UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DIOGO PINHEIRO DA SILVA

A APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

MACEIÓ
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DIOGO PINHEIRO DA SILVA

A APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação realizada sob orientação do(a) Prof. Dr. Ediel Azevêdo Guerra e apresentado à banca examinadora como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática - Área de Concentração “Ensino de Matemática”, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

MACEIÓ

2017

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S586a Silva, Diogo Pinheiro da.
A aprendizagem de análise combinatória no ensino médio / Diogo Pinheiro da Silva. – 2017.
139 f. il., fots. color.

Orientador: Ediel Azevêdo Guerra.
Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Maceió, 2017.

Inclui bibliografia: f. 110-112.
Anexos: f. 113-114.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino e aprendizagem. 3. Análise combinatória. 4. Resolução de problemas. 5. Sequência didática. I. Título.

CDU: 519.101:372

DIOGO PINHEIRO DA SILVA

A APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Subárea de Concentração "Ensino de Matemática", pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro de Educação da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 01 de junho de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Ediel Azevedo Guerra

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra
Orientador e presidente
(IM; PPGECIM/CEDU/UFAL)

Vanio Fragoso de Melo

Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo
(IM/UFAL)

Amauri Barros

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros
(IM; PPGECIM/CEDU/UFAL)

DEDICATÓRIA

A Deus, aos meus pais e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Nesta página muito especial deste trabalho, gostaria de agradecer a algumas pessoas, dentre as muitas que me ajudaram a realizá-lo.

A Deus pela oportunidade de viver.

A minha mãe Maria José Pinheiro que ora pela minha felicidade todos os dias.

A minha recém-chegada sobrinha Lavínia Pinheiro.

Aos meus amigos de Maceió-AL.

Aos meus amigos de Ibateguara-AL.

Ao meu orientador Prof. Dr. Ediel Azevêdo Guerra pela sua paciência e prontidão em ajudar.

Aos professores do PPGECIM - UFAL.

A equipe pedagógica da secretaria do PPGECIM - UFAL.

A direção e coordenação da escola na qual foi realizada esta pesquisa.

A Secretaria Estadual de Educação de Alagoas.

Aos alunos que concordaram em participar dessa pesquisa e comparecer a todos os encontros definidos com antecedência.

Aos pais ou responsáveis dos alunos que assinaram ao termo de permissão para a pesquisa.

Enfim, agradeço a todos aqueles que participaram da minha caminhada.

Obrigado!

Diogo Pinheiro da Silva

EPÍGRAFE

Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto, porém, se ele desafiar sua curiosidade e fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então você poderá experimentar tensão e o prazer do triunfo da descoberta.

(George Polya)

RESUMO

Este trabalho consiste na apresentação dos resultados de uma investigação sobre o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória em uma turma do segundo ano do ensino médio de uma escola da rede pública estadual de Alagoas. Para tornar esse estudo possível, foi desenvolvida, aplicada e validada uma sequência didática tendo como base o Princípio Fundamental da Contagem para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória e como metodologia o ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. Nesta metodologia, conforme Onuchic (2008), o problema torna-se o ponto de partida no processo, onde a discussão em grupo e as interações são peças relevantes para atingir a formalização do(s) conceito(s). Para a construção das questões usadas na sequência, foi realizado um estudo breve acerca de quatro eixos importantes e um teste-diagnóstico com o propósito de identificar os conhecimentos prévios dos alunos com base na Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky. Esses eixos foram os seguintes: Conceitos Básicos de Análise Combinatória, Resolução de Problemas, Análise Didática e Levantamento Bibliográfico. A validação pôde ser realizada com a verificação dos protocolos de resolução dos problemas propostos associados com as etapas descritas na sequência. Os resultados mostraram que a sequência didática contribuiu para a internalização dos conceitos básicos do objeto matemático em destaque e para a reflexão acerca das dificuldades ou particularidades surgidas durante sua execução.

Palavras-chave: Aprendizagem. Análise Combinatória. Resolução de Problemas. Sequência Didática. Agrupamentos. Problemas Geradores. Conceitos Básicos. Peculiaridades.

ABSTRACT

This work consists in the presentation of the results of an investigation about the teaching and learning process of Combinatorial Analysis in a second year high school class of a school in the state public network of Alagoas. In order to make this study possible, a didactic sequence was developed, applied and validated based on the Fundamental Principle of Counting to introduce the basic concepts of Combinatorial Analysis and as a methodology teaching-learning-mathematics assessment through problem solving. In this methodology, according to Onuchic (2008), the problem becomes the starting point in the process, where the group discussion and the interactions are relevant parts to reach the formalization of the concept (s). In order to construct the questions used in the sequence, a brief study was carried out on four important axes and a diagnostic test in order to identify the previous knowledge of the students based on the Vygotsky Proximal Development Zone. These axes are classified in: Basic Concepts of Combinatorial Analysis, Problem Solving, Didactic Analysis and Bibliographic Survey. The validation could be performed by verifying the protocols for solving the proposed problems associated with the steps described in the sequence. The results showed that the didactic sequence contributed to the internalization of the basic concepts of the mathematical object in focus and to the reflection about the difficulties or peculiarities that arose during its execution

Keywords: Learning. Combinatorial Analysis. Problem solving. Didactic sequence. Groupings. Generator Problems. Basic concepts. Peculiarities.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No mundo de inúmeras transformações diárias e constantes, o cidadão (estudante) precisa adquirir competências cada vez mais abrangentes e efetivas. Neste sentido, desenvolver habilidades em resolver problemas é sem dúvida um requisito necessário para a aquisição dessas competências. No atual modo de organização social, as escolas são inegavelmente as instituições que melhor podem contribuir para que os membros da sociedade atinjam essa finalidade.

Apesar de compreendermos que as experiências para o aprendizado ocorrem durante toda a vida e em todos os espaços, o ambiente escolar é aquele no qual são, em princípio, oferecidas as mais variadas experiências de aprendizagem. É na escola onde, ao menos teoricamente, os conhecimentos científicos são transformados e didaticamente transpostos de modo a que possam ser apropriados pela população.

Não obstante, o modelo que se observa frequentemente nos ambientes de ensino e aprendizagem é marcado principalmente pela rigidez e pelo tradicionalismo de práticas adotadas sem questionamentos. Os professores seguem sugestões determinadas previamente como, por exemplo, com o uso do livro didático aplicando de forma uniforme em todas as turmas que leciona. Na grande maioria dos casos, os conhecimentos prévios não são levados em consideração, descaracterizando a função primária da escola.

É comum identificar momentos dentro da sala de aula onde o conteúdo é ministrado linearmente e com dinâmica centrada no professor. Muitas vezes, essas referências são encontradas até nos livros didáticos. O docente expõe o assunto de forma pronta e impositiva e, em seguida, uma bateria de exercícios é destinada à resolução. Muitos deles, não apresentam relação alguma com situações reais ou significantes para o estudante. Dessa forma, é observado um crescimento exponencial no número de estudantes desinteressados e avessos a algumas áreas de conhecimento. A Matemática é uma dessas disciplinas colocadas pelos estudantes no lugar da indiferença ou da repulsa.

Entendemos que o professor necessita dispor de uma condição de autonomia que o permita montar/adequar seu próprio currículo.

Esta dissertação, a qual possui o título de “A Aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio” é resultado da minha preocupação como professor na disciplina de Matemática na Educação Básica e como tutor do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Aberta do Brasil. O interesse pelo objeto matemático de estudo veio das minhas experiências enquanto docente e aluno.

Inicialmente, desde a minha formação no Ensino Médio, via o assunto *Análise Combinatória* muito distante da realidade. Algumas perguntas circulavam em minha mente, dentre elas: Por que eu teria que saber de quantas formas 5 pessoas poderiam ser organizadas em uma fileira com 3 cadeiras? Qual a finalidade de compreender se a ordem de posições de elementos é importante ou não? E qual o porquê em trocar as letras de uma palavra, mesmo que não tenha significado na Língua Portuguesa?

Na minha passagem pela Licenciatura em Matemática, época posterior ao Nível Médio, essa inquietude cresceu mais ainda. Acredito que essa circunstância tenha origem no modelo ainda forte nas instituições de formação docente em nível superior, ou seja, enfoque didático voltado integralmente ou quase integralmente para os aspectos estritamente matemáticos dos conteúdos, desvinculados de suas conexões com a realidade natural ou social.

Com o título de Licenciado em Matemática, voltei a ministrar aulas para o Nível Médio e exercer a função de tutor para a Educação a Distância. Novamente, esses pensamentos voltaram a me desafiar. Dessa vez, além dos meus próprios questionamentos, ainda teria que responder às angústias dos alunos que, por sinal, muitos deles também seriam professores em um futuro bem próximo.

O ingresso no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática trouxe mais uma oportunidade para enfrentar esse desafio que já percorria anos. Pude associar as competências das disciplinas estudadas com a minha prática em sala. Uma das habilidades desenvolvidas foi a descoberta pela pesquisa e, neste ponto, consegui encontrar significados para o estudo da Análise Combinatória.

Compreendi que o estudo dos tópicos relacionados à Contagem é relevante para a Estatística e Probabilidade, por exemplo. Essas últimas são instrumentos de base para o aprimoramento de diversas áreas. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicada as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatístico e probabilístico são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (BRASIL, 1999, p. 257).

Nota-se que, diante de sua abrangência e de sua importância, o aprimoramento do raciocínio combinatório tem sido um objeto de estudo em diversas áreas no campo da Educação Matemática. Podemos verificar que as investigações vão do Ensino Fundamental e Médio até o Nível Superior (SOUZA, 2013; FERRAZ, 2003; PINHEIRO E SÁ, 2007; LIMA E ROCHA, 2016; BARRETO E BORBA, 2011, dentre outros).

As pesquisas que examinamos em nosso levantamento bibliográfico têm recomendado estratégias de ensino da análise combinatória que enfatizem o Princípio Fundamental da Contagem e que propiciem a participação ativa do aluno no processo de aprendizagem.

No campo das metodologias de ensino, diversos estudos defendem o uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas como principal técnica de ensino. Neste procedimento, conforme os pesquisadores, o processo de conhecimento parte do estudante, levando em consideração todas as experiências construídas anteriormente. (Onuchic et al, 2014).

Tendo em vista essas recomendações, sentimo-nos motivados para realizar uma pesquisa com a seguinte questão investigativa: **Quais dificuldades podem emergir no processo de ensino e aprendizagem de conceitos básicos de análise combinatória por meio de aplicação de uma sequência didática concebida a partir do Princípio Fundamental da Contagem e tendo como metodologia o ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas?**

Para alcançar as respostas em relação ao problema de pesquisa, definimos como objetivo geral deste trabalho a construção, aplicação e validação de uma sequência didática para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória, no segundo ano do Ensino Médio, baseada no Princípio Fundamental da Contagem e norteada pela metodologia do ensino-aprendizagem-avaliação da matemática através da resolução de problemas.

Além disso, estabelecemos como objetivos específicos os seguintes: (1) identificar as possíveis reações comportamentais e atitudinais dos estudantes, acostumados ao modo de ensino expositivo, à mudança de contrato didático; (2) observar como os estudantes interagem nas resoluções dos problemas propostos; (3) examinar as dificuldades dos estudantes na compreensão dos enunciados dos problemas; (4) analisar a preferência dos estudantes no tocante à resolução dos problemas pela utilização do P.F.C. ou das fórmulas.

A ideia básica desenvolvida nessa sequência didática é oferecer atividades para que os discentes se apropriem dos conceitos básicos da Análise Combinatória segundo as escolhas mencionadas no parágrafo anterior e, a partir da experimentação e das reflexões acerca dos dados levantados, identificar algumas peculiaridades e dificuldades que, porventura, emerjam nesse processo.

Hipoteticamente, acreditamos que a **sequência didática aplicada neste trabalho, elaborada a partir do Princípio Fundamental da Contagem e usando como metodologia o ensino-aprendizagem-avaliação da matemática através da resolução de problemas, será capaz de proporcionar aos alunos a apropriação dos conceitos básicos de Análise Combinatória e possibilitar a identificação de possíveis adversidades que possam surgir durante sua execução.**

Esta pesquisa foi dividida em quatro capítulos.

No capítulo 1 são apresentadas algumas considerações gerais definidas como Fundamentação Teórico-Metodológica. Esta etapa foi segmentada em quatro elementos: (1) Conceitos básicos de Análise Combinatória para o Ensino Médio, (2) Metodologia de Resolução de Problemas, (3) Análise Didática e (4) Levantamento Bibliográfico.

No capítulo 2, classificado como Sequência Didática, foi dado destaque à construção das questões para a aplicação. Para isso, foram considerados os 4 pontos destacados no capítulo 1 e os conhecimentos prévios dos alunos tomando como referência a Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky. O capítulo 3 caracterizou-se pela descrição dos passos nas aulas, levando em consideração todas as etapas e as informações pertinentes ao desenvolvimento do processo.

O capítulo 4, definido como Resultados, serviu como instrumento importante à análise dos dados a fim de reunir informações relevantes para tentar responder ao problema de pesquisa proposto. Para construir esses dados, foram levadas em consideração as participações das equipes durante a execução da sequência e as respostas das listas de exercícios propostas.

CAPÍTULO 1: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA - METODOLÓGICA.

O foco desse capítulo será a apresentação de conceitos básicos relacionados à Análise Combinatória focalizada no Ensino Médio, além da socialização do aporte metodológico escolhido.

1.1 Conceitos Básicos de Análise Combinatória para o Ensino Médio.

Como poderíamos definir Análise Combinatória?

Oliveira (2004) a interpreta como um conjunto de técnicas para contar. O uso desses artifícios (técnicas) determinam os números de elementos de uma experiência.

Para Hazzan (1996), ela é uma parte da Matemática que tem o objetivo de contar elementos de um conjunto, mas esses elementos são formados com base em condições específicas.

Conforme Julianelli, Dassie e Lima (2007), a Análise Combinatória estuda a formação de agrupamentos de dados com base em uma abordagem quantitativa. Esses dados são coletados de um conjunto e submetidos a condições antecipadamente estabelecidas.

Souza (2010), tratando da abrangência do conceito, afirma que a Análise Combinatória,

> Não está relacionada apenas ao processo de simplesmente contar, mas, explorando os conceitos de combinação, de arranjo e de permutação, onde o domínio desses conceitos permite resolver os problemas de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos. No entanto, verifica-se que a concepção acima citada é parcial. Existem outros tipos de problemas e a Análise Combinatória possui técnicas para resolvê-los: como o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet; as funções geradoras; e a teoria de Ramsey. (pag.72-73).

Morgado et al (1991) também não limitam a Análise Combinatória ao estudo de Arranjo, Permutação e Combinação. Segundo os autores, esses conceitos ajudam a resolver somente alguns problemas que envolvem a contagem de subconjuntos de um conjunto finito, sem haver a necessidade de escrever seus elementos.

Vejamos um exemplo abaixo proposto por Ferreira (2011):

Mostre que, em um ano não bissexto, em qualquer conjunto com 366 pessoas há pelo menos duas que farão aniversário no mesmo dia.

Para a resolução desse problema, é necessária a utilização do Princípio da Casa dos Pombos, o qual é definido da seguinte forma:

Princípio da Casa dos Pombos: Se tivermos n+1 pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter, pelo menos, dois pombos.

Neste caso, temos:

Casas: dias do ano (365)

Pombos: pessoas (366)

Relação: Cada pessoa está associada ao dia do seu aniversário.

Pelo Princípio da Casa dos Pombos, para $n = 365$, temos que pelo menos uma "casa" deverá conter pelo menos dois "pombos", isto é, pelo menos duas pessoas farão aniversário no mesmo dia.

Diante disso, podemos afirmar que os problemas de Combinatória vão além dos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação e suas aplicações.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, normalmente conhecidos como PCNs, é um documento elaborado para servir como ponto de partida ao trabalho dos docentes, ou seja, é uma orientação em relação aos conteúdos que devem ser usados nos planejamentos escolares.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, o ensino de Análise Combinatória deve ser orientado pelas seguintes competências:

> **Contagem**: princípio multiplicativo; problemas de contagem. Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos. Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem. Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem (p.127).

Como a nossa proposta é a construção de uma sequência didática para ser aplicada junto aos alunos do Ensino Médio, seguiremos as recomendações dos documentos oficiais, ou seja, trataremos o conceito de Análise Combinatória como o uso de estratégias que são utilizadas para contar os agrupamentos que são formados a partir de um determinado conjunto, tomando como referência o conceito do Princípio Multiplicativo.

Em relação ao tratamento das fórmulas e do formalismo presentes no ensino de Análise Combinatória, Lima et al (2004) no livro *Temas e Problemas Elementares* recomendam:

> Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas. Quem troca o princípio básico da contagem por fórmulas de arranjo, permutação e combinações têm dificuldade de resolver até mesmo problemas simples;
> Você quer mostrar que é o bom ou prefere que seus alunos aprendam? Se você optar pela a segunda alternativa, resista à tentação de em cada problema buscar solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas e não um truque que resolva maravilhosamente problema; não devemos mostrar os truques sem antes apresentar os métodos. A beleza de alguns truques só pode ser apreciada por quem tem domínio dos métodos. Combinatória não é difícil; impossível é aprender alguma coisa apenas com truques em vez de métodos;
> Não dê preferência a raciocínios destrutivos, raciocínios do tipo contar amais e depois descontar o que não servia e foi contudo indevidamente. Os raciocínios que resolvem a maior parte dos problemas de Combinatória são essencialmente construtivos. Embora em certos casos seja melhor usar um raciocínio destrutivo, seus alunos só se sentirão seguros quando dominarem os raciocínios construtivos. (p.111).

Julianelli, Dassie e Lima (2009), mantendo essa mesma linha de raciocínio, ainda acrescentam:

> Depois de muitos anos ensinando esse capítulo da Matemática aos nossos alunos, percebemos que era infinitamente mais aproveitável começar o estudo da Análise Combinatória pelo Princípio Multiplicativo, mas não apenas começar por ele. Insistir com ele, exaustivamente, até que os alunos sejam capazes de diferenciar os problemas, segundo as características próprias de cada um. Depois sim, podemos apresentar os tipos usuais de agrupamentos. Nesse ponto, é muito compensador perceber que os alunos fazem referências e comparações com inúmeros problemas já resolvidos anteriormente e, o que em nossa opinião é melhor ainda, optam por resolver os novos problemas propostos sem utilizar as fórmulas apresentadas (p.02).

No que se refere à sugestão dos autores, percebemos que não há proibição no uso das fórmulas. O que está se propondo é a construção de significado do aluno por meio da descoberta.

Lima et al (2006) apontam alguns passos importantes para resolver problemas de contagem:

> Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar;
> Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão;
> A ordem em que as decisões são tomadas pode ser extremamente importante para a simplicidade do processo de resolução;
> Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. (p.129).

A seguir, traremos os conceitos de Análise Combinatória que serão trabalhados na sequência didática.

Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.)

Um conceito para o Princípio Multiplicativo:

Se uma decisão **D1** pode ser tomada de **p** modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão **D2** pode ser tomada de **q** modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões **D1** e **D2** é igual a **pq**.

Observação: Esse princípio pode ser estendido quando forem realizadas n escolhas sucessivas.

Vejamos um exemplo: Com os algarismos 5, 6 e 7 quantos números de dois algarismos distintos podemos formar?

Resposta: A solução seria os números 56, 57, 67, 65, 75, 76. Neste caso, temos um total de 6 números. Porém, poderíamos obter este resultado através do Princípio Multiplicativo, conforme:

1º algarismo: 3 possibilidades;
2º algarismo: 2 possibilidades.

Logo, 3 x 2 = 6 números.

Fatorial de um Número Natural.

Dado um número natural **n≥2**, chama-se fatorial de **n**, ao número indicado por **n!** tal que

n! = n. (n-1). (n-2)... 3.2.1

ou seja, é o produto de todos os números naturais, de n até 1.

Exemplo: 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720.

Para interromper o desenvolvimento do fatorial de um número, deve-se colocar o símbolo de fatorial após o último algarismo que for escrito.

Exemplo: 8! = 8.7.6.5!

Arranjo Simples.

Dado um conjunto com **n** elementos, e sendo **p** um número inteiro e positivo, tal que **p≤n**, chama-se Arranjo Simples dos n elementos dados, agrupados **p a p**, qualquer sequência de p elementos distintos formada com os elementos do conjunto.

Nota: a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Fórmula: $A_{n;\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exemplo: Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os elementos do conjunto E = {1,2,3,4,5}?

Observação: Sabe-se que a ordem dos elementos interfere na formação dos agrupamentos. Sendo assim, estamos diante de um problema de Arranjo Simples.

Solução: $A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!}$ = 5.4.3 = 60.

Resposta: É possível formar 60 números de 3 algarismos distintos.

Combinação Simples

Dado um conjunto qualquer de **n** elementos e sendo **p** um número inteiro e positivo tal que **p≤n**, chama-se combinação simples dos **n** elementos dados, agrupados p a p, qualquer subconjunto de **p** elementos distintos, formados com elementos do conjunto.

Nota: a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Fórmula: $\mathrm{C}_{\mathrm{n,p}} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{p!(n-p)!}}$

Exemplo: Quantos grupos diferentes de 4 lâmpadas podem ser acesos num galpão que tem 10 lâmpadas?

Observação: Como a ordem das lâmpadas não interfere na formação dos agrupamentos, afirmamos que o problema é de Combinação Simples.

Solução: $\mathrm{C}_{10,4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{4!6!} = \frac{10.9.8.7}{4!} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = \frac{5040}{24} =$ 210.

Resposta: É possível formar 210 grupos diferentes de 4 lâmpadas.

Permutação Simples.

Quando um agrupamento é composto por **m** elementos dispostos em **m** posições, dizemos que há uma permutação de n elementos.

Nota: Podemos considerar a Permutação Simples como um caso particular de Arranjo Simples. Para determinar o número de Permutações Simples, usa-se a expressão P = m!

Exemplo: Anagramas são palavras formadas pela reorganização de letras de outra palavra. Determine o número de anagramas da palavra ENSINO?

A palavra ENSINO possui 6 letras. Logo, a quantidade de anagramas são todas as permutações formadas entre todas as letras.

Solução: P = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720.
Resposta: A palavra ENSINO possui 720 anagramas.

Nosso objetivo é oferecer uma sequência didática que facilite e conduza o estudante a refletir, compreender e ser capaz de analisar situações onde se faça necessário mobilizar o pensamento combinatório. A curiosidade precisa ser explorada. Os conteúdos são importantes, mas também a capacidade de mobilizá-los em diversas situações que se fizerem necessárias exerce função relevante no processo de ensino e aprendizagem.

1.2 - Resolução de Problemas.

A Matemática é uma área do conhecimento humano que sempre exerceu bastante influência em quase todas as civilizações. Os registros históricos mostram que, em grande parte dos casos, o aperfeiçoamento dessa área permitiu a sobrevivência de inúmeras gerações. Segundo Rossetto (2013, p.35), “é importante lembrar que a matemática de hoje é o produto de um processo histórico que levou anos para ser sistematizada, e conhecer a parte da história é demais importante para o seu desenvolvimento".

No final do século XIX e início do século XX, o mundo passou por uma mudança profunda em sua economia. A sociedade agrária passa para a sociedade industrial. A produção em larga escala e o desenvolvimento da competição pelas produções atraíram multidões para as cidades. O lucro passou a ser um dos principais objetivos.

Diante disso, a Matemática passou a ser uma ciência importante e seu aprofundamento significaria uma estratégia para a manutenção/ampliação do novo modelo econômico. Neste caso, a Matemática não precisou apenas ser aperfeiçoada, enquanto área do conhecimento, mas também houve a necessidade de transmiti-la, ou seja, ser ensinada.

A partir daí, a maneira como o ensino e a aprendizagem se relacionavam nos ambientes escolares, atingiu um nível de relevância importante. A Educação Matemática, como um campo de estudo, tem sua origem.

