

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL

INSTITUTO DE FÍSICA - IF

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

*Solução variacional para um
condensado atrativo e colapsante*

Adriano Malta Lôbo

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Solange Bessa Cavalcanti

Co-orientador: Prof^o. Dr. Valery S. Shchesnovich

Maceió-AL

Mai-2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL

INSTITUTO DE FÍSICA - IF

SOLUÇÃO VARIACIONAL PARA UM CONDENSADO ATRATIVO E
COLAPSANTE

Adriano Malta Lôbo

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto
de Física da Universidade Federal de Alagoas, pa-
ra obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Solange Bessa Cavalcanti

Co-orientador: Prof^o. Dr. Valery S. Shchesnovich

Maceió - AL

Maio – 2009

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Maria Auxiliadora Gonçalves da Cunha

L799s Lôbo, Adriano Malta.
 Solução variacional para um condensado atrativo e colapsante /
 Adriano Malta Lôbo. – Maceió, 2009.
 31 f. :

 Orientador: Solange Bessa Cavalcanti.
 Co-Orientador: Valery S. Shchesnovich.
 Dissertação (mestrado em Ciências) – Universidade Federal de Alagoas.
 Instituto de Física. Maceió, 2009.

 Bibliografia: f. 28-31.

 1. Partículas de Base-Einsten. 2. Solução variacional. 3. Equação de
 Gross-Pitaevskii. 4. Condensado colapsante. 5. Bosenova. I. Título.

CDU: 531.85



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL, Brasil
FONE : (82) 3214-1423/FAX : 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

***“Solução variacional para um condensado
atrativo e colapsante”***

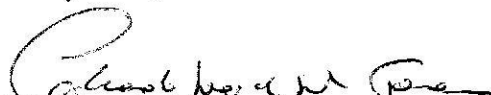
por

Adriano Malta Lôbo

A Banca Examinadora composta pelos professores Solange Bessa Cavalcanti (Orientadora), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Eduardo Jorge da Silva Fonseca, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Luiz Eduardo Oliveira, do Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas, consideram o candidato aprovado com grau “ **A** ”.

Maceió, 29 de maio de 2009


Prof. Solange Bessa Cavalcanti


Prof. Eduardo Jorge da Silva Fonseca


Prof. Luiz Eduardo Oliveira

Ao meu filho Matheus Fellipe Barbosa de Amorim Malta Lôbo

Agradecimentos

- Em primeiro lugar, agradeço a professora Solange por ter me orientado e incentivado desde a minha graduação até a conclusão desta tese, muitas vezes acreditando mais em mim que eu mesmo.
- A minha esposa Yonne e a meu filho Matheus por terem me fornecido todo o afeto necessário para que eu seguisse em frente nas horas difíceis de minha vida.
- A minha mãe que sempre fez tudo que estava a seu alcance para que eu concluísse esta tese.
- A todos meus outros familiares que também sempre me apoiaram.
- Ao professor Kleber Serra que também sempre me incentivou (de seu jeito peculiar) desde a graduação. E também por me arrumar trabalho quando foi necessário.
- Ao professor Valery pela co-orientação imprescindível para esta tese.
- A todos professores que também fizeram parte de minha formação acadêmica e contribuíram de alguma forma para esta tese, meus sinceros agradecimentos.
- Aos meus amigos, Ildemir, Cícero, Marcelo, Wagner, Willamys e Agnaldo que me ajudaram de forma direta na construção de minha tese.
- A todos meus amigos e colegas do IF e da Ufal que me proporcionaram momentos de alegria e de colaboração durante minha formação acadêmica.
- Ao pessoal do racha de quarta-feira pelos rachas de quarta-feira.
- Aos funcionários do IF.
- Aos meus amigos que também sempre me orientaram de alguma forma.
- A CAPES e FAPEAL pelo apoio financeiro.
- As pessoas que me esqueci de agradecer agora e que depois podem vir me cobrar o agradecimento.

Resumo

Entre o vasto leque de experiências notáveis em condensados de Bose-Einstein diluídos, foi observada a dinâmica de condensados atrativos exibindo colapso e subsequente explosão. Para condensados atrativos, o colapso ocorre quando o número de átomos N torna-se maior que um valor crítico N_c , $N > N_c$. Após um colapso, o número de átomos no condensado é reduzido tal que, para N abaixo de N_c uma configuração estável é atingida. Aumentando o número de átomos no condensado até o ponto onde $N > N_c$ outro colapso é induzido e, assim por diante, esse processo será repetido e uma série de colapsos pode ser observada.

