

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Da interação entre a modulação de fase cruzada e
o tempo de atraso da resposta não-linear e seus
efeitos na instabilidade modulacional de feixes
co-propagantes**

Askery Alexandre Canabarro Barbosa da Silva

Maceió

2010

**ASKERY ALEXANDRE CANABARRO BARBOSA DA
SILVA**

**Da interação entre a modulação de fase cruzada e
o tempo de atraso da resposta não-linear e seus
efeitos na instabilidade modulacional de feixes
co-propagantes**

Tese de Doutorado apresentada no Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências

Orientador: Iram Marcelo Gléria

Co-orientador: Marcelo Leite Lyra

Maceió

2010

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S586d Silva, Askery Alexandre Canabarro Barbosa da.
Da interação entre a modulação de fase cruzada e o tempo de atraso da resposta não-linear e seus efeitos na instabilidade modulacional de feixes co-propagantes / Askery Alexandre Canabarro Barbosa da Silva, 2010.
xiii, 113 f. : grafs.

Orientador: Iram Marcelo Gléria.

Co-Orientador: Marcelo Leite Lyra.

Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2008.

Bibliografia: f. 102-111.

Índice: f. 112-113.

1. Instabilidade modulacional. 2. Modulação de fase cruzada (Física). 3. Fibras ópticas não-lineares. 4. Não linearidade atrasada (Física). I. Título.

CDU: 535.337



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL. Brasil
FONE : (82) 3214-1423/FAX : 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
TESE DE DOUTORADO**

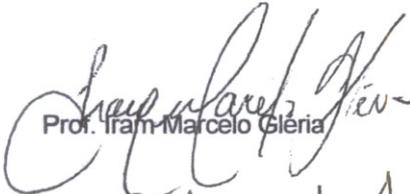
“Da interação entre a modulação de fase cruzada e o tempo de atraso da resposta não-linear e seus efeitos na instabilidade modulacional de feixes co-propagantes”

por

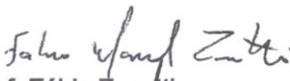
Askery Alexandre Canabarro Barbosa da Silva

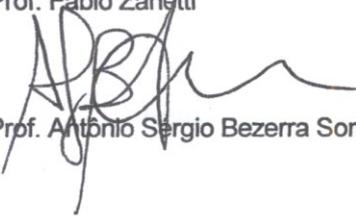
A Banca Examinadora composta pelos professores Iram Marcelo Gléria (Orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Rodrigo de Paula Almeida de Lima, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Fábio Zanetti, do Departamento de Física da Universidade Federal de Alagoas/Pólo Arapiraca, Antônio Sérgio Bezerra Sombra, do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará e Fernando Jorge Sampaio Moraes, do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, consideram o candidato aprovado com grau “ A ”.

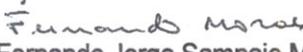
Maceió, 24 de agosto de 2010


Prof. Iram Marcelo Gléria


Prof. Rodrigo de Paula Almeida de Lima


Prof. Fábio Zanetti


Prof. Antônio Sérgio Bezerra Sombra


Prof. Fernando Jorge Sampaio Moraes

DEDICATÓRIA

*Para José Adelmo Barbosa e Benedita Canabarro, meus
pais!*

AGRADECIMENTOS

Queira Deus que eu possa descrever minha gratidão para com todas as pessoas que contribuíram com a elaboração e o aperfeiçoamento deste trabalho.

Eis os nomes: Iram M. Gléria, orientador, por inúmeras ajudas durante esse trajeto e por colocar a objetividade necessária para que essa tese fosse concluída; Marcelo L. Lyra, pela co-orientação e por todos os incentivos e conselhos durante esses últimos nove anos, sempre me apontando o caminho; Fernando Moraes, pela hospitalidade e discussões na UFPB onde parte desta tese foi delineada; Gandhi, por ser sempre um grande incentivador e amigo; Ítalo Marcos Nunes, por várias conversas produtivas relacionadas com esta tese e ao decorrer do curso. Prof. Heber, pela solicitude sempre que eu precisava de esclarecimentos, não importando a natureza da questão; Solange, por ter sido constantemente muito simpática e prestativa; Francisco Fidelis; Kleber Serra; Evandro Gouveia; Dilson; Jandir; Jenner B. B. Filho; Maria Tereza de Araújo e os demais professores do IF/UFAL.

Ednaldo Tenório Barros; Carlos Argolo; Nilson Salvador; Dácio Camerino; Fernando Medeiros; Juarez Aires; Lúcia Coutinho (*in memoriam*) e os demais professores do CEFET-AL, pela intensa amizade demonstrada e por terem sido grandes incentivadores no começo da minha formação. Cabe-me também agradecer aos meus primeiros mestres desde o ensino fundamental: Vera; Zezé; Quitéria; Raimundo; Valter Acioli e os demais professores da última década do século passado da escola ECJET de Boca da Mata-AL.

Destacadamente aos amigos: Manoel Pereira; Jorge Luiz e Caio; Cícero Rita; Francisco de Assis G. M. Rego Filho; Jadielson; Itamar; Samuel de Albuquerque; Lucas Maia; André de Moura; Hélcio Bezerra; David Alisson; Dainy; Murilo Vasconcelos; Romane Bezerra; Rafael Duarte; Marcius; Everson; José Pereira (Neto); Henrique; Anderson Sina; Adriano Lobo; José Carlos, pai e filho; Emma; Michel Calheiros; Pablo Gustavo; Geraldo Henrique; Higor Daniel; Tácito Trindade; Jhon

Guedes; Jhon Gomes; Rafael; Kelly; Amsterdam; Jhonny Everson; Fabrício; Bárbara; Déborah; João Francisco; Rodrigo Oliveira; Rodrigo Trindade; Wagner; Thiago Bento; Marcelo Felisberto; Pedro Valentim; Ícaro Douglas; Clebson; Willamys, principalmente pelos momentos de descontração.

Thaís Freitas; Taísa Bibiano; Rosa Carolina; Patricia; Lidianne; Manu; Monielen; Socorro, pela amizade durante o decorrer dos dias e por tornar o ambiente mais agradável com vozes suaves e delicadas.

Beethoven, por ter obtido muitos dos resultados aqui contidos - muito obrigado pela ajuda computacional. É inefável minha gratidão!

Não posso esquecer o apoio de meus familiares: Givonildo; Salete; Jefferson; Ricklane; Richnéia; Rubens; Gillian Dywey; Denise; Lenise; Lyranise; Steiner; Osman; Zezita; Reinaldo; Jacimar; Roseane; Thiago; Lucas; Lúcia; Diana; Janicléria; Sivaldo; Sérgio; Ângela; Jarbas; Tiago.

E também dos meus amigos de longas datas: Luana (*in memoriam*); Rannibel; Anthony; Nelson; Vitor; Joana; Valter, pai e filho; Amanda; Jamerson; Paulo; Tadeu; Lucas; Júnior; Wagner; Alterman; Adailton; Lucas Graça; Junior Graça; David Teles; Alexandre Pedrosa; Enfim, todos os amigos de infância, pela motivação, apoio e companheirismo.

Adelmo e Benedita, meus pais, *a fortiori!* Conheço e reconheço, integralmente, todos os esforços que vocês prestaram para que minha formação fosse a melhor possível. Bastante satisfeito e contente. Sinceramente inefável. Muito obrigado de coração!

DEUS, o SENHOR, pela dádiva trina que me concedeu de ser brasileiro, nordestino e alagoano (e regatiano).

Agradeço o apoio financeiro da FAPEAL, CAPES e CNPq.

Todos são participantes de qualquer sucesso. Portanto vos agradeço!

LISTA DE SÍMBOLOS

Tabela 1: Lista de Símbolos

a	raio do núcleo de uma fibra óptica
B_i e ω_i	coeficientes da fórmula de Sellmeier
$c \approx 3 \times 10^8 \text{m/s}$	velocidade da luz no vácuo
$v = 6,626 \times 10^{-34} \text{Js}$	constante de Planck
K	constante Kerr do meio
L	comprimento da fibra
V	frequência normalizada ou número V
α	constante de atenuação do feixe óptico
δ	diferença da velocidade de grupo dos feixes
ϵ	permissividade de um meio material
$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{F/m}$	permissividade do vácuo
ϵ	razão entre a intensidade dos feixes copropagantes
λ	comprimento de onda
μ	permeabilidade magnética de um meio qualquer
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$	permeabilidade magnética do vácuo
τ	parâmetro de atraso da resposta não-linear
χ	susceptibilidade elétrica
ω	frequência angular
Γ	parâmetro de saturação da resposta não-linear
Δ	diferença relativa de índices de refração
Θ_a	ângulo de aceitação

LISTA DE SIGLAS

Tabela 2: Lista de Siglas

AMF	AutoModulação de Fase
AN	Abertura Numérica de uma fibra óptica
dB	decibel
CW (ou cw)	<i>Continuous Wave</i>
DVG	Dispersão da Velocidade de Grupo
EDO	Equação Diferencial Ordinária
ENLS	Equação Não-Linear de Schrödinger
EPP	Equação de Propagação do Pulso
ERE	Espalhamento Raman Estimulado
GHz	gigahertz
GSH	Geração de Segundo Harmônico
GTH	Geração de Terceiro Harmônico
ID	Índice Degrau
IG	Índice Gradual
IM	Instabilidade Modulacional
MFC	Modulação de Fase Cruzada
MHz	megahertz
MQO	Mistura de Quatro Ondas
nm	nanometros
ps	picosegundos
QCW	<i>Quasi-Continuous Wave</i>
SI	<i>Système International d'unités</i>
TE	Transversal Elétrico
TEM	Transversal Eletromagnético
THz	terahertz
TM	Transversal Magnético
UV	região UltraVioleta do espectro eletromagnético
UHF	(<i>do inglês</i>) Frequências ultra-elevadas (300 MHz - 3000 MHz)
VHF	(<i>do inglês</i>) Frequências muito elevadas (30 MHz - 300 MHz)
ZMDW	<i>Zero Material Dispersion Wavelength</i>

RESUMO

Instabilidade Modulacional (IM) é um fenômeno característico da propagação de ondas em meios dispersivos não-lineares e tem sido estudado em diversas áreas da Física devido a sua natureza fundamental bem como suas importantes aplicações tecnológicas. Esse fenômeno corresponde ao enriquecimento exponencial de pequenas perturbações harmônicas devido a cooperação dos efeitos não-lineares e dispersivos. Portanto, não obstante sua aplicabilidade, IM é, de igual modo, uma fonte importante de degradação em sistemas de comunicação por fibras ópticas.

Nesta tese investigamos a instabilidade modulacional (IM) induzida por Modulação de Fase Cruzada (MFC) de dois pulsos ópticos acoplados incoerentemente que se propagam em uma fibra sem perda com tempo de resposta não-linear finito. O carácter não-instantâneo da resposta não-linear é introduzido através de um processo de relaxação de Debye. Obtemos analiticamente, de modo exato, a relação de dispersão para fracas perturbações harmônicas da solução estacionária. Mostramos que o espectro de instabilidade, presente tanto no regime de dispersão normal quanto no anômalo em meios Kerr com resposta instantânea, desenvolve uma estrutura de pico duplo cuja a intensidade relativa e a frequência típica dependem do tempo de resposta considerado.

Além do mais, revelamos que existem dois modos instáveis ao longo de todo o espectro de frequência. Apresentamos a dependência do ganho máximo e da frequência correspondente dentro de cada modo instável como função da diferença da velocidade de grupo e do tempo de resposta, mostrando o cruzamento entre os regimes de resposta não-linear rápida e lenta.

Palavras Chaves: Instabilidade Modulacional; Modulação de Fase Cruzada; Fibras Ópticas Não-Lineares; Não-Linearidade Atrasada; modelo de relaxação de Debye.

ABSTRACT

Modulation instability (MI) is a general characteristic of wave propagation in nonlinear dispersive media and it has been intensively investigated in several branches of physics due to its fundamental nature as well as technological applications. This phenomenon corresponds to the exponential growth of weak harmonic perturbations in virtue of the interplay between dispersive and nonlinear effects. Hence, despite its important features, MI is also a main source of channel depletion and degradation in optical fiber communications.

In this thesis, we investigate the modulational instability (MI) induced by cross-phase-modulation (XPM) of two incoherently coupled optical pulses copropagating in a lossless fiber with a finite nonlinear response time. The non-instantaneous character of the nonlinear response is introduced through a Debye relaxation process. We analytically obtain the exact dispersion relation for weak harmonic perturbations over the stationary solution. We show that the instability spectrum, present in both normal and anomalous dispersive regimes in instantaneously responding Kerr media, develops a double peak structure whose relative strength and typical frequency range depend on the response time. Further, we reveal that there are two unstable modes in the entire frequency spectrum. We report the dependence of the maximum gain and central frequency within each unstable mode as a function of the group velocity mismatch and response time, showing the crossover between the regimes of fast and slow non-linear responses.

Keywords: Modulation Instability; Cross-Phase Modulation; NonLinear Fiber Optics; Delayed Nonlinearities; Debye relaxation model.

PREFÁCIO

No Capítulo 1, introduziremos de forma sucinta algumas das principais características das fibras ópticas que são fundamentais para que se possa compreender os fenômenos não-lineares discutidos ao longo desta tese bem como discutimos os conceitos básicos da óptica relacionados. Apresenta-se motivações para os constantes estudos destes fenômenos. Além disso, se fornece uma perspectiva histórica sobre o desenvolvimento no campo de estudo das fibras ópticas onde se apresenta o caminho natural que culminou com a utilização da luz na transmissão de dados. Apresentamos brevemente as principais características de uma fibra óptica. As demais seções servem como uma breve revisão e são dedicadas a introdução dos conceitos básicos da óptica como: velocidade da luz, índice de refração, ondas harmônicas planas, velocidade de fase, velocidade de grupo, dispersão, entre outros. Trata-se, portanto, de um capítulo de revisão.

No Capítulo 2, vamos apresentar os conceitos bem como alguns dos fenômenos relacionados com a óptica não-linear, entretanto, os efeitos imediatamente relacionados com a fenomenologia de que trata essa tese serão estudados nos capítulos posteriores. Além do mais, para compreendermos os fenômenos não-lineares que ocorrem nas fibras ópticas dentro das quais propagam-se pulsos eletromagnéticos temos que considerar a Teoria Eletromagnética para propagação de onda em meios dispersivos não-lineares. Introduzimos, de maneira muito breve, a óptica não-linear. Em seguida, apresentamos as equações de Maxwell em meios dielétricos, tratando de conceitos importantes como os termos lineares e não-lineares da polarização induzida. Além do mais, consideramos a propagação de pulsos em meios não-lineares e dispersivos assumindo-se que a largura espectral do pulso é muito menor do que a frequência central da radiação incidente, conhecida como aproximação do envelope que varia lentamente. Concluimos o capítulo apresentando as equações não-lineares de Schrödinger (ENLS) obtidas através dos resultados apresentados nas seções an-

teriores. Portanto, o objetivo principal deste capítulo é obter a equação que governa a propagação de pulsos ópticos em fibras ópticas.

No Capítulo 3, tratamos dos fenômenos não-lineares diretamente relacionados com o estudo inédito apresentado e discutido no capítulo 4. Discutimos os efeitos da DVG. Tratamos da AutoModulação de Fase (AMF). Apresentamos o efeito Kerr eletroóptico. Estudamos a Instabilidade Modulacional (IM) e discutimos brevemente sobre a formação de Sólitons Ópticos. Estudamos os efeitos da Modulação de Fase Cruzada (MFC). Por fim, tratamos dos efeitos de polarização e o efeito Raman.

Ao final, no Capítulo 4, apresentaremos o modelo teórico que utilizamos para estudar a instabilidade modulacional induzida por modulação de fase cruzada em fibras sem perdas com resposta não-linear atrasada com base nas análises elaboradas nos capítulos anteriores, assim como discutimos os resultados obtidos. Apresentamos algumas considerações iniciais sobre o problema proposto. Revisitamos a MFC. Em seguida, tratamos da inclusão do tempo de atraso no modelo que é apresentado logo adiante. Por fim, apresentamos a análise de estabilidade linear e os principais resultados.

Sumário

Folha de rosto	i
Dedicatória	ii
Agradecimentos	iii
Lista de Símbolos	v
Lista de Siglas	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
Prefácio	ix
1 Introdução à Física das Fibras Ópticas	1
1.1 Introdução e Fatores Motivacionais	2
1.2 Perspectiva Histórica das Comunicações Ópticas	2
1.2.1 Desenvolvimento do Meio de Transmissão	4
1.3 Fibras Ópticas e suas Propriedades	6
1.4 Fenômenos Ópticos Elementares	9
1.4.1 Constantes Elétricas e a Equação de Onda	10
1.5 Ondas Harmônicas Planas e Velocidade de Fase	13
1.5.1 Caso unidimensional	13
1.5.2 Caso tridimensional	15
1.6 Função de Onda Complexa e Velocidade de Grupo	16
1.7 Perdas em Fibras e Unidades Decibel	18

1.8	Dispersão	20
1.8.1	Dispersão Cromática	20
1.8.2	Dispersão da Velocidade de Grupo	21
2	Óptica Não-Linear e a Propagação de Pulsos em Fibras Ópticas	24
2.1	Introdução a Óptica Não-Linear	25
2.2	Equações de Maxwell e a Equação de Propagação do Pulso	26
2.2.1	Campos Macroscópicos e as Equações de Maxwell	26
2.3	Equação de Propagação do Pulso	30
2.3.1	Tratamento da Parte Não-Linear da EPP	31
2.4	Equação Não-Linear de Schrödinger	37
3	Efeitos Não-Lineares em Fibras Ópticas	43
3.1	Efeitos da Dispersão da Velocidade de Grupo	43
3.1.1	Alargamento do Pulso Induzido pela Dispersão	45
3.2	Automodulação de Fase	47
3.2.1	Alargamento Espectral Induzido pela AMF	47
3.3	Efeito Kerr EletroÓptico	49
3.4	Instabilidade Modulacional	50
3.4.1	Análise da Estabilidade Linear	52
3.4.2	Espectro de Ganho	55
3.5	Modulação de Fase Cruzada	57
3.5.1	Equações Não-Lineares de Schrödinger Acopladas	58
3.5.2	IM Induzida pela MFC	63
3.6	Efeito Raman	66
3.6.1	Espalhamento Raman Estimulado	67
4	Interação entre MFC e Resposta Não-Linear Atrasada	69
4.1	Considerações Iniciais	69

4.2	Modulação de Fase Cruzada Revisitada	73
4.3	Resposta Não-Linear Atrasada	74
4.4	Modelo Teórico	76
4.5	Análise da Estabilidade Linear Revisitada	77
4.6	Discussões e Principais Resultados	84
5	Conclusões e Perspectivas de Trabalhos Futuros	98
	Referências	102
	Índice Remissivo	112

Capítulo 1

Introdução à Física das Fibras Ópticas

Neste capítulo introduziremos de forma sucinta algumas das principais características das fibras ópticas que são fundamentais para que se possa compreender os fenômenos não-lineares discutidos ao longo desta tese bem como discutimos os conceitos básicos da óptica relacionados. Na secção 1.1 apresenta-se motivações para os constantes estudos destes fenômenos. A secção 1.2 fornece uma perspectiva histórica sobre o desenvolvimento no campo de estudo das fibras ópticas onde se apresenta o caminho natural que culminou com a utilização da luz na transmissão de dados. Na secção 1.3, apresentamos brevemente as principais características de uma fibra óptica. As secções de 1.4 a 1.8 se constituem em uma breve revisão e são dedicadas a introdução dos conceitos básicos da óptica como: velocidade da luz, índice de refração, ondas harmônicas planas, velocidade de fase, velocidade de grupo, dispersão, entre outros. Trata-se, portanto, de um capítulo de revisão.

1.1 Introdução e Fatores Motivacionais

A crescente demanda por redes de telecomunicações cada vez mais eficientes tem exigido avanços contínuos em seu desenvolvimento principalmente após a grande popularização dos meios de comunicação ocorrida nas últimas décadas através do uso da *internet*. Sistemas de telecomunicações com arquiteturas totalmente óptica, com o intuito de aprimorar as redes atuais, aumentando-se a taxa de transmissão de dados, constitui-se em uma busca constante. Nessa direção, torna-se de elevada importância o conhecimento dos diversos fenômenos físicos relacionados com a utilização das fibras ópticas. Nesta tese, apresentamos o estudo teórico da interação entre a modulação de fase cruzada (MFC) e a resposta não-linear não-instantânea para feixes copropagantes em fibras ópticas.

1.2 Perspectiva Histórica das Comunicações Ópticas

A ideia de utilizar luz para comunicações surgiu em uma data muito remota. Uma forma de comunicação óptica bastante antiga é a comunicação através de sinais manuais. Durante o dia, os movimentos da mão interrompem o fluxo da luz, diminuindo a potência luminosa que chega aos olhos do receptor. Dizemos que os movimentos manuais modulam a intensidade do feixe luminoso. A fonte de luz para esse sistema é o sol e sua taxa de transferência de informação correspondente é baixa. Além disso, o alcance de transmissão é bastante limitado e a probabilidade de erro é elevada.

Os sinais de fogo e fumaça, úteis para caminhos de comunicação mais longos, permitiam a transmissão de mensagens variando-se o padrão de fumaça emergente do fogo. A criação das lâmpadas, por sua vez, permitiu a construção de sistemas

de comunicação um pouco mais sofisticados, como enlances de luzes piscantes entre navios ou entre navio e a costa, sinais de conversão para automóveis, semáforos e heliógrafos¹ [1–14].

Por volta de 1880, Alexander Graham Bell (1847-1922) efetuou várias tentativas para transportar o som através do uso de feixe luminoso, inventando o *fotofone*, cujo funcionamento pode ser descrito de maneira simplificada do seguinte modo: (i) focaliza-se a luz solar até que se obtenha um feixe bem estreito, incidindo-o em uma lâmina espelhada de pequena espessura; (ii) fala-se nas proximidades da lâmina e as ondas sonoras fazem-na vibrar; (iii) a energia luminosa refletida na lâmina é captada sobre uma célula de Selênio; (iv) a célula de Selênio (situada a uma distância de aproximadamente 200 m), por sua vez, é um material fotossensível e sua resistência se modifica conforme a intensidade percebida, conseqüentemente, a corrente elétrica através do Selênio varia, reproduzindo os sinais sonoros no fone de recepção [1, 2, 11].

A necessidade da implementação de sistemas que permitissem muitas comunicações simultâneas se deu a partir de 1900. Equipamentos telefônicos foram criados, por volta de 1926, que permitiam a transmissão de dois ou quatro canais de voz. O surgimento e emprego de dispositivos semicondutores tornou os circuitos eletrônicos mais eficientes e compactos. Esses componentes eram capazes de processar sinais de frequências muito elevadas o que permitia concentrar mais canais em uma mesma onda portadora em um único meio de transmissão. Desse modo, os sistemas de frequências muito elevadas (VHF), cujo intervalo de frequência correspondente varia de 30 MHz a 300 MHz, e os sistemas de frequências ultra-elevadas (UHF), no intervalo de 300 MHz - 3.000 MHz, cumpriram bem a missão de ampliar a capacidade dos sistemas de comunicações.

Entretanto, com o intuito de prestar novos serviços e enviar um número ainda maior de informações, intensificaram-se as aplicações na faixa de frequências acima

¹Equipamentos capazes de realizar transmissões telegráficas, a distâncias de alcance visível, por meio da reflexão da luz solar em um conjunto de espelhos[7].

de 30 GHz. Deste modo, tornou-se natural que as pesquisas se voltassem para a utilização da luz como onda portadora nos sistemas de comunicações. Com o advento do laser, em 1960, foi possível a implementação das comunicações ópticas de alta capacidade de transmissão. As características do laser torna-o conveniente para ser usado como portador/transmissor de informação, pois é uma fonte de radiação de alta intensidade e possui largura espectral estreita. De maneira quase imediata à invenção do laser, sistemas de comunicações ópticas não-guiadas, i.e. sem utilização de fibras ópticas, foram desenvolvidos. Neste caso a comunicação se dava por meio de feixes luminosos viajando pela atmosfera [1, 2, 15–19].

Estes desenvolvimentos proporcionaram o surgimento do que hoje se conhece como *fotônica* que trata dos sistemas que operaram através do fluxo de fótons.

1.2.1 Desenvolvimento do Meio de Transmissão

Várias ideias foram propostas para o guiamento da luz. Entre estas podemos mencionar a transmissão do sinal em tubos metálicos ocos de cobre com diâmetro de 0,5 mm bem polidos internamente para os quais previa-se uma perda de 1,8 dB/km na potência do sinal no comprimento de onda de $1 \mu\text{m}$. Entretanto, as perdas observadas na prática eram bem maiores, em parte por não ser possível um polimento ideal nas paredes internas onde as irregularidades fossem muito menores do que o comprimento de onda, chamado de polimento óptico, e em parte pela fato de essas guias apresentarem um aumento bastante elevado na perda de potência quando da necessidade de se efetuar dobras ou curvas. Na prática, as perdas eram bem mais acentuadas do que 1,8 dB/km mesmo em caminhos retilíneos.

Novas tentativas resultaram no desenvolvimento de guias dielétricos ocos que se constituíam de tubos de 2 mm de diâmetro, capazes de guiar a luz com perdas, na prática, em torno de 1,8 dB/km, desde que esse guia fosse perfeitamente retilíneo, todavia os problemas das curvas no guiamento ainda persistiam, o que as tornavam

impraticáveis. Experiências com bastões de vidros também não apresentaram resultados animadores, pois as perdas ainda eram elevadas.

Quase que comcominadamente ao surgimento dos lasers desenvolveu-se as fibras ópticas de baixa perda (baixo fator de atenuação) que estabelece a distância máxima de transmissão sem necessidade de repetidores do sinal. O mecanismo utilizado nas fibras ópticas tem por base o fenômeno da reflexão interna total que ocorre na fronteira de separação entre o dielétrico e ar, ou entre dois dielétricos com índice de refração diferentes motivados pelo o experimento do guiamento da luz pela água seguindo uma trajetória curvilínea realizado pela físico inglês John Tyndall (1820 - 1893) em 1870, ilustrado esquematicamente na Figura (1.1). Neste experimento foi observado o guiamento da luz através do caminho curvo seguido pelo jato d'água.

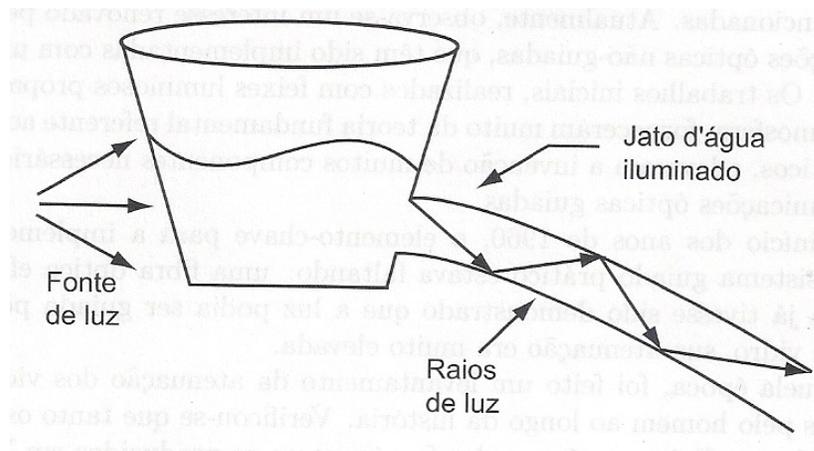


Figura 1.1: Esquema ilustrativo do guiamento da luz por um jato d'água demonstrado por John Tyndall em 1870. Obtida em [2].