Tratando de sua definição, Costa (2005) discute que:

> Há alguns estudiosos tem se envolvido na procura de uma identidade para a comunidade de Educação Matemática. Sabemos, entretanto, que ainda não é claro e consensual o que constitui e delimita esse campo, bem como os aspectos relacionados à sua interdependência com outros campos. Podemos dizer sucintamente, portanto, que o objeto de estudo da Educação Matemática está na relação entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático (p.3)

Rocha (2011), considerando a Educação Matemática no mundo moderno, afirma que:

> Estamos vivendo em uma sociedade do conhecimento. Manda mais aquele que detém esse conhecimento e nele está incluso fortemente o conhecimento matemático. Assim, a Educação Matemática, tornou-se questão de grande interesse e, em muitos espaços, a Educação Matemática é debatida acaloradamente (p.113).

Sobre os principais campos de estudos em Educação Matemática, Silveira e Miola (2008) no título *Professor-Pesquisador em Educação Matemática* destacam:

> Algumas das tendências metodológicas em Educação Matemática, pesquisadas e relatadas em artigos científicos, livros, teses e dissertações, são: resolução de problemas, modelagem matemática, etnomatemática, história da matemática, tecnologias da informação e comunicação, jogos e investigações matemáticas em sala de aula. (p.51)

Para a construção desta pesquisa, iremos abordar, como prioridade, a metodologia Resolução de Problemas. Já que "é interessante ressaltar que não há uma fronteira bem definida entre essas tendências" (Silveira e Miola, 2008, p.51).

Quando assistimos a uma aula de Matemática, presenciamos algumas estratégias bem tradicionais em relação às práticas pedagógicas da grande maioria dos professores. O conteúdo matemático é dado nas primeiras aulas, seguido de alguns exemplos e, para finalizar, a proposição de um quantitativo significativo de exercícios, geralmente, retirado dos livros adotados ou do plano de aula do docente.

Esses exercícios são classificados por professores e livros didáticos como problemas. Na maioria dos casos, esses problemas são prolongamentos das teorias apresentadas e servem como memorização e aplicação das fórmulas.

Apresentaremos alguns desses diversos problemas comumente encontrados.

Paiva (2009), abordando a temática das progressões, lança o seguinte problema:

Determine o décimo termo da P.G. (3, 6, 12,...).

Para a correta solução do exercício, é necessário lembrar e aplicar a fórmula da razão de uma P.G. e a do termo geral.

Razão da P.G.: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\forall$ n, n $\in \mathbb{N}^*$

Termo Geral da P.G.: $a_n = a_1 q^{n-1}$

Temos que a_1= 3, a_2= 6 e a_3= 12.

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3}$ = 2, n = 10º, a_{10} = ?

Aplicando a fórmula do termo geral, para n = 10, obtemos:

a_{10} = 3. 2^{10-1} ∴ a_{10} = 3.2^9 ∴ a_{10} = 3. 512 ∴ a_{10} = 1536.

Portanto, o décimo termo desta P.G. é 1536.

Silva (2005) propõe problemas com base no conceito de Fatorial e Equações. Um deles pede para:

Resolver a equação $\frac{(x+2)!}{x!}$ *= 6, com x*≥ 0*:*

Aplicando a definição de fatorial à equação, temos:

$\frac{(x+2).(x+1).x!}{x!}$ = 6

(x+2). (x+1) = 6

$\boldsymbol{x^2}$+x+2x+2 = 6

$x_1 = \frac{-3+5}{2}$ = 1

x^2+3x-4 = 0

$\mathbf{x_2} = \frac{\mathbf{-3-5}}{\mathbf{2}}$ = - 4 (não convém)

Sendo assim, temos que x=1.

Souza (2010) relata a coleção de 150 problemas na Obra de Diofanto (250 d.C.). A autora destaca o seguinte problema:

Encontrar 2 números tais que sua soma seja 20 e a soma dos quadrados desses números seja 208.

Segundo Souza (2010), uma solução para este problema nos dias atuais seria a construção de um sistema de equações com a utilização de uma das regras: adição, substituição ou comparação.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x^2 + y^2 = 208 \end{cases}$$

Utilizando a regra da substituição, verificamos:

y = 20 – x

x^2 + $(20 - x)^2$ = 208

x^2 + 400 - 40x^2 - x^2 = 208

x^2 – 20x + 96 = 0

Resolvendo a equação, chega-se ao resultado x =12 e y = 8.

É possível verificar que os exercícios detectados em Paiva (1999), Silva (2005) e Souza (2010) mostram pouca ou quase nenhuma contextualização dos assuntos estudados. A aplicação de algoritmos pré-estabelecidos e o excesso das fórmulas evidenciam essa característica. Com essa abordagem, não se exige do aluno a criação de mecanismos para a resolução de um problema.

Diante de todo esse conjunto de questões, como definir um problema?

Segundo Polya (1962),

> a palavra "problema" será considerada num significado bastante abrangente(...) Ter fome não é usualmente um problema na vida moderna. Tem-se fome em casa, pego alguma coisa na geladeira, ou vou a uma lanchonete, ou a algum outro lugar se estou na cidade. É uma questão diferente, entretanto, quando a geladeira está vazia ou acontece de eu estar na cidade sem dinheiro; nesse caso, ter fome torna-se um problema. Se o desejo traz à minha mente imediatamente, sem qualquer dificuldade, alguma ação óbvia que seja provavelmente a de alcançar o objeto desejado, não há problema. Assim, ter um problema significa: *procurar conscienciosamente alguma ação apropriada para atingir um fim claramente concebido, mas não imediatamente atingível.* Resolver um problema significa achar tal ação. (p.117).

Paralelamente às ideias de Polya, Vale e Pimentel (2004) afirmam:

> Definir um **problema** é um propósito difícil, já que uma determinada situação pode ser um problema para um dado indivíduo, num dado momento, e para o mesmo indivíduo, num outro momento, ser apenas um exercício ou um fato específico. Podemos assim concluir que existe um conjunto de fatores inerentes ao indivíduo e à própria tarefa, além de outros, que vão condicionar quer à sua caracterização quer ao seu desempenho. Das várias definições de problemas podemos retirar que um **problema** é uma situação para a qual não se dispõe, à partida, de um procedimento que nos permita determinar a solução, sendo a **resolução de problemas** o conjunto de ações tomadas para resolver essa situação.(p.12).

Marincek (2001), em uma forma mais sucinta, conclue que:

> Problema é toda situação em que alunos necessitam por em jogo tudo o que sabem, mas que contém também algo novo, para o qual ainda não tem resposta e que exige a busca de soluções. É nesse movimento de busca de soluções que se estabelecem novas relações e se constroem conhecimentos que modificam os anteriores. (p.15).

Os primeiros estudos sobre o ensino de matemática por meio da Resolução de Problemas teve uma forte influência de George Polya. Polya, matemático e educador matemático húngaro, apresentou em seu livro *A Arte de Resolver Problemas (1945)* um lineamento de quatro etapas para a resolução de problemas: 1) compreender o problema; 2) estabelecer um plano; 3) executar esse plano e 4) examinar a solução obtida (Onuchic et al, 2014).

Onuchic et al (2014) na obra *Resolução de Problemas: Teoria e Prática* apresentam uma importante contribuição de Polya em um curso ministrado em 1967 em relação aos procedimentos estratégicos na resolução de um problema:

> Comece com algo que é familiar, ou útil, ou desafiador. Que possua alguma conexão com o mundo ao nosso redor, a partir da perspectiva de alguma aplicação, a partir de uma ideia intuitiva. Não tenha medo de usar uma linguagem coloquial quando é mais sugestiva do que a terminologia convencional e precisa. Na verdade, não apresente termos técnicos antes que o estudante possa ver necessidade para eles. Não entre muito cedo ou muito em detalhes pesados de uma prova [demonstração]. Dê primeiro uma ideia geral ou apenas o germe intuitivo da prova. De modo mais geral, perceber que a forma natural de aprender é aprender por etapas: Primeiro, nós queremos ver um esboço do assunto, para perceber alguma fonte de concreto ou algum possível uso. Então, gradualmente, tão cedo quanto nós pudermos ver mais o uso e conexões e interesse, ganhamos maior vontade de trabalhar com os dados (p.23-24).

A Resolução de Problemas ganhou espaço nos currículos a partir da publicação do documento “Uma Agenda para Ação-Recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980”. O documento indicava que a Resolução de Problemas deveria ser uma estratégia principal nos currículos escolares. Esse espaço foi conquistado pela RP diante do insucesso de outras metodologias de ensino que se baseavam na formalidade e no rigor (Onuchic et al,2014).

O período que veio após a publicação desse documento foi marcado por uma agitação muito grande, pois as recomendações não eram claras em relação à forma como a Resolução de Problemas deveria ser compreendida em sala de aula. A Resolução de Problemas passou a ser uma estratégia bastante divulgada, porém com pouca aplicabilidade. Um exemplo disso foi as edições de alguns livros didáticos que se auto declaravam com essa nova metodologia, porém mantiveram os mesmos conteúdos e com as mesmas abordagens. (Schoenfeld, 2008).

Levando em consideração essas divergências, Schroeder e Lester (1989) citados por Onuchic (1999) apresentam três modos diferentes sobre a Resolução de Problemas:

> *Ensinar sobre Resolução de Problemas*: o professor que ensina sobre a resolução de problema procura ressaltar o modelo de Polya ou alguma variação dele.
> *Ensinar a resolver o problema*: concentra-se na maneira como a Matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na solução de problemas rotineiros e não rotineiros. Embora a aquisição de conhecimento matemático seja importante, a proposta essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-la.
> *Ensinar matemática através da Resolução de Problemas*: Tem-se Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. O ensino está centrado no aluno, que constrói os conceitos matemáticos durante a resolução de um problema, sendo depois formalizados pelo professor. (p.206-207).

Ao ensinar ***sobre*** a resolução de problemas, a ênfase é em torno do modelo proposto por Polya, dividido nas seguintes etapas: compreender o problema, criar um plano, executar o plano e examinar a solução obtida (Souza, 2010).

Em relação ao ensino de matemática ***para*** resolver problemas, o foco é nas técnicas com o objetivo de resolver o problema. A matemática é ensinada para resolver problemas. Os conteúdos matemáticos são dados anteriormente ao problema proposto (Souza, 2010).

Já o trabalho de ensinar ***através*** da Resolução de Problemas enfatiza os problemas como parte de todo o processo. A Matemática e a resolução de problemas são construídas ao mesmo tempo (Allevato et al,2014).

A metodologia adotada para este trabalho em sala de aula é a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Conforme Souza (2010),

> A palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação significa que o ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente, durante o processo de construção de um determinado conceito. E a avaliação, integrada ao ensino, contribui para a melhoria da aprendizagem (p.122).

Nesta metodologia, a concepção de problema matemático é algo que não sabemos resolver, porém existe um interesse em resolvê-lo. A proposta é auxiliar os alunos a se tornarem investigadores diante de situações de desequilíbrio. Fazendo com que existam questionamentos e escolha de decisões no decorrer do processo. O professor, personagem relevante, passa a ser mediador. O problema é o ponto de partida. (Onuchic, 1999).

Discutindo sobre a importância do problema inicial, Onuchic e Allevato (2011) afirmam que,

> nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema [o problema gerador] que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. (pag.85).

Walle (2001) acredita que a Resolução de Problema deve ser o principal instrumento para a construção do ensino de Matemática na sala de aula. Uma das justificativas de defesa feita pelo autor vem do fato de que o trabalho parte do aluno, ou seja, os estudantes fazem parte do processo levando em consideração suas experiências.

Para tornar prática a aplicabilidade da Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Matemática através da Resolução de Problemas, Allevato e Onuchic (2014), após uma série e experimentos e atualizações, criaram um roteiro contendo uma sequência de atividades:

> 1. ***Proposição do problema*** - Seleciona ou elabora um problema e denomina-se de problema gerador.

2. ***Leitura individual*** - Distribuir uma cópia impressa do problema para cada aluno e solicitar a leitura do mesmo.
3. ***Leitura em conjunto*** – Distribuir a turma em pequenos grupos e, solicitar uma nova leitura do problema.
4. ***Resolução do problema*** – A partir do momento em que o aluno entendeu o problema tenta a resolver, em grupo, permitindo assim a construção do conhecimento sobre o conteúdo que o professor planejou para aquela aula.
5. ***Observar e incentivar*** – Nesse momento, o professor muda de comunicador do conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem.
6. ***Registro das resoluções na lousa*** – Anotar os resultados obtidos pelos grupos quer sejam certo ou errado e aqueles feitos por diferentes caminhos.
7. ***Plenária*** – Assembleia com todos os alunos. Como todos trabalham sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados, dessa forma, participam.
8***. Busca do consenso*** – Após as discussões, e sanadas as dúvidas, o professor juntamente com os alunos tentam chegar a um consenso.
9.***Formalização do conteúdo*** – Faz-se uma síntese daquilo que se objetivava "aprender" a partir do problema gerador. São colocadas as devidas definições, identificando propriedades, fazendo demonstrações,etc.
10***. Proposição e resolução de novos problemas*** – Nesta etapa, após a formalização do conteúdo, propõem-se novos problemas para a fixação de aprendizagem. (pag.44-46)

Pode-se notar que não é tarefa muito simples aplicar os passos dessa metodologia. Estas etapas exigem professores comprometidos e bem preparados quanto ao domínio das ações e da construção de um bom problema gerador.

Van de Walle (2001) citado por Souza (2010) faz uma apresentação em relação ao modo de encaminhar as aulas pelo professor através da resolução de problemas. A sugestão é trabalhar em três fases, incluindo a importância de diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos.

Antes – Nessa fase, o professor deve levar em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, necessário à construção de novo conhecimento matemático.
Durante – Nessa fase, o professor é observador e avaliador do trabalho dos alunos. Inicialmente, entrega a cada aluno, uma cópia da atividade que deve ser lida por ele. Em seguida, formam-se os grupos, e nesse ambiente, há a socialização do trabalho onde, seus participantes passam a trabalhar cooperativamente na busca de possíveis estratégias que poderão levar o grupo a busca de solução, num trabalho colaborativo.
Depois – Para esta fase, o professor considera as soluções apresentadas pelos grupos, sem avaliá-las, e dirige uma discussão exploratória enquanto os alunos defendem suas resoluções e dão justificativas. Professor e alunos, socialmente analisam as resoluções colocadas na lousa: as estratégias escolhidas, o resultado correto ou não, e, com as dúvidas

> esclarecidas, chega-se a um consenso acerca da solução obtida. O professor termina com a formalização, totalmente de responsabilidade do professor, escrevendo na lousa os novos conceitos e conteúdos construídos e com os alunos anotando em seus cadernos toda a teoria construída. (pag.125-126)

1.3 - Análise Didática.

O ambiente escolar é composto por diferentes setores que servem como pontes importantes para a construção do conhecimento. Esses âmbitos devem trabalhar em harmonia e colaboração. O livro didático, sem dúvidas, é um dos componentes mais importantes neste processo, pois é um instrumento que auxilia os professores e alunos há décadas.

O livro didático é, em um quantitativo considerável de casos, o único mecanismo que o professor usa para o auxílio na transmissão do conhecimento. A construção das aulas, os exemplos de exercícios e a elaboração de provas acabam vindos sempre dessa fonte. Em determinados momentos, ele também é usado para firmar conhecimento pela parte do docente. Com base nisso, podemos afirmar que o livro não pode ser apenas um instrumento de simples consulta, mas que traga uma sustentação confiável ao docente e uma linguagem acessível ao aluno.

O livro didático de matemática deveria funcionar como uma fonte de atividades ligadas ao contexto sociocultural dos estudantes, ou seja, proporcionar ao discente capacidade para se apropriar conhecimentos que possam ser utilizados em situações atuais/reais. Grande quantidade das obras didáticas trata o Ensino da Matemática exclusivamente com a demonstração de fórmulas e reprodução exaustiva de algoritmos de resolução de questões. Sabemos que os conceitos matemáticos devem ser destacados, porém eles precisam apresentar significado.

Fazendo uso da crítica em relação à forma de apresentação dos textos matemáticos em obras didáticas, Julianelli et al (2009) na publicação *Curso de Análise Combinatória e Probabilidade: Aprendendo com a Resolução de Problemas* afirmam que:

> A metodologia que costuma ser utilizada na maioria dos livros didáticos acaba privilegiando a aplicação de fórmulas, tentando “enquadrar” os

> problemas, de modo que os alunos acabam decorando alguns formatos e, na maioria dos casos, não conseguem entender o uso daquelas fórmulas e nem mesmo o porquê de as estarem utilizando. (p.01).

Souza (2010), tratando sobre essa questão das obras didáticas, realizou um estudo das observações dos livros didáticos em relação ao tema Análise Combinatória. Em resumo, a pesquisadora colheu dados de materiais de décadas distintas para verificar os modelos e as diferentes formas de abordagem. Tendo como base seus resultados, percebeu-se que houve uma evolução nas concepções de ensino desde a década de 40 até o ano 2000. As etapas descritas para o desenvolvimento das análises seguiram às referências propostas por Lima et al (2001). É possível identificarmos essa relação neste trecho:

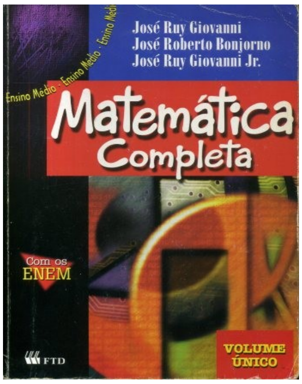
> Com base neste livro, estabelecemos alguns critérios para analisar livros didáticos com o objetivo de saber como a Análise Combinatória é neles abordada. Os critérios, por nós selecionados para análise, foram: 1) Se ao trabalhar Análise Combinatória os autores partem ou não de problemas; 2) Se o livro didático motiva e sugere um trabalho colaborativo com o aluno; 3) Se a formalização dos conceitos de Análise Combinatória é feita antes do problema dado, durante a resolução do problema ou depois do problema resolvido; 4) Se o livro é um dos recursos didáticos que pode contribuir para o professor em sala de aula. (p.78).

No Brasil, as escolas públicas de Educação Básica recebem o livro didático através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Professores e equipe pedagógica aprovam 2 (duas) dentre uma quantidade significativa de propostas pré-aprovadas pelo MEC. Em seguida, o órgão competente fica livre para enviar a primeira ou a segunda proposta. Essa distribuição não é feita anualmente, ou seja, o mesmo livro didático pode ser usado por mais de um ano e por mais de um aluno. Podemos destacar que a escolha de qualquer uma das duas possibilidades deve ser bem criteriosa e clara.

Os livros utilizados neste estudo são os adotados pelas escolas públicas estaduais do estado de Alagoas. Os parâmetros usados para este processo serão guiados pelas referências de Souza (2010), ou seja, abordaremos uma visão inicial da estrutura do livro e, em seguida, será dada uma breve discussão acerca dos quatro elementos: 1) Se ao trabalhar Análise Combinatória os autores partem ou não de problemas; 2) Se o livro didático motiva e sugere um trabalho colaborativo com o aluno; 3) Se a formalização dos conceitos de Análise Combinatória é feita antes do problema dado, durante a resolução do problema ou depois do problema resolvido; 4) Se o livro é um dos recursos didáticos que pode contribuir para o professor em sala de aula.

1º Livro:
Matemática Completa
José Ruy Giovanni; José Roberto Bonjorno; José Ruy Giovanni Jr.
FTD, São Paulo, 2002.

Figura 1 - Primeiro livro investigado.



Fonte: Página da editora FTD[1]

Visão geral:

O livro é volume único, ou seja, aborda os conteúdos do Ensino Médio em um exemplar. O capítulo 15, destinado ao tema Análise Combinatória, é composto por um texto resumido e que foca bastante na exibição de definições e algumas demonstrações. Não há, pelo menos inicialmente, uma tentativa de resgate de qualquer conhecimento prévio do aluno. Também não há uso da história ou de matemáticos importantes que auxiliaram neste processo. Em resumo, podemos afirmar que seu texto é formal e com pouca aplicação em situações reais.

1) Não. Os autores não partem de problemas. Os problemas apresentados no decorrer do capítulo estão dispostos no final de cada tópico com o objetivo de memorizar as definições e testar o uso de fórmulas. No final, são propostos 40 exercícios das mais variadas instituições distribuídos da seguinte maneira:

[1] Disponível em: <https://ftd.com.br/didaticos/>. Acesso em ago.2016.

a) 15 exercícios de revisão. Nesta proposta, os autores apresentam problemas abertos, porém com uma inclinação maior para exercitar os algoritmos.

b) 25 questões de múltipla escolha de vestibulares diversos.

2) Não. O livro motiva muito pouco o trabalho colaborativo entre professores e alunos. A proposta de apresentar os conceitos logo no início do conteúdo, como foi diagnosticado na análise, pode causar um prejuízo na aprendizagem. Neste caso, o modelo segue uma linha tradicional de ensino.

3) Quanto à ordem da construção dos conceitos de Análise Combinatória, o livro começa por uma definição bem geral. Em seguida, é apresentado o conceito de Fatorial e um quantitativo significativo de exercícios para fixação. Uma parte importante é a construção do entendimento do Princípio Fundamental da Contagem com o auxílio da Árvore de Possibilidades. O livro, neste ponto, faz uma demonstração clara e convidativa mostrando todos os passos nos agrupamentos feitos manualmente. Acreditamos que seja um momento importante na proposta dos autores, pois estabelece uma reflexão no aluno da necessidade de se criar um padrão para contar possibilidades.

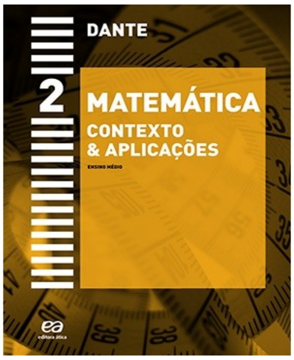
Posteriormente, são apresentados os conceitos de Arranjo Simples, Permutação Simples e Combinação Simples. Não há nenhum destaque aos casos de agrupamentos com elementos repetidos. É importante destacar que os tópicos são trabalhados de forma independente, ou seja, o texto não faz relação alguma entre o Princípio Multiplicativo e os diferentes tipos de agrupamentos trabalhados posteriormente. Acreditamos que essa metodologia acaba fazendo com que os estudantes busquem exclusivamente nas fórmulas seus caminhos para a resolução dos desafios.

Os exercícios são sempre propostos no final do processo, ou seja, são exibidos os conhecimentos matemáticos isolados para depois serem aplicados em problemas.

4) O docente, seguindo a sequência didática apresentada neste livro, acaba adotando modelos tradicionais de ensino. Porém, podemos assumir que a linguagem clara é um fator positivo em seu texto. A estratégia em apresentar os conteúdos antes dos exercícios propostos acaba eliminando ou reduzindo muito a participação do aluno no processo. Em linhas gerais, podemos destacar que a proposta apresentada na obra fortalece as aulas prioritariamente expositivas.

2º Livro:
Matemática: Contexto & Aplicações.
Luiz Roberto Dante
Ática, São Paulo, 2015.

Figura 2 - Segundo livro investigado.



Fonte: Página da editora Ática[2]

Visão Geral:

O livro vem apenas com os conteúdos referentes ao segundo ano do Ensino Médio, diferentemente da obra anterior. O tema Análise Combinatória é apresentado no capítulo 13. Sua linguagem é clara. Faz uso de um resgate histórico e dos matemáticos que exerceram influência. Os exercícios apresentados, em sua maioria, apresentam problemas que despertam o interesse pelo tema.

1) O capítulo de Análise Combinatória tem seu início com um problema da quantidade de placas de automóvel que podem ser formadas diante de uma determinada regra. Em regra geral todos os tópicos relacionados ao processo Combinatório são introduzidos por exercícios.

2) O livro não tem excesso de formalização em seus tópicos. As definições e as demonstrações das fórmulas são apresentadas de forma que não atropelem o processo, o que, para o aluno, se torna menos complexo quanto à compreensão dos conteúdos expostos.