Neste trabalho, nós investigamos analiticamente o comportamento do condensado colapsante no âmbito de uma equação de Gross-Pitaevskii não-linear, apropriada para descrever a dinâmica do parâmetro de ordem $\psi(\mathbf{r}, t)$ de um condensado de Bose-Einstein magneticamente aprisionado em um potencial harmônico tridimensional. Colisões inelásticas de dois e três corpos que removem átomos do condensado são incluídas. Usando uma abordagem variacional baseada no princípio de D'Alembert e apropriada para sistemas não-conservativos nós encontramos uma solução analítica para o condensado de Bose-Einstein colapsante. Nós demonstramos que um *ansatz* Gaussiano captura notavelmente bem a seqüência de implosões e explosões observada em condensados atrativos.

Abstract

Among the wide range of remarkable experiments on dilute Bose-Einstein condensates has been the observed dynamics of attractive condensates exhibiting collapse and subsequent explosion. For attractive condensates the collapse occurs when the number of atoms N becomes higher than a critical value N_c . After a collapse, the number of atoms N in the condensate is reduced so that for N below N_c a stable configuration is attained. By increasing the number of atoms in the condensate up to the point where $N > N_c$ a further collapse is induced and so on, this process may be repeated and a series of collapses may be observed.

In this work we investigate analytically the behavior of the collapsing condensate within the framework of a nonlinear Gross-Pitaevskii equation, suitable to describe the dynamics of the order parameter $\psi(\mathbf{r}, t)$ of a Bose-Einstein condensate magnetically trapped in a harmonic three-dimensional potential. Two and three-body inelastic collisions which remove atoms from the condensate are included. By using a variational approach based on d'Alembert's principle and suitable for non-conservative systems we find an analytical solution for a collapsing Bose-Einstein condensate. We demonstrate that a Gaussian ansatz captures remarkably well the sequence of implosion and explosion observed in attractive condensates.

Índice

Folha de rosto.	i
Dedicatória.	ii
Agradecimentos.	iii
Resumo.	iv
Abstract.	v
Índice.	vi
Lista de Figuras.	vii
1 Introdução.	1
2 Equação de Gross-Pitaevskii.	12
3 Solução variacional para um condensado de Bose-Einstein atrativo e colapsante.	18
4 Conclusões e perspectivas.	26
Referências bibliográficas.	28

Lista de Figuras

- Fig. 1** Distribuição de velocidades de átomos de rubídio. À esquerda temos o momento anterior à formação do condensado; no centro o momento em que o condensado se forma; à direita o condensado após uma evaporação adicional. Fonte: Cornell (25). **9**
- Fig. 2** Solução numérica do sistema [2.15-2.18] ilustrando o comportamento dinâmico crítico da amplitude $\alpha_R(t)$, para as condições iniciais $a(0) = 2,99$ (linha tracejada) e $a(0) = 2,999$ (linha contínua). Aqui nós escolhemos $\varepsilon_1 = 0,002, \varepsilon_2 = 0,003, \alpha_R(0) = 1$ **25**

Introdução

A física da matéria condensada está entre os maiores campos da Física da atualidade e responde, por exemplo, por cerca de um terço dos físicos americanos, dada à sua importância para a humanidade. Ela estuda as propriedades macroscópicas de sistemas de muitas partículas onde as interações entre essas partículas são fortes (tal como acontece nos sólidos e líquidos e, inclusive, em “fases exóticas” da matéria como os superfluidos e os condensados bosônicos e fermiônicos). Essas propriedades podem ser, por exemplo, ópticas, mecânicas, elétricas, magnéticas, térmicas entre outras.

O uso e o entendimento da matéria condensada estão ligados aos avanços da civilização desde a pré-história, quando o homem aprendeu a usar as primeiras ferramentas. Estudos científicos mais profundos sobre a natureza da matéria condensada começaram pouco tempo depois da revolução Newtoniana. No final do século XIX nosso entendimento das propriedades macroscópicas da matéria estava bem fundamentado. As propriedades dinâmicas e estáticas de gases, líquidos e sólidos eram explicadas pela hidrodinâmica, pela termodinâmica e pela teoria da elasticidade. Pensava-se que apenas uns poucos problemas (como o problema do corpo negro) ainda estavam em aberto e isso levou o físico escocês Lord Kelvin a pronunciar a célebre frase “Não há nada de novo a ser descoberto na física atualmente. Tudo que resta são medidas mais e mais precisas”. Essa estaticidade da física durou pouco tempo, pois no começo do século XX surgiu a

teoria da relatividade e também os princípios da mecânica quântica. Novos métodos experimentais como a espectroscopia óptica e técnicas de espalhamento auxiliados pela teoria quântica confirmaram a natureza atômica da matéria e resultaram em investigações da matéria condensada ao nível microscópico. Os estudos das propriedades quânticas dos sólidos começaram na década de 1920 e recebem o nome de física do estado sólido. Esses estudos incluem, por exemplo, a teoria de banda eletrônica, a qual explica o comportamento eletrônico de metais, isolantes e semicondutores, a teoria da supercondutividade e o efeito Hall quântico.