A partir de então deu-se um rápido desenvolvimento na utilização das fibras ópticas, de modo que, dentre as diversas aplicações das fibras ópticas podemos citar: sensores a fibra óptica (giroscópios, hidrofone, entre outros), troncos telefônicos, difusão de TV, comunicação de computadores, cabeamento de aeronaves e navios, aplicações geofísicas na sondagem de solos e de movimentos sísmicos, aplicações na

biologia e medicina, aplicações militares (controle de mísseis) [20–34], entre outras.

1.3 Fibras Ópticas e suas Propriedades

Atribui-se ao físico indiano Narinder Singh Kapany (1927 -) a invenção das fibras ópticas como as conhecemos hoje [35].

O fenômeno físico básico responsável por permitir o confinamento e a propagação da luz nas fibras ópticas é a reflexão interna total que é bem conhecida desde o século XIX. Protótipos do que hoje são as fibras ópticas foram elaborados por volta dos anos 1920-1930, porém o campo de estudo das fibras ópticas surgiu, de fato, a partir de 1950 e se desenvolveu bastante durante os anos da década de 1960, principalmente devido a motivação de se transmitir imagens através de fibras de vidro [36].

Tais fibras apresentavam perdas bastante acentuadas, em torno de 1.000 dB/km, quando comparadas com os padrões atuais (0,2 dB/km). O surgimento de fibras com pequenos níveis de perda resultou em um forte avanço no campo da comunicação por fibras ópticas e impulsionou o estudo dos fenômenos não-lineares que se tornaram os principais responsáveis pela degradação dos sinais emitidos pelas fibras. Desta forma, iniciou-se os estudos de fenômenos como o espalhamento Raman estimulado (ERE), birefringência opticamente induzida, mistura de quatro ondas (MQO) e automodulação de fase (AMF).

Em 1973, houve uma contribuição importante por Hasewaga e Tapert ([37, 38]) que apresentaram que pulsos tipo sólitons poderiam ocorrer em fibras ópticas como resultado da interação entre efeitos dispersivos e não-lineares, impulsionando ainda mais o campo de estudo das fibras ópticas não-lineares. Daí por diante ocorreu um forte avanço na tecnologia do processo de fabricação das fibras como, por exemplo, através do uso de elementos terras-raras e estas passaram a ser usadas também

como amplificadores e lasers sendo, deste modo, largamente utilizadas em aplicações comerciais. Estes usos levaram a uma revolução no sistema de telecomunicações por fibras ópticas. Recentemente, no que diz respeito ao gerenciamento de informação, as fibras de cristais fotônicos tem sido amplamente utilizadas.

Estrutura Física Básica

De forma simplificada, uma fibra óptica consiste de um núcleo central de vidro com índice de refração n_1 envolvido por uma interface cujo índice de refração n_2 obedece $n_2 < n_1$, permitindo, deste modo, a ocorrência da reflexão interna total. Tais camadas são envolvidas ainda por uma capa protetora.

Tais fibras são ditas fibras ópticas com índice degrau (ID), uma vez que o índice de refração decresce de forma discreta desde o núcleo até a interface. Existem também as fibras com índice gradual (IG) nas quais o índice de refração decresce continuamente com a distância radial.

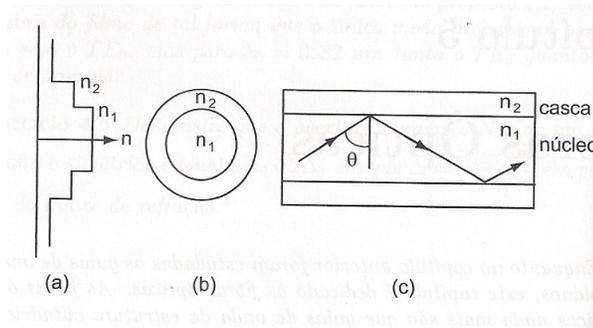


Figura 1.2: Esquema ilustrativo de uma fibra óptica com ID: (a) perfil de índice degrau; (b) corte transversal da fibra óptica; (c) corte longitudinal da fibra óptica. Figura obtida em [2].

De um modo geral os tipos de fibra ID e IG se diferenciam basicamente pelos modos de propagação - transversal elétrico (TE), transversal magnético (TM) ou transversal eletromagnético (TEM) - que representam o conjunto de ondas eletromagnéticas que são guiadas de modo estável pelo guia de onda. Tais modos podem

ser determinados a partir das equações de Maxwell, sob as condições de contorno impostas pelo tipo de guia. Devido a geometria cilíndrica e ao meio dielétrico, previsões teóricas dos possíveis modos são obtidas resolvendo as equações de Maxwell numericamente.

Abertura Numérica (AN)

Nem todo raio de luz que penetra no núcleo de uma fibra óptica satisfaz a condição de reflexão interna total na interface entre o núcleo e a casca e, portanto, não é transmitido pela fibra. Desta maneira, existe um ângulo Θ_a denominado de *ângulo de aceitação* que determina que os raios luminosos incidentes na fibra com $\Theta > \Theta_a$ não são transmitidos pelo núcleo desta fibra. Estes raios penetram a casca onde são fortemente atenuados e desaparecem.

Define-se a *abertura numérica* (AN) de uma fibra óptica inserida em um meio com índice de refração n_0 a partir da noção do ângulo de aceitação pela equação

$$AN = n_0 \text{sen} \Theta_a = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \quad (1.1)$$

A abertura numérica (AN) também pode ser definida através da diferença relativa entre os índices de refração do núcleo e da casca definido por

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}, \quad (1.2)$$

deste modo

$$AN = n_1 \sqrt{2\Delta}. \quad (1.3)$$

Frequência Normalizada ou Número V

Outro parâmetro importante é o número V ou frequência normalizada dada por

$$V = k_0 a (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}, \quad (1.4)$$

onde $k_0 = 2\pi/\lambda$, a é o raio do núcleo e λ é o comprimento de onda da luz. O parâmetro V determina o número de modos que a fibra suporta. Pode-se mostrar que uma fibra com índice degrau suporta um único modo se $V < 2,405$, tais fibras são denominadas fibras monomodo.

De uma forma geral, quanto maior o valor do raio do núcleo a , maior o valor de V e, portanto, maior o número de modos que a fibra comporta. Para fibras multimodos a varia no intervalo $25 - 30 \mu\text{m}$ e para fibras monomodo com $\Delta \approx 0,003$, $a < 5 \mu\text{m}$. Por outro lado, o valor do raio externo b não desempenha uma papel fundamental desde que seja largo o suficiente para conter todos os modos inteiramente. Na prática, $b = 62,5 \mu\text{m}$ tanto para as fibras monomodo quanto para as fibras multimodos [39–48].

1.4 Fenômenos Ópticos Elementares

O prestigiado físico Isaac Newton (1642-1727) tratou da luz como possuindo natureza corpuscular muito provavelmente pelo fato de que em um meio uniforme a luz descreve uma trajetória retilínea. Um exemplo familiar desse fenômeno é a formação de sombras e é denominado de lei da propagação retilínea da luz. Entretanto seu contemporâneo Christiaan Huygens (1629 - 1695) defendia uma descrição diferente e acreditava que a luz tinha natureza ondulatória, o que explicava bem fenômenos como a interferência entre feixes de luz, difração, espalhamento da luz em torno de obstáculos, entre outros.

Após os trabalhos de James Clerk Maxwell (1831-1879) compreendeu-se que a luz nada mais é do que uma forma de energia eletromagnética descrita como ondas

eletromagnéticas cujo espectro varia desde de ondas de rádio até radiação gama, passando pela radiação infravermelho, pelo espectro de cores visíveis do vermelho ao violeta, radiação ultravioleta e os Raios-x.

Além do mais, com o advento da teoria quântica da luz por Max Planck (1858 - 1947), Albert Einstein (1879 - 1955) e Niels Bohr (1885 - 1962) sabemos que a energia eletromagnética é *quantizada*, ou seja, só pode ser adicionada ou cedida de um campo eletromagnético em quantias discretas denominadas de *fótons*. Adiante vamos recorrer a essa natureza da luz para explicar a fenomenologia de alguns efeitos não-lineares em fibras ópticas.

Deste modo a luz é dita como possuindo uma natureza *dual* de sorte que certos fenômenos exibem o carácter ondulatório da luz, e.g. a interferência da luz, e outros evidenciam os aspectos corpuscular da luz, como exemplo o efeito fotoelétrico. Desta forma, os fenômenos ópticos são estudados do seguinte modo: a teoria de Maxwell trata da propagação da luz enquanto que a teoria quântica descreve a interação da luz com a matéria (absorção ou emissão de luz), o que resulta no campo de estudo da *eletrodinâmica quântica*.

1.4.1 Constantes Elétricas e a Equação de Onda

Em um dado ponto do espaço vazio, o estado eletromagnético do vácuo é especificado por dois vetores, o campo elétrico \mathbf{E} e o campo magnético \mathbf{H} . Suas derivadas temporais e espaciais estão interrelacionadas do seguinte modo

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.6)$$

satisfazendo a condição de divergência dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.8)$$

que indica a ausência de cargas no ponto especificado, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Estas quatro equações são conhecidas como as equações de Maxwell para o vácuo. A constante $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m é a permeabilidade do vácuo. A constante $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9}$ F/m é a permissividade do vácuo.

Equação de Onda

Podemos separar os campos \mathbf{E} e \mathbf{H} em duas equações tomando o rotacional de uma equação e usando o fato de que a ordem de diferenciação com relação ao tempo e ao espaço pode ser trocada, ou seja, $\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t}$, logo

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (1.9)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (1.10)$$

Utilizando-se as condições de divergência dadas pelas Eqs. (1.7) e (1.8) e a identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2(\mathbf{A}), \quad (1.11)$$

obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (1.12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad (1.13)$$

onde

$$c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}, \quad (1.14)$$

portanto os campos satisfazem o mesmo tipo de equação diferencial chamada de *equação de onda*. Variações nesses campos se propagam no espaço vazio com velocidade $c \approx 3 \times 10^8$ m/s, denominada de velocidade da luz no vácuo.

Velocidade da Luz em um Meio e Índice de Refração

Quando temos meios isotrópicos não-condutores, as equações de Maxwell para os campos elétricos e magnéticos são as mesmas que as apresentadas para o vácuo, porém com as constantes do vácuo μ_0 e ϵ_0 substituídas pelas constantes correspondentes do meio μ e ϵ . Deste modo a velocidade de propagação dos campos eletromagnéticos u no meio é dada por

$$u = (\mu\epsilon)^{-1/2}. \quad (1.15)$$

O índice de refração n do meio é definido como a razão entre da luz no vácuo e a velocidade neste meio, logo

$$n = \frac{c}{u}. \quad (1.16)$$

Na realidade, o índice de refração varia com a frequência da radiação incidente $n(\omega)$ e tal dependência com a frequência é denominada de *dispersão*. Um exemplo

desse fenômeno é a decomposição da luz em suas cores componentes quando da passagem por um prisma. Trataremos da variação do índice de refração com a intensidade da radiação mais detalhadamente no próximo capítulo no qual faremos uso do movimento dos elétrons (de valência) em um meio óptico através do qual se propaga luz para compreender esse efeito que é o escopo da óptica não-linear.

1.5 Ondas Harmônicas Planas e Velocidade de Fase

Conforme visto anteriormente, as componentes Cartesianas dos campos elétrico e magnético ($E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ representadas por U) satisfazem individualmente a mesma equação

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (1.17)$$

Vamos tratar brevemente do caso unidimensional para apresentarmos algumas definições.

1.5.1 Caso unidimensional

Neste caso o operador ∇^2 se reduz a $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, supondo que variações espaciais de U ocorram apenas na direção z , deste modo a Eq. (1.15) se reduz a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (1.18)$$

É fácil verificar, por substituição direta, que a função $U(z, t)$ dada por

$$U(z, t) = U_0 \cos(kz - \omega t), \quad (1.19)$$

é solução da Eq. (1.16) desde que

$$\frac{\omega}{k} = u. \quad (1.20)$$

Observe que, como o cosseno é uma função par [$\cos \theta = \cos(-\theta)$], é irrelevante a ordem como escrevemos o argumento. Além disso, também não importa se usamos uma função cosseno ou uma função seno, haja visto que representam a mesma quantidade, exceto por uma diferença de fase. A solução dada pela Eq. (1.19) é fundamental para o estudo da óptica e representa as *ondas harmônicas planas*. Podemos estudar a propagação dessa onda observando que, entre os instantes de tempo t e $t + \Delta t$, a onda apresenta uma variação correspondente $U(z + \Delta z, t)$, logo

$$U_0 \cos(k(z + \Delta z) - \omega t) = U_0 \cos(kz - \omega(t + \Delta t)), \quad (1.21)$$

o que implica

$$u = \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad (1.22)$$

e por isso u é denominada de *velocidade de fase*. Nota-se ainda que a onda se desloca no sentido positivo da direção z , uma vez que $u, \Delta t > 0$. Desta forma, a função $U(z, t) = U_0 \cos(kz - \omega t)$ representa uma onda se propagando no sentido positivo da direção z . Por outro lado, a função $U(z, t) = U_0 \cos(kz + \omega t)$ representa uma onda se propagando no sentido negativo da direção z .

A constante ω é denominada *frequência angular* e k *número de onda* ou *constante de propagação*. O *comprimento de onda* λ corresponde a distância, medida ao longo da direção de propagação, tal que a onda realiza um ciclo completo. O tempo necessário para realizar um ciclo completo é dito *período* e denotado por T .

Em outras palavras, a onda se propaga por uma distância λ em um intervalo de tempo T . Já o número de ciclos por unidade de tempo é chamado de *frequência* e denotado por ν . Quando se considera o segundo como unidade de tempo, a unidade de frequência é o *Hertz* (Hz). Dadas estas definições, temos as seguintes relações

$$\lambda = uT = \frac{2\pi}{k}, \quad (1.23)$$

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (1.24)$$

1.5.2 Caso tridimensional

Retornando a equação de onda tridimensional (1.17) pode-se verificar facilmente que essa equação é satisfeita por uma função de onda harmônica plana da forma:

$$U(\mathbf{r}, t) = U(x, y, z, t) = U_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (1.25)$$

onde o vetor posição \mathbf{r} é dado por

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}, \quad (1.26)$$

e o *vetor de propagação* ou *vetor de onda* \mathbf{k} é dado por

$$\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{i}} + k_y\hat{\mathbf{j}} + k_z\hat{\mathbf{k}}, \quad (1.27)$$

cujos módulos são dados pelo número de onda definido previamente na Eq. (1.20). Logo

$$|\mathbf{k}| = k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} = \frac{\omega}{u}. \quad (1.28)$$

1.6 Função de Onda Complexa e Velocidade de Grupo

Em geral é útil fazer uso da identidade de Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, para representar a onda harmônica plana devido a simplificações nas manipulações algébricas, deste modo

$$U = U_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.29)$$

onde a parte real representa a grandeza física sendo representada e é idêntica a Eq. (1.25).

Velocidade de Grupo

Vamos estudar a superposição de duas ondas e determinar a *velocidade de grupo*. Suponhamos que duas ondas que se propagam na mesma direção apresentem frequências angulares ligeiramente diferentes dadas por $\omega + \Delta\omega$ e $\omega - \Delta\omega$. Os números de onda correspondentes são $k + \Delta k$ e $k - \Delta k$. Além disso, vamos assumir que ambas apresentam a mesma amplitude, U_0 . Desta maneira a superposição das ondas dadas pode ser escrita como

$$U = U_0 e^{i[(k+\Delta k)z - (\omega+\Delta\omega)t]} + U_0 e^{i[(k-\Delta k)z - (\omega-\Delta\omega)t]}, \quad (1.30)$$

que pode ser manipulada da seguinte forma

$$U = U_0 e^{i(kz - \omega t)} [e^{i(z\Delta k - t\Delta\omega)} + e^{-i(z\Delta k - t\Delta\omega)}], \quad (1.31)$$

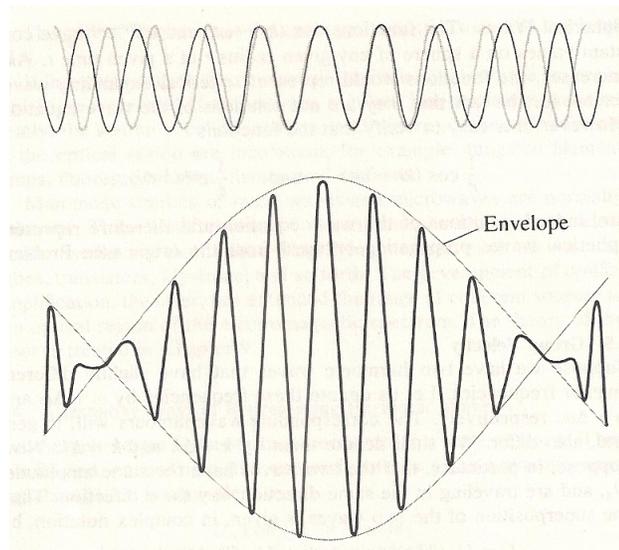


Figura 1.3: Envelope da combinação de duas ondas harmônicas com frequências angulares ligeiramente diferentes e mesma amplitude. Obtida de [49].

ou ainda

$$U = 2U_0 e^{i(kz - \omega t)} \cos(z\Delta k - t\Delta\omega), \quad (1.32)$$

que pode ser interpretada como sendo uma única onda (dada por $2U_0 e^{i(kz - \omega t)}$) que apresenta um envelope de modulação $\cos(z\Delta k - t\Delta\omega)$, ilustrado na Figura (1.2).

Observe que essa modulação não se propaga com a velocidade de fase $u = \omega/k$ das ondas individuais mas sim com uma velocidade u_g denominada de *velocidade de grupo* dada por

$$u_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}, \quad (1.33)$$

ou no limite infinitesimal

$$u_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (1.34)$$

Além disso, usando as Eqs. (1.16) e (1.20), temos

$$\omega = \frac{kc}{n}, \quad (1.35)$$

portanto, com o uso da regra da derivada do produto

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left(\frac{kc}{n} \right) = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2} \frac{dn}{dk} = u \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right). \quad (1.36)$$

Para diversos meios ópticos o índice de refração aumenta com o crescimento da frequência, ou número de onda, deste modo $dn/dk > 0$, logo a velocidade de grupo u_g é menor do que a velocidade de fase u . Em geral, nos experimentos mede-se diretamente a velocidade de grupo que deve ser corrigida para se determinar a velocidade da luz no respectivo meio [49–56].

1.7 Perdas em Fibras e Unidades Decibel

Embora não trataremos das perdas em fibras ópticas, cabe salientar que outro importante parâmetro das fibras é a constante de atenuação α que mede a perda da potência de um sinal durante uma transmissão de um sinal óptico dentro de uma fibra de comprimento L devido, dentre outros fatores, a absorção do material. Além do mais, unidades decibel são muito comuns para se representar perdas.

Seja P_0 a potência de entrada, a potência transmitida P_T é dada por

$$P_T = P_0 e^{-\alpha L}, \quad (1.37)$$

deste modo, α escreve-se como

$$\alpha = -\frac{1}{L} \ln \frac{P_T}{P_0}. \quad (1.38)$$

Vamos escrever α em unidades de decibéis (dB) sabendo que uma determinada razão adimensional R se transforma em decibéis do seguinte modo

$$R_{\text{dB}} = 10 \log_{10} R, \quad (1.39)$$

portanto, multiplicando-se ambos os membros da Eq. (1.38) por 10 e usando a propriedade de mudança de base dos logaritmos, obtemos

$$10\alpha = -\frac{10}{L} \left(\log_{10} \frac{P_T}{P_0} / \log_{10} e \right), \quad (1.40)$$

ou seja, comparando-se com a definição dada pela Eq. (1.37), temos

$$\alpha_{\text{dB}} = -\frac{10}{L} \log_{10} \frac{P_T}{P_0} = 4.343\alpha. \quad (1.41)$$

As perdas em fibras também dependem do comprimento de onda da luz propagante, de modo que $\alpha(\omega)$. Usando a escala em decibel, percebemos facilmente que mesmo uma perda de 10 dB/km corresponde a uma constante de atenuação $\alpha \approx 2,3 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$. Fibras de sílica, por exemplo, exibem uma perda mínima de aproximadamente 0,2 dB/km para comprimentos de onda em torno de 1,55 μm . Deste modo um sinal com potência de entrada, P_0 , de 2mW apresenta, em 10 km, 2 dB de perdas, logo, usando a Eq. (1.39)

$$P_0(\text{dB}) = 10 \times \log 2 \approx 3 \text{ dBmW} \quad (1.42)$$

portanto a potência de saída P_T , em decibel, dá-se pela subtração da perda, ou seja

$$P_T(\text{dB}) = 3 \text{ dBmW} - 2 \text{ dBmW} = 1 \text{ dBmW}. \quad (1.43)$$

Novamente usando a Eq. (1.39), temos

$$P_T = 10^{0,1} = 1,26 \text{ mW}. \quad (1.44)$$

1.8 Dispersão

De um modo geral, existem duas fontes principais de dispersão: dispersão material e dispersão de guia de onda. A dispersão material resulta de uma resposta do material que depende das frequências do espectro do sinal. Para ressaltar tal característica, denomina-se tal efeito dispersivo como dispersão cromática. Por outro lado, a dispersão de guia de onda ocorre quando a velocidade de uma onda em um guia de onda (e.g. uma fibra óptica) depende da sua frequência devido a razões geométricas, independente de qualquer dependência da resposta de um material com a frequência.

1.8.1 Dispersão Cromática

Quando uma onda eletromagnética interage com os elétrons ligados de um dielétrico, a resposta do meio, de um modo geral, depende da frequência óptica ω . Esta propriedade é a conhecida dispersão cromática e manifesta-se através da dependência do índice de refração com a frequência da onda propagante $n(\omega)$. Meios com essa propriedade são chamados de *meios dispersivos*.

Deste modo, a dispersão cromática consiste na variação da velocidade de propagação das diversas componentes espectrais de um sinal. Caso a fonte de luz fosse perfeitamente monocromática, o efeito da dispersão cromática seria inexistente para qualquer comprimento de onda.

De um ponto de vista elementar, a origem da dispersão cromática relaciona-se com as frequências de ressonância características nas quais o meio absorve a radiação eletromagnética através das oscilações dos elétrons ligados. Para frequências afastadas das frequências de ressonância do meio, o índice de refração é bem aproximado pela equação de Sellmeier

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad (1.45)$$

onde ω_j é uma frequência de ressonância do meio e B_j é o peso correspondente desta ressonância. Obviamente, a soma na Eq. (1.45) ocorre para todas as frequências de ressonância do material que contribuem com o intervalo de frequência de interesse. Os coeficientes de Sellmeier, B_j e ω_j , são obtidos pelo ajuste das curvas de dispersão aos resultados experimentais e, em geral utiliza-se $m = 3$. Esses valores variam de acordo com o material do núcleo da fibra e estão catalogados para diversas substâncias.

1.8.2 Dispersão da Velocidade de Grupo

Para pulsos ópticos curtos, a dispersão em fibras desempenha um papel importante, mesmo quando os efeitos não-lineares não são fundamentais, uma vez que diferentes componentes espectrais associadas com o pulso viajam com velocidades distintas dadas por $c/n(\omega)$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. Essa distorção do pulso pode ser um fator crítico nos sistemas ópticos de comunicação. Porém, conforme veremos no decorrer desta tese, a combinação dos efeitos dispersivos e não-lineares pode resultar em fenômenos bem mais interessantes como, por exemplo, a instabilidade modulacional (IM).

Pode-se quantificar os efeitos da dispersão nas fibras expandindo-se a constante de propagação do modo² $\beta(\omega)$ em torno da frequência ω_0 na qual o espectro do pulso se encontra centrado, portanto, uma vez que raramente se conhece uma expressão fechada para β , utilizamos a expansão em série de Taylor

$$\beta(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (1.46)$$

²A partir daqui vamos denotar a constante de propagação por β ao invés de k para manter a notação que iremos utilizar no capítulo 4 com os resultados inéditos desta tese.

onde

$$\beta_m = \left(\frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0}, \quad (1.47)$$

$m \in \mathbb{N}$.

Pela regra da derivada do produto, podemos relacionar os parâmetros β_j com o índice de refração e suas derivadas. Deste modo β_1 e β_2 são dados por

$$\beta_1 = \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left[n(\omega) \frac{\omega}{c} \right] = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right), \quad (1.48)$$

e como $\beta_2 = \frac{d\beta_1}{d\omega}$, temos

$$\beta_2 = \frac{1}{c} \left(2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2 n}{d\omega^2} \right). \quad (1.49)$$

Uma análise dimensional revela que $\beta_1 \mapsto [LT^{-1}]^{-1}$ e como sabemos

$$\beta_1 = \frac{1}{\nu_g} = \frac{n_g}{c} \quad (1.50)$$

onde n_g é o índice de grupo e ν_g é a velocidade de grupo. Por outro lado, $\beta_2 \mapsto [LT^{-2}]^{-1}$, desta forma, o envelope do pulso óptico se move com velocidade ν_g enquanto que essa velocidade de grupo varia de acordo com β_2 . Este fenômeno é conhecido como dispersão da velocidade de grupo (DVG) e β_2 é parâmetro da DVG.

Para uma fibra de sílica pura, nota-se que β_2 se anula em um comprimento de onda λ_D dado aproximadamente por $\lambda_D = 1,27 \mu m$. Esse comprimento de onda é o chamado de ZMDW (do inglês *Zero Material Dispersion Wavelength*). Note contudo que a dispersão não se anula.

Quando $\beta_2 > 0$ ($\lambda < \lambda_D$), tem-se o regime de dispersão normal onde as componentes de altas frequências do pulso se deslocam com velocidade maior do que as componentes com baixas frequências. Por outro lado, ocorre o contrário quando $\beta_2 < 0$ ($\lambda > \lambda_D$) e diz-se que essas fibras (de sílica) exibem regime de

dispersão anômalo quando o comprimento de onda da luz excede o ZMDW.

Uma característica importante da dispersão cromática corresponde ao fato de que pulsos com diferentes frequências ou, de igual modo, diferentes comprimentos de onda, se propagam com diferentes velocidades dentro de uma fibra óptica devido a diferença das suas velocidades de grupo representada pelo parâmetro δ dada por

$$\delta = |\beta_1(\omega_1) - \beta_1(\omega_2)| = |\nu_g^{-1}(\omega_1) - \nu_g^{-1}(\omega_2)|, \quad (1.51)$$

onde ω_1 e ω_2 são as frequências centrais dos dois pulsos e β_1 é determinado pela Eq. (1.48). A diferença entre as velocidades de grupo desempenha um papel importante para os efeitos não-lineares relacionados com a modulação de fase cruzada (MFC), conforme veremos com mais detalhes nos capítulos 3 e 4.

Capítulo 2

Óptica Não-Linear e a Propagação de Pulsos em Fibras Ópticas

Vamos apresentar os conceitos bem como alguns dos fenômenos relacionados com a óptica não-linear, entretanto, os efeitos imediatamente relacionados com a fenomenologia de que trata essa tese serão estudados nos capítulos posteriores. Para compreendermos os fenômenos não-lineares que ocorrem nas fibras ópticas dentro das quais propagam-se pulsos eletromagnéticos temos que considerar a Teoria Eletromagnética para propagação de onda em meios dispersivos não-lineares. A secção 2.1 introduz, de maneira muito breve, a óptica não-linear. Na secção 2.2 apresentamos as equações de Maxwell em meios dielétricos, tratando de conceitos importantes como os termos lineares e não-lineares da polarização induzida. A secção 2.3 considera a propagação de pulsos em meios não-lineares e dispersivos assumindo-se que a largura espectral do pulso é muito menor do que a frequência central da radiação incidente, conhecida como aproximação do envelope que varia lentamente. Concluimos o capítulo com a secção 2.4 que apresenta as equações não-lineares de Schrödinger (ENLS) obtidas através dos resultados apresentados nas secções anteriores. Portanto, o objetivo principal deste capítulo é obter a equação que governa

a propagação de pulsos ópticos em fibras ópticas.