3) Durante todo o capítulo, o autor busca formalizar os conceitos no final de cada problema proposto. Inicialmente, o conceito de Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo é apresentado com base em um problema de diversos roteiros entre duas cidades. Neste ponto, o uso de Árvore de Possibilidade

[2] Disponível em: < http://www.aticascipione.com.br/didaticos>. Acesso em ago.2016.

é bem explorado. Em seguida, a ideia de Permutação e Fatorial de um número são apresentados após o problema de agrupamentos entre 3 números distintos. É relevante destacar o uso das palavras “trocar”, “embaralhar” como recurso didático pertinente.

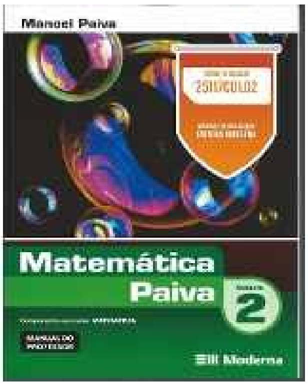
Ao apresentar a ideia de Arranjo e Combinação, o autor trata desses tópicos como uma extensão do Princípio Multiplicativo. Neste caso, os problemas são apresentados como um recurso para que o aluno identifique essa diferença. Segundo Dante (2015),

> Você pode usar tanto o conceito de arranjo como princípio fundamental da contagem para resolver problemas como verá nos exemplos a seguir. Mais importante do que decorar uma fórmula e aplicá-la é compreender o que está sendo feito. (p.282)

4) O livro pode contribuir para a aprendizagem do aluno, mesmo que o trabalho esteja focado no professor. Durante o desenvolvimento do capítulo, algumas passagens são bastante pertinentes para que os alunos compreendam o porquê de importantes procedimentos matemáticos.

<u>3º Livro:</u>
<u>Matemática-Paiva</u>
<u>Manoel Paiva</u>
<u>Moderna, São Paulo, 2014.</u>

Figura 3 - Terceiro livro investigado.



Fonte: Página da editora Moderna[3]

[3] Disponível em: < http://www.moderna.com.br/livros-didaticos/>. Acesso em ago.2016.

Visão Geral:

A obra analisada vem com uma linguagem simples e que desperta o interesse pelo tema logo em seus primeiros problemas, pois são colocações que associam alguns conceitos de Combinatória a situações reais. Alguns exemplos, como a quantidade de placas de automóvel que podem ser montadas, o número de jogos de loteria formados e os diversos números de telefones construídos evidenciam essa observação. Não há referência à história da Análise Combinatória. O autor utiliza-se de dois capítulos. Não há excesso nas formalizações. Os exercícios são propostos sempre no final de cada tópico, além dos “exercícios complementares” que funcionam como uma revisão do capítulo.

1) Sim. O livro começa resolvendo problemas e, após sua resolução por passos ele estabelece os padrões. Por outro lado, alguns problemas propostos no início do tópico não são resolvidos durante o processo de formalização. Estes são colocados como exercícios. Como é o caso do problema das placas de automóvel e dos jogos da Mega-Sena.

2) Sim. O texto, em sua maioria, explora problemas que fazem uma analogia ao cotidiano. Isso pode despertar no aluno um interesse maior pelas discussões das resoluções.

3) A formalização dos conteúdos é sempre após a resolução do problema. Em algumas passagens, é notório que existe certo direcionamento para tentar fazer essa formalização durante o processo, mesmo que seja de uma forma discreta. O tema Análise Combinatória é trabalhado em dois capítulos: 10 e 11.

O capítulo 10 aborda as considerações iniciais quanto à importância em trabalhar com Contagem. O autor classifica esse capítulo como “Os Princípios de Análise Combinatória” (p.154). É apresentado o conceito de Princípio Fundamental da Contagem através de um recurso usado pelo autor definido como matriz de possibilidades. Esse recurso é semelhante à Árvore de Possibilidades verificada em outros livros, porém fazendo uso de matrizes. Em seguida, são apresentados o Princípio Aditivo da Contagem, tópico ainda não explorado em outras obras analisadas, e o conceito de Fatorial. Os problemas relacionados à ideia de Fatorial fazem uma relação ao Princípio Fundamental da Contagem.

No capítulo 11, o autor aborda questões mais detalhadas em relação aos diversos tipos de agrupamentos. Ele define o título como “Agrupamentos e Métodos de Contagem” (p.166). Neste tópico, há uma inversão em relação ao modo como os problemas são usados. Os conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação são tratados antes de qualquer problematização, ou seja, há certo rigor na formalização e pouca interação entre o professor e o aluno. Além disso, quase não existe relação entre os agrupamentos estudados e o Princípio Fundamental da Contagem abordado no capítulo anterior. Porém, o texto tenta construir uma ponte entre esses modelos de Contagem quando afirma que “na Análise Combinatória, as permutações dos elementos de uma sequência nada mais são do que um tipo particular de arranjo” (p.171).

4) Entendemos que os modelos usados neste livro para abordar os tópicos importantes no ensino de Análise Combinatória são pertinentes e podem ser instrumentos didáticos relevantes para o professor. Essa característica é verificada principalmente no destaque ao Princípio Multiplicativo e na utilização de problemas do cotidiano usados tanto na formalização dos conceitos quanto nas atividades propostas.

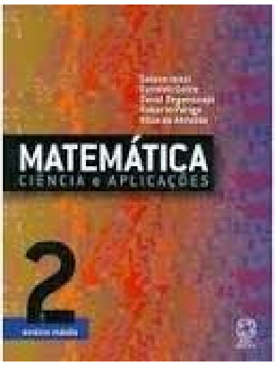
4º Livro:

Matemática: Ciência e Aplicações

Gelson Lezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida.

Atual, São Paulo, 2006.

Figura 4 - Quarto livro investigado.



Fonte: Página da editora Atual[4]

Visão geral:

[4] Disponível em: < http://www.editorasaraiva.com.br/didaticos/>.Acesso em ago.2016.

Há muita formalidade e pouca aplicação em situações reais. Não faz relação ou aborda alguma informação que contenha caráter histórico. Todo o conteúdo é trabalhado em um único capítulo. Os problemas propostos são feitos sempre no final do processo. Em relação ao quantitativo, esta obra foi a que mais apresentou exercícios das pesquisadas neste trabalho. No total, foram 122 questões que abordam conceitos, demonstrações e aplicações das diferentes fórmulas. Além de 42 testes de vestibulares.

1) Podemos afirmar que, em uma situação geral, o autor usa o mecanismo de utilização de problemas em poucas situações vistas. Em alguns momentos, como a definição de Fatorial, nenhum problema é utilizado.

2) Não consideramos que o livro sugira um trabalho colaborativo, pois o excesso de fórmulas e a proposta imediata de questões acabam dificultando as discussões em grupos. Percebe-se que, em algumas passagens, as informações são dadas de forma pronta e acabadas.

3) Nos casos em que o livro usa problemas, percebe-se que a formalização acontece sempre no final. Essa característica é encontrada para tornar mais claro a definição do Princípio Fundamental da Contagem.

Em relação aos diversos tipos de agrupamentos como Arranjo, Permutação e Combinação, a formalização acontece sempre antes dos problemas propostos, ou seja, é apresentada a fórmula, seguida de demonstração, exemplos de exercícios e atividades propostas. Neste ponto, o processo de ensino acaba sendo mecânico onde o professor é o centro do processo.

Por outro lado, percebe-se que existe uma inclinação por parte da proposta do texto em tentar relacionar os agrupamentos ao Princípio Fundamental da Contagem. Segundo Lezzi et al (2006),

> O princípio fundamental da contagem (PFC) é a principal técnica para a resolução de problemas de contagem. Muitas vezes, porém, se só utilizamos o PFC, a resolução desses problemas pode se tornar trabalhosa. Vamos, então, desenvolver métodos de contagem de determinados agrupamentos, baseados no PFC, os quais simplificarão a resolução de muitos problemas.

4) O professor, ao utilizar este livro, está alterando pouco a metodologia de ensino tradicional. Apesar de trazer elementos importantes como a relação entre os

agrupamentos e um quantitativo significativo de exercícios, o livro favorece pouca participação dos alunos na construção dos conceitos.

5º Livro:
Matemática: Aula por Aula
Cláudio Xavier da Silva e Benigno Barreto Filho
FTD, São Paulo, 2005.

Figura 5 - Quinto livro investigado.

Fonte: Página da editora FTD[5]

Visão geral:

Faz uso da história da Análise Combinatória com a contribuição de Pascal na introdução do capítulo. A linguagem é clara, porém com poucos problemas contextualizados e muitos exercícios que visam reproduzir algoritmos de resolução de questões.

1) O autor usa problemas apenas para definir o Princípio Fundamental da Contagem. Os outros problemas identificados aparecem no final do capítulo.

2) Não. O fato de apresentar os conceitos logo no início e pelo excesso de algoritmos pode prejudicar a participação dos alunos durante o processo. Os estudantes acabam sendo sujeitos passivos.

3) A formalização dos conceitos de Análise Combinatória acontece antes dos problemas resolvidos.

4) Apesar de iniciar com uma abordagem histórica, o livro apresenta um modelo tradicional, pois visa à aplicação de fórmulas.

[5] Disponível em: <https://ftd.com.br/didaticos/>. Acesso em ago.2016.

Com base nas análises feitas seguindo a alguns critérios, percebemos que os livros investigados possuem características próprias. O recurso histórico nem sempre é cogitado como um elemento importante no processo.

É notório observar que, em quase todos os exemplares, a construção dos principais conceitos de Análise Combinatória é feita antes ou depois dos problemas propostos. Percebemos que há uma carência nos livros didáticos no que se diz respeito ao ensino de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas.

1.4 - Levantamento Bibliográfico.

Neste item, faremos um resumo qualitativo e quantitativo de como andam as pesquisas em relação ao tema ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio. Essa abordagem é importante, pois é necessário que se tenha dados/informações do que já se tem feito sobre determinado tema. Com base nisso, é possível evitar investigações desnecessárias ou repetidas. Esse tipo de pesquisa permite a melhoria de trabalhos e a abertura de novos conhecimentos, pois identifica quais os espaços que ainda devem ser explorados ou melhorados.

Esse tipo de pesquisa é classificada pelos estudiosos como “Estado da Arte” ou “Estado do Conhecimento”.

Ferreira (2002) define o Estado da Arte como:

> [...] como de caráter bibliográfico, elas parecem trazer em comum o desafio de mapear e de discutir certa produção acadêmica em diferentes campos do conhecimento, tentando responder que aspectos e dimensões vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares, de que formas e em que condições têm sido produzidas certas dissertações de mestrado, teses de doutorado, publicações em periódicos e comunicações em anais de congressos e seminários. (p.258).

Discutindo sobre sua relevância, Silva e Pessoa (2014) evidenciam:

> O Estado da Arte em pesquisa científica se faz importante pra que se tenha referência do que já se tem descoberto sobre determinado assunto,

> evitando que desta forma sejam feitas investigações desnecessárias e avance-se no que ainda se faz necessário investigar. Este tipo de pesquisa possibilita a melhoria e amplitude de novos conhecimentos, fundamentais para uma compreensão consistente sobre a área pesquisada. É desta forma que, identifica-se o que ainda existe de lacuna nas pesquisas e também, mostra-se o que tem sido trabalhado na área, quais os campos mais pesquisados, qual a abordagem metodológica utilizadada, dentre outros aspectos. (p.677).

Inicialmente foi realizado um levantamento de estudos publicados no período de 2003 a 2016 em anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) que trataram do conteúdo.

O ENEM é promovido a cada três anos e tem como objetivo principal a troca de experiências científicas dentro do campo da Educação Matemática. Sua classificação é nível A pela CAPES- Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- o que o torna um evento relevante para a busca de trabalhos. Sua primeira edição ocorreu em 1987 na PUC/SP e, a cada edição, a adesão de pesquisas apresenta um crescimento exponencial.

É importante destacar que existem outros encontros pertinentes que abordam temáticas no âmbito da Educação Matemática. Destacando alguns eventos nacionais, temos: O EBRAPEM (Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática), Congresso Nacional de Avaliação em Educação, ENAPHEM (Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática) e EPMEM (Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática). Em relação aos eventos regionais, destacam-se: Jornada de Estudos em Matemática (PA), Encontro Paraibano de Educação Matemática (PB) e Encontro Alagoano de Ensino de Ciências e Matemática (AL). Além dos congressos e simpósios (locais e regionais) promovidos pelas universidades que possuem cursos de Licenciatura em Matemática e áreas afins.

Para realizar este levantamento, foram coletados os trabalhos nas edições do ENEM compactados nas seguintes características: Comunicações Científicas, Relatos de Experiências. Minicursos e Mesas Redondas. O período escolhido justifica-se pelo quantitativo maior de trabalhos dispostos para consulta pela organização do evento.

O quadro, a seguir, mostra o quantitativo dos trabalhos identificados.

Quadro 1. Quantitativo de estudos sobre o raciocínio combinatório.

Evento	Ano	Local	Tipo\Quantidade		Total
VII ENEM	**2004**	Recife	Comunicações Científicas	1	3
			Relatos de Experiência	2	
			Mesas Redondas	0	
			Minicursos	0	
IX ENEM	**2007**	Belo Horizonte	Comunicações Científicas	3	4
			Relatos de Experiência	1	
			Mesas Redondas	0	
			Minicursos	0	
X ENEM	**2010**	Salvador	Comunicações Científicas	5	9
			Relatos de Experiência	1	
			Mesas Redondas	1	
			Minicursos	2	
XI ENEM	**2013**	Curitiba	Comunicações Científicas	7	7
			Relatos de Experiência	0	
			Mesas Redondas	0	
			Minicursos	0	
XII ENEM	**2016**	São Paulo	Comunicações Científicas	6	10
			Relatos de Experiência	3	
			Mesas Redondas	0	
			Minicursos	1	
Total de Trabalhos					33

Fonte: o autor.

Podemos perceber que a relação de trabalhos publicados vem crescendo consideravelmente. Essa característica está bem clara a partir do X ENEM, onde é possível perceber um aumento superior a 100% em relação ao evento anterior. A diferença ainda é maior quando comparamos o primeiro com o último encontro. Isso é consequência de um interesse maior dos pesquisadores em torno do tema. Desse modo, existe uma tendência no crescimento dos trabalhos.

Souza (2013), dissertando sobre o aumento no número de pesquisas, afirma que:

> Investigando os estudos recentes sobre o raciocínio combinatório e assim montando o Estado da Arte nesta área, pode-se concluir que existe uma produção que vem crescendo não só quantitativamente como de forma qualitativa, trazendo grandes contribuições para o ensino-aprendizagem da Combinatória (p.20).

Após este levantamento, foram feitas leituras atentas com o objetivo de identificar o que vem sendo trabalhado em cada pesquisa.

Ferraz (2003) em seu trabalho *Problemas de Contagem no Ensino Fundamental: "Novas" indagações didáticas* traz uma importante reflexão acerca da necessidade de incluir elementos da Combinatória desde o início do Ensino Fundamental. Essa relevância teve por base um experimento realizado em turmas do Ensino Fundamental, Ensino Médio e com alunos do 3º período de um curso de Licenciatura em Matemática.

Para a análise, a autora coletou 8 exercícios de diferentes livros didáticos adotados pelas escolas públicas e os aplicou aos estudantes dos diferentes níveis. É importante destacar que as questões foram escolhidas de forma heterogênea. Em algumas delas, a resolução é feita com a aplicação direta do Princípio Multiplicativo. Em outras, para a correta resolução, é necessário a ajuda de gráficos, diagramas, desenhos, tabelas, etc.

Os dados coletados na pesquisa mostraram que os alunos da 8ª série e do curso de Licenciatura em Matemática apresentaram dificuldades semelhantes. Além disso, o desempenho dos estudantes do ensino médio é aproximado aos da 5ª série. Segundo Ferraz (2003), esse resultado apresenta uma preocupação relevante, pois "estes alunos, hoje no Normal Médio e Licenciatura em Matemática, possivelmente serão professores do amanhã" (p.5).

Apresentando uma análise geral dos resultados de sua investigação, Ferraz (2003) afirma que:

> No âmbito da educação matemática, é essencial que o educador oportunize o exercício da criatividade, a adoção de estratégias diversificadas na resolução de problemas, incentivando o uso de esquemas gráficos de organização (aqui entendidos como desenho, diagrama, tabelas, árvores etc.), próprios de cada situação e de acordo com o entendimento de cada indivíduo. Tal instrumento, por não ser um "algoritmo rígido", oportuniza o surgimento de caminhos diversos na solução dos problemas, o desenvolvimento do pensamento e do raciocínio independente, autônomo. Assim, os esquemas gráficos de organização, passam a ser um instrumento de ajuda na percepção das relações matemáticas, oportunizando a explicitação da lógica dessas relações. Além disso, vão ajudar o aluno a representar o seu pensamento, pois, no momento em que o aprendiz consegue representar melhor a sua lógica, pode examinar essa sua lógica, e até discuti-la com o outro. Portanto, é função da escola ensejar o

> conhecimento desses esquemas que tem o poder de ampliar o raciocínio. (p.11).

Pinheiro e Sá (2007) em *O Ensino de Análise Combinatória: A Prática Pedagógica Predominante Segundo os Docentes* abordam a maneira como os professores de matemática tratam do tema em suas aulas. Para a realização das análises, os pesquisadores coletaram dados de 20 professores que exercem suas funções em escolas públicas e privadas na cidade de Belém-PA.

A pesquisa teve uma abordagem quantitativa.

A metodologia usada foi a aplicação de alguns questionários de múltipla escolha onde os professores responderiam a proposições referentes a dois temas importantes no campo de atuação docente. O primeiro tema trata das dúvidas percebidas nos alunos em relação a tópicos da Análise Combinatória. O outro tema, não menos importante, é a forma como as aulas são construídas.

Levando em consideração o primeiro bloco, ou seja, a percepção dos professores em relação aos tópicos que os alunos sentiam mais dificuldade, foram dadas as seguintes alternativas: a) Construir a árvore de possibilidades, b) Diferenciar os problemas de arranjo dos problemas de combinação, c) diferenciar os problemas que envolvem apenas o produto de combinações, dos problemas que envolvem a soma das combinações, d) memorizar a fórmula de: Arranjo, Combinação e Permutação, e) identificar um problema de permutação, f) resolver questões de análise combinatória que sejam puras aplicações de fórmulas, g) compreender os textos dos problemas ou das questões, h) calcular do Fatorial, i) diferenciar o uso de Arranjo em agrupamentos e o uso do Princípio Fundamental da Contagem em eventos, j) resolver equações com Fatorial.

No tocante ao segundo tema, acerca do modo de organização de suas aulas, foram destacados os seguintes pontos: a) partindo da definição, seguindo de exemplo, propriedades e exercícios, b) partindo de uma situação-problema para em seguida propriedades e exercícios, c) Modelando situações reais para a aplicação dos conteúdos sobre Análise Combinatória.

Os dados dessa pesquisa mostraram que o item F (1º questionário), ou seja, o item que trata da resolução de problemas que sejam puras aplicações das fórmulas é apresentado como uma das principais dificuldades dos alunos. Em relação à prática dos professores, o item que apresentou maior regularidade foi o que caracteriza o modelo tradicional, ou seja, apresentação da definição, seguida de exemplos, propriedades e exercícios.

Pinheiro e Sá (2007) lançam a discussão que, pelo resultado da pesquisa, os professores ainda usam a estratégia do livro didático como seu principal instrumento de trabalho. Segundo os autores,

> Devemos levar em consideração que a predominância do livro é um importante sinalizador que nossos colegas, independentemente do tempo de atuação, ainda se sentem inseguros para desenvolver um ensino de combinatória que proporcione aos alunos uma forma de utilizar as habilidades do raciocínio combinatório na resolução de problemas reais. (p.6).

Lima e Rocha (2016), em *O que diz o currículo prescrito para combinatória no Brasil? Reflexões sobre o desenvolvimento do conhecimento do horizonte e conhecimento curricular de professores* apresentam um estudo para compreender o modo como a Combinatória é apresentada nos documentos oficiais da Educação Básica.

Conforme Lima e Rocha (2016), os currículos internacionais apresentam diferentes propostas quando orientam o estudo da Combinatória em relação ao Brasil. Na Espanha e nos Estados Unidos, por exemplo, a Combinatória é parte integrante do cálculo de Probabilidades. Neste caso, pode-se afirmar que, nestas propostas, a presença da Combinatória não se encontra de forma delimitada. Além disso, o currículo estadunidense insere o tema apenas no Ensino Médio.

Os documentos verificados na pesquisa de Lima e Rocha (2016) foram:

a) A proposta para a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2016);

b) Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), para os anos finais do Ensino Fundamental;

c) Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000), para o Ensino Médio;

d) As orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2002);

e) As orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006);

f) Os Parâmetros na Sala de Aula de Matemática (PERNAMBUCO, 2013).

As autoras concluem que os documentos abordam diferentes metodologias para o ensino de Análise Combinatória na Educação Básica. Isso significa que as estratégias usadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio apresentam características diversificadas.

Discutindo sobre a forma como os documentos tratam do ensino da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental, Rocha e Lima (2016) evidenciam que:

> Verificou-se nessa sugestão a indicação de práticas utilizando recursos lúdicos, a valorização das estratégias dos alunos e, ainda, a diferença de natureza entre problemas combinatórios. Essas indicações, a depender da valorização atribuída pelo professor a esses documentos, podem servir de fundamento ou de reflexão para o planejamento do trabalho docente. (p.7)

Para os anos finais do Ensino Fundamental, Rocha e Lima (2016) orientam.

> O trabalho com a Combinatória não se desenvolva com a definição de termos e nem com o uso de fórmulas. Dessa forma, o estudo da Combinatória no Ensino Fundamental ajuda o aluno a desenvolver o raciocínio combinatório de maneira que o mesmo possa enfrentar com mais segurança situações-problema mais complexas que dependem de uma contagem sistemática.(p.7)

Em relação ao Ensino Médio, as pesquisadoras destacam que.

> Nesta etapa da escolarização, o estudo da análise combinatória deve possibilitar que o estudante amplie, aprofunde e formalize seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório adquirido ao longo do Ensino Fundamental. O professor deve retomar o assunto, sempre explorando as situações de contexto realístico e por meio de diferentes representações. Por exemplo, diagramas de árvores, tabelas, n-uplas de elementos etc. De maneira bastante intuitiva, as ideias multiplicativas, abordadas ao longo do Ensino Fundamental, devem servir de ponto de partida para que o estudante resolva problemas de contagem, envolvendo as noções de permutação, combinação e arranjo simples. (p.9).

Com base nos dados fornecidos por Rocha e Lima (2016), pode-se afirmar que os documentos oficiais orientam que o ensino de Análise Combinatória deve ser realizado de forma crescente, ou seja, os problemas de contagem devem ser preferencialmente, tratados com dados pequenos que auxiliem os alunos a compreenderem bem o conceito e aplicação do Princípio Multiplicativo nos problemas para que possam, posteriormente, fazer as generalizações dos conceitos empregados.

Uma quantidade relevante de trabalhos que usaram a Resolução de Problemas como ponto de partida para a aprendizagem em Combinatória foi diagnosticada. Em sua maioria, essas pesquisas realizaram intervenções com alunos em diferentes níveis de ensino, inclusive no Ensino Médio. Como consequência, os resultados apresentaram informações importantes que contribuíram para a prática pedagógica do professor de Matemática e o incentivo a novas pesquisas.

Apresentando em sua totalidade os trabalhos identificados, exibimos o quadro 2 a seguir:

Quadro 2. Quantitativo de estudos sobre o raciocínio combinatório com base na Resolução de Problemas.