Alguns problemas continuam parcialmente solucionados pela teoria do estado sólido, tais como os efeitos de desordem em rede e efeitos de interações coulombianas fortes em sistemas de muitos elétrons. À medida que inovações tecnológicas foram surgindo na área de microscopia, novas partículas foram descobertas e a estrutura da matéria foi cada vez melhor explicada pela física da matéria condensada. As teorias criadas para a física da matéria condensada passaram a ser utilizadas em outros campos da física e também em outras áreas da ciência. Por exemplo, conceitos como o de parâmetros de ordem e de quebras de simetria passaram a ser aplicados desde a física de partículas até à cosmologia. Esses avanços teóricos e tecnológicos proporcionaram um referencial para o entendimento de fases em sistemas da matéria condensada como nos superfluidos, nos cristais líquidos, nos condensados, entre outras.

Como foi visto, o estudo da matéria condensada vem de longa data, mas, o termo física da matéria condensada surgiu em 1967 e teve origem na física do

estado sólido que hoje é considerada um de seus subcampos. Esse termo foi usado pela primeira vez por Philip Anderson e Volker Heine que renomearam seu grupo de pesquisa, anteriormente chamado “teoria do estado sólido”. Uma das razões para o surgimento deste campo da física foi o de que muitos dos conceitos e técnicas desenvolvidas e aplicadas à física do estado sólido também poderiam ser aplicadas a sistemas fluidos. Como exemplo, podemos citar a semelhança entre o caso da supercondutividade na qual os elétrons podem se mover sem dissipação de energia através de alguns materiais em condições especiais como, por exemplo, no caso da fase superfluida do He^4 a baixas temperaturas ou como no caso do He^3 onde esses átomos formam pares com propriedades de bósons.

Atualmente pode-se afirmar com segurança que a física da matéria condensada é o campo da física ligado às maiores inovações tecnológicas. As investigações das propriedades da matéria levaram à descoberta do transistor, do laser, dos diodos, dos cristais líquidos, possibilitou o desenvolvimento de técnicas experimentais em temperaturas extremamente baixas, está propiciando a criação de novos materiais com propriedades desejáveis para certas aplicações tecnológicas, etc.. A física da matéria condensada também está intimamente relacionada com os avanços em outros campos da ciência como nanotecnologia, química, engenharias, biologia e ciência dos materiais.

As partículas que compõem os sistemas estudados pela física da matéria condensada são classificadas em bósons e férmions, estas, por sua vez, formam

todas as partículas fundamentais da natureza. Uma característica importante que difere bósons de férmions é o spin.

Férmions são partículas que possuem spin semi-inteiro (ex. $1/2$, $3/2$, etc.) e obedecem ao Princípio da Exclusão de Pauli, ou seja, cada nível quântico de energia não pode ser ocupado por partículas fermiônicas idênticas. Para exemplificar o Princípio de Exclusão de Pauli podemos pensar nos vários níveis de energia que envolvem o núcleo dos átomos. Dois elétrons (elétrons possuem spin $+1/2$ ou $-1/2$ e, portanto, são férmions) só poderão ocupar o mesmo nível de energia se possuírem alguma característica que os distingam e essa característica é o spin. Pelo Princípio de Pauli temos que um elétron deve possuir spin $+1/2$ e o outro $-1/2$ para que possam ocupar o mesmo nível quântico. São os elétrons responsáveis pelas propriedades eletrônicas dos materiais. Os férmions obedecem à estatística de Fermi-Dirac. Outros exemplos de férmions são os nêutrons, prótons, léptons, quarks, átomos com spin semi-inteiro, etc..

Bósons, por outro lado, são partículas que possuem spin inteiro ou nulo e não obedecem ao Princípio da Exclusão de Pauli, ou seja, várias partículas bosônicas podem ocupar o mesmo nível quântico ao mesmo tempo. Bósons obedecem à estatística de Bose-Einstein. Como exemplos de bósons temos os mésons (píons, káons, etc.), átomos de spin inteiro e partículas ou quase-partículas que agem como intermediárias em interações que ocorrem na natureza (fótons, fônons, mágnons, glúons, etc.). Uma característica importante dos bósons é que através de uma transição puramente quântica eles podem se

condensar no seu nível de energia fundamental formando os conhecidos condensados de Bose-Einstein.

