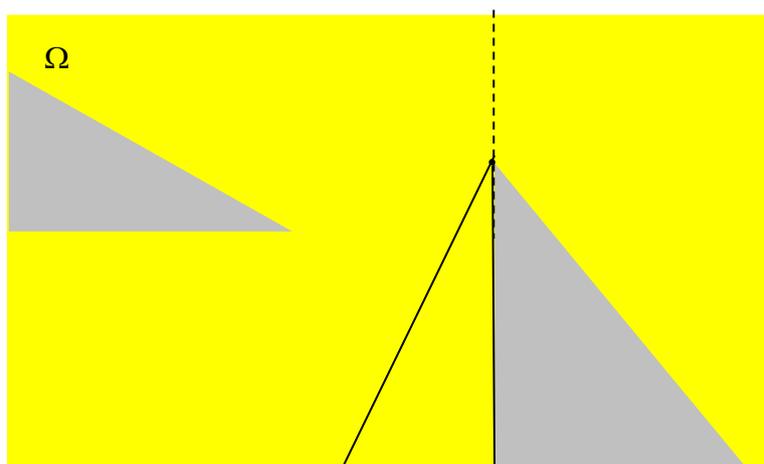
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 81. Determinando os semiplanos



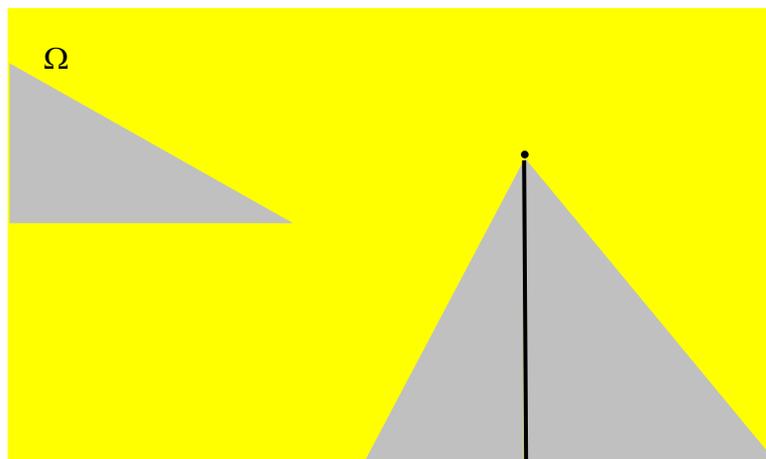
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 82. Determinando o lado



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 83. Ângulo transportado para a posição adjacente.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

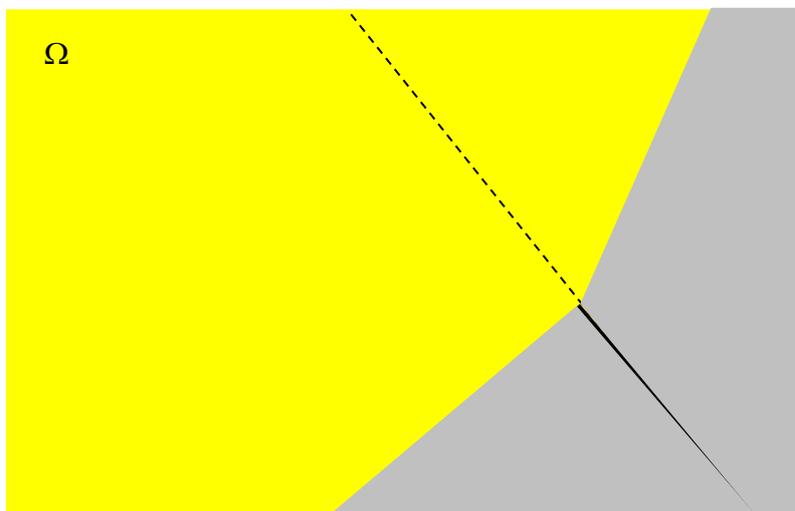
É importante chamar a atenção do aluno para o fato de que o subconjunto do plano constituído pelos ângulos colocados na posição adjacentes, *não necessariamente se constitui em um novo ângulo*, como mostra a sequência de figuras: 51, 52 e 53 que segue abaixo:

Figura 84. Ângulos dados



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 85. Depois do transporte

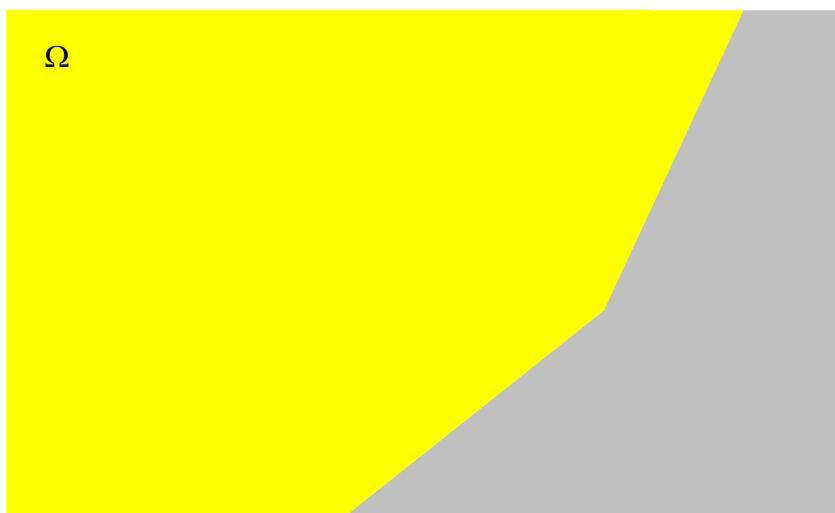


Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Observe, no entanto, que quando dois ângulos estão dispostos na posição adjacente, haverá duas semirretas com origem comum, formadas pelas semirretas não tornadas coincidentes pelo processo e que são **sempre lados de um novo ângulo**, como se percebe ao considerar-se o conjunto em destaque na cor amarela na figura 53 abaixo.

Então, é legítimo afirmar que a partir de dois ângulos dados podemos associar a eles um terceiro ângulo. Com efeito, após dispormos dois ângulos na posição adjacente aplicamos a definição de ângulo aos conjuntos delimitados pelas semirretas que correspondem aos lados não comuns, os lados que não identificamos um com o outro, e enxergaremos o novo ângulo. Infelizmente, do ponto de vista das possibilidades de reprodução de um ângulo, não há unicidade nesse processo e, assim, dados dois ângulos, eles podem dar origem a vários ângulos, enquanto objetos geométricos autônomos, enquanto figuras. No entanto, há um conceito derivado do processo de transporte de ângulo, que preenche as condições teóricas para que se possam *identificar* dois ou mais ângulos, não importando o lugar, sua posição real no plano. Trataremos desse aspecto na seção que segue.

Figura 86. Ângulos transportados



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

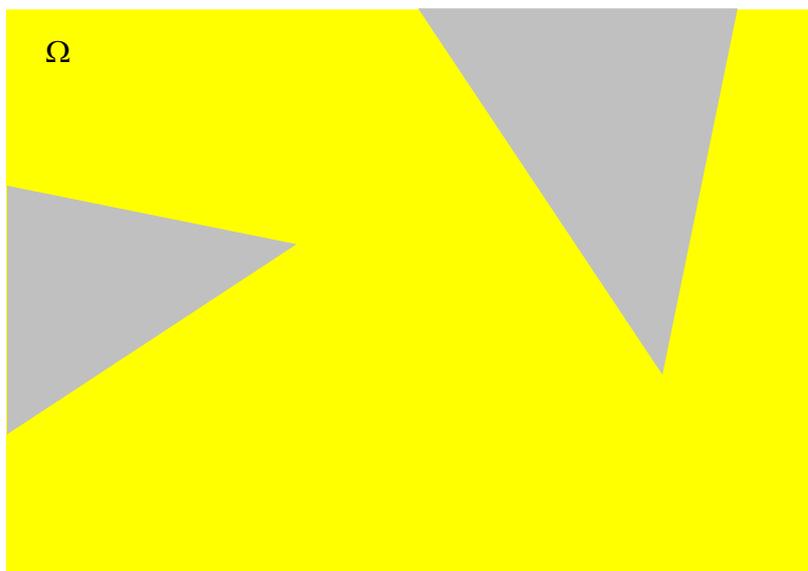
C4- Congruência de ângulos

Uma consequência importante da técnica chamada de transporte de ângulo é a concepção de ângulos congruentes, que resumimos aqui na seguinte definição:

- *Diremos que dois ângulos são congruentes quando transportados de modo que tenham o mesmo vértice e um dos lados comum, permanecendo ambos no mesmo semiplano, determinado pela reta que contém os lados comuns, necessariamente, o outro lado também coincidirão.*

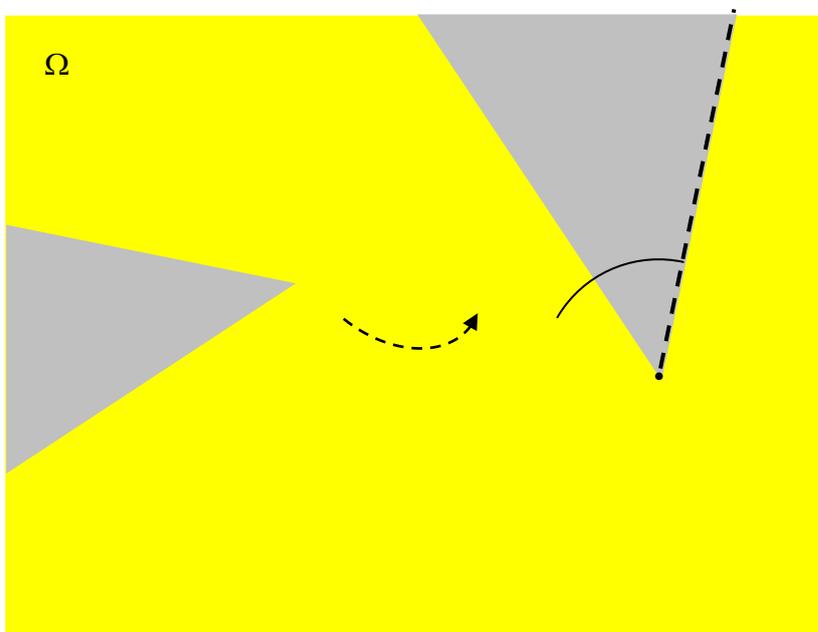
No caso em que isso não ocorra, diz-se que os ângulos não são congruentes. Seguem abaixo as figuras 54 e 55 ilustram a congruência.

Figura 87. Verificando congruência (a)



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 88. Verificando congruência (b)



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

A técnica de transporte é ainda eficaz para verificar, empiricamente, se as seguintes propriedades, com respeito à congruência de ângulos, são válidas:

- Reflexiva - Um ângulo é congruente a ele mesmo.
- Simétrica - Representando um ângulo por α e outro por β , é fácil comprovar que: se α for congruente a β então, β também será congruente a α .
- Transitiva - Se os ângulos α, β e γ são tais que: α é congruente a β e β é congruente a γ então, α e γ também são congruentes.

As três afirmações acima são verdadeiras, e como se sabe, dão conta de que a condição de congruência de ângulos define, no conjunto A , constituído por todos os ângulos no plano, Ω , é uma *relação de equivalência* aqui designada simbolicamente pela letra C .

O professor, oportunamente, deverá levar os seus alunos a constatarem empiricamente a validade das afirmações destacadas acima e, só após, nomeá-las com seus nomes técnicos tradicionais, a saber: reflexiva, simétrica e transitiva respectivamente. Dado um ângulo $\alpha \in A$, considere a classe de equivalência associada a C em A determinada por ele, ou seja: $\hat{\alpha} = \{x : x \in A \text{ e } x \text{ é congruente a } \alpha\}$. Lembramos que duas classes de equivalência satisfazem a propriedade de que: *ou coincidem ou são disjuntas*⁴⁷ e que a união de todas elas, as classes, é igual ao conjunto, no caso, de todos os ângulos planos retilíneos.