2.1 Introdução a Óptica Não-Linear

A *Óptica Não-Linear* corresponde ao estudo dos fenômenos que ocorrem como consequência de mudanças nas propriedades ópticas de um material devido a presença de luz. De um modo geral, apenas luz proveniente de lasers são intensas o suficiente para modificar as propriedades ópticas de um meio.

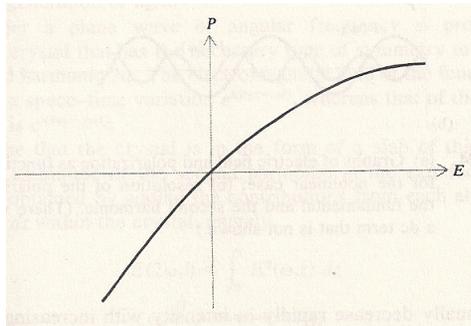


Figura 2.1: Curva que mostra a polarização em função do campo elétrico em um dielétrico não-linear. Obtida de [49].

Quando um feixe de luz se propaga através de um meio óptico, os campos eletromagnéticos tendem a criar uma polarização sobre os elétrons deste meio. Uma vez que os elétrons mais internos dos átomos estão fortemente ligados ao núcleo, a principal contribuição da polarização ocorre sobre os elétrons mais externos ou elétrons de valência. Caso o campo elétrico da luz incidente seja muito menor que o campo elétrico interatômico, em torno de $10^8 V/cm$, a polarização é proporcional ao campo elétrico aplicado. Por outro lado, se a intensidade da luz for comparável ao campo interatômico a relação entre a polarização e o campo elétrico aplicado não é mais uma relação linear, conforme ilustrado na Figura (2.1).

Podemos interpretar esse fenômeno assumindo que os elétrons estão presos ao núcleo de maneira análoga ao sistema clássico massa-mola e, portanto, para campos

ópticos de baixa intensidade as forças atuantes nessas molas (devidos aos dipólos elétricos gerados pela polarização) obedecem a *lei de Hooke* e, conseqüentemente, a resposta do meio é linear. Já quando tem-se campos com intensidades comparáveis aos campos interatômicos, essas molas não mais obedecem a lei de Hooke e a resposta do meio é não-linear. Conforme mencionado anteriormente, tais intensidades de campos podem ser obtidas através de lasers.

Os efeitos não-lineares observados incluem geração de harmônicos ópticos, produção de combinação de frequências, retificação óptica, efeito Kerr, instabilidade modulacional (IM), automodulação de fase (AMF), modulação de fase cruzada (MFC), para citar alguns [49, 57–68].

2.2 Equações de Maxwell e a Equação de Propagação do Pulso

2.2.1 Campos Macroscópicos e as Equações de Maxwell

Como em todos os fenômenos eletromagnéticos, a propagação de campos ópticos em fibras é regida pelas equações de Maxwell. A forma diferencial destas equações no Sistema Internacional de Unidades (SI) é

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{H} são os vetores campo elétrico e magnético, respectivamente. Além do mais, \mathbf{D} e \mathbf{B} são os campos deslocamento elétrico e indução magnética correspondentes as densidades de fluxo elétrico e magnético. O vetor de densidade de corrente \mathbf{J} e a densidade de carga livres ρ_l representam as fontes de campo eletromagnético. Para o caso das fibras ópticas, o meio não apresenta cargas livres, portanto $\mathbf{J} = 0$ e $\rho_l = 0$ [69–73]. Deste modo, as equações de Maxwell para as fibras ópticas se escrevem como

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.8)$$

As densidades de fluxo \mathbf{D} e \mathbf{B} surgem como resposta do meio aos campos elétricos e magnéticos que se propagam através da fibra óptica. Tais grandezas se relacionam do seguinte modo

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{B} + \mathbf{M}, \quad (2.10)$$

onde ϵ_0 é a permissividade do vácuo, μ_0 é a permeabilidade do vácuo, \mathbf{P} é a polarização elétrica induzida e \mathbf{M} é a polarização magnética induzida. Para meios não-magnéticos como as fibras ópticas $\mathbf{M} = 0$. Conseqüentemente $\mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{B}$.

Desta forma, podemos utilizar as equações de Maxwell para obter a equação de onda que descreve a propagação da luz nas fibras ópticas. Tomando o rotacional

da Eq. (2.5), obtemos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Porém, usando que $\mathbf{M} = 0$, a partir da Eq. (2.10), $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$.

Logo

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \nabla \times \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Considerando a Eq. (2.6), tem-se

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}. \quad (2.13)$$

A partir da Eq. (2.9), nota-se que

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t^2}, \quad (2.14)$$

usando $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, onde c é a velocidade da luz no vácuo, obtemos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (2.15)$$

Para completar nossa descrição, necessitamos de uma relação entre a polarização induzida \mathbf{P} e o campo elétrico \mathbf{E} . A resposta de qualquer meio dielétrico, e.g. as fibras ópticas, à luz torna-se não-linear para campos eletromagnéticos intensos. De um ponto de vista elementar, a origem desta resposta não-linear relaciona-se com o movimento não-harmônico dos elétrons ligados sujeitos à influência do campo aplicado conforme discutido na secção anterior. De modo que, em geral, a determinação de \mathbf{P} requer a utilização de uma abordagem que considere a Mecânica Quântica. Entretanto, para o caso no qual a frequência óptica situa-se longe da ressonância do meio (tal cenário corresponde ao caso de fibras ópticas com comprimento de onda

variando entre $0,5\mu\text{m} - 2\mu\text{m}$), a polarização total \mathbf{P} induzida pelos dipolos elétricos satisfaz a seguinte relação não-linear em \mathbf{E}

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \right) \quad (2.16)$$

onde ϵ_0 é a permissividade do vácuo e $\chi^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) é a susceptibilidade elétrica de i -ésima ordem que corresponde, em geral, a um tensor do tipo $(i + 1)$.

O termo linear da susceptibilidade elétrica $\chi^{(1)}$ corresponde a contribuição dominante para \mathbf{P} . De um modo geral, seus efeitos são inseridos através da parte linear $n(\omega)$ do índice de refração. Por sua vez, o termo de segunda ordem $\chi^{(2)}$ é responsável por efeitos não-lineares tal como geração de segundo harmônico (GSH). Contudo, os efeitos não-lineares devidos a $\chi^{(2)}$ estão presentes apenas em meios que não apresentam simetria de inversão macroscópica. Portanto, como a sílica apresenta tal simetria de inversão, temos

$$\chi^{(2)} = -\chi^{(2)} \Rightarrow \chi^{(2)} = 0, \quad (2.17)$$

de fato, todas as susceptibilidades de ordem par são nulas, ou seja, $\chi^{(2n)} = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ devido a razão idêntica.

Desta forma, os feitos não-lineares de mais baixa ordem correspondem, em geral, a susceptibilidade elétrica de terceira ordem $\chi^{(3)}$, que, por exemplo, é responsável pelos seguintes efeitos não-lineares: mistura de quatro ondas (MQO), geração de terceiro harmônico (GTH) e refração não-linear. De fato, grande parte dos efeitos não-lineares em fibras ópticas se originam da refração não-linear.

Portanto, se incluirmos apenas os efeitos não-lineares de terceira ordem, a polarização induzida pode ser escrita como a soma das contribuições linear e não-linear, de modo que

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) \quad (2.18)$$

onde a parte linear \mathbf{P}_L e a parte não-linear \mathbf{P}_{NL} estão relacionados com o campo elétrico, respectivamente, da seguinte forma

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) : \\ &\times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3, \end{aligned} \quad (2.20)$$

que são válidas assumindo-se que a resposta do meio é local, ou seja, a polarização em um determinado ponto é determinada apenas pelo campo elétrico que atua neste ponto.

Desta maneira, as Eqs. (2.15) - (2.20) constituem um formalismo para o estudo dos efeitos não-lineares de terceira ordem em fibras ópticas. Entretanto, devido a complexidade para lidarmos com esse conjunto de equações, teremos que fazer diversas simplificações. Conforme discutido anteriormente, a contribuição linear da polarização induzida é o termo dominante da Eq. (2.18) de sorte que vamos considerar a contribuição não-linear \mathbf{P}_{NL} como uma perturbação da contribuição linear \mathbf{P}_L , haja visto que nas fibras de sílica os efeitos não-lineares são relativamente fracos. Trataremos destas aproximações com mais detalhes na próxima secção.

2.3 Equação de Propagação do Pulso

Vamos simplificar um pouco a Eq. (2.15) usando

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}. \quad (2.21)$$

Para o caso da óptica linear de meios isotrópicos livre de cargas, o primeiro termo do lado direito da equação (2.21) se anula pois, da Eq. (2.7), $\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Entretanto, na óptica não-linear, este termo geralmente não se anula mesmo para materiais isotrópicos devido a relação mais geral entre \mathbf{D} e \mathbf{E} dada pela Eq. (2.9). Porém, para os casos de interesse, podemos desprezar este termo, especialmente quando lidamos com a *aproximação de envelope que varia lentamente* [57]. Deste modo, a equação de onda assume a forma

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}, \quad (2.22)$$

onde \mathbf{P}_L e \mathbf{P}_{NL} relacionam-se com o campo elétrico \mathbf{E} de acordo com (2.19) e (2.20), respectivamente.

2.3.1 Tratamento da Parte Não-Linear da EPP

Antes de resolvermos a Eq. (2.22), precisamos fazer várias simplificações. Conforme mencionamos, \mathbf{P}_{NL} é considerado como uma pequena perturbação de \mathbf{P}_L , uma vez que, na prática, os efeitos não-lineares alteram o índice de refração por um fator da ordem de 10^{-6} [39]. Embora tal alteração no índice de refração aparentemente seja desprezível, devido aos efeitos cumulativos ao longo de grandes distâncias (10 a 10.000 km), esta variação torna-se significativa. De fato, é essa pequena não-linearidade a principal responsável, por exemplo, pela formação dos *sólitons*. Além do mais, $\chi^{(3)}$ se relaciona com a resposta Raman do sistema que, por sua vez, possui origem vibracional. Vamos tratar com mais detalhes da resposta Raman nos capítulos seguintes.

Vamos admitir inicialmente que o campo elétrico é quase-monocromático, o

que significa que a largura espectral do sinal $\Delta\omega$ é pequena com relação a frequência central ω_0 desta onda, isto é $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$. Aproximação conhecida como *aproximação do envelope que varia lentamente*, podemos escrever os vetores de campo e de polarização como sendo o produto entre uma função que varia lentamente e um termo oscilatório da seguinte forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} [E(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega_0 t}] + \text{c.c.}, \quad (2.23)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}$ indica a direção de polarização, $E(\mathbf{r}, t)$ é uma função que varia lentamente com o tempo (com relação ao período óptico) e c.c. significa complexo conjugado.

As componentes linear e não-linear da polarização, P_L e P_{NL} , também podem ser escritas de maneira similar, logo

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} [P_L(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega_0 t}] + \text{c.c.}, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} [P_{NL}(\mathbf{r}, t)e^{-i\omega_0 t}] + \text{c.c.}. \quad (2.25)$$

Considerando-se que não há atraso na resposta não-linear do sistema, desprezamos as contribuições vibracionais da rede à susceptibilidade não-linear, para tanto vamos incluir na Eq. (2.20) os termos $\delta(t - t_1)\delta(t - t_2)\delta(t - t_3)$. Logo

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) : \\ &\times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_3) \delta(t - t_1) \delta(t - t_2) \delta(t - t_3) dt_1 dt_2 dt_3, \end{aligned} \quad (2.26)$$

deste modo

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(3)}(t) : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.27)$$

Vamos retornar a condição para o campo elétrico dada pela Eq. (2.23) para encontrarmos uma expressão para P_{NL} . Note que, a partir da Eq. (2.23), tem-se

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{x}} [E(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + E^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega_0 t}], \quad (2.28)$$

então

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4} \widehat{\mathbf{x}} \widehat{\mathbf{x}} [E(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + E^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega_0 t}] [E(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + E^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega_0 t}], \quad (2.29)$$

donde temos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4} \widehat{\mathbf{x}} \widehat{\mathbf{x}} (E^2 e^{-2i\omega_0 t} + E^{*2} e^{2i\omega_0 t} + 2|E|^2). \quad (2.30)$$

Podemos prosseguir de maneira análoga para determinar $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, portanto

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]^3 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \widehat{\mathbf{x}} \widehat{\mathbf{x}} \widehat{\mathbf{x}} \right) [E^2 e^{-2i\omega_0 t} + E^{*2} e^{2i\omega_0 t} + 2|E|^2] \\ &\times [E(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + E^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega_0 t}], \end{aligned} \quad (2.31)$$

o que implica

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]^3 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \widehat{\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{x}} \right) [E^3 e^{-i(3\omega_0)t} + E^{*3} e^{i(3\omega_0)t} \\
&+ EE^{*2} e^{i\omega_0 t} + 2|E|^2 E^* e^{i\omega_0 t} + E^* E^2 e^{-i\omega_0 t} + 2|E|^2 E e^{-i\omega_0 t}] \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \widehat{\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{x}} \right) [E^3 e^{-i(3\omega_0)t} + E^{*3} e^{i(3\omega_0)t} + 3|E|^2 (E e^{-i\omega_0 t} + E^* e^{i\omega_0 t})],
\end{aligned} \tag{2.32}$$

onde os termos relacionados com $e^{\pm i(3\omega_0)t}$ correspondem a geração de terceiro harmônico (GTH) que são desprezíveis devido a diferença de fase entre as frequências ω_0 e $3\omega_0$ (fato que veremos como mais detalhes quando tratarmos da automodulação de fase), portanto a polarização na frequência ω_0 é

$$\begin{aligned}
P_{NL} &\approx \frac{\epsilon_0 \chi_{\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{x}}^{(3)}}{4} (3|E|^2) \left(\frac{1}{2} \right) [E e^{-i\omega_0 t} + E^* e^{i\omega_0 t}] \\
&\approx \frac{3\epsilon_0 \chi_{\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{x}}^{(3)}}{4} |E(\mathbf{r}, t)|^2 E(\mathbf{r}, t) \\
&\approx \epsilon_0 \epsilon_{NL} E(\mathbf{r}, t),
\end{aligned} \tag{2.33}$$

onde a contribuição não-linear para a constante dielétrica é definida por

$$\epsilon_{NL} = \frac{3\epsilon_0 \chi_{\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{x}\mathbf{x}}^{(3)}}{4} |E(\mathbf{r}, t)|^2. \tag{2.34}$$

Além do mais, de modo semelhante temos que

$$P_L = \epsilon_0 \chi^{(1)} E(\mathbf{r}, t). \tag{2.35}$$

Para obtermos a equação que determina a evolução da amplitude $E(\mathbf{r}, t)$ que varia lentamente é mais conveniente trabalhar no domínio de Fourier pois, conforme veremos adiante, obtemos a conhecida equação de Helmholtz. A dificuldade jaz no

fato de que ϵ_{NL} é não-linear, observe a Eq. (2.34). Deste modo, do fato que o envelope varia lentamente no tempo e considerando a natureza perturbativa de P_{NL} , vamos assumir que é aproximadamente constante de modo que

$$\frac{\partial^2[\epsilon_{NL}E(\mathbf{r}, t)]}{\partial t^2} = \epsilon_{NL} \frac{\partial^2 E(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.36)$$

desta maneira podemos reescrever a Eq. (2.22) como

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \epsilon_0 \chi^{(1)} \frac{\partial^2 E(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{NL} \frac{\partial^2 E(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.37)$$

Definimos a transformada de Fourier de $E(\mathbf{r}, t)$ como

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{r}, t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt, \quad (2.38)$$

portanto

$$\nabla^2 \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{1}{c^2} \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega) (\omega)^2 = \mu_0 \epsilon_0 (\omega)^2 \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega) + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{NL} (\omega)^2 \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.39)$$

por brevidade vamos fazer $\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{E}$, e usando as Eq (1.14) e fazendo $k_0 = \omega/c$, assim

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{E} + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \tilde{E} + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{NL} \omega^2 \tilde{E} &= 0, \\ \nabla^2 \tilde{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \tilde{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{NL} \tilde{E} &= 0, \\ \nabla^2 \tilde{E} + \frac{\omega^2}{c^2} [1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) + \epsilon_{NL}] \tilde{E} &= 0, \\ \nabla^2 \tilde{E} + k_0^2 \epsilon(\omega) \tilde{E} &= 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

que é a equação de Helmholtz, onde

$$\epsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) + \epsilon_{NL}, \quad (2.41)$$

é a constante dielétrica cuja parte não-linear ϵ_{NL} é dada pela Eq. (2.34) e $\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)$ representa a transformada de Fourier de $\chi^{(1)}(t)$.

Como $\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)$ é, em geral, complexo, o mesmo ocorre para $\epsilon(\omega)$. Suas partes real e imaginária podem ser relacionadas com o índice de refração total \tilde{n} e o coeficiente de absorção total $\tilde{\alpha}$ usando a definição

$$\epsilon = \left(\tilde{n} + \frac{i\tilde{\alpha}}{2k_0} \right)^2, \quad (2.42)$$

com

$$\tilde{n} = n + n_2|E|^2, \quad (2.43)$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2|E|^2, \quad (2.44)$$

onde n_2 ¹ e α_2 representam o índice de refração não-linear e o coeficiente de absorção não-linear, respectivamente e n e α são fatores lineares correspondentes, dados por

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \Re[\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)], \quad (2.45)$$

$$n_2 = \frac{3}{8n} \Re(\chi_{xxxx}^{(3)}), \quad (2.46)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{nc} \Im(\tilde{\chi}^{(1)}), \quad (2.47)$$

$$\alpha_2 = \frac{3\omega_0}{4nc} \Im(\chi_{xxxx}^{(3)}). \quad (2.48)$$

¹Daqui por diante n_2 significa a parte não-linear do índice de refração. Não confundir com o índice de refração da casca em uma fibra óptica.

Observe que tanto \tilde{n} e $\tilde{\alpha}$ bem como ϵ_{NL} dependem da intensidade da radiação incidente. Além do mais, para fibras de sílica α_2 é desprezível [39, 57].

O índice de refração dado pela Eq. (2.43) é denominado de não-linearidade Kerr e será tratado com mais detalhes na secção (3.3) desta tese. Entretanto, para níveis de intensidade bastante elevados, a resposta não-linear de qualquer meio começa a saturar e a Eq. (2.43) necessita ser modificada por $\tilde{n}(|E|^2) = n + n_2 f(|E|^2)$, onde f é uma função de $|E|^2$ e, em geral, utiliza-se $f(|E|^2) = \frac{|E|^2}{1 + \Gamma|E|^2}$, Γ é o parâmetro de saturação. Embora não consideramos os efeitos de saturação diretamente nesta tese, no capítulo 5 delineamos algumas perspectivas de trabalhos futuros para incorporar estes efeitos.

2.4 Equação Não-Linear de Schrödinger

A equação (2.40) pode ser resolvida usando-se o método de separação das variáveis. Se assumirmos uma solução da forma

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z}, \quad (2.49)$$

onde \tilde{A} é uma função que varia lentamente com z , β_0 é o número de onda e $F(x, y)$ é a função de distribuição modal, conforme veremos adiante. Desta forma, substituindo a Eq. (2.49) na Eq. (2.40) obtemos

$$\begin{aligned}
& \nabla^2[F(x, y)\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)e^{i\beta_0 z}] + k_0^2\epsilon(\omega)F(x, y)\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)e^{i\beta_0 z} = 0, \\
& \tilde{A}(z, \omega - \omega_0)e^{i\beta_0 z} \left(\frac{\partial^2[F(x, y)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2[F(x, y)]}{\partial y^2} \right) \\
& + F(x, y)e^{i\beta_0 z} \left[\frac{\partial^2\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)}{\partial z^2} + 2i\beta_0 \frac{\partial\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)}{\partial z} - \beta_0^2\tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \right] \\
& + k_0^2\epsilon(\omega)F(x, y)\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)e^{i\beta_0 z} = 0, \tag{2.50}
\end{aligned}$$

desprezando-se o termo $\partial^2\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)/\partial z^2$ (devido a suposição que \tilde{A} varia lentamente com z , ou seja, $|\partial^2\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)/\partial z^2| \ll |\partial\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)/\partial z|$) e dividindo-se toda a equação por $F(x, y)\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)e^{i\beta_0 z}$, obtemos

$$\frac{1}{F} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \frac{2i\beta_0}{\tilde{A}} \frac{\partial\tilde{A}}{\partial z} + \epsilon(\omega)k_0^2 - \beta_0^2 = 0, \tag{2.51}$$

somando e subtraindo o termo $\tilde{\beta}^2$, temos as equações para $F(x, y)$ e $\tilde{A}(z, \omega)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\epsilon(\omega)k_0^2 - \tilde{\beta}^2] F = 0, \tag{2.52}$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial\tilde{A}}{\partial z} + (\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2)\tilde{A} = 0, \tag{2.53}$$

onde o número de onda $\tilde{\beta}$ é determinado resolvendo-se a equação de autoestado [Eq. (2.52)] para os modos possíveis na fibra. A constante dielétrica $\epsilon(\omega)$ nesta equação pode ser aproximada por

$$\epsilon = (n + \Delta n)^2 \approx n^2 + 2n\Delta n, \tag{2.54}$$

onde Δn é uma pequena perturbação dada por

$$\Delta n = n_2|E|^2 + \frac{i\tilde{\alpha}}{2k_0}, \quad (2.55)$$

que para fibras de sílica ($\alpha_2 \approx 0$) pode ser aproximado por

$$\Delta n = n_2|E|^2 + \frac{i\alpha}{2k_0}. \quad (2.56)$$

Usando a teoria de perturbação de primeira ordem [39], Δn não afeta a distribuição modal $F(x, y)$ e, portanto, $\epsilon \approx n^2$ na Eq. (2.52). Contudo, o autovalor $\tilde{\beta}$ se torna

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta, \quad (2.57)$$

com $\Delta\beta$ dada pela normalização

$$\Delta\beta = \frac{k_0 \int \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta n |F(x, y)|^2 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy}. \quad (2.58)$$

Aproximando o termo $\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2$ por $2\beta_0(\tilde{\beta} - \beta_0)$ na Eq. (2.53) e usando a Eq. (2.57), obtemos

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i[\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_0] \tilde{A} = 0. \quad (2.59)$$

Observe que, fisicamente, esta equação significa que cada componente espectral dentro do envelope do pulso adquire, durante a propagação ao longo da fibra, uma diferença de fase cuja magnitude depende tanto da intensidade quanto da frequência.

Retornemos a Eq. (1.46) - expansão em série de Taylor para $\beta(\omega)$ - e vamos usar novamente o fato de que o campo é quase-monocromático de modo que sua largura $\Delta\omega \ll \omega_0$, com isso podemos desprezar os termos de mais alta ordem (a

partir de β_3) naquela expansão. Assim

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i \left[(\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2 \beta_2}{2} + \Delta\beta \right] \tilde{A} = 0. \quad (2.60)$$

Vamos agora calcular $\Delta\beta$. Observe que, a partir da Eq. (2.56), $\Delta\beta$ incorpora os efeitos das perdas (α) e da não-linearidade (n_2) nas fibras e pode ser calculado da maneira que segue

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= k_0 \frac{\int \int_{-\infty}^{+\infty} (n_2 |E|^2 + i\alpha/2k_0) |F(x, y)|^2 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy}, \\ \Delta\beta &= n_2 k_0 \frac{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |E|^2 |F(x, y)|^2 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} + \frac{i\alpha}{2} \frac{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy}, \\ \Delta\beta &= \frac{n_2 \omega_0}{c} \frac{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 |F(x, y)|^4 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} + \frac{i\alpha}{2}, \\ \Delta\beta &= \frac{n_2 \omega_0}{c} |A|^2 \frac{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^4 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy} + \frac{i\alpha}{2}, \\ \Delta\beta &= \gamma |A|^2 + \frac{i\alpha}{2}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

onde usamos² a Eq. (2.49) para fazer $|E|^2 = |F(x, y)|^2 |A|^2$, $k_0 = \omega_0/c$ e o parâmetro não-linear γ é definido por

$$\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{ef}}, \quad (2.62)$$

onde A_{ef} é conhecido como a área efetiva do núcleo da fibra óptica e definido por

²De fato usamos a transformada inversa de Fourier desta equação. Observe também que $|A|^2 = |A(z, t)|^2$ por isso pode sair do integrando.

$$A_{ef} = \frac{(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^2 dx dy)^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, y)|^4 dx dy}. \quad (2.63)$$

Usando a Eq. (2.61) na Eq. (2.60), resulta

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i \left[(\omega - \omega_0) \beta_1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2 \beta_2}{2} + \gamma |A|^2 + \frac{i\alpha}{2} \right] \tilde{A} = 0. \quad (2.64)$$

Tomando a transformada inversa de Fourier dada por

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega, \quad (2.65)$$

e lembrando que, durante uma operação de transformada de Fourier, os termos $(\omega - \omega_0)$ e $(\omega - \omega_0)^2$ devem ser repostos pelos operadores diferenciais $i\partial/\partial t$ e $-\partial^2/\partial t^2$, respectivamente. Desta forma a equação resultante para $A(z, t)$ se torna

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{i\alpha}{2} A + \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \gamma |A|^2 A, \quad (2.66)$$

usando a Eq. (1.50), temos

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{\nu_g} \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{i\alpha}{2} A + \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \gamma |A|^2 A. \quad (2.67)$$

A equação (2.67) descreve a propagação de um pulso óptico ultra-curto e é geralmente referida como equação não-linear de Schrödinger (ENLS) uma vez que pode ser reduzida a tal forma intercambiando-se as variáveis z e t e fazendo-se demais alterações. Ela inclui os efeitos de perdas em fibras através do parâmetro α , os efeitos da dispersão cromática através de β_1 e β_2 bem como os efeitos da não-linearidade através de γ . Conforme discutido anteriormente, o pulso se propaga com a velocidade de grupo $\nu_g = 1/\beta_1$ enquanto os efeitos da dispersão da velocidade de

grupo (DVG) são governados por β_2 . O parâmetro da DVG β_2 pode ser positivo ou negativo dependendo se o comprimento de onda λ é maior ou menor do que o comprimento de onda de dispersão nula λ_D da fibra. No regime de dispersão anômalo ($\lambda > \lambda_D$), $\beta_2 < 0$ e a fibra pode suportar sólitons. Em fibras de sílica, $\beta_2 \approx 0,05ps^2/m$ na região do visível, entretanto se torna próximo de $-0,020ps^2/m$ para comprimentos de onda próximos de $1,5\mu m$. A mudança de sinal ocorre em torno de $1.3\mu m$.

Vamos definir T por

$$T = t - \frac{z}{\nu_g} = t - \beta_1 \nu_g, \quad (2.68)$$

onde T é medido em um referencial que se move com o pulso na velocidade de grupo ν_g (geralmente denominado de referencial atrasado).

Deste modo, temos que a Eq. (2.67) pode ser reescrita de forma simplificada como

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i\alpha}{2} A + \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma |A|^2 A, \quad (2.69)$$

onde os três termos do lado esquerdo desta equação governam, respectivamente, os efeitos de perdas em fibras, os efeitos de dispersão e os efeitos não-lineares para pulsos que se propagam dentro de fibras ópticas.