Autores	**Tema**	**Ano**	**Nível**
Barreto e Borba	Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos dos anos iniciais.	2011	EJA
Pessoa e Santos	Conceitos-em-ação mobilizados por alunos do 5º ano de Escolarização Básica diante de situações combinatórias.	2012	Fundamental
Pessoa e Silva	Invariantes, generalização, sistematização e estratégias bem sucedidas: o ensino da combinatória no 9º ano do Ensino Fundamental.	2012	Fundamental
Pinheiro, Abar e Sá	Aprendizagem de análise combinatória por meio da resolução de problemas como ponto de partida.	2012	Médio

Rosa e Neves	Análise combinatória: uma proposta de ensino usando o princípio fundamental da contagem.	2013	Médio
Tolio e Bisogin	Explorando os princípios aditivo e multiplicativo por meio da metodologia Resolução de Problemas	2016	Médio

Fonte: o autor

Pessoa e Silva (2012) e Pessoa e Santos (2012) trabalharam a estratégia de listagem como um fator importante na compreensão dos invariantes de cada significado do problema, ou seja, os alunos foram incentivados a descobrir a natureza dos diferentes tipos de agrupamentos (Produto Cartesiano, Arranjo, Combinação e Permutação). Após a interverção e a comparação dos resultados do pré-teste e do pós-teste, observaram-se diversos avanços em todos os tipos de problemas propostos.

Pinheiro, Abar e Sá (2012) construíram uma sequência didática com base na Resolução de Problemas. Na sequência, os autores buscaram compreender se a aplicação desse método traria resultados satisfatórios quanto aos conhecimentos básicos de Análise Combinatória a uma turma do Ensino Médio. Uma das principais características dos resultados encontrados foi a importância do uso do Princípio Fundamental da Contagem como um instrumento para superar o modelo tradicional.

Dornelas (2004) no título *Resolução de Problemas em Análise Combinatória: Um Enfoque Voltado para Alunos e Professores do Ensino Médio*, afirma que:

> O Princípio Multiplicativo, como elemento fundamental do pensamento combinatório e das atividades que envolvem contagem, é a "pedra fundamental" de todas as construções cognitivas posteriores, como as Permutações, os Arranjos e as Combinações. O seu desconhecimento ou a sua abordagem superficial trará dificuldades cognitivas importantes na sua aplicabilidade, no processo de resolução de problemas, como também na sua não mobilização em situações possíveis e necessárias. Sua utilização de forma errônea ou incompleta ou o seu desconhecimento trarão ou reforçarão obstáculos no discernimento cognitivo dos demais temas – como Arranjos e Combinações – causando, no aluno – incapacidades que refletirão na impossibilidade de, por exemplo, identificar quando a ordem em que os elementos estão dispostos num agrupamento irá (caso dos arranjos)

> ou não (caso das combinações) influir no total de agrupamentos (subconjuntos) possíveis de um dado conjunto. (p.10)

Os trabalhos analisados mostram que uma frequência maior no uso do Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo por parte dos professores e dos livros didáticos reduz bastante as dúvidas e possibilita uma melhor generalização dos alunos dos diferentes tipos de agrupamentos.

CAPÍTULO 2: SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Podem-se encontrar, em diversos trabalhos publicados, modos distintos de interpretar as diferentes ideias em torno da palavra pesquisa. Cada autor a situa em diferentes campos de estudo.

Conforme Gil (2007, p.17), pesquisa é definida como o

> procedimento racional e sistemático quem tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa desenvolve-se por um processo constituído de várias fases, desde a formulação do problema até a apresentação e discussão dos resultados.

Já para D'Ambrósio (1996),

> O elo entre passado e futuro é o que conceituamos como presente. Se as teorias vêm do conhecimento acumulado ao longo do passado e os efeitos da prática vão se manifestar no futuro, o elo entre teoria e prática deve se dar no presente, na ação, na própria prática. E isso nos permite conceituar pesquisa como elo entre teoria e prática. (p.80)

Em relação à abordagem, D'Ambrósio (2006) afirma que existem duas tendências para a pesquisa: a pesquisa qualitativa e a pesquisa quantitativa.

A pesquisa quantitativa, segundo o autor, utiliza-se de grande número de indivíduos e, para a análise de dados, recorre a muitos recursos estatísticos. Há pouca ou quase nenhuma preocupação em correlatar dados coletados com o pesquisador ou com o ambiente. A pesquisa quantitativa é comumente chamada de pesquisa estatística. A pesquisa qualitativa, também chamada de pesquisa naturalística, tem seu foco na interação do pesquisador com a análise e interpretação dos dados.

De acordo com Engel e Silveira (2009),

> Os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens. Na pesquisa qualitativa, o cientista é ao mesmo tempo o sujeito e o objeto de suas pesquisas. (p.32).

A presente pesquisa foi realizada por meio da elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática cujo objetivo é a aquisição, por parte dos alunos envolvidos, do conceito de Análise Combinatória. Foi utilizada como metodologia a Resolução de Problemas. Apesar de usar dados quantitativos, o foco do trabalho prevaleceu na complexidade do processo de ensino e aprendizagem, portanto, esta pesquisa caracterizou-se como sendo de cunho qualitativo.

Para a elaboração da sequência didática, fez-se necessário um estudo diagnóstico a respeito dos conhecimentos prévios dos alunos em relação ao tema. Essa concepção tem como referência os estudos de Vygotsky acerca da Zona de Desenvolvimento Proximal (Z.D.P.). Barra (2003) afirma que

> A Zona de Desenvolvimento Proximal (Z.D.P.) é caracterizada por Vygotsky (2000, p. 112) como: “a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto […]”. Ao fazer esta afirmação Vygotsky entende que o desenvolvimento real é aquilo que a criança já aprendeu. O nível de desenvolvimento potencial é equivale àquilo que ela atingiu a partir da interação com o Outro, como por exemplo, o professor (p.765-766).

Para esta etapa, convencionou-se definir como Teste prévio ou Análise Diagnóstica.

A pesquisa foi desenvolvida no segundo semestre de 2016 em uma turma do segundo ano do ensino médio de uma escola pública, localizada na parte alta da cidade de Maceió, especificamente no bairro do Dubeaux Leão. O seu funcionamento está subordinado a 13ª Coordenadoria Regional de Ensino da Secretaria Estadual de Educação de Alagoas - SEDUC.

A Análise Combinatória, segundo a Secretaria de Educação do Estado de Alagoas, é um conteúdo matemático da segunda série do ensino médio.

A escola possui uma estrutura antiga e sofre com salas muitos quentes e com pouca ventilação. Seus banheiros apresentam necessidade de reparos com urgência. A quadra de esportes é coberta e o refeitório é pequeno para o quantitativo de alunos.

O corpo docente é bastante diversificado. Em seu quadro geral, apresenta professores efetivos e contratados através de processo seletivos simples realizados pela Secretaria de Educação. Isso é um dos inúmeros problemas, pois os professores contratados por tempo determinado apresentam carga horária específica que impossibilita a realização de reuniões e planejamentos, por exemplo.

Em alguns casos, devido a este problema, há uma rotatividade entre professores no mesmo ano letivo.

No último IBED, a escola não conseguiu atingir sua meta.

Figura 6 - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) da escola da qual a turma pesquisada está inserida.

	Ideb Observado						Metas Projetadas							
Escola	2005	2007	2009	2011	2013	2015	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019	2021
	3.0	2.9	3.3	3.3	3.3	3.8	3.0	3.2	3.4	3.8	4.2	4.5	4.7	5.0

Fonte: Página do IDEB[6]

A turma investigada apresenta um total de 50 alunos matriculados. Porém, segundo as informações dos professores, apenas 37 alunos estão indo assistir às aulas. Como estamos tratando de uma pesquisa com alunos que, em sua maioria, são menores de idade e usaremos recursos tecnológicos como câmera fotográfica e materiais disponibilizados pela escola precisaram solicitar a autorização dos responsáveis. Sendo assim, apresentamos em anexo os documentos compartilhados com a direção da escola e com os pais ou responsáveis dos alunos.

Durante o período de realização desta pesquisa, a escola estava promovendo a semana de avaliações bimestrais e um projeto interdisciplinar. Por conta disso, os horários das aulas foram modificados para atender à demanda. Para não interferir na programação escolar e nos estudos específicos de cada disciplina, foram propostos aos alunos encontros em horários e dias contrários às aulas. Do total de 50 alunos matriculados, 30 concordaram com a sugestão.

A turma investigada possui suas aulas regulares no turno matutino.

Quadro 3. Distribuição dos encontros.

ENCONTRO	DATA	ATIVIDADE	HORÁRIO
Primeiro Encontro	08\08\2016	Diálogo com a turma acerca das etapas da pesquisa.	Início: 08h00min Término: 09h00min

[6] Disponível em: < http://ideb.inep.gov.br/>. Acesso em set.2016.

Segundo Encontro	22\08\2016	Aplicação do Teste Análise Diagnóstica.	Início: 13h00min Término: 15h00min
Terceiro Encontro	29\08\2016	P.F.C. e Fatorial Proposição e resolução de exercícios	Início: 13h00min Término: 17h00min
Quarto Encontro	30\08\2016	Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples. Proposição e resolução de exercícios.	Início: 13h00min Término: 17h00min

Fonte: o autor

2.1 - Teste-Análise Diagnóstica.

Com o propósito de identificar os saberes ou as informações prévias que os alunos possuíam acerca do tema, uma lista de exercícios foi aplicada na turma. É importante destacar que, antes desta atividade, nenhuma referência específica sobre o conteúdo foi realizado.

Quadro 4 - Questões usadas no teste diagnóstico.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRANDO: DIOGO PINHEIRO DA SILVA

Perguntas:

1) O que você entende por Análise Combinatória?

2) Que palavras ou cálculos te fazem lembrar do termo Análise Combinatória?

3) De quantas maneiras diferentes os amigos Marcos, Marcela, Mário e Maria podem se sentar em um banco com quatro lugares?

4) De quantas maneiras diferentes os amigos Ana, Diego, Fábio, Luiz e Carla podem se sentar em uma banco com cinco lugares ?

5) Com os algarismos 4,5 e 6, quantos números de dois algarismos distintos podemos formar?

6) De quantas maneiras diferentes podemos sortear três passagens aéreas para Maceió entre os seis funcionários de uma empresa?

Fonte: teste diagnóstico, 2016.

Figura 7 - Realização do teste diagnóstico.

Fonte: teste diagnóstico, 2016.

Apresentaremos um comentário geral em relação às questões usadas no teste diagnóstico.

Questão 01: O que você entende por Análise Combinatória?

Questão 02: Que palavras ou cálculos te fazem lembrar o termo Análise Combinatória?

As questões 01 e 02 foram construídas com o objetivo de verificar se os alunos conseguiriam conceituar termos ou expressar situações e cálculos que estivessem de alguma forma relacionada com Análise Combinatória.

Questão 03: De quantas maneiras diferentes os amigos Marcos, Marcela, Mário e Maria podem se sentar em um banco com quatro lugares?

O objetivo da questão 03 foi identificar se os alunos possuíam habilidades em resolver problemas envolvendo pelo menos uma das três situações: Contagem Direta, Princípio Multiplicativo (P.F.C.) ou Permutação Simples.

Possíveis respostas:

Contagem Direta: Chamemos Marcos = x, Marcela = y, Mário = z e Maria = w.

xyzw	yxzw	zywx	wyxz	
xywz	yxwz	zyxw	wyzx	
xzwy	yzxy	zwyx	wxyz	Total = 24
xzyw	yzyx	zwxy	wxzy	
xwzy	ywxz	zxwy	wzxy	
xwyz	ywzx	zxyw	wzyx	

Princípio Multiplicativo (P.F.C.):

$$\frac{4 \text{ possibilidades}}{1^{\underline{o}} \text{ lugar}} \text{ x } \frac{3\, possibilidades}{2^{\underline{o}}\, lugar} \text{ x } \frac{2 \text{ possibilidades}}{3^{\underline{o}} \text{ lugar}} \text{ x } \frac{1 \text{ possibilidade}}{4^{\underline{o}} \text{ lugar}} = 24$$

Permutação Simples:

P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24

Questão 04: De quantas maneiras diferentes os amigos Ana, Diego, Fábio, Luiz e Carla podem se sentar em um banco com cinco lugares?

O foco da questão 04 foi investigar se os alunos compreendem diante da grande quantidade de agrupamentos, que o processo de Contagem Direta nem sempre é a melhor alternativa.

Possíveis respostas:

Princípio Multiplicativo (P.F.C.):

$$\frac{5 \text{ possib.}}{1^{\underline{o}} \text{ lugar}} \text{x } \frac{4\, possib.}{2^{\underline{o}}\, lugar} \text{ x } \frac{3 \text{ possib.}}{3^{\underline{o}} \text{ lugar}} \text{ x } \frac{2 \text{ possib.}}{4^{\underline{o}} \text{ lugar}} \text{ x } \frac{1 \text{ possib.}}{5^{\underline{o}} \text{ lugar}} = 120.$$

Permutação Simples:

P_5= 5! = 5.4.3.2.1 = 120.

Questão 05: Com os algarismos 4,5 e 6, quantos números de dois algarismos distintos podemos formar?

O objetivo da questão 05 foi averiguar se os estudantes conseguem resolver situações onde o modelo dos agrupamentos é composto por parte de um todo (subconjuntos) em que a ordem e a escolha dos elementos geram novas possibilidades.

Possíveis respostas:

Contagem direta:

45	46	56	Total = 6
54	64	65	

Princípio Multiplicativo:

$\frac{\text{3 possibilidades.}}{\text{1º número}}$x $\frac{2\, possibilidades.}{2º\, número}$ = 3 x 2 = 6.

Arranjo Simples:

Chamemos n = 3 e p = 2.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3!}{1} = \frac{3\,.2\,.1}{1} = \frac{6}{1} = 6.$$

Questão 06: De quantas maneiras diferentes podemos sortear três passagens aéreas para Maceió entre os seis funcionários de uma empresa?

O objetivo da questão 06 foi averiguar se os estudantes conseguem resolver situações onde o modelo dos agrupamentos é composto por parte de um todo (subconjuntos) em que a ordem e a escolha dos elementos NÃO geram novas possibilidades.

Possíveis respostas:

Princípio Multiplicativo (P.F.C.):

Chamemos cada funcionário por um número. Por exemplo, funcionário 1 = 1.

Funcionários = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$\frac{\text{6 possibilidades}}{\text{1ª passagem}}$ x $\frac{5\, possibilidades}{2ª\, passagem}$ x $\frac{\text{4 possibilidades}}{\text{3ª passagem}}$ = 6. 5. 4 = 120.

Os agrupamentos 123, 132, 213, 231, 312 e 321, por exemplo, representam o mesmo grupo. Logo, cada agrupamento está repetido 6 (seis) vezes. Sendo assim, temos:

$\frac{120}{6}$ = 20.

Combinação Simples:

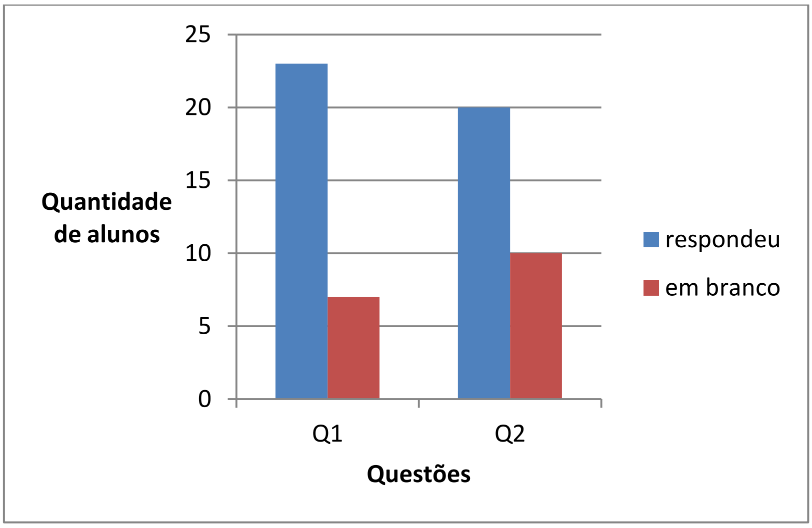
Chamemos n = 6 e p = 3

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!3!} = \frac{6.5.4}{3!} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = \frac{120}{6} = 20.$$

2.2 - Resultados do Teste.

Após a aplicação do teste diagnóstico, foram levantados os resultados para fazer uma avaliação acerca dos conhecimentos prévios dos alunos. Os exercícios foram recolhidos e levados para que houvesse uma correção minuciosa e destacar os pontos relevantes. Como as questões envolvidas apresentaram ideias de conceitos gerais e mais específicos sobre a Análise Combinatória, apresentaremos os dados em 2 (dois) gráficos distintos.

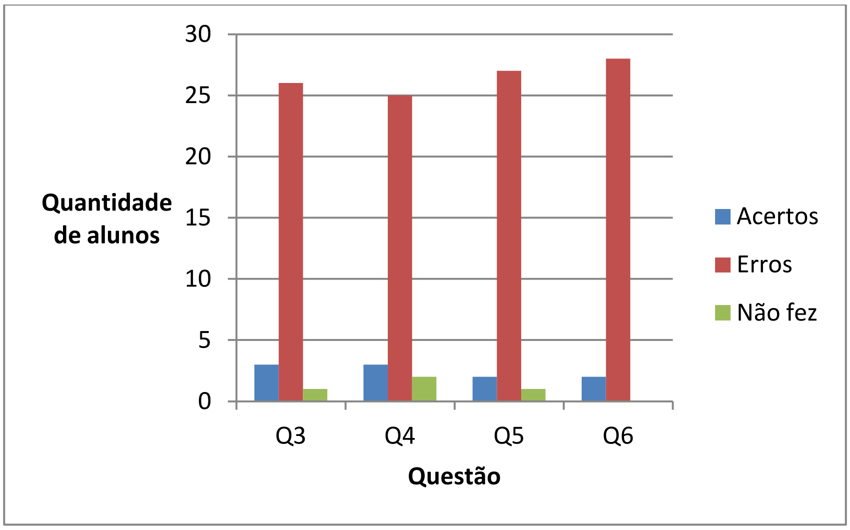
Gráfico 1 - Desempenho dos alunos nas questões 01 e 02 do teste diagnóstico.



Fonte: teste diagnóstico, 2016.

Em relação aos dados do gráfico 1, pode-se notar que a maioria dos sujeitos identificados demonstraram interesse em resolver as questões. Esse fato fica evidente quando comparamos o número de participantes que tentaram resolver em relação aos que deixaram em branco. Porém, analisando os registros das respostas, não foi possível confirmar categoricamente se os discentes estavam se relacionando ao tema específico (análise combinatória) ou a ciência Matemática como um todo. Não foram apresentadas definições, apenas palavras soltas como “vezes”, “combinar”, “contar”, “mais”, “colocar”, “dividir”.

Gráfico 2 - Desempenho dos alunos nas questões 03,04,05 e 06 do teste diagnóstico.

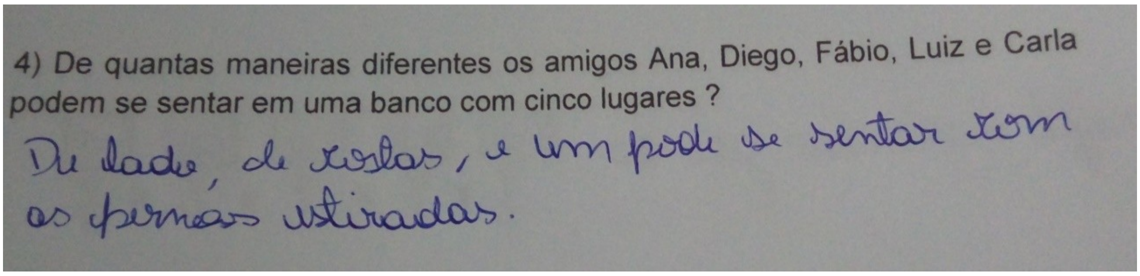


Fonte: teste diagnóstico, 2016.

Levando em consideração as informações do gráfico 2, é notório o número elevado de respostas erradas em relação às outras variáveis observadas. É importante destacar que o elevado número de erros está presente em praticamente todas as competências básicas em relação à Análise Combinatória presente em cada questão. Nas questões 5 e 6 , esse número de erros atinge uma marca superior a 25 alunos de um total de 30.

Os erros encontrados foram classificados da seguinte forma: (a) incompreensão do enunciado da questão, (b) conhecimento superficial do P. F. C, (c) desconhecimento do P.F.C. e (d) não atentar para o fato de que a ordem dos elementos poderá ou não produzir agrupamentos distintos.

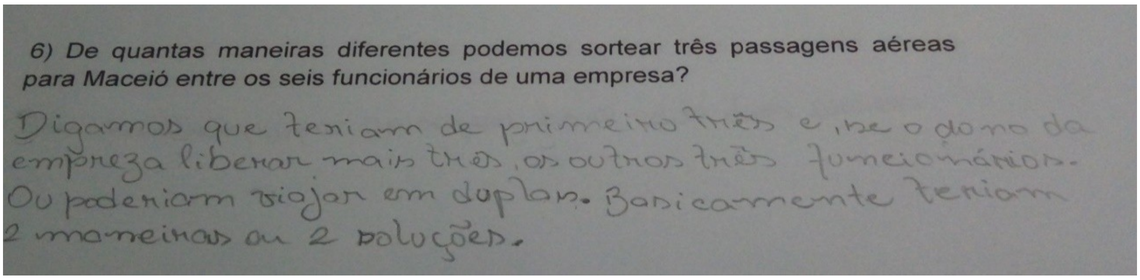
Figura 8 - Incompreensão do enunciado da questão.


4) De quantas maneiras diferentes os amigos Ana, Diego, Fábio, Luiz e Carla podem se sentar em uma banco com cinco lugares ?

De lado, de costas, e um pode se sentar com as pernas estiradas.

Fonte: Teste Diagnóstico, 2016.

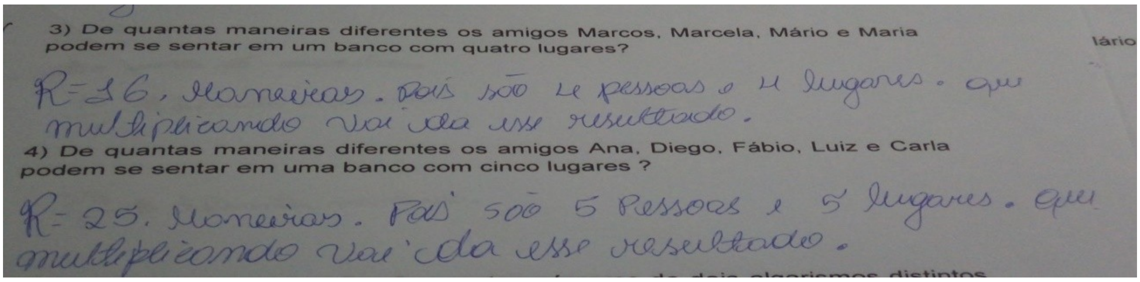
Figura 9 - Conhecimento superficial do P.F.C.


6) De quantas maneiras diferentes podemos sortear três passagens aéreas para Maceió entre os seis funcionários de uma empresa?

Digamos que teriam de primeiro três e, se o dono da empreza liberar mais três, os outros três funcionários. Ou poderiam viajar em duplas. Basicamente teriam 2 maneiras ou 2 soluções.

Fonte: Teste Diagnóstico, 2016.

Figura 10 - Desconhecimento do P.F.C.


3) De quantas maneiras diferentes os amigos Marcos, Marcela, Mário e Maria podem se sentar em um banco com quatro lugares?

