

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CÍCERO RITA DA SILVA

EFEITO DA NÃO LINEARIDADE NA DINÂMICA DAS  
OSCILAÇÕES DE RABI EM UMA REDE ÓPTICA  
UNIDIMENSIONAL

MACEIÓ

2013

CÍCERO RITA DA SILVA

**EFEITO DA NÃO LINEARIDADE NA DINÂMICA DAS  
OSCILAÇÕES DE RABI EM UMA REDE ÓPTICA  
UNIDIMENSIONAL**

Tese apresentada ao Instituto de Física  
da Universidade Federal de Alagoas, como  
parte das exigências do Programa de  
Pós-Graduação em Física, para obtenção  
do título de Doutor em Ciências.

Orientadora: Solange Bessa Cavalcanti.

MACEIÓ

2013

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

**Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos**

S586e Silva, Cícero Rita da.  
Efeito da não linearidade na dinâmica das oscilações de Rabi em uma rede óptica unidimensional / Cícero Rita da Silva. – 2013.  
121 f. : il.

Orientadora: Solange Bessa Cavalcanti.  
Tese (Doutorado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 94-104.  
Apêndices: f. 105-121.

1. Redes ópticas. 2. Oscilações de Rabi. 3. Efeito não linear.  
4. Autodesfocalização. I. Título.

CDU: 535.3:538.958

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE  
Tese de Doutorado**

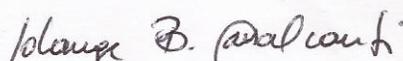
***“Efeito da Não Linearidade na Dinâmica das Oscilações  
de Rabi em uma rede Óptica Unidimensional”.***

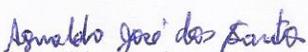
por

*Cícero Rita da Silva*

A Banca Examinadora composta pelos professores Solange Bessa Cavalcanti (orientadora), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Agnaldo José dos Santos, do Curso de Física da Universidade Federal de Alagoas (Campus Sertão), Rogério Fernandes de Souza, do Instituto Federal de Alagoas, Eduardo Jorge da Silva Fonseca, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, e Willamys Cristiano Soares Silva, do Curso de Física do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas consideram o candidato *aprovado com grau B.*

Maceió, 07 de maio de 2013

  
Prof<sup>a</sup> Solange Bessa Cavalcanti

  
Prof. Agnaldo José dos Santos

  
Prof. Eduardo Jorge da Silva Fonseca

  
Prof. Willamys Cristiano Soares Silva

  
Prof. Rogério Fernandes de Souza

*Dedico este trabalho à minha querida filha **Sophia** pelo amor incondicional e a minha esposa **Elisângela**, pela dedicação, apoio e incentivo durante estes anos.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao bondoso Deus, por suas ricas e infinitas bênçãos sobre minha vida. Por tantos livramentos e vitórias alcançadas.

Com certeza, esta é parte do trabalho que devo escrevê-la pautada nos meus sinceros sentimentos. Pois, foram tantas as dificuldades que apareceram no caminho, dentro da academia como “fora” dela, tentando me deter, mas superei de alguma forma estas barreiras dando a volta por cima, eu não me entreguei! lembro-me da frase de infância, “um *Thundercat* nunca se rende”. Muitas pessoas importantes cruzaram meu caminho, em momentos importantes, ficando marcadas em memória perene, dando uma grande parcela de contribuição. O importante é aproveitar cada momento da vida! Algumas frustrações, depressões, chatisses e alguns sentimentos negativos, só serviram para me tornar mais forte, maduro diante da situação. Recordo-me, de alguns filmes e livros que, foram analisados nesse período deixando suas marcas, como o filme *Click*, o livro *a Pedagogia da Autonomia* de Paulo Freire, o *Príncipe de Marquiável*, me ajudaram de certa forma a refletir a realidade. Todos estes acontecimentos foram como uma “mola propulsora, que me empurrou para frente ou me colocando no trilho”, e conseqüentemente aumentaram minha determinação pelo que decidir ser na carreira profissional.

Aos meus pais Gilberto Pedro da Silva e Maria Salete da Silva pelo amor, criação e educação dedicados a mim e aos meus irmãos de forma incondicional.

Minha esposa Elisângela e minha querida filha Sophia pelo afeto e incentivo.

Aos meus irmãos Sílvio, Carlos e Ingberg que sempre me apoiaram.

A professora Solange Bessa Cavalcanti, minha orientadora neste trabalho de doutorado, meus sinceros agradecimentos.

Ao Henrique Marks que me ajudou na parte computacional dessa tese.

Ao Prof<sup>o</sup>. Dr. Willamys Cristiano pelo apoio.

Como posso me esquecer de meus colegas e amigos durante todo o período de minha formação: Agnaldo, Marcelo, Elder, Askery, Manoel, Alcenísio, Jorge, Adriano, Angélica, Isadora, Elton, Fred, Henrique (cego), Ildemir, Ricardo, Francisco, Thiago, Wesley, Wesley, Wagner, Samuel, Giovana, Adelino, Arlan, Caio, André (Gabé), Jadielson, Paulo Juarez, Reinaldo (zé carioca), Socorro, Wandearley, Neto e tantos outros. Também os novos amigos do sertão em especial Lílian, Fernando, Gutembergue. Todos muito importantes nesse processo de construção de nossos sonhos.

Alguns professores tiveram importância fundamental em minha formação como Prof<sup>o</sup>. Dr. M. V. Gandhi Mohan, prof<sup>a</sup>. MSc. Cristina Hellmeister, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Tereza. Prof<sup>o</sup>. Dr. Marcelo Leite Lyra, Prof<sup>o</sup>. Dr. Iram Gléria, Prof<sup>o</sup>. Dr. Jenner Bastos, Prof<sup>o</sup>. Dr. Kleber Serra, Prof<sup>o</sup>. Dr. Heber, Prof<sup>o</sup>. MSc. Ornelas, Prof<sup>o</sup>. Dr. Jandir Miguel Hickmann, Prof<sup>o</sup>. Dr. Elton Fireman, Prof<sup>o</sup>. Dr. Evandro Gouveia, que me ajudaram a ter uma visão crítica do mundo da ciência em especial os princípios da Física.

Agradeço a direção do campus do sertão pelo apoio.

Agradeço também a CAPES que financiou meus estudos, sem este apoio poderia ter se tornado muito mais difícil.

*“Mesmo desacreditado e ignorado por todos, não posso desistir, pois para mim,  
vencer é nunca desistir”. (Albert Einstein)*

## RESUMO

A propagação linear de feixes ópticos através de um padrão periódico transversal, como uma rede induzida opticamente, é conhecida por induzir as oscilações de potência entre um par de modos de Fourier relacionados pela condição de ressonância de Bragg. Estes são os modos de Bloch com frequência dentro do band gap, por conseguinte, confinados no plano transversal  $(x,y)$ , mas viajam livremente na direção  $z$ . Partindo do acoplamento entre um feixe óptico e a rede periódica, essas oscilações das potências dos modos acoplados têm sido referidas como as oscilações de Rabi ópticas, devido à analogia com as oscilações de Rabi na matéria. Neste trabalho, investiga-se numericamente o comportamento de tais oscilações tipo Rabi, sob a influência da não linearidade de autodesfocalização ao longo da direção de propagação. Considera-se a incidência de um pulso de luz caracterizado por um espectro Gaussiano, centrado em um dos modos do par acoplado, em uma estrutura fotônica unidimensional com uma modulação periódica do índice de refração na direção transversal  $x$ . Para uma não linearidade fraca, pode-se observar uma interessante interação entre os dois modos acoplados em regime linear e o efeito de autodesfocalização: O efeito de autodesfocalização distribui energia da frequência central para os novos modos vizinhos, dentro do espectro inicialmente Gaussiano, centrado em dos modos acoplados, e transfere parte dessa energia para o modo ressonante correspondente. Desta forma, o modo ou a componente de frequência central do espectro na presença do efeito de autodesfocalização oscila de um extremo a outro dentro da zona de Brillouin. Ao aumentar a não linearidade, encontra-se uma combinação balanceada de ambos os efeitos, que são, ressonância de Bragg e autodesfocalização, que promovem a transferência não linear remodelando o espectro Gaussiano, que ocorre na entrada em torno de uma frequência central, para seu modo vizinho. Assim, as oscilações de Rabi não lineares podem revelar-se bastante proveitosas para técnicas ópticas e dispositivos ópticos no sentido de que, através de um espaço eletromagnético adequado permitir a sintonia de espalhamento não linear da frequência.

Palavras-chave: Redes ópticas. Oscilações de Rabi. Efeito não linear e Autodesfocalização.

## ABSTRACT

The linear propagation of optical beams through a transversal periodic pattern, such as an optically induced lattice, have been reported to induce power oscillations between a pair of Fourier modes related by the Bragg resonance condition. These are Bloch modes with frequency within the band gap and thus, confined to the transversal plane  $(x, y)$ , but otherwise traveling freely in the  $z$ -direction. Stemming from the coupling between the light beam and the periodic lattice, these twin-mode power oscillations have been referred as Rabi optical oscillations, due to the analogy with matter Rabi oscillations. In this work, investigates numerically investigate the behavior of such Rabi-type oscillations, under the influence of a selfdefocusing nonlinearity along the propagation direction. Is considered the incidence of a light pulse characterized by a Gaussian spectrum centered in one of the modes of the twin pair, into a one-dimensional photonic structure, with a periodic modulation of the optical refractive index lying in a transversal direction  $x$ . For a weak nonlinearities, observed an interesting interplay between linear twin coupling and selfdefocusing: the selfdefocusing effect spread energy of the central frequency to new neighboring modes occurring within the Gaussian spectrum input, centered in one mode of the pair, and transfer proportion of this energy to the correspondent resonant mode. In this way the center mode or frequency component of the spectrum in the presence of selfdefocusing effect, oscillates from one extreme to another within the Brillouin zone. By increasing the nonlinearity, one finds a balanced combination of both effects, that is, Bragg resonance and selfdefocusing, which promotes the transference of the nonlinear reshaping of a Gaussian spectrum, occurring around the central frequency at the input, to the neighborhood of its twin mode. Thus, the nonlinear Rabi oscillations might reveal itself quite useful for optical techniques and optical devices in the sense that, by suitably tailoring the electromagnetic space one could allow the tuning of the nonlinear frequency spreading.

Keywords: Optical lattice. Rabi oscillations. Nonlinear effect and Selfdefocusing.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$  - índice inteiro.

$\gamma$  - largura da Gaussiana a uma altura de  $\frac{1}{e}$ .

$\Lambda$  - período espacial das amplitudes de Fourier ou período das oscilações dos modos de Fourier.

$\Gamma$  - ponto de alta simetria no centro da zona de Brillouin.

$\Delta$  - variação de uma quantidade física.

$\chi$  - susceptibilidade elétrica ou constante dielétrica.

$\chi^{(1)}$ ,  $\chi^{(2)}$  e  $\chi^{(3)}$  são os tensores susceptibilidades de primeira, segunda e terceira ordem.

$\pi$  - 3.141592654.

$\sigma$  - coeficiente não linear.

$\omega$  - frequência angular.

$\varepsilon_0$  - representa a permissividade elétrica no vácuo.

$\epsilon$  - representa um número.

$\mu_0$  - indica a permeabilidade magnética no vácuo.

## Símbolos Romanos

**A** - vetor amplitude do campo elétrico.

**D** - vetor deslocamento elétrico ou vetor densidade elétrica.

**B** - representa o vetor indução magnética.

**H** - denota o vetor campo magnético.

**P** - vetor polarização elétrica.

---

$U$  - exprime a amplitude normalizada do campo elétrico.

$C_{\alpha,j,\dots}$  - denota as amplitudes do campo no espaço de Fourier.

$|C_{\alpha,j,\dots}|^2 = P$  - potências de Fourier.

$dC$  - função implementada num programa computacional em linguagem matlab.

$EDOs$  - conjunto de equações diferenciais e ordinárias.

$EDPNL$  - equação diferencial parcial não linear.

$i$  - unidade imaginária,  $i = \sqrt{-1}$ .

$c$  - velocidade da luz no vácuo.

$I$  - intensidade do campo elétrico.

$e$  - 2.718281828.

$Re$  - parte real de um número complexo.

$\mathcal{TF}$  - transformada de Fourier.

$H_k$  - transformada de Fourier do termo não linear da equação propagação, ou termo não linear de Fourier da equação de propagação implementado que compõe a estrutura do programa computacional.

$G_k$  - transformada de Fourier do termo de potencial da equação de propagação, ou termo de potencial de Fourier da equação de propagação implementado que compõe a estrutura do programa computacional.

$\tilde{U}_k$  - transformada de Fourier do campo elétrico normalizado para ser implementado na estrutura do programa computacional.

$\Delta z$  - passo em  $z$  que contem um grande número de pontos na direção  $x$ .

$\mathbf{Q}_{1,2} = \mathbf{k}_{x,y}$  - vetores elementares da rede recíproca normalizados.

$\mathbf{G}$  - vetor da rede recíproca.

$\mathbf{Q}$  - vetor da rede recíproca normalizado.

$M$  - ponto de alta simetria em um dos vértices da rede quadrada.

$K_B$  - número de onda ou vetor de onda de Bragg.

$k_B$  - número de onda adimensional ou o produto da largura da Gaussiana pelo número de onda.

$k$  - índice que indica o espaço de Fourier.

$\hat{e}$  - vetor unitário que indica a direção de polarização.

$n$  - índice de refração.

$n_0$  - índice de refração linear.

$n_2$  - índice de refração não linear.

$\Delta n$  - mudança não linear característica no índice de refração.

$f(r)$  - função genérica que representa as características de um meio.

$t$  - tempo.

$l$  - índice inteiro.

$m$  - índice inteiro.

$a_0$  - constante de integração.

$abs$  - Valor absoluto em linguagem matlab.

$ZB$  - zona de Brillouin.

$V_0$  - parâmetro de modulação da rede óptica.

$d$  - parâmetro de rede.

$I_0$  - intensidade na entrada do pulso incidente.

$P_0$  - potência de entrada do pulso incidente.

$W$  - unidade de potência.

$L_D$  - comprimento de difração do feixe ao longo da propagação.

$X, Y$  - coordenadas transversais cartesianas no espaço real.

$Z$  - coordenada cartesiana ao longo da propagação no espaço real.

$x, y$  - coordenadas cartesianas adimensionais.

$z$  - coordenada cartesiana adimensional ao longo da propagação no espaço real.

### Símbolos matemáticos

$\nabla$  - operador gradiente.

$\nabla^2$  - operador laplaciano.

$\nabla_{\mathbf{T}}^2$  - operador laplaciano transversal.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO GERAL</b>	<b>16</b>
1.1	Redes ópticas . . . . .	17
1.2	Oscilações de Rabi . . . . .	19
1.2.1	Oscilações de Rabi magnética . . . . .	19
1.2.2	Oscilações de Rabi por emissão e absorção . . . . .	21
1.2.3	Oscilações de Rabi em redes ópticas . . . . .	23
<b>2</b>	<b>EQUAÇÃO DE PROPAGAÇÃO</b>	<b>28</b>
2.1	Introdução . . . . .	28
2.2	Introdução a óptica não linear . . . . .	28
2.3	Equações de Maxwell . . . . .	32
2.4	Derivação da equação de propagação . . . . .	34
2.4.1	Polarização não linear . . . . .	36
2.4.2	Efeitos de autofocalização e autodesfocalização . . . . .	38
2.4.3	Equação não linear para a amplitude do campo elétrico . . . . .	40
2.5	Potencial periódico . . . . .	43
2.6	Aplicação do teorema de Bloch . . . . .	44
2.7	Equações diferenciais ordinárias-EDOs . . . . .	46

---

2.8	Conclusão . . . . .	47
<b>3</b>	<b>MÉTODOS NUMÉRICOS</b>	<b>49</b>
3.1	Introdução . . . . .	49
3.2	Método numérico pseudo-espectral . . . . .	50
3.2.1	Aplicação do método pseudo-espectral . . . . .	50
3.3	Método numérico Runge-Kutta . . . . .	51
3.3.1	Aplicação do método Runge-Kutta . . . . .	53
3.4	Conclusão . . . . .	54
<b>4</b>	<b>OSCILAÇÕES NÃO LINEARES COM DOIS MODOS RESSO-</b>	
	<b>NANTES</b>	<b>55</b>
4.1	Introdução . . . . .	55
4.2	Oscilação não linear em uma dimensão . . . . .	56
4.3	Oscilação não linear em duas dimensões . . . . .	64
4.4	Conclusão . . . . .	69
<b>5</b>	<b>OSCILAÇÕES NÃO LINEARES MULTIMODAL</b>	<b>71</b>
5.1	Introdução . . . . .	71
5.2	Dinâmica de evolução multimodal . . . . .	72
5.3	Solução da equação de propagação . . . . .	73
5.3.1	Validades da propagação . . . . .	74
5.4	Conclusão . . . . .	89
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>91</b>
6.1	Perspectivas para trabalhos futuros . . . . .	93

**REFERÊNCIAS 94**

**7 APÊNDICES 105**

7.1 Apêndice A . . . . . 105

7.1.1 Vetor deslocamento elétrico . . . . . 105

7.1.2 Calculando a equação da onda . . . . . 105

7.1.3 Divergente do campo . . . . . 106

7.1.4 Cálculos algébricos da polarização não linear . . . . . 107

7.1.5 Meio isotrópico . . . . . 108

7.1.6 Dispersão . . . . . 108

7.1.7 Validade dos resultados . . . . . 108

7.1.8 Exprimindo a equação de onda não linear para o campo elétrico 109

7.1.9 A equação não linear para amplitude do campo elétrico  $A$  . . 110

7.1.10 Equação normalizada . . . . . 111

7.2 Apêndice B . . . . . 112

7.3 Apêndice C . . . . . 116

7.4 Apêndice D . . . . . 118

7.4.1 EDOs para quatro modos em matlab . . . . . 119

7.5 Apêndice E . . . . . 120

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO GERAL

A propagação da luz através de um meio material tem se tornado um objeto de estudo para a comunidade científica durante algumas décadas. Investigando o fenômeno da interação da luz com a matéria é possível descrever a estrutura atômica de alguns meios materiais e determinar suas propriedades ópticas. Depois da demonstração do primeiro laser em 1960, deu-se início aos trabalhos em óptica não linear como a observação do segundo harmônico, geração de soma e subtração de frequência, mistura de ondas, refração e absorção não lineares. Esses fenômenos ópticos podem ser usados no desenvolvimento de técnicas de caracterização de materiais não lineares, tendo o foco voltado para a pesquisa científica e aplicação na indústria.

Os efeitos não lineares só são observados a altas intensidades de luz ou longas distâncias de propagação, portanto, estes efeitos só puderam ser estudados com o desenvolvimento do laser. Em particular, materiais que exibem propriedades não lineares de terceira ordem grande e respostas rápidas são interessantes para o de-

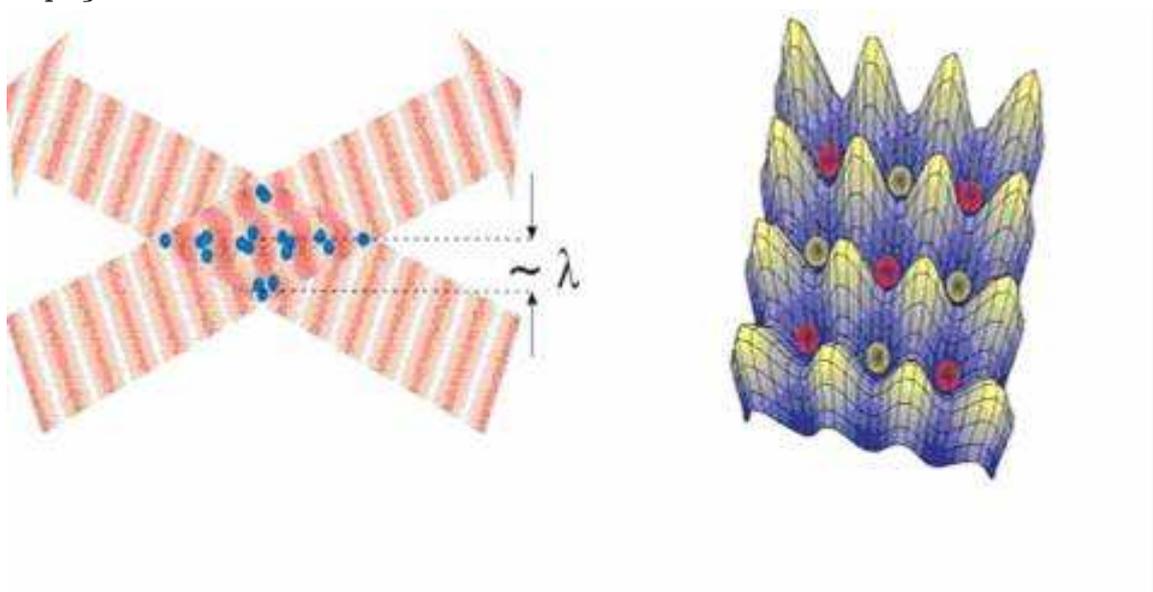
envolvimento de chaves ópticas ultra-rápidas, empregadas em sistemas ópticos de transmissão e processamento de dados, por exemplo. As perspectivas sobre o estudo em óptica não linear aumentaram com o desenvolvimento de lasers semicondutores de última geração, pois foi possível instalar-se redes de transmissão de dados em fibras ópticas de alta capacidade e longas distâncias, tendo grande aplicação na indústria na área de telecomunicações. Recentemente vem sendo incentivada a pesquisa de novos mecanismos que ofereçam vantagens sobre os materiais cristalinos como, por exemplo, as redes ópticas.

## 1.1 Redes ópticas

As redes ópticas são estruturas ópticas formadas por superposições de feixes de luz lasers sobre um meio material aprisionando partículas (átomos) em um menor potencial [1], criando um padrão espacialmente periódico [2], vide figura (1.1). As redes ópticas também são conhecidas como redes fotônicas.

Esse sistema óptico formado por átomos presos, assemelha-se a um cristal, no sentido que essas partículas estão localizadas periodicamente no espaço [3]. De maneira semelhante é a constituição do Condensado de Bose-Einstein (BEC), que é uma fonte coerente de onda de matéria, uma coleção de átomos todos no mesmo estado [4, 5]. A formação de um BEC é conhecida como uma armadilha para aprisionar os átomos [6, 7], conseqüentemente resfriando-os através de feixes de luz laser [8]. Um sistema formado por potenciais periódicos como as redes ópticas, que são análogas aos cristais fotônicos [9, 10, 11] podem ser matematicamente descrito usando a teoria de Bloch [12, 13].

**Figura 1.1:** A figura ilustra a formação de uma rede óptica espacialmente periódica. O lado esquerdo representa dois feixes de lasers que estão sendo incididos numa região espacial, e no ponto de intersecção desses feixes ocorre o aprisionamento de átomos, representados pelas bolinhas azuis. A figura do lado direito ilustra uma rede óptica em três dimensões, e as bolas em vermelho e verdes simbolizam os poços de potenciais, distanciados periodicamente no espaço.



Fonte: Conforme referência [2].

As redes ópticas podem oferecer algumas vantagens sobre as redes cristalinas estudadas em sistemas eletrônicos. É interessante mencionar algumas vantagens, por exemplo, o tempo de coerência dessas redes é bastante longo, permitindo observar alguns fenômenos coerentes como as ondas de Bloch [14, 15, 16]. Outros ganhos do estudo de uma rede óptica, são as possibilidades de armazenamento e transmissão de informações mais eficientes, não sendo limitadas pela resistividade elétrica inerente aos elétrons nos metais e semicondutores. Por conseguinte, são estudadas as redes ópticas não lineares, tais redes são formadas em um determinado meio onde é possível observar os fenômenos ópticos não lineares como, por exemplo,

o efeito eletro-óptico conhecido como efeito Kerr. Atualmente, as redes ópticas são aplicadas na indústria na fabricação de circuitos integrados para serem usados em processadores de computadores. Um fenômeno interessante de ser estudado em redes ópticas é a dinâmica das oscilações de Rabi óptica similar às oscilações de Rabi que podem ocorrer em um sistema atômico.

## 1.2 Oscilações de Rabi

As oscilações de Rabi constituem um mecanismo que têm despertado o interesse da comunidade óptica. Estas oscilações estão estritamente relacionadas com a propagação de um feixe de luz em estruturas periódicas, que foi primeiramente estudada por Lord Rayleigh em 1887 [17], podendo revelar características bastante intrigantes. Se a periodicidade do meio permite exibir dimensões da ordem do comprimento de onda da onda propagante, existe a possibilidade de um espalhamento coerente da luz [18]. Na propagação de um feixe luminoso em meios que expressam uma periodicidade característica [19], pode ser perfeitamente observada uma propriedade interessante, que é a existência de regiões espectrais “proibidas” para algumas frequências [20]. Pois, para comprimentos de ondas próximos da escala da constante periódica do meio, as ondas interferem, podendo ocorrer a interferência destrutiva, dependendo da diferença de fase das ondas superpostas.

### 1.2.1 Oscilações de Rabi magnética

As oscilações Rabi foram primeiramente identificadas por volta dos anos 30

(trinta), quando Isidor Rabi e colegas mostraram que usando um campo magnético variável no tempo podia forçar o momento magnético provocando uma mudança de estado [21]. Este fato foi possível devido ao experimento de Stern-Gerlach (S-G) [22, 23], pois na década posterior a este experimento, alguns cientistas usando técnicas similares, mostraram que os núcleos de alguns átomos podem apresentar o momento angular de forma quantizado [23, 24]. Conseqüentemente, uma série de experiências culminou em 1937, na descoberta de que as transições dos estados poderiam ser induzidas usando simplesmente campos variáveis no tempo, ou campos de Radio-Frequências (RF). Na época em que o experimento foi realizado, Rabi e seus colaboradores usaram a seguinte técnica: submeteram um feixe molecular de hidrogênio ( $H_2$ ) em uma região de alto vácuo a um campo magnético não-homogêneo juntamente com uma radiação na faixa das RF. Os referidos cientistas puderam observar que, para um certo valor de frequência o feixe conseguia absorver uma quantidade de energia e sofria pequeno desvio. Isso era constatado como uma queda da intensidade, observada no feixe na região do detector. Estas oscilações do spin do elétron de mudar de direção, indo de um lugar para outro na incidência de campos variáveis, passaram a ser conhecidas como oscilações de Rabi. Finalmente, o trabalho de Rabi, tornou-se conhecido em sistemas quânticos de ressonâncias a partir de transições entre níveis. Este fenômeno, por sua vez, foi aplicado na indústria passando a ser o mecanismo de trabalho para a ressonância magnética por imagem (RMI), equipamento encontrado com frequências em hospitais. Este experimento marca, historicamente, a primeira observação do efeito da ressonância magnética nuclear.