Capítulo 3

Efeitos Não-Lineares em Fibras Ópticas

Neste capítulo trataremos dos fenômenos não-lineares diretamente relacionados com o estudo inédito apresentado e discutido no capítulo 4. Na secção (3.1) discutimos os efeitos da DVG. Em seguida, na secção (3.2) tratamos da AutoModulação de Fase (AMF). Na secção (3.3) descrevemos o efeito Kerr eletroóptico. Na secção (3.4), estudamos a Instabilidade Modulacional (IM). Dedicamos a secção (3.5) ao estudo da Modulação de Fase Cruzada (MFC). Por fim, na secção (3.6), tratamos do efeito Raman.

3.1 Efeitos da Dispersão da Velocidade de Grupo

Dependendo da largura inicial T_0 e da potência de pico inicial ($\propto |E_0|^2$) do pulso incidente, tanto os efeitos dispersivos quanto os efeitos não-lineares podem ser dominantes ao longo da propagação pela fibra. É útil se introduzir dois comprimentos de escalas conhecidos como comprimento de dispersão L_D e comprimento não-linear L_{NL} . Através da relação dos valores de L_D , L_{NL} e do comprimento da L

da fibra, os pulsos podem se propagar de maneiras variadas.

O comprimento de dispersão L_D e o comprimento não-linear L_{NL} determinam os comprimentos de escala acima dos quais os efeitos dispersivos e não-lineares se tornam importantes para a evolução do pulso e são dados por

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}, \quad (3.1)$$

$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma|E_0|^2}. \quad (3.2)$$

Se o comprimento L da fibra for tal que $L \ll L_D$ e $L \ll L_{NL}$ ambos os efeitos não desempenham um papel importante durante a propagação. Este regime é particularmente útil para os sistemas de comunicações ópticas [39, 57].

Quando o comprimento da fibra $L \ll L_{NL}$ e $L \sim L_D$, a evolução do pulso é governada pela DVG e os efeitos não-lineares desempenham um papel relativamente desprezível. Esse regime de dispersão dominante é aplicável sempre que os parâmetros da fibra e do pulso satisfizerem [39]

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma|E_0|^2 T_0^2}{|\beta_2|} \ll 1. \quad (3.3)$$

Por outro lado, quando $L \ll L_D$ mas $L \sim L_{NL}$, a contribuição dos efeitos da dispersão é desprezível quando comparado com a contribuição não-linear. Neste caso, a evolução do pulso é regida pela automodulação de fase (AMF) que produz o alargamento do pulso. Fato que vamos tratar de forma mais aprofundada na próxima secção. Este regime de não-linearidade dominante é satisfeito se [39]

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma|E_0|^2 T_0^2}{|\beta_2|} \gg 1. \quad (3.4)$$

A situação torna-se mais interessante quando o comprimento da fibra L é

maior ou, ao menos, comparável tanto com L_D e L_{NL} . Deste modo, a dispersão e a não-linearidade agem juntas a medida que o pulso se propaga na fibra. A interação entre os efeitos da DVG e da AMF podem resultar em comportamentos qualitativamente diferentes dos esperados em situações onde DVG e AMF ocorrem isoladamente. No regime de dispersão anômalo ($\beta_2 < 0$), a fibra pode suportar sólitons. Já no regime de dispersão normal ($\beta_2 > 0$), os efeitos devidos a DVG e AMF podem ser usados para compressão do pulso [39].

3.1.1 Alargamento do Pulso Induzido pela Dispersão

Para estudar o efeito isolado da DVG sobre pulsos ópticos vamos tratar o meio como sendo linear fazendo $\gamma = 0$ na Eq. (2.69) e sem perdas ($\alpha = 0$). Deste modo temos a seguinte equação diferencial parcial linear

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2}. \quad (3.5)$$

Esta equação pode ser facilmente resolvida usando o método da transformada de Fourier. Se $\tilde{A}(z, \omega)$ é a transformada de Fourier de $A(z, T)$ de forma que

$$A(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(z, \omega) e^{-i\omega T} d\omega, \quad (3.6)$$

de onde obtemos a seguinte EDO

$$i \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \beta_2 \omega^2 \tilde{A}, \quad (3.7)$$

cujas soluções são

$$\tilde{A}(z, \omega) = \tilde{A}(0, \omega) e^{\frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 z}. \quad (3.8)$$

Substituindo-se a Eq. (3.8) na Eq. (3.6), obtemos

$$A(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(0, \omega) e^{(\frac{i}{2}\beta_2\omega^2 z - i\omega T)} d\omega, \quad (3.9)$$

onde $\tilde{A}(0, \omega)$ é a transformada de Fourier do campo incidente em $z = 0$ e é obtido usando

$$\tilde{A}(0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(0, T) e^{i\omega T} dT. \quad (3.10)$$

A Eq. (3.8) mostra que a DVG muda a fase de cada componente espectral do pulso por uma quantidade que depende tanto do valor da frequência quanto da distância propagada. Embora essa mudança de fase não afete o espectro do pulso, ela pode modificar o formato do pulso.

Pulsos Gaussianos

As Eqs. (3.9) e (3.10) podem ser utilizadas para pulsos de qualquer formato. Como exemplo do alargamento de pulsos devido a DVG, vamos usá-las para o caso de um pulso Gaussiano para o qual o campo incidente é da forma

$$A(0, T) = e^{-\frac{T^2}{2T_0^2}}. \quad (3.11)$$

Substituindo a Eq. (3.11) em (3.9) e (3.10) e efetuando a integração, obtemos

$$A(z, T) = \frac{T_0}{(T_0^2 - i\beta_2 z)^{1/2}} e^{-\left(\frac{T^2}{2(T_0^2 - i\beta_2 z)}\right)}. \quad (3.12)$$

Portanto, um pulso Gaussiano mantém seu formato durante a propagação porém sua largura T_1 aumenta com z de acordo com

$$T_1(z) = T_0[1 + (z/L_D)^2]^{1/2}. \quad (3.13)$$

Este alargamento devido a dispersão pode ser compreendido recordando (da secção 1.8) que diferentes componentes de frequência de um pulso viajam com velocidades ligeiramente diferentes ao longo da fibra devido a DVG. Ou seja, as componentes vermelhas viajam com maior velocidade do que as componentes azuis no regime de dispersão normal ($\beta_2 > 0$), enquanto que ocorre o oposto no regime de dispersão anômalo ($\beta_2 < 0$). Qualquer atraso temporal na chegada das diferentes componentes espectrais resulta no alargamento do pulso.

3.2 Automodulação de Fase

Uma manifestação interessante da dependência do índice de refração com a intensidade do feixe incidente em meios ópticos não-lineares ocorre através da AutoModulação de Fase (AMF), um fenómeno que resulta no alargamento espectral dos pulsos ópticos.

3.2.1 Alargamento Espectral Induzido pela AMF

Vamos, inicialmente, estudar o caso da AMF desprezando os efeitos da DVG que equivale ao caso onde $L_D \gg L > L_{NL}$ para uma fibra de comprimento L . Deste modo, no limite que $\beta_2 = 0$ e $\alpha = 0$ tem-se

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = -\gamma |A|^2 A. \quad (3.14)$$

Assumindo que $|A(z, T)|$ permanece constante no tempo (onda CW), após

o pulso percorrer uma distância L temos

$$A(L, T) = A(0, T)e^{\gamma|A(0, T)|^2 L}, \quad (3.15)$$

onde $A(0, T)$ é a amplitude do campo em $z = 0$. Usando a Eq. (3.2) pode-se escrever a Eq. (3.15) como

$$A(L, T) = A(0, T)e^{i\phi_{NL}(L, T)}, \quad (3.16)$$

onde $\phi_{NL}(L, T) = L/L_{NL}$.

Desta forma, a Eq. (3.16) mostra que a AMF equivale a uma mudança de fase que depende da intensidade do pulso e seu formato permanece inalterado. Note que ϕ_{NL} cresce com o comprimento L da fibra.

O alargamento espectral induzido pela AMF é consequência da dependência temporal de ϕ_{NL} uma vez que, quando a fase varia no tempo, a frequência óptica instantânea difere ao longo do pulso de seu valor central ω_0 , e a diferença $\delta\omega$ é dada por

$$\delta\omega(T) = -\frac{\partial\phi_{NL}}{\partial T} = -\left(\frac{L}{L_{NL}}\right)\frac{\partial}{\partial T}|A(0, T)|^2, \quad (3.17)$$

onde o sinal de menos é devido a escolha de fator $e^{-i\omega_0 t}$ na Eq. (2.23).

Portanto, novas componentes de frequências são geradas continuamente a medida que o pulso se propaga ao longo da fibra o que resulta no alargamento do espectro em torno de sua largura inicial T_0 . No caso de pulsos ultracurtos intensos, o espectro alargado pode se estender em torno de 100 THz ou mais, especialmente quando a AMF é acompanhada por outros processos não-lineares tal como o espalhamento Raman estimulado (ERE).

De um modo geral, o espectro alargado consiste de vários picos de sorte que os picos, mais externos (mais afastados da frequência central) são os mais intensos.

Fato ilustrado na Figura (3.1) obtida de um experimento no qual um pulso de 35ps a 532 nm com potência de pico de 235 W se propagou em uma fibra de 93,5 m.

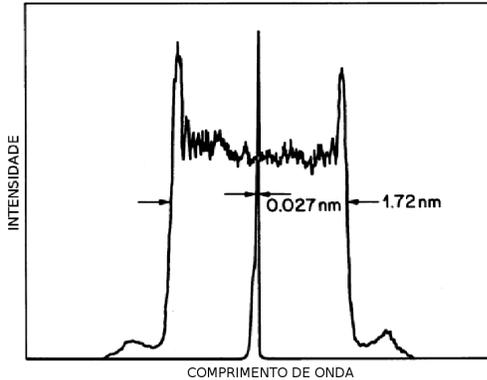


Figura 3.1: Espectro de saída de um pulso de entrada de 35ps que mostra o alargamento espectral induzido por AMF. O espectro inicial do pulso também é apresentado para comparação. Figura obtida a partir de [39].

3.3 Efeito Kerr EletroÓptico

Quando um material opticamente isotrópico é submetido a um campo elétrico intenso, ele apresenta dois índices de refração (diz-se que o meio se torna birrefringente). Esse efeito foi descoberto em 1875 por John Kerr (1824-1907) e é denominado de efeito Kerr eletroóptico. Observa-se o efeito Kerr tanto em sólidos quanto em líquidos e é atribuído ao alinhamento das moléculas devido a presença do campo elétrico [49].

Deste modo, a substância se comporta opticamente como se fosse um cristal uniaxial no qual o campo elétrico define o eixo óptico. A magnitude deste efeito é proporcional ao *quadrado da intensidade do campo elétrico*, assim

$$\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp} = K|E|^2\lambda_0, \quad (3.18)$$

onde K é a constante Kerr do meio, n_{\parallel} é o índice de refração na direção do campo elétrico \mathbf{E} aplicado, n_{\perp} é o índice de refração nas direções perpendiculares a \mathbf{E} e λ_0 é o comprimento de onda no vácuo.

3.4 Instabilidade Modulacional

Os efeitos da AMF discutidos na secção (3.2) descrevem apenas a propagação de pulsos relativamente longos ($T_0 > 100$ ps) para os quais o comprimento de dispersão L_D é muito maior do que o comprimento L da fibra e o comprimento não-linear L_{NL} . Quando o pulso se torna mais curto, o comprimento de dispersão pode ser comparado ao comprimento da fibra, deste modo devemos considerar simultaneamente os efeitos da DVG e da AMF.

Novas características surgem da interação entre os efeitos dispersivos e os efeitos não-lineares. No regime de dispersão anômolo ($\beta_2 < 0$) de uma fibra óptica, os dois efeitos podem cooperar de tal modo que o pulso se propaga como um sólito óptico. Já no regime normal ($\beta_2 > 0$), a AMF e a DVG podem ser utilizadas para compressão de pulsos [39].

Observa-se em diversos sistemas não-lineares uma instabilidade que resulta na modulação de uma solução estacionária como consequência da relação entre os efeitos dispersivos e não-lineares do meio. Esse fenômeno denomina-se Instabilidade Modulacional (IM) e tem sido estudado e aplicado em áreas como Física de plasma, dinâmica de fluidos, óptica não-linear, entre outras [37–39, 75–79].

IM se refere ao crescimento exponencial de uma pequena perturbação em um meio, podendo quebrar uma onda contínua ou quase-contínua em um trem de pulsos ultracurtos tipo sólitons, que se propagam sem experimentar distorção. No contexto das fibras ópticas a dispersão observada corresponde a DVG e os efeitos não-lineares são do tipo Kerr.

Desprezando-se as perdas na fibra, a equação de propagação¹ para uma onda contínua dentro de uma fibra com resposta não-linear instantânea é descrita pela equação não-linear de Schrödinger (ENLS), obtida a partir da Eq. (2.69)

$$i\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \gamma |E|^2 E, \quad (3.19)$$

onde $E = E(z, t)$ descreve a amplitude do envelope do campo elétrico, β_2 é o parâmetro da dispersão da velocidade de grupo (DVG) e γ é o coeficiente não-linear responsável pela automodulação de fase (AMF) dado pelas Eqs. (2.62) e (2.63).

O primeiro termo do lado direito da equação (3.19) representa a DVG do pulso, que é responsável por alargar o pulso óptico. O segundo termo corresponde ao efeito Kerr não-linear, que pode comprimir o pulso. Portanto, quando os efeitos de DVG e AMF apresentam exatamente as mesmas contribuições cancelando as distorções no pulso, um sóliton óptico pode ser gerado sem sofrer alterações em seu formato.

Para o caso de uma radiação contínua, a amplitude $E(z, t)$ permanece constante no tempo. Deste modo, a solução estacionária é

$$E^{cw} = E(0, 0)e^{i\phi_{NL}}, \quad (3.20)$$

onde $E(0, 0)$ corresponde a potência incidente do feixe e $\phi_{NL} = \gamma |E(0, 0)|^2 z$ é o incremento de fase não-linear induzido pela AMF.

A equação (3.20) equivale fisicamente a dizer que a luz CW deve se propagar através da fibra sem alterações, exceto pelo fato de adquirir um deslocamento de fase que depende da intensidade do feixe. Obviamente, caso tivéssemos considerado as perdas na fibra, teríamos a presença das alterações correspondentes.

¹Daqui por diante vamos denotar o envelope que varia lentamente no tempo por E para que tenhamos notação idêntica a utilizada no capítulo 4, onde apresentamos os resultados inéditos. Além disso, t representa T .

3.4.1 Análise da Estabilidade Linear

Contudo, cabe ainda analisar se a solução estacionária dada pela Eq. (3.20) é estável com relação a pequenas perturbações. Para tal, perturbamos a solução CW do seguinte modo

$$E^{cw} = [E(0, 0) + e(z, t)]e^{i\phi_{NL}}, \quad (3.21)$$

e analisamos a evolução temporal desta pequena perturbação $e(z, t)$ usando uma análise de estabilidade linear. Note que $e(z, t)$ pode ser complexo. Por brevidade vamos fazer $E(0, 0) = E_0$ (e assumiremos que $E_0 \in \Re$).

Substituindo-se a Eq. (3.21) em (3.19), obtemos

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial z} \{ [E_0 + e(z, t)] e^{i\gamma |E_0|^2 z} \} &= \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ [E_0 + e(z, t)] e^{i\gamma |E_0|^2 z} \} \\ &\quad - \gamma | [E_0 + e(z, t)] e^{i\gamma |E_0|^2 z} |^2 \{ [E_0 + e(z, t)] e^{i\gamma |E_0|^2 z} \}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

como $| [E_0 + e(z, t)] e^{i\gamma |E_0|^2 z} |^2 = (E_0 + e)(E_0 + e^*) = |E_0|^2 + (e + e^*)E_0 + e^*e$, podemos desprezar $e^*e = |e|^2 \ll |E_0|^2$, onde e^* é o conjugado complexo de e , logo

$$\begin{aligned} i \frac{\partial e}{\partial z} e^{i\gamma |E_0|^2 z} + i(E_0 + e)(i\gamma |E_0|^2) e^{i\gamma |E_0|^2 z} &= \\ \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} e^{i\gamma |E_0|^2 z} - \gamma(e + e^*)E_0(E_0 + e) e^{i\gamma |E_0|^2 z} & \end{aligned} \quad (3.23)$$

que, cancelando-se os termos comuns, e novamente desprezando termos proporcionais a $e^*e = |e|^2$, resulta em

$$i \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \gamma(e + e^*)|E_0|^2 \quad (3.24)$$

Note que a Eq. (3.24) é uma equação linear e pode ser facilmente resolvida no domínio de frequência através das Transformadas de Fourier definidas por

$$e_j(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikz} e^{i\Omega t} e_j(\Omega, k) dk d\Omega, \quad (3.25)$$

$$e_j^*(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikz} e^{i\Omega t} e_j^*(-\Omega, -k) dk d\Omega. \quad (3.26)$$

onde k e Ω correspondem ao número de onda e a frequência de modulação, respectivamente.

Aplicando-se as Eqs. (3.25) e (3.26) em (3.24), obtemos

$$ke(\Omega, k) = -\Omega^2 \frac{\beta_2}{2} e(\Omega, k) - \gamma[e(\Omega, k) + e^*(-\Omega, -k)]|E_0|^2, \quad (3.27)$$

por outro lado, o complexo conjugado da Eq. (3.24) nos fornece

$$-i \frac{\partial e^*}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 e^*}{\partial t^2} - \gamma(e + e^*)|E_0|^2, \quad (3.28)$$

e aplicando novamente as Eqs. (3.25) e (3.26), obtém-se

$$-ke^*(-\Omega, -k) = -\Omega^2 \frac{\beta_2}{2} e^*(-\Omega, -k) - \gamma[e(\Omega, k) + e^*(-\Omega, -k)]|E_0|^2. \quad (3.29)$$

As equações (3.27) e (3.29) fornecem um sistema de equações para $e(\Omega, k)$ e $e^*(-\Omega, -k)$

$$\left(k + \Omega^2 \frac{\beta_2}{2} + \gamma |E_0|^2\right) e(\Omega, k) = -\gamma e^*(-\Omega, -k) |E_0|^2, \quad (3.30)$$

$$\left(-k + \Omega^2 \frac{\beta_2}{2} + \gamma |E_0|^2\right) e^*(-\Omega, -k) = -\gamma e(\Omega, k) |E_0|^2, \quad (3.31)$$

que nos apresenta solução não-trivial quando

$$\left(k + \Omega^2 \frac{\beta_2}{2} + \gamma |E_0|^2\right) \times \left(-k + \Omega^2 \frac{\beta_2}{2} + \gamma |E_0|^2\right) = \gamma^2 |E_0|^4, \quad (3.32)$$

ou seja, quando satisfizer a relação de dispersão

$$k^2 = \frac{\Omega^2 \beta_2^2}{4} \left(\Omega^2 + \frac{4\gamma |E_0|^2}{\beta_2}\right), \quad (3.33)$$

que pode ser escrita alternativamente como

$$k = \pm \frac{1}{2} |\beta_2 \Omega| [\Omega^2 + \text{sgn}(\beta_2) \Omega_c^2]^{1/2}, \quad (3.34)$$

onde $\text{sgn}(\beta_2) = \pm 1$ dependendo do sinal de β_2 e

$$\Omega_c^2 = \frac{4\gamma |E_0|^2}{|\beta_2|} = \frac{4}{|\beta_2| L_{NL}}. \quad (3.35)$$

De fato, os reais valores do número de onda e da frequência da solução perturbada são, respectivamente, $\beta_0 \pm k$ e $\omega_0 \pm \Omega$. Conforme veremos adiante, as duas diferentes componentes de frequência presentes simultaneamente $\omega_0 - \Omega$ e $\omega_0 + \Omega$ correspondem ao surgimento de duas bandas laterais no espectro do sinal quando ocorre instabilidade modulacional (IM).

A relação de dispersão dada pela Eq. (3.34) revela que a estabilidade da solução estacionária depende se a luz experimenta DVG normal ou anômala dentro da fibra. No caso de DVG normal ($\beta_2 > 0$), o número de onda $k \in \Re, \forall \Omega$, portanto a solução estacionária é estável para pequenas perturbações. Por outro lado, no caso de DVG anômala ($\beta_2 < 0$), k se torna complexo para $|\Omega| < \Omega_c$, e a perturbação $e(z, t)$ cresce exponencialmente com z . Esta instabilidade é denominada de Instabilidade Modulacional (IM) pois corresponde a uma modulação temporal espontânea do feixe CW e o transforma em um trem de pulsos.

3.4.2 Espectro de Ganho

Devido ao termo e^* na Eq. (3.24), as componentes de Fourier nas frequências Ω e $-\Omega$ são acopladas, portanto devemos considerar a solução de $e(z, t)$ como sendo

$$e(z, t) = e_1 e^{i(kz - \Omega t)} + e_2 e^{-i(kz - \Omega t)}, \quad (3.36)$$

e, conforme mencionado anteriormente, k e Ω são, respectivamente, o número de onda e a frequência da perturbação.

A parte real de k indica que o onda sempre se propaga com periodicidade $Z = \frac{2\pi}{\Re\{k\}}$. A parte imaginária de k , por sua vez, mostra que, durante a propagação, a amplitude da propagação cresce com a distância z percorrida na fibra. Ou seja

$$\begin{aligned} \frac{|e(z, 0)|}{|e(0, 0)|} &= e^{g(\Omega)z}, \\ \frac{|e(z, 0)|}{|e(0, 0)|} &= \frac{|e_1 e^{ikz} + e_2 e^{-ikz}|}{|e_1 + e_2|} \approx \frac{|e_1 + e_2| e^{\Im\{k\}z}}{|e_1 + e_2|} = e^{\Im\{k\}z}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

portanto $g(\Omega) = \Im\{k\}$. Em termos do ganho na intensidade da perturbação após

uma distância z de propagação, temos

$$\frac{|e(z, 0)|^2}{|e(0, 0)|^2} = (e^{g(\Omega)z})^2, \quad (3.38)$$

assim

$$g(\Omega) = 2\Im\{k\}. \quad (3.39)$$

O ganho existe somente se $|\Omega| < \Omega_c$ e é dado, a partir da Eq. (3.34), por

$$g(\Omega) = |\beta_2\Omega|(\Omega_c^2 - \Omega)^{1/2}. \quad (3.40)$$

A Figura (3.2) mostra o espectro de ganho $g(\Omega)$ para três valores da intensidade de entrada do sinal utilizando-se valores dos parâmetros apropriados para fibras de sílica para comprimentos de onda em torno de $1,55\mu\text{m}$. Note que o espectro de ganho é simétrico com relação a reta $\Omega = 0$ de modo que $g(0) = 0$.

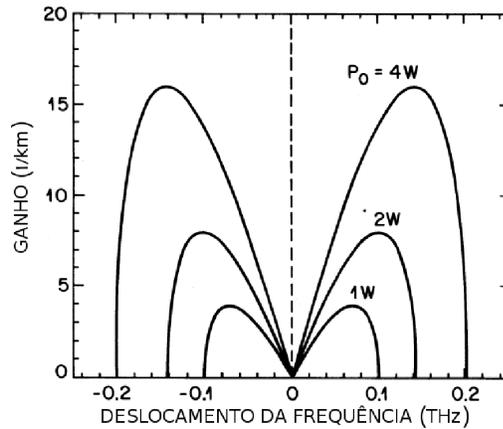


Figura 3.2: Espectro de ganho da instabilidade modulacional para três valores da intensidade de entrada $P_0 = |E_0|^2$ para uma fibra óptica com $\beta_2 = -20 \text{ ps}^2/\text{m}$ e $\gamma = 2\text{W}^{-1}/\text{m}$. Figura obtida a partir de [39].

O ganho se torna máximo para dois valores da frequência

$$\Omega_{\max} = \pm \frac{\Omega_c}{\sqrt{2}} = \pm \left(\frac{2\gamma|E_0|^2}{|\beta_2|} \right)^2, \quad (3.41)$$

cujo valor máximo correspondente do ganho equivale a

$$g_{\max} \equiv g(\Omega_{\max}) = \frac{1}{2}|\beta_2|\Omega_c = 2\gamma|E_0|^2, \quad (3.42)$$

onde usamos a Eq. (3.35) para relacionar Ω_c com $|E_0|^2$. Observe que, neste caso, o valor de pico do ganho é independente do parâmetro da DVG, β_2 , e cresce linearmente com a intensidade incidente.

3.5 Modulação de Fase Cruzada

Até o momento, assumimos que apenas uma onda eletromagnética se propaga dentro de uma fibra óptica. Neste momento vamos lidar com o caso de dois campos ópticos com diferentes comprimentos de onda propagando-se simultaneamente dentro de fibras ópticas, uma vez que um feixe interage indiretamente com os outros através das não-linearidade da fibra. Tal interação pode ser responsável pela geração de novos pulsos sob condições apropriadas através de fenômenos como espalhamento Raman estimulado (ERE), espalhamento de Brillouin, geração de harmônico e mistura de quatro ondas (MQO).

Outro fenômeno importante resultante dessa interação é o acoplamento dos dois campos através da modulação de fase cruzada (MFC). Neste fenômeno não há transferência de energia entre os feixes.

MFC ocorre devido ao fato de que o índice de refração efetivo percebido por um dos feixes ópticos em um meio não-linear, como por exemplo em uma fibra óptica, não depende apenas da intensidade do feixe referido mas também da intensidade do outro feixe copropagante. O acoplamento devido a MFC pode resultar em diversos fenômenos não-lineares.

3.5.1 Equações Não-Lineares de Schrödinger Acopladas

Vamos estender a teoria apresentada no capítulo 2 para o caso de dois pulsos com diferentes frequências propagando-se simultaneamente dentro de uma fibra óptica com o uso de equações não-lineares de Schrödinger acopladas. Tais equações serão utilizadas para discutir os efeitos da MFC sobre a IM. De um modo geral, os pulsos podem apresentar diferença tanto em suas frequências quanto em suas polarizações [39]. Vamos, por simplicidade, considerar o caso no qual os dois campos ópticos (com comprimento de onda diferentes) são polarizados linearmente ao longo do eixo principal da fibra.

Conforme tratamos anteriormente, para o caso de pulsos quase-monocromáticos, é útil separar a parte do campo elétrico que varia rapidamente da parte que varia lentamente escrevendo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} [E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t}] + \text{c.c.}, \quad (3.43)$$

onde $\hat{\mathbf{x}}$ é o versor polarização, ω_1 e ω_2 são as frequências dos dois pulsos. E_1 e E_2 são as amplitudes correspondentes, e assume-se que estas variam lentamente com o tempo quanto comparadas com o período óptico.