C5- O ângulo e estrutura algébrica

No conjunto constituído por todas as classes de equivalência associadas à congruência de ângulos, aqui designado por \hat{G} , é que se define, rigorosamente, uma operação⁴⁸, chamada de **adição de ângulo** e referida pelo símbolo $+$ definida como segue:

1. Tome os ângulos α e β , e ponha-os na posição adjacente.

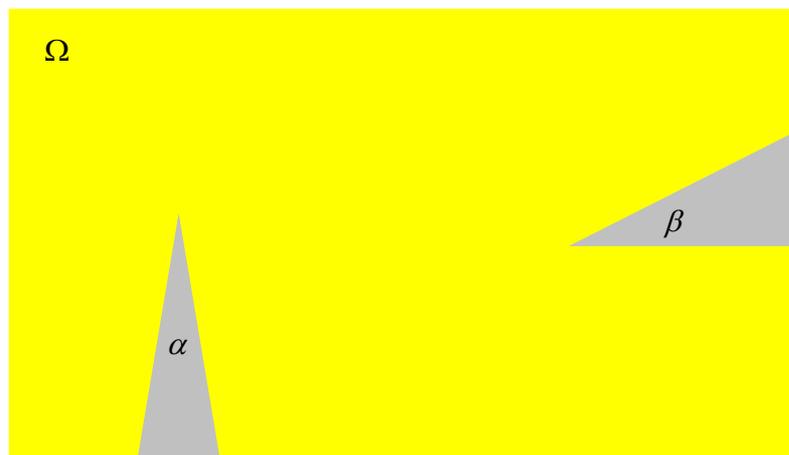
⁴⁷ Para uma demonstração ver, por exemplo, Halmos 1970.

⁴⁸ Definição de operação Dado um conjunto não vazio E , chama-se de operação em E a qualquer função $s : (E \times E) \times E \rightarrow E : (x, y) \mapsto s(x, y)z$.

2. Considere agora γ como o ângulo que deriva dessa ação ao desconsiderarmos os lados comuns, após colocá-los na posição adjacente. (Nem sempre γ será a união dos subconjuntos do plano que corresponde os ângulos depois de colocados na posição adjacente).
3. A classe de equivalência referente à γ , $\hat{\gamma}$, é o que definimos como a adição das classes $\hat{\alpha}$ com $\hat{\beta}$, simbolicamente: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\gamma}$.

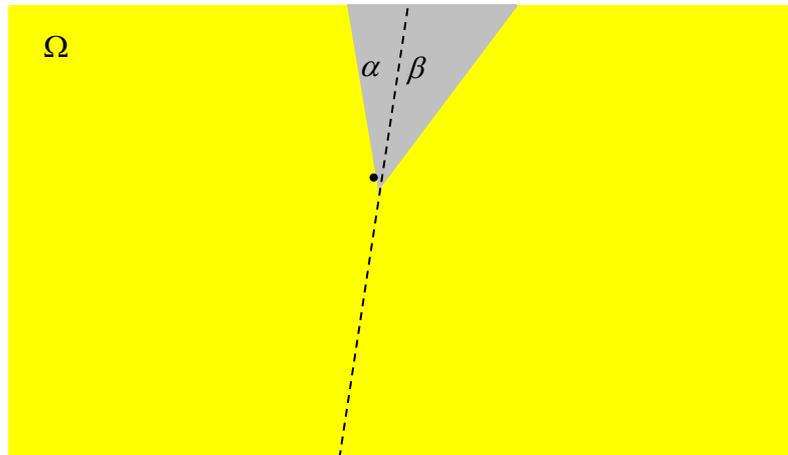
Tomando como exemplo os ângulos α e β , representados na figura 56 abaixo, acompanhe a sequência de figuras: 56 e 57 que explicam as ações para se obter o ângulo que se obtém ao colocá-los na posição adjacentes, neste exemplo, o ângulo é constituído do conjunto formado pelo união deles.

Figura 89. Operação com ângulo (a). Ângulos α e β dados.



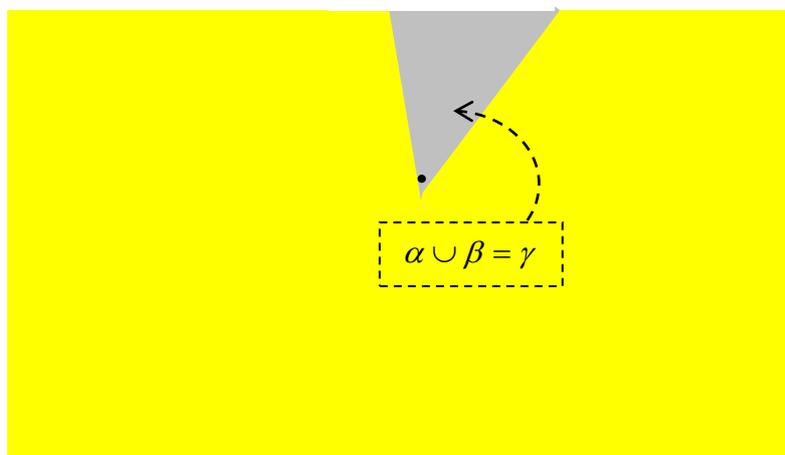
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 90. Operação com ângulo (b). Ângulos α e β transportados para a posição adjacentes.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

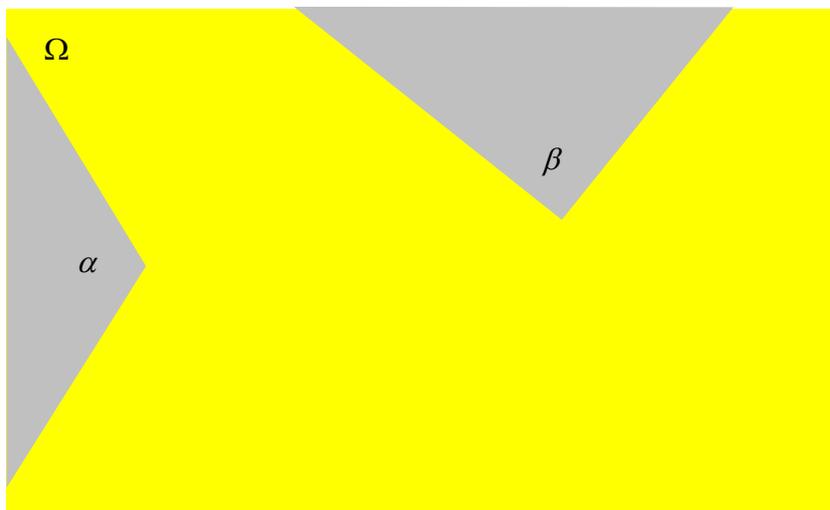
Figura 91. Operação com ângulo (c). Ângulo obtido através dos ângulos α e β em decorrência da ação de colocá-los na posição adjacente: $\alpha \cup \beta = \gamma$.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Vejamos o caso em que $\alpha \cup \beta$ não é um ângulo, veja figura 59 abaixo.

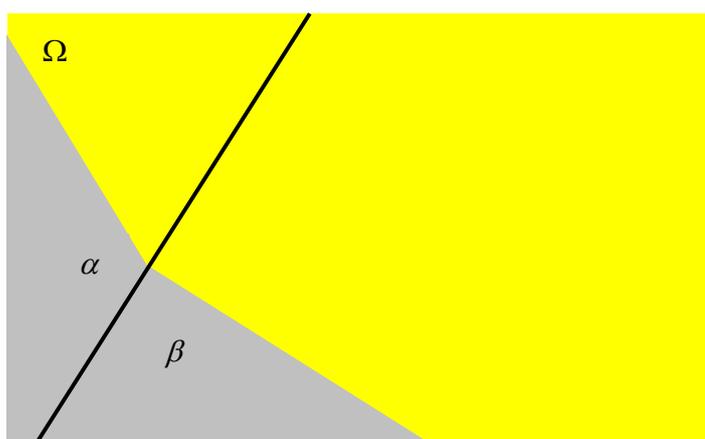
Figura 92. Operação com ângulo (d). Ângulos α e β dados.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

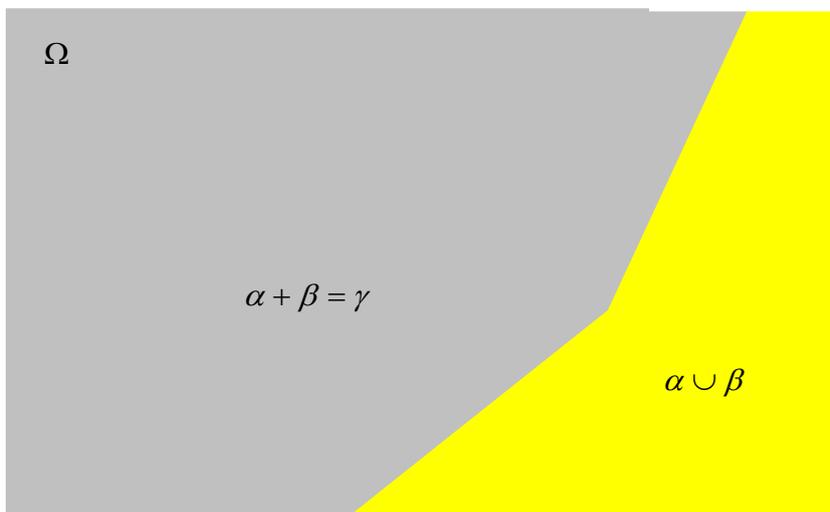
Ângulos transportados para a posição adjacente, figura 60.

Figura 93. Operação com ângulo (e). Ângulos colocados na posição adjacentes, em cinza.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

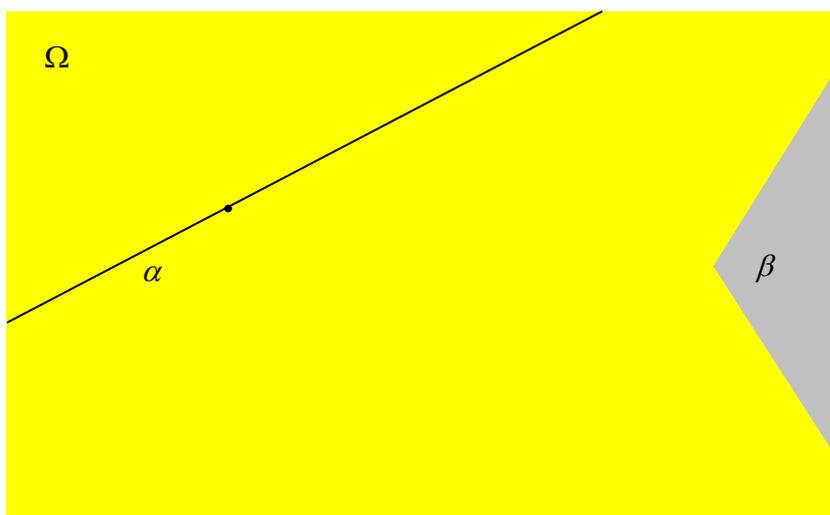
Figura 94. Operação com ângulo (f). Ilustração a soma do ângulo α com o ângulo β , e em cinza e da $\alpha \cup \beta$ em amarelo.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

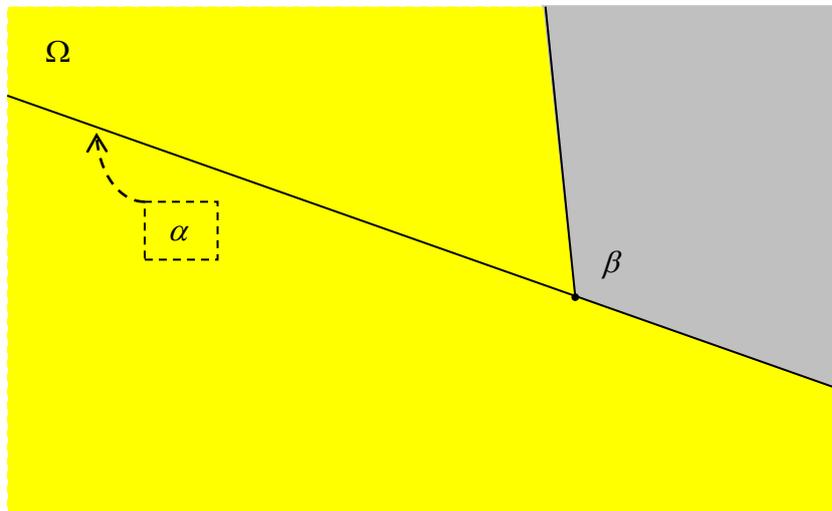
Dados um ângulo raso, α , e um ângulo β nem raso nem nulo, figura 62 abaixo.

Figura 95. Operação com ângulo (a'). Ângulos α e β dados.



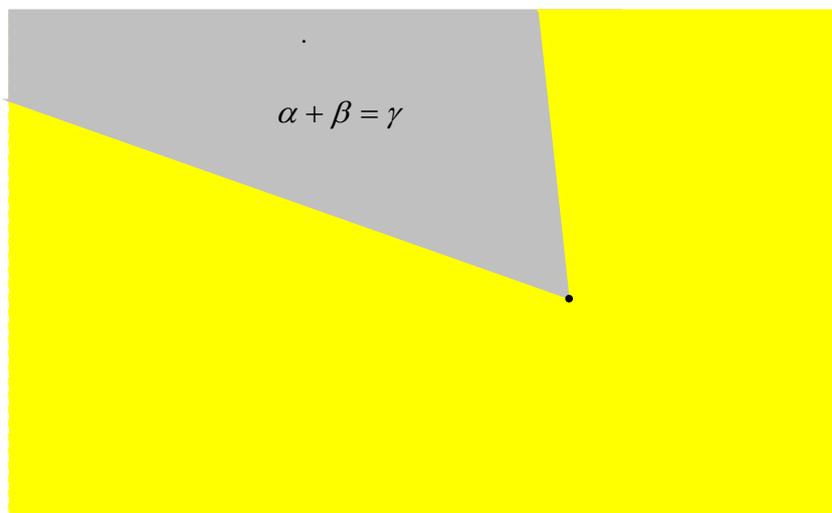
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 96. Operação com ângulo (b'). Ângulos α e β postos em posição adjacente.