A idéia da existência de condensados formados por bósons nasceu de pesquisas iniciadas pelo físico indiano Satyendra Nath Bose que no começo da década de 1920 estudava os *quanta* (ou fótons) de luz. Ele assumiu regras que decidiam quando dois fótons poderiam ser contados como idênticos ou diferentes (1). Bose enviou seu trabalho a Einstein que supôs que essa teoria poderia ser também aplicada a átomos (2). Essa teoria ficou conhecida posteriormente como estatística de Bose-Einstein. Einstein estudou como os átomos se comportariam em um gás se essa teoria fosse aplicada e encontrou que em regimes de baixíssimas temperaturas algo bastante incomum aconteceria. Quando um gás de bósons é resfriado a temperaturas extremamente baixas, pode-se atingir um estado onde o comportamento desse gás deixa de ser clássico e não pode mais ser entendido como um gás constituído por partículas com movimentos aleatórios. A este estado, puramente quântico, denominamos condensado de Bose-Einstein e ao processo de formação deste estado denominamos de condensação de Bose-Einstein.

Sabemos pela mecânica quântica que as partículas constituintes de um gás apresentam um espectro discreto de energia e que tais partículas apresentam-se estatisticamente distribuídas entre os vários níveis de energia do sistema. As propriedades termodinâmicas deste sistema surgem da contribuição estatística de cada nível de energia. Para temperaturas cotidianas nenhum destes níveis de energia está ocupado com um número de partículas significamente maior que o

de outros níveis a ponto de contribuir de forma diferente para as propriedades termodinâmicas desse sistema. Einstein observou que para baixíssimas temperaturas um gás formado por bósons poderia ter todas suas partículas no estado fundamental (estado de mais baixa energia) e que, devido a isso, as propriedades termodinâmicas do sistema seriam alteradas caracterizando assim uma transição de fase.

A primeira evidência experimental de que o condensado de Bose-Einstein pudesse ocorrer em um sistema físico real foi sugerido por London (3), que considerou a superfluidez do hélio líquido como uma possível manifestação desse fenômeno. Décadas após a suposição de London, evidências comprobatórias de que a superfluidez é realmente uma manifestação que antecede ao aparecimento de condensados surgiram em estudos sobre a distribuição de momentos de átomos realizados em experimentos de espalhamento de nêutrons (4).

Em 1962 foi sugerido que os condensados poderiam ocorrer para éxcitons em certos tipos de cristais não-metálicos (5-6). Atualmente, existe uma boa quantidade de experimentos evidenciando isto (7-10).

Apesar das teorias sobre a condensação de Bose-Einstein terem surgido na década de 1920, a tecnologia necessária para atingir temperaturas próximas do zero absoluto limitou as descobertas experimentais mais importantes para a década de 1980 e começo da década de 1990.

Em uma série de experimentos, átomos de hidrogênio foram resfriados utilizando um refrigerador de diluição, depois foram aprisionados por um campo

magnético e adicionalmente resfriados por evaporação (11-15). Chegou muito perto de se observar o condensado de Bose-Einstein utilizando esta abordagem, mas ela foi limitada pela recombinação de átomos individuais que formavam moléculas.

No final da década de 1970 e na década de 1980, surgiram as técnicas de resfriamento a laser (16-17) e aprisionamento magneto-óptico (18) que, aliadas à técnica de resfriamento evaporativo (19-20), permitiram as primeiras observações do condensado de Bose-Einstein.

A técnica de resfriamento a laser consiste, basicamente, na desaceleração dos átomos da amostra através de três pares de laser contrapropagantes onde cada par é ortogonal aos demais feixes. Estes feixes, através dos fótons, transferem *momentum* aos átomos criando uma força na direção contrária ao movimento dos mesmos e, conseqüentemente, desacelerando-os. Esta força pode ser calculada e é equivalente a uma força viscosa do tipo $-\alpha v$ em cada direção e, por este motivo, o local onde ocorre a intersecção dos três pares de feixe laser é denominado de melço óptico. Mas esta técnica não é suficiente se quisermos confinar os átomos numa determinada posição, para isto é utilizado um campo magnético que varia linearmente no espaço formando uma força restauradora da posição. Esta técnica de aprisionamento de átomos denomina-se de armadilha magneto-óptica. Este campo magnético faz com que haja um desdobramento da estrutura interna do átomo criando assim uma regra de seleção para transições radiativas que dependem da posição onde o átomo se encontra. Além disso, precisa-se de um resfriamento adicional denominado de

resfriamento evaporativo ou resfriamento de Sísifo. Através desta técnica os átomos com maior energia são ejetados da armadilha e, conseqüentemente, os átomos remanescentes na armadilha encontram-se com menos energia por átomo e, portanto, mais frios.