A referida Ressonância magnética é uma técnica que permite determinar as

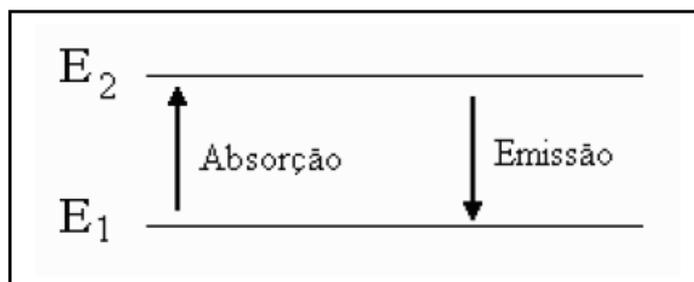
propriedades de uma substância através da correlação da energia absorvida versus a frequência, na faixa de megahertz (MHz) do espectro eletromagnético. A técnica de ressonância magnética nuclear (RMN) pode ser perfeitamente usada em medicina e em biologia, como meio de formar imagens internas de corpos humanos e de animais usando a radiologia diagnóstica e tomografia computadorizada [25], bem como de seres microscópicos (como no caso da microscopia de RMN). A microscopia de RMN é um mecanismo de formação de imagens através da técnica da ressonância magnética nuclear em amostras de tamanho microscópico. A referida técnica de ressonância magnética em seres humanos consiste em aplicar em um paciente submetido a um campo magnético intenso, ondas com frequências iguais as dos núcleos (geralmente do  $1H$  da água) dos tecidos do corpo que se quer examinar.

### 1.2.2 Oscilações de Rabi por emissão e absorção

Um exemplo típico das oscilações de Rabi é um sistema atômico de dois níveis, onde uma onda eletromagnética cuja frequência está sintonizada com a diferença de energia entre dois estados, provocando trocas populacionais periódicas durante o processo de emissão e reabsorção de fótons [26].

A figura (1.2) é conhecida como um diagrama de 2 níveis de energia de um sistema atômico. Para compreender de forma simples o processo de absorção e emissão por um átomo, pode-se recorrer ao estudo da interação da luz com a matéria. Quando uma onda eletromagnética em uma dada frequência incide sobre um átomo, esta onda induz uma oscilação nos elétrons nessa frequência; como as partículas estão oscilando conseqüentemente estão aceleradas. A teoria do eletromagnetismo afirma

**Figura 1.2:** Representação esquemática de um sistema de dois níveis. Onde as letras  $E_1$  e  $E_2$ , indicam dois níveis de energia de um sistema atômico.

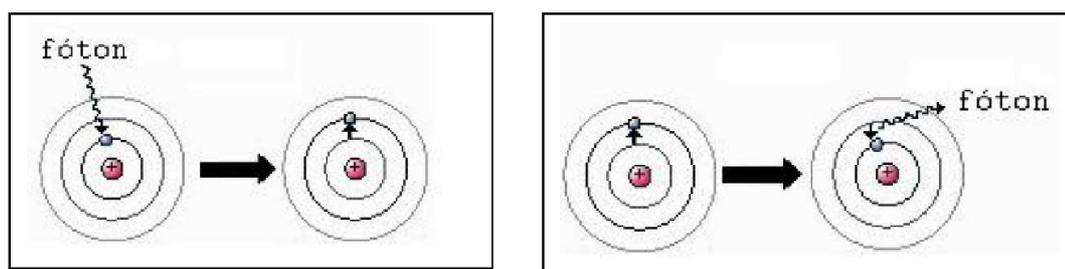


Fonte: Conforme referência [27].

que uma carga elétrica acelerada emite uma radiação. Assim, a figura (1.2) pode ser facilmente explicada considerando uma onda eletromagnética interagindo com um átomo em uma frequência que é proporcional a diferença de energia entre os dois níveis  $E_1$  e  $E_2$ . Então, quando um átomo absorve fótons ganha energia, e a população de elétrons que está no nível  $E_1$  é elevada para o outro nível  $E_2$ . Na sequência, o átomo emite uma radiação nesta mesma frequência perdendo energia, com isso os elétrons retornam ao nível  $E_1$ .

A figura (1.3) mostra a interação de fótons com um átomo que apresenta vários níveis de energia [27]. Este sistema atômico absorve fótons que oscilam em uma frequência sintonizada com diferença de energia entre dois estados do átomo, assim, os elétrons são excitados de um estado de energia mais baixo para um estado de energia mais elevado. Na sequência o sistema emite fótons nessa frequência e como consequência os elétrons deixam o nível mais alto e voltam ao nível mais baixo. Este processo de emissão e absorção de um sistema atômico de dois níveis compõem o ciclo de Rabi e o inverso da duração de um ciclo é chamado de frequência de Rabi em que a

**Figura 1.3:** Representação esquemática de absorção e da emissão de fótons. A bola central em vermelho indica o núcleo atômico, enquanto que os círculos envolta do núcleo ilustram os níveis de energia do átomo. A seta ondulada denota a presença de fótons de uma onda eletromagnética interagindo com o átomo.



Fonte: Conforme referência [27].

matéria oscila, por exemplo, um átomo de dois níveis onde a população é encontrada no estado fundamental ou no estado excitado [28]. Entretanto, as oscilações de Rabi são conhecidas por ocorrerem de forma universal em muitos sistemas físicos, por exemplo, as redes ópticas.

### 1.2.3 Oscilações de Rabi em redes ópticas

A concepção das oscilações de Rabi tem sido estendida para sistemas ópticos, onde a propagação da luz está limitada para certos modos [29, 30]. Em 2007, foi publicado [32] um estudo sobre as oscilações de Rabi em regime linear em uma rede óptica. As referidas oscilações em tal rede ocorrem quando, um feixe luminoso composto por um par de frequências está se propagando nesse meio. Enquanto que, a rede acopla essas frequências desempenhando um papel similar ao campo eletromagnético que acopla dois níveis de um sistema atômico. Neste trabalho foi

investigada a dinâmica das oscilações de dois modos de Fourier, partindo do fato que estes estão relacionados pela condição de ressonância de Bragg. Usando a transformada de Fourier do campo elétrico expresso como uma soma de duas ondas planas juntamente com uma expansão em série de Fourier do potencial, que gera a rede, foi possível obter um conjunto de duas equações diferenciais ordinárias que descreve a evolução dos modos. Esta pesquisa foi estendida para uma rede óptica com simetria hexagonal [33].

Em 2008, foi apresentado em uma conferência [34], um trabalho sobre a dinâmica de propagação em redes ópticas sob efeito não linear. Este estudo mostrou que dois modos do espectro de Fourier trocam energia entre si, mas com período prolongado. Investigou-se, o comportamento das oscilações de Rabi dos referidos modos em regime não linear para o caso bidimensional. Outro trabalho importante desenvolvido nessa época, mostrou que as oscilações de Rabi interbandas são possíveis em arranjos de guias de ondas [35].

Em 2009, outro trabalho sobre a dinâmica das oscilações de Rabi em redes ópticas foi apresentado a comunidade científica [36], sendo que, a abordagem foi estendida para as redes não lineares [37, 38], mas usando o modelo simples de dois níveis. Também foi observado que o período das oscilações dos modos sofre um aumento espacial com a presença do efeito não linear, mas pode ser perfeitamente balanceado pelos comprimentos de não linearidade e ressonância. Um resultado importante, que chamou a atenção dos cientistas foi que, quando a não linearidade é forte, comparada com a modulação do potencial, a energia passa a estar mais localizada em apenas um modo, de maneira que os modos tendem a se comportar como estados localizados, similar ao *selftrapping* [41] comum em sistemas eletrônicos.

Entretanto, nesse estudo não foi apresentada nenhuma simulação numérica que possibilitasse uma comparação com o modelo usado para as oscilações não lineares de dois níveis; pois a dinâmica de apenas um modo com toda energia não representa um sistema físico. Ainda em 2009, as oscilações de Rabi foram demonstradas experimentalmente em redes fotônicas [42]. Recentemente, outros trabalhos relevantes foram publicados sobre as oscilações de Rabi em sistemas ópticos [43, 44, 45].

No presente trabalho, inicialmente é feito um estudo para modelar uma equação não linear normalizada que governa a propagação de um feixe luminoso através de uma rede óptica periódica. Onde foi usada uma descrição matemática para sistemas periódicos similar ao estado sólido. Em seguida foram empregadas simulações computacionais para investigar os efeitos não lineares sobre as oscilações de Rabi de um feixe com perfil inicialmente Gaussiano, centrado em um dos modos ressonantes, colocado para propagar através desta rede. Este estudo mostra que os trabalhos realizados sobre as oscilações de Rabi de só dois modos ressonantes sob efeito não linear não está correto.

Os capítulos dessa tese estão organizados da seguinte maneira: No capítulo de introdução geral é elaborada uma discussão sobre os principais conceitos envolvidos nesta tese que fornecerão uma compreensão melhor do trabalho realizado. No capítulo dois, é abordada uma discussão sobre os princípios da óptica não linear para fundamental, a partir das equações de Maxwell, a derivação de uma equação não linear e normalizada que descreve a propagação de um feixe luminoso. Também é feita uma discussão sobre a escolha do potencial periódico da rede. No capítulo três, são apresentados os métodos computacionais usados nas simulações e resolução das equações diferenciais ordinárias (EDOs). É elaborado um modelo com dois modos,

para investigar as oscilações de Rabi não lineares em uma e em duas dimensões, no capítulo quatro. No capítulo cinco é resolvida, numericamente, a equação de propagação, usando um feixe com um perfil inicialmente Gaussiano usado como uma condição inicial e investigadas as oscilações de Rabi sob a influência do efeito não linear. Neste capítulo, estão os resultados mais importantes desta tese, pois mostra a dinâmica de evolução do feixe tanto no espaço real quanto no espaço de Fourier. Neste último, é mostrado visivelmente as oscilações de Rabi do espectro de Fourier dentro da zona de Brillouin.

Os cálculos detalhados da dedução da equação de propagação, como os algoritmos numéricos usados para resolver as equações estão no apêndice.

Parte dessa tese foi submetida para o seguinte jornal,

1. C. Rita da Silva, Henrique Marks and S. B. Cavalcanti. Effect of non-linearity on the dynamics of Rabi oscillations in optically induced lattices. Optics communications.

Foi apresentada nas seguintes conferências:

1. SILVA, C. R; SHCHESNOVICH, V. S; CAVALCANTI, S. B. Oscilação de Rabi amortecidas em redes ópticas bi-dimensionais. In: ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA-ENFMC, XXVIII, 2008, Águas de Lindóia, São Paulo.

2. SILVA, R. C; CAVALCANTI, S. B. Oscilações de Rabi em uma rede opticamente induzida em duas dimensões com simetria hexagonal. In: WORKSHOP DO PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA, III, 2010, Maceió, Alagoas.

3. SILVA, C. R; MARKS, H; CAVALCANTI, S. B. Rabi oscillations in an optically induced lattice in two dimensions. In: ENCONTRO DE FÍSICOS DO

---

NORTE E NORDESTE-EFNN, XXVIII, 2010, Teresina, Piauí.

4. SILVA, C. R; MARKS, H; CAVALCANTI, S. B. Rabi oscillations in an optically induced lattice in two dimensions. In: ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA-ENFMC, XXXI, 2011, Foz do Iguaçu, Paraná.

5. SILVA, C. R; MARKS, H; CAVALCANTI, S. B. Efeito da não linearidade na dinâmica das oscilações de Rabi em uma rede óptica unidimensional. In: ENCONTRO DE FÍSICOS DO NORTE E NORDESTE-EFNN, XXX, 2012, Salvador, Bahia.

# Capítulo 2

## EQUAÇÃO DE PROPAGAÇÃO

### 2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado uma introdução sobre os princípios da óptica não linear, assim, elaborar uma breve descrição dos fenômenos ópticos não lineares relevantes.

A partir das equações de Maxwell é derivada uma equação não linear que governa a propagação de um feixe luminoso através de uma rede óptica. Consequentemente, é feita uma discussão da escolha do potencial que fornece a forma da rede. A partir da expressão da equação da onda é exibido um conjunto de equações diferenciais ordinárias que descreve a dinâmica das oscilações das amplitudes de Fourier acopladas com o vetor da rede óptica.

### 2.2 Introdução a óptica não linear

A óptica não linear estuda os fenômenos ópticos que ocorrem como uma

consequência da interação da luz com a matéria. Em geral, estes fenômenos considerados não lineares, podem ser observados no uso de uma luz intensa e coerente, por exemplo, uma luz emitida por um laser. Um fato importante que deve ser mencionado é que, o início da óptica não linear foi a descoberta do fenômeno óptico não linear da geração de segundo harmônico por Franken e colaboradores em 1961 [46], isso ocorreu a algum tempo após a demonstração do funcionamento do primeiro laser por Maiman em 1960 [49].

O estudo dos fenômenos ópticos não lineares não somente aumentou nosso conhecimento sobre a interação da luz com a matéria, mas provocou um grande impacto tecnológico na área de óptica. Um grande avanço do estudo em óptica não linear foi o desenvolvimento de novas técnicas de caracterização de materiais e a implementação de dispositivos ópticos não lineares, que apresentam implicações importantes no ramo da ciência e da engenharia.

Quando uma onda eletromagnética incide sobre um meio material, o campo elétrico  $\mathbf{E}$  induz uma polarização  $\mathbf{P}$ . Microscopicamente, um meio material pode ser descrito como um sistema formado por partículas carregadas, que são os núcleos iônicos (cargas positivas) e os elétrons (cargas negativas). A polarização  $\mathbf{P}$ , está relacionada com o surgimento de momentos de dipolos elétricos devida a resistência destas partículas carregadas. Assim, a força que está associada com o campo elétrico aplicado produz um deslocamento relativo entre essas partículas, com isso as cargas positivas podem se mover na direção do campo, enquanto que as cargas negativas mover-se-ão na direção contrária. Este deslocamento de cargas provoca o surgimento de momentos de dipolos elétricos induzidos. Geralmente, a polarização  $\mathbf{P}$  está associada com o campo elétrico  $\mathbf{E}$  e descreve a resposta do meio ao campo

aplicado, usando a aproximação de dipolos elétricos, a polarização pode ser definida como o momento de dipolos induzidos por unidades de volume [50]. Para esse estudo será considerada a polarização  $\mathbf{P}$ , dependendo do campo elétrico  $\mathbf{E}$  da onda eletromagnética.

Quando um feixe luminoso de baixa intensidade incide sobre um meio, a polarização induzida apresenta um comportamento linear com o campo elétrico aplicado. Por simplicidade, a dependência da polarização com o campo elétrico pode ser escrito pelas seguintes equações (2.1) e (2.2); onde as grandezas físicas envolvidas são grandezas escalares ou números reais.

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E(t). \quad (2.1)$$

Onde  $\varepsilon_0$  é a permissividade elétrica no vácuo e  $\chi^{(1)}$  é a susceptibilidade linear do meio, que é responsável pelos efeitos ópticos lineares como, por exemplo, a refração [58]. Agora, quando um feixe luminoso incidente é de alta intensidade, como aquela emitida por um laser, a resposta do meio torna-se não linear com o campo elétrico aplicado. Geralmente, esta resposta não linear pode ser expressa escrevendo a polarização como uma expansão em série de potência no campo elétrico da radiação óptica [51] dada por

$$P(t) = \varepsilon_0 [\chi^{(1)} E(t) + \chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) + \dots]. \quad (2.2)$$

Onde  $\chi^{(2)}$  e  $\chi^{(3)}$  são as susceptibilidades de 2ª e 3ª ordem, respectivamente. Estas grandezas representam a não linearidade de ordens superiores na resposta do meio, enquanto que os outros termos não lineares são irrelevantes. Por simplicidade, foram

considerados  $E(t)$  e  $P(t)$ , como grandezas escalares. Então, da maneira em que foram escritas as equações (2.1) e (2.2), estas podem representar só as interações ópticas lineares e não lineares em meios isotrópicos<sup>1</sup>, sem perdas e sem dispersão<sup>2</sup>, sendo  $\chi^{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) grandezas escalares, reais e constantes.

Usando uma descrição mais geral, levando em conta a natureza vetorial dos campos, e escrevendo as susceptibilidades do meio como grandezas tensoriais, e portanto dependem da estrutura atômica, como das frequências dos campos elétricos aplicados. Assim, escrevendo o campo elétrico de uma onda eletromagnética como uma soma discreta de componentes de frequências [58], da seguinte maneira

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t} + c.c., \quad (2.3)$$

onde o termo c.c. significa conjugado complexo, conforme está explícito no apêndice A.  $n$  é um índice inteiro,  $\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = \mathbf{A} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$  é vetor amplitude do campo elétrico, com  $\mathbf{A}$  sendo a parte que varia lentamente no espaço e o somatório é sobre todas as componentes de frequências positivas. Reescrevendo a equação (2.3), obtém-se

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, \omega_n) e^{i(\mathbf{K}\mathbf{r} - \omega_n t)} + c.c. \quad (2.4)$$

De maneira similar, pode-se usar a notação vetorial para expressar a polarização,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{P}_n(\mathbf{r}, \omega_n) e^{i(\mathbf{K}\mathbf{r} - \omega_n t)} + c.c., \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Um meio isotrópico é aquele em que uma propriedade ou quantidade física está relacionada com um ponto que independe da direção.

<sup>2</sup>A dispersão indica como a velocidade da onda e o índice de refração dependem do comprimento de onda.

onde  $\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$  denota a contribuição linear da polarização.  $\mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}^{(3)}(\mathbf{r}, t)$  exibe a contribuição não linear da polarização do meio. Aqui, observa-se que as polarizações são grandezas vetoriais e dependem das frequências. É interessante expressar uma relação mais geral para a polarização no domínio das frequências, similar a série dada pela equação (2.2)

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \left[ \chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}^2 + \chi^{(3)} : \mathbf{E}^3 + \dots \right]. \quad (2.6)$$

Onde  $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \chi^{(3)}, \dots$  são tensores que representam as susceptibilidades ópticas no domínio das frequências.  $\mathbf{E}^j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) são os vetores campos elétricos da onda eletromagnética.

### 2.3 Equações de Maxwell

A teoria da propagação de ondas eletromagnéticas em um meio é descrita pelas equações de Maxwell [52, 53]. Em muitos casos é usado o sistema de unidades mks, assim, essas equações são:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f. \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_f, \quad (2.10)$$

Aqui,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são os vetores campo elétrico e o campo magnético, respectivamente. O deslocamento elétrico é representado por  $\mathbf{D}$  e o vetor  $\mathbf{B}$  é a indução magnética ou densidade do fluxo magnético. Vetor densidade de corrente livre é  $\mathbf{J}_f$  e a densidade de cargas livres indicada por  $\rho_f$ , representam as fontes para o campo eletromagnético. Os vetores  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  surgem devido a resposta aos campos elétricos e magnéticos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  propagando no meio, e se relacionam através das relações constitutivas [53] dadas por

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}. \quad (2.12)$$

Onde  $\varepsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo e,  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{M}$  são as polarizações elétricas e magnéticas; por fim, é considerado o meio não magnético, dessa forma  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ . O meio não exibe a presença de carga e de corrente livres, então  $\rho_f = 0$  e  $\mathbf{J}_f = \mathbf{0}$ . A não linearidade está implícita na equação (2.11). A polarização pode ser reescrita por  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(NL)}$ , com isso o vetor deslocamento elétrico, por sua vez, pode ser expresso por

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{P}^{(NL)}. \quad (2.13)$$

Aqui,  $\mathbf{D}^{(1)} = \varepsilon_L(\mathbf{r}) \mathbf{E}$ , exibe a parte linear do vetor deslocamento elétrico,  $\varepsilon_L(\mathbf{r})$  é

o tensor permissividade elétrica linear do meio, escrito como uma função do vetor posição  $\mathbf{r}$ , conforme o apêndice A.

## 2.4 Derivação da equação de propagação

Nesta seção será exibida uma derivação da equação de propagação, partindo das equações de Maxwell. Como é de costume, toma-se o rotacional da equação (2.9), muda-se a ordem das derivadas espacial e temporal no lado direito da equação resultante, e usando as equações (2.12) e (2.10) com  $\mathbf{M} = 0$  e  $\mathbf{J}_f = 0$  respectivamente, e procedendo conforme o apêndice A, obtém-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.14)$$

Lembrando que  $\mathbf{D}$  é dado por (2.13), e que  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ , é a velocidade da luz no vácuo. Pode-se reescrever a equação (2.14) da seguinte maneira

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}^{(1)}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(NL)}}{\partial t^2}. \quad (2.15)$$

Essa equação expressa a forma mais geral da equação da onda na óptica não linear, que pode ser usada com certas simplificações. Usando a identidade vetorial (2.16)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (2.16)$$

e substituindo na equação (2.15), tem-se a seguinte equação

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}^{(1)}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(NL)}}{\partial t^2}, \quad (2.17)$$

onde o primeiro termo  $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})}$  com  $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_L(\mathbf{r}) + \varepsilon_{NL}(\mathbf{r})$ ; os cálculos detalhados dessa passagem estão no apêndice A. Supondo que a fração de variação de  $\varepsilon(\mathbf{r})$  é pequena para um determinado comprimento de onda [54], isto implica que, o primeiro termo da equação (2.17) pode ser desprezado. Assim, a equação (2.17) será tratada para o caso mais simples, levando em consideração um meio não linear isotrópico, sem perdas e sem dispersão. Então, para esse caso a permissividade linear do meio é uma grandeza escalar, real e independente da frequência. Com isso, a equação (2.17) assume a seguinte forma,

$$-\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_L(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(NL)}}{\partial t^2}. \quad (2.18)$$

Essa equação (2.18) denota a forma de uma equação de onda não homogênea, onde a polarização não linear age como uma fonte de novas componentes de frequências do campo eletromagnético.

Considerando que o campo elétrico incidente é uma onda monocromática, ou seja, o campo elétrico oscila em uma frequência  $\omega$ , assim, escrevendo uma expressão para o campo elétrico obtém-se

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + c.c.]. \quad (2.19)$$

Essa expressão (2.19) mostra que a amplitude do campo elétrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  oscila na frequência  $\omega$ , e apenas depende das componentes espaciais. Por simplicidade, considera-se um campo elétrico escalar polarizado ao longo da direção  $X$ , conforme a ex-

pressão (2.20)

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [E(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + c.c.]. \quad (2.20)$$

A referida equação (2.20), será usada para obter uma expressão para a polarização não linear e conseqüentemente será substituída na expressão (2.18), conformem as seções posteriores e o apêndice A.

### 2.4.1 Polarização não linear

Para obter uma expressão para a polarização não linear é necessário fazer algumas considerações. Em geral, as susceptibilidades do material são escritas como grandezas tensoriais, com isso, os termos de ordem par da susceptibilidade são nulos em qualquer meio que apresente um arranjo centro-simétrico de suas partículas (átomos) que o constituem. Enfim, em meios que exibem simetria de inversão, tais como líquidos, gases e sólidos amorfos (como vidro) os efeitos não lineares de ordem par são nulos, enquanto que os efeitos de terceira ordem são os mais importantes. No caso do presente trabalho, o meio é uma rede com modulação periódica no espaço que apresenta invariança nas operações de inversão e rotação, com isso, o termo de segunda ordem da polarização (2.6) pode ser desprezado. Portanto, o termo de terceira ordem da polarização é o termo mais relevante e fornece vários fenômenos ópticos não lineares. Considerando o meio isotrópico (vide apêndice A), pode-se expressar o tensor susceptibilidade como um escalar, número real e constante. Então, calculando a polarização não linear da equação (2.2), usando o campo elétrico da equação (2.20) e procedendo conforme o apêndice A, obtém-se

$$P^{(NL)} = \frac{1}{8}\varepsilon_0\chi^{(3)} [3|E|^2 Ee^{-i\omega t} + c.c.]. \quad (2.21)$$

A expressão (2.21) ainda pode ser reescrita da seguinte forma

$$P^{(NL)} = \varepsilon_{NL}(\mathbf{r}) [Ee^{-i\omega t} + c.c.], \quad (2.22)$$

onde  $\varepsilon_{NL}(\mathbf{r}) = \frac{3}{8}\varepsilon_0\chi^{(3)} |E|^2$ , com  $\chi^{(3)} = \chi^{(3)}(\mathbf{r})$ . Em meios dielétricos que possuem uma simetria de inversão, o termo relacionado com a parte real de  $\chi^{(3)}$  que oscila na frequência do campo elétrico incidente, é o responsável pelo fenômeno de refração não linear indicado por  $n_2$ . O índice de refração não linear  $n_2$ , está relacionado com a parte real da susceptibilidade de terceira ordem dado por [55, 56]

$$n_2 = \frac{3\text{Re}(\chi^{(3)})}{8n_0}. \quad (2.23)$$

Onde  $n_0 = (1 + \text{Re}\chi^{(1)})^{\frac{1}{2}}$  é o índice de refração linear. A mudança no índice de refração é expressa pela equação, (2.24)

$$n = n_0 + n_2 I. \quad (2.24)$$

Onde  $I$  é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico  $|\mathbf{E}|^2$ . Assim,  $\Delta n = n_2 I$  denota a mudança não linear no índice de refração do meio, induzida pelo feixe óptico [57]. Esta equação é algumas vezes chamada de efeito Kerr óptico, por analogia com o tradicional efeito Kerr eletro-óptico, no qual o índice de refração de um meio muda por uma quantidade que é proporcional ao quadrado da amplitude de um campo elétrico estático aplicado. Geralmente, o valor de  $n_2$  por

esse processo físico não é grande, quando comparado com valores obtidos por outros processos, sendo da ordem de  $10^{-16} \text{cm}^2/\text{W}$ ; entretanto este processo apresenta um tempo de resposta característico da ordem de  $10^{-15} \text{s}$  [58, 59]. Este efeito Kerr óptico pode ocorrer em muitos materiais dielétricos transparentes, podendo ser utilizado na indústria como chaveamento totalmente óptico de alta velocidade, por exemplo.