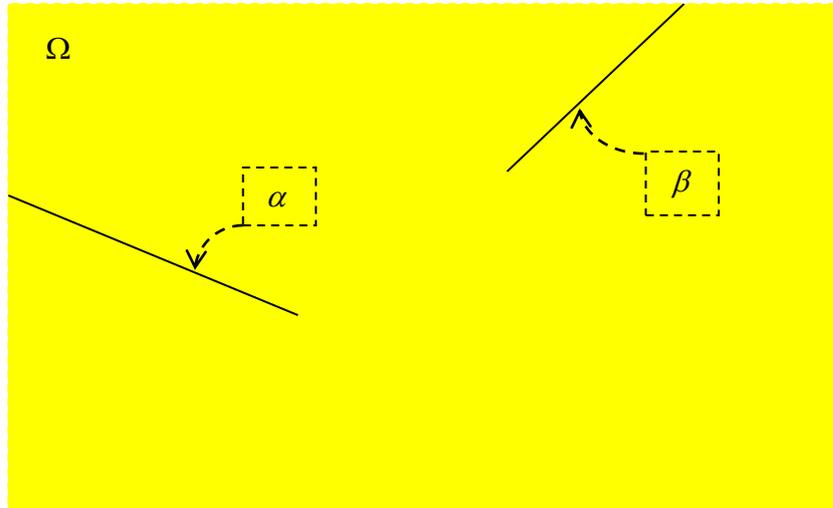
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 97. Operação com ângulo (c'). Ângulo $\alpha + \beta = \gamma$ a partir da ação de colocar os ângulos α e β na posição adjacente.



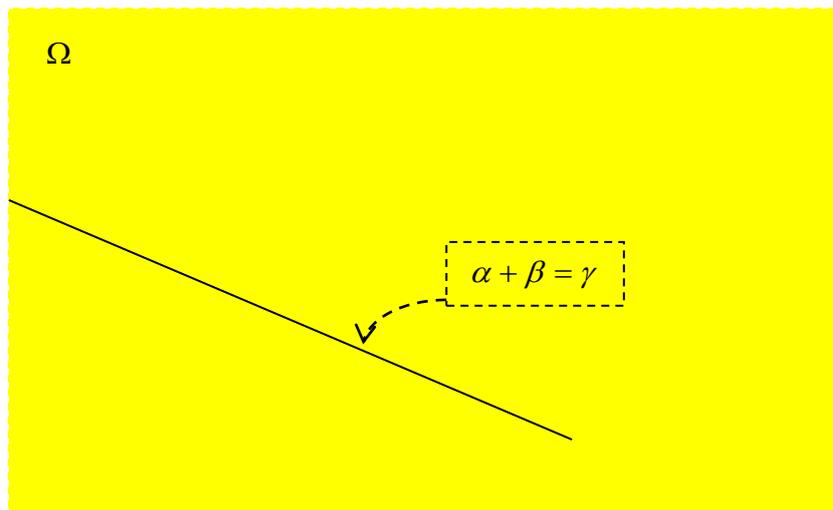
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 98. Operação com ângulo (a''). Os ângulos dados α e β são ambos nulos.



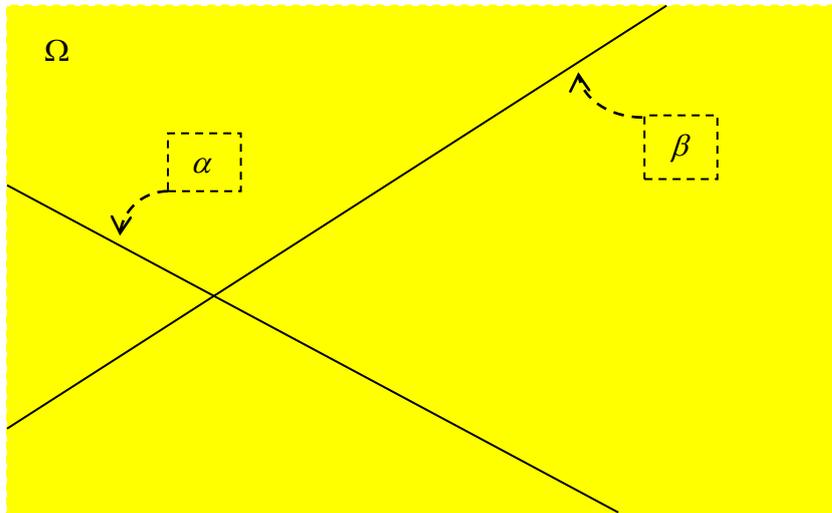
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 99. Operação com ângulo (b''). A adição dos ângulos α com β é o ângulo nulo, γ .



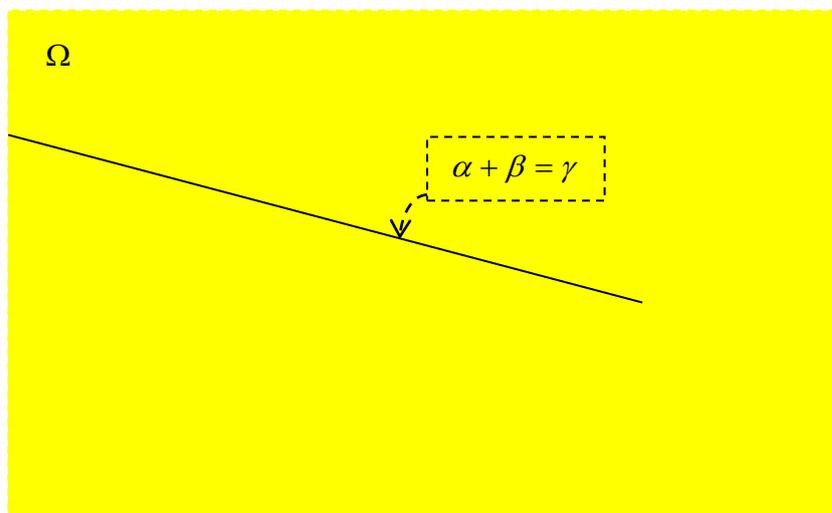
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 100. Operação com ângulo (c''). Os ângulos dados α e β são ambos rasos.



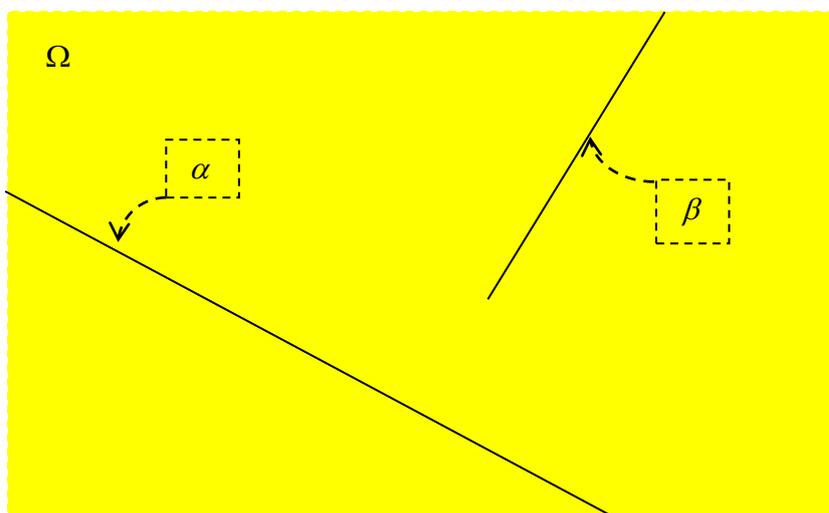
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 101. Operação com ângulo (d''). A adição dois ângulos rasos α e β é o ângulo nulo γ .



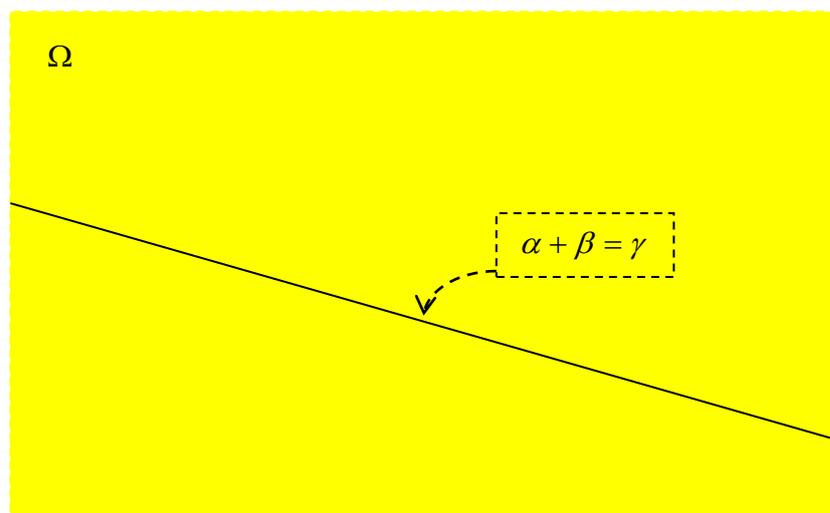
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 102. Operação com ângulo (e''). São dados um ângulo raso e um ângulo nulo.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 103. Operação com ângulo (e'''). O ângulo $\gamma = \alpha + \beta$ é um ângulo raso.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

A operação de adição de ângulos, aqui explicada, está bem definida. Com efeito, é fácil perceber que se $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\gamma}$ e $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\theta}$ então $\hat{\gamma}$ é congruente a $\hat{\theta}$. A operação de adição de ângulo, assim definida, satisfaz as seguintes propriedades:

- I – Comutativa - $\forall \hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \hat{A}$ vale $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}$.
- II – Existe ELEMENTO NEUTRO - Representado pela classe \hat{o} , cujo representante gráfico é a semirreta, ângulo nulo.

As propriedades (I) e (II) acima são de fácil comprovação por via da técnica de transporte de ângulo. Essa mesma técnica também evidencia que em \hat{G} , a lei associativa não se verifica, como veremos:

- $\forall \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\omega} \in \hat{A}$ vale $\hat{\alpha} + (\hat{\beta} + \hat{\omega}) \neq (\hat{\alpha} + \hat{\beta}) + \hat{\omega}$,

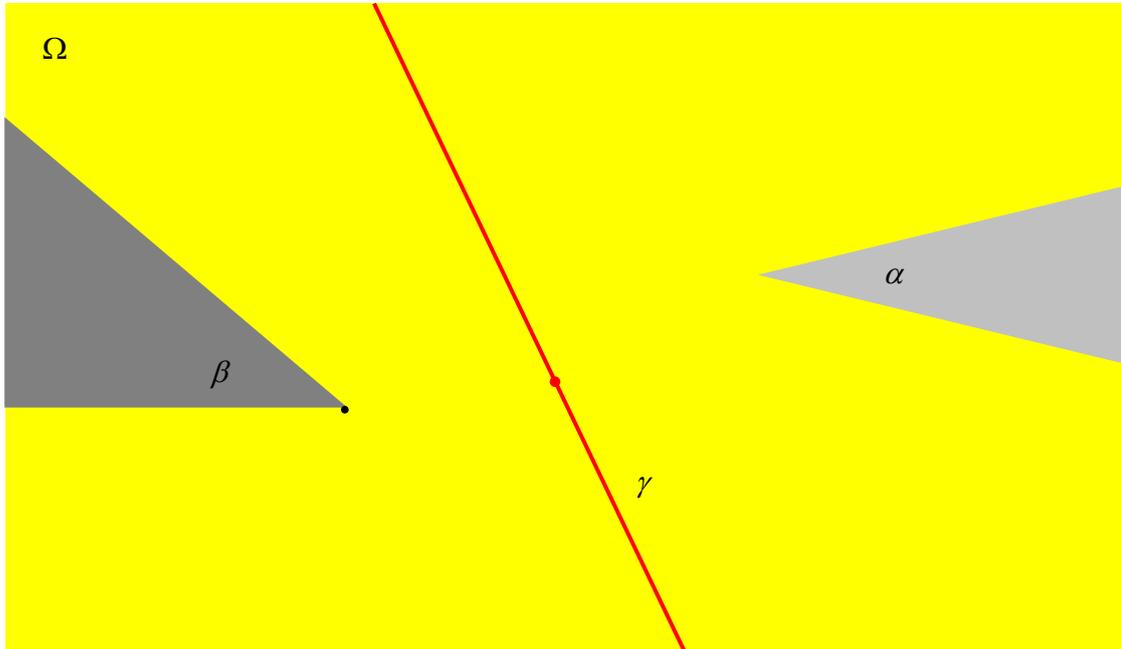
Desse modo, \hat{G} não pode, ao menos ser chamada de *monóide*⁴⁹, uma vez que a propriedade não é válida.