A evolução destas amplitudes é governada pela Eq. (2.22). Além disso, podemos calcular P_{NL} através da Eq. (2.27). Usando que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} [E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + E_1^* e^{i\omega_1 t} + E_2^* e^{i\omega_2 t}], \quad (3.44)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4}\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{x}}\{E_1^2e^{-i2\omega_1t} + E_2^2e^{-i2\omega_2t} + 2E_1E_2e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} \\
&\quad + (E_1^*)^2e^{i2\omega_1t} + (E_2^*)^2e^{i2\omega_2t} + 2E_1^*E_2^*e^{i(\omega_1+\omega_2)t} \\
&\quad + 2[|E_1|^2 + |E_2|^2 + E_2^*E_1e^{i(\omega_2-\omega_1)t} + E_2E_1^*e^{i(\omega_1-\omega_2)t}]\}, \quad (3.45)
\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]^3 &= \frac{1}{4}\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}\widehat{\mathbf{x}}\right)\{E_1^3e^{-i3\omega_1t} + E_1E_2^2e^{-i(\omega_1+2\omega_2)t} + 2E_1^2E_2e^{-i(2\omega_1+\omega_2)t} \\
&\quad + E_1^*|E_1|^2e^{i\omega_1t} + E_1(E_2^*)^2e^{i(2\omega_2-\omega_1)t} + 2|E_1|^2E_2^*e^{i\omega_2t} \\
&\quad + 2(|E_1|^2 + |E_2|^2)E_1e^{-i\omega_1t} + E_2^*E_1^2e^{i(\omega_2-2\omega_1)t} + E_2|E_1|^2e^{-i\omega_2t} \\
&\quad + E_2^3e^{-i3\omega_2t} + E_1^2E_2e^{-i(2\omega_1+\omega_2)t} + 2E_1E_2^2e^{-i(\omega_1+2\omega_2)t} \\
&\quad + E_2^*|E_2|^2e^{i\omega_2t} + E_2(E_1^*)^2e^{i(2\omega_1-\omega_2)t} + 2|E_2|^2E_1^*e^{i\omega_1t} \\
&\quad + 2(|E_1|^2 + |E_2|^2)E_2e^{-i\omega_2t} + E_1^*E_2^2e^{i(\omega_1-2\omega_2)t} + E_1|E_2|^2e^{-i\omega_1t} \\
&\quad + (E_1^*)^3e^{i3\omega_1t} + E_1^*(E_2^*)^2e^{i(\omega_1+2\omega_2)t} + 2(E_1^*)^2E_2^*e^{i(2\omega_1+\omega_2)t} \\
&\quad + E_1|E_1|^2e^{-i\omega_1t} + E_1^*E_2^2e^{i(\omega_1-2\omega_2)t} + 2|E_1|^2E_2^*e^{-i\omega_2t} \\
&\quad + 2(|E_1|^2 + |E_2|^2)E_1^*e^{i\omega_1t} + E_2(E_1^*)^2e^{i(2\omega_1-\omega_2)t} + E_2^*|E_1|^2e^{i\omega_2t} \\
&\quad + (E_2^*)^3e^{i3\omega_2t} + E_1^2E_2^*e^{i(\omega_2-2\omega_1)t} + 2E_1^*(E_2^*)^2e^{i(\omega_1+2\omega_2)t} \\
&\quad + E_2|E_2|^2e^{-i\omega_2t} + E_2^*(E_1^*)^2e^{i(2\omega_1+\omega_2)t} + 2|E_2|^2E_1e^{-i\omega_1t} \\
&\quad + 2(|E_1|^2 + |E_2|^2)E_2^*e^{i\omega_2t} + E_1(E_2^*)^2e^{i(2\omega_2-\omega_1)t} + E_1^*|E_2|^2e^{i\omega_1t}\}, \quad (3.46)
\end{aligned}$$

desprezando-se os termos proporcionais a $e^{\pm i3\omega_j t}$ e $e^{\pm i(\omega_j+2\omega_{3-j})t}$, com $j = 1, 2$, que estão associados, respectivamente, com a geração de terceiro harmônico (GTH) e

geração de soma de frequências, uma vez que apresentam uma diferença de fase elevada com as frequências ω_1 e ω_2 , e usando a Eq. (2.27) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{x}} [P_{NL}(\omega_1) e^{-i\omega_1 t} + P_{NL}(\omega_2) e^{-i\omega_2 t} \\ &\quad + P_{NL}(2\omega_1 - \omega_2) e^{-i(2\omega_1 - \omega_2)t} + P_{NL}(2\omega_2 - \omega_1) e^{-i(2\omega_2 - \omega_1)t}] \\ &\quad + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde

$$P_{NL}(\omega_1) = \chi_{\text{ef}}(|E_1|^2 + 2|E_2|^2)E_1, \quad (3.48)$$

$$P_{NL}(\omega_2) = \chi_{\text{ef}}(|E_2|^2 + 2|E_1|^2)E_2, \quad (3.49)$$

$$P_{NL}(2\omega_1 - \omega_2) = \chi_{\text{ef}}E_1^2 E_2^*, \quad (3.50)$$

$$P_{NL}(2\omega_2 - \omega_1) = \chi_{\text{ef}}E_2^2 E_1^*, \quad (3.51)$$

de sorte que χ_{ef} representa um parâmetro não-linear efetivo e é dado por

$$\chi_{\text{ef}} = \frac{3\epsilon_0 \chi_{\text{xxxx}}^{(3)}}{4}. \quad (3.52)$$

Através da Eq. (3.47) podemos entender a origem da MFC. A polarização linear induzida apresenta termos que oscilam nas novas frequências $2\omega_1 - \omega_2$ e $2\omega_2 - \omega_1$ e resultam do fenômeno da mistura de quatro ondas (MQO)[39]. Além do que, quando desprezamos os efeitos da MQO obtemos equações não-lineares de Schrödinger acopladas incoerentemente [74]. Na prática, estas frequências podem ser desprezadas uma vez que também não satisfazem a condição de casamento de fase, assim apenas os termos $P_{NL}(\omega_j)$ ($j = 1, 2$) contribuem para o termo não-linear do índice de refração da seguinte forma

$$P_{NL}(\omega_j) = \epsilon_0 \epsilon_j^{NL} E_j, \quad (3.53)$$

combinando com a contribuição linear, tem-se que a polarização total induzida é

$$P(\omega_j) = \epsilon_0 \epsilon_j E_j, \quad (3.54)$$

onde

$$\epsilon_j = \epsilon_j^L + \epsilon_j^{NL} = (n_j^L + \Delta n_j)^2, \quad (3.55)$$

n_j^L é a parte linear do índice de refração e Δn_j é a mudança induzida pelos efeitos da não-linearidade de terceira ordem. Usando novamente a aproximação que $\Delta n_j \ll n_j$, temos que a parte não-linear do índice de refração é dada por

$$\Delta n_j \approx n_2 (|E_j|^2 + 2|E_{3-j}|^2), \quad (3.56)$$

com n_2 dado pela Eq. (2.46) e assumindo que $n_1^L \approx n_2^L \approx n$.

A equação (3.56) revela que o índice de refração percebido por um campo óptico dentro de uma fibra não depende exclusivamente da intensidade deste feixe particular mas também da intensidade do campo copropagante. A medida que o campo se propaga na fibra adquire uma mudança de fase não-linear dada por

$$\phi_j^{NL}(z) = (\omega_j/c) \Delta n_j z = n_2 (\omega_j/c) (|E_j|^2 + 2|E_{3-j}|^2) z, \quad (3.57)$$

com $j = 1, 2$. O primeiro termo associado com $|E_j|^2$ é responsável pela AMF e o segundo termo resulta da modulação de fase de uma das ondas devido a onda copropagante e é responsável pela MFC. Note que, devido ao fator 2, a MFC é duas vezes mais eficiente que a AMF para o caso particular de mesma intensidade dos feixes. Tal fenômeno foi observado experimentalmente em fibras ópticas em 1984

através da propagação de dois pulsos CW em uma fibra de 15 km de comprimento [39].

As equações de propagação para os dois pulsos podem ser obtidas seguindo os procedimentos descritos no capítulo 2. Vamos assumir novamente que os efeitos não-lineares não alteram, de forma significativa, os modos da fibra de sorte que os campos $\mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t)$ podem ser fatorados de acordo com a Eq. (2.49). Assim, as equações para os envelopes E_1 e E_2 que variam lentamente são dadas pelas seguintes equações acopladas

$$i\frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{i}{v_{g1}}\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{1}{2}\beta_1\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - \gamma_1(|E_1|^2 + 2|E_2|^2)E_1, \quad (3.58)$$

$$i\frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{i}{v_{g2}}\frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} - \gamma_2(2|E_1|^2 + |E_2|^2)E_2, \quad (3.59)$$

onde ν_{gj} representa a velocidade de grupo do j -ésimo feixe e $\beta_j = \frac{d\nu_{gj}}{d\omega}$ é o coeficiente de dispersão correspondente. A não-linearidade é incluída através do parâmetro γ_j definido por

$$\gamma_j = \frac{n_2\omega_j}{cA_{\text{ef}}}, \quad (3.60)$$

que é responsável pela AMF e MFC.

As equações (3.58) e (3.59) modelam o caso no qual duas ondas CW com diferentes frequências propagam-se simultaneamente em uma fibra óptica. Vimos na secção (3.4) que a IM não pode ocorrer no regime de DVG normal. Conforme veremos adiante, o acoplamento induzido pela MFC proporciona IM mesmo no regime de dispersão normal $\beta_j > 0$.

3.5.2 IM Induzida pela MFC

Faremos aqui uma análise semelhante a que foi apresentada na secção (3.4.1). As principais diferenças residem no fato de que o acoplamento é mais intenso devido aos termos associados com a MFC e os parâmetros β_j e γ_j são diferentes para os dois feixes devido a hipótese de que apresentam comprimentos de onda diferentes.

Obtemos as soluções estacionárias anulando-se as derivadas temporais, logo

$$E_j^{cw} = E_j^0 e^{i\phi_j}, \quad (3.61)$$

novamente $j = 1$ ou 2 , E_j^0 é a amplitude de entrada do j -ésimo pulso e ϕ_j corresponde a mudança de fase não-linear adquirida por esse pulso particular e é dada por

$$\phi_j = \gamma_j(|E_j^0|^2 + 2|E_{3-j}^0|)z. \quad (3.62)$$

Mais uma vez, a estabilidade da solução estacionária é examinada assumindo-se uma solução perturbada da forma

$$E_j = (E_j^0 + e_j)e^{i\phi_j}, \quad (3.63)$$

onde $e_j(z, t)$ é uma pequena perturbação. Substituindo as Eqs. (3.63) em (3.58) e (3.59), e desprezando-se os termos proporcionais a $|e_j|^2$, obtemos as equações lineares acopladas que seguem

$$i \frac{\partial e_1}{\partial z} + \frac{i}{v_{g1}} \frac{\partial e_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \beta_1 \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} - \gamma_1 [E_1^0 (e_1 + e_1^*) + 2E_2^0 (e_2 + e_2^*)] E_1^0, \quad (3.64)$$

$$i \frac{\partial e_2}{\partial z} + \frac{i}{v_{g2}} \frac{\partial e_2}{\partial t} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 e_2}{\partial t^2} - \gamma_2 [2E_1^0 (e_1 + e_1^*) + E_2^0 (e_2 + e_2^*)] E_2^0. \quad (3.65)$$

Estas equações possuem a seguinte solução geral²

²Este procedimento é equivalente ao que fizemos na secção (3.4.1) onde utilizamos o conjugado

$$e_j = u_j e^{i(kz - \Omega t)} + w_j e^{-i(kz - \Omega t)}, \quad (3.66)$$

com $j = 1, 2$. k é o número de onda e Ω é a frequência da perturbação. Das equações (3.64)-(3.66) chegamos a um conjunto de quatro equações homogêneas para u_1, u_2, v_1 e v_2 que apresenta solução não-trivial, pela regra de Cramer, somente se a perturbação satisfaz a seguinte relação de dispersão

$$\left[\left(k - \frac{\Omega}{\nu_{g1}} \right)^2 - f_1 \right] \left[\left(k - \frac{\Omega}{\nu_{g2}} \right)^2 - f_2 \right] = C_{MFC}, \quad (3.67)$$

onde

$$f_1 = \frac{\beta\Omega^2}{2} \left(\frac{\beta\Omega^2}{2} + 2\gamma_1 |E_1^0|^2 \right), \quad (3.68)$$

$$f_2 = \frac{\beta\Omega^2}{2} \left(\frac{\beta\Omega^2}{2} + 2\gamma_2 |E_2^0|^2 \right), \quad (3.69)$$

e o parâmetro de acoplamento C_{MFC} é

$$C_{MFC} = 4\gamma_1\gamma_2\beta^2 |E_1^0|^2 |E_2^0|^2 \Omega^4. \quad (3.70)$$

A solução estacionária se torna instável se o número de onda k se torna complexo para alguns valores de Ω , pois as perturbações e_j apresentam, assim, um crescimento exponencial ao longo da fibra [ver Eq. (3.66), por exemplo]. Na ausência de acoplamento devido a MFC, ou seja $C_{MFC} = 0$, podemos proceder a análise para cada onda separadamente usando o caminho delineado na secção (3.4.1).

Por outro lado, quando a MFC acopla os dois feixes a situação se torna bem mais interessante e a Eq. (3.67) resulta em um polinômio do quarto grau em k cujas as raízes determinam as condições para k se tornar complexo. Em geral, as equações linearizadas, conforme será visto no próximo capítulo.

raízes são obtidas numericamente. Assumindo-se $\delta = 0$, ou seja $\nu_{g1} = \nu_{g2} = \nu$, e $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, temos que as quatro soluções são

$$\left(k - \frac{\Omega}{\nu}\right)^2 = \frac{1}{2}\{(f_1 + f_2) \pm [(f_1 + f_2)^2 + 4(C_{MFC} - f_1 f_2)]^{1/2}\}. \quad (3.71)$$

É fácil perceber que k se torna complexo se

$$C_{MFC} - f_1 f_2 > 0, \quad (3.72)$$

pois $(f_1 + f_2) - [(f_1 + f_2)^2 + 4(C_{MFC} - f_1 f_2)]^{1/2} < 0$, cuja a raiz fornece um número complexo. Deste modo, temos as seguintes soluções reais

$$k = \frac{\Omega}{\nu} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\{(f_1 + f_2) + [(f_1 + f_2)^2 + 4(C_{MFC} - f_1 f_2)]^{1/2}\}}, \quad (3.73)$$

que correspondem a dois modos estáveis.

Por sua vez, as soluções complexas conjugadas são dadas por

$$k = \frac{\Omega}{\nu} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\{(f_1 + f_2) - [(f_1 + f_2)^2 + 4(C_{MFC} - f_1 f_2)]^{1/2}\}}, \quad (3.74)$$

e correspondem aos modos instáveis.

Vamos retornar a condição dada pela Eq. (3.72) para determinar a frequência de corte Ω_c acima da qual não ocorre IM. Substituindo-se C_{MFC} , f_1 e f_2 , obtemos

$$4\gamma_1\gamma_2\beta^2|E_1^0|^2|E_2^0|^2\Omega^4 > \frac{\beta\Omega^2}{2} \left(\frac{\beta\Omega^2}{2} + 2\gamma_1|E_1^0|^2\right) \times \frac{\beta\Omega^2}{2} \left(\frac{\beta\Omega^2}{2} + 2\gamma_2|E_2^0|^2\right), \quad (3.75)$$

portanto ocorre IM se

$$\Omega^2 < \Omega_c^2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\beta^2(\gamma_1 |E_1^0|^2 + \gamma_2 |E_2^0|^2)^2 + 12\beta^2\gamma_1\gamma_2 |E_1^0|^2 |E_2^0|^2} - \beta(\gamma_1 |E_1^0|^2 + \gamma_2 |E_2^0|^2) \right]. \quad (3.76)$$

O espectro de ganho da IM é obtido a partir de $g(\Omega) = 2\Im\{k\}$. Além do que, a condição da existência de IM dada pela Eq. (3.75) revela que existe um intervalo de valores para Ω para o qual o ganho $g(\Omega) > 0$ e, conseqüentemente, a solução estacionária é instável para essas frequências. O diferencial aqui é notar que IM pode ocorrer independentemente do sinal dos coeficientes de DVG. Conforme vimos anteriormente, para o caso de um único feixe é fundamental que o feixe experimente regime de dispersão anômalo. Entretanto, o intervalo de frequência para o qual IM existe depende se os feixes experimentam regime normal ou anômalo. O menor intervalo ocorre quando ambos os feixes experimentam o regime normal ($\beta > 0$) e, neste caso, IM ocorre exclusivamente devido a MFC. Para fibras de sílica para feixes com $\lambda \approx 0,53\mu\text{m}$ vamos utilizar $\beta = 0,06\text{ps}^2/\text{m}$ e $\gamma_j = 0,015 \text{ W}^{-1}/\text{m}$ [39].

3.6 Efeito Raman

O efeito Raman é um processo não-linear importante que pode limitar drasticamente a performance de sistemas ópticos pela transferência de energia de um canal para canais adjacentes e foi descoberto por Chandrasekhara Venkata Raman (1888-1970) em 1928. Trata-se da transferência de energia de um sinal para outro. De um modo geral, quando luz incide sobre um material a luz espalhada apresenta frequências que diferem da frequência da onda excitante ω_L . As componentes que são deslocadas para frequências menores $\omega_S < \omega_L$ são denominadas de componentes

Stokes e aqueles que são deslocadas para frequências maiores $\omega_a > \omega_L$ são ditas componentes anti-Stokes [57].

As componentes Stokes do efeito Raman resultam de uma transição do estado fundamental g para um estado final n por meio de uma transição intermediária para um nível virtual associado com o estado excitado n' . As componentes anti-Stokes do efeito, por sua vez, estão relacionadas com uma transição do estado n para o estado fundamental g com n' servindo como um nível intermediário. Como, no equilíbrio térmico, a população do n é menor que a população do no nível g , as linhas anti-Stokes são muito menores que as linhas Stokes. Tais processos podem ser observados através dos diagramas de níveis de energia da Figura (3.3).

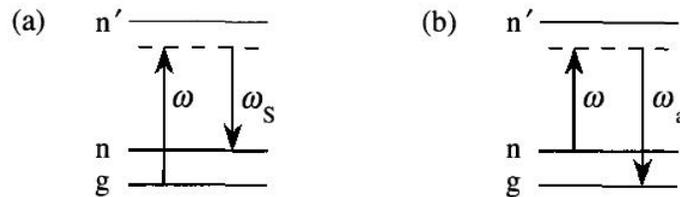


Figura 3.3: Diagramas dos níveis de energia que decreve (a) espalhamento Raman Stokes e (b) espalhamento Raman anti-Stokes. Figura obtida a partir de [57].

3.6.1 Espalhamento Raman Estimulado

Os processos descritos na secção (3.6) são conhecidos como espalhamento Raman espontâneo e apenas uma parcela muito pequena (10^{-6}) da energia é espalhada na frequência Stokes. Contudo, quando um radiação laser intensa é utilizada, o espalhamento torna-se bem mais eficiente e é denominado de espalhamento Raman estimulado (ERE) no qual observa-se que cerca de 10% da energia incidente é convertido nas frequências Stokes.

No ERE, ilustrado esquematicamente na Figura (3.4), um fóton com frequência ω é aniquilado e um fóton com frequência de Stokes $\omega_S = \omega - \omega_v$ é criado, deixando

a molécula em um estado excitado com energia $\hbar\omega_v$ (v indica *vibracional*) onde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ é a constante reduzida de Planck.

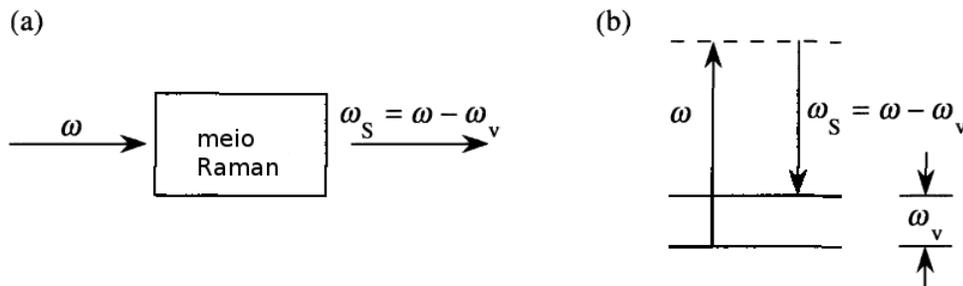


Figura 3.4: Ilustração do espalhamento Raman estimulado. (a) Esquema da interação. (b) Descrição dos níveis de energia. Figura obtida a partir de [57].

A luz incidente atua como uma fonte que provoca o surgimento das ondas Stokes. Observou-se em 1962 que, para laser intenso, o fenômeno não-linear do ERE pode ocorrer de modo que uma parcela considerável da energia da fonte é transferida para as ondas Stokes. Entretanto, devido ao seu caráter vibracional o ERE é um fenômeno percebido com um certo atraso. No modelo teórico usado no capítulo 4, introduzimos um parâmetro de atraso τ para incorporar diretamente este efeito, uma vez que para derivar as equações de propagação dos pulsos consideramos as respostas não-lineares como sendo instantâneas.

Capítulo 4

Interação entre MFC e Resposta Não-Linear Atrasada

Nesta etapa, apresentaremos o modelo teórico que utilizamos para estudar a instabilidade modulacional induzida por modulação de fase cruzada em fibras sem perdas com resposta não-linear atrasada com base nas análises elaboradas nos capítulos anteriores, assim como discutimos os resultados obtidos. Na secção (4.1) apresentamos algumas considerações iniciais sobre o problema proposto. Na secção (4.2), revisitamos a MFC. Em seguida, na secção (4.3), tratamos da inclusão do tempo de atrasa no modelo que é apresentado na secção (4.4). Nas secções (4.5) e (4.6), apresentamos a análise de estabilidade linear e os principais resultados, respectivamente.

4.1 Considerações Iniciais

Nos últimos anos, o grande aumento do tráfego nas fibras ópticas tem dado crescente importância aos limites impostos pelos efeitos não-lineares em tais fibras.

Conforme vimos nos capítulos anteriores, a instabilidade modulacional é um fenômeno característico da propagação de onda que ocorre em meios não-lineares

dispersivos e tem sido intensivamente investigado em vários ramos da Física devido a sua natureza fundamental bem como aplicações tecnológicas importantes. IM ocorre frequentemente em uma grande diversidade de sistemas físicos como, por exemplo, dinâmica de fluidos, Física dos plasmas, óptica não-linear [37–39, 75–79] e condensados de Bose-Einstein [80, 81]. Este fenômeno corresponde ao enriquecimento exponencial dos sinais ruidosos em canais propagantes em virtude da interação entre efeitos dispersivos e não-lineares, que podem transformar uma onda CW em um trem de pulsos tipo sólitons. Portanto, haja visto suas características importantes, a IM também constitui-se em uma fonte de degradação de sinais em comunicação através de fibras ópticas [37, 38, 75], uma vez que um ruído pode ser enriquecido pela IM, degradando o espectro do sinal e, conseqüentemente, limitando a performance do sistema.

O efeito da IM pode ser interpretado como o resultado da interação entre uma onda CW ou quase-contínua (QCW) de frequência ω e pequenas bandas laterais com frequência $\omega \pm \Omega$. Este é o caso da MQO onde dois fótons com frequência ω criam um fóton com frequência $\omega - \Omega$ (componente Stokes) e outro com $\omega + \Omega$ (componente anti-Stokes). Um ganho líquido será observado no regime de dispersão anômalo em meios com não-linearidade Kerr instantânea caso $|\Omega| < |\Omega_c|$, onde Ω_c é uma frequência de corte que depende da intensidade do feixe CW. Conforme visto em capítulos anteriores, usualmente, este processo é investigado teoricamente resolvendo-se extensões das equações não-lineares de Schrödinger (ENLS) que governam a evolução temporal de ondas propagantes no limite no qual o envelope varia lentamente. Uma análise da estabilidade linear em torno da solução estacionária das soluções das ENLS mostra que as perturbações harmônicas crescem exponencialmente dentro de um dado intervalo de frequência, conseqüentemente as soluções se tornam instáveis.

No contexto de fibras ópticas, a IM relaciona-se fortemente com o processo

de formação de ondas solitárias (sólitons) que se propagam sem distorção, uma vez que o processo de formação dessas ondas pode ser iniciado através de pequenas perturbações superpostas a uma radiação contínua que evolui no tempo como um trem de pulsos solitários ultracurtos [37, 38]. Embora o processo de formação dos sólitons seja um assunto muito importante para ser tratado, neste trabalho nos limitamos ao tratamento da IM de ondas planas que se propagam em fibras ópticas onde ambos os efeitos de MFC e resposta não-linear atrasada são considerados simultaneamente. Sob condições apropriadas, tais efeitos, mesmo quando considerados isoladamente, podem produzir IM em qualquer regime de dispersão da velocidade de grupo [82–90].

Quando dois feixes ópticos se propagam dentro de uma fibra com não-linearidade do tipo Kerr, o índice de refração acopla os dois pulsos através do fenômeno conhecido como Modulação de Fase Cruzada. Essa interação induzida por MFC, que relaciona as duas ondas, pode desestabilizar a solução estacionária na presença de dispersão de velocidade de grupo, levando-se a modulações da frequência dos sinais. Mostrou-se que IM induzida por MFC pode ocorrer no regime de dispersão normal, desde que ambos os feixes estejam acoplados incoerentemente e a diferença das velocidades de grupo seja pequena [82–84, 87]. Além do mais, de modo similar, Sombra e colaboradores demonstraram experimentalmente que IM induzida por MFC pode tornar um sinal fraco contínuo, que experimenta regime anômalo de dispersão, em um trem de pulsos curtos através do uso de outro feixe no regime de dispersão normal [91]. Resultado este que foi teoricamente previsto um ano antes por Schadt e colaboradores [92]. Muitos outros aspectos de pulsos copropagantes têm sido estudados recentemente em diversos sistemas [93–97].

Para meios altamente dispersivos ou pulsos ultra-curtos, é notório que a hipótese da resposta Kerr usual se torna inapropriada e novas contribuições devido a uma resposta não-linear atrasada deve ser considerada. Sabemos ainda que o carácter não-instantâneo da resposta não-linear também é capaz de produzir IM no

regime de dispersão normal. Recentemente, mostrou-se que IM espacial pode existir tanto em meios autofocalizadores e autodefocalizadores se a não-linearidade for não-instantânea [97–101]. Além do mais, o atraso na resposta não-linear é responsável por aumentar o intervalo de frequência para o qual ocorre ganho devido a IM [85, 86, 89, 90, 100–102] e sua característica tem sido explorada como um método para se obter luz lenta [103].

Embora a resposta não-linear atrasada e a MFC sejam bem conhecidos por influenciar a formação de pulsos solitários, entre outros fenômenos relevantes, a ação conjunta de seus efeitos para possibilitar o surgimento de IM não se encontram claramente estabelecido na literatura, conforme enfatizado em [104]. Nesta tese, incluímos ambas as contribuições da resposta atrasada e MFC na equação não-linear de Schrödinger com o intuito de estudar o surgimento de IM devido a co-propagação de feixes acoplados incoerentemente em fibras ópticas com resposta Kerr não-instantânea. Vamos mostrar que a resposta temporal finita da não-linearidade possibilita o surgimento de dois modos instáveis no espectro de frequência. As principais características do espectro de ganho da IM será analisado em função do tempo de resposta τ e da diferença de velocidade de grupo δ .

Recentemente, experimentos sobre a IM de um único pulso propagando em Dissulfeto de Carbono (CS_2) foram realizados para se investigar os efeitos de uma não-linearidade relaxacional, mostrando um bom acordo com os resultados teóricos oriundos da análise de estabilidade linear [98].

Nas próximas seções apresentaremos o modelo que será utilizado em nossas análises. Em seguida, trataremos da análise da estabilidade linear através da qual determinamos, de modo exato, a relação de dispersão que nos possibilita estabelecer os critérios de estabilidade das soluções estacionárias. Por fim, apresentamos as discussões e os principais resultados.

4.2 Modulação de Fase Cruzada Revisitada

Consideramos o caso no qual dois pulsos de diferentes frequências com mesma polarização incidem em uma fibra óptica com resposta não-linear do tipo Kerr. Deste modo, os termos não-lineares dos índices de refração responsáveis por acoplar incoerentemente os dois feixes são dados por [39]

$$\Delta n_1 = n_2(|E_1|^2 + 2|E_2|^2), \quad (4.1)$$

para o campo E_1 e

$$\Delta n_1 = n_2(|E_2|^2 + 2|E_1|^2), \quad (4.2)$$

para o campo E_2 .