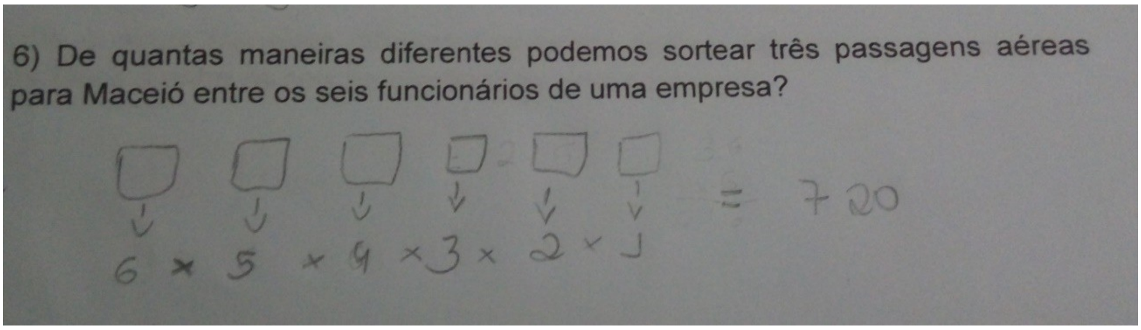
R=16, maneiras. Pois são 4 pessoas e 4 lugares. que multiplicando vai da esse resultado.

4) De quantas maneiras diferentes os amigos Ana, Diego, Fábio, Luiz e Carla podem se sentar em uma banco com cinco lugares ?

R= 25. Maneiras. Pois são 5 Pessoas e 5 lugares. que multiplicando vai da esse resultado.

Fonte: Teste Diagnóstico, 2016.

Figura 11 - Não atentar para o fato de que a ordem dos elementos poderá ou não produzir agrupamentos distintos.


6) De quantas maneiras diferentes podemos sortear três passagens aéreas para Maceió entre os seis funcionários de uma empresa?

$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Fonte: Teste Diagnóstico, 2016.

2.3 - Proposta de uma Sequência Didática.

A concepção central estruturada nesta sequência didática é proporcionar situações favoráveis para que os estudantes assimilem os conceitos básicos de análise combinatória no segundo ano do ensino médio, possibilitando também a identificação de características ou obstáculos no processo que possam surgir.

Para isso, optou-se por dividi-la em duas partes tendo como ponto de partida a exploração do Princípio Fundamental da Contagem e guiada pela metodologia do ensino-aprendizagem-avaliação da matemática através da resolução de problemas. Essas escolhas tiveram como base de sustentação, preferencialmente, os estudos feitos por Walle (2001), Pinheiro e Sá (2007) e Dornelas (2004) discutidos no levantamento bibliográfico.

Walle (2001) defende a utilização da resolução de problemas como o principal instrumento para o ensino da matemática. Conforme seu estudo, essa metodologia torna-se relevante, pois o processo é centrado no aluno, levando em consideração suas linguagens e experiências próprias.

Pinheiro e Sá (2007) e Dornelas (2004) recomendam que métodos de ensino de análise combinatória tenham como foco o Princípio Fundamental da Contagem. Segundo os autores, ele funciona como elemento fundamental para o desenvolvimento do pensamento combinatório e construções cognitivas posteriores, como a compreensão melhor dos tipos de agrupamentos.

Após essa breve justificativa, apresentaremos a sequência dividida em duas etapas.

Primeira etapa – Apropriação do conceito de Princípio Fundamental da Contagem.

- Proposição do primeiro Problema Gerador.

Todos os sujeitos dessa pesquisa estavam participando de um processo seletivo para contratação temporária de aprendizes para a área administrativa de uma empresa na região onde estudam. Um dos ciclos finais deste processo era a contratação de uma conta bancária para receber os vencimentos. Diante disso, o primeiro Problema Gerador buscou a utilização deste link como forma de aproximar os estudantes ao objeto matemático estudado. Sendo assim, tentou-se incorporar, inicialmente, um desafio que possuía uma familiaridade com o mundo prático dos discentes, ou seja, uma conexão com o mundo ao seu redor, conforme modelo exibido no quadro 5.

Quadro 5 - Primeiro problema gerador

Joana é uma garota de 18 anos. No início do ano de 2016, ela foi aprovada em uma importante universidade de sua cidade através do ENEM. Nesse mesmo período, Joana acabou sendo convocada para um emprego que havia feito uma entrevista recentemente. Joana decidiu aceitar o emprego e fazer seu curso superior ao mesmo tempo. Para isso, foi necessário abrir 1 conta corrente em um banco público para poder receber seu salário. A estudante visitou o banco "Juros Baixos" e foi conversar com o gerente.

Fonte: http://creditoedebito.com.br/bancos/como-abrir-uma-conta-corrente/

Para abrir uma conta neste banco, o gerente afirmou que Joana teria que montar uma senha com 4 dígitos sem nenhum número se repetir tendo como base os seguintes números: 1,2, 3 e 4.

Joana deveria ter apenas uma senha, mas sabia que poderia escolher entre várias determinadas pelo gerente. Sabendo disso, qual a quantidade total de senhas possíveis?

Fonte: sequência didática, 2016.

- Leitura e resolução do problema gerador pelos grupos;
- Apresentação dos registros de cada grupo no quadro;
- Discussão acerca das respostas de cada grupo;
- Compreensão de uma resposta definitiva para o Problema Gerador;

- Apresentação formal do conceito do P.F.C.;
- Apresentação formal do conceito de Fatorial;
- Proposta e resolução de novos problemas.

Quadro 6 - Primeira lista de exercícios.

Problemas Propostos

1) Thiago possui 3 blusas diferentes e 2 calças diferentes. De quantas maneiras ele poderá escolher uma blusa e uma calça para se vestir?

2)) Um estudante possui um livro de Matemática, um de Biologia, um de Física, um de Química, um de história e um de Geografia. Desejando organizá-los lado a lado em uma estante, de quantos modos poderá fazê-lo?

a) O primeiro livro seja de Matemática.

b) O primeiro livro seja de Matemática e o segundo de Física.

c) Os dois primeiros livros sejam os de Matemática e Física.

d) Os livros de Matemática e Física fiquem juntos.

3) No Brasil, os carros são emplacados assim que saem da loja. O modelo brasileiro compreende 3 letras seguidas de 4 números, conforme o exemplo abaixo:

Fonte: https://www.google.com.br/search?q=placas+de+automovel+no+brasil

Com base nessas informações, resolva:

a) Quantas placas podem ser formadas neste modelo?

b) Quantas placas podem ser formadas neste modelo, desde que não tenha repetição de números e letras?

c) Mantendo as letras NQC, determine a quantidade de placas formadas.

d) Mantendo os números 0876, determine a quantidade de placas formadas com letras distintas.

4) Calcule:

a) 5!

b) 6! + 4!

c) $\frac{10!}{7!}$

d) $\frac{9!+8!}{5!}$

Fonte: sequência didática, 2016.

Segunda etapa – Apropriação do conceito de Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples.

- Proposição do segundo Problema Gerador.

Partindo do pressuposto de que, na etapa anterior, os alunos tenham compreendido a ideia do Princípio Multiplicativo, o segundo problema gerador trata da percepção acerca da natureza dos agrupamentos, representado pelo quadro 7.

Quadro 7 - Segundo problema gerador.

André, Bruna, Carla e Danilo são amigos de infância. Eles se encontram todos os meses para colocar o assunto em dia e conversar sobre projetos profissionais. Bruna, com uma visão empreendedora, lançou a proposta dos amigos abrirem uma empresa e virarem sócios. Todos os amigos concordaram com a ideia e começaram a pensar no tipo de negócio que daria mais lucro. Os amigos precisariam criar um nome para a empresa e buscar recursos para isso.

Fonte: http://www.mbsdigital.com.br/blog/vantagens-de-abrir-uma-empresa-na-internet/

Danilo sugeriu que seria interessante que o nome da empresa tivesse as iniciais de 3 (três) dos quatro amigos sem repetição, por exemplo: ABC , ACB , ACD, ADC. Segundo Danilo, esse modelo ficaria mais fácil para os clientes assimilarem.

Por outro lado, Carla afirmou que seria necessário uma comissão com 3 pessoas para ir ao contador conversar sobre as finanças da empresa. Essas comissões também seriam com as iniciais dos nomes dos amigos.

Sabendo disso, determine:

1) Quantos nomes diferentes esses amigos poderiam criar para seu novo negócio?
2) Quantas comissões poderiam ser montadas para tratar dos assuntos financeiros?

Fonte: sequência didática, 2016.

- Leitura e resolução do problema gerador pelos grupos;
- Apresentação dos registros de cada grupo no quadro;
- Discussão acerca das respostas de cada grupo;
- Compreensão de uma resposta definitiva para o problema gerador;
- Apresentação formal do conceito de Arranjo Simples associando ao conceito de P.F.C.;
- Apresentação formal do conceito de Combinação Simples associando ao conceito de P.F.C.;

- Apresentação formal do conceito de Permutação Simples associando ao conceito de P.F.C.;
- Proposta e resolução de novos problemas.

Quadro 8 - Segunda lista de exercícios.

Questões Propostas
1) De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares? 2) Um grupo é formado por 8 alunos. Considerando esses alunos, quantas duplas distintas podem ser formadas? 3) Em uma competição de atletismo, 8 velocistas disputam a prova final dos 100m rasos, na qual os 4 primeiros colocados irão ao pódio. De quantas maneiras distintas o pódio poderá ser composto? 4) Dispondo-se de abacaxi, acerola, goiaba, laranja, maçã, mamão e melão, calcule de quantos sabores diferentes pode-se preparar um suco usando-se três frutas distintas? 5) Na palavra NORTE, quantos anagramas podem ser formados? Quantos começam com vogal?

Fonte: sequência didática, 2016.

CAPÍTULO 3: EXPERIMENTAÇÃO.

Neste capítulo, descreveremos o processo de aplicação de uma sequência didática para o ensino de análise combinatória utilizando a metodologia do ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas. Convencionou-se a divisão desta sequência em duas partes, conforme mencionado no capítulo anterior deste trabalho. Portanto, iremos descrever os passos seguindo essa sugestão.

Para a descrição das etapas desta sequência, foram utilizados fotos, áudios e vídeos da turma como fonte de ajuda para detectar os detalhes relevantes ao processo de aplicação e reproduzi-los nesta etapa da pesquisa.

Na turma em evidência, 37 alunos estavam matriculados regularmente e, dentre eles, 30 retornaram com a autorização dos pais e/ou responsáveis. Porém, 20 alunos em média compareceram aos dois encontros finais. Portanto, iremos utilizar esse quantitativo (20) para a construção dos grupos e discussão dos resultados.

3.1. Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.)

Inicialmente, os alunos foram recebidos pontualmente no horário combinado. Em seguida, foi solicitado que eles se acomodassem na sala de aula conforme sua preferência e afinidades. Por conta da estrutura antiga das salas de aulas que possuíam pouca ventilação, os estudantes acomodaram-se nas regiões próximas aos ventiladores e janelas próximas.

Posteriormente, foi solicitada a constituição de grupos entre os presentes. Por conta do quantitativo de 20 pessoas, ficou pertinente a formação de cinco (5) grupos com quatro (4) participantes cada um.

Neste momento, houve certo desconforto dos alunos na formação dos grupos, pois alguns alegaram que tinham preferência em relação a colegas mais próximos e outros não apresentaram nenhuma rejeição em relação a essa problemática. Diante disso, ficou acordado que o levantamento dos nomes seria feito por ordem alfabética.

Foi feita a opção em não citar nominalmente os componentes das equipes, mas sim o tipo de grupo, a saber: grupo1, grupo2, grupo3, grupo4 e grupo5.

Os grupos foram formados e localizados no espaço geral da sala de aula. Neste momento, foi oferecida aos alunos uma folha impressa contendo o primeiro problema gerador.

Após o recebimento da folha impressa por cada aluno do primeiro problema gerador, foi feita a indicação de uma leitura pausada e atenta de forma individual. Para isso, houve o comprometimento de 10 minutos dados para que todos pudessem realizar a apreciação. O ambiente refletido pelos participantes era de um silêncio absoluto associado às expressões de curiosidades e de dúvidas à medida que a leitura evoluía. Notou-se que, em determinados instantes, alguns demonstraram interesse em verbalizar indagação sobre parte do problema proposto, mas os mesmos acabaram inibindo essa ação.

Assim sendo, houve a necessidade de intervir no processo para deixar claro que ali era um momento de troca de informações e discussões e que a atividade proposta não tinha como objetivo pontuar ou quantificar o conhecimento com a finalidade de aprovação ou reprovação, segundo as práticas pedagógicas vigentes na maioria das instituições de ensino. Os estudantes entendiam que as atividades propostas apresentariam como finalidade a promoção para séries seguintes e que o erro era entendido como algo negativo e punitivo.

A interação, após essa intervenção, melhorou e uma mudança começou a ser percebida, mesmo que de forma pontual e modesta. Por exemplo, alguns começaram a inquirir sobre o sinônimo de algumas palavras presentes no texto como “concomitantemente” e “geradas”.

Posteriormente a esta etapa, os participantes foram convidados a ler o problema em conjunto com os integrantes do grupo. As cadeiras acabaram sendo organizadas em forma de um círculo limitado a cada ajuntamento. Neste momento, percebemos que os discentes sentiram-se mais à vontade em realizar qualquer questionamento, pois estavam juntos a seus pares. A leitura fluiu mais facilmente e as tentativas discretas de resolução do enunciado começaram a ser apontadas em algumas equipes.

O período entre a leitura individual e a leitura em grupo mostrou um avanço qualitativo em relação aos posicionamentos sobre a forma como o enunciado seria respondido. Essa forma colaborativa acarretou avanços importantes nas interações.

Após esse momento, os grupos reduziram bastante as discussões e, em alguns deles, os integrantes estavam inquietos. Diante disso, o pesquisador, mediador do processo, precisou intervir novamente com a finalidade de diagnosticar a causa.

Pode-se concluir que os membros das equipes estavam esperando a apresentação do assunto. Os alunos, quase em sua totalidade, apresentaram forte rejeição na leitura do primeiro problema gerador. Segundo um dos componentes, "não tinha como resolver uma lista sem sabe do assunto primeiro"

É neste momento que fica evidente como o modelo da escola tradicional ainda é presente e difícil de ser superado, pois os docentes e discentes entram em sala de aula com funções determinadas e pouco variáveis, pois o padrão normativo de ensino e aprendizagem ou o contrato didático no qual o professor é o centro do processo ainda é predominante.

Com o intuito de motivá-los a resolver o problema, o pesquisador iniciou uma leitura centrada e em voz alta do problema gerador, discutindo grupo a grupo as dúvidas e abrindo caminhos para despertar uma tentativa de resolução com base em impressões iniciais sem que houvesse, necessariamente, a apresentação formal do conteúdo matemático. Este ponto foi importante, pois ativou o desejo de resolver a atividade proposta e possibilitou um pouco a desconstrução do contrato didático tradicional.

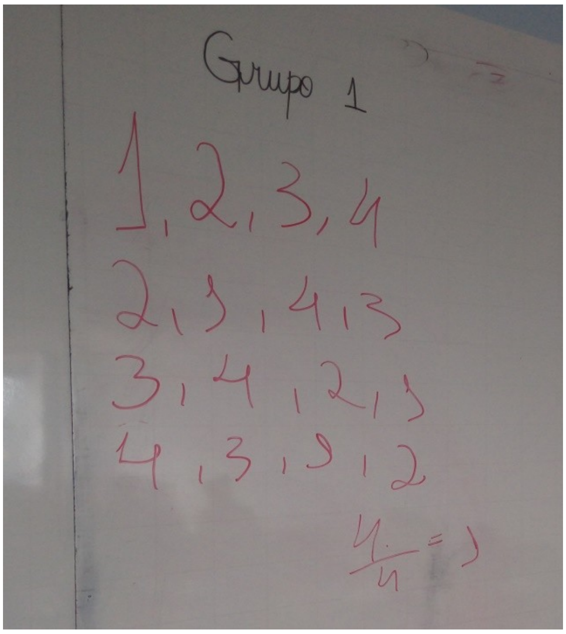
Essa estratégia de intervenção foi adotada sempre que houvesse a necessidade de adequação à nova metodologia, ou seja, ir de equipe em equipe tomando controle da discussão e lançando questionamentos com o objetivo de convencê-los a continuar resolvendo os problemas propostos.

O período imediato a esta fase foi a exibição no quadro das resoluções de cada equipe do problema colocado. Assim sendo, cada equipe foi desafiada a eleger um membro para ser o representante. Não teve exigência no critério de escolha. É importante destacar que diversas variáveis foram consideradas por eles para essas escolhas, como: melhor dicção, letra mais legível, mais comunicativo, mais alto, etc.

Os representantes foram convocados um a um a exibirem suas respectivas respostas na lousa. O quadro foi dividido em cinco partes iguais numeradas de 1 a 5. Cada espaço foi ocupado pela solução das equipes. Os primeiros minutos foram penosos, pois os estudantes estavam receosos com a possibilidade de um grupo perceber o erro do outro e ensaiaram um recuo. Em resumo, o espírito competitivo, presente fortemente na referência tecnicista, poderia estar influenciando neste instante, pois era a primeira vez que eles eram sujeitos ativos no processo de aprendizagem. Porém, com o desenvolvimento das respostas, eles colocaram este problema de lado e passaram a encarar a situação com maior naturalidade. Enquanto o representante apresentava as respostas, cada grupo correspondente também participava acrescentando, retirando ou mantendo elementos. Assim, alguns resultados acabaram sendo refeitos ali mesmo. O que possibilitou um flagrante rico na troca de informações.

Abaixo, seguem as soluções exibidas e as primeiras impressões:

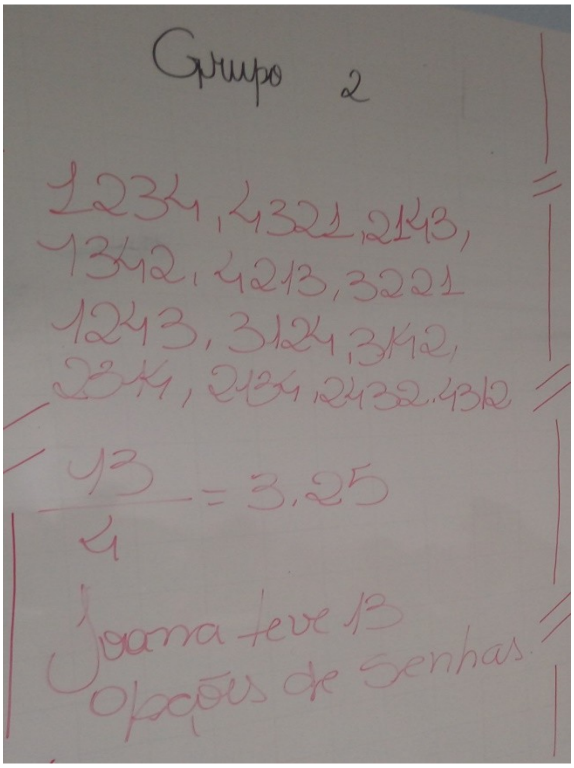
Figura 12 - Solução na lousa do grupo 1 na primeira etapa.



Fonte: o autor

A equipe 1 apresentou a resolução do problema através de contagem direta. É possível perceber que houve uma tentativa em descobrir todas as combinações possíveis. Percebe-se, por outro lado, que os participantes tentaram construir combinações fixando o primeiro número, ou seja, determinaram as combinações começando por 1 – (1, 2, 3, 4), por 2 – (2, 1, 4,3), por 3 – (3, 4, 1, 2) e por 4 - (4, 3, 1, 2). Porém, não atentaram para as diversas possibilidades que existem para cada número. Por exemplo, para as combinações que iniciam por 1, teríamos a seguinte relação: 1234,1243,1324,1342,1423 e 1432

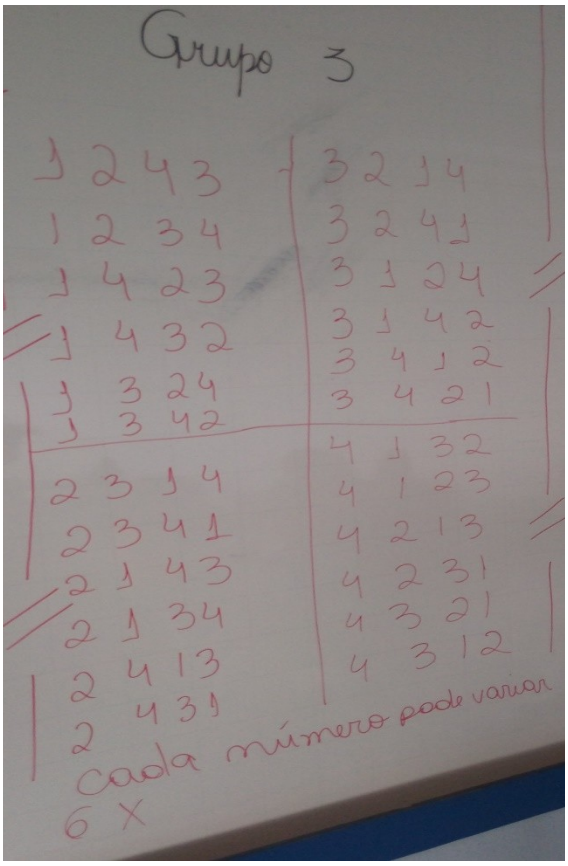
Figura 13 - Solução na lousa do grupo 2 na primeira etapa.



Fonte: o autor

É factível identificar, inicialmente, que turma 2 usou uma linha de raciocínio similar à primeira turma, ou seja, o quantitativo final de possibilidades foi encontrado com base na busca de todas as alternativas possíveis uma a uma. Porém, não existiu uma regularidade na construção das senhas, por exemplo, existiram 3 possibilidades para senhas com início 1 – (1,2,3,4) , (1,3,4,2) e (1,2,4,3) , 4 para as senhas com início 2 – (2,3,1,4) , (2,1,3,4) , (2,4,3,2) e (2,1,4,3), 3 para as senhas com início 3 – (3,1,2,4) , (3,1,4,2), (3,2,2,1) e 3 para as senhas com início 4 – (4,3,2,1), (4,2,1,3), (4,3,1,2). Além disso, percebe-se o desalinho na apresentação dos resultados em relação ao grupo anterior. A alternativa (3,2,2,1) mostra certa fragilidade da equipe na compreensão das informações do problema, pois as senhas não poderiam apresentar dígitos repetidos. Um fator relevante discernido é a exibição das escolhas de forma quantitativa, ou seja, 13 opções de senhas. Essa conclusão, apesar de não ser o valor correto, mostra a compreensão por parte dos integrantes em estimar numericamente o resultado.

Figura 14 - Solução na lousa do grupo 3 na primeira etapa.

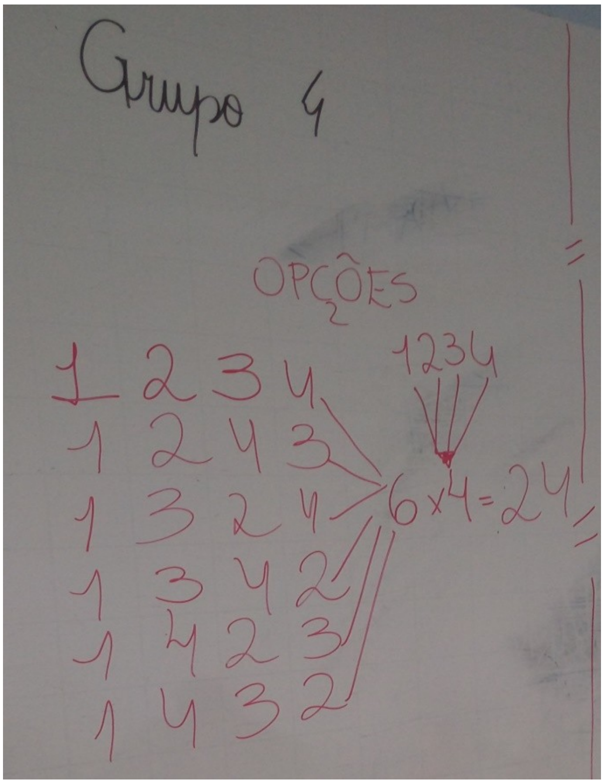


Fonte: o autor

Em conformidade com os dados verificados, o grupo 3 apresentou as informações em blocos onde cada um tem o primeiro dígito fixo. Essa característica fica nítida quando percebemos que há uma separação (por linhas) entre esses elementos. Por exemplo, o primeiro bloco da esquerda apresenta todas as senhas que podem ser construídas tornando o número 1 como prioridade: (1,2,4,3) , (1,2,3,4) , (1,4,2,3) , (1,4,3,2) , (1,3,4,2) e (1,3,2,4).