Com efeito:

A sequência de figuras abaixo nos conduz a afirmar que a adição de ângulo, +, aqui definida, não é associativa.

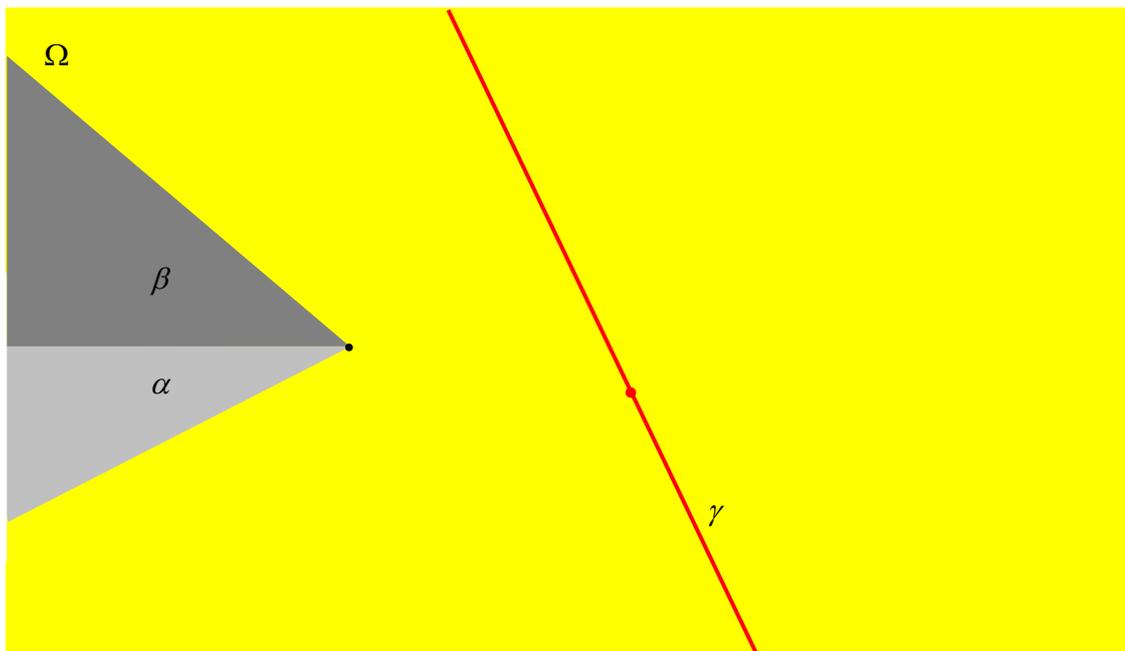
⁴⁹ Definição em Monteiro, 1969 p. 54.

Figura 104. É associativa? (I). Ângulos α, β e γ dados como exemplo para verificarmos que a operação, $+$, não é associativa.



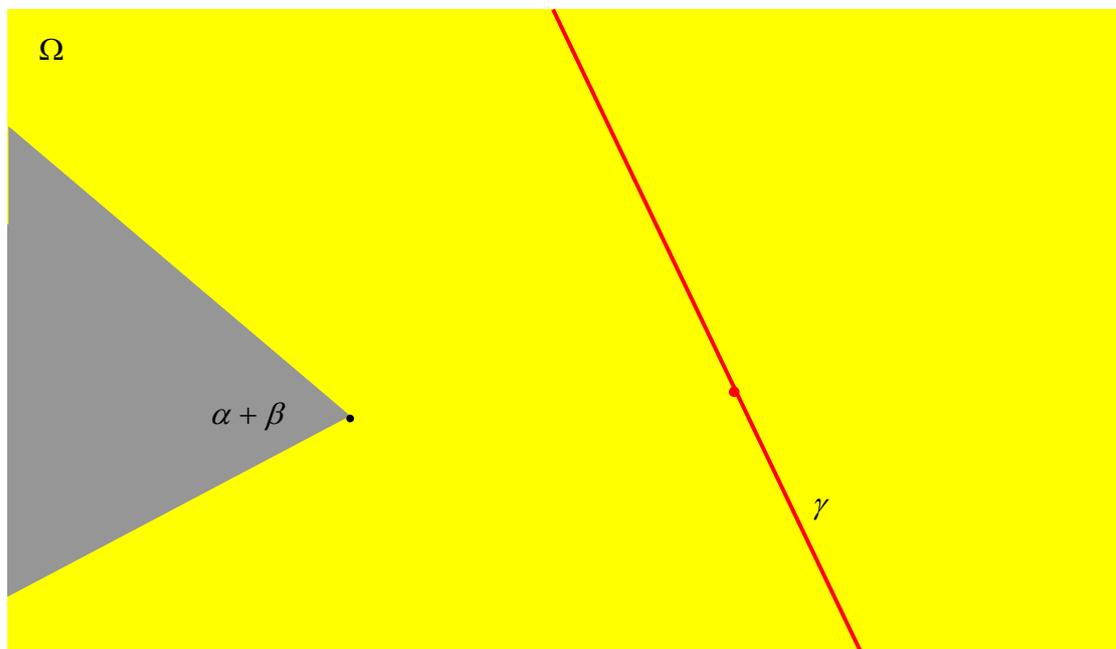
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 105. É associativa? (II). Operando α com β via $+$.



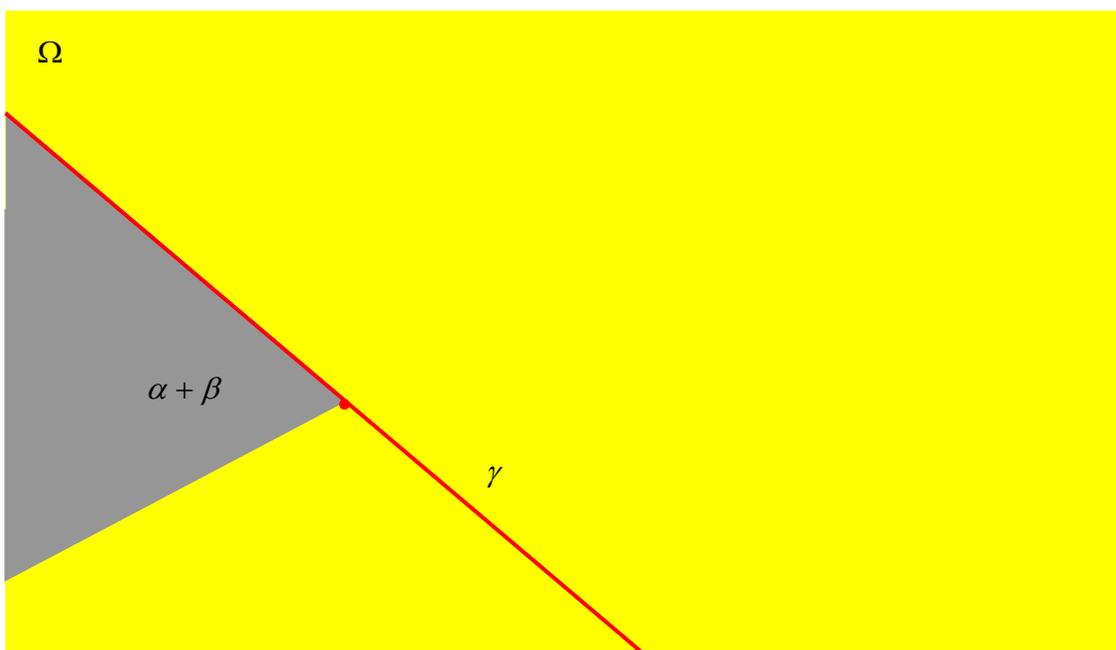
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 106. É associativa? (III). O ângulo $\alpha + \beta$ para ser operado com o ângulo γ .



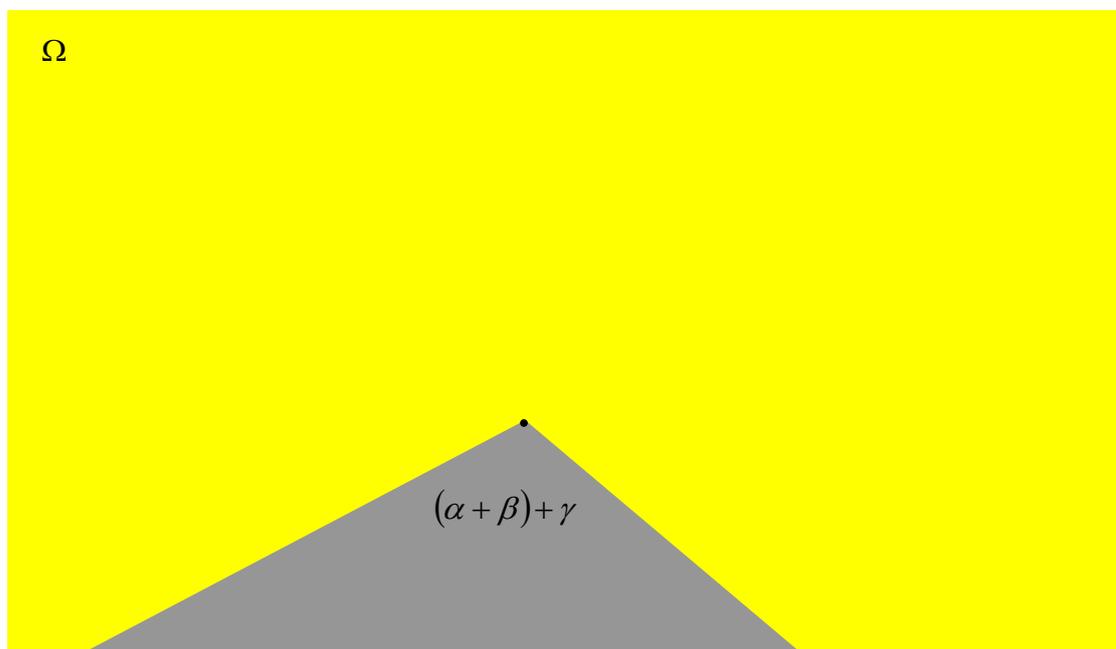
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 107. É associativa? (IV). Os ângulos $(\alpha + \beta)$ e γ colocados na posição adjacente.



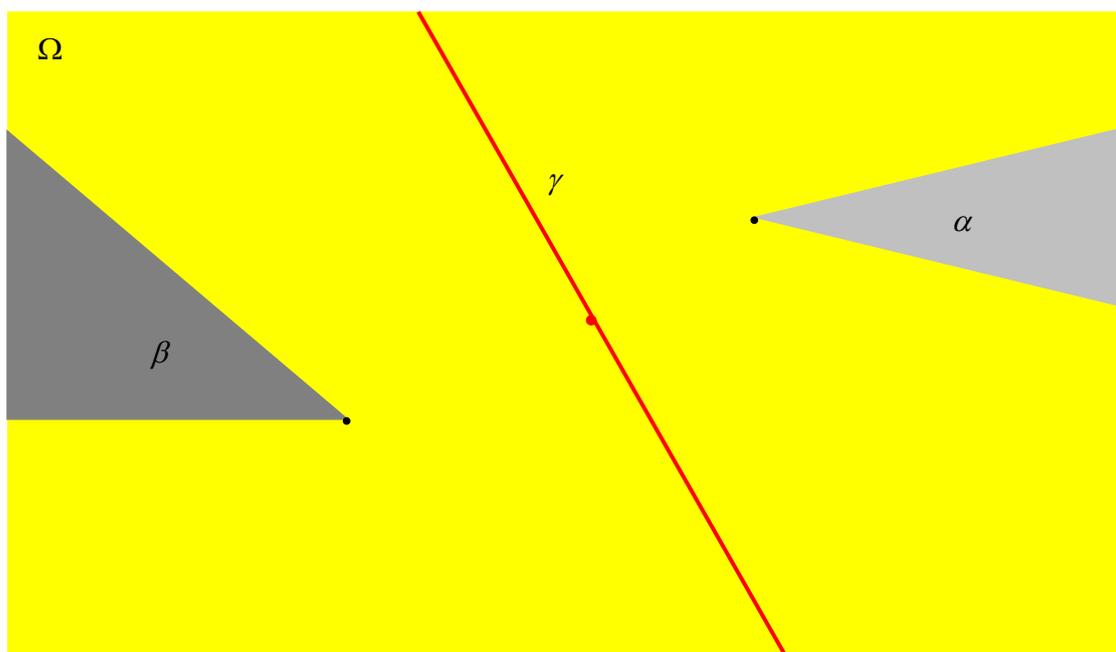
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 108. É associativa? (V). O ângulo $(\alpha + \beta) + \gamma$.