Desta forma, a não-linearidade da fibra encontra-se incorporada através do coeficiente n_2 , para fibras de sílica $n_2 \simeq 3,2 \times 10^{-20} m^2/W$. A dependência com a frequência da parte linear do índices de refração $n(\omega)$ resulta da DVG.

Conforme visto ao tratarmos da MFC, na aproximação de envelope que varia lentamente, as amplitudes dos campos, E_1 and E_2 , satisfazem equações não-lineares de Schrödinger modificadas para incorporar os feitos da MFC através da adição de termos cruzados nas não-linearidades, N_1 e N_2 . Deste modo, as equações que governam a evolução temporal dos envelopes dos campos copropagantes em um meio Kerr com resposta não-linear instantânea podem ser escritas como

$$i \frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{i}{v_{g1}} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \beta_1 \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - \gamma_1 N_1 E_1, \quad (4.3)$$

$$i \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{i}{v_{g2}} \frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} - \gamma_2 N_2 E_2, \quad (4.4)$$

$$N_1 = |E_1|^2 + 2|E_2|^2, \quad (4.5)$$

$$N_2 = 2|E_1|^2 + |E_2|^2, \quad (4.6)$$

onde v_{gi} corresponde a velocidade de grupo do i -ésimo feixe. β_i e γ_i são, respectivamente, o coeficiente de dispersão e o parâmetro não-linear da fibra observado por esse feixe particular. O fator de 2 antes dos termos de MFC representa a hipótese que os dois feixes possuem a mesma polarização [39, 83, 88], após desprezarmos os termos com defasagem de fase na expressão da polarização conforme secção (3.5.1).

A propriedade não-linear não-instantânea do meio devido a um tempo de resposta finito τ do material pode ser incorporada através de um processo de relaxação de Debye da seguinte forma [86, 99]

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (-N_j + |E_j|^2 + 2|E_{3-j}|^2), \quad (4.7)$$

$j = 1, 2$. Portanto, a dinâmica das não-linearidades depende das intensidades dos campos locais bem como do tempo de resposta típico τ do meio Kerr. Tal modelo é melhor examinado na secção que segue.

4.3 Resposta Não-Linear Atrasada

Visto que os fenômenos não-lineares são mais acentuados para o caso de pulsos ultra-curtos (alta intensidade), devemos incluir explicitamente nas equações

que descrevem a dinâmica do sistema o tempo de resposta do meio τ . Para tempos de resposta pequenos, é usual se adicionar alguns termos nas equações não-lineares de Schrödinger correspondentes a uma expansão em série de Taylor da amplitude dos envelopes atrasados, porém tal aproximação é válida para descrever qualitativamente apenas os casos de respostas atrasadas no regime de baixa frequência $\Omega\tau \ll 1$ [86]. Recetemente, Liu e colaboradores propuseram um modelo simples para a dinâmica da relaxação temporal das não-linearidades [86] e pode ser utilizado para se estudar os efeitos do atraso para quaisquer valores de Ω .

Considerando-se que o meio apresenta respostas não-lineares atrasadas por um intervalo de tempo τ , as respostas não-lineares instantâneas correspondentes às Eqs. (4.5) e (4.6) serão agora tomadas como sendo

$$N_1(z, t + \tau) = |E_1(z, t)|^2 + 2|E_2(z, t)|^2, \quad (4.8)$$

$$N_2(z, t + \tau) = 2|E_1(z, t)|^2 + |E_2(z, t)|^2, \quad (4.9)$$

portanto os fatores $(|E_1(z, t)|^2 + 2|E_2(z, t)|^2)$ e $(2|E_1(z, t)|^2 + |E_2(z, t)|^2)$ correspondem a efeitos não-lineares observados em um instante de tempo posterior $t + \tau$.

Os termos $N_1(t + \tau)$ e $N_2(t + \tau)$ podem ser escritos através da expansão em série de Taylor para pequenos valores de τ como

$$N_1(z, t + \tau) = N_1(z, t) + \tau \left. \frac{\partial N_1}{\partial t} \right|_{(z,t)} + \tau^2 \left. \frac{\partial^2 N_1}{\partial t^2} \right|_{(z,t)} + \dots, \quad (4.10)$$

$$N_2(z, t + \tau) = N_2(z, t) + \tau \left. \frac{\partial N_2}{\partial t} \right|_{(z,t)} + \tau^2 \left. \frac{\partial^2 N_2}{\partial t^2} \right|_{(z,t)} + \dots, \quad (4.11)$$

onde utilizamos que $\tau \in \Re$ e a Regra da Cadeia para fazer

$$\left. \frac{\partial^m}{\partial t^m} [N_j(z, t + \tau)] \right|_{(z,t)} = \left. \frac{\partial^m}{\partial t^m} [N_j(z, t)] \right|_{(z,t)}. \quad (4.12)$$

Por outro lado, por exemplo, se considerarmos alguma dependência temporal da resposta não-linear τ , ou seja, assumindo $\tau(t)$ podemos ter modelos de relaxação mais complexos. Neste trabalho nos limitamos ao caso onde τ é uma constante.

4.4 Modelo Teórico

Considerando-se apenas os dois primeiros termos das expansões dadas pelas equações (4.10) e (4.11), temos o seguinte modelo teórico

$$i \frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{i}{v_{g1}} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \beta_1 \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - \gamma_1 N_1 E_1, \quad (4.13)$$

$$i \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{i}{v_{g2}} \frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} - \gamma_2 N_2 E_2, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (-N_1 + |E_1|^2 + 2|E_2|^2), \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (-N_2 + 2|E_1|^2 + |E_2|^2). \quad (4.16)$$

Observe a introdução do parâmetro de atraso τ na resposta não-linear nas Eqs. (4.15) e (4.16). Tais equações são geralmente denominadas de modelo de relaxação de Debye [86, 99].

4.5 Análise da Estabilidade Linear Revisitada

Instabilidade modulacional se refere ao crescimento exponencial de uma pequena perturbação da solução estacionária e surge da interação entre os efeitos da DVG e da não-linearidade (não-instantânea) de um dado meio. Para estudar a estabilidade da solução estacionária do sistema de equações descrito acima na presença de pequenas perturbações harmônicas, vamos realizar uma análise de estabilidade linear. Para o caso de duas ondas contínuas ou quase-contínuas, as derivadas com relação ao tempo nas Eqs. (4.13) - (4.16) podem ser anuladas. Deste modo a solução estacionária é dada por

$$E_1^{cw} = E_1^0 e^{[\nu\gamma_1(|E_1^0|^2 + 2|E_2^0|^2)z]}, \quad (4.17)$$

$$E_2^{cw} = E_2^0 e^{[\nu\gamma_2(2|E_1^0|^2 + |E_2^0|^2)z]}, \quad (4.18)$$

onde $E_{0,j}$ é a amplitude de entrada do j -ésimo feixe e

$$N_1^{cw} = |E_1^0|^2 + 2|E_2^0|^2, \quad (4.19)$$

$$N_2^{cw} = 2|E_1^0|^2 + |E_2^0|^2. \quad (4.20)$$

Uma questão fundamental é se essa solução CW é estável. Deste modo, para testar a estabilidade da solução estacionária, adicionaremos pequenas perturbações, e_j em E_j e n_j em N_j , ($j = 1, 2$), logo

$$E_1 = [E_1^0 + e_1(z, t)]e^{[i\gamma_1(|E_1^0|^2 + 2|E_2^0|^2)z]}, \quad (4.21)$$

$$E_2 = [E_2^0 + e_2(z, t)]e^{[i\gamma_2(2|E_1^0|^2 + |E_2^0|^2)z]}, \quad (4.22)$$

$$N_1 = n_1(z, t) + |E_1^0|^2 + 2|E_2^0|^2, \quad (4.23)$$

$$N_2 = n_2(z, t) + 2|E_1^0|^2 + |E_2^0|^2, \quad (4.24)$$

onde $e_j(z, t)$ satisfaz $|e_j(z, t)|^2 \ll |E_{0,j}|^2$ e $n_j(z, t)$ é uma pequena perturbação linear sobre a não-linearidade estacionária. Note que e_j pode ser complexo.

Vamos começar nossa análise substituindo as Eqs. (4.21) - (4.24), nas Eqs. (4.13) - (4.16), linearizando em e_1 e e_2 , para obter

$$i\frac{\partial e_1}{\partial z} + \frac{i}{v_{g1}}\frac{\partial e_1}{\partial t} = \frac{1}{2}\beta_1\frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} - \gamma_1 n_1 E_1^0, \quad (4.25)$$

$$i\frac{\partial e_2}{\partial z} + \frac{i}{v_{g2}}\frac{\partial e_2}{\partial t} = \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 e_2}{\partial t^2} - \gamma_2 n_2 E_2^0, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \frac{1}{\tau}[-n_1 + E_1^0(e_1 + e_1^*) + 2E_2^0(e_2 + e_2^*)], \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = \frac{1}{\tau}[-n_2 + 2E_1^0(e_1 + e_1^*) + E_2^0(e_2 + e_2^*)]. \quad (4.28)$$

Este conjunto de equações lineares complexas acopladas pode ser facilmente resolvido no espaço de Fourier. Definimos as transformadas de Fourier como sendo

$$e_j(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikz} e^{i\Omega t} e_j(\Omega, k) dk d\Omega, \quad (4.29)$$

$$n_j(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikz} e^{i\Omega t} n_j(\Omega, k) dk d\Omega, \quad (4.30)$$

$$e_j^*(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikz} e^{i\Omega t} e_j^*(-\Omega, -k) dk d\Omega, \quad (4.31)$$

$$n_j^*(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikz} e^{i\Omega t} n_j^*(-\Omega, -k) dk d\Omega, \quad (4.32)$$

onde k e Ω correspondem ao número de onda e a frequência de modulação, respectivamente. Vamos discutir os principais efeitos devido a MFC e resposta não-instantânea para o caso particular no qual as modulações associadas a cada feixe possuem o mesmo vetor de onda. A extensão para o caso geral pode ser desenvolvida utilizando-se as diretrizes apresentadas na referência [87].

Aplicando-se as transformadas de Fourier definidas pelas equações (4.29) - (4.32) nas Eqs. (4.25) - (4.28), temos

$$(i\Omega\tau + 1)n_1(\Omega, k) = E_1^0[e_1(\Omega, k) + e_1^*(-\Omega, -k)] + 2E_2^0[e_2(\Omega, k) + e_2^*(-\Omega, -k)], \quad (4.33)$$

$$(i\Omega\tau + 1)n_2(\Omega, k) = 2E_1^0[e_1(\Omega, k) + e_1^*(-\Omega, -k)] + E_2^0[e_2(\Omega, k) + e_2^*(-\Omega, -k)], \quad (4.34)$$

$$\left(k - \frac{\Omega}{v_{g1}} + \beta_1 \frac{\Omega^2}{2}\right) e_1(\Omega, k) + \gamma_1 E_1^0 n_1(\Omega, k) = 0, \quad (4.35)$$

$$\left(k - \frac{\Omega}{v_{g2}} + \beta_2 \frac{\Omega^2}{2}\right) e_2(\Omega, k) + \gamma_2 E_2^0 n_2(\Omega, k) = 0, \quad (4.36)$$

Isolando-se n_1 e n_2 nas Eqs. (4.33) e (4.34) e substituindo-se nas Eqs. (4.35) e (4.36), obtemos

$$\begin{aligned} \left(k - \frac{\Omega}{v_{g1}} + \beta_1 \frac{\Omega^2}{2}\right) e_1(\Omega, k) + \frac{\gamma_1 E_1^0}{(i\Omega\tau + 1)} \{E_1^0[e_1(\Omega, k) + e_1^*(-\Omega, -k)] \\ - 2E_2^0[e_2(\Omega, k) + e_2^*(-\Omega, -k)]\} = 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \left(k - \frac{\Omega}{v_{g2}} + \beta_2 \frac{\Omega^2}{2}\right) e_2(\Omega, k) + \frac{\gamma_2 E_2^0}{(i\Omega\tau + 1)} \{2E_1^0[e_1(\Omega, k) + e_1^*(-\Omega, -k)] \\ - E_2^0[e_2(\Omega, k) + e_2^*(-\Omega, -k)]\} = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Por outro lado, o conjugado complexo das Eqs. (4.25) - (4.28) nos fornece

$$-i \frac{\partial e_1^*}{\partial z} - \frac{i}{v_{g1}} \frac{\partial e_1^*}{\partial t} = \frac{1}{2} \beta_1 \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} - \gamma_1 n_1^* E_1^0, \quad (4.39)$$

$$-i \frac{\partial e_2^*}{\partial z} - \frac{i}{v_{g2}} \frac{\partial e_2^*}{\partial t} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 e_2}{\partial t^2} - \gamma_2 n_2^* E_2^0, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial n_1^*}{\partial t} = \frac{1}{\tau} [-n_1^* + E_1^0(e_1 + e_1^*) + 2E_2^0(e_2 + e_2^*)], \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial n_2^*}{\partial t} = \frac{1}{\tau} [-n_2^* + 2E_1^0(e_1 + e_1^*) + E_2^0(e_2 + e_2^*)]. \quad (4.42)$$

De modo análogo ao realizado anteriormente, aplicando-se as transformadas de Fourier definidas pelas equações (4.29) - (4.32) nas equações acima, temos

$$(i\Omega\tau + 1)n_1^*(\Omega, k) = E_1^0[e_1(\Omega, k) + e_1^*(-\Omega, -k)] + 2E_2^0[e_2(\Omega, k) + e_2^*(-\Omega, -k)], \quad (4.43)$$

$$(i\Omega\tau + 1)n_2^*(\Omega, k) = 2E_1^0[e_1(\Omega, k) + e_1^*(-\Omega, -k)] + E_2^0[e_2(\Omega, k) + e_2^*(-\Omega, -k)], \quad (4.44)$$

$$\left(-k + \frac{\Omega}{v_{g1}} + \beta_1 \frac{\Omega^2}{2}\right) e_1^*(\Omega, k) + \gamma_1 E_1^0 n_1^*(\Omega, k) = 0, \quad (4.45)$$

$$\left(-k + \frac{\Omega}{v_{g2}} + \beta_2 \frac{\Omega^2}{2}\right) e_2^*(\Omega, k) + \gamma_2 E_2^0 n_2^*(\Omega, k) = 0. \quad (4.46)$$

Mais uma vez, isola-se n_1^* e n_2^* nas Eqs. (4.43) e (4.44) e substituindo-se nas Eqs. (4.45) e (4.46), donde

$$\left(-k + \frac{\Omega}{v_{g1}} + \beta_1 \frac{\Omega^2}{2}\right) e_1^*(\Omega, k) + \frac{\gamma_1 E_1^0}{(i\Omega\tau + 1)} \{E_1^0 [e_1(\Omega, k) + e_1^*(-\Omega, -k)] - 2E_2^0 [e_2(\Omega, k) + e_2^*(-\Omega, -k)]\} = 0, \quad (4.47)$$

$$\left(-k + \frac{\Omega}{v_{g2}} + \beta_2 \frac{\Omega^2}{2}\right) e_2^*(\Omega, k) + \frac{\gamma_2 E_2^0}{(i\Omega\tau + 1)} \{2E_1^0 [e_1(\Omega, k) + e_1^*(-\Omega, -k)] - E_2^0 [e_2(\Omega, k) + e_2^*(-\Omega, -k)]\} = 0. \quad (4.48)$$

Vamos considerar $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ e definir

$$A = \left(k - \frac{\Omega}{\nu_1} + \frac{\beta\Omega^2}{2}\right), \quad (4.49)$$

$$B = \left(k - \frac{\Omega}{\nu_2} + \frac{\beta\Omega^2}{2}\right), \quad (4.50)$$

$$C = \left(-k + \frac{\Omega}{\nu_1} + \frac{\beta\Omega^2}{2}\right), \quad (4.51)$$

$$D = \left(-k + \frac{\Omega}{\nu_2} + \frac{\beta\Omega^2}{2}\right), \quad (4.52)$$

$$G = \frac{\gamma_1 E_1^0}{(1 + i\Omega\tau)}, \quad (4.53)$$

$$H = \frac{\gamma_2 E_2^0}{(1 + i\Omega\tau)}. \quad (4.54)$$

Desta forma, a partir das equações (4.37), (4.38), (4.47) e (4.48), obtemos o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} (A + GE_1^0)\widehat{e}_1 + GE_1^0\widehat{e}_1^* + 2GE_2^0\widehat{e}_2 + 2GE_2^0\widehat{e}_2^* = 0, \\ 2HE_1^0\widehat{e}_1 + 2HE_1^0\widehat{e}_1^* + (B + HE_2^0)\widehat{e}_2 + HE_2^0\widehat{e}_2^* = 0, \\ GE_1^0\widehat{e}_1 + (C + GE_1^0)\widehat{e}_1^* + 2GE_2^0\widehat{e}_2 + 2GE_2^0\widehat{e}_2^* = 0, \\ 2HE_1^0\widehat{e}_1 + 2HE_1^0\widehat{e}_1^* + HE_2^0\widehat{e}_2 + (D + HE_2^0)\widehat{e}_2^* = 0, \end{array} \right.$$

onde $\widehat{e}_j = e_j(\Omega, k)$ e $\widehat{e}_j^* = e_j^*(\Omega, k)$.

Pela regra de Cramer, esse sistema linear de equações homogêneas para \widehat{e}_1 , \widehat{e}_1^* , \widehat{e}_2 and \widehat{e}_2^* apresenta soluções não-triviais somente quando o determinante dos coeficientes é zero, ou seja, quando

$$\begin{vmatrix} (A + GE_1^0) & GE_1^0 & 2GE_2^0 & 2GE_2^0 \\ 2GE_2^0 & 2GE_2^0 & (B + HE_2^0) & HE_2^0 \\ GE_1^0 & (C + GE_1^0) & 2GE_2^0 & 2GE_2^0 \\ 2HE_1^0 & 2HE_1^0 & HE_2^0 & (D + HE_2^0) \end{vmatrix} = 0,$$

o que implica

$$3GHE_1^0E_2^0(AD + AB + BC + CD) - ABCD - ACHE_2^0(B + D) - BDGE_1^0(A + C) = 0. \quad (4.55)$$

É fácil observar que $A + C = B + D = \beta\Omega^2$, logo

$$3\beta^2\Omega^4GHE_1^0E_2^0 - ABCD - \beta\Omega^2(ACHE_2^0 + BDGE_1^0) = 0. \quad (4.56)$$

Substituindo-se os parâmetros definidos nas Eqs. (4.49) - (4.54), temos a relação de dispersão que garante soluções não-triviais para as perturbações

$$\begin{aligned}
& \frac{3\beta^2\Omega^4\gamma_1\gamma_2|E_1^0|^2|E_2^0|^2}{(1+i\Omega\tau)^2} - \left[\frac{\beta^2\Omega^4}{4} - \left(k - \frac{\Omega}{\nu_1}\right)^2 \right] \times \left[\frac{\beta^2\Omega^4}{4} - \left(k - \frac{\Omega}{\nu_2}\right)^2 \right] \\
& - \beta\Omega^2 \left\{ \left[\frac{\beta^2\Omega^4}{4} - \left(k - \frac{\Omega}{\nu_1}\right)^2 \right] \frac{\gamma_2|E_2^0|^2}{1+i\Omega\tau} + \left[\frac{\beta^2\Omega^4}{4} - \left(k - \frac{\Omega}{\nu_2}\right)^2 \right] \frac{\gamma_1|E_1^0|^2}{1+i\Omega\tau} \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Vamos torná-la mais sucinta, somando e subtraindo termos e definindo

$$f_1 = \frac{\beta\Omega^2}{2} \left(\frac{\beta\Omega^2}{2} + \frac{2\gamma_1|E_1^0|^2}{1+i\Omega\tau} \right), \tag{4.58}$$

$$f_2 = \frac{\beta\Omega^2}{2} \left(\frac{\beta\Omega^2}{2} + \frac{2\gamma_2|E_2^0|^2}{1+i\Omega\tau} \right), \tag{4.59}$$

$$C_{MFC} = \frac{4\gamma_1\gamma_2\beta^2|E_1^0|^2|E_2^0|^2\Omega^4}{(1+i\Omega\tau)^2}, \tag{4.60}$$

logo, podemos escrever a Eq. (4.57) mais resumidamente como

$$\left[\left(k - \frac{\Omega}{\nu_1}\right)^2 - f_1 \right] \left[\left(k - \frac{\Omega}{\nu_2}\right)^2 - f_2 \right] = C_{MFC}, \tag{4.61}$$

tal relação de dispersão determina a estabilidade das solução estacionárias na presença de pequenas perturbações harmônicas.

Manipulando-se a Eq. (4.61), obtemos o seguinte polinômio com coeficientes complexos

$$\begin{aligned}
& k^4 - \left(\frac{2\Omega}{\nu_1} + \frac{2\Omega}{\nu_2} \right) k^3 + \left(\frac{\Omega^2}{\nu_1^2} - f_1 + \frac{\Omega^2}{\nu_2^2} - f_2 + \frac{4\Omega^2}{\nu_1\nu_2} \right) k^2 + \\
& \left(\frac{2\Omega f_2}{\nu_1} + \frac{2\Omega f_1}{\nu_2} - \frac{2\Omega^3}{\nu_1\nu_2^2} - \frac{2\Omega^3}{\nu_1^2\nu_2} \right) k + \left(\frac{\Omega^4}{\nu_1^2\nu_2^2} - \frac{\Omega^2}{\nu_1^2} f_2 - \frac{\Omega^2}{\nu_2^2} f_1 + f_1 f_2 - C_{MFC} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Para determinarmos os zeros deste polinômio, utilizamos um algoritmo computacional escrito em Fortran 90 fazendo uso do método de Laguerre[105].

4.6 Discussões e Principais Resultados

A frequência e o número de onda das perturbações são deslocados da frequência e do número de onda dos sinais de entrada e são, respectivamente, dados por Ω e k .

Podemos notar facilmente que se o número de onda k é um número real, as perturbações são puramente oscilatórias e a solução estacionária é estável. Por outro lado, se k adquire uma parte imaginária para algum intervalo de valores da frequência Ω , as pequenas perturbações harmônicas $e_1(\Omega, k)$ e $e_2(\Omega, k)$ experimentam um enriquecimento exponencial ao longo do comprimento da fibra e a solução CW torna-se instável.

Portanto, o coeficiente de ganho $g(\Omega)$ relaciona-se com a parte imaginária do número de onda e, conforme visto, é dado por $g(\Omega) = 2\Im\{k\}$, onde k é determinado pela Eq. (4.61). Observe que esperamos um crescimento exponencial para a intensidade da perturbação por unidade de comprimento L da fibra, onde o fator de ganho é dado por $e^{g(\Omega)L}$. Além do mais, por simplificação, vamos assumir que γ_j e v_{gj} são aproximadamente idênticos para $j = 1, 2$.

Em primeiro lugar, vamos considerar brevemente o caso de respostas instantâneas $\tau = 0$. Deste modo, a partir das Eqs. (4.58) - (4.60), pode-se verificar que f_i e C_{MFC} são números reais. De sorte que, para o caso de uma não-linearidade com resposta instantânea, a relação de dispersão dada pela Eq. (4.62) corresponde a um polinômio do quarto grau com coeficientes reais.

Além do mais, na ausência de MFC, i.e., um dos pulsos ($|E_{0,1}|$ ou $|E_{0,2}|$) é nulo, o que implica $C_{MFC} = 0$, a Eq. (4.61) apresenta as seguintes soluções

$$k = \frac{\Omega}{\nu_j} \pm \sqrt{f_j}, \quad (4.63)$$

para $j = 1, 2$.

Portanto, no regime de dispersão normal ($\beta > 0$), resulta das Eqs. (4.58) e (4.59) que $f_j > 0$, logo $k \in \mathfrak{R}_+^*$. Em outras palavras, o número de onda k é sempre real e, conseqüentemente, o ganho modulacional é zero e IM só ocorre no regime de dispersão anômala ($\beta < 0$) [39]. Observa-se que na presença de MFC, o número de onda k pode apresentar parte imaginária mesmo no regime de dispersão normal. Portanto, para o caso de tempo de resposta nulo (resposta não-linear instantânea), ambos os campos ópticos devem estar presentes para possibilitar a ocorrência de IM no regime de dispersão normal. Tais aspectos foram bem analisados por Agrawal e colaboradores em [82, 83, 87].

A situação é um tanto quanto diferente quando a MFC acopla os campos no regime de dispersão anômalo ($\beta < 0$). A partir das Eqs. (4.58) e (4.59), notamos que se $\Omega^2|\beta| < 4\gamma_j|E_{0,j}|^2$ então $f_j \in \mathfrak{R}_-^*$ e, desta forma, k pode apresentar parte imaginária para o regime de frequência baixa. Portanto, segundo (4.61), podemos observar ganho modulacional mesmo quando um dos campos ópticos desaparece ($C_{MFC} = 0$). Neste caso a IM é induzido por AMF. Constata-se que, se ambos os pulsos ópticos experimentam regime de dispersão anômalo, cada um, separadamente, pode provocar IM [39, 82, 83]. O acoplamento devido a MFC atua amplificando esse efeito.

Embora a diferença de velocidade de grupo dos pulsos não seja fundamental para a existência de instabilidade modulacional, torna-se importante, na prática, estudar seus efeitos representado pelo parâmetro $\delta = |\nu_{g1}^{-1} - \nu_{g2}^{-1}|$. Na Figura (4.1), plotamos os espectros de ganho para diversos valores de δ para o caso particular de níveis de potência iguais $\varepsilon = |E_2^0|^2/|E_1^0|^2 = 1$, após assumirmos $|E_{0,1}|^2 = 100$ W. Note que, a razão entre as intensidades dos sinais ε relaciona-se com a intensidade

do efeito de MFC de acordo com (4.60). Consideramos ainda tempo de resposta instatâneo para a não-linearidade ou seja, $\tau = 0$, e $\nu_{g1} = 1$ m/ps. Os parâmetros da fibra são $\beta = 0,06$ ps²/m and $\gamma_j = 0,015$ W⁻¹/m, que correspondem a uma situação real de propagação de pulsos nas fibras de sílica.

Notamos que, quando aumentamos os valores de δ , o espectro de ganho se estreita, desloca-se para frequências maiores, além do mais seu pico se aproxima de um valor limite. Embora as limitações devido a hipótese de pequenas perturbações, pode-se concluir que, por exemplo, para um pico de ganho de aproximadamente $g(\Omega) = 3$ m⁻¹, o fator de amplificação seria e^{3L} para uma fibra de comprimento L . Deste modo, o surgimento de bandas laterais é esperado mesmo para o caso de fibras curtas, haja visto o forte enriquecimento que o ruído experimenta.

A porção principal da mesma figura revela que existe um valor crítico para a diferença de velocidade de grupo δ_c acima da qual os espectros de ganho surgem a partir de um valor finito não-nulo de Ω . A determinação numérica desse valor crítico também é apresentada na Figura (4.1), e pode-se notar que $\delta_c \approx 1,039(5)$ ps/m. Deste modo, para $\tau = 0$ e $\delta < \delta_c$, o intervalo de frequências para a qual pode ocorrer IM é $\Omega < \Omega_c$. Por outro lado, quando $\delta > \delta_c$, o intervalo de frequências que corresponde a um regime instável é dado por $0 < \Omega_c^{\min} < \Omega < \Omega_c^{\max}$.