É importante destacar que o grupo chegou a um modelo ou padrão que permitiu o levantamento das diversas alternativas. Essa passagem pode ser verificada quando se observa o fato de que “cada número pode variar 6x”. O valor numérico total de possibilidades não foi mostrado.

Figura 15 - Solução na lousa do grupo 4 na primeira etapa.

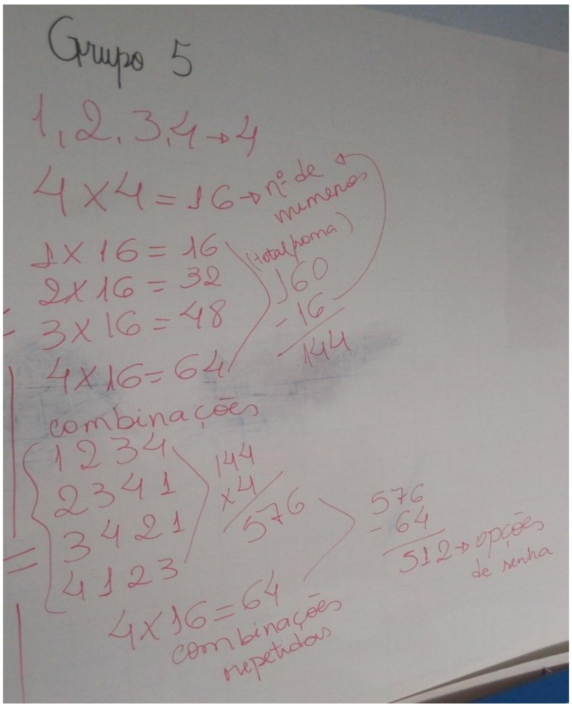


Fonte: o autor

O penúltimo grupo mostrou uma maturidade maior acerca da percepção de um padrão capaz de servir como referência pertinente para a obtenção dos outros resultados. Fica visível que um projeto piloto foi desenhado pelos alunos. Esse projeto é apontado na primeira relação quando todas as possibilidades de senhas iniciadas pelo dígito 1 são montadas – (1,2,3,4) , (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3) e (1,4,3,2) e, em seguida, uma generalização das outras possibilidades é exposta através da multiplicação entre dois números inteiros, quer dizer, 6 x 4.

O número 6 representa a quantidade de senhas diferentes que podem ser formadas tendo como primeiro elemento sempre o mesmo número e 4 representa a quantidade desses elementos. Essa passagem fica notória quando, para cada um desses valores (6 e 4), são atribuídos traços fazendo insinuação à ideia imaginada.

Figura 16 - Solução na lousa do grupo 5 na primeira etapa.



Fonte: o autor

É possível aferir que o grupo 5, último a registrar as soluções na lousa, apresentou dados confusos e com pouca análise inicial. Porém, é importante destacar, que em algum momento o grupo compreende que existem senhas com elementos repetidos e senhas sem elementos repetidos. Essa identificação é clara quando eles determinam a quantidade de combinações gerais (576) e a quantidade de combinações repetidas (64) e, no final, subtraem esse valor (576 – 64) para encontrar a quantidade de senhas com números distintos.

Finalizando a etapa de registrar no quadro as primeiras ideias, os grupos foram convidados a participar do momento da plenária. Este ciclo foi muito desafiador, pois os estudantes ainda apresentavam medo de que os outros julgassem seus resultados. Neste sentido, houve uma escolha em iniciar a plenária com os grupos em seus respectivos lugares. Desse modo, evitou-se a convocação de apenas uma ou duas pessoas de cada grupo. O interesse foi pela participação de todos, com o objetivo de tentar quebrar o medo inicial de falar e ser corrigido em público sozinho.

Para retomar a proposta inicial, o exercício foi lido novamente dessa vez pelo pesquisador em voz alta e pausadamente. Alguns alunos começaram a ficar ansiosos, pois uma releitura mais aprofundada despertou detalhes no raciocínio que antes não fora percebido, causando novos debates e solicitações de modificações nas respostas apresentadas na lousa.

Os alunos começaram a intervir nas soluções dos seus grupos e dos grupos vizinhos e, em seguida, esse quantitativo de participação foi apresentando uma taxa de crescimento positiva. As contribuições foram significativas, pois as dúvidas começaram a ser sanadas com o acréscimo ou a retirada de elementos exibidos no quadro. Neste ponto, os integrantes passaram a encarar a situação com maior naturalidade, pois todas as soluções tiveram intervenção.

É importante destacar que houve a preocupação em fazer com que a plenária não virasse uma mera disputa entre as equipes. Foi costurada uma ideia de apontar os pontos positivos e negativos de cada solução visando sua complementação. O conceito de "certo" e "errado" foi suprimido do vocabulário para esse momento. A fronteira entre as equipes começou a ser demolida abrindo espaço para um diálogo na forma de cooperação entre os envolvidos.

O grupo 1 afirmou que, após uma nova leitura da proposta do exercício e comparação com outros resultados , percebeu que sua resposta estava incompleta e que, nas palavras de um dos integrantes, "pensamos nas senhas, mas não pensamos em todas. Faltou a grande maioria".

O grupo 2, apesar de construir mais senhas que o grupo 1, também concordou que ainda faltavam alguns dados e que a desorganização foi fruto do choque que houve de opiniões entre os integrantes da equipe. Questionados sobre essa discordância, os membros relataram que uma dessas causas poderia ter sido pelo fato de que eles fizeram subgrupos e que cada um ficou responsável para montar as senhas de acordo com o número inicial. No final, apenas juntaram as soluções.

O grupo 5 não conseguiu verbalizar partes de sua solução, porém reafirmaram que era importante a preocupação em distinguir senhas com elementos repetidos e senhas com elementos não repetidos. Essa passagem foi importante, pois algumas equipes (como a equipe 1 e a equipe 2) ainda não tinham percebido claramente essa distinção.

As soluções dos grupos 3 e 4 passaram a ser aceitas como a "solução mais completa" entre as presentes. Diversas observações e inferências passaram a ser feitas à medida que os resultados dessas duas equipes eram explorados. Por exemplo, os grupos 1 (apresentou 4 possibilidades) e o 2 (apresentou 12 possibilidades) perceberam que havia ainda uma quantidade expressiva de situações que não foram consideradas.

Após um período considerável para a discussão dos resultados e eliminação das principais dúvidas, usando como estratégia importante a comparação, foi necessário chegar a um consenso sobre a solução correta do problema proposto.

Todos os grupos compreenderam que as soluções 3 (grupo 3) e 4 (grupo 4) apresentaram a conclusão adequada ao exercício, ou seja, 24 senhas. Alguns alunos, inclusive, refizeram a atividade para confirmar o valor.

Tendo superado esta etapa importante, que envolveu a participação de todos, foi necessário entrar na formalização do conteúdo. Para atingir esse objetivo, o problema gerador foi novamente considerado. Desta vez, o pesquisador lançou um novo desafio com base em informações já conhecidas.

Outro material foi impresso e entregue aos estudantes.

Imagine a seguinte situação:

Joana não gostou das condições financeiras propostas pelo gerente. Para ela, as tarifas do cartão de crédito e da manutenção da conta eram muito altas. Como era seu primeiro emprego, a garota não queria gastar mais que o necessário com tarifas bancárias. Então, foi decidido que ela voltaria em outra oportunidade, pois iria pesquisar as condições em outras agências.

O banco “Master” concorrente direto do banco “Juros Baixos” ofereceu a Joana taxas bem mais acessíveis. A estudante decidiu fechar parceria e abrir sua conta. O novo gerente afirmou que o processo para a escolha da senha seria um pouco diferente do banco anterior. Joana deveria montar uma senha com 5 dígitos sem repetição, mas agora tendo 5 opções de escolha (1,2,3,4,5). Quantas opções de senha Joana teria para escolha?

Fonte: o autor

Esse desafio foi posto para resolução. Nenhum grupo conseguiu chegar ao resultado correto, pois eles assimilaram a ideia da contagem direta, mas nem sempre esse método é o mais adequado. Em alguns casos, por exemplo, os estudantes acabaram se perdendo diante do número alto de possibilidades. Dessa forma, foi apresentado o conceito do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.) ou Princípio Multiplicativo, o conceito de Fatorial e a resolução de exemplos.

APRESENTANDO O CONCEITO DO P.F.C.:

Se uma decisão **D1** pode ser tomada de **p** modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão **D2** pode ser tomada de **q** modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões **D1** e **D2** é igual a **pq**.

Observação: Esse princípio pode ser estendido quando forem realizadas n escolhas sucessivas.

EXEMPLO BANCO "Juros Baixos".

Contagem Direta:

1234	2314	3214	4132
1243	2341	3241	4123
1423	2143	3124	4213
1432	2134	3142	4231
1324	2413	3412	4312
1342	2431	3421	4321

Total: 24 senhas distintas

P.F.C.:

As senhas serão formadas por 4 dígitos escolhidos entre os números: 1,2,3 e 4. Logo, elas terão o seguinte modelo:

________ , ________ , ________, ________

1º número 2º número 3º número 4º número

Decisão (D1) de escolha do 1º número: 4 modos. Logo, p = 4;

Decisão (D2) de escolha do 2º número: 3 modos, pois 1 número foi usado em D1. Logo, q = 3;

Decisão (D3) de escolha do 3º número: 2 modos, pois 1 número foi usado em D2 e 1 número foi usado em D2. Logo, r = 2;

Decisão (D4) de escolha do 4º número: 1 modo, pois 1 número foi usado em D1, 1 número foi usado em D2 e 1 número foi usado em D3. Logo, s = 1.

Assim, pelo P.F.C., podemos afirmar que o total de senhas formadas com dígitos diferentes é pqrs = 4.3.2.1 = 24 senhas.

EXEMPLO DO BANCO "Master".

Contagem Direta:

Torna-se inviável pelo quantitativo muito alto de possibilidades.

P.F.C.:

As senhas serão formadas por 5 dígitos escolhidos entre os números: 1,2,3, e 5. Logo, elas terão o seguinte modelo:

________ ,	________ ,	________,	________ ,	________
1º número	2º número	3º número	4º número	5º número

Decisão (D1) de escolha do 1º número: 5 modos. Logo, p = 5;

Decisão (D2) de escolha do 2º número: 4 modos, pois 1 número foi usado em D1. Logo, q = 4;

Decisão (D3) de escolha do 3º número: 3 modos, pois 1 número foi usado em D2 e 1 número foi usado em D2. Logo, r = 3;

Decisão (D4) de escolha do 4º número: 2 modos, pois 1 número foi usado em D1, 1 número foi usado em D2 e 1 número foi usado em D3. Logo, s = 2.

Decisão (D5) de escolha do 5º número: 1 modo, pois 1 número foi usado em D1, 1 número foi usado em D2, 1 número foi usado em D3 e 1 número oi usado em D4. Logo, t = 1

Assim, pelo P.F.C, podemos afirmar que o total de senhas formadas com dígitos diferentes é pqrst = 5.4.3.2.1 = 120 senhas.

APRESENTANDO O CONCEITO DE FATORIAL

Dado um número natural **n≥2**, chama-se fatorial de **n**, ao número indicado por **n!** tal que

n! = n. (n-1). (n-2)... 3.2.1

. a leitura do símbolo n! é: “n fatorial”;

. n! é o produto de todos os números naturais de 1 até n;

. 0! = 1 e 1! = 1.

EXEMPLOS:

2! = 2.1 = 2

5! = 5.4.3.2.1 = 120

3! = 3.2.1 = 6

6! = 6.5.4.3.2.1 = 720

EXEMPLO DO BANCO “Juros Simples”

Quantidade de senhas: 4.3.2.1 = 24 = 4!

EXEMPLO DO BANCO “Master”

Quantidade de senhas: 5.4.3.2.1 = 120 = 5!

Com base na formalização do conteúdo, novos problemas foram propostos como atividade de apropriação do conceito. As questões tiveram como base a exploração do conceito e aplicação do P.F.C. e do Fatorial de um número.

3.2. COMBINAÇÃO SIMPLES, ARRANJO SIMPLES E PERMUTAÇÃO SIMPLES.

O quarto encontro, caracterizado pela exploração dos conceitos de Combinação Simples, Arranjo Simples e Permutação Simples, seguiu procedimentos similares, inclusive em relação a horários, do encontro anterior, ou seja, 4 horas (13h00min às 17h00min).

Neste novo momento, os alunos já não demonstravam aquela rigidez e dificuldade de comunicação observada anteriormente e os diálogos passaram a fluir com maior naturalidade. Diante disso, as resoluções do segundo problema gerador e da plenária passaram a ser mais naturais quando comparadas com a primeira etapa. A mesma fração de estudantes compareceu, ou seja, total de 20. Ficou mantido a mesma quantidade de grupos (5 no total) e a mesma quantidade de integrantes (4 por cada grupo).

Ficou decidido, em conjunto, que as formações permaneceriam as mesmas. A partir daí, o segundo problema gerador foi entregue.

O segundo Problema Gerador teve como principal objetivo explorar a ideia da importância de se investigar a natureza dos agrupamentos. É possível identificar que o problema proposto trata da quantidade de nomes possíveis a uma empresa e da quantidade de comissões que podem ser formadas. É pertinente identificar que, apesar de apresentarem situações similares, as alternativas analisam conceitos diferentes.

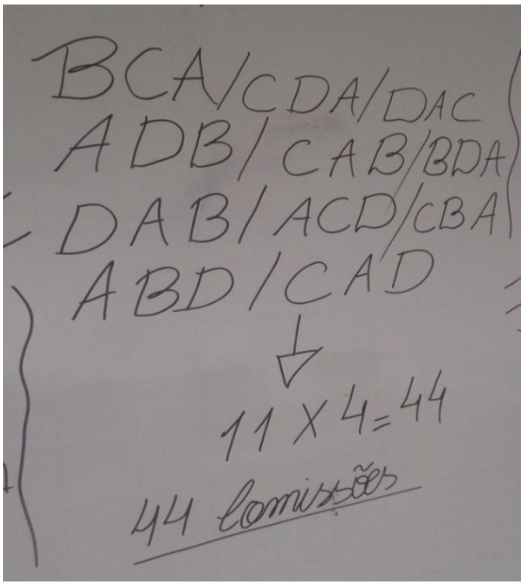
Por exemplo, os nomes ABC e CBA, possíveis respostas para a alternativa 1, figuram duas opções diferentes de nomes para a empresa (negócio). A empresa ABC tem denominação distinta da empresa CBA. Porém, a fusão entre ABC e CBA, no segundo caso, não reproduz a mesma linha de raciocínio, ou seja, a comissão ABC (André, Bruna e Carla) é exatamente a mesma comissão CBA (Carla, Bruna e André).

O Problema Gerador foi entregue e a leitura individual começou a ser feita. Foi possível identificar alguns alunos buscando solução para o problema, mesmo que de forma individual. Mas a movimentação de fato ocorreu na leitura em conjunto. Esse período foi mais dinâmico que o primeiro encontro, pois já havia uma maior familiaridade com o processo.

O pesquisador, mediador do encontro, tentou acalmar a ansiedade presente no momento trazendo a reflexão acerca da possibilidade de se analisar com mais atenção o enunciado do problema. Praticamente todos os grupos, de maneira incisiva, questionaram que as duas alternativas apresentariam as mesmas respostas. Neste sentido, os grupos foram convidados, novamente, a fazer uma nova reflexão a respeito dessa dificuldade e exibir suas respectivas soluções na lousa seguindo o mesmo padrão do encontro anterior, ou seja, um representante seria escolhido e um a um iria ao quadro. Desta vez, o processo foi mais dinâmico e muito participativo, pois os alunos passaram a ter maior interesse em exibir suas ideias. O fator timidez, identificado fortemente em momentos anteriores, passou a ser irrelevante diante da nova situação vivenciada.

Seguem os primeiros resultados dessa segunda etapa:

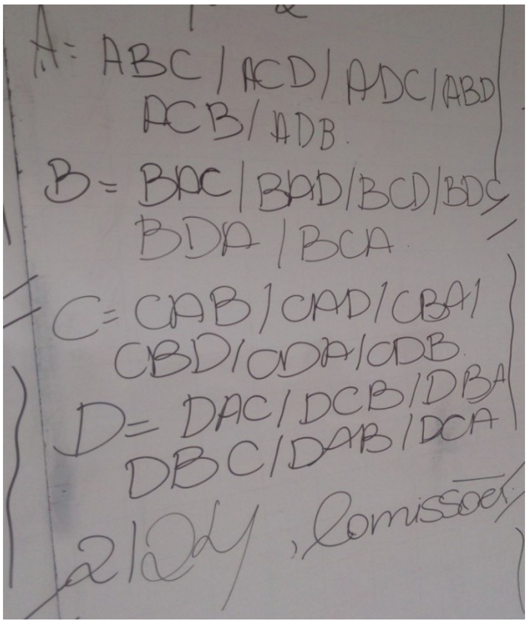
Figura 17 - Solução na lousa do grupo 1 na segunda etapa.



Fonte: o autor

O grupo 1 mostrou sua solução utilizando a ideia de descoberta de todos os possíveis nomes do negócio escrevendo um a um, conforme identificam-se nos códigos (ADB, CAB, BDA, DAB, ACD, CBA, ABD e CAD) separados por barras. Não é possível identificar, inicialmente, o raciocínio usado na relação 11 x 4 para determinar o número final de comissões. Não houve separação entre as respostas da alternativa 1 e da alternativa 2.

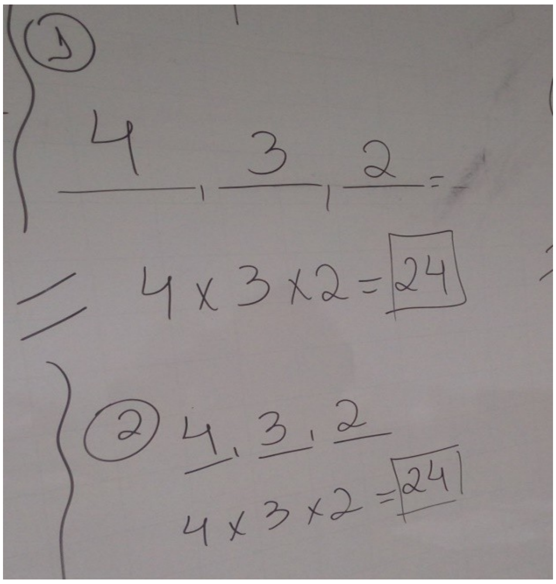
Figura 18 - Solução na lousa do grupo 2 na segunda etapa.



Fonte: o autor

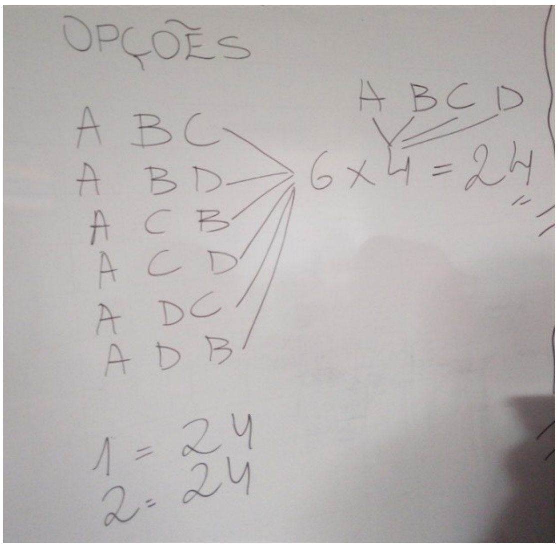
Percebe-se, no grupo 2, que existiu uma separação entre as duas propostas do problema. No primeiro caso, construíram-se todas as possibilidades de nomes fixando a primeira letra. Por exemplo, para a letra A associaram aos elementos: ABC, ACD, ADC, ABD, ACB e ADB. No segundo, o número de comissões foi exatamente igual ao resultado do tópico 1. Em relação ao primeiro caso, é possível identificar uma segurança maior no uso da Contagem Direta.

Figura 19 - Solução na lousa do grupo 3 na segunda etapa.



Fonte: o autor

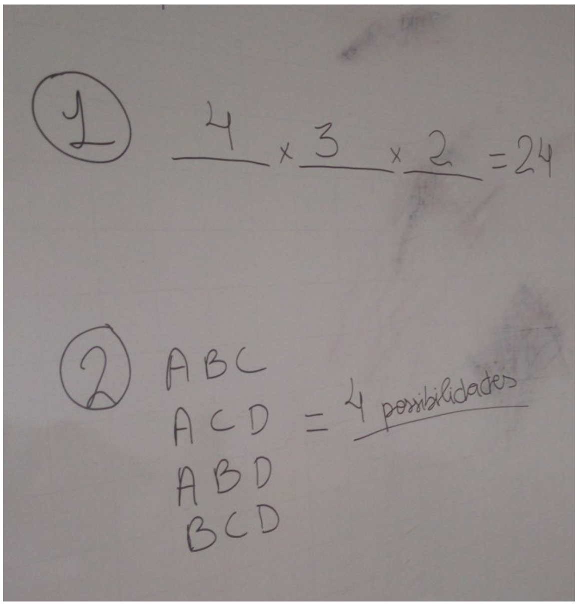
Figura 20 - Solução na lousa do grupo 4 na segunda etapa.



Fonte: o autor

Perante apreciação, a terceira e a quarta equipes usaram a ideia do Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo para chegar ao resultado das proposições. No entanto, não mostraram percepção na diferença entre a ordem dos agrupamentos.

Figura 21 - Solução na lousa do grupo 5 na segunda etapa.



Fonte: o autor

É possível comparar que o último grupo foi o único a apontar uma inclinação maior em relação à percepção (disparidade) existente entre a proposta dos 2 exercícios. Essa passagem fica evidente quando a equipe, além de descrever as opções (ABC, ACD, ABD e BCD), ainda quantifica o resultado, ou seja, 4 possibilidades em detrimento ao exposto no primeiro item.

A plenária foi bem aguardada, pois era o instante de maior movimentação dentro da sala de aula e onde já se sentiam familiarizados. Ficou evidente o crescimento do sentimento desafiador e competidor que esse momento despertava nos estudantes. Analogamente ao processo anterior, o mediador leu o problema e iniciou o processo de discussão e resolução com os grupos em seus lugares evitando, mais uma vez, a eleição de um ou dois integrantes para representar o grupo nesta etapa. Para isso, escreveu na lousa todas as possibilidades de resolução para o problema proposto e, em seguida, com o uso do P.F.C.

Nomes diferentes para o negócio:

ABC	BCD	CAD	DAB
ABD	BDC	CDA	DBA
ACD	BAC	CBA	DCA
ACB	BCA	CAB	DAC
ADB	BAD	CBD	DBC
ADC	BDA	CDB	DCB

Total: 24 possibilidades

Nomes diferentes para o negócio – P.F.C.

4 possibilidades	3 possibilidades	2 possibilidades
1ª letra	2ª letra	3ª letra

P.F.C.: 4 X 3 X 2 = 24 Possibilidades.

Os grupos 2,3,4 e 5 concordaram com a resolução do primeiro ponto do problema. Apenas o grupo 1 teve uma leve dificuldade, mas depois acabou concordando e assimilando o erro, inclusive propôs uma correção (complementação) no seu espaço reservado na lousa.