No ano de 1995, utilizando as técnicas mencionadas, três grupos de pesquisa observaram a formação de condensados utilizando átomos alcalinos. A condensação de Bose-Einstein foi primeiramente obtida em gases de rubídio (21) e posteriormente em gases de lítio (22) e sódio (23). Após este ano a condensação foi observada em dezenas de laboratórios pelo mundo, inclusive no Instituto de Física de São Carlos (IFSC) no Brasil onde foram utilizados átomos de sódio e posteriormente átomos de rubídio em 2004 (24).

A figura 1 mostra a distribuição de velocidades de átomos de rubídio da primeira observação experimental do condensado (25). As cores representam o número de átomos em cada velocidade. Na foto da esquerda temos que os átomos ainda estão em uma temperatura um pouco acima da temperatura de condensação; na foto central temos o momento do aparecimento do condensado; à direita temos o condensado após uma evaporação adicional para torná-lo mais puro.

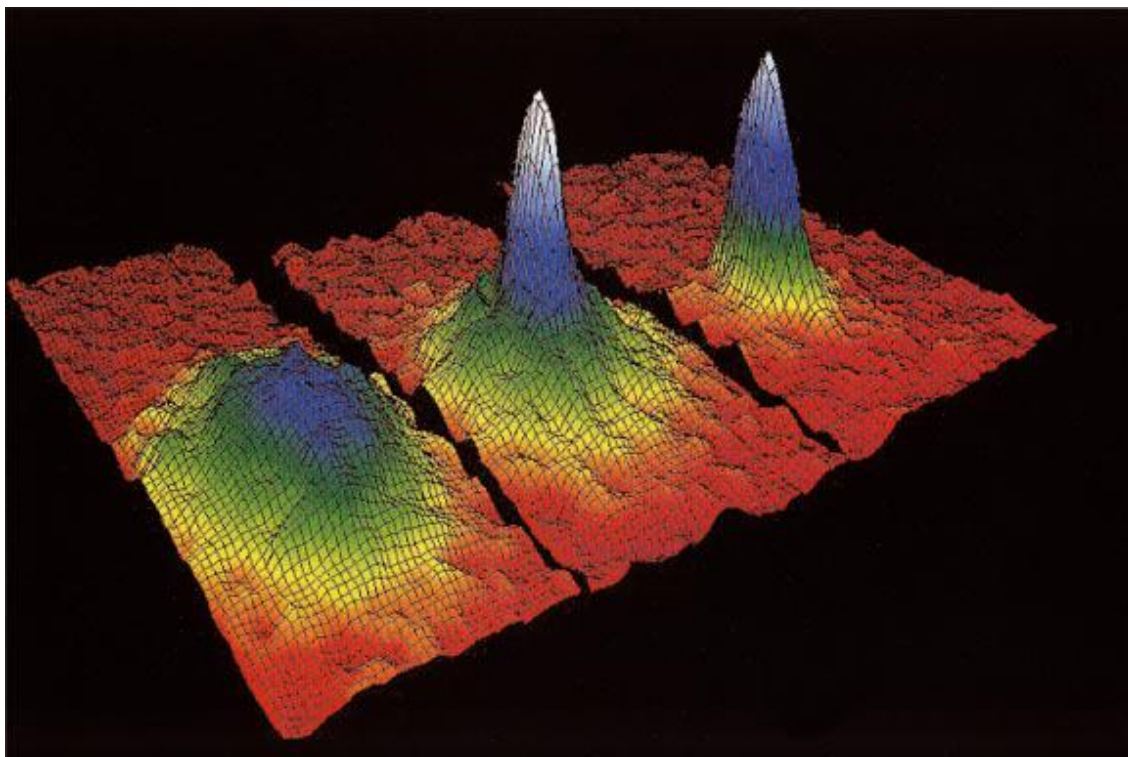


Fig. 1- Distribuição de velocidades de átomos de rubídio. À esquerda temos o momento anterior à formação do condensado; no centro o momento em que o condensado se forma; à direita o condensado após uma evaporação adicional. Fonte: Cornell (25).

As densidades típicas de condensados são cerca de cinco ordens de grandeza menor que a densidade do ar, mas, mesmo assim, uma grande quantidade de propriedades físicas são afetadas pelas interações interatômicas. O tamanho, a forma, a estabilidade, o espectro de excitação e a formação de sólitons e vórtices em condensados são alguns dos exemplos de propriedades que podem alterar drasticamente se ocorrem mudanças na força e/ou sinal das interações.