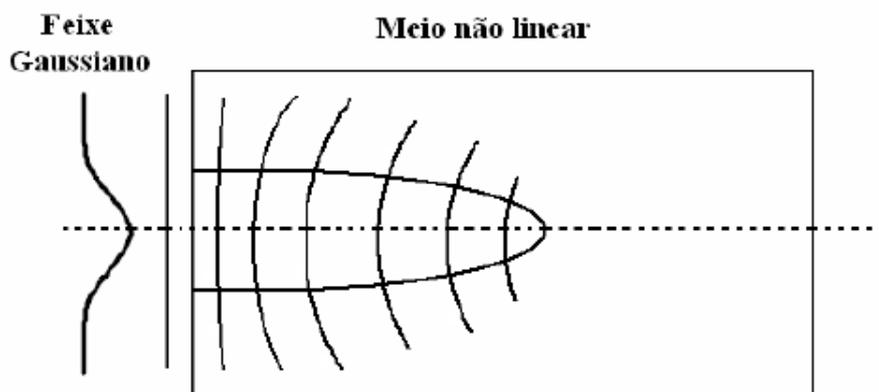
### 2.4.2 Efeitos de autofocalização e autodesfocalização

Os efeitos ópticos de autofocalização (*selffocusing*) e autodesfocalização (*self-defocusing*) [60, 58] podem ocorrer como um resultado da refração não linear.

O efeito de autofocalização é um efeito de lente induzida convergente, que resulta da distorção da frente de onda durante a evolução. Este efeito pode ser facilmente compreendido, considerando um feixe transversal Gaussiano que evolui em meio cujo índice de refração  $n$  pode ser expresso pela equação (2.24). Se o índice de refração sofre uma variação positiva ( $n_2 > 0$ ), o feixe induzirá uma modulação no índice de refração do meio, seguindo seu perfil transversal.

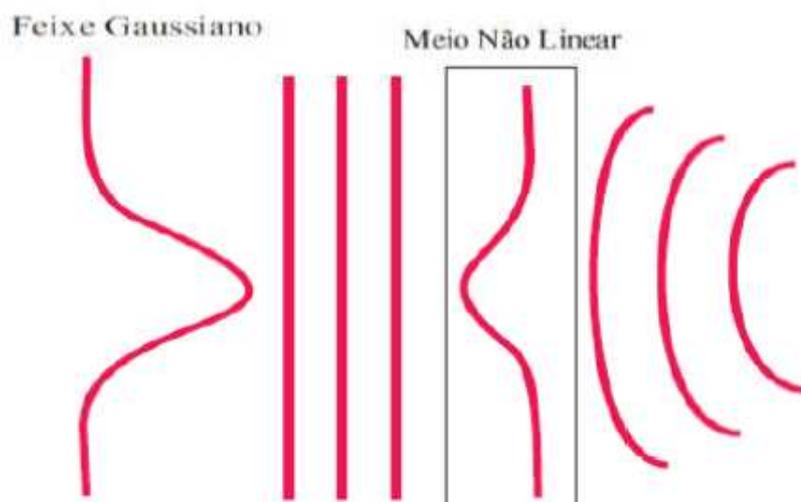
Assim, a parte central do feixe que apresenta maior intensidade experimentará um índice de refração maior do que as partes laterais (bordas), consequentemente viajará com menor velocidade. Dessa forma, quando um feixe luminoso evolui através de um meio, sua frente de onda inicialmente plana, distorcerá progressivamente. Desde que, a direção de evolução do raio óptico é perpendicular à superfície da frente de onda, o feixe se focalizará por si mesmo ou se autofocalizará. O efeito de autofocalização é o responsável pelo dano óptico de materiais transparentes, sendo ainda um fator limitante em projetos de lasers de alta potência [61].

Figura 2.1: Representação esquemática da distorção da frente de onda de um feixe óptico Gaussiano devido ao efeito de autofocalização.



Fonte: Conforme referência [61].

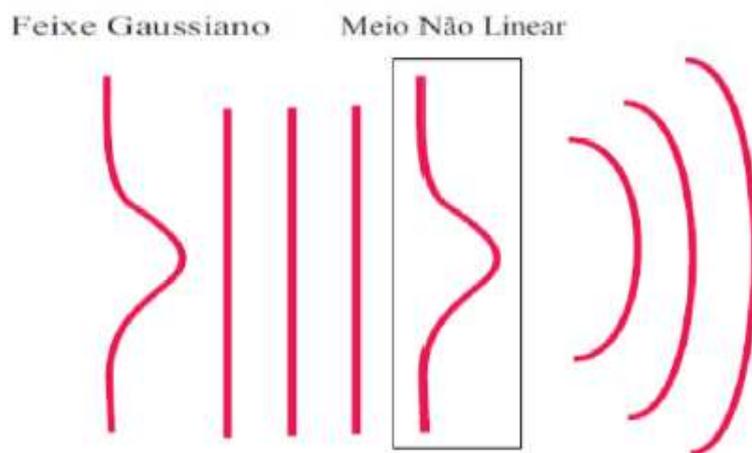
Figura 2.2: Transmissão de um feixe Gaussiano por um material fino no qual o índice de refração aumenta com a intensidade. O aumento do caminho óptico no centro do feixe é semelhante ao de uma lente convergente.



Fonte: Conforme referência [61].

Agora, se o meio apresenta uma mudança no índice de refração negativa ( $n_2 < 0$ ), isto implica, que o índice de refração diminui com a intensidade do feixe luminoso como consequência, o feixe diverge. Portanto, nesse caso o meio se comporta como uma lente induzida divergente, e este efeito é chamado de autodesfocalização. O efeito de autodesfocalização é um efeito típico de propagação de onda não linear que depende do perfil transversal de intensidade do feixe óptico. O referido efeito é resultante da distorção da frente de onda de um feixe imposto por ele mesmo enquanto evolui.

**Figura 2.3:** Representação gráfica do efeito de autodesfocalização de um feixe Gaussiano: Transmissão de um feixe Gaussiano através de um meio no qual o índice de refração diminui com a intensidade. O meio se comporta como uma lente divergente.



Fonte: Conforme referência [61].

### 2.4.3 Equação não linear para a amplitude do campo elétrico

Substituindo as equações (2.20), (2.21) e (2.23) na equação (2.18) e proce-

dendo conforme o apêndice A, obtém-se

$$\nabla^2 E + K^2(\mathbf{r}) E - n_0 n_2 K_0^2 |E|^2 E = 0. \quad (2.25)$$

onde  $K^2(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon(\mathbf{r})\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}$  e  $K_0 = \frac{\omega}{c}$ . O termo não linear implica que é assumido um meio com índice de refração não linear negativo ( $n_2 < 0$ ), para explorar o efeito não linear de autodesfocalização induzido pelo feixe. Além disso, esta equação (2.25) está delimitada para o caso de um meio sem perdas ou ganhos, conforme [54]. Assim, pode-se expressar

$$K^2(\mathbf{r}) = K^2 + f(\mathbf{r}), \quad (2.26)$$

aqui  $f(\mathbf{r})$  é uma função que expressa a modulação do meio. Para  $K^2(0) = K^2 = \frac{\varepsilon(0)\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}$ . Substituindo a equação (2.26) em (2.25), tem-se

$$\nabla^2 E + K^2 E - n_0 n_2 K_0^2 |E|^2 E + f(\mathbf{r}) E = 0. \quad (2.27)$$

Considerando a propagação da onda eletromagnética ao longo de uma direção particular  $K$ , e considerando que a direção de polarização do campo elétrico é ao longo do eixo  $X$ . Assim, o campo elétrico pode ser expresso como

$$E(X, Y, Z) = A(X, Y, Z) e^{-iK_Z Z}, \quad (2.28)$$

onde  $A$  é a amplitude complexa do campo elétrico que varia lentamente no espaço e  $K_Z = K$  é o vetor de onda na direção de propagação  $Z$ . Substituindo a equação (2.28) na expressão (2.27) e procedendo conforme o apêndice A, obtém-se a seguinte

equação para a amplitude do campo elétrico.

$$iK \frac{\partial}{\partial Z} A = \frac{1}{2} \nabla_T^2 A - n_0 n_2 K_0^2 |A|^2 A + \frac{1}{2} f(\mathbf{r}) A. \quad (2.29)$$

Esta é a equação da onda na aproximação paraxial. Normalizando esta equação (2.29) considerando que o perfil transversal inicial é uma Gaussiana do tipo,

$$A_0(X, Y) = e^{-\frac{r^2}{\gamma^2}}. \quad (2.30)$$

Com  $r^2 = X^2 + Y^2$  e  $\gamma$  é meia largura da Gaussiana a uma altura de  $\frac{1}{e}$ . Introduzindo uma amplitude normalizada dada pela expressão (2.31),

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi I_0}} A(X, Y, Z), \quad (2.31)$$

onde  $I_0$  é a intensidade do campo elétrico no *input*, dada por [62]  $I_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |A_0|^2$ . Aqui,  $A_0$  é a amplitude do campo elétrico na entrada da rede óptica. O conteúdo essencial dessa expressão é que  $I_0$  é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico.

Usando a equação (2.29) com as normalizações sugeridas, e procedendo conforme o apêndice A, obtém-se a seguinte expressão

$$i \frac{\partial}{\partial z} U = \frac{1}{2} \nabla_T^2 U - P_0 \sigma |U|^2 U + V(x, y) U. \quad (2.32)$$

Onde  $P_0$  é a potência de entrada do pulso incidente. Para pulsos curtos e intenso da ordem de  $1ps$ , pode-se usar,  $P_0 = 1W$  [63].  $\sigma = \frac{1}{2} n_0 n_2 K_0^2$  representa o parâmetro não linear e  $V(x, y)$  fornece o padrão da rede óptica bidimensional. Por conseguinte,

a equação (2.32) pode ser expressa para o caso unidimensional,

$$i \frac{\partial}{\partial z} U = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U - P_0 \sigma |U|^2 U + V(x) U. \quad (2.33)$$

O termo do lado esquerdo da referida equação (2.33) denota a propagação do feixe óptico com  $z$  através de um meio, neste caso o meio é uma rede óptica com periodicidade na direção  $x$ . O primeiro termo do lado direito indica a difração sofrida pelo feixe durante a evolução. O segundo e terceiro termos mostram a não linearidade de autodesfocalização e o potencial da rede, respectivamente.

## 2.5 Potencial periódico

O potencial, que fornece a forma da rede fotônica, pode ser deduzido analiticamente partindo do princípio de aproximação de campos distantes, conhecida como a aproximação de Fraunhofer [64]. O modelo usado para construir uma expressão analítica para o potencial, foi considerar cada poço da rede aproximadamente uma esfera de raio  $R$ , estes cálculos estão no apêndice  $B$ .

Contudo, foi escolhido de forma adequada o potencial que fornece o padrão de uma rede óptica com periodicidade na direção  $x$ . O período da rede escolhido é  $d = 2\pi$ . Usando a teoria do estado sólido,  $G \cdot d = 2\pi$ , isto implica que  $G = 1$ , onde  $G$  é o vetor da rede recíproca. Então,  $V(x) = V(x + d)$ , assim, pode-se escrever essa função modelada pela função cosseno com periodicidade de  $2\pi$ . Por fim, a função que fornece o potencial da rede pode ser escrita em termo de cosseno, assim

$$V(x) = V_0 \cos(x). \quad (2.34)$$

Onde  $V_0$  é a modulação da rede, com  $|V_0| \ll 1$ . E o parâmetro de rede é  $d = \frac{2\pi}{G}$ .

Para um padrão de uma rede bidimensional [32], a função que fornece o potencial pode ser expressa da seguinte maneira

$$V(x, y) = V_0 [\cos(x) + \cos(y) + \epsilon \cos(x) \cos(y)]. \quad (2.35)$$

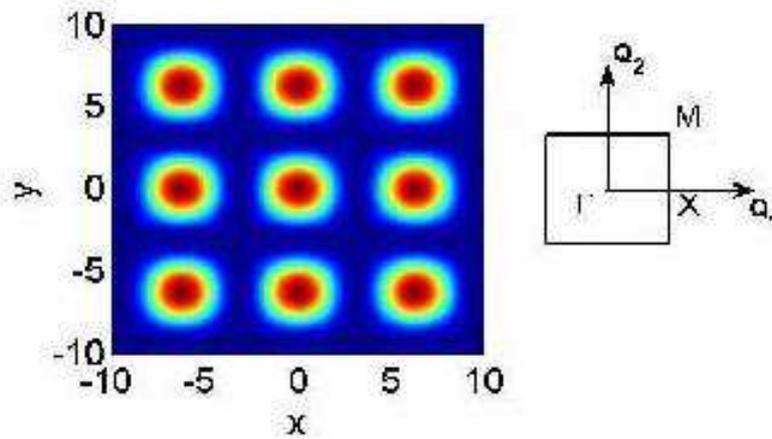
Aqui  $\epsilon$  indica um número real que modula o formato dos poços de potenciais da rede gerada numericamente usando o *soft matlab*, no caso da figura (2.4) foi usado  $\epsilon = 1$ . A figura (2.4) ilustra uma rede óptica bidimensional e sua primeira zona de Brillouin.

## 2.6 Aplicação do teorema de Bloch

O renomado cientista Bloch, demonstrou seu famoso teorema de Bloch [65], segundo o qual, a função de onda do elétron em um auto-estado de energia em uma rede periódica perfeita, tem a forma do produto de uma onda plana por uma função periódica com o período da rede [66].

Sabendo que o potencial  $V(x)$  é uma função periódica na coordenada espacial  $x$ , assim, pode-se aplicar o teorema de Bloch para a equação de propagação (2.33), da mesma forma que é aplicado na equação de onda eletrônica no cristal ordinário, com um potencial periódico adequado para redes de átomos regular [65, 66]. Como o potencial é periódico, isto, possibilita uma expansão de  $V(x)$ , em série de Fourier [67].

**Figura 2.4:** A figura representa uma rede óptica em duas dimensões, e sua primeira zona de Brillouin. Onde os pontos coloridos em vermelho, amarelo, azul são os poços de potenciais distanciados periodicamente. A cores representam os átomos aprisionados ou resfriados, por exemplo, a cor azul indica os átomos ultrafrios, as outras cores indicam menos resfriados. Aqui, foram usados  $V_0 = 0,05$  e  $\epsilon = 1$ . Os vetores  $Q_1$  e  $Q_2$  são os vetores que geram a rede recíproca, equivalentes aos vetores,  $k_x$  e  $k_y$ , respectivamente. Os pontos  $M$ ,  $\Gamma$  e  $x$ , são pontos de alta simetria da rede.



Fonte: Conforme referência [32].

Por isso, é necessário introduzir os vetores elementares da rede recíproca ( $G_j$  com  $j = 1, 2, 3, \dots$ ) e os vetores da rede recíproca normalizados  $Q_j$ , e usando as relações:

$$d_\alpha \cdot G_j = 2\pi\delta_{\alpha j}, \quad (2.36)$$

$$G = l_1 G_1 + l_2 G_2 + l_3 G_3 + \dots, \quad (2.37)$$

onde os  $l_j$  são inteiros arbitrários e  $\delta_{\alpha j}$  é a função delta de Kroneker. Usando a seguinte normalização para o vetor da rede recíproca,  $Q = \gamma G$ , para expressar o

potencial  $V(x)$  em série de Fourier de forma similar [68], da seguinte maneira

$$V(x) = \sum_Q \widehat{V}(Q) e^{iQ \cdot x}, \quad (2.38)$$

os coeficientes  $\widehat{V}(Q)$ , são números complexos. Para garantir  $V(x)$  como uma função real é necessário que

$$\widehat{V}(-Q) = \widehat{V}^*(Q), \quad (2.39)$$

para os quais, a soma dos termos em  $Q$  e  $-Q$  seja real [68].

## 2.7 Equações diferenciais ordinárias-EDOs

Nesta parte do trabalho é obtido um conjunto de equações diferenciais ordinárias e acopladas, que representam a dinâmica de evolução dos modos de um feixe luminoso propagante na rede óptica. Escrevendo o campo elétrico  $U$  da equação (2.32) como uma expansão de ondas planas no espaço de Fourier, assim

$$U(x, y, z) = \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k} \cdot (x\hat{i} + y\hat{j})}, \quad (2.40)$$

onde  $C(\mathbf{k}, z)$ , é amplitude complexa de Fourier e  $\mathbf{k}$  representa o vetor de onda normalizado,  $\mathbf{k} = \gamma\mathbf{K}$ . Usando a expansão do potencial em série de Fourier, como

$$V(x, y) = \sum_{\mathbf{Q}} V_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q} \cdot (x\hat{i} + y\hat{j})}, \quad (2.41)$$

onde  $Q$ , indica o vetor da rede recíproca normalizado, conforme foi apresentado

na seção anterior. Cuidadosamente, é necessário fazer as devidas substituições das expressões (2.40) e (2.41) na equação (2.32), e após alguns procedimentos algébricos elementares, conforme o apêndice C, obtém-se

$$i \frac{d}{dz} C_{\mathbf{k}}(z) = -\frac{1}{2} C_{\mathbf{k}}(z) \mathbf{k}^2 -$$

$$P_0 \sigma \sum_{\mathbf{qp}} C(z)_{(\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{p})} C_{\mathbf{q}}^*(z) C_{\mathbf{p}}(z) + \sum_{\mathbf{m}} V_{\mathbf{m}}(\mathbf{k}_{\mathbf{m}}) C(z)_{|\mathbf{k}-\mathbf{k}_{\mathbf{m}}|}, \quad (2.42)$$

onde  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  são vetores do espaço recíproco.

## 2.8 Conclusão

Neste capítulo, foi apresentada uma introdução aos princípios da óptica não linear que é fundamental para o entendimento dessa tese. A partir das equações de Maxwell, foi deduzida uma equação da onda não linear normalizada (2.33) que governa a propagação através da rede óptica. Foi mostrado o procedimento para a escolha da função que fornece o padrão da rede, por sua vez, esta função foi incorporada na equação de propagação (2.33).

À medida que um campo eletromagnético se propaga em meios periódicos, o teorema de Bloch, garante a possibilidade da existência de regiões espectrais que são “proibidas” para algumas frequências, ou seja, servindo como uma espécie de filtro óptico, onde simplesmente algumas frequências trocam energia. Toda a teoria que foi devidamente investigada em sistemas eletrônicos, pode ser estendida para o caso das redes ópticas.

Usando a expressão da equação de propagação (2.33), foi deduzido um conjunto de equações diferenciais ordinárias e acopladas que descreve efetivamente a dinâmica de evolução dos modos de Fourier.

# Capítulo 3

## MÉTODOS NUMÉRICOS

### 3.1 Introdução

A equação de propagação (2.33), é uma equação diferencial parcial não linear (EDPNL) que, geralmente não revela uma solução analítica. Então, é necessário fazer uma aproximação numérica, usando métodos de solução computacional.

Neste capítulo é abordado uma discussão sobre os métodos computacionais, que foram usados para resolver as equações diferenciais. Estas equações representam a propagação de um feixe óptico, tanto no espaço real (indicada pela equação diferencial parcial- EDP), como as equações diferenciais no espaço  $k$  (representadas pelas equações diferenciais ordinárias-EDOs). Os métodos computacionais usados para resolver a EDP, foram os métodos das diferenças finitas e pseudo-espectral. Esse último consiste em fazer a transformada de Fourier [69, 70] em todos os termos do lado direito da equação de propagação, e que foi usado nos principais resultados da tese, enquanto que, o termo do lado esquerdo da referida equação (2.33) é usado o método das diferenças finitas [70]. No caso das equações diferenciais ordinárias,

foi usado o método de Runge-Kutta de 2ª ordem com auxílio do *soft matlab*.

## 3.2 Método numérico pseudo-espectral

O método pseudo-espectral, pertence a uma classe de métodos numéricos originalmente desenvolvidos para solução de equações diferenciais parciais. Esse método pode ser usado em aplicação matemática e computação científica [71, 72], tendo se tornado uma ferramenta amplamente utilizada, para realizar simulações numéricas.

Por fim, o método computacional pseudo-espectral é eficiente para calcular funções que apresentam oscilações mais rápidas, permitindo a obtenção de boas aproximações [73], mesmo empregando grades com um número relativamente pequeno de pontos. O método pseudo-espectral é aplicado juntamente com outro método computacional, conhecido como o método das diferenças finitas, por isso, é chamado pseudo-espectral. O referido método, consiste em fazer a transformada de Fourier da equação de propagação (2.33).

### 3.2.1 Aplicação do método pseudo-espectral

Nesta seção, serão desenvolvidos os procedimentos usados na aplicação do método pseudo-espectral, para solução da equação de propagação (2.33), que foi delimitada para fins de resolução somente ao longo da direção,  $x$ .

O procedimento para implementar o método computacional, consiste em usar a transformada de Fourier em cada termo da equação (2.33),

$$\text{TF} \left( i \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \text{TF} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U \right) - \text{TF} (P_0 \sigma |U|^2 U) + \text{TF} [V(x) U]. \quad (3.1)$$

Onde  $\text{TF}$  indica a operação transformada de Fourier. Considerando o fato de que,  $\text{TF}_x$  e  $\frac{\partial}{\partial z}$  comutam, e usando a seguinte notação,

$$U \rightarrow U(x, z) \text{ e } \text{TF}(U) \rightarrow \text{TF}[U(x, z)] \rightarrow \tilde{U}(k, z) \rightarrow \tilde{U}_k(z).$$

Aqui  $\tilde{U}_k(z)$  representa a transformada de Fourier da amplitude do campo elétrico normalizado da equação de propagação (2.33) para ser implementada no programa computacional. Usando o método das diferenças finitas no primeiro termo da equação (2.33), e fazendo a transformada de Fourier nos outros termos, conforme o procedimento do apêndice D, é possível escrever a seguinte equação

$$\tilde{U}_k(z + \Delta z) = -i\Delta z G_k(z) + i\Delta z H_k(z) + \left( 1 + ik^2 \Delta z \frac{1}{2} \right) \tilde{U}_k(z), \quad (3.2)$$

onde,  $\Delta z$  é o passo em  $z$ , que contém um grande número de pontos em  $x$ .

Dessa maneira, foi cuidadosamente elaborado e testado o código fonte usando a biblioteca *GSL*<sup>1</sup> [74]. Assim, foi implementada como uma condição inicial uma função do tipo Gaussiana, e usado a condição de contorno periódica, conforme está registrado em detalhes no capítulo, 6.

### 3.3 Método numérico Runge-Kutta

---

<sup>1</sup>GSL (GNU Scientific Library) é um *Software* livre.

Em matemática, uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função que aparece na equação sob a forma das respectivas derivadas. Essas equações diferenciais podem ser parciais ou ordinárias com suas respectivas ordens, sendo essenciais para o estudo de diversos fenômenos no campo da Física [75]. Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação que exhibe derivadas de funções desconhecidas de uma variável [76, 77], que pode descrever perfeitamente algumas situações físicas do cotidiano.

A partir da equação diferencial parcial (2.33), serão deduzidas duas equações diferenciais ordinárias não lineares, que descrevem o comportamento das oscilações de dois modos ou componentes de frequências acoplados presentes no espectro de Fourier. Como existem equações diferenciais não lineares, que podem não apresentar soluções analíticas, é desejado estudar essas EDOs numericamente. Ao verificar os diversos tipos de métodos numéricos [78, 79], para resolver equações diferenciais ordinárias, pode-se constatar que existe um pouco de liberdade para desenvolver os algoritmos.

Os algoritmos bem conhecidos e amplamente utilizados dentro da classe dos métodos numéricos, são os algoritmos de Runge-Kutta. Esses algoritmos foram desenvolvidos por volta de 1900, pelos matemáticos C. Runge e M.W. Kutta [79, 80], e constituem um método essencial para resolver as equações diferenciais ordinárias. Em análise numérica, os métodos de Runge-Kutta, formam uma família importante de métodos iterativos implícitos e explícitos, para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias.

### 3.3.1 Aplicação do método Runge-Kutta

Algoritmo usado para solução numérica das equações diferenciais ordinárias não lineares.

$$dC = \text{two\_level}(z, C, kapa, sgn, V_0), \quad (3.3)$$

onde  $dC$ , exprime a função que será implementada, *two\_level* é o nome da função sugerida,  $z$ , é a distância de propagação,  $C$ , representa as amplitudes,  $kapa$ , vetor de onda normalizado,  $sgn$ , parâmetro não linear e  $V_0$  modulação do potencial.

Como o *matlab* trabalha com matrizes, será definida a função matriz duas linhas por uma coluna que representa um conjunto simultâneo de duas equações diferenciais ordinárias acopladas,

$$dC = \text{zeros}(2, 1). \quad (3.4)$$

Escrevendo as duas equações diferenciais ordinárias acopladas, e usando a linguagem *matlab*, é coerente expressar;

$$\begin{aligned} idC(1) &= -kapa.^2/2 * C(1) - \\ sgn * ((abs(C(1)))^2) &+ 2 * (abs(C(2)))^2 * C(1) + V_0/2 * C(2), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$idC(2) = -kapa.\hat{2}/2 * C(2) -$$

$$sgn * ((abs(C(2))\hat{2}) + 2 * (abs(C(1))\hat{2}) * C(2)) + V_0/2 * C(1). \quad (3.6)$$

As equações escritas em *matlab* para as oscilações em duas dimensões, encontram-se no apêndice *D*. A partir dessas equações foi elaborado o código fonte em *matlab*, usando as ferramentas, *ode45* ou *ode113*, por fim o programa foi executado.

### 3.4 Conclusão

O método computacional pseudo-espectral foi utilizado para resolver a equação de propagação, pois é eficiente para calcular funções que exibem oscilações mais rápida; por fim, este método permite a obtenção de boas aproximações, mesmo empregando grades com um número relativamente pequeno de pontos. O referido método é aplicado juntamente com outro método computacional, conhecido como o método das diferenças finitas, por isso é chamado pseudo-espectral. Esta ferramenta computacional, consiste na transformada de Fourier da equação diferencial parcial de propagação (2.33), sendo aplicada em todos os termos do lado direito desta equação, contudo no lado esquerdo, é aplicado o método das diferenças finitas. Enquanto que, os métodos de Runge-Kutta, formam uma família importante de métodos iterativos implícitos e explícitos, para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias.