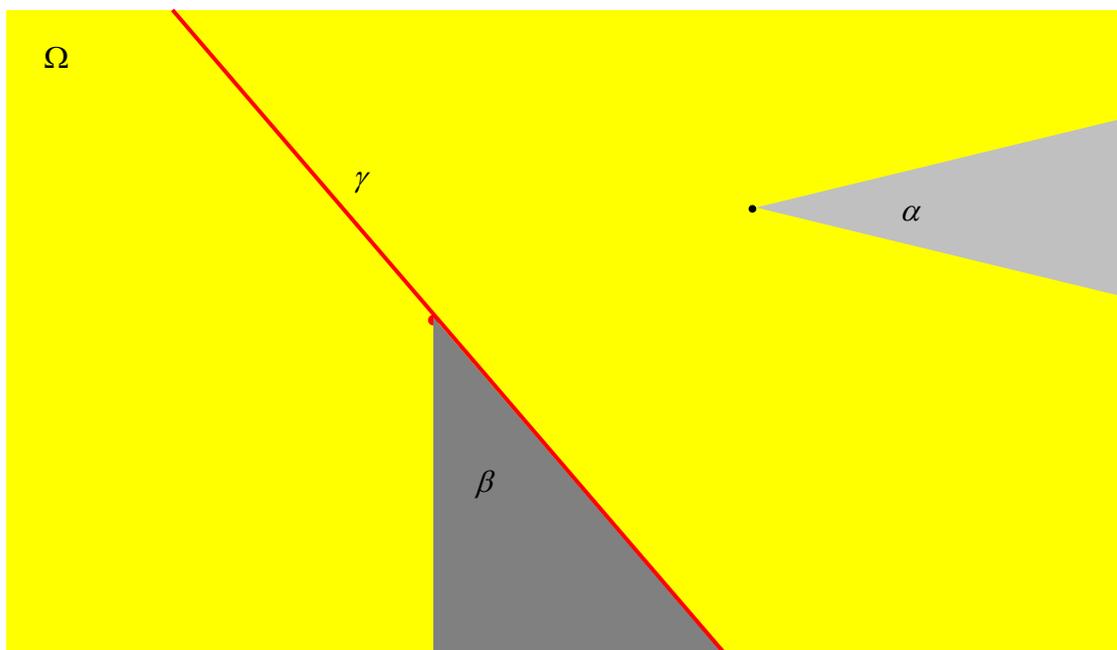
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 109. É associativa? (VI). Ângulos α, β e γ para serem operados na ordem $\alpha + (\beta + \gamma)$.



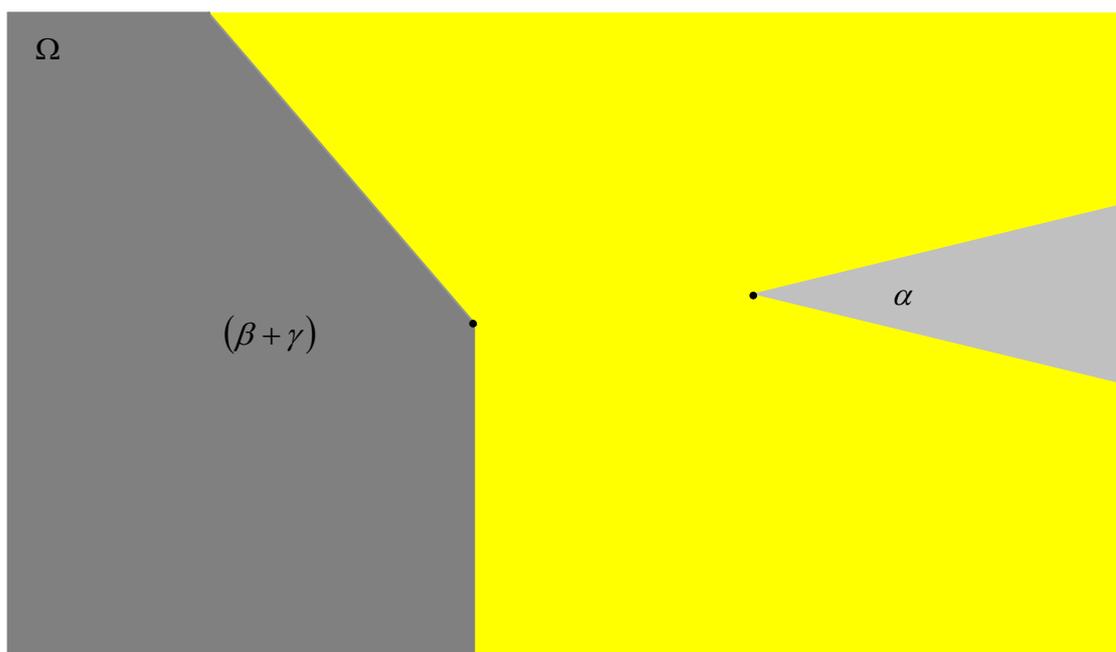
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 110. É associativa? (VII). Colocado os ângulos β e γ na posição adjacente.



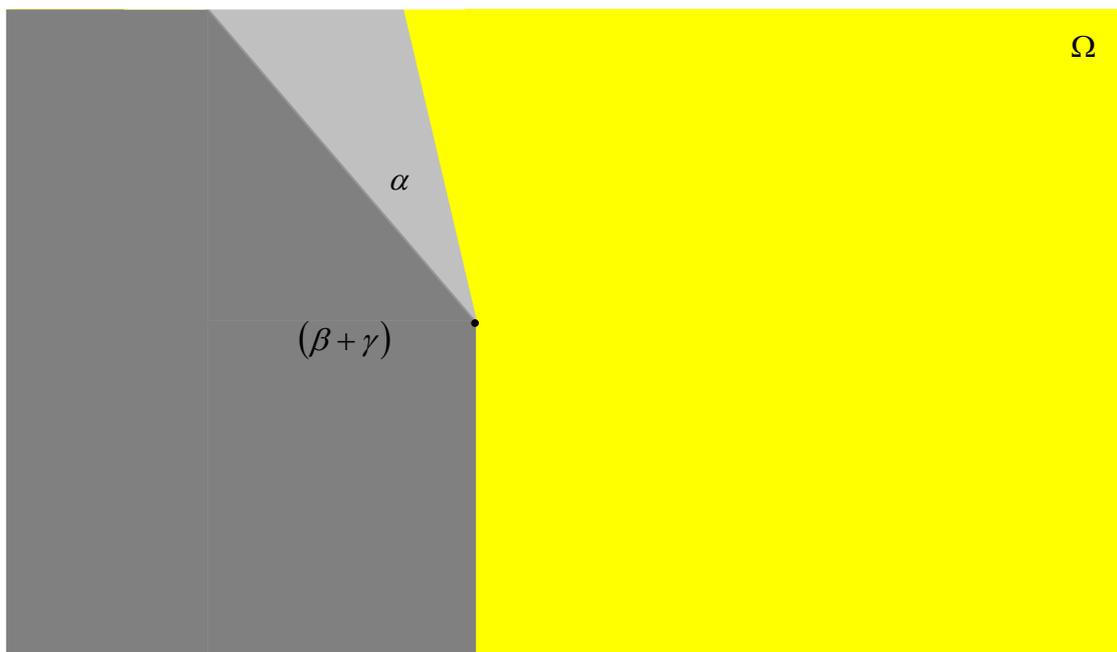
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 111. É associativa? (VIII). Os ângulos $(\beta + \gamma)$ e α para serem colocados na posição adjacente.



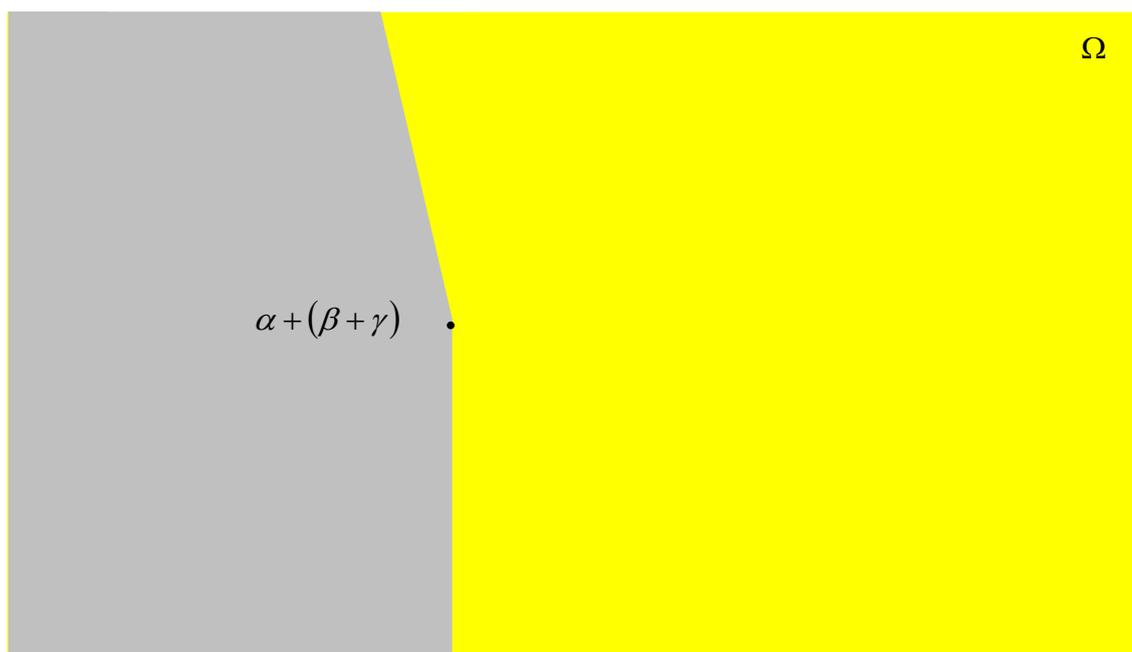
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 112 – É associativa? (IX). Os ângulos α e $(\beta + \gamma)$ colocados na posição adjacente.



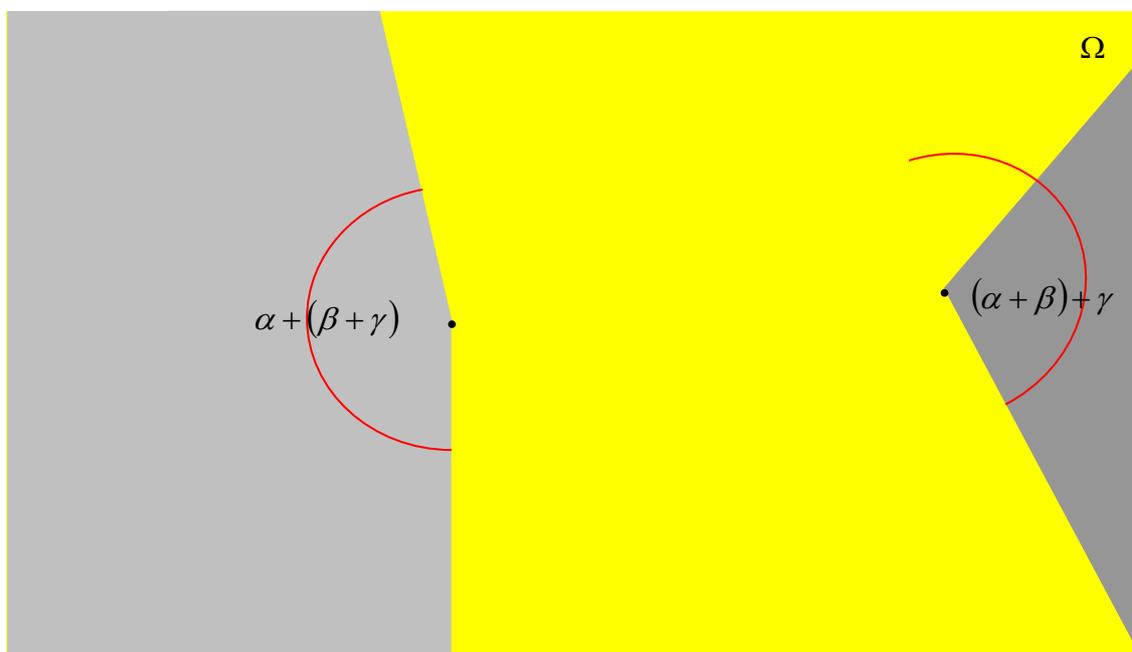
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 113. É associativa? (X). O ângulo $\alpha + (\beta + \gamma)$.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 114. É associativa? (XI). Evidência de que a operação + em \hat{G} não é associativa.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Como se vê, para os ângulos dados na figura 80, vale: $\alpha + (\beta + \gamma) \neq (\alpha + \beta) + \gamma$ comprovando que + **não é associativa**.