De acordo com a teoria de campo médio (26), que descreve consideravelmente bem a maioria dos processos físicos que ocorrem nos condensados de Bose-Einstein, as forças dessas interações dependem

basicamente da densidade de átomos e de um parâmetro adicional chamado de comprimento de espalhamento da onda s (*s-wave scattering length*), a . Este parâmetro é determinado pela espécie atômica. Temos que, quando $a > 0$ as interações interatômicas serão repulsivas e quando $a < 0$ as interações serão atrativas e o condensado tenderá a uma contração que minimizará a energia total do mesmo. Esta contração compete com a energia do ponto zero que tende a expandir o condensado. O condensado estável pode ser entendido como o resultado de uma competição entre a energia do ponto zero e o processo de minimização da energia.

A estabilidade de um condensado atrativo depende criticamente do número de átomos contidos nele, N . Existe um número crítico, N_c , para o qual se $N > N_c$ o condensado colapsará devido ao desbalanceamento entre as forças atuantes no condensado. Quando injetamos continuamente átomos em um condensado até atingirmos uma quantidade de átomos superior ao valor crítico, uma implosão ocorrerá. Esta, por sua vez, fará com que uma grande fração de átomos seja emitida até um ponto em que $N < N_c$, resultando na estabilidade do condensado (22,27-30). Este processo será repetido se continuarmos a injetar mais átomos no condensado, fazendo com que uma série de implosões e explosões seja obtida. Devido à semelhança com o processo de implosões que ocorrem em supernovas, este fenômeno ficou conhecido como supernova de Bose ou, simplesmente, bosenova.

Algumas características do processo de colapso são explicadas adequadamente através de simulações numéricas da equação de Gross-Pitaevskii

(equação derivada da teoria de campo médio e que rege a dinâmica dos condensados de Bose-Einstein) quando são adicionados termos de colisões inelásticas de dois e três corpos à equação original mencionada (31). Estas colisões retiram átomos do condensado.

Neste trabalho estudaremos o colapso do condensado de Bose-Einstein usando uma abordagem variacional adequada para sistemas dissipativos. Através desta técnica, resolvemos uma equação de Gross-Pitaevskii estendida que inclui os termos dissipativos de dois e três corpos e obtemos uma solução analítica simples que captura perfeitamente bem as séries de colapsos e explosões observadas em condensados atrativos.

No capítulo seguinte deste trabalho apresentaremos as principais equações da teoria de condensação de Bose-Einstein. No capítulo subsequente mostramos um pouco do método variacional utilizado e obtemos nossos resultados. Finalizaremos nosso trabalho com as conclusões e perspectivas.

Equação de Gross-Pitaevskii

Neste capítulo introduziremos a equação de Gross-Pitaevskii (32-33) partindo de algumas considerações sobre os condensados. Como dito anteriormente, esta equação é de fundamental importância para o entendimento da dinâmica dos condensados e, conseqüentemente, de nosso trabalho.

Partiremos do Hamiltoniano de muitos corpos que descreve N bósons fracamente interagentes confinados por um potencial externo V_{ext} , que em segunda quantização é dado por¹

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}), \quad [1.1]$$

onde $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$ e $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ são os operadores de campo que criam e aniquilam um bóson na posição \mathbf{r} , respectivamente, e $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ é o potencial de interação de dois corpos. Apesar de que o potencial de interação para este problema seja muito complexo (35), as experiências mostram que as interações podem ser tratadas por um modelo teórico muito mais simples. Em temperaturas muito baixas o comprimento de onda de de Broglie dos átomos é muito grande quando comparado ao alcance do potencial interatômico. Isso, somado ao fato de que as densidades e energias dos átomos são tão baixas que eles raramente se aproximam muito uns dos outros, ou seja, as interações átomo-átomo são

1- Para maiores detalhes sobre a teoria de segunda quantização para bósons consulte o primeiro capítulo do livro *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (34).

efetivamente fracas e nós podemos desprezar interações de três corpos e considerar apenas colisões binárias em nosso modelo teórico.

O estado fundamental e as propriedades termodinâmicas do sistema podem ser diretamente calculadas partindo do Hamiltoniano [1.1]. Por exemplo, pode-se usar o método de Monte Carlo para integrais de caminho para encontrar as propriedades termodinâmicas de um condensado com 10^4 átomos interagentes em um potencial repulsivo do tipo “esfera maciça” (36). Apesar deste procedimento nos fornecer soluções exatas dentro dos limites de erros estatísticos, ele torna-se muito pesado ou até mesmo impraticável computacionalmente para sistemas com grande número de átomos. Usando a abordagem de campo médio nós, além de evitar um trabalho numérico pesado, conseguimos um entendimento do sistema em termos de parâmetros que têm um significado físico claro.