# Capítulo 4

## OSCILAÇÕES NÃO LINEARES COM DOIS MODOS RESSONANTES

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, encontra-se registrado um estudo das oscilações de Rabi óptica sob efeito não linear, considerando inicialmente um feixe composto por duas componentes de frequências ressonantes. Na sequência, serão investigadas as oscilações dos modos ou componentes de frequências de Fourier em uma e em duas dimensões. O modelo envolvendo apenas dois modos de Fourier oscilantes é ineficiente para explicar o fenômeno das oscilações de Rabi óptica na presença da não linearidade. Usando valores do parâmetro não linear maiores que o da modulação da rede, observa-se um aumento espúrio do período espacial de evolução desses modos até um valor crítico. A partir deste valor, a interação de trocas de energia tende a cessar completamente.

Entretanto, as oscilações com apenas dois modos apresentam consistência em regime linear ou quase linear, quando comparada com a evolução de um feixe tipo

Gaussiano.

## 4.2 Oscilação não linear em uma dimensão

Considera-se, inicialmente um vetor de onda exatamente sobre o contorno da zona de Brillouin (ZB) no ponto  $\frac{1}{2}G$ , isto é, em  $\frac{\pi}{d}$ , onde  $d$  é a constante de rede. Nesse caso, a condição de difração de Bragg é propícia para escrever,

$$|K - G| = |-K| \Rightarrow K = \frac{1}{2}G, \quad (4.1)$$

de maneira que, no contorno da zona, as amplitudes das frequências espaciais das duas ondas são,  $K = \pm\frac{1}{2}G$  [65].

Usando a expressão da equação (2.42), para extrair somente as equações que contêm as amplitudes,  $C(+\frac{1}{2}G)$  e  $C(-\frac{1}{2}G)$ , que são importantes para aproximar as bandas de frequências, desprezando-se todas as outras amplitudes do feixe. É notado que, as referidas amplitudes  $C(+\frac{1}{2}G)$  e  $C(-\frac{1}{2}G)$ , estão localizadas nos extremos da ZB, exatamente nos pontos  $x$ , e no seu ponto simétrico  $-x$ , respectivamente; por fim, esses dois pontos estão acoplados pelo vetor da rede recíproca  $G$ , vide figura (2.4). Este fato é importante para informar que as amplitudes de Fourier podem realizar movimento oscilatório na ressonância de Bragg, ao longo da direção  $x$ . Os pontos que estão nos limites da ZB apresentam alta simetria, e são representados pelos pontos  $(k_B, 0)$ , e pelo seu ponto simétrico  $(-k_B, 0)$ , onde  $k_B = \gamma K_B$  denota um vetor de onda de Bloch normalizado. Substituindo a parte ressonante do campo elétrico normalizado denotada pela equação (4.2)

$$U = C_1(z) e^{ik_B x} + C_2(z) e^{-ik_B x}, \quad (4.2)$$

na equação de propagação (2.33), e usando a expansão do potencial da rede conforme (2.38), obtém-se um conjunto de duas equações acopladas que contêm as amplitudes incidente  $C_1$ , e a refletida  $C_2$ . Este conjunto de equações pode ser estimado pelas seguintes expressões:

$$i \frac{dC_1}{dz} = -\frac{1}{2} C_1 k_B^2 - P_0 \sigma (|C_1|^2 C_1 + 2 |C_2|^2 C_1) + \frac{1}{2} V_0 C_2, \quad (4.3)$$

$$i \frac{dC_2}{dz} = -\frac{1}{2} C_2 k_B^2 - P_0 \sigma (|C_2|^2 C_2 + 2 C_2 |C_1|^2) + \frac{1}{2} V_0 C_1. \quad (4.4)$$

As equações (4.3) e (4.4), modelam a dinâmica das oscilações ópticas de Rabi dos modos de Fourier,  $P_1 = |C_1|^2$  e  $P_2 = |C_2|^2$ , ao longo da direção periódica  $x$ , para diversos ciclos ao longo da propagação. Um exemplo simples para ilustrar os dois modos de Fourier exibindo um movimento periódico são os modos normais de uma onda estacionária de uma corda [31]. Imagine, por exemplo, um modo de meio comprimento de onda transferindo energia para outro modo de um comprimento de onda. Aqui é um pouco mais complexo, pois são dois modos do campo eletromagnético descritos no espaço de Fourier, acoplados com um vetor da rede recíproca nos extremos da zona de Brillouin, executando um movimento oscilante em uma direção transversal à propagação.

Para o caso particular em que a não linearidade é nula,  $\sigma = 0$ , o sistema exprime oscilações completas dos modos de Fourier, conforme o estudo linear [32]. Resolvendo analiticamente o sistema de equações (4.3) e (4.4), é possível escrever as

potências de Fourier, dadas pelas equações (4.5) e (4.6)

$$P_1 = \frac{1}{2} + a_0 \exp(iV_0 z) + (a_0)^* \exp(-iV_0 z), \quad (4.5)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} - a_0 \exp(iV_0 z) - (a_0)^* \exp(-iV_0 z). \quad (4.6)$$

Onde  $(a_0)$ , é a constante de integração, e as amplitudes de Fourier podem oscilar com a frequência  $V_0$ . Entretanto, a modulação do potencial desempenha um papel similar ao índice de refração  $n$  introduzido na rede, que proporciona a explicação das duas frequências oscilarem com  $V_0$ . A energia total envolvida no processo das oscilações das frequências é mantida constante. Afinal, a energia que um modo perde na evolução o outro modo ganha, e assim sucessivamente. Então, usando a conservação de energia para oscilação dos dois modos, é possível expressar

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1. \quad (4.7)$$

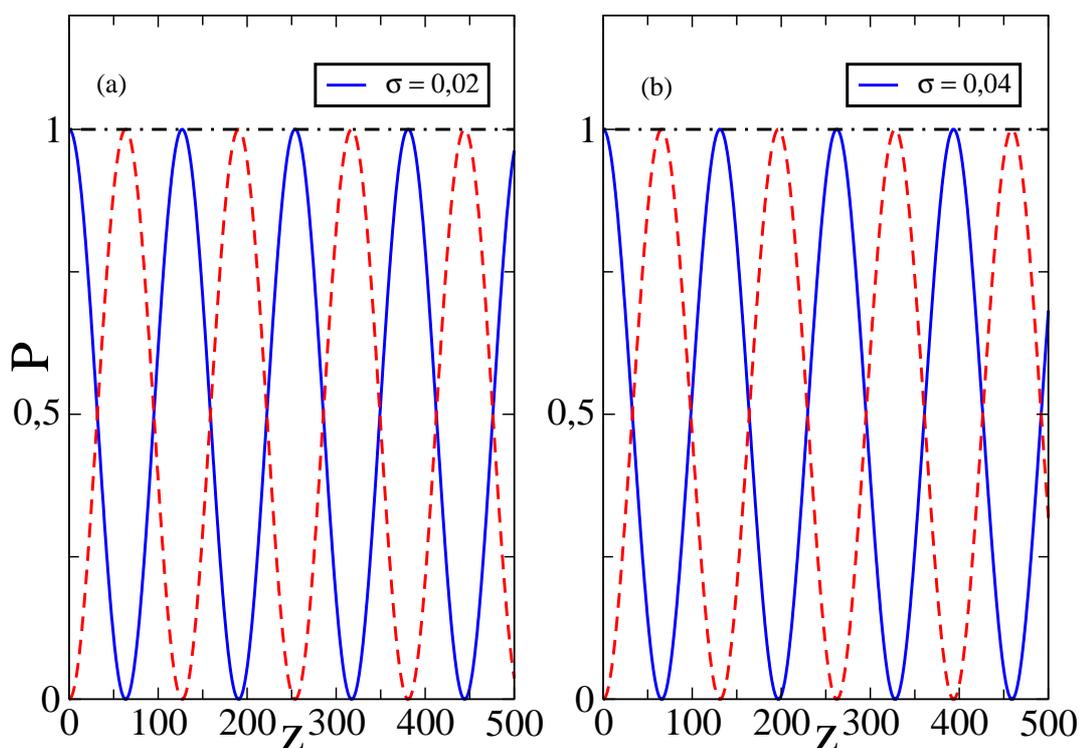
A soma dos módulos quadrados dos modos de Fourier é igual a 1. Isto implica que, a energia total de oscilação entre os dois modos é conservada. Além de ser usado o fato de que, a energia total é constante durante o processo, é importante salientar que, o período desses ciclos também é constante. O período de oscilação é proporcional ao inverso da modulação da rede,  $\Lambda \propto \frac{1}{V_0}$ , dado pela equação (4.8)

$$\Lambda = \frac{2\pi}{V_0}. \quad (4.8)$$

A figura (4.1) ilustra o comportamento das oscilações dos modos em regime quase

linear, ou seja,  $\sigma < V_0$ . Esta figura exhibe os modos de Fourier oscilando com período espacial constante ao longo da propagação.

**Figura 4.1:** Dinâmica das oscilação dos modos ou potências de Fourier,  $P_1 = |C_1(k, z)|^2$  (linha azul) e  $P_2 = |C_2(k, z)|^2$  (linha vermelha tracejada), em função da distância de propagação  $z$ , usando os valores  $\sigma = 0,02$  e  $\sigma = 0,04$ . A linha preta tracejada indica a soma das potências de Fourier  $P_1 + P_2 = 1$ . Aqui, foi usado  $V_0 = 0,05$ .

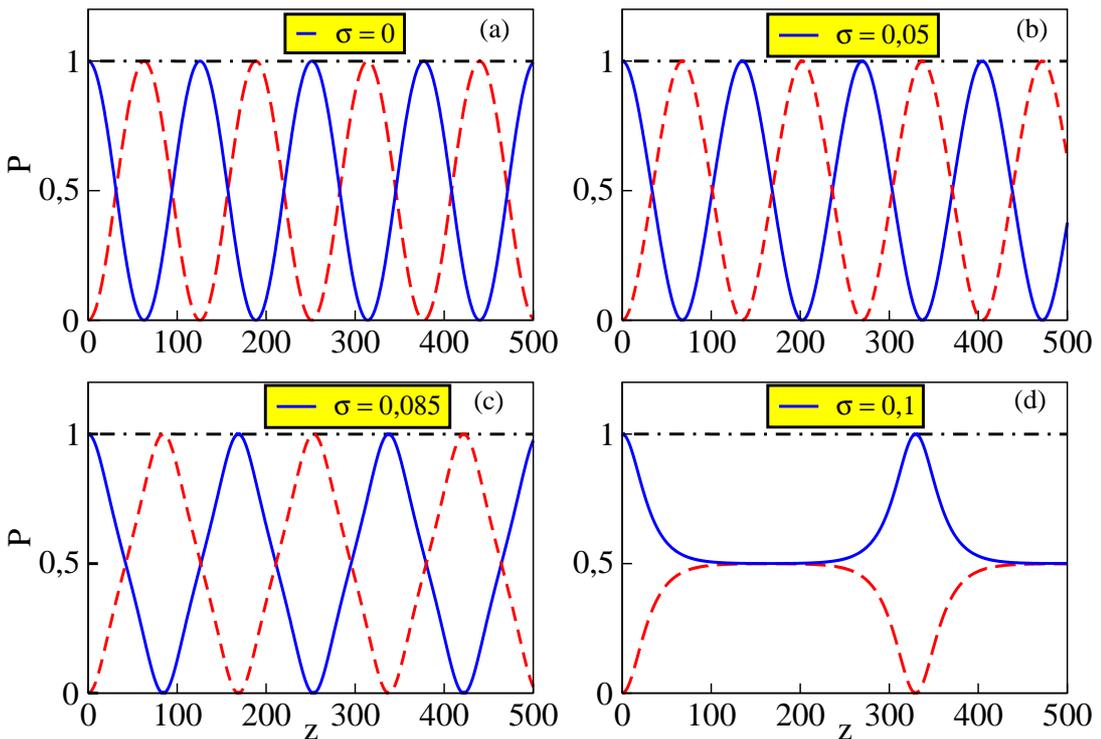


Fonte: Elaborada pelo próprio autor, 2013.

A figura (4.2) ilustra um simples sistema oscilante composto por dois modos em regime não linear  $\sigma \geq V_0$ , esta faixa revela um comportamento bastante

interessante<sup>1</sup> [39].

**Figura 4.2:** Representação da dinâmica de oscilação dos modos ou potências de Fourier,  $P_1 = |C_1(k, z)|^2$  (linha azul) e  $P_2 = |C_2(k, z)|^2$  (linha vermelha tracejada), como uma função da distância de propagação  $z$ , para diferentes valores escolhidos do parâmetro não linear,  $\sigma$ . A linha preta tracejada indica a soma das potências de Fourier  $P_1 + P_2 = 1$ . Aqui, foi usado  $V_0 = 0,05$ . A figura (a)  $\sigma = 0$ , ilustra as oscilações pura ou completas dos dois modos de Fourier. As Figuras (b)  $\sigma = 0,05$ , (c)  $\sigma = 0,085$ , e (d)  $\sigma = 0,1$ , apresentam um aumento espúrio do período espacial, com a evolução dos modos na presença do efeito não linear.

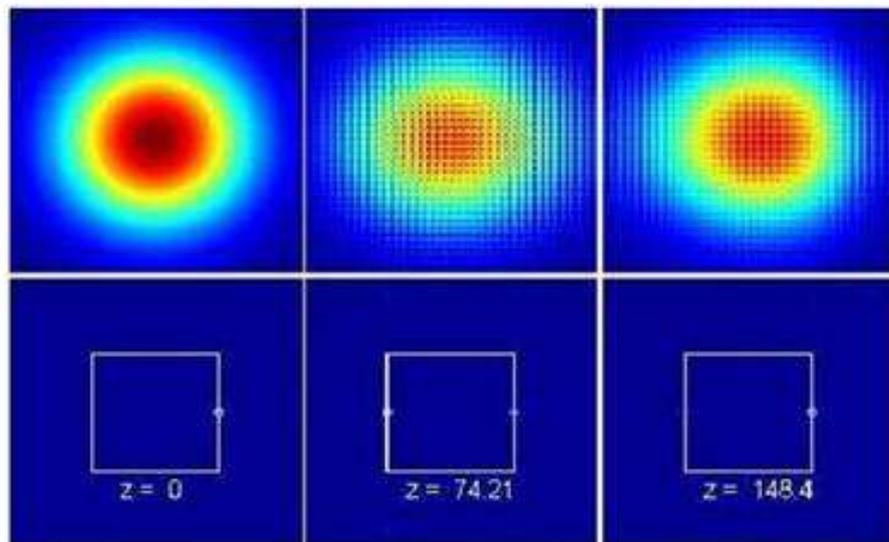


Fonte: Conforme referência [39].

<sup>1</sup>C. R. da Silva, Henrique Marks and S. B. Cavalcanti. Effect of nonlinearity on the dynamics of Rabi oscillations in optically induced lattices. Submitted to Optics Communications

Para o caso linear, a figura (4.2) apresenta um resultado numérico que ilustra perfeitamente a evolução dos modos, tanto no espaço real como no espaço de Fourier. Os parâmetros utilizados para elaborar a figura (4.2), por conseguinte, foram usados para desenvolver a figura (4.3). A dinâmica do sistema composto por dois níveis é ilustrada pela evolução dos modos de Fourier simbolizados pelos pontos brancos da figura (4.3) inicialmente na borda da zona de Brillouin em,  $z = 0$ . Posteriormente é analisado o momento da interferência da oscilação entre os modos em  $z = 74, 21$ ; por fim, em  $z = 148, 4$ , é completado um ciclo das oscilações com um certo período espacial de evolução.

**Figura 4.3:** Representação da dinâmica dos dois modos ressonantes. Os pontos luminosos na parte superior indicam as amplitudes do campo  $|U|$  no espaço real, e os pontinhos na linha inferior simbolizam os modos no espaço de Fourier,  $\mathcal{TF}(U)$ , obtidos numericamente. Aqui, é exibido apenas os valores absolutos e somente a parte do domínio espacial centrada em,  $r = 0$ , para melhor visualização. Os parâmetros usados são os da figura (4.2).



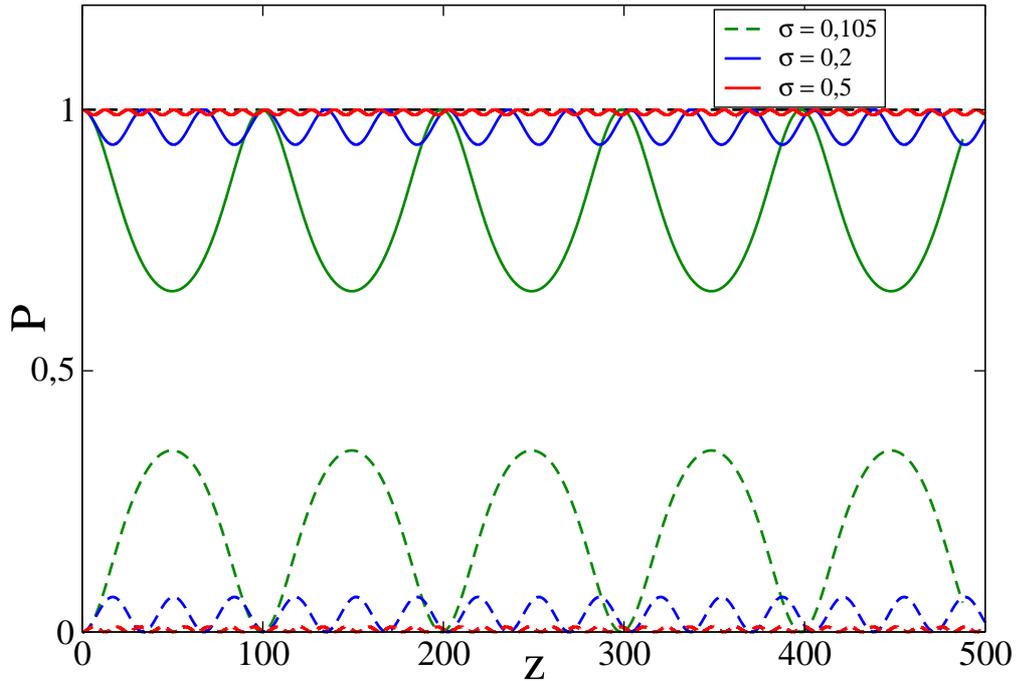
Fonte: Conforme referência [32].

O sistema oscilante com apenas duas frequências de Fourier propagante em

regime não linear, exibe uma boa aproximação da distribuição de energia até um valor limiar do coeficiente não linear. Aumentando o módulo do parâmetro  $\sigma$ , até  $\sigma = V_0$ , a energia de oscilação das frequências ressonantes passa a ser transferida lentamente de um modo para outro, mas com período quase constante conforme as figuras (4.2 (a) e (b)). Agora nas figuras (4.2 (c) e (d)) pode ser observado um fenômeno bastante curioso, que consiste em um aumento gradativo do período espacial [39] dos ciclos oscilatórios mantendo constante a modulação da rede. Investigando de forma mais detalhada a figura (4.2 (d)), é possível observar que a interferência da oscilação dos modos correspondentes é muito demorada, quando comparada com as situações anteriores, vide as figuras (4.2 (a), (b) e (c)). Pois o período espacial é tão longo que o momento da interferência é representado no gráfico como uma reta. Entretanto, é garantida a conservação da energia envolvida no processo. Um fato interessante pode ser observado para valores do comprimento não linear na faixa,  $\sigma > 2V_0$ , vide figura (4.4).

A dinâmica de evolução de um feixe óptico com somente duas frequências ressonantes, sob um efeito não linear forte ( $\sigma > V_0$ ) pode revelar um comportamento intrigante [40]. Quando o parâmetro não linear é usado na faixa  $\sigma$  maior que  $V_0 = 0,05$ , o processo de trocas de energia ocorre em pequenas parcelas conforme está visível no gráfico da figura (4.4). Note que, não aparece mais o espaço de interferência durante a evolução, com isso esse sistema tende a se comporta como, *selftrapping*, como é comum em sistemas eletrônicos [41]; em conclusão, os modos passam a se comportar como estados localizados. Com isso, observa-se que um modo transporta toda energia do campo propagante, indicando assim, uma situação irreal. Portanto, usando o parâmetro  $\sigma > 2V_0$ , não faz sentido estudar as oscilações de só dois modos

Figura 4.4: O gráfico ilustra o comportamento das oscilações dos modos,  $P_1$  e  $P_2$ , com a distância de propagação para valores do parâmetro não linear na faixa,  $\sigma > 0,1$ . A parte inferior da figura representa os ciclos oscilatórios do modo  $P_2$ , com  $z$ , onde as linhas em verde, azul e vermelho, tracejadas, são as amplitudes de Fourier para valores de  $\sigma = 0,105$ ,  $\sigma = 0,2$  e  $\sigma = 0,5$ , respectivamente. A parte superior da figura, expressa os ciclos oscilatórios do modo  $P_1$ , com  $z$ , onde as linhas em verde, azul e vermelho são as amplitudes de Fourier, para os mesmos valores de,  $\sigma$ , mencionados, respectivamente. Usamos  $V_0 = 0,05$ .



Fonte: Conforme referência [39].

de Fourier, pois para o valor da modulação da rede escolhido, o efeito não linear compromete o sistema de dois níveis.

É interessante analisar o comportamento das oscilações de duas frequências ressonantes em duas dimensões, e comparar com o resultado estudado em uma

dimensão.

### 4.3 Oscilação não linear em duas dimensões

A presente seção exhibe o resultado numérico das oscilações dos modos de Fourier em duas dimensões. Inicialmente, um modo de Fourier será deslocado do ponto  $x$  para o ponto  $M$ , localizado em um vértice da zona de Brillouin, vide figura (2.4). O modo incidente e o refletido continuam acoplados com o vetor  $\mathbf{Q}$  da rede recíproca. A parte ressonante do campo para esses modos é modelada pela equação

$$U(x, y, z) = C_1(z) e^{i\mathbf{k}_B \cdot (x\hat{i} + y\hat{j})} + C_2(z) e^{-i\mathbf{k}_B \cdot (x\hat{i} + y\hat{j})} + C_3(z) e^{i\mathbf{k}_B \cdot (y\hat{j} - x\hat{i})} + C_4(z) e^{i\mathbf{k}_B \cdot (x\hat{i} - y\hat{j})}. \quad (4.9)$$

Aqui,  $\mathbf{k}_B = (k_{Bx}, k_{By})$ . Enquanto,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são as amplitudes complexas de Fourier. A soma de  $x + y$  ou a subtração de  $x - y$ , que aparece nos argumentos das exponenciais denota a soma das componentes dos vetores  $\mathbf{x} = x\hat{i}$  com  $\mathbf{y} = y\hat{j}$ , cujo vetor resultante  $\mathbf{s} = x\hat{i} + y\hat{j}$ , se estende desde a origem do sistema cartesiano  $xy$  até o ponto  $M$ , e aos seus respectivos pontos simétricos, vide figura (2.4). Substituindo a equação (4.9) na equação de propagação (2.32) e usando o potencial fornecido pela expressão (2.35), é possível obter um conjunto de quatro equações diferenciais ordinárias que representam as oscilações acopladas desses modos bidimensionais.

$$\begin{aligned}
i\frac{dC_1}{dz} = & -C_1 k_B^2 - P_0 \sigma (|C_1|^2 C_1 + 2|C_2|^2 C_1 + 2|C_3|^2 C_1 + 2|C_4|^2 C_1 + 2C_2^* C_3 C_4) + \\
& + \epsilon \frac{V_0}{4} C_2 + \frac{V_0}{2} C_3 + \frac{V_0}{2} C_4,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
i\frac{dC_2}{dz} = & -C_2 k_B^2 - P_0 \sigma (|C_2|^2 C_2 + 2|C_1|^2 C_2 + 2|C_3|^2 C_2 + 2|C_4|^2 C_2 + 2C_1^* C_3 C_4) + \\
& + \epsilon \frac{V_0}{4} C_1 + \frac{V_0}{2} C_3 + \frac{V_0}{2} C_4,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
i\frac{dC_3}{dz} = & -C_3 k_B^2 - P_0 \sigma (|C_3|^2 C_3 + 2|C_1|^2 C_3 + 2|C_2|^2 C_3 + 2|C_4|^2 C_3 + 2C_1 C_2 C_4^*) + \\
& + \epsilon \frac{V_0}{4} C_4 + \frac{V_0}{2} C_1 + \frac{V_0}{2} C_2,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
i\frac{dC_4}{dz} = & -C_4 k_B^2 - P_0 \sigma (|C_4|^2 C_4 + 2|C_1|^2 C_4 + 2|C_2|^2 C_4 + 2|C_3|^2 C_4 + 2C_1 C_2 C_3^*) + \\
& + \epsilon \frac{V_0}{4} C_3 + \frac{V_0}{2} C_1 + \frac{V_0}{2} C_2.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

As equações (4.10) - (4.13) denotam a dinâmica das oscilações de Rabi óptica das potências de Fourier  $P_1 = |C_1|^2$ ,  $P_2 = |C_2|^2$ ,  $P_3 = |C_3|^2$  e  $P_4 = |C_4|^2$  contidas no plano  $xy$  para diversos ciclos, ao longo da propagação  $z$ . Observe que as amplitudes envolvidas na oscilação,  $C_1^*$ ,  $C_2^*$ ,  $C_3^*$  e  $C_4^*$  são complexas.