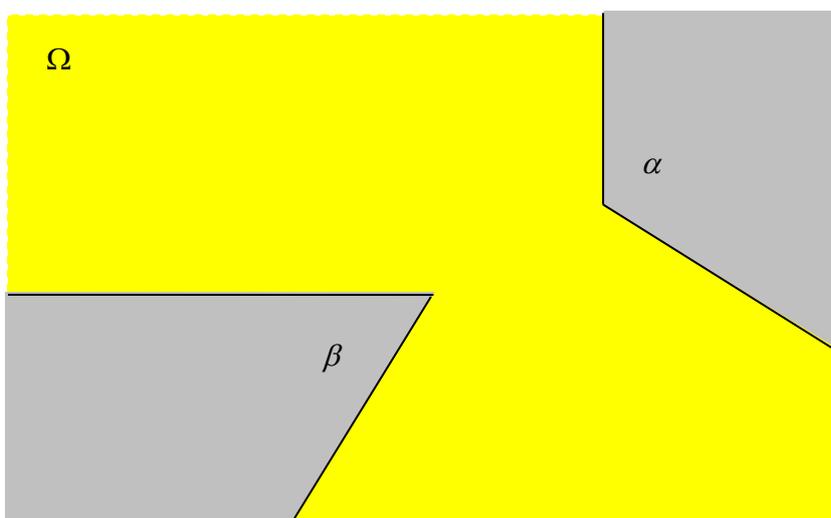
Aspectos da álgebra abstrata, da teoria dos conjuntos, do desenho geométrico e de lógica são de fundamentais na formação do futuro professor de matemática, enquanto pode habilitá-lo a perceber e interpretar melhor o quanto diversas disciplinas matemáticas dialogam, se articulam, que poderá proporcionar uma compreensão além da superfície dos objetos e, sem dúvida, o que pode lhe colocar, enquanto professor de matemática na classe dos que incorporam saberes e competências à sua prática, como os preconizados, por exemplo, por Tardife (2011).

C6- O ângulo reto

Vimos que colocar dois ângulos na posição adjacente já rendeu a possibilidade de se construir uma operação: a adição de ângulo. No que segue, vamos usar o transporte para caracterizar o que se entende por *ângulos suplementares*. Então: *diz-se que dois ângulos são suplementares quando colocados na posição adjacentes a soma deles for o um ângulo raso*.

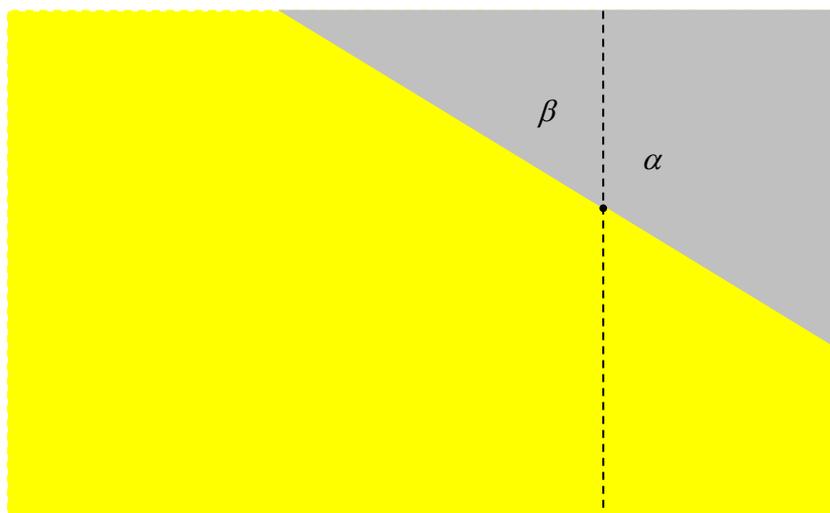
Observe: isso é importante, pois não privilegia o valor numérico dessa soma, a quantidade, e sim o fato geométrico a “forma”. As ilustrações a seguir explicam o que se quer dizer.

Figura 115. Ângulos suplementares (a). Os ângulos α e β dados para verificarmos se são suplementares.



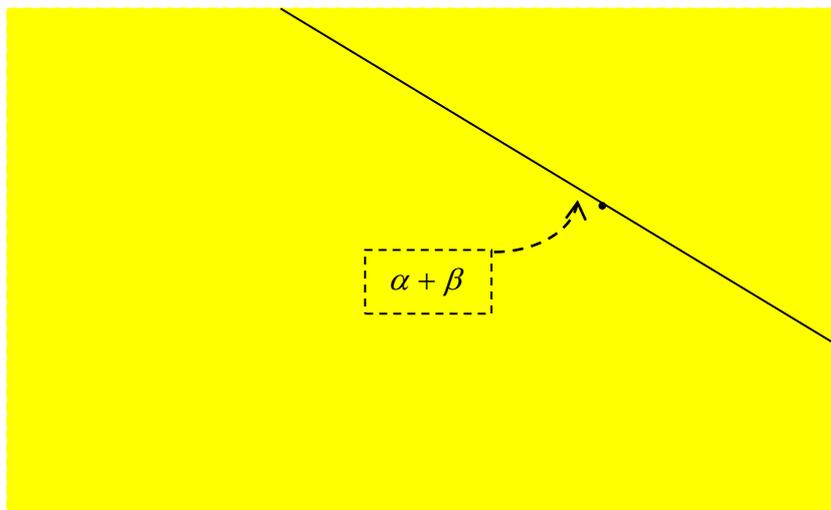
Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 116. Ângulos suplementares (b). Ângulos α e β colocados na posição adjacentes.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Figura 117. Ângulos suplementares (c). O ângulo raso, soma de $\alpha + \beta$.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Portanto, conclui-se que os ângulos α e β são suplementares. A ênfase aqui não está no aspecto numérico da soma, mas, sobretudo, no aspecto geométrico, da figura mesmo.

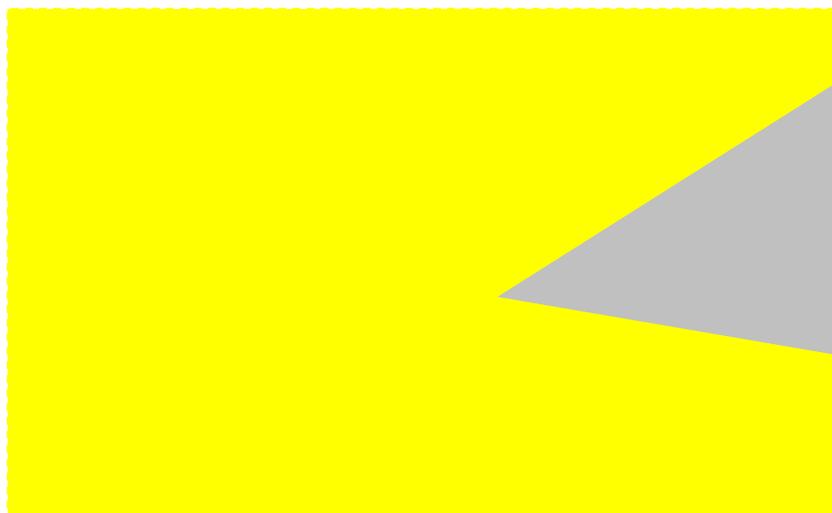
A condição para que dois ângulos sejam suplementares juntamente com a condição de congruência permite uma definição mais adequada aos propósitos da formação do pensamento geométrico, sem o apelo quantitativo-numérico, de um ângulo muito especial, o **ângulo reto**. A definição é simples: “diremos que *um ângulo é reto se ele for congruente ao seu suplementar*”.

A definição acima permite decidir se um ângulo é ou não um ângulo reto, bastando para isso que, na prática, se prolongue qualquer um dos seus lados, considere-se o seu complementar e se verifique, *via transporte de ângulos*, se eles são congruentes.

No tocante ao ensino e aprendizagem, há a oportunidade de verificarmos se um determinado ângulo é reto fazendo uso da definição da técnica do transporte o que, muito provavelmente, consolidarão ambos pela prática.

Como obter um ângulo reto a partir da definição acima? Essa questão é respondida com o auxílio do conceito de *bissetriz de um ângulo*. Então, dado um ângulo nem nulo nem raso, define-se sua bissetriz como sendo a semirreta com origem no vértice do ângulo e determinada por um ponto do seu interior e que determine com cada um dos lados do ângulo dado, ângulos congruentes entre si. Vejamos o processo. Tome como exemplo o ângulo dado na figura abaixo.

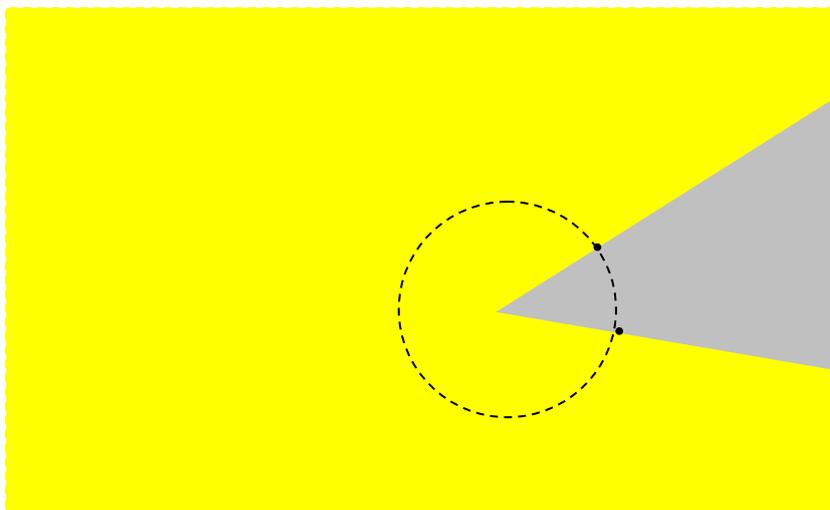
Figura 118. Bissetriz (1). Ângulo dado para que se obtenha sua bissetriz.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Com um compasso aberto convenientemente e ponta seca no vértice do ângulo, construa um arco que venha a interceptar os dois lados do ângulo. Marque estas interseções. Figura 86 abaixo.

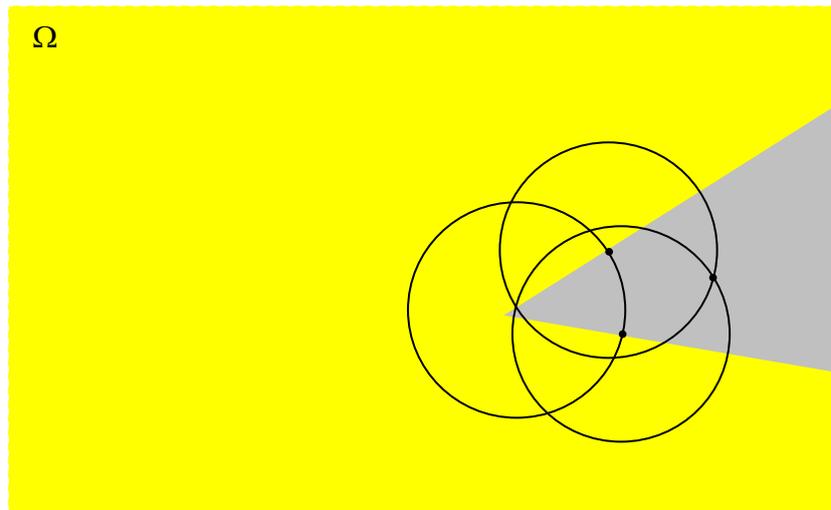
Figura 119. Bissetriz (2). Determinação das interseções com os lados do ângulo.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Agora, com a ponta seca nas interseções obtidas construa círculos e determine sua interseção contida no interior do ângulo, como indica a figura que segue.