Bogoliubov (37) foi quem fez a primeira descrição da teoria de campo médio para um gás diluído de Bose. O ponto principal desta descrição consiste em separar a contribuição do condensado do operador de campo bosônico. Em geral, o operador de campo pode ser escrito como $\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) a_{\alpha}$, onde $\psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ são funções de onda de uma partícula e a_{α} são os operadores de aniquilação correspondentes. No espaço de Fock, os operadores bosônicos de criação e aniquilação a_{α}^{\dagger} e a_{α} são definidos através das relações

$$a_{\alpha}^{\dagger} |n_0, n_1, \dots, n_{\alpha}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\alpha} + 1} |n_0, n_1, \dots, n_{\alpha} + 1, \dots\rangle, \quad [1.2]$$

$$a_{\alpha} |n_0, n_1, \dots, n_{\alpha}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\alpha}} |n_0, n_1, \dots, n_{\alpha} - 1, \dots\rangle, \quad [1.3]$$

onde n_α são os autovalores do operador $\hat{n}_\alpha = a_\alpha^\dagger a_\alpha$ que dá o número de átomos no estado α . Estas relações obedecem às regras de comutação usuais:

$$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha,\beta}, \quad [a_\alpha, a_\beta] = 0, \quad [a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] = 0. \quad [1.4]$$

A condensação de Bose-Einstein acontece quando o número de átomos n_0 de um estado de uma partícula em particular torna-se muito grande, $n_0 \equiv N_0 \gg 1$, e a razão N_0/N permanece finita no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$. Neste limite os estados N_0 , $N_0 + 1$ e $N_0 - 1$ correspondem a mesma configuração física e, devido a isso, os operadores de aniquilação e de criação a_0 e a_0^\dagger podem ser tratados como escalares: $a_0 = a_0^\dagger = \sqrt{N_0}$. Para um gás uniforme contido em um volume V , a condensação acontece quando o estado $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{V}}$ tem momento nulo e o operador de campo $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ pode ser decomposto na forma $\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{N_0}{V}} + \hat{\psi}'(\mathbf{r})$. Bogoliubov desenvolveu uma teoria de perturbação de primeira ordem para as excitações de gases de Bose interagentes tratando o operador $\hat{\psi}'(\mathbf{r})$ como uma pequena perturbação.

A generalização da teoria de Bogoliubov para o caso de configurações não-uniformes com dependência temporal é dada por

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) + \hat{\psi}'(\mathbf{r}, t), \quad [1.5]$$

onde usamos a representação de Heisenberg para os operadores de campo. Aqui $\Phi(\mathbf{r}, t)$ é uma função complexa definida como o valor esperado do operador de campo, $\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$. A densidade do condensado é dada através da

equação $n_0(\mathbf{r}, t) = |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2$. A função $\Phi(\mathbf{r}, t)$ também possui uma fase bem definida e isso equivale a assumir a ocorrência de quebra de simetria de *gauge* em um sistema de muitos corpos, similarmente ao caso de gases uniformes.

A função $\Phi(\mathbf{r}, t)$ é freqüentemente chamada de “função de onda do condensado” e trata-se de um campo clássico que tem o significado de um parâmetro de ordem. Ela caracteriza o comportamento de longo alcance dos elementos fora da diagonal da matriz de densidade de uma partícula, $\rho_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) = \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$. Na verdade, a equação [1.5] implica em um comportamento assintótico (38-40):

$$\lim_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \rightarrow \infty} \rho_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) = \Phi^*(\mathbf{r}', t) \Phi(\mathbf{r}, t). \quad [1.6]$$

Note que, em um sistema de tamanho finito nem o conceito de quebra de simetria de *gauge*, nem o de longo alcance de elementos fora da diagonal podem ser aplicados. Porém, a função de onda do condensado $\Phi(\mathbf{r}, t)$ ainda tem um significado: ela pode ser determinada através da diagonalização da matriz densidade de um corpo, $\int d\mathbf{r}' \rho_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \Phi_i(\mathbf{r}') = N_i \Phi_i(\mathbf{r})$, e corresponde a autofunção Φ_i , com o maior autovalor N_i . A conexão entre a função de onda do condensado, definida através da diagonalização da matriz densidade, e o conceito de parâmetro de ordem comumente usado na teoria de superfluidez, é um problema interessante e não trivial.

A decomposição [1.5] torna-se muito útil se $\hat{\psi}'$ é pequeno, ou seja, quando a depleção do condensado é pequena. Então, da mesma forma para gases uniformes, podemos derivar uma equação para o parâmetro de ordem

expandindo a teoria para baixas ordens em $\hat{\psi}'$. A principal diferença é que nós temos uma teoria de ordem zero não trivial para $\Phi(\mathbf{r}, t)$.