Durante as discussões, estaremos interessados em estudar o caso em que ambos os pulsos experimentam regime de dispersão normal, $\beta > 0$, uma vez que, neste caso, IM pode ocorrer exclusivamente devido a MFC. De fato, como já comentamos anteriormente, IM pode ocorrer tanto no regime de dispersão anômalo quanto no regime normal, porém, naquele apenas um feixe já é suficiente para provocar IM e neste ambos precisam estar presentes. Vamos analisar os efeitos de um tempo de resposta finito da resposta não-linear no regime normal de DVG para $\delta < \delta_c$ e $\delta > \delta_c$. É importante também salientar que nossa análise se aplica somente para a evolução inicial dos feixes de entrada quando as novas componentes que surgem

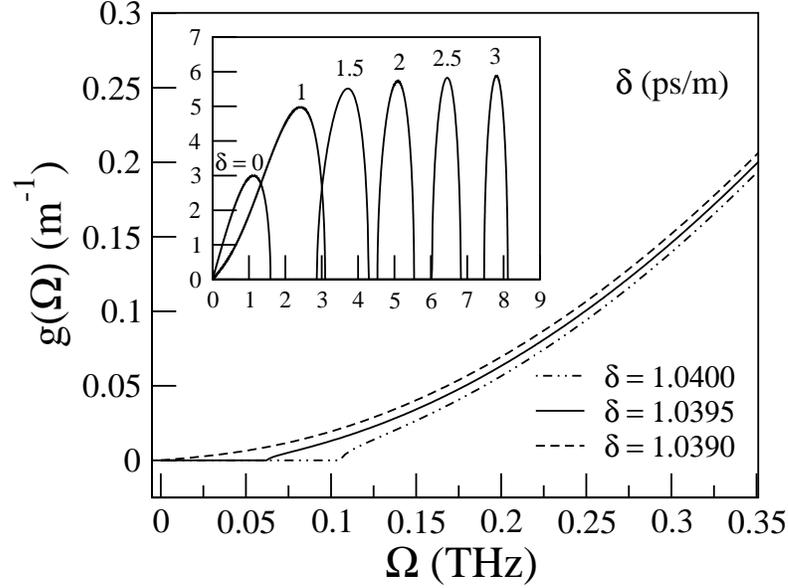


Figura 4.1: [Porção incorporada] Espectros de ganho $g(\Omega)$ da instabilidade modulacional para diversos valores da diferença de velocidade de grupo δ . A razão dos níveis de potência dos dois feixes é $\varepsilon = |E_{0,2}|^2/|E_{0,1}|^2 = 1$, considerando-se $|E_{0,1}|^2 = 100$ W. Os demais parâmetros são $\tau = 0$, $\beta = 0,06$ ps²/m, $\nu_{g1} = 1$ ps/m e $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,015$ W⁻¹/m. [Porção principal] Investigação numérica do valor crítico δ_c para a diferença de velocidade de grupo acima do qual a banda de ganho começa a partir de um valor finito da frequência para os valores dos parâmetros descritos acima.

devido a IM não adquiriram amplitudes consideráveis.

A situação torna-se bem mais interessante quando $\tau \neq 0$. A partir da relação de dispersão dada pela Eq. (4.61) pode-se examinar qualitativamente o papel desempenhado pelo tempo de resposta. Note que para qualquer valor não-nulo do tempo de relaxação τ , os termos f_i e C_{MFC} tornam-se números complexos, desta forma produzindo uma parte imaginária para o número de onda k e expandindo ainda mais o intervalo de frequência que permite o sustendo das perturbações harmônicas.

Com o intuito de obter uma análise qualitativa da instabilidade modulacional como função do parâmetro de relaxação, plotamos nas Figuras (4.2) a (4.5) os espectros de ganho $g(\Omega)$ para um conjunto de valores representativos para uma fibra com resposta não-linear atrasada na qual copropagam-se dois feixes no regime normal

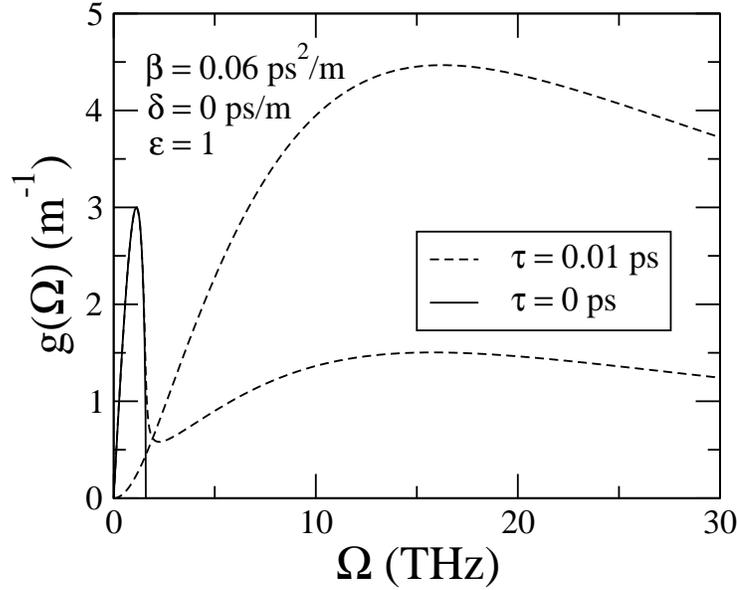


Figura 4.2: Espectros de ganho $g(\Omega)$ da instabilidade modulacional para uma fibra com resposta não-linear instantânea (linha sólida) e atrasada (linha tracejada) na qual copropagam-se dois feixes ópticos no regime de dispersão normal $\beta = 0,06\text{ps}^2/\text{m}$. Despreza-se a diferença da velocidade de grupo. Os demais parâmetros são idênticos aos utilizados na Figura 4.1. A MFC é responsável pelo enriquecimento devido a IM no caso instantâneo. Por outro lado, a presença de um tempo de resposta finito induz o surgimento de dois ramos instáveis. Para o presente caso de resposta não-linear rápida ($\tau \ll 1/\Omega_c$), um destes ramos exibe tanto bandas instantâneas quanto bandas Raman. O outro ramo, por sua vez, apresenta apenas uma única banda Raman.

$\beta = 0,06\text{ps}^2/\text{m}$.

Os distintos espectros de ganho correspondem a soluções da Eq. (4.61). Para $\tau = 0$, a Eq. (4.61) se torna um polinômio do quarto grau em k com coeficientes reais que pode apresentar, portanto, até quatro modos distintos (um por solução). É fácil verificar que duas das soluções são sempre números reais [conforme seção (3.5.2)]. As demais soluções podem ser reais ou um par conjugado de soluções complexas.

Para $\tau \neq 0$, a Eq. (4.61) pode ser estudada como um polinômio do quarto grau com coeficientes complexos, deste modo, as soluções complexas não necessariamente surgem aos pares. Isto resulta na possibilidade de dois modos se tornarem instáveis para uma dada frequência Ω , conforme iremos discutir em seguida.

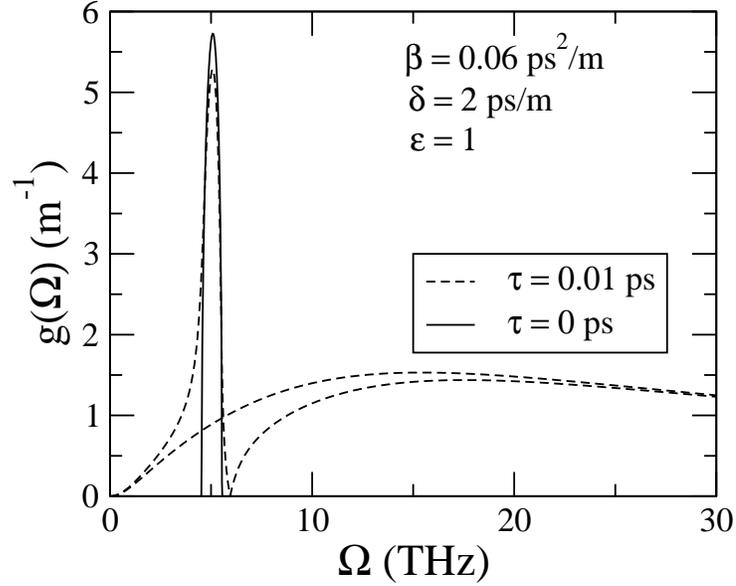


Figura 4.3: Espectros de ganho $g(\Omega)$ da instabilidade modulacional para uma fibra com resposta não-linear instantânea (linha sólida) e atrasada (linha tracejada) na qual copropagam-se dois feixes ópticos no regime de dispersão normal $\beta = 0,06\text{ps}^2/\text{m}$. Despreza-se a diferença da velocidade de grupo. Os demais parâmetros são idênticos aos utilizados na Figura 4.1. A MFC é responsável pelo ganho devido a IM instantâneo para $\Omega_c^{\min} < \Omega < \Omega_c^{\max}$. Para o caso de uma resposta não-linear rápida, as bandas de ganho Raman e instantânea têm duas frequências típicas distintas. Observe uma frequência particular na qual há apenas um único modo instável mesmo para valores finitos do tempo de resposta.

Na Figura (4.2), mostramos o caso de um tempo de resposta pequeno e diferença nula das velocidades de grupo dos feixes. Para uma resposta Kerr instantânea, a MFC é responsável por uma única banda de ganho (linha sólida) que apresenta um pico em uma frequência característica e ocorre para um intervalo finito de frequências. Por outro lado, a presença de um tempo de resposta finito provoca o surgimento de duas bandas de IM (linhas tracejadas), correspondendo a dois modos instáveis. Observe que o modo que é instável para $\tau = 0$ sobre um intervalo de frequências finito também apresenta instabilidade em frequências mais elevadas. Essa segunda banda do modo está relacionada com a resposta Raman atrasada. Além do mais, o segundo modo, que se torna instável devido aos efeitos

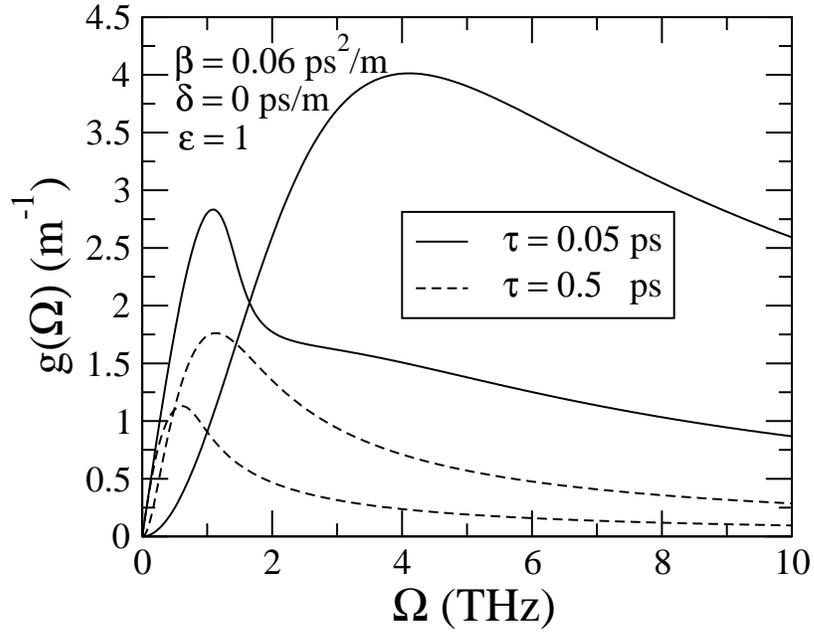


Figura 4.4: Espectros de ganho $g(\Omega)$ da instabilidade modulacional para o regime de dispersão normal para tempos de resposta distintos. As velocidades de grupo são assumidas como sendo idênticas. Nestes casos de resposta não-linear lenta, as bandas Raman são deslocadas para frequências menores e a banda de ganho instantânea é suprimida. O ganho é deteriorado quando o tempo de resposta é aumentado ainda mais.

da resposta não-linear atrasada, apresenta um ganho máximo mais elevado. Nesta figura usamos $|E_1^0|^2 = 100$ W, $\varepsilon = 1$ e $\delta = 0$. Os demais parâmetros são idênticos aos da Figura (4.1).

Observa-se um cenário diferente quando $\delta = 2$ ps/m $>$ δ_c . Na Figura (4.3), plotamos o espectro de ganho da IM em função do deslocamento de frequência Ω para o caso de tempo de resposta rápido (τ pequeno). Note que as bandas Raman induzidas de ambos os modos instáveis apresentam um ganho máximo muito menor do que o ganho devido ao efeito da MFC. A frequência de ganho máximo devido a resposta atrasada ocorre acima do intervalo de frequência da banda de ganho instantânea. É interessante observar a presença de uma frequência particular na qual apenas um modo é instável e duas soluções da Eq. (4.61) são reais.

Os efeitos de tempo de resposta maiores são mostrados na Figura (4.4) ($\delta = 0$)

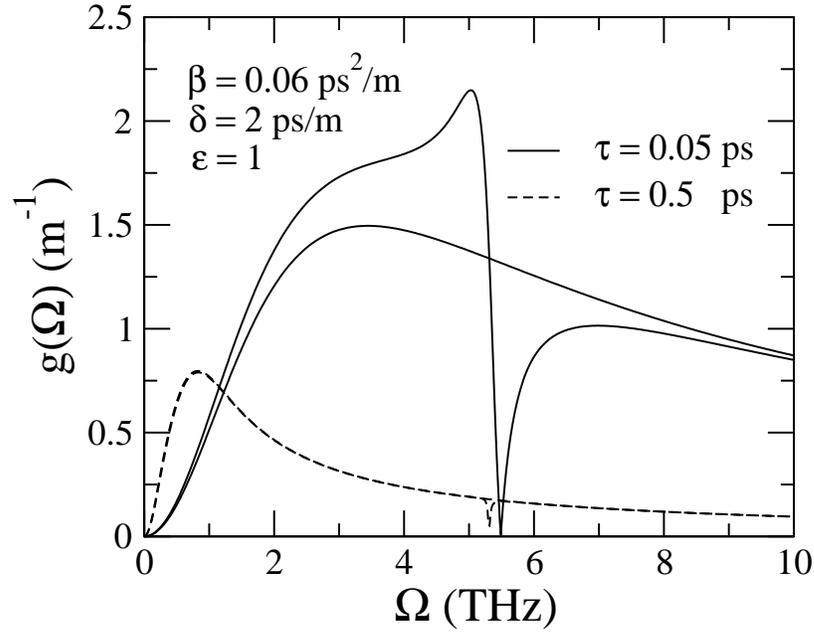


Figura 4.5: Espectros de ganho $g(\Omega)$ da instabilidade modulacional para o regime de dispersão normal para distintos tempos de resposta. A diferença das velocidades de grupo é $\delta = 2$ ps/m. Aqui, uma das bandas Raman coalesce com a banda instantânea. Para grandes tempos de resposta, as bandas Raman apresentam ganhos similares, exceto na vizinhança da frequência específica que tem um único modo instável.

e na Figura (4.5) ($\delta = 2$ ps/m). Para o caso de diferença das velocidades de grupo nula, observamos que quanto maior o tempo de resposta τ , menor será o fator de ganho. Além do que nota-se que a banda Raman se desloca para frequências menores e coalesce com a banda instantânea. Incrementando-se ainda mais o tempo de resposta, resulta no desaparecimento da IM. Por outro lado, para $\delta = 2$ ps/m, a banda de ganho não-instantânea se concentra no intervalo de frequência abaixo do intervalo correspondente da banda instantânea. De igual modo, observa-se o desaparecimento do ganho de IM quando o tempo de resposta é suficientemente aumentado. Pode-se concluir também que a frequência particular na qual apenas um modo é instável depende fracamente do tempo de resposta não-linear.

Vamos investigar mais precisamente a papel desempenhado pelo tempo de resposta τ . Divulgamos nas Figura (4.6)-(4.7) ($\delta = 0$) e nas Figuras (4.8)-(4.9)

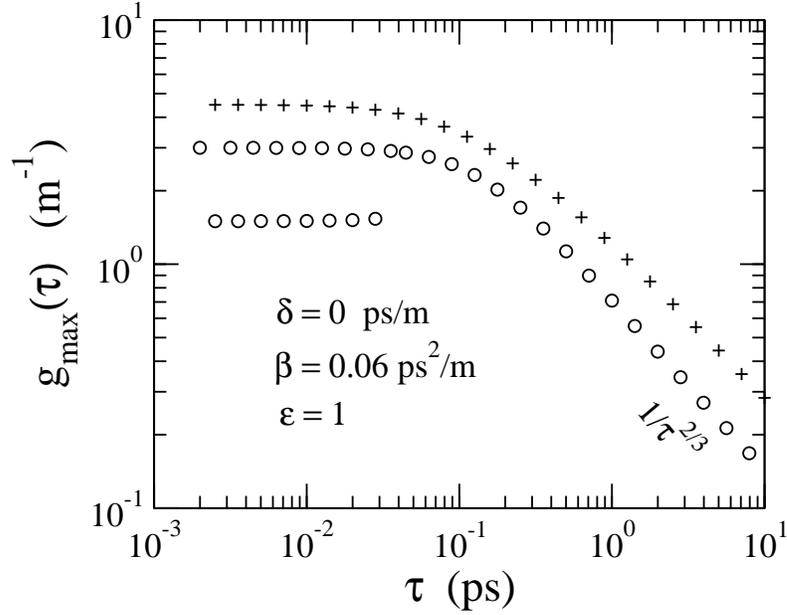


Figura 4.6: Valores de máximos locais dos ganhos para cada banda de instabilidade dos espectros de ganho como função do tempo de resposta τ e uma diferença de velocidade de grupo nula $\delta = 0$. Um modo apresenta ambas as bandas Raman e instantânea para pequenos valores de τ (círculos), enquanto o segundo modo apresenta uma única banda Raman (cruzes). O valor máximo do ganho de IM em cada banda permanece praticamente constante no regime de relaxação rápida (ou seja, pequenos valores de τ), com o ganho na banda instantânea sendo a média do ganho nas bandas Raman. Depois da coalescência da banda instantânea com uma das bandas Raman, o ganho começa a decrescer com $1/\tau^{2/3}$.

($\delta = 2 \text{ ps/m}$) o ganho máximo local e a frequência correspondente em cada banda de instabilidade para um valor fixo da razão entre as potências dos feixes $\varepsilon = 1$. Para o caso onde $\delta = 0$, o ganho máximo de todas as três bandas de instabilidade (a banda instantânea e as duas bandas Raman) são aproximadamente independentes do tempo de resposta da não-linearidade do meio que apresenta resposta rápida (pequenos valores de τ), conforme Figura (4.6). Entretanto, no regime de respostas não-lineares lentas (grandes valores de τ), a banda instantânea e a banda Raman de um dos modos instável coalescem. Ambas as bandas remanescentes apresentam um ganho máximo que decresce de acordo com a lei de potência $1/\tau^{2/3}$. A frequência na qual o ganho na banda instantânea é máximo não depende do tempo de resposta,

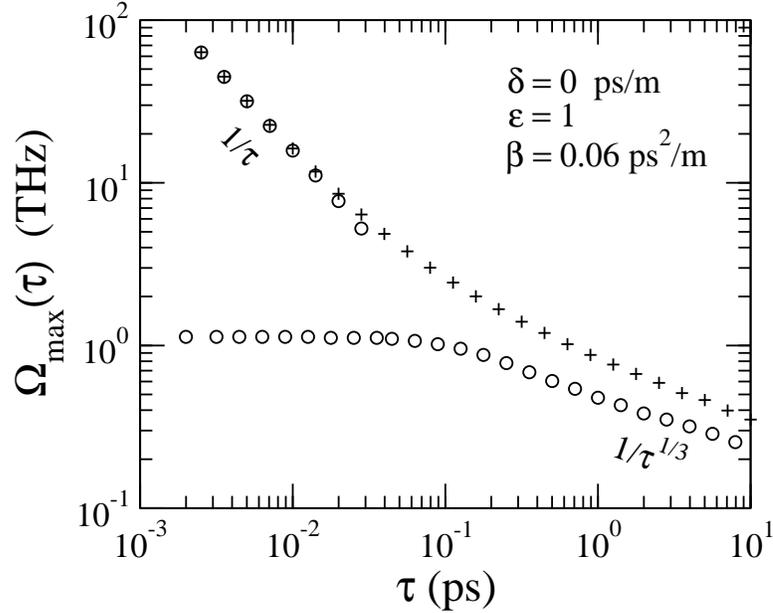


Figura 4.7: Frequência típica do ganho máximo local Ω_{\max} em cada ramo de instabilidade como uma função do tempo de resposta τ e diferença de velocidade de grupo nula $\delta = 0$. Os símbolos são os mesmo utilizados na Figura (4.6). Para pequenos valores de τ , a frequência de ganho máximo de IM da banda instantânea não depende do tempo de resposta, enquanto que na banda Raman o decaimento segue a lei $1/\tau$. Por outro lado, no regime de relaxação lenta (τ grande), observa-se um decaimento mais lento $\Omega_{\max} \propto \tau^{1/3}$.

de acordo com a Figura (4.7). Por outro lado, as frequências que correspondem ao ganho máximo nas bandas Raman decaem com $1/\tau$ no regime de respostas rápidas, apresentando um decaimento mais lento proporcional a $1/\tau^{1/3}$ em meios que respondem mais lentamente.

A situação muda quando $\delta = 2$ ps/m. Acima da frequência na qual apenas um dos modos é instável, surge uma banda de instabilidade cujo ganho máximo decai com $1/\tau$ para tempos de resposta grandes, como podemos ver na Figura (4.8). A frequência na qual esse ganho é máximo se aproxima de um valor finito para grandes valores de τ cujo limite é o valor assintótico observado para a banda instantânea [ver Figura(4.9)]. Entretanto, o ganho máximo na banda coalescida exibe um decaimento menos acentuado proporcional a $1/\tau^{2/3}$ e as frequências correspondentes

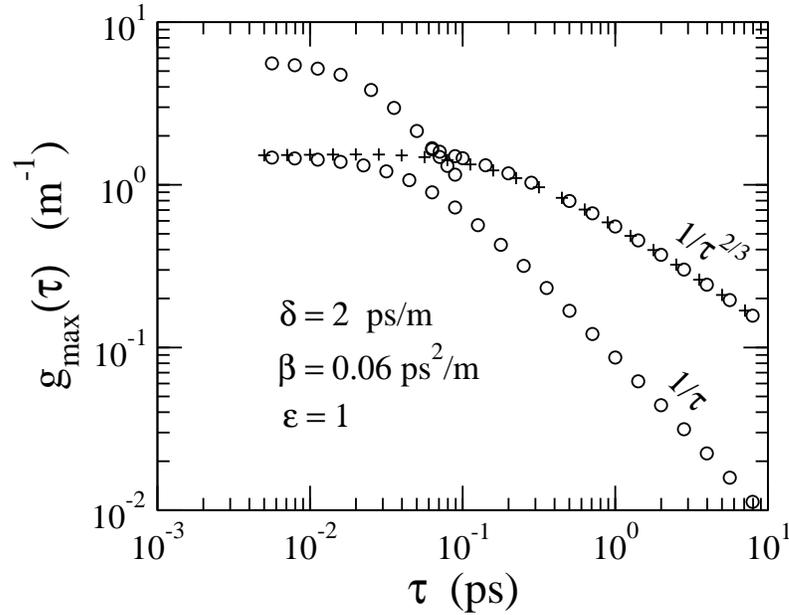


Figura 4.8: Valores de máximos locais para cada banda de instabilidade dos espectros de ganho como função do tempo de resposta τ e uma diferença de velocidade de grupo fixa $\delta = 2\text{ps/m}$. Os símbolos são os mesmo utilizados na Figura (4.6). Um máximo local extra surge na região de cruzamento das bandas. Neste caso, o ganho máximo da banda instantânea é maior do que nas bandas Raman na região de resposta não-linear rápida (τ pequeno). No regime para τ grande, o ganho na banda com frequências correspondentes baixas decai com $1/\tau^{2/3}$ (cruzes), enquanto que o segundo ganho máximo que ocorre em frequências maiores apresenta um decrescimento mais rápido τ .

a esses máximos decaem com $1/\tau^{1/3}$, similar ao observado para o caso de pequenos valores para a diferença das velocidades de grupo. Observe que existe uma janela de frequências onde o espectro de ganho apresenta quatro máximos locais.

Para se ter uma visão geral do papel desempenhado pela interação da MFC e da resposta não-linear atrasada sobre a IM, plotamos na Figura (4.10), em cores, o ganho total (a soma dos ganhos em ambos os modos instáveis) em função da frequência Ω e do tempo de resposta τ para o caso $\delta = 0$. Usamos $\varepsilon = 3$ para possibilitar uma melhor visualização devido ao gradiente de cores, uma vez que o ganho é amplificado devido ao incremento da MFC. Podemos diferenciar facilmente as duas bandas de ganho para pequenos valores de τ . A primeira banda que ocorre

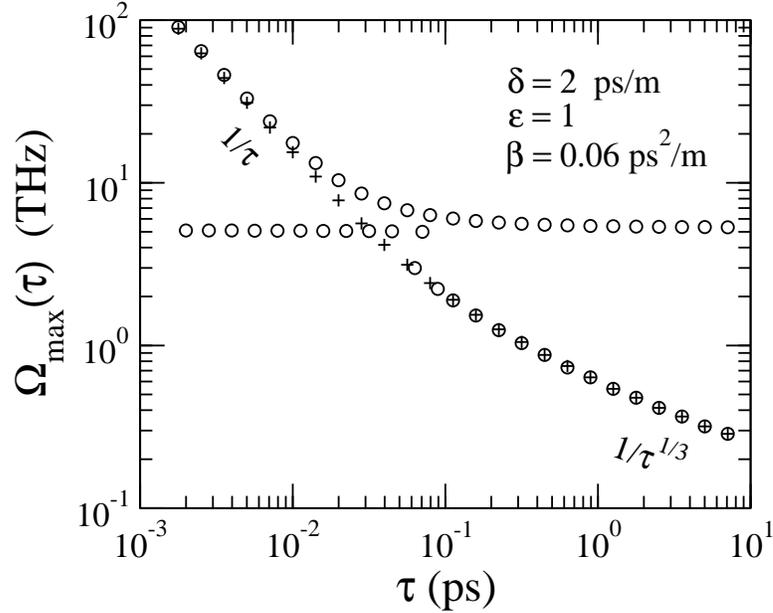


Figura 4.9: Frequência típica do ganho máximo local Ω_{\max} em cada ramo de instabilidade como uma função do tempo de resposta τ e diferença de velocidade de grupo finita $\delta = 2 \text{ ps/m}$. Os símbolos são os mesmo utilizados na Figura (4.6). No regime de pequenos valores de τ , o comportamento é similar ao caso de diferença de velocidade de grupo nula, ou seja, $\Omega_{\max} \approx \text{cte}$. Por outro lado, no regime de relaxação lenta (τ grande), observa-se que uma banda é limitada pelo valor da banda instantânea, enquanto que $\Omega_{\max} \propto \tau^{1/3}$ na banda coalescida.

em baixas frequências surge devido a instabilidade inerente dos meios que respondem instantaneamente. A segunda banda em altas frequências é a banda Raman. Essa figura mostra claramente o deslocamento da banda Raman com o aumento do tempo de resposta até a coalescência destas bandas de instabilidade, além do decréscimo do ganho no regime de resposta lenta.