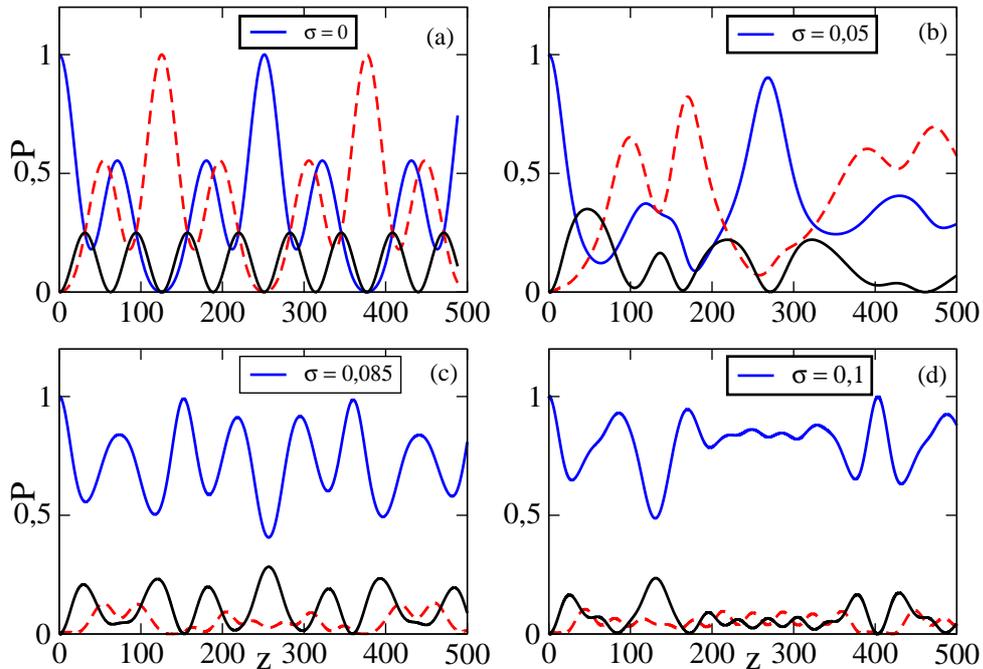
Para o caso de não linearidade nula  $\sigma = 0$ , o sistema apresenta oscilações completas dos modos de Fourier, conforme o estudo linear [32]. A energia total transferida entre as componentes de frequências de Fourier é mantida constante, ou seja, a energia que um modo perde na oscilação o outro modo ganha e assim sucessivamente. Então, usando a conservação de energia para a evolução dos modos é possível escrever a seguinte expressão

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_3|^2 + |C_4|^2 = 1. \quad (4.14)$$

A soma dos módulos quadrados dos modos de Fourier é igual a 1. Resolvendo, numericamente, o referido sistema de equações (4.10) - (4.13) para valores específicos do comprimento da não linearidade  $\sigma$ , pode-se obter resultados mais intrigantes, quando comparado com o resultado unidimensional.

De modo similar ao sistema formado por dois níveis, o sistema de quatro níveis descreve uma oscilação na ressonância de Bragg, com quatro componentes de frequências representadas nos gráficos da figura (4.5). Essa dinâmica mostra uma deformação das amplitudes de Fourier devido a presença do efeito não linear na rede. Pode-se observar que o aumento do parâmetro não linear provoca uma distorção acentuada nas linhas dos gráficos, significando um aumento do período espacial das oscilações, conforme é observado na figura (4.5 (b) e (c)). A partir de  $\sigma > 0,085$  não existe mais um espaço de interferência entre essas frequências; em conclusão, um

**Figura 4.5:** Denota a dinâmica das oscilações dos modos de Fourier,  $P_1 = |C_1(k, z)|^2$  (linha azul),  $P_2 = |C_2(k, z)|^2$  (linha vermelha tracejada),  $P_3 = |C_3(k, z)|^2$  e  $P_4 = |C_4(k, z)|^2$  (linha preta) que podem evoluir como uma função da distância,  $z$  para diferentes valores escolhidos do parâmetro não linear,  $\sigma$ . A figura (a)  $\sigma = 0$  ilustra as oscilações puras ou completas dos respectivos modos de Fourier. Enquanto que, as Figuras (b)  $\sigma = 0,05$ , (c)  $\sigma = 0,085$  e (d)  $\sigma = 0,1$  apresentam um aumento espúrio do período espacial, com a evolução dos modos na presença do efeito não linear. Aqui foram usados  $\epsilon = 1$  para o termo de interação do potencial e  $V_0 = 0,05$  e  $\epsilon = 1$ .

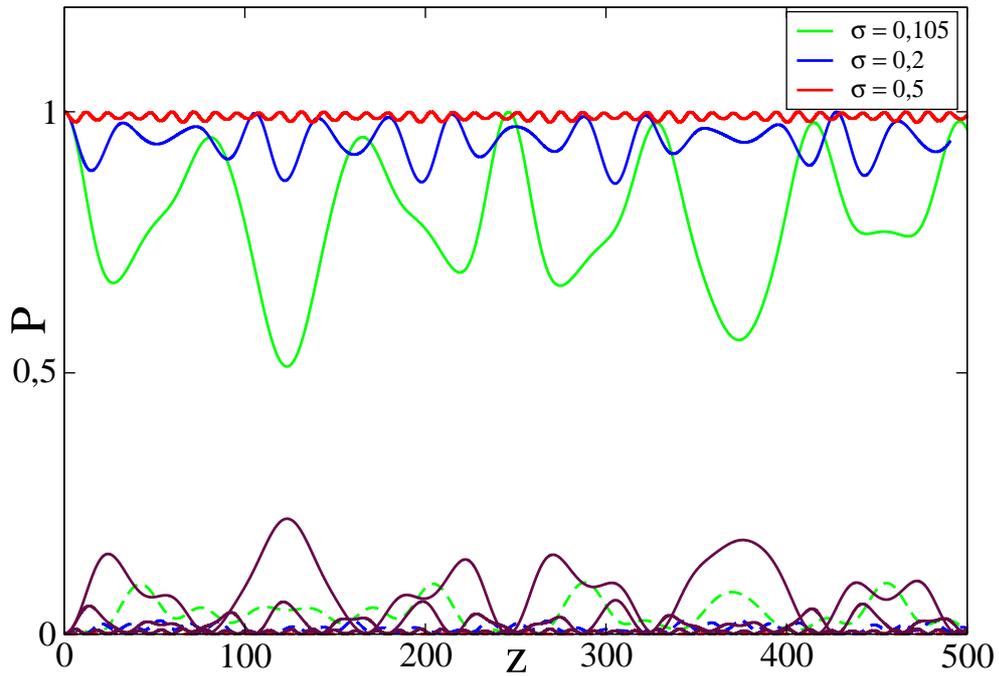


Fonte: Conforme referência [34].

pequena parcela de energia é transferida entre os modos. Para o caso da oscilação em uma dimensão foi observado uma transferência de energia mais demorada entre os modos, a partir de valores do parâmetro não linear na faixa  $\sigma > 0,100$ , quando comparada com a dinâmica bidimensional. Outro fato interessante na dinâmica de

evolução bidimensional é que as oscilações de  $P_3 = |C_3(k, z)|^2$  e  $P_4 = |C_4(k, z)|^2$  ocorrem em fase. Tal comportamento pode ser visualizado pela linha preta das curvas da figura (4.5 (a), (b), (c) e (d)).

**Figura 4.6:** As curvas representam a dinâmica das oscilações dos modos de Fourier  $P_1 = |C_1(k, z)|^2$  (linha azul),  $P_2 = |C_2(k, z)|^2$  (linha vermelha),  $P_3 = |C_3(k, z)|^2$  e  $P_4 = |C_4(k, z)|^2$  (linha marrom), todos os modos estão evoluindo com  $z$ , para diferentes valores do coeficiente não linear. Aqui foram usados,  $\sigma = 0,105$ ,  $\sigma = 0,250$  e  $\sigma = 0,550$ . A parte superior da figura expressa os ciclos oscilatórios do modo  $P_1$  com  $z$ , onde as linhas em verde, azul e vermelho são as amplitudes de Fourier para os mesmos valores de  $\sigma$ , mencionados respectivamente.  $V_0 = 0,05$  e  $\epsilon = 1$ .



Fonte: Conforme referência [34].

A figura (4.6) exhibe o comportamento de quatro componentes de frequências

no espaço de Fourier oscilando com  $\sigma > 0,100$ . Nesta faixa, Observa-se as amplitudes perdendo a persistência das oscilações com o aumento do parâmetro não linear e conseqüentemente a energia passa a se concentrar em apenas um modo como no caso unidimensional.

Portanto, a dinâmica dos sistemas com dois ou quatro níveis, evoluindo na presença do efeito não linear, tende a concentrar a energia de oscilação em apenas um modo. Como consequência, surge, uma diminuição gradativa das amplitudes de oscilações, a partir de um valor limiar do parâmetro não linear  $\sigma = V_0$ . Em síntese, as oscilações de apenas dois modos apresentam consistência em regime quase linear, ou seja,  $\sigma < V_0$ , pois a partir do valor limiar não faz sentido usar as aproximações de modos ressonantes para explicar o fenômeno de transferência de energia durante a evolução. Assim, é necessário elaborar um estudo bastante minucioso de tais oscilações que envolva os modos vizinhos para observar o comportamento não linear dessa dinâmica.

#### 4.4 Conclusão

Neste estudo, foi mostrado que um campo eletromagnético constituído por um par de frequências exibe as oscilações de Rabi ao se propagar numa rede periódica. Os modos co-propagantes evoluem trocando energia entre si, mas acoplados com o vetor da rede obedecendo à condição de Bragg. Quando o campo se propaga na presença de um efeito não linear, os modos de Fourier conseguem oscilar completamente até o valor limiar do parâmetro não linear,  $\sigma = V_0$ . Mas, um fato importante que pode ser observado na faixa  $\sigma > V_0$  é um aumento significativo do período espacial

---

das oscilações durante a evolução. A partir do valor limiar do comprimento de não linearidade, as amplitudes de Fourier diminuem gradativamente, sem sofrerem interferências, passando agora a se comportarem como estados localizados, similar ao *selftrapping* para o caso eletrônico. Portanto, as oscilações de Rabi óptica usando a aproximação de dois modos de Fourier não apresentam consistência na presença do efeito não linear.

# Capítulo 5

## OSCILAÇÕES NÃO LINEARES MULTIMODAL

### 5.1 Introdução

No capítulo anterior, foi abordado, um estudo sobre a dinâmica de evolução de um campo eletromagnético, composto por duas frequências ressonantes que oscilavam trocando energia até um valor de corte do parâmetro não linear. Dessa forma foi possível analisar que as oscilações envolvendo somente duas componentes de frequências no espaço de Fourier não forneceram argumentos consistentes para explicar o aumento do período, e a tendência dos modos se comportarem como estados localizados na presença de uma forte não linearidade durante a evolução. No corrente capítulo, será investigado, de forma mais detalhada, sobre o que está realmente acontecendo com a energia de oscilação dos modos, quando um feixe luminoso do tipo Gaussiano é colocado para propagar numa rede óptica.

O presente estudo foi elaborado usando as ferramentas fundamentais dos seguintes métodos numéricos: pseudo-espectral e diferenças finitas, descritos no capítulo três, onde foi investigado a eficiência desses métodos, e aplicados para

resolver problemas que envolvam equações diferenciais parciais não lineares com rápidas oscilações. Então, usando os referidos métodos numéricos para resolver a equação de propagação (2.33) e conseqüentemente obter um conjunto de dados. Esses dados fornecerão condições necessárias para analisar o comportamento de um feixe óptico e seu espectro durante a propagação, na presença do efeito não linear de autodesfocalização.

## 5.2 Dinâmica de evolução multimodal

A propagação de um feixe óptico em uma rede óptica pode induzir potências de oscilações entre os modos acoplados de Fourier que oscilam obedecendo à condição de ressonância de Bragg. Essas potências de Fourier desenvolvem uma dinâmica de oscilações similares as oscilações de Rabi na matéria. Recentemente, foram publicados alguns trabalhos sobre as oscilações de Rabi em uma rede óptica, dos quais, três trabalhos serviram de base nessa tese - Shchesnovich [32] para o caso linear, Silva [34] e Xião [36] para o caso não linear. Estes trabalhos foram elaborados para descrever a dinâmica das oscilações de um campo externo, composto simplesmente por duas frequências ressonantes.

Nesta parte do trabalho, é apresentado um estudo sobre as oscilações dos dois modos ressonantes de Fourier, mas considerando os modos vizinhos que evoluem trocando energia entre si na presença do efeito não linear que será identificado nesse contexto de autodesfocalização. Este efeito de autodesfocalização é responsável por promover um declínio da intensidade das amplitudes de Fourier e conseqüentemente, distribuir uma parcela de energia para outros modos presentes no feixe. A propagação

da luz através de uma rede óptica periódica, onde existe uma interação não linear pode ser realizada experimentalmente [81, 82]. Este fato é possível aumentando-se a potência da intensidade do laser que produz o feixe propagante ou usando pulsos lasers [60] para obter o efeito não linear desejado, por exemplo, geração de harmônicos [46].

O estudo apresenta uma análise numérica da dinâmica de evolução dos modos do feixe óptico na presença do efeito não linear de autodesfocalização. Inicialmente é resolvida, numericamente, a equação não linear unidimensional dada pela equação (2.33).

Com isso, serão investigadas as oscilações de Rabi do espectro de Fourier, centrado em um dos modos ressonantes. E, comparar a dinâmica de oscilação do espectro de Fourier com as oscilações de simplesmente dois modos na influência do referido efeito de não linearidade. Partindo do ponto de vista que o efeito não linear induz novas frequências, por conseguinte, a propagação de um pacote de onda com ampla largura no eixo real e pequena no espaço  $k$  descreve um modelo realista. Enquanto que o modelo de só dois modos, um inicialmente com toda energia do feixe, não descreve uma situação física.

### 5.3 Solução da equação de propagação

O modelo de estudo apresenta uma equação não linear unidimensional (2.33) que governa a propagação em  $z$  (onde não existe *bandgap*<sup>1</sup>) através de uma rede óptica com um padrão periódico perpendicular ao eixo longitudinal  $z$ , enquanto que

---

<sup>1</sup>faixa proibida para algumas frequências

o perfil transversal Gaussiano oscila de um extremo a outro dentro da zona Brillouin na direção periódica (onde existe *bandgap*) que está ao longo do eixo  $x$ . Assim, a técnica de resolução da referida equação (2.33) é usar uma condição de contorno periódica tomando como condição inicial um feixe do tipo Gaussiano, conforme a expressão (5.1).

$$U(x, z = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(ik_B x - \frac{x^2}{2})}. \quad (5.1)$$

Aqui  $k_B = K_B \gamma$  e  $x = \frac{X}{\gamma}$  são quantidades adimensionais.  $K_B = \frac{1}{2}$  é um vetor de onda de Bloch que obedece a condição de acoplamento de Bragg dado pela expressão (4.1), quando o período espacial da rede é  $d = 2\pi$ . Com isso,  $k_B = \frac{1}{2}\gamma$  é um vetor de onda de Bloch normalizado. A função Gaussiana está normalizada para uma área unitária.  $\gamma$  representa a largura finita da Gaussiana na entrada da rede. Nas simulações, foi usado  $\gamma = 50$  (unidades de comprimento), conseqüentemente,  $k_B = 25$ , porque havia a pretensão de obter um feixe extremamente concentrado no espaço  $k$  em torno de  $k_B$ . A Gaussiana é utilizada para modelar o efeito de largura do feixe, e sistemas ópticos.

O parâmetro de não linearidade pode ser analisado juntamente com o termo de modulação da rede. Se  $\sigma < V_0$ , implica num efeito não linear fraco, e se o comprimento não linear for maior que a modulação da rede vai implicar num efeito não linear forte, ou seja,  $\sigma > V_0$ . Observa-se neste estudo que  $\sigma$  apresenta uma certa dependência de  $V_0$ .

### 5.3.1 Validades da propagação

Serão mencionados os itens que revelam de forma bastante contundente as precauções que foram tomadas para estudar a dinâmica de evolução de um feixe multimodal através da rede óptica.

1 - Foi usado como uma condição inicial, um feixe inicialmente com um perfil transversal Gaussiano.

2 - Foi usada a condição de contorno periódica, evitando as múltiplas reflexões do feixe nas bordas. Com isso, foi desprezado o efeito de borda.

3 - A rede óptica é considerada rasa, assim, a modulação da amplitude da rede é  $|V_0| \ll 1$ .

4 - Os métodos computacionais das diferenças finitas e pseudo-espectral que foram usados para obter os resultados foram devidamente validados (vide apêndice A).

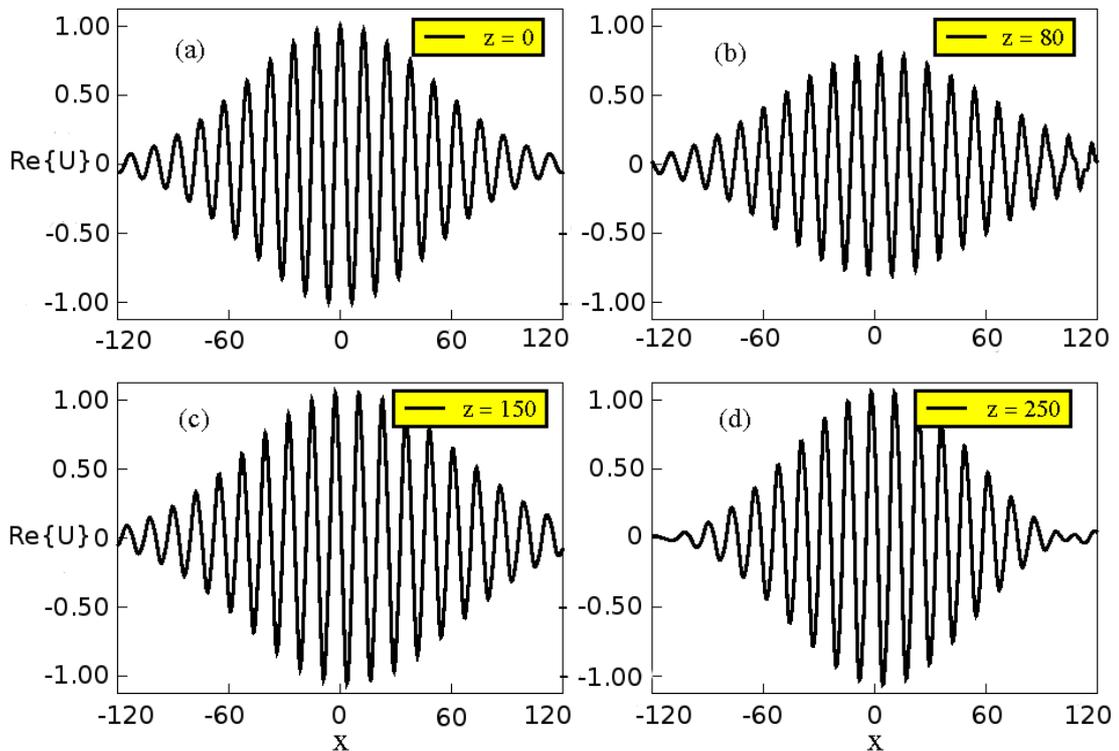
5 - As simulações mostraram que as oscilações são válidas até  $z = 700$ .

Inicialmente foi resolvida a equação de propagação usando o método das diferenças finitas para investigar o comportamento da evolução do feixe na rede, para  $z$  pequeno, conforme a figura (7.1) expressa no apêndice E. Para minimizar os efeitos de borda atuando sobre as oscilações dos modos, foi devidamente usada a condição de contorno periódica para resolver a equação de propagação (2.33), com isso, investigar os resultados numéricos. Assim, será analisado o comportamento das oscilações das amplitudes de Fourier em caráter de regime não linear.

Observa-se que o feixe luminoso apresenta um pequeno deslocamento em relação a origem, como também exibe uma dinâmica de compressão e expansão durante a propagação, conforme a figura (5.1).

Este processo de evolução do feixe pode ser comparado qualitativamente com

**Figura 5.1:** As figuras representam a dinâmica de compressão e expansão durante a propagação do feixe para  $\sigma = 0,05$ . Na figura (a), o perfil Gaussiano é colocado para se propagar em  $z = 0$ . Na figura (b), o feixe é alongado em  $z = 80$ . A figura (b) mostra uma compressão seguida de um pequeno deslocamento para à direita. A figura (c), ilustra o feixe realizando um pequeno deslocamento para à esquerda, em  $z = 150$ . A parte (d) da figura exhibe o feixe na posição  $z = 250$ , onde começa um pequeno deslocamento para à direita, completando o ciclo de oscilação durante a evolução. Aqui foi usado  $V_0 = 0,05$



Fonte: Conforme referência [40].

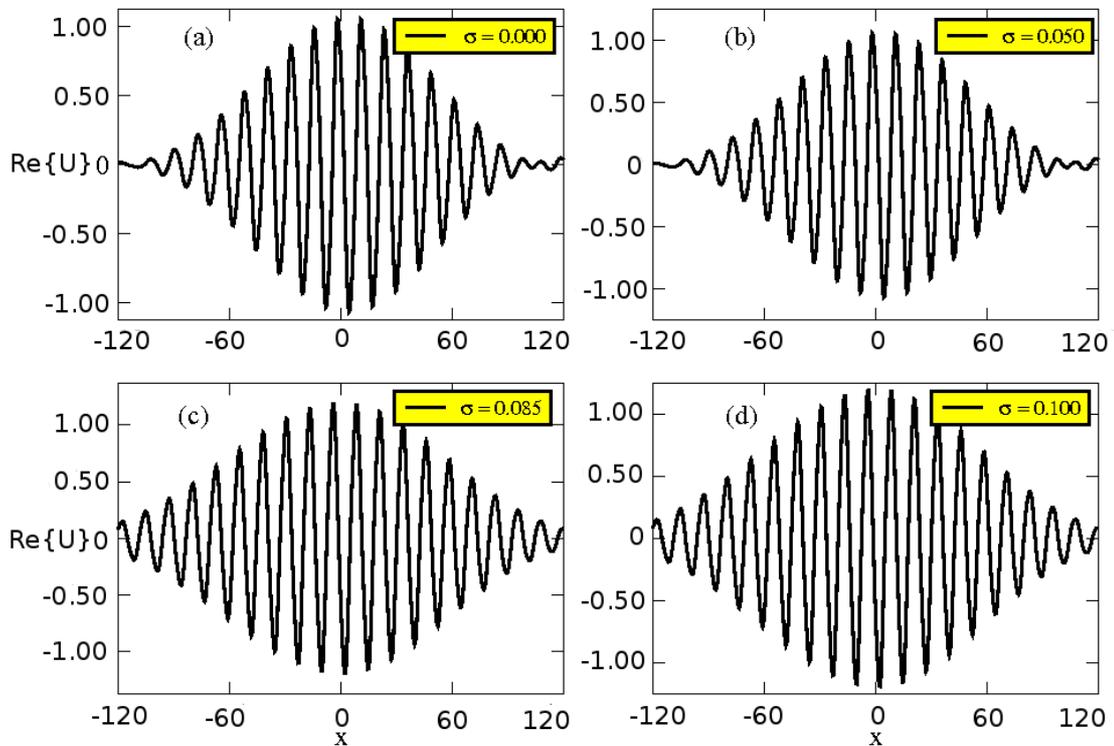
a evolução do feixe contendo um único modo, colocado para se difundir na rede, conforme estudado no capítulo anterior (4). O feixe luminoso da figura (5.1) exhibe um fenômeno de compressão e expansão simultaneamente a um pequeno deslocamento,

em relação a origem. Na parte (a) o feixe óptico inicia a evolução centrado na origem. Na parte (b) o feixe apresenta um deslocamento que se processa inicialmente para à direita, depois um pequeno deslocamento para à esquerda seguida de outro deslocamento diminuto para à direita, conforme as partes (c) e (d) desta figura. Esta oscilação fica evidente usando o espaço recíproco de acordo com a figura (5.3). É importante notar que as figuras que denotam o espaço real (5.1) e o espaço recíproco (5.3) são análogas as partes superior e inferior da figura (4.3), esta foi desenvolvida para mostrar a dinâmica de apenas duas componentes de frequências. Todavia, a figura (5.1) indica que os modos do feixe começam o processo de troca de energia, enquanto oscilam na presença do efeito não linear que, por sua vez, acrescenta outras frequências ao feixe. Os novos componentes de frequências que são acrescentados vêm do fato de que o efeito de autodesfocalização arrasta a energia para outros modos, devido ao índice de refração da rede. Este fenômeno permite selecionar outros componentes de frequências. A figura (5.2) exhibe o comportamento do feixe, à medida em que o coeficiente  $\sigma$  é aumentado.

Baseado na figura (5.2), pode-se observar um aumento da largura espacial do feixe sob o efeito de não linearidade, para um valor fixo da distância de propagação. O efeito não linear de autodesfocalização atua sobre as componentes de frequências ressonantes do campo elétrico executando uma distribuição de energia para outros modos não ressonantes, à medida que o parâmetro  $\sigma$  é aumentado até o valor  $\sigma = 0, 1$ ; causando, assim, uma autodesfocalização de energia entre as frequências do espectro de Fourier.

A figura (5.3) mostra a evolução do espectro, centrado em  $k_B = k_x = 25$  ou modo central ressonante, para as distâncias de propagação  $z$  específicas, usando

**Figura 5.2:** Ilustra o comportamento do feixe, enquanto os modos estão oscilando com o aumento do parâmetro  $\sigma$ . A parte (a) mostra o feixe se propagando em regime linear sobre uma faixa estreita de modos. As partes (b), (c) e (d) da figura, indicam que o feixe luminoso está se difundindo em regime não linear, apresentando um aumento gradativo de sua largura espacial para confinar modos. Foi usado  $V_0 = 0,05$ .

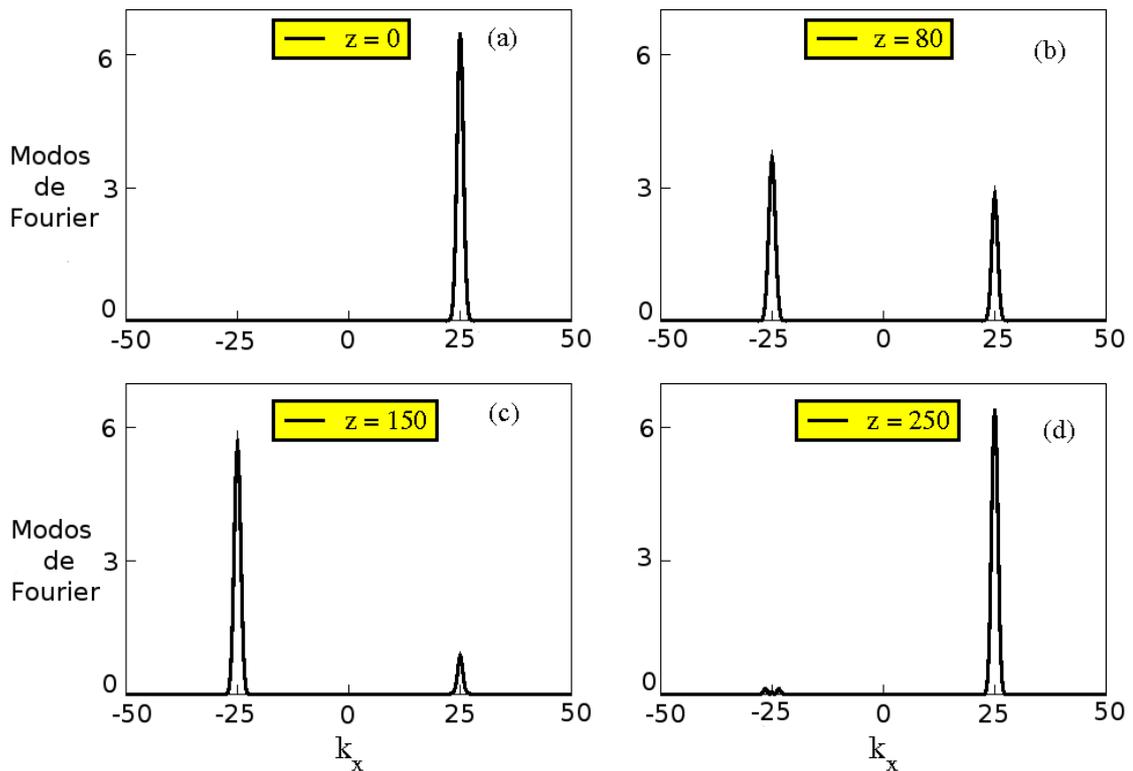


Fonte: Elaborada pelo próprio autor, 2012.