Em seguida, deram-se início às discussões acerca do exercício 2. Para isso, uma nova tabela de possibilidades foi construída e exibida. Os dados construídos foram reorganizados com a finalidade de deixar os grupos semelhantes na mesma coluna, conforme o exemplo:

Quantidade de comissões formadas:

ABC	ABD	CDB	ADC
ACB	ADB	CBD	ACD
CAB	BDA	DCB	CDA
CBA	BAD	DBC	CAD
BAC	DAB	BCD	DCA
BCA	DBA	BDC	DAC
↓	↓	↓	↓
(André, Bruna e Carla)	(André, Bruna e Danilo)	(Carla, Danilo e Bruna)	(André, Danilo e Carla)

Neste instante, a turma foi convidada a fazer uma reflexão sobre o conceito de comissão presente neste exercício. Três alunos foram escolhidos aleatoriamente e convidados a irem para frente. Chegando lá, cada um segurou uma placa com uma letra representando cada nome, ou seja, um aluno segurou a placa escrita “A” para representar André, outra pessoa segurou a placa “B” para representar Bruna e, por último, um terceiro com a placa “C” para representar Carla.

A primeira coluna foi usada como destaque, ou seja, a coluna composta pelas comissões envolvendo André, Bruna e Carla. Os 3 alunos foram convidados a se posicionarem de acordo com cada possibilidade. Sendo assim, foram feitas 6 modificações de posicionamentos enquanto a turma assistia. No final, foi questionada a quantidade de comissões formadas. O grupo 4, com um raciocínio mais rápido, afirmou que foi feita apenas uma comissão. Segundo os integrantes, “a única coisa que mudou foi a posição, porque sempre vai ser André, Bruna e Carla”.

Os outros grupos presentes passaram a perceber essa diferença na medida em que os outros exemplos foram feitos (referentes às demais colunas). Portanto, completou-se a tabela da seguinte forma:

ABC	ABD	CDB	ADC
ACB	ADB	CBD	ACD
CAB	BDA	DCB	CDA
CBA	BAD	DBC	CAD
BAC	DAB	BCD	DCA
BCA	DBA	BDC	DAC
↓	↓	↓	↓
(André, Bruna e Carla)	(André, Bruna e Danilo)	(Carla, Danilo e Bruna)	(André, Danilo e Carla)
↓	↓	↓	↓
1 comissão	1 comissão	1 comissão	1 comissão

Total: 4 comissões.

Quantidade de comissões formadas - P.F.C.:

4 possibilidades	3 possibilidades	2 possibilidades
1ª letra	2ª letra	3ª letra

P.F.C.: 4X3X2 = 24 Comissões.

Como cada comissão é repetida 6 vezes, então: $\frac{24}{6}$ = 4 Comissões.

Após esse momento que levantou uma reflexão acerca da natureza dos agrupamentos, ficou acordado que a solução da equipe 5 apresentou maior conformidade com a nova situação discutida. Os grupos restantes (1,2,3 e 4) iniciaram um processo de proposição de alterações em suas soluções. O grupo 1, por exemplo, repensou toda sua ideia e alterou as alternativas 1 e 2. Diante disso, o processo de formalização pode ser iniciado. Neste sentido, o conceito de Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação simples foram exibidos seguidos de exemplos. É importante destacar a utilização do Princípio Multiplicativo como fonte alternativa de resolução.

EXPOSIÇÃO DA NOÇÃO DE ARRANJO SIMPLES

Dado um conjunto com **n** elementos, e sendo **p** um número inteiro e positivo, tal que **p≤n**, chama-se arranjo simples dos n elementos dados, agrupados **p a p**, qualquer sequência de p elementos distintos formada com os elementos do conjunto.

Nota: a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Fórmula: $A_{n;\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

EXPOSIÇÃO DA NOÇÃO DE COMBINAÇÃO SIMPLES.

Dado um conjunto qualquer de **n** elementos e sendo **p** um número inteiro e positivo tal que **p≤n**, chama-se combinação simples dos **n** elementos dados, agrupados p a p, qualquer subconjunto de **p** elementos distintos, formados com elementos do conjunto.

Nota: a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Fórmula: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

EXPOSIÇÃO DA NOÇÃO DE PERMUTAÇÃO SIMPLES.

Quando um agrupamento é composto por **m** elementos dispostos em **m** posições, dizemos que há uma permutação de n elementos.

Para determinar o número de permutações, usa-se a expressão P = m!

EXEMPLOS (ARRANJO SIMPLES):

Em uma locadora de veículos, 12 funcionários se candidataram para as vagas de diretor e vice-diretor. Eles serão escolhidos através do voto individual dos componentes do conselho da empresa. De quantas maneiras distintas essa escolha pode ser feita?

Nota: Suponha que Marcos e Marcelo são possíveis candidatos a essas vagas. Sabe-se que Marcos (diretor) e Marcelo (vice-diretor) é diferente de Marcelo (diretor) e Marcos (vice-diretor). Logo, trata-se de um caso onde a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Neste caso, estamos diante de um Arranjo Simples de 12 elementos (n) tomados 2 a 2 (p a p). Logo,

Fórmula: $A_{12;\,2} = \frac{12!}{(12-2)!} = \frac{12!}{10!} = \frac{12.11.10!}{10!}$ = 12.11 = 132 maneiras distintas.

P.F.C.: $\frac{12\ possibilidades}{Diretor} \cdot, \frac{11\ possibilidades}{Vice-Diretor}$ = 12.11 = 132 maneiras distintas.

EXEMPLO (COMBINAÇÃO SIMPLES):

Joana consultou um nutricionista esportivo. A recomendação do profissional foi a ingestão de vitaminas de frutas todos os dias no horário matutino. Joana teve cinco opões de frutas (maçã, banana, abacate, mamão e melão). As vitaminas precisariam ser feitas com apenas 3 frutas de um total de 5. Dessa forma, quantas vitaminas diferentes Joana poderia formar?

Nota: Suponha que Joana decida fazer sua primeira vitamina usando as frutas maçã, banana e abacate nesta ordem. No dia seguinte, para mudar o cardápio, Joana altera a ordem das frutas montando a “nova” vitamina nessa ordem: abacate, banana e maçã. É fato concluir que a troca de posicionamentos das frutas gerou o mesmo tipo de vitamina. Logo, trata-se de um caso onde a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Sendo assim, estamos diante de uma Combinação Simples de 5 elementos (n) tomados 3 a 3 (p a p).Logo,

Fórmula: $C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3.2!}{3!2!} = \frac{5.4.3}{3!} = \frac{5.4.3}{3.2.1} = \frac{120}{6}$ = 20 vitaminas diferentes.

P.F.C. : $\frac{\text{5 possibilidades}}{\text{1ª fruta}}\cdot, \frac{\text{4 possibilidades}}{\text{2ª fruta}}\cdot, \frac{\text{3 possibilidades}}{\text{3ª fruta}}$ = 5x4x3 = 120.

É importante destacar que, neste caso, cada agrupamento tem 6 repetições. Por exemplo, a vitamina (maçã, banana e abacate) é igual às seguintes opções: (maçã, abacate e banana) , (abacate, maçã e banana) , (abacate, banana e maçã) , (banana, abacate e maçã) e (banana, maçã e abacate). Portanto, o número de vitaminas diferentes que Joana pode formar é:

$\frac{120}{6}$ = 20 vitaminas diferentes.

EXEMPLO (PERMUTAÇÃO SIMPLES):

Anagrama é uma espécie de jogo de palavras. É o resultado de uma reorganização das letras de uma palavra para produzir outras palavras (com ou sem sentido). Por exemplo, podemos construir alguns anagramas da palavra “ELO”: ELO, EOL, LEO, LOE, OEL, OLE. Sabendo disso, na palavra PONTE, quantos anagramas podem ser formados?

Nota: Todas as 5 letras da palavra PONTE serão reorganizadas. Logo, os agrupamentos serão formados por todos os 5 elementos (m) onde a ordem gera novas possibilidades. Neste caso,

Fórmula: P = m! = 5! = 5x4x3x2x1 = 120 anagramas.

P.F.C.: $\frac{5\, possibilidades}{1^{a}\, letra}\cdot, \frac{4\, possibilidades}{2^{a}\, letra}\cdot, \frac{3\, possibilidades}{3^{a}\, letra}\cdot, \frac{2\, possibilidades}{4^{a}\, letra}\cdot, \frac{1\, possibilidade}{5^{a}\, letra}$

P.F.C.: 5X4X3X2X1 = 120 anagramas.

Com base na formalização do conteúdo, novos problemas foram propostos como atividade de apropriação do conceito. As questões tiveram como base a exploração do conceito e aplicação de Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples.

CAPÍTULO 4: RESULTADOS

Esta seção foi dividida em duas fases: na primeira fase, buscou-se analisar os resultados referentes à primeira parte da sequência didática, ou seja, investigar a evolução dos alunos acerca do conceito e aplicação do Princípio Fundamental da Contagem. Na segunda fase, de forma análoga, o foco foi na apreciação dos dados relacionados à percepção de Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples pelos alunos.

Essa estratégia de análise foi atribuída a cada grupo participante da pesquisa verificando as cópias de resoluções, a qual foi definida como diagnóstico dos protocolos.

Para a construção dessas explicações, foram também levados em consideração todos os passos descritos na Sequência Didática. Essas informações passam do processo inicial (leitura do Problema Gerador) até a formalização do conteúdo e proposição de novos exercícios. Estes exercícios serviram como fonte inicial para as análises. Justificando essa escolha, Onuchic et al (2014) afirmam,

> após a etapa de formalização novos problemas relacionados ao problema gerador são propostos aos alunos. Eles possibilitam analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas, e assim por diante (p.46).

Para a devolução dos exercícios, foi sugerido que os alunos registrassem nomenclaturas para não associar diretamente a seus nomes, seguindo o modelo: Grupo 1 – Nomes: A, B, D ou F; Grupo 2 – Nomes: G, H, I ou J; Grupo 3 – Nomes: K, L, M ou O; Grupo 4 – Nomes: P, Q, R ou S e Grupo 5 – Nomes: T, U, V ou X.

As respostas foram classificadas de acordo com os seguintes símbolos: C, E e N. O primeiro representa as respostas corretas. O segundo, as respostas erradas e o último representa as respostas deixadas em branco. Para as alternativas com mais de um item, atribuímos C para aquelas em que todos os itens estiverem respondidos corretamente.

A orientação dada foi que cada aluno respondesse aos exercícios propostos individualmente. Foi permitida a discussão entre os integrantes dos grupos nesta etapa também, pois entendemos a importância da noção colaborativa presente na metodologia de ensino de matemática através da resolução de problemas.

Os exercícios tomados como base de referência para esta análise foram expostos no final de cada etapa da sequência didática construída no capítulo 2. Iremos reproduzi-los novamente e compará-los com as respostas, conforme é possível verificar nos quadros 13 e 14.

Questões usadas no exercício 1 (Princípio Fundamental da Contagem):

Questão 1: Thiago possui 3 blusas diferentes e 2 calças diferentes. De quantas maneiras ele poderá escolher uma blusa e uma calça para se vestir?

Questão 2: No Brasil, os carros são emplacados assim que saem da loja. O modelo brasileiro compreende 3 letras seguidas de 4 números, conforme o exemplo abaixo:

Fonte: https://www.google.com.br/search?q=placas+de+automovel+no+brasil

Com base nessas informações, resolva:

a) Quantas placas podem ser formadas neste modelo?

b) Quantas placas podem ser formadas neste modelo, desde que não tenha repetição de números e letras?

c) Mantendo as letras NQC, determine a quantidade de placas formadas.

d) Mantendo os números 0876, determine a quantidade de placas formadas com letras distintas.

Questão 3: Um estudante possui um livro de Matemática, um de Biologia, um de Física, um de Química, um de história e um de Geografia. Desejando organizá-los lado a lado em uma estante, de quantos modos poderá fazê-lo?

a) O primeiro livro seja de Matemática.

b) O primeiro livro seja de Matemática e o segundo de Física.

c) Os dois primeiros livros sejam os de Matemática e Física.

d) Os livros de Matemática e Física fiquem juntos.

Questão 4: Calcule:

a) 5!

b) 6! + 4!

c) $\frac{10!}{7!}$

Quadro 9 - Classificação das respostas sobre questões referentes à aplicação do P.F.C. no exercício 1: C (resposta correta); E (resposta errada); N (resposta em branco).

Nome	Grupo	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão em branco
A	1	C	E	E	C	0
B	1	C	E	E	C	0
D	1	C	E	E	C	0
F	1	C	E	E	C	0
G	2	C	C	E	E	0
H	2	C	C	E	E	0
I	2	C	C	E	E	0
J	2	C	C	E	E	0
K	3	C	C	C	C	0
L	3	C	C	C	C	0
M	3	C	C	C	C	0
O	3	C	C	C	C	0
P	4	C	C	C	C	0

Q	4	C	C	C	C	0
R	4	C	C	C	C	0
S	4	C	C	C	C	0
T	5	C	C	C	C	0
U	5	C	C	C	C	0
V	5	C	C	C	C	0
X	5	C	C	C	C	0

Fonte: o autor

Questões usadas no exercício 2 (Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples):

Questão 1: De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares?

Questão 2: Um grupo é formado por 8 alunos. Considerando esses alunos, quantas duplas distintas podem ser formadas?

Questão 3: Em uma competição de atletismo, 8 velocistas disputam a prova final dos 100m rasos, na qual os 4 primeiros colocados irão ao pódio. De quantas maneiras distintas o pódio poderá ser composto?

Questão 4: Dispondo-se de abacaxi, acerola, goiaba, laranja, maçã, mamão e melão, calcule de quantos sabores diferentes pode-se preparar um suco usando-se três frutas distintas?

Questão 5: Na palavra NORTE, quantos anagramas podem ser formados? Quantos começam com vogal?

Quadro 10 - Classificação das respostas sobre questões referentes à aplicação do Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples no exercício 2: C (resposta correta); E (resposta errada); N (resposta em branco).

Nome	Grupo	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão em branco
A	1	C	C	C	C	C	0
B	1	C	C	E	E	E	0
D	1	C	E	C	E	E	0
F	1	C	C	E	E	E	0
G	2	C	E	C	C	E	0
H	2	C	E	C	C	E	0

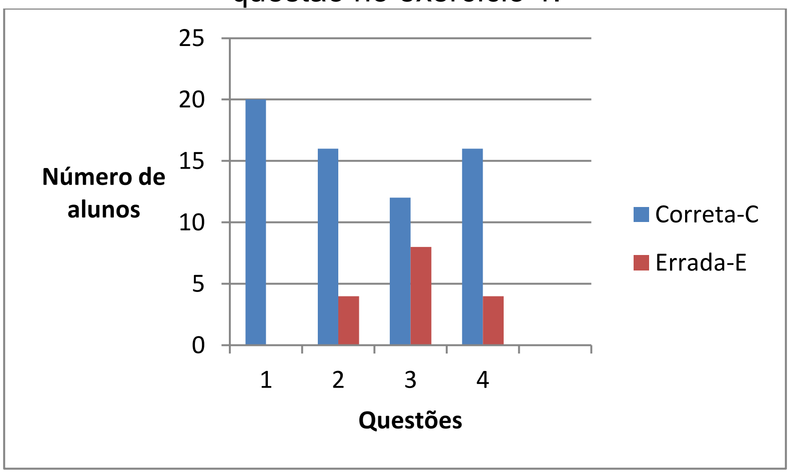
I	2	C	E	C	E	E	0
J	2	C	E	C	E	E	0
K	3	C	C	C	E	E	0
L	3	C	C	C	E	E	0
M	3	C	C	C	E	C	0
O	3	C	C	C	E	C	0
P	4	C	E	C	C	C	0
Q	4	E	E	C	C	C	0
R	4	C	C	C	C	C	0
S	4	C	C	C	C	C	0
T	5	C	C	C	C	C	0
U	5	C	C	C	C	C	0
V	5	C	C	C	C	C	0
X	5	C	C	C	C	C	0

Fonte: o autor

Observando os primeiros dados exibidos, podemos perceber que todos os alunos responderam às questões propostas, independente se foram corretas ou erradas É relevante levantar essa reflexão, pois houve interesse crescente pela participação no processo, entrando em contraste com os primeiros momentos da sequência onde alguns foram resistentes, inclusive, em ler o problema gerador.

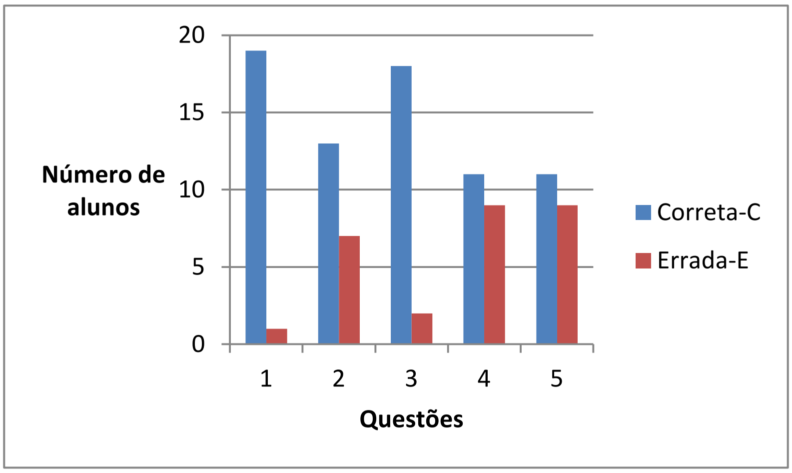
Para uma melhor visualização dos dados apresentados nos quadros acima, apresentamos os gráficos 03 e 04. Conforme não houve registros de questões em branco, consideramos apenas as duas variáveis: C e E.

Gráfico 03 - Comparativo entre respostas corretas (C) e erradas (E) por cada questão no exercício 1.



Fonte: o autor

Gráfico 04 - Comparativo entre respostas corretas (C) e erradas (E) por cada questão no exercício 2.



Fonte: o autor

É acertado afirmarmos que os resultados gráficos iniciais também trazem informações significativas em relação ao quantitativo de “acertos” e “erros”. O número de acertos foi superior ao número de erros em todas as questões investigadas (exercício 1 e exercício 2). Isso mostra, inicialmente, uma evolução por parte dos estudantes no desenvolvimento do pensamento combinatório. Em alguns casos mais específicos, como na questão 1 do exercício 1 (gráfico 03) e na questão 1 do exercício 2 (gráfico 04), o índice de acerto foi superior a 90%.

Apesar da proposição de resolução individual das listas, é possível verificar resultados semelhantes entre os componentes de uma mesma equipe. Para exemplificarmos, vejamos o caso no grupo 1 (quadro 13). Todos os quatro componentes apresentaram a mesma porção de acertos e erros e nas mesmas alternativas. Essa ação pode ser consequência do processo de discussão aberto e incentivado nas equipes desde o início do processo. Os alunos passaram a construir suas ideias com base no acordo coletivo.

Por outro lado, em especial nas respostas do exercício 2 (quadro 14), os estudantes apresentaram resultados mais heterogêneos. Utilizando o mesmo grupo 1 como destaque, verificam-se repercussões diferentes entre os mesmos integrantes. Entendemos que o uso de diferentes métodos para a resolução de problemas combinatórios onde a ordem dos elementos gera novas possibilidades ou não discutidos na sequência didática, pode ser um dos motivos para essa leve divergência.

A seguir, procedemos a uma análise da evolução por cada grupo participante na sequência didática. **Para isso, reorganizamos a classificação das respostas dos exercícios 1 e 2 apresentadas nos quadros 13 e 14 limitados a cada grupo.** Em seguida, julgamos o número de questões corretas (C) e erradas (E) com base em três condições: Satisfatório (considerado quando o número de acertos for 3 ou 4), Intermediário (considerado quando o número de erros for igual ao número de acertos) e Insatisfatório (considerado quando o número de acertos for menor que o número de erros.

Por último, é feito um breve comentário acerca da evolução de cada grupo comparando os dados obtidos nos exercícios 1 e 2 com as estratégias usadas na socialização dos problemas geradores na lousa. Esses problemas geradores configuram como o ponto de partida para a aprendizagem, conforme a metodologia de ensino de matemática através da resolução de problemas.

Quadro 11 - Classificação das respostas dos integrantes do grupo 1 no exercício 1 (Princípio Fundamental da Contagem) e no exercício 2 (Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples) propostos na sequência.

Nomes	Exercício 1 (questões)				Exercício 2 (questões)				
	1ª	2ª	3ª	4ª	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
A	C	E	E	C	C	C	C	C	C
B	C	E	E	C	C	C	E	E	E
D	C	E	E	C	C	E	C	E	E
F	C	E	E	C	C	C	E	E	E

Fonte: o autor

Resultados:

Satisfatório: 1ª e 4ª questões (exercício 1);

1ª e 2ª questões (exercício 2);

Intermediário: 3ª questão (exercício 2);

Insatisfatório: 2ª e 3ª questões (exercício 1);

4ª e 5ª questões (exercício 2).

Diagnóstico dos protocolos:

Estratégia(s) usada(s) no primeiro problema gerador: contagem direta incompleta;

Estratégia(s) usada(s) no segundo problema gerador: contagem direta incompleta;

Esperávamos o uso do P.F.C. no segundo problema gerador.

Desse modo, compreendemos que a equipe 1 apresentou evolução baixa em relação aos conceitos básicos de analise combinatória.

Quadro 12 - Classificação das respostas dos integrantes do grupo 2 no exercício 1 (Princípio Fundamental da Contagem) e no exercício 2 (Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples) propostos na sequência.

Nomes	Exercício 1 (questões)				Exercício 2 (questões)				
	1ª	2ª	3ª	4ª	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
G	C	E	C	C	C	E	C	C	E
H	C	E	C	C	C	E	C	C	E
I	C	E	C	E	C	E	C	E	E
J	C	E	C	E	C	C	C	E	E

Fonte: o autor

Resultados:

Satisfatório: 1ª e 3ª questões (exercício 1);
1ª e 3ª questões (exercício 2);

Intermediário: 4ª questão (exercício 1);
4ª questão (exercício 2);

Insatisfatório: 2ª questão (exercício 1);
2ª e 5ª questões (exercício 2).

Diagnóstico dos protocolos:

Estratégia(s) usada(s) no primeiro problema gerador: contagem direta incompleta;

Estratégia(s) usada(s) no segundo problema gerador: contagem direta (apresentou domínio).

Esperávamos o uso do P.F.C. no segundo problema gerador.

Sendo assim, o grupo 2 apresentou evolução mediana em relação aos conceitos básicos de analise combinatória.

Quadro 13 - Classificação das respostas dos integrantes do grupo 3 no exercício 1 (Princípio Fundamental da Contagem) e no exercício 2 (Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples) propostos na sequência

Nomes	Exercício 1 (questões)				Exercício 2 (questões)				
	1ª	2ª	3ª	4ª	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
K	C	C	C	C	C	C	C	E	E
L	C	C	C	C	C	C	C	E	E
M	C	C	C	C	C	C	C	E	C
O	C	C	C	C	C	C	C	E	C

Fonte: o autor

Resultados:

Satisfatório: 1ª, 2ª, 3ª e 4ª questões (exercício 1);

1ª, 2ª, 3ª questões (exercício 2);

Intermediário: 5ª questão (exercício 2);

Insatisfatório: 4ª questões (exercício 2).

Diagnóstico dos protocolos:

Estratégia(s) usada(s) no primeiro problema gerador: contagem direta e identificação de um padrão;

Estratégia(s) usada(s) no segundo problema gerador: P.F.C., mas não atentaram para a importância da ordem dos elementos;

Com base nisso, o terceiro grupo apresentou evolução boa em relação aos conceitos básicos de análise combinatória.

Quadro 14 - Classificação das respostas dos integrantes do grupo 4 no exercício 1 (Princípio Fundamental da Contagem) e no exercício 2 (Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples) propostos na sequência.

Nomes	Lista 1				Lista 2				
	1ª	2ª	3ª	4ª	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
P	C	C	C	C	C	E	C	C	C
Q	C	C	C	C	E	C	C	C	C
R	C	C	C	C	C	C	C	C	C
S	C	C	C	C	C	C	C	C	C

Fonte: o autor

Resultados:

Satisfatório: 1ª, 2ª, 3ª e 4ª questões (exercício 1);

1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª questões (exercício 2);

Intermediário: não houve;

Insatisfatório: não houve.