Por fim, o principal efeito devido a diferença da velocidade de grupo é apresentado na Figura (4.11). Plota-se, colorido, o ganho total em função da frequência e da diferença da velocidade de grupo δ para o caso particular de uma resposta não-linear rápida $\tau = 0,01 \text{ ps}$. No regime de diferença de velocidade de grupo pequena, a banda instantânea e as bandas Raman são facilmente diferenciadas, com o ganho na banda Raman maior do que na banda instantânea. Contudo, o ganho na banda

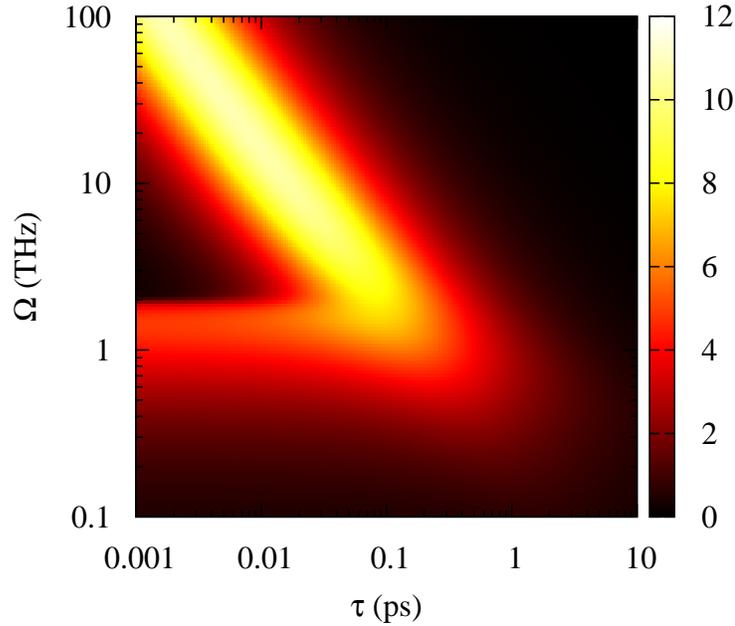


Figura 4.10: Ganho total como função da frequência Ω e do tempo de resposta τ para o caso de diferença de velocidade de grupo nula. Aqui $\varepsilon = 3$ e os demais parâmetros são os mesmos utilizados nas outras figuras deste capítulo. Para pequenos valores de τ , as bandas instantâneas e Raman podem ser facilmente diferenciadas. Quando aumenta-se o valor de τ , a banda Raman é deslocada para frequências menores. Essas bandas coalescem em uma banda com ganho menor em frequências menores no regime de relaxação lenta (τ grande).

Raman é suprimido a medida que δ aumenta. Ele atinge um valor da ordem do ganho máximo da banda instantânea quando $\delta = 0$ [veja as Figura (4.2) e (4.3)]. O ganho na banda instantânea, por sua vez, aumenta com δ , dobrando seu valor máximo no regime de grandes valores de δ . Além do mais, para $\delta \gg \delta_c$, a frequência típica da banda instantânea cresce linearmente com δ . As bandas instantâneas e Raman se superpõem na região de cruzamento.

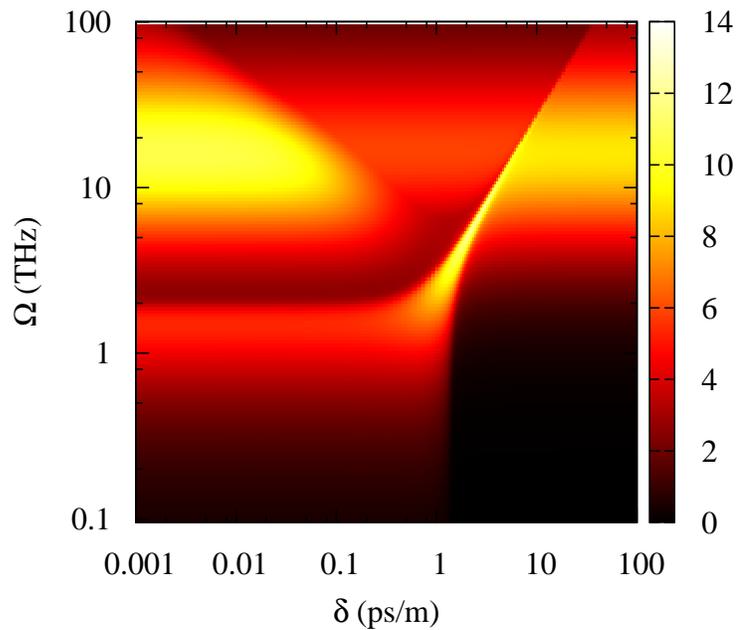


Figura 4.11: Ganho total como função da frequência Ω e da diferença da velocidade de grupo δ para o caso da resposta não-linear rápida $\tau = 0,01\text{ps}$. Novamente $\varepsilon = 3$ e os demais parâmetros são os mesmos utilizados nas outras figuras deste capítulo. As bandas instantâneas e Raman podem ser facilmente diferenciadas para pequenos valores de δ . Enquanto que, em ambas as bandas, suas frequências típicas são fracamente dependentes de δ neste regime, o ganho na banda instantânea aumenta com δ enquanto que a banda Raman apresenta tendência oposta. No regime de grandes valores de δ , a frequência típica da banda instantânea aumenta linearmente com δ e o ganho da IM se torna o dobro da ganho para pequenos valores de δ . A banda Raman, por sua vez, permanece concentrada em uma frequência constante.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas de Trabalhos Futuros

Nesta tese, realizamos um estudo detalhado da IM em fibras ópticas com resposta não-linear do tipo Kerr com atraso e sujeita a MFC em virtude do acoplamento incoerente de dois feixes copropagantes com diferentes frequências e mesma polarização devido ao índice de refração dependente da intensidade dos feixes. Modelamos esse sistema introduzindo não-linearidades dependentes do tempo em extensões das equações não-lineares de Schrödinger que governam a evolução temporal das ondas propagantes no regime de envelope que varia lentamente. De fato, utilizamos o modelo de relaxação de Debye para incorporar os efeitos não-instantâneos da resposta não-linear.

Considerando-se pequenas perturbações harmônicas para as soluções estacionárias, encontramos, de modo exato, a relação de dispersão para as componentes de Fourier dos campos perturbantes que inclui tanto os efeitos de MFC quanto os efeitos de relaxação e que determina a estabilidade das soluções estacionárias e permite determinar o intervalo de frequência para qual ocorre IM.

Mostramos que a instabilidade modulacional em meios com respostas não-

lineares atrasadas, que ocorre tanto no regime de dispersão normal quanto anômalo, apresenta, em geral, dois modos harmônicos degenerados e mostram comportamento diferentes para resposta lenta e rápida. Em meios com resposta não-linear rápida, existe uma banda instantânea bem definida e duas bandas Raman associadas com cada um dos modos degenerados. Por outro lado, em meios com resposta não-linear lenta, as bandas Raman são deslocadas para frequências menores e suprimem a banda instantânea.

Os casos para pequenos e grandes valores da diferença da velocidade de grupo também apresentam características diferentes, com a banda instantânea sendo deslocada para frequências mais elevadas com o aumento de δ . A dependência das principais características das bandas de ganho em função de τ e δ também foi apresentada e possui comportamentos de escala distintos para os regimes de pequenos e grandes valores de τ .

Entre as perspectivas de trabalhos futuros incluem-se o estudo similar ao que fizemos neste trabalho para um modelo teórico com saturação da resposta não-linear atrasada, como por exemplo

$$i\frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{i}{v_{g1}}\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{1}{2}\beta_1\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - \gamma_1 N_1 E_1, \quad (5.1)$$

$$i\frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{i}{v_{g2}}\frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} - \gamma_2 N_2 E_2, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \left(-N_1 + \frac{|E_1|^2 + 2|E_2|^2}{1 + \Gamma(|E_1|^2 + 2|E_2|^2)} \right), \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \left(-N_2 + \frac{2|E_1|^2 + |E_2|^2}{1 + \Gamma(2|E_1|^2 + |E_2|^2)} \right), \quad (5.4)$$

onde Γ é o parâmetro de saturação. Note que com $\Gamma = 0$ temos o modelo teórico tratado nesta tese.

Pretende-se também estudar o caso de pulsos contra-propagantes, deste modo

teríamos

$$i \frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{i}{v_{g1}} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \beta_1 \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - \gamma_1 N_1 E_1, \quad (5.5)$$

$$- i \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{i}{v_{g2}} \frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} - \gamma_2 N_2 E_2, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (-N_1 + |E_1|^2 + 2|E_2|^2), \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (-N_2 + 2|E_1|^2 + |E_2|^2). \quad (5.8)$$

Em outro contexto, pode-se proceder o estudo da instabilidade modulacional para os regime de resposta não-linear rápida e lenta para um sistema de ENLS acopladas coerentemente considerando-se os efeitos da MQO através das equações (extensão do modelo apresentado em [74])

$$i \frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{i}{v_{g1}} \frac{\partial E_1}{\partial t} - \alpha E_1 = \delta \beta_1 \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - \gamma_1 N_1 E_1 - \lambda E_2^2 E_1^*, \quad (5.9)$$

$$i \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{i}{v_{g2}} \frac{\partial E_2}{\partial t} + \alpha E_2 = \delta \beta_2 \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} - \gamma_2 N_2 E_2 - \lambda E_1^2 E_2^*, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (-N_1 + |E_1|^2 + \sigma |E_2|^2), \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (-N_2 + \sigma |E_1|^2 + |E_2|^2). \quad (5.12)$$

no qual espera-se que o acoplamento coerente aumente o intervalo de IM induzida por MFC, onde podemos estudar os casos com $\delta = \pm 1/2$. Os símbolos σ e λ representam os efeitos da MFC e MQO, respectivamente.

Além do mais, para se estudar a evolução da IM longe do regime linear, pretendemos fazer simulações numéricas usando os algoritmos “split step” de Fourier. Em todo caso, esperamos que a presente tese estimule novos experimentos que per-

mitam comprovar a fenomenologia da interação entre os efeitos de MFC e da resposta não-linear atrasada aqui apresentada.

Referências Bibliográficas

- [1] J. A. J. Ribeiro, *Comunicações Ópticas*. (Editora Érica, São Paulo-SP, 2009).
- [2] J. R. A. Amazonas, *Projeto de Sistemas de Comunicações Ópticas*. (Editora Manole, Barueri-SP, 2005).
- [3] G.P. Agrawal, *Fiber-Optic Transmission Systems*. (John Wiley & Sons, New York, 1992).
- [4] M.K. Barnoski, *Fundamentals of Optical Fiber Communications*. (John Wiley & Sons, New York, 1981).
- [5] G. Keiser, *Optical Communications*. (McGraw-Hill, 1991).
- [6] G. Lachs, *Fiber Optic Communications: Systems, Analysis and Enhancements*. (McGraw-Hill Telecommunications, 1998).
- [7] A. E. Karbowiak, The birth of optical communications, *Proc. IEE* **133**, 202 - 204 (1986).
- [8] J.C. Palais, *Fiber Optic Communications*. (Prentice-Hall, 1988).
- [9] P.E. Green Jr., *Fiber-Optic Network*. (Prentice-Hall, 1993).
- [10] J.G. Proakis and M. Salehi, *Communication Systems Engineering*. (Prentice-Hall, 1994).

-
- [11] W. Haas, Technological evolution in transmission systems, *Electrical Communications* **52**, 283 - 288 (1977).
- [12] A. Cozant, J. Fleuret, H. Maître and M. Rosseau, *Optique e Télécommunications*. (Eyrolles, 1981).
- [13] R.J. Hoss, *Fiber Optic communications design handbook*. (Prentice-Hall, 1990).
- [14] C.K. Kao, *Optical Fiber Systems: technology, design, and applications* (McGraw-Hill, 1986).
- [15] A.E. Siegman, *Lasers*. (Oxford University Press, Oxford, 1986).
- [16] A.E. Siegman, *An Introduction to Lasers and Masers*. (McGraw-Hill, 1971).
- [17] S Singh, *Handbook of Lasers*. (Chemical Rubber Co., Cleveland, 1971).
- [18] G.P. Agrawal and N. Dutta, *Semiconductor Lasers*. (Van Nostrand Reinhold, New York, 1993).
- [19] J.-C. Diels and W. Rudolph, *Ultrashort Laser Pulse Phenomena*. (Academic Press, 1996).
- [20] H. Zanger and C. Zanger, *Fiber Optics: Communications and other applications*. (Macmillan, New York, 1991).
- [21] A. Billings, *Optics, optoelectronics and photonics: engineering principles and applications*. (Prentice-Hall, New York, 1993).
- [22] X.M. Liu and M.D. Zhang, Theoretical study for thermal/electric field poling of fused silica. *Japanese Journal of Applied Physics part 1 - Regular Papers Short Notes & Review Papers* **40**, 4069 - 4076 (2001).

- [23] Y. Quiquempois, P. Niay, M. Douay and B. Poumellec, Advances in poling and permanently induced phenomena in silica-based glasses. *Current Opinion in Solid State & Materials Science* **7**, 89-95 (2003).
- [24] A.J. Ikushima, T. Fujiwara and K. Saito, Silica glass: A material for photonics. *Journal of Applied Physics* **88**, 1201 - 1213 (2000).
- [25] B.E.A. Saleh and M.C. Teich, *Fundamentals of Photonics*. (John Wiley & Sons, New York, 1991).
- [26] J. Frejlich, *Photorefractive Materials -Fundamental Concepts, Holographic Recording and Materials Characterization*. (Jonh Wiley & Sons, Campinas-SP, Brazil, 2007).
- [27] P. Yeh, *Introduction to Photorefractive Nonlinear Optics*. (Wiley Series in Pure and Applied Optics, John Wiley & Sons, New York, 1993).
- [28] J. Wilson and S.F.B. Hawkes, *Optoelectronics: An Introduction*. (Prentice-Hall, 1989).
- [29] P. Bhattacharya, *Semiconductor Optoelectronics*. (Prentice-Hall, New York, 1994).
- [30] A. Yariv, *Optical Electronics*. (John Wiley & Sons, New York, 1988).
- [31] C.C. Davis, *Lasers and electro-optics: fundamentals and engineering*. (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [32] K.A. Jones, *Introduction to Optical Electronics*. (John Wiley & Sons, New York, 1987).
- [33] J.T. Verdeyen, *Laser eletronics*. (Prentice-Hall, 1982).
- [34] W. Stallings, *Data and Computer Communications*. (Prentice-Hall, 1997).

- [35] H.H. Hopkins, N.S. Kapany, A flexible fibrescope using static scanning, *Nature* **173**, 39 - 41 (1954).
- [36] N. S. Kapany, *Fiber Optics: Principles and Applications*. (Academic Press, New York, 1967).
- [37] A. Hasegawa and F. Tappert, Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142 - 144 (1973).
- [38] A. Hasegawa and F. Tappert, Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 171 - 172 (1973).
- [39] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*. (Academic Press, New York, 1995).
- [40] M.J. Adams, *An Introduction to Optical Waveguide*. (John Wiley & Sons, New York, 1981).
- [41] E. A. Lacy, *Fiber Optics*. (Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, 1989).
- [42] J. A. Buck, *Fundamentals of Optical Fibers*. (John Wiley, New York, 1995).
- [43] J. Hecht, *Understanding Fiber Optics*. (Howard W. Sams, Indianapolis, 1987).
- [44] T. Okoshi, *Optical Fibers*. (Academic Press, Orlando, 1982).
- [45] C. Yeh, *Handbook of Fiber Optics*. (Academic Press, San Diego, 1990).
- [46] W.F. Giozza, E. Conforti, H. Waldman, *Fibras Ópticas*. (Makron Books, São Paulo-SP, 1991).
- [47] A. Ghatak, K. Thyagarajan, *Introduction Fiber Optics*. (Cambridge University Press, New Delhi, 1997).

- [48] J.M. Senior, *Optical fibers communications: principles and practice*. (Prentice-Hall, London, 1985).
- [49] Grant R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*. (Dover, New York, 1975).
- [50] E. Hecht, *Optics*. (McGraw-Hill, New York, 1975).
- [51] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*. (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
- [52] M.V. Klein and T.F. Furtak, *Optics*. (Jonh Wiley & Sons, New York, 1986).
- [53] A.K. Ghatak, *Optics*. (McGraw-Hill, New Delhi, 1992).
- [54] D. Marcuse, *Light Transmission Optics*. (Van Nostrand Reinhold, New York, 1982).
- [55] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*. (McGraw-Hill Book Company, San Francisco, 1968).
- [56] J. W. Goodman, *Introduction à l'optique de Fourier et l'holographie*. (Masson, 1972).
- [57] R.W. Boyd, *Nonlinear Optics*. (Academic Press, New York, 2003).
- [58] A.L. Moura, *Dissertação de Mestrado: "Processo alternativo de polarização termo-elétrica de indução e caracterização de não-linearidade de segunda ordem em vidros soda-lime"*, (UFAL, Maceió-AL, 2009).
- [59] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*. (John Wiley & Sons, New York, 1996).
- [60] G.C. Baldwin, *An Introduction to Nonlinear Optics*. (Plenum Press, New York, 1969).

- [61] N. Bloembergen, *Nonlinear Optics*. (Benjamin, New York, 1964).
- [62] P.N. Butcher and D. Cotter, *The Elements of Nonlinear Optics*. (Cambridge University Press, New York, 1990).
- [63] D.N. Klyshko, *Photons and Nonlinear Optics*. (Gordon and Breach, New York, 1988).
- [64] E.G. Sauter, *Nonlinear Optics*. (Wiley, New York, 1996).
- [65] S.Ramo, J.R. Whinnery and T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communications electronics*. (John Wiley & Sons, New York, 1994).
- [66] Y.R. Shen, *The Principles of Nonlinear Optics*. (Wiley, New York, 1984).
- [67] F. Zernike and J.E. Midwinter, *Applied Nonlinear Optics*. (Wiley, New York, 1973).
- [68] D.K. Basu, *Dictionary of Pure and Applied Physics*. (CRC Press, New York, 1983).
- [69] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. (Jonh Wiley & Sons, New York, 1975).
- [70] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. (Prentice-Hall, New Jersey, 1999).
- [71] J.D. Kraus, *Electromagnetics*. (McGraw-Hill, New York, 1992).
- [72] M.L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. (Jonh Wiley & Sons, New York, 1983).
- [73] G.L. da Silva, *Dissertação de Mestrado: “Da Instabilidade Modulacional em fibras sem perdas com resposta não-linear atrasada e saturável”*, (UFAL, Maceió-AL, 2009).

- [74] H.S. Chiu, K.W. Chow, “Effect of birefringence on the modulation instabilities of a system of coherently coupled nonlinear Schrödinger equations,” *Phys. Rev. A* **75**, 065803 (2009).
- [75] V. E. Zakharov, L. A. Ostrovsky, Modulation Instability: The beginning, *Physica D* **238**, 540 - 548 (2009).
- [76] M. L. Lyra, A. S. Gouveia Neto, “Saturation effects on modulational instability in non-Kerr-like monomode optical fibers,” *Opt. Comm.* **108**, 117-120 (1994).
- [77] T. Hansson, D. Anderson, M. Lisak, V.E. Semenov, U. Österberg, “Quasilinear evolution and saturation of the modulational instability of partially coherent optical waves,” *Phys. Rev. A* **78**, 011807(R) (2008).
- [78] M. Centurion, M.A. Porter, Y. Pu, P.G. Kevrekidis, D.J. Frantzeskakis, D. Psaltis, “Modulational instability in nonlinearity-managed optical media,” *Phys. Rev. A* **75**, 063804 (2007).
- [79] M. Stepić, A. Maluckov, M. Stojanović, F. Chen, D. Kip, “Modulational instability and solitary waves in one-dimensional lattices with intensity-resonant nonlinearity,” *Phys. Rev. A* **78**, 043819 (2008).
- [80] V.V. Konotop and M. Salerno, “Modulational instability in Bose-Einstein condensates in optical lattices,” *Phys. Rev. A* **65**, 021602 (2002).
- [81] L.D. Carr and J. Brand, “Spontaneous soliton formation and modulational instability in Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040401 (2004).
- [82] G. P. Agrawal, Modulation Instability Induced by Cross-Phase Modulation, *Phys. Rev. Lett.* **59**, (1987) 880 - 883.

- [83] G. P. Agrawal, P. L. Baldeck, and R. R. Alfano, Modulation Instability Induced by Cross-Phase Modulation in optical fibers, *Phys. Rev. A* **39**, 3406 - 3413 (1989).
- [84] M. Yu, C.J. McKinstree, and G.P. Agrawal, "Instability due to crossphase modulations in the normal-dispersion regime," *Phys. Rev. E* **48**, 2178-2183 (1993).
- [85] S.B. Cavalcanti, M.L. Lyra, "Modulational instability of ultrashort pulses via a generalized nonlinear Schrödinger equation with deviating arguments," *Phys. Lett. A* **211**, 276-280 (1996).
- [86] X. Liu, J. W. Haus, S. M. Shahriar, "Modulation instability for a relaxational Kerr medium," *Opt. Comm.* **281**, 2907-2912 (2008).
- [87] T. Tanemura, K. Kikuchi, "Unified analysis of modulational instability induced by cross-phase modulation in optical fibers," *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 2502-2514 (2003).
- [88] X. Zhong, A. Xiang, "Cross-phase modulation induced modulation instability in single-mode optical fibers with saturable nonlinearity," *Opt. Fib. Tech.* **13** 271 - 279 (2007).
- [89] K.J. Blow, D. Wood, "Theoretical description of transient stimulated Raman scattering in optical fibers," *J. Quantum Electron.* **24**, 2665-2673 (1989).
- [90] G.L. da Silva, I. Gleria, M.L. Lyra, A.S.B. Sombra, "Modulational instability in lossless fibers with saturable delayed nonlinear response," *J. Opt. Soc. Am. B* **26**, 183-188 (2009).
- [91] A.S. Gouveia-Neto, M.E. Faldon, A.S.B. Sombra, P.G.J. Wigley, J. R. Taylor,

- “ Subpicosecond-pulse generation through cross-phase-modulation-induced modulation instability in optical fibers,” *Opt. Lett.* **13**, 901-903 (1988).
- [92] D. Schadt, B. Jaskorzynska, “Generation of short pulses from CW light by influence of crossphase modulation (CPM) in optical fibers,” *Electron. Lett.* **23**, 1090 (1987).
- [93] E. Kengne, S.T. Chui, and W.M. Liu, “Modulational instability criteria for coupled nonlinear transmission lines with dispersive elements,” *Phys. Rev. E* **74**, 036614 (2006).
- [94] M.Z. Wu and B.A. Kalinikos BA, “Coupled modulational instability of co-propagating spin waves in magnetic thin films,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 027206 (2008).
- [95] K.W. Chow, K.K.Y. Wong, K. Lam, “Modulation instabilities in a system of four coupled, nonlinear Schrödinger equations,” *Phys. Lett. A* **372**, 4596-4600 (2008).
- [96] W. Zhou, W. Su, X. Cheng, Y. Xiang, X. Dai, S. Wen, “Copropagation of two pulses of different frequencies and modulation instabilities induced by cross-phase modulation in metamaterials,” *Opt. Comm.* **282**, 1440-1447 (2009).
- [97] W.-H. Chu, C.-C. Jeng, C.-H. Chen, Y.-H. Liu, M.-F. Shih, “Induced spatiotemporal modulational instability in a noninstantaneous self-defocusing medium,” *Opt. Lett.* **30**, 1846-1848 (2005).
- [98] L. Zhang, S. Wen, X. Fu, J. Deng, J. Zhang, D. Fan, “Spatiotemporal instability in dispersive nonlinear Kerr medium with a finite response time,” *Opt. Comm.* **283**, 2251-2257 (2010).

- [99] C. Cambournac, H. Maillote, E. Lantz, J.M. Dudley, M. Chauvet, “Spatiotemporal behavior of periodic arrays of spatial solitons in a planar waveguide with relaxing Kerr nonlinearity,” *J. Opt. Soc. Am. B* **19**, 574-585 (2002).
- [100] M.-F. Shih, C.-C. Jeng, F.-W. Sheu, C.-Y. Lin, “Spatiotemporal Optical Modulation Instability of Coherent Light in Noninstantaneous Nonlinear Media,” *Phys. Rev. Lett.* **88**, 133902 (2002).
- [101] H. Leblond, C. Cambournac, “Spatial modulation instability of coherent light in a weakly-relaxing Kerr medium,” *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **6**, 461-468 (2004).
- [102] U. Streppel, D. Michaelis, R. Kowarschik, A. Bräuer, “Modulational Instability in Systems with Integrating Nonlinearity,” *Phys. Rev. Lett.* **95**, 073901 (2005).
- [103] C.-S. Chou and M.-F. Shih, “Slow light achieved by non-instantaneous modulation instability,” *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **11**, 105204 (2009).
- [104] I. Velchev, R. Pattnaik, J. Toulouse, “Two-Beam Modulation Instability in Noninstantaneous Nonlinear Media,” *Phys. Rev. Lett.* **91**, 093905 (2003).
- [105] W.H. Press, B.P. Flannery, S.E. Teukolsky and W.P. Vetterling, *Numerical Recipes*. (Cambridge University Press, New York, 1986).

Índice Remissivo

- ângulo de aceitação, 8
- abertura numérica, 8
- automodulação de fase, 6, 43, 44, 47
- Bell, Alexander Graham, 3
- birefringência, 6
- Bohr, Niels (1885 - 1962), 10
- Bose-Einstein, condensados, 70
- coeficientes de Sellmeier, 21
- comprimento de onda, 14
- constante de propagação, 14
- dinâmica de fluidos, 70
- dispersão
 - cromática, 20
 - da velocidade de grupo, 22
 - de guia de onda, 20
 - material, 20
- efeito
 - fotoelétrico, 10
 - Kerr eletroóptico, 49
 - Raman, 43
 - efeito Kerr eletroóptico, 43
 - efeitos de saturação, 37
- Einstein, Albert (1879 - 1955), 10
- eletrodinâmica quântica, 10
- equação de Helmholtz, 34, 36
- equação de onda, 12
- equação de Sellmeier, 20
- equações de Maxwell, 26, 27
- espalhamento de Brillouin, 57
- espalhamento Raman estimulado, 6, 48, 57, 67
- fótons, 4
- Física dos plasmas, 70
- fotônica, 4
- fotofone, 3
- frequência angular, 14
- geração de harmônico, 57
- giroscópios, 5
- heliógrafos, 3
- hidrofone, 5
- Huygens, Christiaan (1629 - 1695), 9

- identidade de Euler, 16
- instabilidade modulacional, vii, 21, 43, 50, 54, 55
- internet, 2
- Kapany, Narinder Singh (1927 -), 6
- Kerr, John (1824-1907), 49
- lei de Hooke, 26
- luz lenta, 72
- Maxwell, James Clerk (1831-1879), 9
- Mecânica Quântica, 28
- meios
- ópticos, 18
 - autodefocalizadores, 72
 - autofocalizadores, 72
 - isotrópicos não-condutores, 12
- mistura de quatro ondas, 6, 57
- modelo de relaxação de Debye, 74, 76, 98
- modulação de fase cruzada, vii, 2, 23, 43, 57, 69, 71
- número de onda, 14
- Newton, Isaac (1642 - 1727), 9
- ondas eletromagnéticas, 9
- ondas harmônicas planas, 14
- período, 14
- Planck, Max (1858 - 1947), 10
- polimento óptico, 4
- Raman, Chandrasekhara Venkata (1888-1970), 66
- reflexão interna total, 5–8
- regra de Cramer, 64, 82
- sólitons, 31, 42, 45, 71
- sólitons ópticos, x, 50
- semáforos, 3
- Sistema Internacional de Unidades, 26
- teoria
- de Maxwell, 10
 - quântica, 10
 - quântica da luz, 10
- Teoria Eletromagnética, ix, 24
- transformadas de Fourier, 35, 53
- Tyndall, John (1820 - 1893), 5
- velocidade de fase, 14
- velocidade de grupo, 17
- vetor de onda, 15
- vetor de propagação, 15