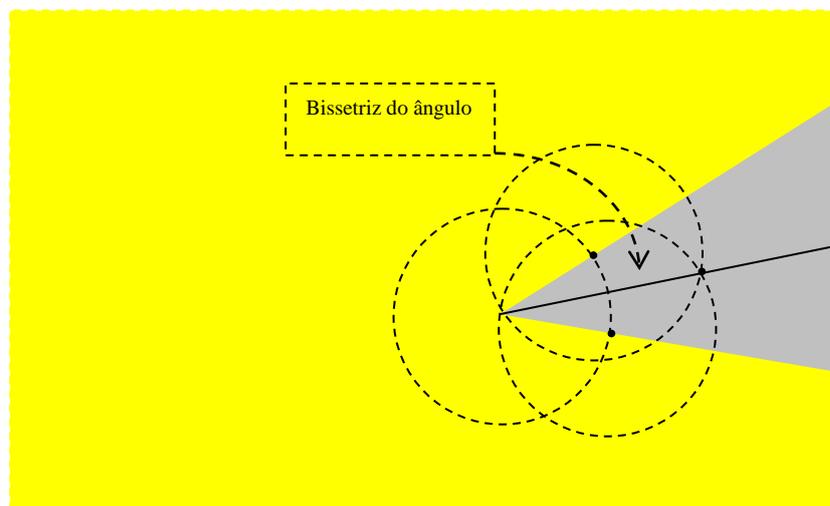
Figura 120. Bissetriz (3). Evolução do processo para determinação da bissetriz: considere o ponto no interior do ângulo.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

A bissetriz é então a semirreta com origem no vértice do ângulo e que contém o último ponto de interseção obtido. Veja a figura abaixo.

Figura 121. Bissetriz (4). A bissetriz do ângulo dado, em preto.

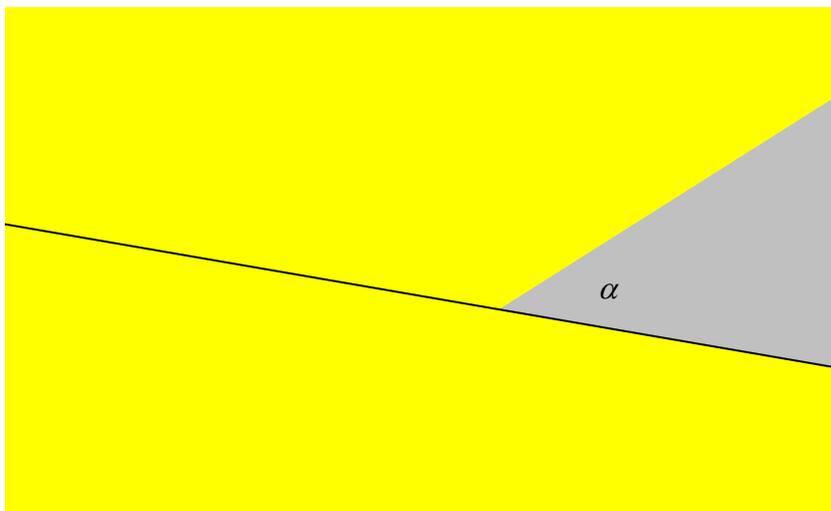


Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Então, como se determina um ângulo reto a partir de um ângulo α nem nulo nem raso dado? Pois bem, é até fácil e, mais uma vez, traz até o aluno conceitos já vivenciados por eles ampliando as possibilidades de apreendê-los.

Dado um ângulo α , prolongue um de seus lados. Figura 89, abaixo.

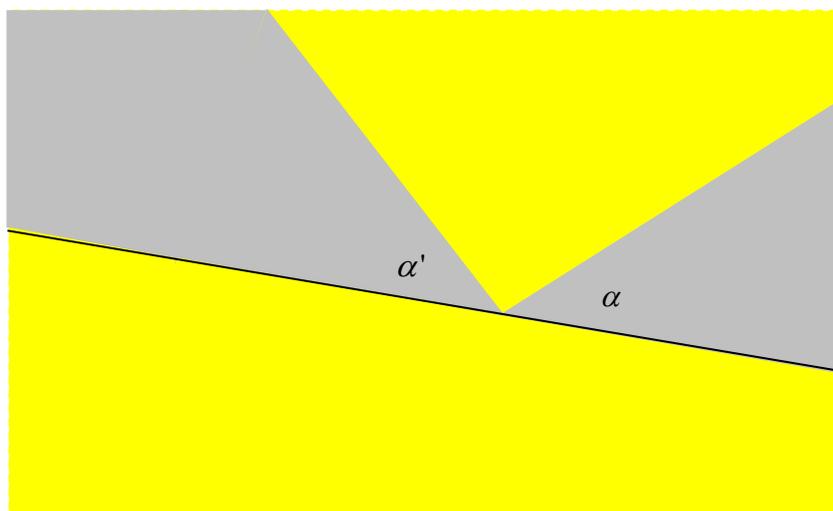
Figura 122. Ângulo reto (1). O ângulo α e o prolongamento de um de seus lados.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Transporte o ângulo α para a posição que se mostra na figura 90 que segue;

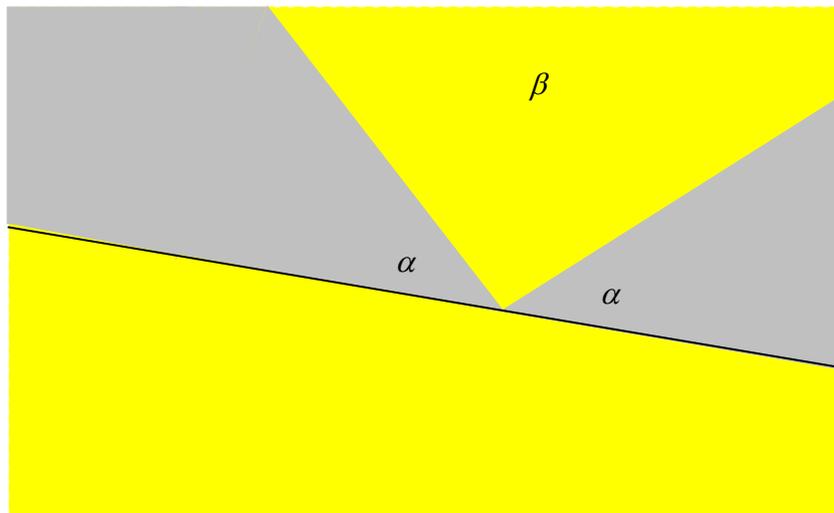
Figura 123. Ângulo reto (2). O ângulo α transportado para nova posição α' .



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Perceba o ângulo β ; Figura 91.

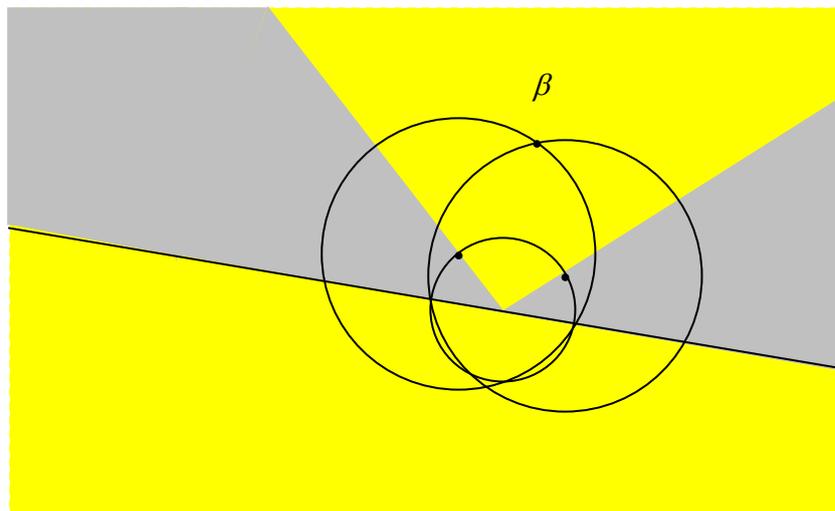
Figura 124. Ângulo reto (3). Perceba o ângulo β .



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

Determinando a bissetriz do ângulo β ; Figura 92

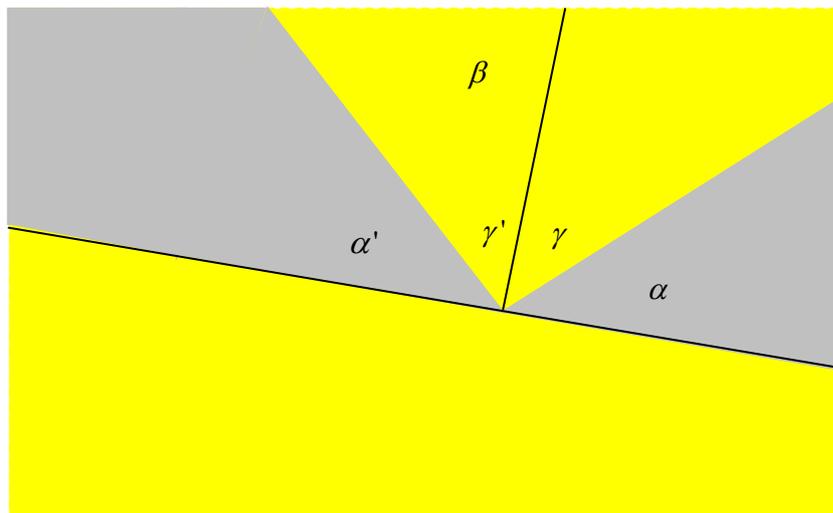
Figura 124. Ângulo reto (4). Determinando a bissetriz do ângulo β .



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

A bissetriz do ângulo β ; Fig. 93.

Figura 125. Ângulo reto (5). O ângulo β sua bissetriz e os ângulos γ e γ' determinados por ela.

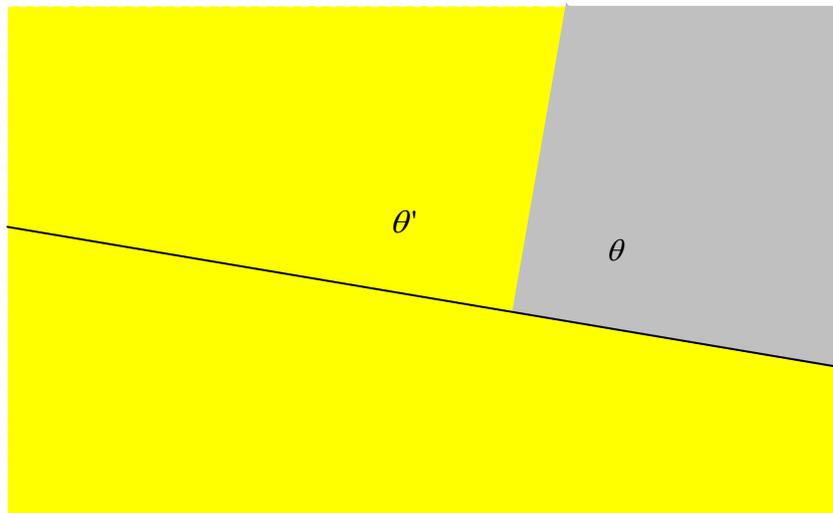


Fonte: produzido pelo autor, 2017.

A bissetriz do ângulo β da origem aos ângulos γ , congruentes entre si, com a propriedade de que $\beta = \gamma + \gamma$.

É fácil comprovar que os ângulos $\theta = \alpha + \gamma$ e $\theta' = \alpha' + \gamma'$ são suplementares e congruentes, portanto, são ambos ângulos retos, figura 94 logo à frente.

Figura 126. Ângulo reto (6). Os ângulos θ e θ' são retos.



Fonte: produzido pelo autor, 2017.

A construção do ângulo reto a partir do transferidor é, sem dúvida, rápida, eficaz e econômica. Mas, não expõe além do caráter numérico, do valor, atribuído ao ângulo reto.

8- BIBLIOGRAFIA

- ACZEL, A.D.. *El artista y matemático: La historia de Nicolas Bourbaki, el genio matemático que nunca existió*. Barcelona: Gedisa, 2009.
- ALMOULOUD, S. A.; MANRIQUE, A. L.; SILVA, M. J.F. & CAMPOS, T. M. M. A **geometria no ensino fundamental: reflexão sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos**. Revista Brasileira de Educação, nº 27, 2004
- BACHELARD, Gastón. **A formação do Espírito Científico: uma contribuição para a psicanálise do conhecimento: tradução Estela dos Santos Abreu**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro**, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1985.
- BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo** – Tradução de Luís Antero Neto & Augusto Pinheiro. 2ª reim. Ed 1 - Edições 70: São Paulo, SP 2011.
- BASTOS, Tatiana Reis. **A concretização do abstrato: história da institucionalização das Ciências matemáticas no Brasil**. Belo Horizonte, Ed. Argvmentvs (Stvdium), 2006.
- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani.; BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação Matemática: pesquisa em movimento** / São Pulo : Cortez. 2004.
- BORGES, Abílio César. *Desenho linear de elementos de Geometria prática popular: seguido de lições de agrimensura stereometria e architectura* – Primeira Parte. 2 ed Bruxelas, Typografia e Lithografia E. Guyot, 1822.
- BOTO, C (2005). **O professor primário português como intelectual: ‘Eu ensino, logo existo’**. Revista do Programa de Mestrado em Educação e Cultura, v. 6, n.1. Florianópolis, jan.- junm, pp.80-130.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**: Tradução, Elza F. Gomide. Editora Edgard Blücher, São Paulo, SP, 1974.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998. 148 p.
- BROUSSEAU, G. *Le contrat didactique: le mlieu. Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 9, n. 3, pp. 309-336.
- CAMARGO, Ivan de; Paulo Boulos. **Geometria Analítica** - 3ª. Ed rev. e ampl. – Editora Prentice Hall, 2005. São Paulo, SP.

- CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 6 ed. – Rio de Janeiro, SBM, 2012. (Col. Textos Universitários; 4)
- CHAPUT, Frère Ignace. **Elementos de Geometria**, ed 17 – Tradução do Dr. Eugenio de Barros Raja Gabaglia. Correta e revista pelo Prof. Jayme de Salles Georges (Colégio Pedro II). – Rio de Janeiro, RJ : Editores F. BRIGUIET & CIA, 1964.
- CHEVALLARD, Y. **Transposition Didactique : Du Savoir Savant Au Savoir Enseigné**. Editora Pensee Sauvade, Paris, 1991.
- COSTA, Nielce M. L. da. **Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir do contexto do “mundo experimental” e do computador** – Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática: PUC, São Paulo, 1997.
- D’ALAMBERT, Jean Le Rond (1717-1783). **Ensaio sobre os elementos de filosofia**. Tradução de Beatriz Sidou e Denise Bottmann. – 2. ed. - Campinas, SP. - Editora da Unicamp, 2014.
- D’AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da teoria à prática** – Col. Perspectivas em Educação Matemática – Campinas, São Paulo, Editora Papirus, 1986.
- DEAN, Richard A. **Elementos de Álgebra Abstrata**. tradução de Carlos Alberto A. Carvalho. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1974.
- DIEMES, Z. P.; Golding, E. W. **Exploração do espaço e prática da medição**. São Paulo: EPU, 1977.
- DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira & Smole, Kátia Cristina Stocco. **O conceito de ângulo e o ensino da geometria** – (Matemática Ensino Fundamental ; 3) – 1ed. São Paulo : CAEM;IME-USP, 2008.
- EDWARDS, Betty. **Desenhando com o lado direito do cérebro**, Tradução de Roberto Raposo – Edição Brasileira, EDIOURO S/A, 1984.
- ERNEST, Bruno. **O espelho Mágico de M. C. Escher** – Tradução de Maria Odete Gonçalves Koller, - Editora Benedikt Taschen – Berlin, 1991.
- EUCLIDES. **Os Elementos: Tradução e introdução de Irineu Bicudo**. – São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. tradução de Hygino H. Domingues. Editora da UNICAMP, 2004. Campinas, SP.
- FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Mini Aurélio: o dicionário da língua portuguesa**. Coordenação de edição: Marina Baird Ferreira, - 8 ed. – Editora Positivo, Curitiba, 2010.

- FIorentini, D.; Miorim, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de matérias concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim SBEM-SP. Ano 4 – nº 7, 1990.
- _____, Dario. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Dario Fiorentini & Sergio Lorenzato – 3ª ed. rev. . Editora Autores Associados – Col. Formação de professores – Campinas, SP, 2009.
- GADOTTI, Marlene de Fátima. **Definições matemáticas do conceito de ângulo: influências da história, do Movimento a Matemática Moderna e das produções didáticas nas concepções dos docentes**. Dissertação de mestrado apresentada ao programa de Pós Graduação em educação da Universidade Metodista de Piracicaba / UNIMEP; sob a orientação da Profa. Dra. Maria Guiomar Carneiro Tomazello: Piracicaba, SP, 2008. Acesso na internet. Site: www.unimep.br/phpg/bibdíg/pdfs/2006/KSEWYYOOCWRB.pdf, acesso: 15 out de 2015.
- GERHARDT, Tatiana Engel.; Silveira, Denise Tolfo. (Org.). **Métodos de pesquisa. [coordenado] pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica - Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.**
- GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social** – 4 ed. – São Paulo: Atlas, 1995.
- GOMES, Antônio.; RALHA, Elfrida. **O conceito de ângulo: experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático de (futuros) PROFESSORES DO 1º ciclo**. Artigo – “QUADRANTE”, ISSN 0872-3915, XIV. 1 – Editora Associação de Professores de Matemática (APM). Portugal, Braga, 2005. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1822/7018>>. Acesso em 08 de julho de 2016.
- GRONDIN, Jean. **Hermenêutica**. tradutor Marcos Marcionilo – São Paulo: Parábola Editorial, 2012.
- HALMOS, Paul Richard. **Teoria ingênua dos conjuntos**. Tradução de Irineu Bicudo. Ed da Universidade de São Paulo & Editora Polígono, 1970 – São Paulo, SP.
- HEATH, T. L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. Ed 2 - Dover Publications, Inc., New York, 1956.
- HENRY, John. **A revolução científica e as origens da ciência moderna** (Título original: The scientific revolution and origins of modern science). Tradução: Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

- HILBERT, D. **Fundamentos da Geometria**. Gradiva, 1 ed. Col. Trajetos Ciência, Lisboa, 2003
- HOFFEMAN, Kenethe; Kunze, Ray. **Álgebra Linear**. Tradução de Adalberto Bergamasco. Ed.univ. de São Paulo & Editora Polígono, 1970 – São Paulo: USP / Cap. , p. 35-60, 1979.
- HÖNIG, C. S.; GOMIDE, E. F. **Historia das Ciências no Brasil**. Ciências Matemáticas, in FERRI, M. G.: MOTOYAMA, S. (Coordenadores); São Paulo USP1979,
- KELLER, O. *Préhistoire de la géometrie: Le problème des sources*. Conferência do professor Olivier Keller no IREM, Re'union, août 2001. Disponível em: (http://reunion.iufm.fr/Recherche/irem/IMG/pdf/Keller_prehistoire_geometrie.pdf). Acesso em 20 de novembro de 2015
- LEIVAS, J. C. P. & CURY, H. N. **Transposição Didática: Exemplos em Educação Matemática**. Educação Matemática em Revista, ° 10, Vol. 1, 2009.
- LIMA, Elon Lages. **Elementos de Topologia Geral**. AO LIVRO TÉCNICO S.A. e Editora da Universidade de São Paulo : Rio de Janeiro, 1970.
- LOPES, Eliane Maria Teixeira. et al - **500 anos de educação no Brasil**; Organizadores: Eliane Maria Teixeira Lopes, Luciano Mendes de Farias Filho, Cynthia Greive Veiga. – 4 ed. Belo Horizonte: AUTÊNTICA, 2010.
- LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática / 3. ed. ver.** - Campinas, SP: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de professores).
- LÜDKE, H. A. ANDRÉ, M E. D. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.
- MITCHELMORE, M; WHIT, P. *Development of angle concepts by progressive abstraction and generalization* – in Educational Studies Mathematics. V.41, n° 3, Ano, 2002.
- MOACYR, P. (1936). **A instrução e o Império**. 1ª v. Brasiliana Eletrônica. [Disponível na Internet: <http://www.brasiliana.com.br/obras/a-instrucao-e-o-imperio-1-vol/pagina/181/texto>, acesso em 20 de março de 2011.
- MONTEIRO, L. H, Jacy. **Elementos de Álgebra**. Editora Ao Livro Técnico S/A, Col. Elementos de Matemática, CNPq/IMPS/USP-SP – Rio de Janeiro GB, 1971.
- MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Col. PROFMAT)
- O'NEILL, Barrett. **Elementos de Geometria Diferencial**. – Editorial Limusa-Wiley S/A, México, 1972.

- PAIVA, José Maria de. **Educação Jesuítica no Brasil Colonial** – In, 500 ANOS DE EDUCAÇÃO NO BRASIL; Organizadores: Eliane Maria Teixeira Lopes, Luciano Mendes de Farias Filho, Cynthia Greive Veiga. – 4 ed. Belo Horizonte: AUTÊNTICA, 2010.
- PESTALOZZI, J. H. **Cartas sobre educação infantil**. 3 ed. Tradução de José Maria Quintana Cabans. Madrid, España: Editorial Tecnos S. A., 2012.
- PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. **A representação do espaço na criança** – Trad.B. M. Albuquerque; Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.
- _____, Jean; INHELDER, Bärbel; SZEMINSKA, Alina. *The Child's Conception of Geometry. Published for Routledge*, New York, NY, 2000.
- PONTE, J. P.; BROCADO, J. & OLIVEIRA, H. **Investigação Matemática na Sala de Aula**. 2. reimp. Belo Horizonte, MG: editora Autêntica, 2006.
- REZENDE, Eliane Quelho Frota. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Eliane Quelho Rezende / Maria Lúcia Bontorim de Queiroz. – 2ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2008.
- RIVERA, Felix O. **Traçados em desenho geométrico** / Felix O. Rivera; Juarenze C. Neves; Daniel N. Gonçalves – Editora da Fundação Universidade do Rio Grande, Rio Grande, RS, 1986.
- SHULMAN, Lee S. *Those Who Understand: Knowledge Growth Teaching*. Educational Researcher, Vol. 15, No, 2 (Feb., 1986), pp. 4-14. Fonte internet: <http://links.jstor.org/sici?sici=0013-189X%28198602%3C4%3ATWUKGI%3E2.0.CO%3B2-X>. Acesso em 12 de abril de 2014
- _____, Lee S. *Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform*; Harvard Educational Review Vol. 57 No 1 February 1987. Fonte internet: link <http://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf>. Acesso em 12 de abril de 2014.
- SILVA, Antônio Carlos Marques da; Ana Paula Lima Marques Fernandes. **Ver**. Juliane Barros – EDUFAL, Editora da Universidade Federal de Alagoas, 2011 Maceió, AL.
- SILVA, Maria Célia Leme da; VALENTE, Wagner Rodrigues. **A geometria nos primeiros anos escolares: História e Perspectivas Atuais**. Orgs. - Campinas, SP: Papyrus 2014.
- SOUZA, Joamir Roberto de;. **Vontade de saber matemática**, 6º ano / Joamir Roberto de Souza, Patícia Rosana Moreno Pataro. – 2 ed – São Paulo ; FTD, 2012.

- STEPHANOU, Maria; BASTOS, Maria Helena Câmara. (orgs.). **História e memórias da educação no Brasil**, vol. 1 : séculos XVI –XVIII 4. ed. – Petrópolis, RJ : Editora Vozes, 2010.
- TALL, D; VINNER, S. *Concept image and definition in Mathematics wit particular reference to limits and continuity*. In Educational Studies in Mathematics, vol. 12 151- 169, 1981.
- TARDIF, Maurice. **Saberes Docente e Formação Profissional**. – Ed. 12. – Petrópolis, Rio de Janeiro: Editora Vozes, 2011.
- TRINCÃO, Cláudia. **O Conhecimento em Desenho das Escolas Primárias Imperiais Brasileiras: O Livro de Desenho de Abílio César Borges**. Artigo publicado em História da Educação, ASPHE/FaE/UFPel, Pelotas, n. 23, pp. 125 – 147, set/Dez 2007. Disponível em: <http://fae.ufpel.edu.br/asphe>. Acesso em 30 outubro de 2014.
- VALENTE, Wagner Rodrigues. Rev. Diálogo Educ., Curitiba, v. 8, n. 25, p 583-613, set./dez. 2008.
- _____, Wagner Rodrigues. **Cadernos de Trabalho**. (Org.) – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.
- VELOSO, Eduardo. **Ensino da Geometria: Idéias Para um Futuro Melhor**, In. Ensino da Geometria no Virar do Milênio; Org. Eduardo Veloso, Helena Fonseca, João Pedro da Ponte e Paulo Abrantes. Edição: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, ed.1, Lisboa, Portugal, 1999.
- VERGNAUD, Gérard. *La Théorie des Champs Conceptuels* – Recherche actique des Mathématiques, Vol. 10, n°23, p.p.133-170 : Éditions La Pensée Sauvage, Paris 1990.
- VIEIRA, Kleber Mendes. O ensino do conceito de ângulo: limites e possibilidades. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática: Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba sob a orientação do Prof. Dr. Rômulo Marinho do Rego - PB, Campina Grande, 2010. Disponível em <http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/dissertacoes-e-teses-teste/> Acesso em 27 de dezembro de 2015.
- VINNER, S. **The role of definitions in the teaching and learning of mathematics**. - In *Advanced mathematical thinking* (pp.65-81). David Tall (Ed.), Dordrecht: Kluwer,

(1981). Disponível em: <http://www.springer/cv/book/9780792314561#> Acesso: 15 de setembro de 2016.