$\sigma = 0,05$ . Em  $z = 0$ , o espectro está inicialmente com toda energia, no contorno da borda da  $ZB$ , representada na primeira janela da figura (5.3). Na parte (c) exibe o espectro com uma parcela de energia em torno de  $k_x = 25$ , e outra parcela em torno  $k_x = -25$ . A dinâmica mostra a evolução do espectro até retornar ao ponto

inicial, conforme a parte (d) da figura. Isto implica, que o espectro pode oscilar livremente de um ponto a outro ponto simétrico dentro da  $ZB$  na presença do efeito de autodesfocalização fraco.

**Figura 5.3:** Dinâmica da evolução do espectro de Fourier usando  $\sigma = 0,05$  ou  $\sigma = V_0$ . A figura (a) mostra o espectro de Fourier inicialmente no extremo da  $ZB$ , em  $k_x = 25$  para  $z = 0$ . A figura (b) exhibe o espectro desaparecendo em  $k_x = 25$  e surgindo em  $k_x = -25$ , quando  $z = 80$ . A figura (c) ilustra o espectro com quase toda energia em  $k_x = -25$ , em  $z = 150$ . A figura (d) mostra o espectro resurgindo completamente em  $k_x = 25$ , quando  $z = 250$ . Aqui foi usado  $V_0 = 0,05$ .



Fonte: Conforme referência [40].

A figura (5.4) ilustra a evolução do espectro de Fourier na presença de uma forte não linearidade, em comparação com a modulação da rede  $V_0$ . O efeito não linear da autodesfocalização distribui a energia de oscilação do modo central do espectro para excitar outros modos que entram em ressonância com o modo central  $P_1$ , durante a propagação. Conseqüentemente, o espectro de Fourier é remodelado com o surgimento de novos componentes de frequências. Este fenômeno apresenta uma similaridade com o efeito de automodulação de fase (selfphase modulation) que induz um acréscimo de novos componentes de frequências ao espectro em regime temporal [86].

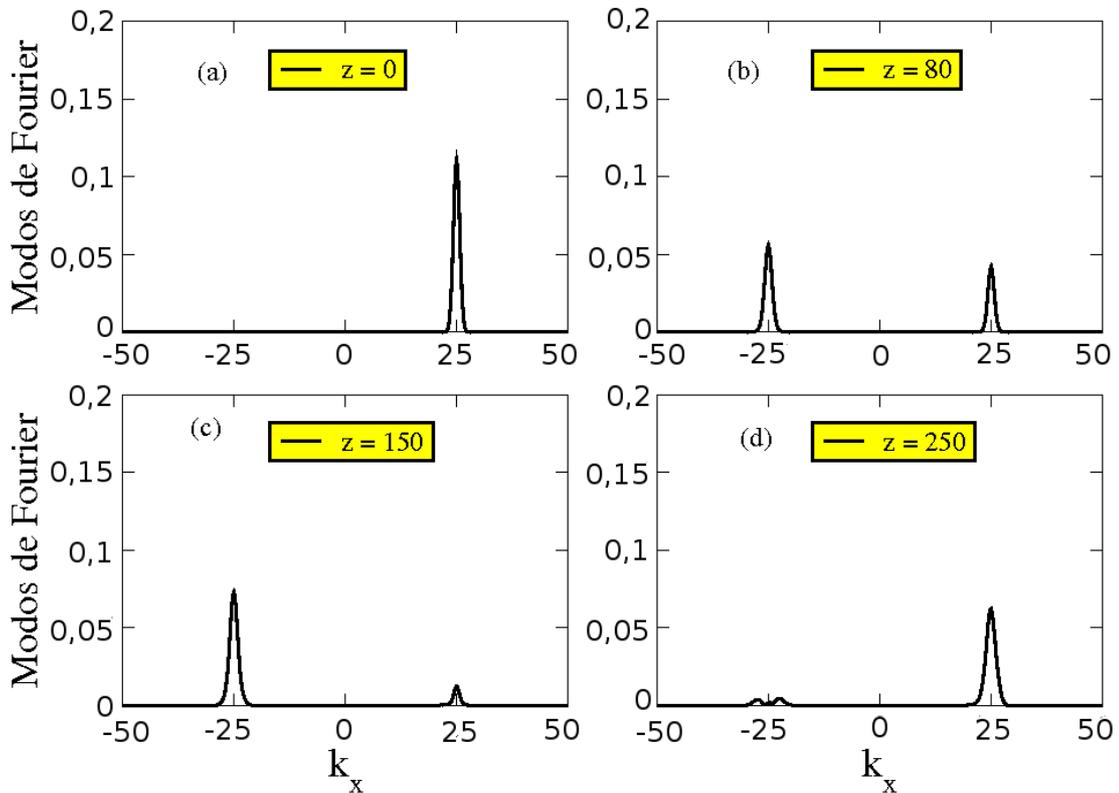
A figura (5.5) exhibe o processo de atuação do efeito da autodesfocalização sobre o modo central do espectro<sup>2</sup> [39].

A linha azul representa as oscilações das amplitudes do modo central do espectro de Fourier em regime linear ou quase linear, pois este comportamento persiste na faixa  $\sigma < V_0$ , corroborando com o caso de dois modos em regime quase linear. Na faixa  $\sigma > V_0$ , a figura (5.5) indica um declínio das amplitudes de  $P_1$ , devido a presença do efeito não linear<sup>3</sup>. Este efeito atua distribuindo a energia desse modo  $P_1$  para excitar outros modos vizinhos do espectro, mas o período das oscilações permanece constante. Este fenômeno não ocorria para o caso das oscilações não lineares, considerando somente dois modos acoplados, que oscilavam com um aumento do período conforme (4.2 (b), (c) e (d)). Outra observação intrigante que pode ser feita na figura (5.5) é concernente a linha preta ( $\sigma = 0,5$ ) tocar o eixo  $z$ , isto significa que a energia dessa amplitude, é zero. Então, para onde foi a energia

<sup>2</sup>C. R. da Silva, Henrique Marks and S. B. Cavalcanti. Effect of nonlinearity on the dynamics of Rabi oscillations in optically induced lattices. Submitted to Optics Communications

<sup>3</sup>C. R. da Silva, Henrique Marks and S. B. Cavalcanti. Effect of nonlinearity on the dynamics of Rabi oscillations in optically induced lattices. Submitted to Optics Communications

**Figura 5.4:** Dinâmica de evolução do espectro de Fourier com a distância de propagação para alguns  $z$  selecionados e para o valor do parâmetro não linear  $\sigma = 0,4$  ou  $\sigma = 8V_0$ . (a) Mostra o espectro de Fourier em  $k_x = 25$ , quando  $z = 0$ . As partes (b)  $z = 80$ , (c)  $z = 150$  e (d)  $z = 250$  ilustram a distribuição de energia do espectro para outros modos devido à presença do efeito de autodesfocalização.  $V_0 = 0,05$

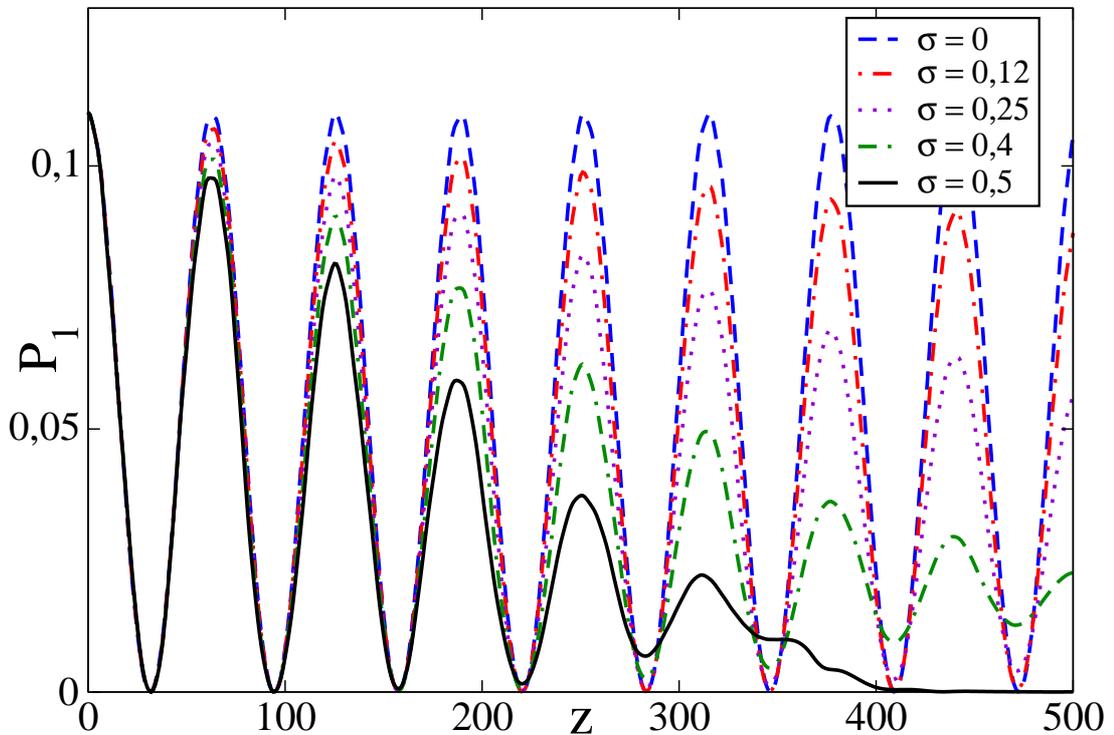


Fonte: Conforme referência [40].

do modo  $P_1$ ? Esta pergunta pode ser respondida analisando a figura (5.6).

Em  $z = 350$ , nota-se que parte da energia das componentes de frequências centrais está sendo transferida para aumentar a faixa de modos do espectro. Entretanto, quando  $z = 450$  o espectro de Fourier se apresenta com quase toda a energia

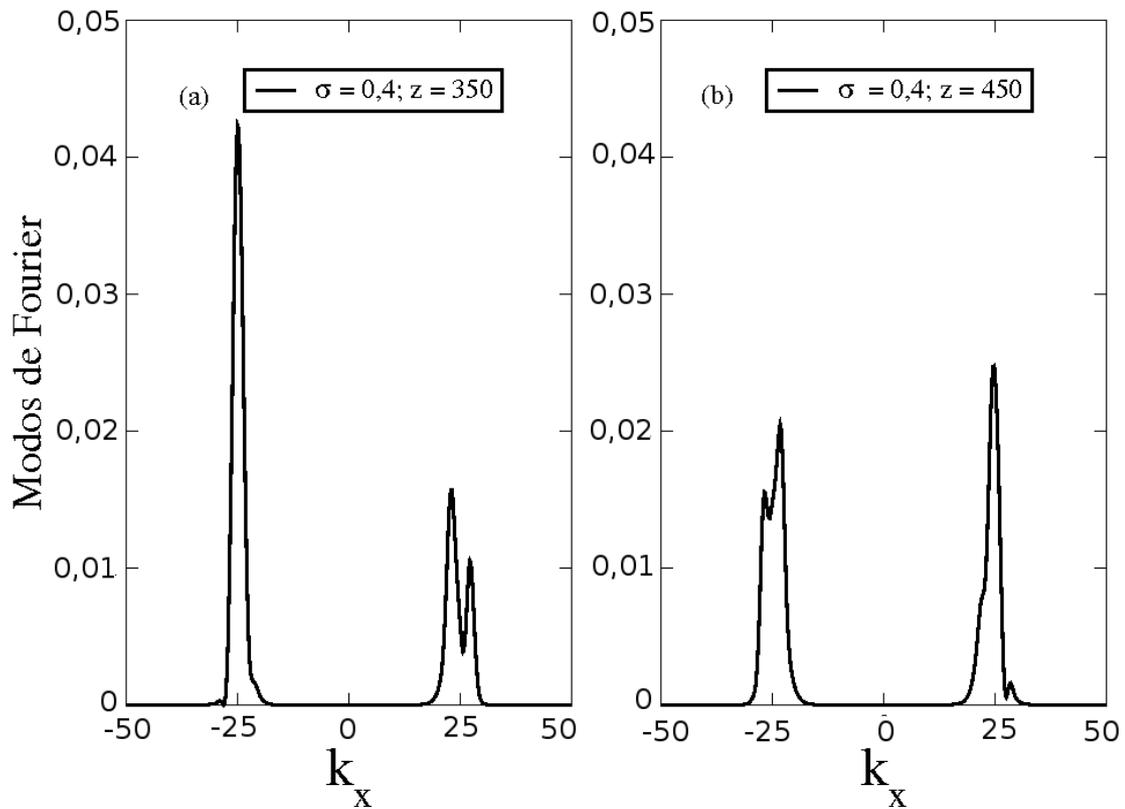
**Figura 5.5:** Comportamento da evolução do modo  $P_1 = |C_1(k = k_B, z)|^2$ , com  $z$ , para alguns valores específicos do parâmetro não linear  $\sigma$ . A linha azul que oscila com a mesma amplitude está em regime linear ou quase linear. As linhas vermelha, verde, roxo e preta representam o modo  $P_1$  evoluindo com uma diminuição gradativa de sua amplitude de oscilação. Aqui foi usado  $V_0 = 0,05$ .



Fonte: Elaborada pelo próprio autor, 2013.

dessas frequências centrais. Este fenômeno ocorre devido a ação do efeito de autodesfocalização de transferir a energia desses modos centrais para excitar outros modos do espectro. Este processo de transferência de energia dos modos centrais para o espectro, fica evidente na figura (5.7).

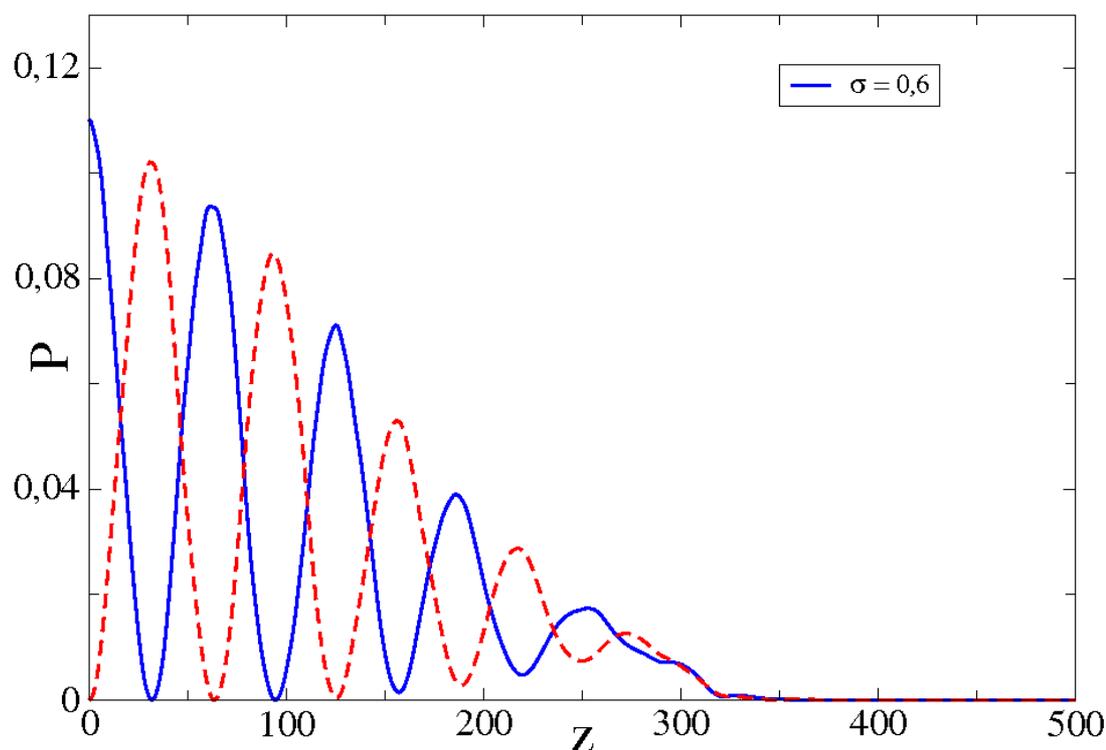
**Figura 5.6:** Representação gráfica do espectro de Fourier na presença do efeito de autodesfocalização usando o parâmetro  $\sigma = 10V_0$ , para as distâncias  $z$  especificadas. As partes (a) e (b) Mostram o espectro de Fourier se estendendo entre as frequências  $k_x = 25$  e  $k_x = -25$ , quando  $z = 350$  e  $z = 450$ . Usando  $V_0 = 0,05$ .



Fonte: Elaborada pelo próprio autor, 2013.

A figura (5.7) indica que as amplitudes de Fourier  $P_1$  e  $P_2$ , não apresentam nenhuma energia para executar o movimento periódico a partir de  $z = 300$ . Implicitamente, a energia foi transferida para dentro do espectro de Fourier, excitando novos componentes de frequências devido o efeito de não linearidade. Consequente-

**Figura 5.7:** Representação gráfica do comportamento das amplitudes de Fourier durante a evolução, usando  $\sigma = 0,6$  ou  $\sigma = 12V_0$  com  $V_0 = 0,05$ . A linha azul e a vermelha tracejada que realizam um movimento periódico indicam  $P_1 = |C_1(k = k_B, z)|^2$  e  $P_2 = |C_2(k = -k_B, z)|^2$  respectivamente.

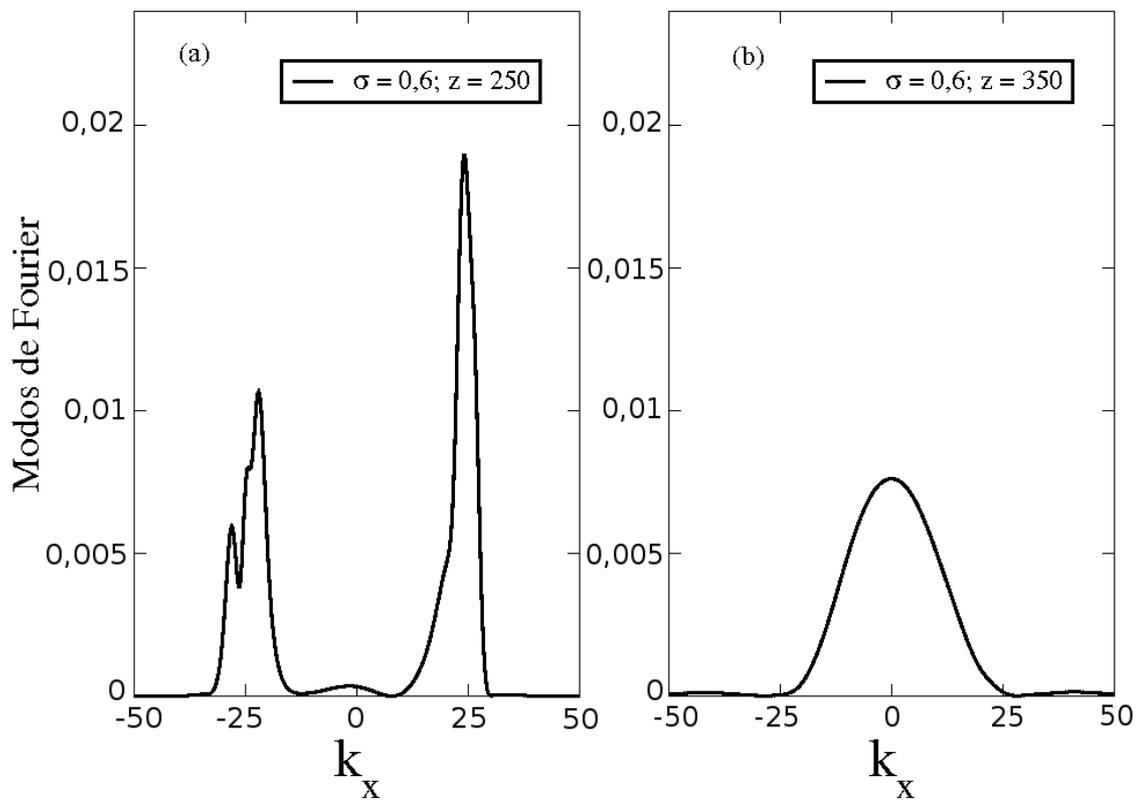


Fonte: Elaborada pelo próprio autor, 2013.

mente, é alterada a forma do espectro com a presença de novos modos de Fourier, conforme a figura (5.8).

A figura (5.8) sugere que a não linearidade promove uma distribuição de energia das componentes de frequências centrais do espectro, para ampliar uma faixa de novos componentes de frequências de Fourier, conseqüentemente o espectro

**Figura 5.8:** Representação gráfica do espectro de Fourier na presença do efeito de autodesfocalização usando o parâmetro  $\sigma = 12V_0$ , para as distâncias  $z$  especificadas. As partes (a) e (b) mostram o espectro de Fourier distribuído entre  $k_x = 25$  e  $k_x = -25$ , quando  $z = 250$  e  $z = 350$ . Usando  $V_0 = 0,05$ .



Fonte: Elaborada pelo próprio autor, 2013.

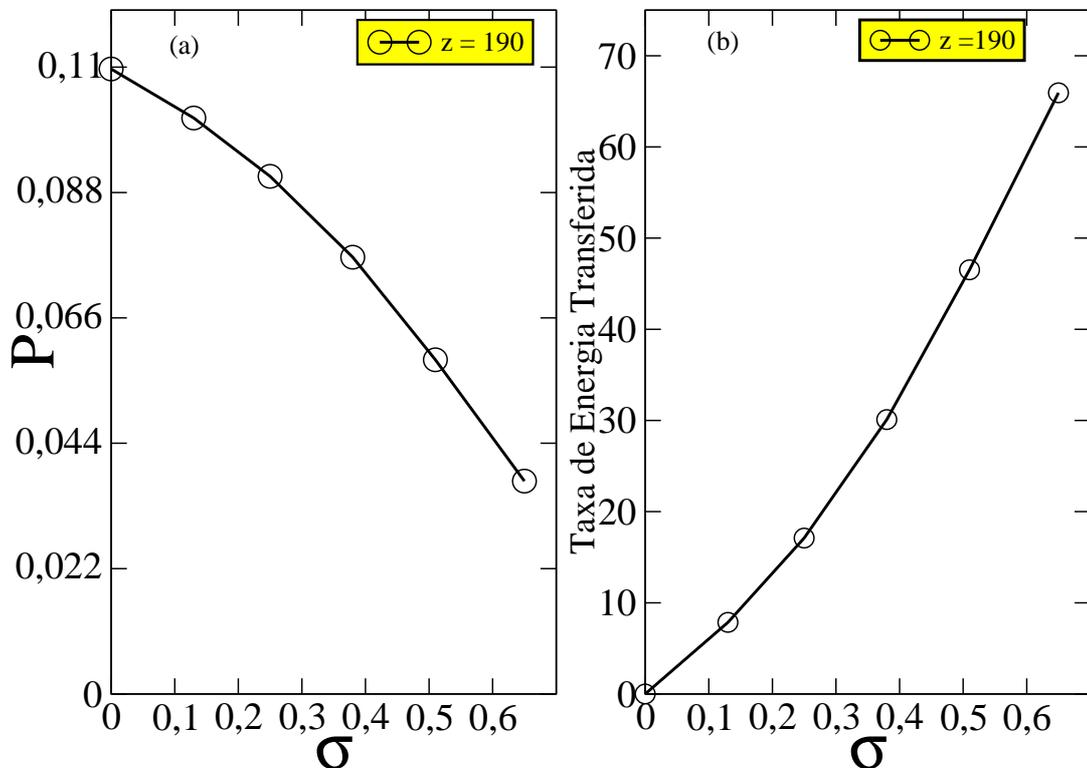
é estendido de um extremo a outro da zona de Brillouin ( $ZB$ ). A parte (a) da referida figura (5.8) indica que para  $\sigma = 12V_0$  em  $z = 250$ , o espectro de Fourier apresenta uma largura de modos em torno das frequências centrais, enquanto que uma parcela de energia do espectro começa surgir no centro da zona. Na parte (b) usando  $\sigma = 12V_0$  em  $z = 350$ , o espectro exhibe a energia dos modos centrais totalmente

transferida para dentro do espectro. Nota-se que o comportamento da figura (5.8) corrobora com a figura (2.3), assim, como o feixe óptico no espaço real tende a aumentar sua largura com a presença da não linearidade de autodesfocalização, o espectro de Fourier tende a aumentar sua faixa de novos componentes de frequências.

A dinâmica da transferência de energia do modo  $P_1$  para promover outros modos do espectro pode ser analisada na figura (5.9).