Diagnóstico dos protocolos:

Estratégia(s) usada(s) no primeiro problema gerador: P.F.C. (intuitivo);

Estratégia(s) usada(s) no segundo problema gerador: P.F.C., mas não atentaram para a importância da ordem dos elementos;

Dessa maneira, o grupo 4 apresentou evolução muito boa em relação aos conceitos básicos de análise combinatória.

Quadro 15 - Classificação das respostas dos integrantes do grupo 5 no exercício 1 (Princípio Fundamental da Contagem) e no exercício 2 (Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples) propostos na sequência.

Nomes	Lista 1				Lista 2				
	1ª	2ª	3ª	4ª	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
T	C	C	C	C	C	C	C	C	C
U	C	C	C	C	C	C	C	C	C
V	C	C	C	C	C	C	C	C	C
X	C	C	C	C	C	C	C	C	C

Fonte: o autor

Resultados:

Satisfatório: 1ª, 2ª, 3ª e 4ª questões (exercício 1);

1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª questões (exercício 2);

Intermediário: não houve;

Insatisfatório: não houve.

Diagnóstico dos protocolos:

Estratégia(s) usada(s) no primeiro problema gerador: tentativa de construção de um padrão;

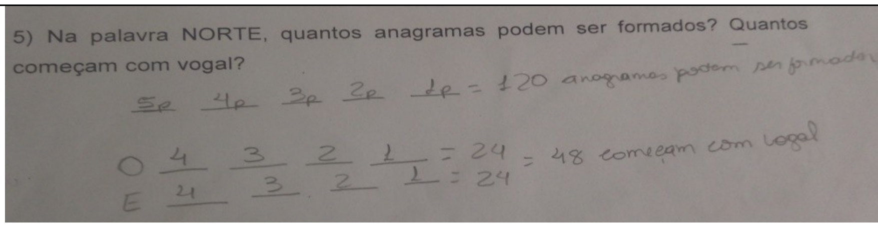
Estratégia(s) usada(s) no segundo problema gerador: P.F.C. e o uso da contagem direta para destacar a importância da ordem dos elementos;

Por conseguinte, o quinto grupo apresentou evolução excelente em relação aos conceitos básicos de análise combinatória.

No que se refere ao uso de fórmulas, alguns alunos, de mesma equipe ou não, usaram apenas o P.F.C. como instrumento de resolução. Outros se sentiram mais seguros com o uso das fórmulas específicas a cada tipo de agrupamento.

Quadro 16 - Respostas dos alunos usando a fórmula específica ou o P.F.C.

Nome	Grupo	Arranjo Simples/ Fórmula
Q	4	1) De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares? $n \to 5$ $p \to 3$ $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ $A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} =$ $A_{5,3} = \frac{5.4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$
Nome	Grupo	Arranjo Simples/ P.F.C.
G	2	1) De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares? $\underline{5P}, \underline{4P}, \underline{3P} = 5 \times 4 \times 3 = 60$
Nome	Grupo	Combinação Simples/ Fórmula
A	1	2) Um grupo é formado por 8 alunos. Considerando esses alunos, quantas duplas distintas podem ser formadas? $C_{8,2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8.7.\cancel{6.5.4.3.2.1}}{2!\cancel{6.5.4.3.2.1}} = \frac{56}{2} = \boxed{28}$
Nome	Grupo	Combinação Simples/ P.F.C.
T	5	2) Um grupo é formado por 8 alunos. Considerando esses alunos, quantas duplas distintas podem ser formadas? $\underline{8}, \underline{7} = 8.7 = \frac{56}{2} = 28$
Nome	Grupo	Permutação Simples/ Fórmula
M	3	5) Na palavra NORTE, quantos anagramas podem ser formados? Quantos começam com vogal? $P5! = 5.4.3.2.1 = 120$. $P4_o! = 4.3.2.1 = 24$ $P4_e! = 4.3.2.1 = 24$ $24+24 = 48$.

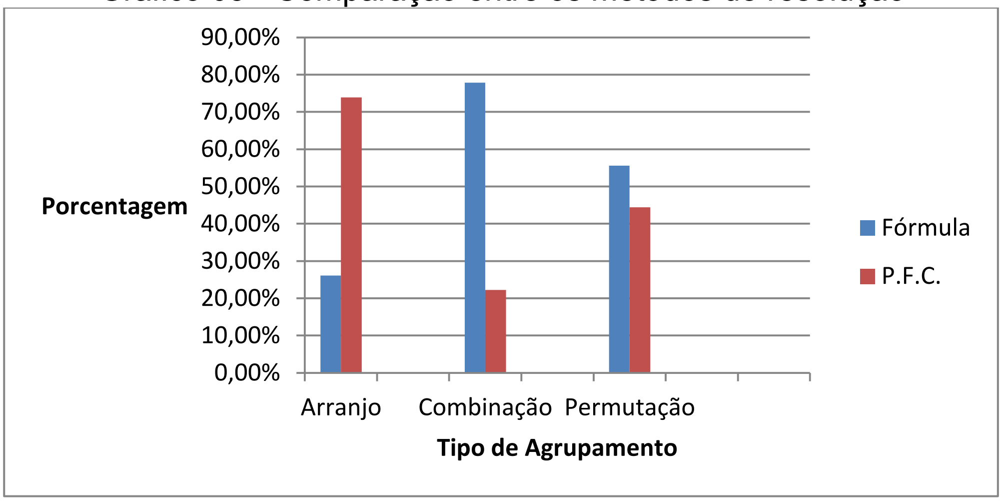
Nome	Grupo	Permutação Simples/ P.F.C.
X	5	 5) Na palavra NORTE, quantos anagramas podem ser formados? Quantos começam com vogal? 5p 4p 3p 2p 1p = 120 anagramas podem ser formados O 4 3 2 1 = 24 = 48 começam com vogal E 4 3 2 1 = 24

Fonte: o autor

Podemos observar no quadro 15 que os grupos apresentaram modos diferentes na resolução de problemas onde a ordem dos elementos gera novas possibilidades ou não. Esses modos foram diagnosticados em relação ao uso formal das fórmulas ou aplicação direta do Princípio Multiplicativo. É importante destacar que essa característica foi observada em praticamente todos os grupos participantes da pesquisa.

A seguir, mostraremos no gráfico 05, um balanço geral sobre o método optado pelos discentes na execução dos exercícios. Para levantar esses dados, investigamos as alternativas respondidas corretamente.

Gráfico 05 - Comparação entre os métodos de resolução



Fonte: o autor

As informações no gráfico 05 permitem averiguar que a fórmula ainda é um mecanismo no qual os alunos possuem maior segurança. Das três variáveis investigadas (Arranjo, Combinação e Permutação), o uso da fórmula foi superior em duas delas.

No primeiro caso, o uso do P.F.C. foi mais presente nos protocolos encontrados nos exercícios referentes ao conceito de Arranjo Simples. No segundo e no terceiro casos, essa incidência foi menor, porém não menos importante. Compreendemos que a forma como a sequência didática foi executada, em que não se fixava um modelo único de solução, pôde ter contribuído positivamente para essa diversidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para construir as conclusões relevantes, iremos fazer uma retrospectiva de nosso estudo.

O processo de ensino e aprendizagem em Análise Combinatória na maioria das escolas de nível médio atualmente seguem roteiros semelhantes e bem definidos. O professor, centro do processo, inicia sua aula expondo fórmulas e aplicações em exercícios. Os alunos, geralmente, sujeitos passivos, precisam repetir exaustivamente os procedimentos apresentados pelo professor na resolução de problemas-modelo. No final, considera-se que o estudante aprendeu quando ele é capaz de repetir os tipos de procedimentos a ele apresentados pelo professor em questões análogas às apresentadas em sala de aula.

Em diversos casos, temas importantes referentes ao pensamento combinatório são apresentados na forma de blocos isolados e sem relação alguma. Essa estratégia também está presente em diversos livros didáticos, conforme Paiva (1999).

É comum, por exemplo, trabalhar com Arranjo Simples e não fazer relação alguma com o Princípio Fundamental da Contagem.

Esta pesquisa teve por combustível principal o desconforto do autor perante a necessidade de descobrir novas fontes para auxiliar o ensino de Análise Combinatória nos diversos níveis de escolaridade, principalmente no Ensino Médio.

A importância do estudo da Análise Combinatória ficou evidente no levantamento bibliográfico. Esse destaque é verificado no crescente aumento e ansiedade dos pesquisadores em determinar quais são as principais dificuldades no ensino e aprendizagem desse objeto de estudo e na proposição de novas investigações.

Segundo Dornelas (2004), Pinheiro (2008) e Pinheiro, Abar e Sá (2012), o Princípio Fundamental da Contagem deve ser o principal instrumento na construção das ideias básicas da Análise Combinatória para o Ensino Médio.

Muitos estudos dentro do campo da Educação Matemática foram realizados, aonde se chegou à percepção de que a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas apresentaria condições favoráveis à redução dessa preocupação. Segundo Onuchic

(2008), a proposição do problema antes da apresentação formal do conteúdo desperta a curiosidade e o interesse em resolvê-lo, tornando os alunos investigadores e questionadores de caminhos diferentes para a resolução.

Levando em consideração os estudos relatados acima, tentou-se responder ao seguinte problema de pesquisa: **Quais dificuldades podem emergir no processo de ensino e aprendizagem de conceitos básicos de análise combinatória por meio de aplicação de uma sequência didática concebida a partir do Princípio Fundamental da Contagem e tendo como metodologia o ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas?**

O objetivo geral desse trabalho foi a construção, aplicação e validação de uma sequência didática para introduzir os conceitos básicos de Análise Combinatória, no segundo ano do Ensino Médio, baseada no Princípio Fundamental da Contagem e norteada pela metodologia do ensino-aprendizagem-avaliação da matemática através da resolução de problemas. Além disso:

(1) identificar as possíveis reações comportamentais e atitudinais dos estudantes, acostumados ao modo de ensino expositivo, à mudança de contrato didático;

(2) observar como os estudantes interagem nas resoluções dos problemas propostos;

(3) examinar as dificuldades dos estudantes na compreensão dos enunciados dos problemas;

(4) analisar a preferência dos estudantes no tocante à resolução dos problemas pela utilização do P.F.C. ou das fórmulas.

Para a construção dessa sequência, foi realizado um estudo definido como fundamentação teórico-metodológica, com a finalidade de investigar as pesquisas acerca do objeto matemático e da metodologia empregada. Ademais, foi necessário realizar uma avaliação diagnóstica na turma antes da aplicação, com sustentação na Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky.

A aplicação ou experimentação ocorreu em duas etapas. Na primeira, os alunos tiveram contato inicial com o primeiro problema gerador, onde a finalidade foi o despertar para a ideia de padrão e, dessa forma, chegar ao conhecimento do Princípio Fundamental da Contagem. Na segunda fase, tendo posse da ideia do P.F.C., o segundo problema gerador teve como destaque a necessidade de observar a origem dos agrupamentos. O objetivo foi discutir a importância da ordem dos elementos e, assim, introduzir os conceitos de Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples relacionando-os com o Princípio Multiplicativo. No final de cada etapa, foram propostos exercícios.

A validação da sequência foi possibilitada pela análise das respostas dos exercícios aplicados no final de cada etapa em comparação com os conhecimentos prévios e pelas observações feitas durante sua execução.

Essa construção se deu para confirmar ou negar a hipótese pensada no princípio dessa pesquisa, onde se verifica que: **a sequência didática aplicada neste trabalho, elaborada a partir do Princípio Fundamental da Contagem e usando como metodologia o ensino-aprendizagem-avaliação da matemática através da resolução de problemas, será capaz de proporcionar aos alunos a apropriação dos conceitos básicos de Análise Combinatória e possibilitar a identificação de possíveis adversidades que possam surgir durante sua execução.**

Durante a aplicação da sequência, foi possível identificar certa rejeição dos alunos em relação à nova abordagem. Essa percepção fica evidente na dificuldade de socialização principalmente do primeiro Problema Gerador. Para muitos, a tentativa de resolução de um problema só seria possível após a exposição formal do conteúdo e, além disso, houve receio em participar das discussões por medo de erros e por possíveis punições em decorrência disso. Essas características ainda evidenciam uma forte ligação com o modelo tradicional de ensino percebido nesta turma. Para tentar superá-lo, foram realizadas diversas intervenções, onde se verificou uma importante redução nesta barreira, mas não sua eliminação por completo.

A interação entre os sujeitos da pesquisa foi positiva, apesar das variáveis discutidas no inciso anterior. As trocas de informações entre os integrantes de um mesmo grupo e entre os integrantes de grupos diferentes possibilitaram a superação de dificuldades ou a uma percepção melhor no tocante à comparação entre as respostas, principalmente nos momentos da resolução do problema em grupo e da plenária. Esta última, instante posterior à exibição das resoluções na lousa, abriu espaço maior para o envolvimento nas discussões e, com o auxílio da mediação, possibilitou a construção do conhecimento colaborativo entre os envolvidos.

Os Problemas Geradores desempenharam função relevante no processo, pois serviram como base para a verificação da compreensão dos estudantes. Inicialmente, na aplicação do primeiro problema gerador, fase onde tinha por objetivo a construção do conceito do P.F.C., foi possível identificar que todos os grupos tentaram apresentar uma solução montando caso a caso. Apenas os grupos 3 e 4 mostraram a resposta completa. O grupo 4 demonstrou a tentativa de encontrar um padrão e os grupos 1 e 2 mostraram uma solução parcial, ou seja, não levaram em conta que seria necessário considerar todas as possibilidades.

Na aplicação do segundo Problema Gerador, fase onde tinha por objetivo a construção dos conceitos de Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples, foi diagnosticado que os grupos 3,4 e 5 já apresentavam domínio acerca do uso do P.F.C. trabalhado na etapa anterior. Os grupos 1 e 2 não atingiram essa meta, porém o grupo 2 apresentou uma melhora significativa acerca da correta aplicação da contagem direta.

Compreendemos que uma nova aplicação da metodologia do ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas poderia reduzir as deficiências de aprendizagem verificadas nos grupos 1 e 2.

Ainda sobre a relevância dos Problemas Geradores, entendemos que eles desempenharam uma base interessante para a construção dos conceitos pretendidos. Isso significa que os professores, ao adotarem essa metodologia, precisam ser cautelosos e identificar peculiaridades de cada turma para a elaboração do problema.

Os grupos investigados, em sua maioria, utilizaram-se das fórmulas específicas de Arranjo Simples, Combinação Simples e Permutação Simples para a resolução das questões referentes a esses tipos de agrupamentos. Por outro lado, um quantitativo significativo de estudantes usou apenas o P.F.C. como principal estratégia de resolução nestas mesmas questões. Entendemos que esse fato caracteriza uma redução considerável no número excessivo de fórmulas, estabelecendo relações entre os agrupamentos e o Princípio Multiplicativo e possibilitando uma liberdade maior acerca da escolha das estratégias de resolução pelos discentes.

Comparando os dados dos conhecimentos prévios e a leitura das respostas dos exercícios, conforme verificado no capítulo 4, é possível concluir que todos os grupos apresentaram evolução nos conceitos básicos de análise combinatória para o ensino médio, apesar de apresentar resultados diferenciados em relação às equipes.

Com base nas informações exploradas nos parágrafos anteriores, podemos afirmar que a hipótese apresentada no início dessa pesquisa não pode ser refutada mediante os resultados obtidos e os desempenhos observados, ou seja, **a sequência didática aplicada neste trabalho, elaborada a partir do Princípio Fundamental da Contagem e usando como metodologia o ensino-aprendizagem-avaliação da matemática através da resolução de problemas, foi capaz de proporcionar aos alunos a apropriação dos conceitos básicos de Análise Combinatória e possibilitou a identificação de possíveis adversidades surgidas durante sua execução.**

No período inicial deste trabalho, discutido com mais propriedade na introdução, relatei o meu desejo pelo objeto matemático *Análise Combinatória* como fruto de uma inquietude de minha prática nas salas de aula na Educação Básica. O excesso de fórmulas e a reprodução exaustiva de algoritmos presentes nos livros didáticos foram o combustível para a busca de melhores estratégias de ensino. Com a construção e aplicação dos ciclos discutidos e com os resultados analisados nesta pesquisa, sinto-me confortável em destacar a percepção acerca de uma aprendizagem mais significativa por parte dos sujeitos deste conteúdo matemático, reduzindo consideravelmente a minha preocupação presente lá no início. Além disso, a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas passou a ser uma fonte constante em meu exercício diário como professor.

Sendo assim, esperamos que essa pesquisa venha a contribuir com as futuras investigações no que se refere ao ensino e aprendizagem de Análise Combinatória e que a sequência didática aqui proposta sirva de inspiração para os professores de matemática do Ensino Médio ao apresentarem esse conteúdo em sala de aula.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Matemática). Brasília: MEC, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações Volume 2. São Paulo: Ática, 2015.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática: Da teoria à prática. Coleção Perspectivas em Educação Matemática - Campinas, SP: Papirus, 1996.

DORNELAS, A.C.B. O Princípio multiplicativo como recurso didático para resolução de problemas de contagem. 2004. 128f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2004.

FERRAZ, M.C. O Tratamento da Análise Combinatória no Ensino Fundamental e seus Obstáculos Didáticos. 2002. Universidade Federal de Pernambuco.

FERREIRA, N. As pesquisas denominadas "Estado da Arte". Educação e Sociedade, ano 23, n. 79, ago. 2002.

FERREIRA, Priscila Alves. O Princípio da Casa dos Pombos. 2011. 34 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

GIL, A. C. Métodos e técnicas de pesquisa social. São Paulo: Atlas, 2007.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; JUNIOR, José Rui Giovanni. Matemática Completa volume único. São Paulo: FTD, 2002.

Hazzan, S.; IEZZI, G. Fundamentos da matemática elementar: combinatória e probabilidade. São Paulo: Atual, 1993.

JULIANELLI, José Roberto; DASSIE, Bruno Alves; LIMA, Mário Luiz Alves de; SÁ, Ilydio Pereira de. Curso de Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2009.

LIMA, E.L; CARVALHO, P.C. P; WAGNER, E. & MORGADO, A.C. A Matemática para o Ensino Médio, vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

LIMA, E.L; CARVALHO, P.C. P; WAGNER, E. & MORGADO, A.C. A Matemática para o Ensino Médio, vol. 12. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Ana Paula Barbosa; ROCHA, Cristiane de Arimatéa. O que diz o currículo prescrito para combinatória no Brasil? Reflexões sore o desenvolvimento do conhecimento do horizonte e conhecimento curricular de professores. Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo, 2016.

LEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. Matemática Ciência e Aplicações. 4. ed. São Paulo: Atual, 2006.

MARINCEK, V. Algumas contribuições da didática da Matemática: a resolução de problemas e o papel do professor. In: MARINCEK, V. (coord.) Aprender Matemática resolvendo problemas. Porto Alegre: Artmed, p.13 -17 2001.

MORGADO, A.C.; PITOMBEIRA, J.C.; CARVALHO, P.C.P. & FERNANDEZ, P. Análise Combinatória e Probabilidade. IMPA/SBM, Rio de Janeiro, 1991.

OLIVEIRA, Eliana; COUTINHO, Cileda (2013). Combinatória nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais: uma análise do PNLD 2013. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. 1a Escola de Inverno de Educação Matemática de Santa Maria. Anais. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – Aritmética, Álgebra e Geometria. Universidade Federal de Santa Maria/RS, 2008.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andresa Maria. Resolução de Problemas: Teoria e Prática. Jundiaí, Paco Editorial: 2014.

ONUCHIC, L.R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: Bicudo, M.A.V. (org.) Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas (Seminários e Debates). São Paulo: UNESP, p.199-218, 1999.

PAIVA, Manoel. Matemática Paiva Volume 2. São Paulo: Moderna, 2014.

PAIVA, Manoel. Matemática – Paiva. 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2009.

PESSOA, Cristiane; SILVA, Monalisa. Invariantes, generalização, sistematização e estratégias bem sucedidas: o ensino da combinatória no 9º ano do Ensino Fundamental. Anais do III Simpósio Internacional de Educação Matemática. Fortaleza, 2012.

PINHEIRO, Carlos; ABAR, Celina; SÁ, Pedro. Aprendizagem de análise combinatória por meio da resolução de problemas como ponto de partida. Anais do III Simpósio Internacional de Educação Matemática. Fortaleza, 2012.

PINHEIRO, C. A. M. O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA A PARTIR DE SITUAÇÕES-PROBLEMA. 2008. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Universidade do Estado do Pará, Belém, 2000.

POLYA, George. *A Arte de Resolver Problemas.* Rio de Janeiro, Interciência, 2006.

ROCHA, C. de A. Conhecimentos de Professores de Pedagogia e Matemática sobre Problemas Combinatórios. Anais... da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife – PE, 26 a 30 de junho de 2011.

ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires. Um resgate histórico: a importância da História da Matemática. 2013. 38 folhas. Monografia de Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2013.

Schoenfeld, A. H. Problem solving in the United States, 1970 - 2008: research and theory, practice and politics. ZDM Mathematics Education, Karlsruhe, n.39, p.537 - 551, 2007.

Schroeder, T, L.; LESTER JR, F.K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A.P.(ed.). New Directions for Elementary School Mahematics.Reston: NCTM, 1989, P.31-42.

SILVA, Cláudio Xavier. Matemática – aula por aula. 2.ed.São Paulo: FTD,2005.

SILVEIRA, Everaldo; MIOLA, Rudinei José. Professor – Pesquisador em Educação Matemática. Curitiba: Ibpex, 2008.

SILVEIRA, Denise Tolfo; ENGEL, Tatiana Gerhardt. Métodos de Pesquisa. 1.ed.Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

Souza, Analucia Castro Pimenta de. Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. 2010. 267f. Dissertação de Mestrado. São Carlos, 2010.

TOLIO, Francisca Brum; BISOGNIN, Eleni. Explorando os princípios aditivo e multiplicativo por meio da metodologia de resolução de problemas. Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo, 2016.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Resolução de problemas In: PALHARES, P. Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico. Lisboa: Lidel, p.6-51, 2004.

VAN DE WALLE, J.A. Elementary and Middle School Mathematics. New York: Longman, 2001.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. A formação social da mente. Tradução: José Cipolla Neto. 6 ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998

ANEXOS

AUTORIZAÇÃO

Eu ____, abaixo assinado, responsável pela ___________________________ , autorizo a realização do estudo ______________________, a ser conduzido pelos pesquisadores abaixo relacionados. Fui informado pelo responsável do estudo sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual represento.

Esta instituição está ciente de suas corresponsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Maceió, _ _ \ _ _ \ 2016.

____

Assinatura e carimbo do responsável institucional

LISTA NOMINAL DE PESQUISADORES

____

DIREITO DE IMAGEM

AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM (A título gratuito)

Nome completo da mãe:

Nacionalidade:

Profissão:

RG:

Endereço: Tel.:

Nome Completo do filho (a):

Nacionalidade: Idade:

Objeto: Imagens do filho(a) desenvolvendo atividades de aprendizagem em sala de aula.

Neste ato, a título gratuito, autorizo, por prazo indeterminado e sem limites de território, ao senhor Diogo Pinheiro da Silva, professor, solteiro, portador da carteira de identidade No 2000001260230 do Ministério da Defesa, com domicilio na rua Dilermano Reis N0 305, Bairro da Santa Lúcia, Cidade de Maceió-Al. O direito de reproduzir a imagem de meu filho (a), objeto desta autorização em trabalhos acadêmicos, na produção de livros voltados à área de Educação Matemática, nos periódicos impressos, em CD-ROM, em DVD, aulas teóricas de cursos de graduação, pós-graduação e aperfeiçoamento profissional.

..................................., ...de ....de 2............. .

Assinatura:

....

Testemunhas:

1)Nome:

....Assinatura:...

RG: ....

2)Nome:

....Assinatura:...RG:

....