O modo  $P_1$  perde sua magnitude de amplitude na influência do efeito não linear. Na figura (5.9), foi usado o eixo vertical para os valores do modo  $P_1$  versus os valores do parâmetro  $\sigma$ , expresso no eixo horizontal. Cada ponto no plano mostrado pelo símbolo em bola, foi calculado baseado nos dados fornecidos pelos scripts usados na figura (5.5). Para a distância de propagação  $z = 190$ , foi rodado o programa numérico para os referidos valores do coeficiente  $\sigma$ , para simplesmente verificar o decaimento da intensidade da amplitude do modo em cada caso. Na figura (5.9 (b)) o eixo vertical indica o percentual da taxa de energia distribuída do modo  $P_1$ , para outros modos presentes no espectro de Fourier. Cada ponto mostrado em símbolo de forma circular, foi calculado baseado no resultado na figura (5.9 (a)). Tomando o valor inicial do modo que evolui sem a presença da não linearidade  $\sigma$  em  $z = 190$  e subtraindo do valor do modo correspondente ao valor do parâmetro  $\sigma$ , por sua vez, multiplicando o resultado por 100, para fornecer o percentual da taxa de transferência de energia desejado. Facilmente é observado, que tanto a taxa de transferência de energia como a perda da magnitude do modo apresenta um comportamento não linear. Note que para o valor de  $\sigma = 0,640$  a amplitude de Fourier forneceu aproximadamente 65% de sua energia inicial. A figura (5.10) mostra o comprimento não linear de autodesfocalização  $z_{ef} = L_{NL}$ , definido para uma perda

**Figura 5.9:** Dinâmica do comportamento não linear do modo  $P_1$ , e da taxa de energia transferida com  $\sigma$ , para a distância de propagação  $z = 190$ . (a) Os símbolos em bola, ilustram os pontos de queda de magnitude do modo, com o respectivo valor do parâmetro não linear. (b) Os símbolos em forma de círculos, representam os pontos da taxa transferida de energia, com o valor respectivo do parâmetro não linear.

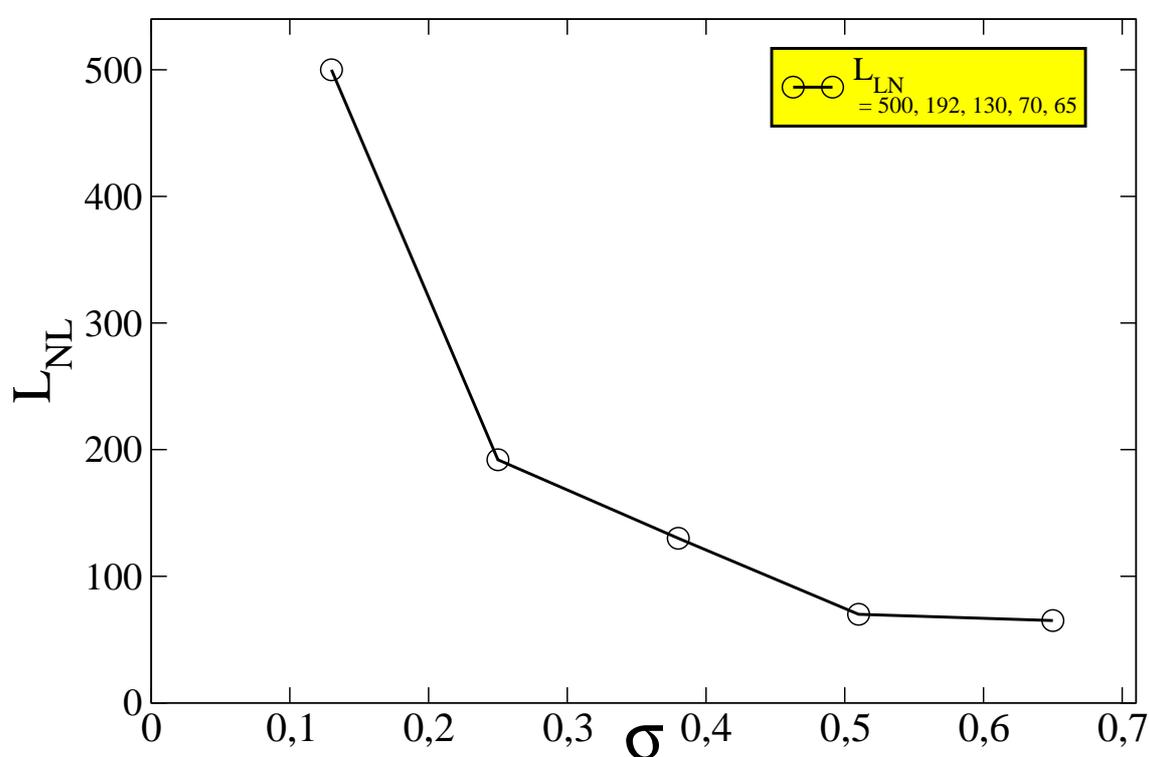


Fonte: Conforme referência [40].

energética de 20%.

O parâmetro não linear é importante para verificar a distância espacial que a não linearidade atua sobre as amplitudes oscilantes de um modo. O eixo vertical denota a distância de propagação efetiva  $L_{NL}$ , ou seja, o comprimento não linear.

**Figura 5.10:** Comprimento não linear  $L_{NL}$ , definido para uma taxa de transferência de energia de 20%, a partir do modo  $P_1$ . Os símbolos em bola mostram os pontos  $L_{NL}$ , e o respectivo valor superior direito apresenta o comprimento não linear ou a distância  $z$  efetiva, com a perda de 20% da magnitude de oscilação.



Fonte: Conforme referência [40].

Na parte superior direita desta figura estão os valores do  $L_{NL}$  que foram calculados de forma semelhantes a metodologia empregada na figura (5.9 (a) e (b)). Observa-se claramente que  $L_{NL}$ , torna-se menor, à medida que o coeficiente não linear  $\sigma$ , está aumentando consideravelmente. Nesta figura, está ilustrado que para  $\sigma > 0,6$ , im-

plica em  $L_{NL} < 100$ . Portanto, a relação matemática empírica entre o comprimento e o parâmetro não linear é inversamente proporcional,  $L_{NL} \sim \frac{1}{\sigma}$ . Assim, o comprimento não linear é a distância na qual o efeito não linear de autodesfocalização atua sobre a propagação do feixe remodelando o perfil transversal Gaussiano.

## 5.4 Conclusão

Finalmente, foi exibido um estudo teórico baseado em métodos numéricos, sobre a dinâmica de evolução dos modos de Fourier de um feixe luminoso que se propaga através de uma rede óptica. Verificou-se que um feixe do tipo Gaussiano colocado inicialmente para se propagar exibe oscilações entre os modos de Fourier, usando a teoria de ressonância de Bragg. Foi analisada a propagação não linear de um feixe óptico para diferentes valores do parâmetro de não linearidade e verificado que as oscilações dos modos persistem para vários  $z$ . Mostrou-se uma comparação qualitativa da evolução de um feixe multimodal com a evolução de somente dois modos de Fourier trocando energia entre si, na presença do efeito não linear de autodesfocalização.

Verifica-se que tais oscilações entre dois modos exprimem persistência somente na presença da não linearidade fraca; isto é, na faixa  $\sigma < V_0$ . A partir de  $\sigma > V_0$  que exibe uma faixa correspondente ao efeito não linear forte, somente a aproximação multimodal pode descrever perfeitamente a dinâmica da transferência de energia entre os modos; afinal, esse modelo revela uma realidade física. O espectro de Fourier evoluindo na presença da não linearidade poder ser remodelado com o surgimento de outros modos. Foi constatado, através das simulações, que o efeito

de autodesfocalização pode ser usado para controlar as amplitudes de oscilações dos modos de Fourier.

Pode-se usar essa metodologia para estudar as oscilações de Rabi entre os modos de Fourier usando outros tipos de feixes como, por exemplo, os feixes Bessel.

# Capítulo 6

## CONCLUSÃO

Esta pesquisa foi baseada em estudos teóricos e em simulações computacional sobre as oscilações dos modos de um feixe multimodal, que, ao se propagar através de uma rede óptica periódica pode exibir oscilações de Rabi entre os modos do espectro de Fourier. Partindo das equações de Maxwell, foi obtida uma equação, tipo a equação não linear de Schrödinger, que pode fornecer a descrição exata da propagação para um campo eletromagnético. Baseando-se nesta equação, foi obtido um conjunto de equações diferenciais ordinárias que estão acopladas com um vetor da rede recíproca, podendo expressar a dinâmica de evolução dos modos co-propagantes através de uma rede óptica.

Foi feita uma descrição fenomenológica de uma rede óptica com um período espacial de  $2\pi$  e gerada usando métodos numéricos em um meio específico. Tendo em vista que a teoria usada para descrever a dinâmica no estado cristalino pode ser estendida para o caso das redes ópticas. A referida equação da onda foi estudada para o caso unidimensional, usando os métodos das diferenças finitas e pseudo-espectral para obter os resultados. Foi constatado que um feixe do tipo Gaussiano, centrado

---

em torno de um dos modos ressonantes, pode evoluir exibindo as oscilações de Rabi entre os modos de Fourier. Constatou-se dois regimes não lineares para as oscilações do feixe óptico: Regime quase linear,  $\sigma < V_0$ , onde o espectro oscila livremente de um extremo a outro dentro da zona de Brillouin; enfim, foram observados que os modos co-propagantes exibem oscilações de Rabi óptica, trocando energia entre si, à medida que o feixe está se difundido na rede. Assim, quando a onda eletromagnética se propaga na presença do efeito não linear fraco, os modos de Fourier conseguem oscilar completamente até o valor limiar do parâmetro não linear,  $\sigma = V_0$ . Todavia, um fato importante que foi analisado nessa construção é um aumento espúrio do período espacial das oscilações. Regime não linear,  $\sigma > V_0$ , corresponde ao efeito não linear forte. Neste regime de não linearidade forte, apenas a aproximação multimodal é consistente para descrever fisicamente a dinâmica das oscilações de Rabi óptica, portanto, o modelo com somente dois modos é insuficiente para explicar o fenômeno das trocas de energia durante a propagação. Foi comprovado que o feixe óptico no espaço real exibe um deslocamento muito pequeno em relação a origem, dessa forma, as oscilações não foram facilmente notadas; mas, o espaço recíproco revelou as oscilações de Rabi entre os modos ou componentes de frequências de Fourier. Verificou-se que o espectro de Fourier evoluindo na presença da não linearidade pode ser remodelado com o surgimento de outras componentes de frequências de Fourier. Este fenômeno acontece quando o efeito de autodesfocalização atua distribuindo a energia do modo central  $P_1$  (diminuindo sua amplitude de oscilação) para excitar outros os modos vizinhos; como consequência ocorre uma mudança do perfil do espectro. Esta mudança do perfil está relacionada com a inclusão de novos componentes de frequências induzidas pelo efeito de não linearidade. Os resultados

implicam que o referido efeito de autodesfocalização pode ser usado para controlar as amplitudes de oscilações dos modos de Fourier. Este fenômeno pode ser usado para desenvolver alguma técnica para controle da luz.

## 6.1 Perspectivas para trabalhos futuros

Aplicar os métodos numéricos para estudar a propagação de feixes não difratantes através de uma rede fotônica; enfim, verificar as oscilações de Rabi usando os feixes Bessel. Este estudo é importante para mostrar a não existência de sólitons presentes nas oscilações.

Investigar as oscilações de Rabi usando outros efeitos não lineares.

# Referências Bibliográficas

- [1] DAHAN, M. B. et al. Bloch oscillations of atoms in a optical potential. **Phys. Rev. Lett.** 76, p.4508-4511, jun.1996.
- [2] Disponível em: [//http://www.wikipedia.org/wiki. "Optical lattice"](http://www.wikipedia.org/wiki/Optical_lattice) . Acesso em: 27 de out. 2011.
- [3] LONCAR, M. et al. Experimental and theoretical confirmation of Bloch-mode light propagation in planar photonic crystal waveguides. **Appl. Phys. Lett.** 80, p.1689-1691, dez.2002.
- [4] SHCHESNOVICH, V. S; KONOTOP, V. V. Nonlinear tunneling of Bose-Einstein condensates in a optical lattice: Signatures of quantum collapse and revival. **Phys. Rev. A.** 75, 063628, jun.2007.
- [5] ZHANG, R et al. Role of the mean field in Bloch oscillations of a Bose-Einstein Condensate in an Optical Lattice and Harmonic Trap. **Phys. Rev. A.** 78, 053607-1-7, jun.2008.
- [6] WANG, B et al. Self-trapping of Bose-Einstein condensates in optical lattices. **Physical Review A.** 74, 063610, jun.2006.

- [7] SOUSA, A. G; BAGNATO; V. S. Gases bosônicos armadilhados. **Rev. Bras. Ensino Física**. São Paulo, 26, n°.01, pp. 43-47, 2004.
- [8] MORROW, N. V; RAITHEL, G. Wave -packet interference in an optical lattice. **Phys. Rev. A**. 72 043409, n°.15, pp.74-78, 2005.
- [9] YABLONOVITCH, E. Inhibited Spontaneous emission in solid - State physics and electronic. **Phys. Rev. Lett.** 58, pp.2059-2062, 1987.
- [10] JOHNSON, S; JOANNOPOULOS, J. **Introduction to photonics: Bloch's theorem, band diagrams and gaps**. Massachusetts Institute of Technology: Princeton Press, 2003.
- [11] JOANNOPOULOS, J. D; MEAD, R. D; WINN, J. N. **Photonic crystal**. New Jersey: Princeton Press, 1995. pp.4-7. Inclui índice ISBN 0-691-03744-2.
- [12] OLIVEIRA, I. S; JESUS, L. B. Introdução a física do estado sólido. São Paulo: Editora da Física, 130p.
- [13] BLOCH, F. Wave Bloch. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Bloch-wave>. Acesso em: abril.2013, 10:09.
- [14] JOHNSON, S. G; JOANNOPOULOS, J. D. **Introduction to photonic cristal: Bloch's teorem, band diagrams and gaps (but no defects)**. New Jersey: Princeton Press, 2003. 3p.
- [15] WU, B; ZHANG, Q; Liu, J. Anomalous monopoles of an interacting boson system. **Physics Lettes A**. 375, n°.545, Pages 545–548, jan.2011.

- [16] TROMPETER, H et al. Bloch oscillations and Zener tunneling in two-dimensional photonic lattices. **Phys. Rev. Lett.** 96, 053903, fev.2006.
- [17] RAYLEIGH, L. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure. **Phil. Mag. S.5.** 26, n°.256, 1887.
- [18] RUSSEL, P. J. Photonic crystal fibers. **Science.** 299, jan.2003.
- [19] STRUTT, W. J; RAYLEIGHT, B. On waves propagating along the plane surface of an elastic solid. **Proc. London Math Soc.** 17, n°.253, pp.4-11, nov.1885.
- [20] SALEH, B. E. A; TEICH, M. C. **Fundamentals of photonics.** second edition. New Jersey: Princeton Press, 2007, p.293-294.
- [21] RABI, I. I et al. New method of measuring nuclear magnetic moment. **Phys. Rev.** 53, pp.318, 1938.
- [22] RUZZI, M. **Física moderna: Teorias e fenômenos.** IBPEX, 8, pp.50-51. Inclui índice ISBN 85-995-8370-0.
- [23] TANNANNOUDJ, C. C; Diu, B; Laloë, F. **Quantum mechanics.** 2ªed. Paris, França: John Wiley and Son, 1977, p.388. Inclui índice ISBN 0-471-16432-1.
- [24] Experimento de Stern-Gerlach. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/>. Acesso em: 06 mar. 2013.
- [25] OKUNO, E; , CALDAS, I. L; CHOW, C. **Física para ciências biológicas e médicas.** São Paulo: Harper Row do Brasil, 1982. 102p.

- [26] HUSSEIN, M. S; SALINAS, S. R. **100 Anos da física quântica**. São Paulo: Editora da Física, 2001, 105p. Inclui índice ISBN 85-88325-05-5.
- [27] Hetem, J. G; Pereira, V. J. **Distribuição de energia e linhas espectrais**. **In: Fundamentos de astronomia**. São Paulo: USP, 2000. p.3-5.
- [28] VALADARES, E. C; CHAVES, A; ALVES, E. G. **Aplicações da física quântica: Do transistor à nanotecnologia**. 1ª ed. São Paulo: Editora livraria da Física, 2005, 37p. Inclui índice ISBN 85-88325-32-2.
- [29] ZHAO, X; GEORGAKIS, G. A; NIU, Q. Rabi oscillations between Bloch bands. **Phys. Rev. B**, 54, R5235- R5238, 1996.
- [30] FISCHER, M. C et al. Observation of Rabi oscillations between Bloch bands in an optical potential. **Phys. Rev. A**, 58, R2648-R2651, 1998.
- [31] YOUNG, H. D; FREEDMAN, R. A. **Física II: Termodinâmica e ondas**. 12ª.ed. São Paulo: Pearson Education, 2009, 125p. Inclui índice ISBN 978-85-88639-33-1.
- [32] SHCHESNOVICH, V. S; CHAVES-CERDA, S. Bragg-resonance-induced Rabi oscillations in photonic lattices. **Optics Letters**, 32, N° 13, jul.2007.
- [33] SHCHESNOVICH, V. S; DESYATNIKOV, A. S; KIVSHAR, Y. S. Interband resonant transitions in two-Dimensional hexagonal lattices: Rabi oscillations, Zener tunneling, and tunnelling of phase dislocations. **Optics Express**, 16, n°18, set.2008.
- [34] SILVA, C. R; SHCHESNOVICH, V. S; CAVALCANTI, B. S. Oscilação de Rabi amortecidas em redes ópticas bi-dimensionais. In: ENCONTRO NACIONAL

- DE FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA-ENFMC, XXXI, 2008, Águas de Lindóia, São Paulo.
- [35] MAKRIS, K. G et al. Optical transitions and Rabi oscillations in waveguide arrays. **Optical Society of America**, jun.2008.
- [36] XIAO, F. Z; JIANG, C; ZHU, H. B. Nonlinear modulation of Rabi in a one dimensional nonlinear periodic photonic structure. **Physical Review E**, 80, 036604, set.2009.
- [37] BARTAL, G et al. Brillouin zone spectroscopy of nonlinear photonic lattices. **Phys. Rev. Lett**, 94, 1639024, 2005.
- [38] MUNN, R. W; IRONSIDE, C. N. **Principle and applications of the nonlinear optical materials**. Florida: CRN, 1993.
- [39] SILVA, C. R; MARKS, H; CAVALCANTI, S. B. Rabi oscillations in an optically induced lattice in two dimensions. In: ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA-ENFMC, XXXI, 2011, Foz do Iguaçu, Paraná.
- [40] SILVA, C. R; MARKS, H; CAVALCANTI, S. B. Efeito da não linearidade na dinâmica das oscilações de Rabi em uma rede óptica unidimensional. In: ENCONTRO DE FÍSICOS DO NORTE E NORDESTE-EFNN, XXX, 2012, Salvador, Bahia.
- [41] KENKRE, U. M; D. K. CAMBELL, D. K. Self-trapping on dimer: Time-dependent solutions of a discrete nonlinear Schrödinger equation. **Physics Review B**, 34, n° 07, out.1986.

- [42] SHANDORAVA, K; RÜSTIR, C. E; KIP, D. Experimental observations of Rabi oscillations in photonic lattices. **Phys. Rev. Lett.** 102, 123905, 2009.
- [43] DAVYDOV, S. A et al. Quasi-one-dimensional photonic lattices e superlattices in lithium niobate: Linear and nonlinear discrete diffraction of light. **nature**, 18, mar.2010, pp1-6.
- [44] ALFASSI, B et al. Diverging Rabi oscillations in subwavelength photonic lattices. **Phys. Rev. Lett.** 106, 073901, 2011.
- [45] VIJAY, R et al. Stabilizing Rabi oscillations in a superconducting qubit using quantum feedback. **Nature**, 490, 77-80, out.2012.
- [46] FRANKEN, P et al. Generation of optical harmonics. **Phys. Rev. Lett.** 7, 118-119pp, 1961.
- [47] TIPLER, P. A. **Eletricidade e magnetismo ótica**. 4<sup>a</sup>.ed. São Paulo: LTC, vol.2, 2000.
- [48] LAINE, T. A. **Eletromagnetic wave propagation in nonlinear kerr media**. 2000. (Tese de Doutorado em ciência)-Royal Institute of Technology-KTH, department of Physics Optics SE 10044 Stockholm, Sweden, 2000, 4p.
- [49] MAIMAN, T. H. Stimulated optical radiation in ruby. **Nature**, 187, 493, 1960.
- [50] GRIFFITHS, D. J. **Introduction to electrodynamics**. 3<sup>a</sup> ed. Londres: Prentice Hall, 1999, 166p.

- [51] R. MENDEL, R. **Photonics: Linear and nonlinear interactions of laser light and matter**. 2<sup>a</sup>.ed. New York: Springer, 178-179p. Inclui índice ISBN 978-3-540-23160-80.
- [52] LARRAIN, P; CORSON, D. L; LORRAIN, F. **Eletromagnetic field and waves**. 3<sup>a</sup> ed. New York: W. H. Freeman and company, 1988, 495p. Inclui índice ISBN 0-716-71823-5.
- [53] JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. 2<sup>a</sup>.ed. New York: Wiley, 1962, 178-179pp.
- [54] YARIV, A; YEH, P. **Propagation and control of laser radiation**. New York: Wiley Classics Library Edition Published, 2003, 109p. Inclui índice ISBN 0-471-97176-6.
- [55] LAINE, T. A. **Eletromagnetic wave propagation in nonlinear Kerr media**. 2000. (Tese de Doutorado em ciência)-Royal Institute of Technology (KTH), department of Physics Optics SE 10044 Stockholm, Sweden, 2000, 6p.
- [56] BUTCHER, P. N; COTTER, D. **The elements of nonlinear optics**. New York: Cambridge university Press, 1990, 174-175pp. Inclui índice ISBN 0-521-34183-3.
- [57] SALEH, B. E. A; TEICH, M. C. **Fundamentals of photonics**. 2<sup>a</sup> ed. New Jersey: Wiley Series, 2007, 918p.
- [58] SOUZA, R. F. **Caracterização das propriedades ópticas não lineares de vidros teluretos, líquidos orgânicos e colóides de nanopartículas**

- de ouro**. 2008, 140f. (Tese de doutorado em ciências)-Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Alagoas, 2008.
- [59] BOYD, R. W. **Nonlinear Optics**. 2<sup>a</sup>.ed. New York: Academic Press, 2003, 539p.
- [60] SHEN, Y. R. **The Principles of Nonlinear Optical**. New York: Wiley, 1991.
- [61] CUADROS, M. I. V. **Síntese e caracterização das propriedades óticas não lineares de nanopartículas de ouro e prata em óleo de Buriti**. 2012, 95f. (Dissertação de mestrado em ciências)-Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Alagoas, 2012.
- [62] YOUNG, H. D; FREEDMAN, R. A. **Física III: Eletromagnetismo**. 12<sup>a</sup>.ed. São Paulo: Pearson Education, 2009, 392p. Inclui índice ISBN 978-85-88639-34-8.
- [63] AGRAWAL, G. P. **Nonlinear fiber optics**. 3<sup>a</sup>.ed. San Diego: Academic San Diego, 2001, 64p.
- [64] YOUNG, M. **Óptica e lasers**. São Paulo: Livraria da física, 1998, 142-145pp. Inclui índice ISBN 85-314-0333-2.
- [65] ASHCROFT, N. W; MERMIN, N. D. **Solid state physics**. Orlando: Cornell University, 1976, 133p. Inclui índice ISBN 0-03-083993-9.
- [66] KITTEL, C. **Introduction to solid state physics**. 7<sup>a</sup>.ed. New York: John Wiley Sons, 1996, 253p.
- [67] SHSHEVNOVICH, V. S et al. Zener tunneling in two-dimensional photonic lattices. **Phys. Rev. E**. 74, 056602, 2006.

- [68] SAKODA, K. **Optical properties of photonic crystal**. Berlin: Springer Berlin, 2001, 18-23pp.
- [69] ARFKEN, G. B; WEBER, H. J. **Mathematical methods for physicists**. 6<sup>a</sup>.ed. New York: Academic Press, 2005, 938-946pp. Inclui índice ISBN 978-0-12-059876-2.
- [70] FORNBERG, B. **A practical guide to pseudospectral methods**. Cambridge: Cambridge University Press, 1996, 14-18pp e 130-140pp.
- [71] BECERRA, V. M; GALVÃO, R. K. H. **Um tutorial sobre métodos pseudo-espectrais para controle ótimo computacional**. Revista Controle & Automação, Vol.21 n<sup>o</sup>.3, Ma/Jun.2010.
- [72] CANUTO, C. G et al. **Spectral methods in fluid dynamics**, springer-verlag. Berlin, 1988.
- [73] ORSZAG, S. A. **Comparison of pseudo-spectral and spectral approximation**. Studies in Applied Mathematics, 1972, 253-259pp.
- [74] GALASSI, M et al. **GNU:Scientific library**. 2008, 4-14pp, 21-26pp e 158-165pp.
- [75] THORNTON, S. T; MARION, J. B. **Classical dynamics of particles and systems**. 5<sup>a</sup>.ed. Belmont: Thomson Learning, 2004 . Inclui índice ISBN 0-534-40896-6.
- [76] PRESS, W. H et al. **Numerical recipes in C**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1988, (See Sections 16.1 and 16.2.).

- [77] BUTCHER, J. C. **Numerical methods for ordinary differential equations**. 2<sup>a</sup>.ed. New York: John Wiley and son, 2008, 259p. Inclui índice ISBN 0-471-96758-0.
- [78] HAIRER, E; NORSETT, S. P; WANNER, G. **Solving ordinary differential equations *nonstiff problems***. 2<sup>a</sup>.ed. Berlin: Springer Verlag, 1993, ISBN 3-540-56670-8.
- [79] HAHN, B. D; VALENTINE, D. T. **Essential matlab for engineers and scientists**. 4<sup>a</sup>.ed. Oxford: Elsevier, 2010, 339p. Inclui índice ISBN 978-0-12-374883-6.
- [80] FORSYTHE, G. E; MALCOLM, M. A; MOLER, C. B. **Methods for mathematical computations**. New Jersey: Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1977.
- [81] CHÁVES-BOGGIO, J. M. **Efeitos não lineares em fibras ópticas de dispersão deslocada**. 2001, (Tese de doutorado)- Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 2001.
- [82] MORANDOTTI, R et al. Self-focusing and defocusing in waveguide arrays. **Phys. Rev. Lett.** 86, pp.3296-3299, 2001.
- [83] HALLIDAY, D; RESNICK, R; WALKER, J. **Fundamentos da física**. ed. 8<sup>a</sup>. Rio de Janeiro: LTC, 4, 2008. Inclui índice ISBN 978-85-216-1605-4.
- [84] HECHT, E. **Optics**. San Francisco: Addison Wesley, 2002, 444-476pp.
- [85] MAGALHÃES, D. S. F. **Estudo de imagens por dupla difração com seleção de luz branca e elementos definidos bidimensionalmente**. 2005,

(Dissertação de mestrado em ciências) -Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 2005.

- [86] AGRAWAL, G. P. **Nonlinear fiber optics**. 3<sup>a</sup>.ed. San Diego: Academic Press, 1995, 97-102pp. Inclui índice ISBN 0-12-045143-3.

# Capítulo 7

## APÊNDICES

### 7.1 Apêndice A

Cálculos da derivação da equação de propagação não linear

#### 7.1.1 Vetor deslocamento elétrico

$$\mathbf{D}^{(1)} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^1(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi^{(1)}) \mathbf{E} \quad (7.1)$$

onde  $\varepsilon_0 (1 + \chi^{(1)}(\omega, \mathbf{r})) = \varepsilon_L(\mathbf{r})$ .

#### 7.1.2 Calculando a equação da onda

Aplicando o rotacional na terceira equação de Maxwell (2.9), obtém-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}, \quad (7.2)$$

onde

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\nabla \times \mathbf{H}) = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (7.3)$$

### 7.1.3 Divergente do campo

Usando a equação de Maxwell (2.7)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (7.4)$$

onde  $\mathbf{D} = \varepsilon_L(\mathbf{r}) \mathbf{E} + \mathbf{P}^{(NL)}$ , com  $\mathbf{P}^{(NL)} = \varepsilon_{NL}(\mathbf{r}) \mathbf{E}$  e para esse caso  $\varepsilon_{NL}(\mathbf{r}) = \frac{3\varepsilon_0\chi^{(3)}|E|^2}{8}$ . Com isso, pode-se escrever

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_L(\mathbf{r}) + \varepsilon_{NL}(\mathbf{r}). \quad (7.5)$$

Assim, tem-se

$$\nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}) = 0 \quad (7.6)$$

Implica que

$$\nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}) = \varepsilon(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon(\mathbf{r}) = 0, \quad (7.7)$$

dessa forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})} \quad (7.8)$$

Conjecturando que a variação da fração de  $\varepsilon(\mathbf{r})$  para um dado comprimento de onda

é pequeno, isso implica que  $\frac{\mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})} = 0$

#### 7.1.4 Cálculos algébricos da polarização não linear

$$P^{(NL)} = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} (E e^{-i\omega t} + E^* e^{i\omega t}) (E e^{-i\omega t} + E^* e^{i\omega t}) (E e^{-i\omega t} + E^* e^{i\omega t}) \quad (7.9)$$

isso implica

$$\begin{aligned} P^{NL} = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} [(E)^2 E e^{-3i\omega t} + |E|^2 E e^{-i\omega t} + 2 |E|^2 E e^{-i\omega t} + 2 |E|^2 E^* e^{i\omega t}] \\ + \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} [(E^*)^2 E e^{i\omega t} + (E^*)^2 E^* e^{3i\omega t}] \end{aligned} \quad (7.10)$$

implica

$$\begin{aligned} P^{NL} = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} [3 |E|^2 E e^{-i\omega t} + 3 |E|^2 E^* e^{i\omega t} + (E)^2 E e^{-3i\omega t}] + \\ \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} [(E^*)^2 E^* e^{3i\omega t}] \end{aligned} \quad (7.11)$$

Portanto,

$$P^{NL} = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \chi^{(3)} [3 |E|^2 E e^{-i\omega t} + (E)^2 E e^{-3i\omega t} + c.c.] \quad (7.12)$$

onde  $\chi^{(3)} = \chi^{(3)}(\mathbf{r})$ .

Supondo que o campo elétrico incidente não apresenta casamento de fase, fator importante para gerar o terceiro harmônico. Conseqüentemente a fase não contribui para gerar o terceiro harmônico, com isso, o segundo termo da polarização

não linear fica fraco e pode ser desprezado.

### 7.1.5 Meio isotrópico

Um meio isotrópico é aquele em que uma propriedade ou quantidade física está relacionada com um ponto que independe da direção. Por exemplo, para um meio isotrópico é permitido escrever o tensor susceptibilidade elétrica como um escalar ou número real. Se um meio não for considerado isotrópico, dizemos que ele é anisótropo.

### 7.1.6 Dispersão

A dispersão indica como a velocidade da onda e o índice de refração dependem do comprimento de onda. Conseqüentemente se o índice de refração depende da frequência o meio é dispersivo. Em quase todos os materiais, o índice de refração aumenta quando o comprimento de onda da onda propagante diminui ou quando a frequência aumenta.

### 7.1.7 Validade dos resultados

Os resultados presentes nesta tese foram validados observando alguns casos especiais.

1 - O programa foi rodado para o caso linear e considerando  $V_0 = 0$  que tem solução exata, e que coincidiu com a solução numérica neste caso.

2 - Considerando o potencial pequeno  $|V_0| \ll 1$ , onde foi feita uma solução perturbativa que coincidiu.

Em síntese, foram empregados dois métodos numéricos diferentes: diferenças finitas, ou força bruta e transformada de Fourier, como foi usado nos principais resultados. E, onde estes dois métodos foram usados, houve coincidência.

Detalhe, passamos cerca de dois meses verificando o método numérico e os resultados.

### 7.1.8 Exprimindo a equação de onda não linear para o campo elétrico

$$\nabla^2 E e^{-i\omega t} - \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E e^{-i\omega t} = \frac{3\varepsilon_0 \chi^{(3)}}{8\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} |E|^2 E e^{-i\omega t}. \quad (7.13)$$

Assim,

$$\nabla^2 E + \frac{\varepsilon(\mathbf{r})\omega^2}{\varepsilon_0 c^2} E = -\frac{3\chi^{(3)}\omega^2}{8c^2} |E|^2 E. \quad (7.14)$$

chamando  $K^2(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon(\mathbf{r})\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}$ , e  $K_0 = \frac{\omega}{c}$ . Agora reescrevendo a equação (7.14), encontra-se

$$\nabla^2 E + K^2(\mathbf{r}) E = -\frac{3\chi^{(3)}}{8} K_0^2 |E|^2 E. \quad (7.15)$$

Usando a expressão do índice de refração (2.23), podemos exprimir  $\frac{3\chi^{(3)}}{8} = n_0 n_2$ . Substituindo em (7.15), encontra-se (2.25).

### 7.1.9 A equação não linear para amplitude do campo elétrico $A$

$$\nabla^2 A e^{-iK_z Z} + K^2 A e^{-iK_z Z} - n_0 n_2 K_0^2 |A|^2 A e^{-iK_z Z} + f(\mathbf{r}) A e^{-iK_z Z} = 0 \quad (7.16)$$

Sendo que  $K_z = K$ , vetor de onda na direção  $Z$ . Reescrevendo (7.16), tem-se

$$\begin{aligned} \nabla^2 A e^{-iK_z Z} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} A e^{-iK_z Z} + K^2 A e^{-iK_z Z} - \\ n_0 n_2 K_0^2 |A|^2 A e^{-iK_z Z} + f(\mathbf{r}) A e^{-iK_z Z} = 0 \end{aligned} \quad (7.17)$$

Calculando o segundo termo da equação (7.17), assim

$$\frac{\partial^2}{\partial Z^2} A e^{-iK_z Z} = \frac{\partial}{\partial Z} \left[ A (-ik) e^{-iK_z Z} + e^{-iK_z Z} \frac{\partial}{\partial Z} \right]. \quad (7.18)$$

Dessa maneira chega-se a seguinte expressão,

$$\frac{\partial^2}{\partial Z^2} A e^{-iK_z Z} = -K^2 A e^{-iK_z Z} - 2iK \frac{\partial}{\partial Z} A e^{-iK_z Z} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} A e^{-iK_z Z}. \quad (7.19)$$

Substituindo (7.19) em (7.17) e eliminando os termos opostos, tem-se

$$\nabla_T^2 A - 2iK \frac{\partial}{\partial Z} A + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} A - n_0 n_2 K_0^2 |A|^2 A + f(\mathbf{r}) A = 0. \quad (7.20)$$

Usando a aproximação paraxial

$\frac{\partial^2}{\partial Z^2} A \ll k^2 |A|^2$  ou  $\frac{\partial^2}{\partial Z^2} A \ll \frac{\partial}{\partial Z} A$ , logo desprezo  $\frac{\partial^2}{\partial Z^2} A$ . Onde assumimos que a variação longitudinal da amplitude campo elétrico é bastante lenta de modo que é possível desprezá-la, quando comparada com a intensidade do campo elétrico. Assim, reescrevendo (7.20)

$$\nabla_T^2 A - 2iK \frac{\partial}{\partial Z} A - n_0 n_2 K_0^2 |A|^2 A + f(\mathbf{r}) A = 0. \quad (7.21)$$

Isolando o segundo termo da equação (7.21) e dividindo todos os termos por 2, obtém-se a equação (2.29) que se encontra no texto.

### 7.1.10 Equação normalizada

Usando a largura inicial da Gaussiana  $\gamma$ , dada por (2.11), poderão ser feitas as seguintes mudanças de variáveis

$$x = \frac{X}{\gamma} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial X^2} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (7.22)$$

de forma análoga, obtém-se para  $y$

$$\frac{\partial^2}{\partial Y^2} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (7.23)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\gamma^2} \nabla_T^2. \quad (7.24)$$

Normalizando a distância de propagação  $z$  com o comprimento de difração  $L_D$ , assim

$$z = \frac{Z}{L_D} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Z} = \frac{1}{L_D} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (7.25)$$

substituindo de forma adequada a equação (7.24) e (7.25) na equação (2.29), tem-se

$$i \frac{K}{L_D} \frac{\partial}{\partial z} A = \frac{1}{2\gamma^2} \nabla^2 A - n_0 n_2 K_0^2 |A|^2 A + \frac{1}{2} f(\zeta) A, \quad (7.26)$$

$\zeta = \frac{\mathbf{r}}{\gamma}$ . Usando a amplitude normalizada dada por (2.31) na equação (7.26), multiplicando ambos os lados por  $\gamma^2$  e eliminando as raízes quadradas de ambos os lados, tem-se

$$i \frac{\gamma^2 K}{L_D} \frac{\partial}{\partial z} U = \gamma^2 \frac{1}{2\gamma^2} \nabla^2 U - \pi \gamma^2 I_0 \frac{1}{2} n_0 n_2 K_0^2 |U|^2 U + \gamma^2 \frac{1}{2} f(\zeta) U. \quad (7.27)$$

Chamando  $\gamma^2 K = L_D$  comprimento da difração,  $P_0 = \pi \gamma^2 I_0$  com  $\pi \gamma^2$  área efetiva do pulso Gaussiano,  $\sigma = \frac{1}{2} n_0 n_2 K_0^2$  parâmetro não linear e  $\frac{1}{2} \gamma^2 f(\zeta) = V(\zeta)$  com  $\zeta = (x, y)$ , assim, obtém-se a equação do texto (2.32).

## 7.2 Apêndice B

### Escolha do potencial da rede

O potencial que fornece a forma da rede óptica pode ser deduzido analiticamente, partindo do princípio de aproximação de campos distantes de Fraunhofer. Nesta seção será deduzido uma expressão que denota o potencial responsável pela forma da rede fotônica. Considerando que cada ponto ou poço potencial da referida

rede poderá ser obtido simplesmente usando uma superposição de quatro feixes quase monocromáticos. Pode-se perfeitamente demonstrar uma expressão analítica do potencial em duas dimensões, mas a princípio será investigado apenas em uma direção, a saber, a direção  $x$ . Como o potencial é periódico, então  $V(X) = V(X + d)$  onde  $d$  é o período da rede. Usando a aproximação de campos distantes, conhecida como a aproximação de Fraunhofer [64]. Esta aproximação é possível, quando a distância de propagação  $z$  é muito grande em relação as distâncias  $X$  e  $Y$  [85] que formam o plano transversal da rede. O modelo usado para construir uma expressão analítica para o potencial foi considerar cada poço da rede aproximadamente uma esfera de raio  $R$ , então tem-se a expressão

$$E(k_X, k_Y) = \int \int E_0 e^{-[i(k_X X + k_Y Y)]} dX dY, \quad (7.28)$$

onde  $E_0$  é uma constante.

Escrevendo  $X = d + R \cos(\theta)$  e  $Y = R \sin(\theta)$  em coordenadas polares e derivando, obtem-se

$$dX = -R \sin(\theta) d\theta + \cos(\theta) dR, \quad (7.29)$$

$$dY = R \cos(\theta) d\theta + \sin(\theta) dR, \quad (7.30)$$

$$dX dY = -R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta^2 - R \sin^2(\theta) d\theta dR + R \cos^2(\theta) d\theta dR + \sin(\theta) \cos(\theta) dR^2. \quad (7.31)$$

Integrando, tem-se

$$E(k_X, k_Y) = E_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-i[k_X(d+R\cos(\theta))+k_Y R\sin(\theta)]} R dR d\theta, \quad (7.32)$$

ou ainda, arrumando de forma mais elegante

$$E(k_X, k_Y) = E_0 e^{-(ik_X d)} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-iR[k_X \cos(\theta)+k_Y \sin(\theta)]} R dR d\theta. \quad (7.33)$$

Usando o espaço recíproco para escrever  $k_X = \rho \cos(\phi)$  e  $k_Y = \rho \sin(\phi)$ , pode-se reescrever a equação (7.33), assim

$$\psi_1(\rho, \phi) = E_0 e^{[-i\rho \cos(\phi)d]} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-iR\rho[\cos(\phi-\theta)]} R dR d\theta, \quad (7.34)$$

Usando o feixe bessel de ordem zero,  $J_0(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[X \cos(\tilde{\theta})]} d\tilde{\theta}$ ,

e comparando  $X = -R\rho$ ,  $\hat{\theta} = \phi - \theta$  e  $d\hat{\theta} = -d\theta$ , implica que  $2\pi J_0(-R\rho) = \int_0^{2\pi} \exp\{-iR\rho[\cos(\phi - \theta)]\} (-d\theta)$ . Então,

$$\psi_1(\rho, \phi) = E_0 e^{[-i\rho \cos(\phi)d]} 2\pi \int_0^R J_0(-R\rho) R dR. \quad (7.35)$$

Fazendo uma substituição de variável  $u = \rho R$ , implica  $du = -\rho dR$ , usando  $\int_0^R x^{n+1} J_n(x) dx = R^{n+1} J_{n+1}(R)$ , obtem-se

$$\psi_1(\rho, \phi) = \frac{2\pi R}{\rho} J_1(\rho R) E_0 e^{[-i\rho d \cos(\phi)]}. \quad (7.36)$$

Chamando,  $\tilde{V}_0 = \frac{2\pi R}{\rho} J_1(\rho R) E_0$ , pode-se reescrever a equação acima como

$$\psi_1(k_X, k_Y) = \tilde{V}_0 e^{-idk_X}. \quad (7.37)$$

Analogamente é possível expressar as equações para os outros poços potenciais para gerar a rede óptica quadrada,

$$\psi_2(k_X, k_Y) = \tilde{V}_0 e^{-idk_Y}; \quad (7.38)$$

$$\psi_3(k_X, k_Y) = \tilde{V}_0 e^{idk_X}; \quad (7.39)$$

$$\psi_4(k_X, k_Y) = \tilde{V}_0 e^{idk_Y}; \quad (7.40)$$

É conhecido da literatura [67], que os quatro campos monocromáticos de ondas planas  $\psi_l(k_X, k_Y) = V_0 \exp(\pm idk_l)$  são suficientes para produzir uma rede fotônica em duas dimensões,  $V = |\sum \psi|^2$ .

$$V(k_X, k_Y) = \tilde{V}_0 [\exp(-idk_X) + \exp(-idk_Y) + \exp(idk_X) + \exp(idk_Y)] \quad (7.41)$$

ou ainda

$$V(k_X, k_Y) = 2\tilde{V}_0 [\cos(dk_X) + \cos(dk_Y)]. \quad (7.42)$$

Escrevendo  $V_0 = 2\tilde{V}_0$ ,  $dk_X = x$  e  $dk_Y = y$  em unidades adimensionais, tem-se

$$V(x, y) = V_0 [\cos(x) + \cos(y)]. \quad (7.43)$$

Para efeitos de simulações computacionais foi trabalhado o potencial ao longo do eixo  $x$ ,

$$V(x) = V_0 \cos(x) \quad (7.44)$$

$V_0$  é a modulação da rede óptica.

### 7.3 Apêndice C

#### Cálculos do conjunto de equações diferenciais ordinárias

Fazendo as substituições das equações (2.40) e (2.41) na equação de propagação (2.32) com  $\sigma < 0$ , pode-se explicitar cada termo da equação após as substituições.

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = i \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} C_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k} \cdot (x+y)}, \quad (7.45)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, z) \mathbf{k}^2 e^{i\mathbf{k} \cdot (x+y)}, \quad (7.46)$$

$$-P_0 \sigma |U|^2 U = P_0 \sigma (UU^*U) =$$

$$P_0 \sigma \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{p}} C_{\mathbf{k}}(z) C_{\mathbf{q}}^*(z) C_{\mathbf{p}}(z) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q}+\mathbf{p}) \cdot (x+y)}, \quad (7.47)$$

$$V(x, y) U = \left( \sum_{\mathbf{m}} V_{\mathbf{m}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{m}\cdot(x+y)} \right) \left( \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k}\cdot(x+y)} \right) =$$

$$\sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{m}}(\mathbf{k}) C_{\mathbf{k}}(z) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{m}+\mathbf{k})\cdot(x+y)}. \quad (7.48)$$

Multiplicando por  $e^{-i\mathbf{l}\cdot(x+y)}$  e integrando em  $d^2\mathbf{r}$  das equações, e usando a função delta de Dirac  $\delta$  para obter em cada termo as seguintes expressões:

$$i \sum_{\mathbf{k}} \frac{d}{dz} C_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, z) \int e^{i(\mathbf{l}-\mathbf{m})\cdot(x+y)} d^2\mathbf{r} = i \frac{d}{dz} C_{\mathbf{l}}(z), \quad (7.49)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}(z) k^2 \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot(x+y)} d^2\mathbf{r} = -\frac{1}{2} C_{\mathbf{l}}(z) k^2, \quad (7.50)$$

$$P_0\sigma \sum_{\mathbf{l}\mathbf{q}\mathbf{p}} C_{\mathbf{l}}(z) C_{\mathbf{q}}^*(z) C_{\mathbf{p}}(z) e^{i(\mathbf{l}-\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{l})\cdot(x+y)} d^2\mathbf{r} =$$

$$-P_0\sigma \sum_{\mathbf{q}\mathbf{p}} C_{(\mathbf{l}+\mathbf{q}-\mathbf{p})}(z) C_{\mathbf{q}}^*(z) C_{\mathbf{p}}(z), \quad (7.51)$$

$$\sum_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{m}}(\mathbf{k}) C_{\mathbf{k}}(z) \int e^{i(\mathbf{k}[\mathbf{m}+\mathbf{k}-\mathbf{l}])\cdot(x+y)} d^2\mathbf{r} = \sum_{\mathbf{m}} V_{\mathbf{m}}(\mathbf{k}_{\mathbf{m}}) C_{(\mathbf{l}-\mathbf{k}_{\mathbf{m}})}(z). \quad (7.52)$$

Juntando as equações (7.49) - (7.52) e escrevendo  $\mathbf{l} = \mathbf{k}$ , é ligeiramente exposto a equação diferencial ordinária (2.42) expressa no texto, que descreve as oscilações dos modos de Fourier. Para obter um conjunto de equações acopladas ao

longo eixo  $x$ , é necessário proceder da seguinte maneira

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2), \mathbf{q} = (k_1, k_2) \text{ e } \mathbf{p} = (k_1, k_2). \text{ Com } k_1 = k_x \text{ e } k_2 = -k_x.$$

## 7.4 Apêndice D

### Método computacional pseudo-espectral

$$\mathbb{T}\mathcal{F} [V(x) U(x, z)] = G_k(z), \quad (7.53)$$

$$\mathbb{T}\mathcal{F} (P_0 \sigma |U|^2 U) = -H_k(z), \quad (7.54)$$

$$\mathbb{T}\mathcal{F} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U \right) = -k^2 \frac{1}{2} \mathbb{T}\mathcal{F} (U). \quad (7.55)$$

Substituindo o referido conjunto de equações (7.53) - (7.55) na equação (3.1) para obter a seguinte expressão,

$$i \frac{\partial \tilde{U}_k(z)}{\partial z} = G_k(z) - H_k(z) - k^2 \frac{1}{2} \tilde{U}_k(z). \quad (7.56)$$

Empregando de forma adequada o método numérico das diferenças finitas somente no primeiro termo, para obter a expressão em forma de derivadas,

$$\frac{\partial \tilde{U}_k(z)}{\partial z} = \frac{\tilde{U}_k(z + \Delta z) - \tilde{U}_k(z)}{\Delta z}. \quad (7.57)$$

Multiplicando por  $-i$ , a equação (7.56) e substituindo a equação (7.57) em (7.56).

para possivelmente encontrar a relação (2.31),

#### 7.4.1 EDOs para quatro modos em matlab

$$\begin{aligned} idC(1) = & -kapa.\hat{2} * C(1) - P_0sgn * ((abs(C(1))\hat{2}) * C(1) + \\ & 2*(abs(C(2))\hat{2}) * C(1) + 2*(abs(C(3))\hat{2}) * C(1) 2*(abs(C(4))\hat{2}) * C(1) + \\ & 2*(C(2)) * (C(3)) * (C(4)) + \epsilon V_0/4 * C(2) + V_0/2 * C(3) + V_0/2 * C(4)), (7.58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} idC(2) = & -kapa.\hat{2} * C(2) - P_0sgn * ((abs(C(2))\hat{2}) * C(2) + \\ & 2*(abs(C(1))\hat{2}) * C(2) + 2*(abs(C(3))\hat{2}) * C(2) 2*(abs(C(4))\hat{2}) * C(2) + \\ & 2*(C(1)) * (C(3)) * (C(4)) + \epsilon V_0/4 * C(1) + V_0/2 * C(3) + V_0/2 * C(4)), (7.59) \end{aligned}$$

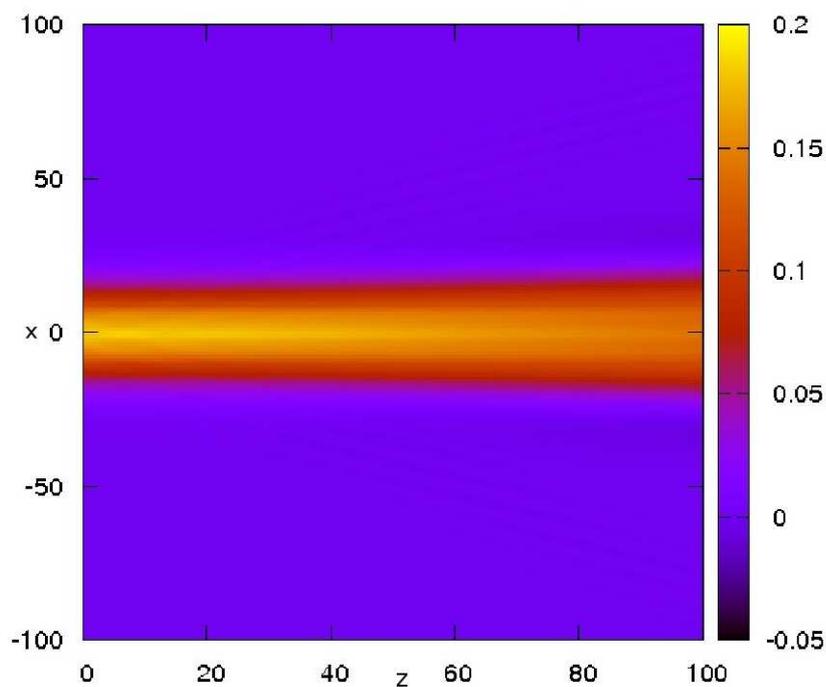
$$\begin{aligned} idC(3) = & -kapa.\hat{2} * C(3) - P_0sgn * ((abs(C(3))\hat{2}) * C(3) + \\ & 2*(abs(C(1))\hat{2}) * C(3) + 2*(abs(C(2))\hat{2}) * C(3) 2*(abs(C(4))\hat{2}) * C(3) + \\ & 2*(C(1)) * (C(2)) * (C(4)) + \epsilon V_0/4 * C(4) + V_0/2 * C(1) + V_0/2 * C(2)), (7.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} idC(4) = & -kapa.\hat{2} * C(4) - P_0sgn * ((abs(C(4))\hat{2}) * C(4) + \\ & 2*(abs(C(1))\hat{2}) * C(4) + 2*(abs(C(2))\hat{2}) * C(4) 2*(abs(C(3))\hat{2}) * C(4) + \\ & 2*(C(1)) * (C(2)) * (C(3)) + \epsilon V_0/4 * C(3) + V_0/2 * C(1) + V_0/2 * C(2)), (7.61) \end{aligned}$$

## 7.5 Apêndice E

A figura (7.1), exprime a propagação de um feixe através de uma rede óptica centrado na origem, não deslocado no espaço- $k$  (ou seja, o feixe inicialmente está centrado em  $k = 0$ ). No lado esquerda dessa figura, observa-se a Gaussiana, centrada na origem, e à medida que o  $z$  aumenta, vê-se um pequeno alargamento do feixe, e ainda se pode ver alguns detalhes na figura, que são máximos e mínimos fora do feixe central, provavelmente por algum erro numérico. Este erro seria relevante se  $z$  aumentar muito, e o “erro” propagar-se, sofrendo reflexão e interferindo no próprio feixe.

**Figura 7.1:** A figura ilustra a propagação de um feixe Gaussiano na rede. Aqui, é usado o potencial,  $V_0 = 0,01$ . O eixo vertical indica a distância transversal  $x$ , o eixo horizontal, indica os possíveis valores de  $z$ . A faixa central amarela exibe o máximo do feixe, enquanto que as faixas que se aproximam do vermelho indicam os pontos de mínimos. A cor roxa representa o meio óptico com uma pequena perturbação.



Fonte: Silva, 2011.