Para obter a equação para a função de onda do condensado $\Phi(\mathbf{r}, t)$, teremos que escrever a evolução temporal para o operador de campo $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ usando a equação de Heisenberg com o Hamiltoniano de muitos corpos [1.1]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\psi}, \hat{H}] = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \times V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}', t) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}, t). \quad [1.7]$$

Agora, nós temos que substituir o operador $\hat{\psi}$ com o campo clássico Φ . Na integral que contém a interação átomo-átomo, essa substituição não é, em geral, uma boa aproximação quando tratamos de curtas distâncias ($\mathbf{r}' - \mathbf{r}$). Entretanto, para um gás resfriado diluído, nós podemos obter uma expressão apropriada para o termo de interação observando que, nesse caso, apenas colisões binárias de baixas energias são relevantes e essas colisões são caracterizadas por um simples parâmetro, o comprimento de espalhamento da onda s , independentemente dos detalhes do potencial de interação de dois corpos. Isso nos permite substituir $V(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ na equação [1.7] com uma interação efetiva

$$V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad [1.8]$$

onde a constante de acoplamento está relacionada ao comprimento de espalhamento a através de

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad [1.9]$$

O uso do potencial efetivo [1.8] na equação [1.7] é compatível com a substituição de $\hat{\psi}$ com Φ e nos leva a seguinte equação para o parâmetro de ordem:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t). \quad [1.10]$$

Esta equação foi obtida independentemente por Gross (33,41) e Pitaevskii (32) e é conhecida como equação de Gross-Pitaevskii. A validade desta equação está baseada na condição que o comprimento de espalhamento da onda s seja muito menor que a distância média entre átomos e que o número de átomos no condensado seja muito maior que 1. A equação de Gross-Pitaevskii e pequenas variações dela são a base para a maioria das investigações em excitações elementares em condensados de Bose-Einstein². Esta equação também poderia ser obtida através do cálculo variacional (26).

2- Veja a referência (42) para um estudo mais aprofundado em excitações elementares em condensados aprisionados.

Solução variacional para um condensado de Bose-Einstein atrativo e colapsante

Neste capítulo utilizaremos uma abordagem variacional para obter uma solução analítica simples de uma equação de Gross-Pitaevskii estendida que inclui termos dissipativos de dois e de três corpos.

Na física, o comportamento dinâmico de sistemas é geralmente descrito por equações diferenciais ordinárias ou parciais que governam a evolução espacial e temporal do sistema considerado. Uma descrição alternativa está em termos de um princípio de extremo, que é o princípio da mínima ação de Euler. Esta descrição é bastante útil para o desenvolvimento de soluções analíticas aproximadas, desde que na grande maioria dos casos soluções analíticas exatas não são disponíveis (43-51). Quando uma solução analítica exata não é conhecida, nós costumamos tentar “adivinhar” a forma espacial da solução sugerindo um *ansatz* (função tentativa) com alguns parâmetros livres (parâmetros variacionais). A dependência temporal destes parâmetros é encontrada através da substituição destes no princípio de extremo. Para sistemas conservativos sempre existirá uma formulação de mínima ação baseada no Lagrangeano, cuja existência é uma consequência direta da conservação de energia. Neste trabalho, demonstraremos que podemos usar uma formulação geral da dinâmica devida a D'Alembert, igualmente aplicável a sistemas conservativos e dissipativos. Na formulação de

D'Alembert nós usamos o princípio da mínima ação diretamente, dessa forma evitamos a construção de uma função Lagrangeana. Portanto, esta formulação é apropriada para lidar com sistemas com dissipação não-linear (52). Usando-a, nós encontramos uma solução analítica para a função de onda do condensado baseada em um *ansatz* Gaussiano que consegue descrever bem o limite crítico para o colapso assim como as seqüências de colapsos e explosões observados em condensados atrativos.

Vamos considerar a seguinte Equação de Gross-Pitaevskii que modela um condensado de Bose-Einstein atrativo em uma armadilha harmônica tridimensional

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi + \frac{r^2}{2}\psi - \sigma|\psi|^2\psi - i(\varepsilon_1|\psi|^2 + \varepsilon_2|\psi|^4)\psi \quad [2.1]$$

onde $\psi(\vec{r}, t)$ é o parâmetro de ordem adimensional do condensado em uma armadilha magnética esfericamente simétrica $V = \frac{r^2}{2}$. Os coeficientes não-lineares dissipativos ε_1 e ε_2 são inseridos para se levar em conta colisões inelásticas de dois e três corpos que retiram átomos do condensado e se tornam muito importantes em regimes de alta densidade. Uma análise quantitativa do número crítico de átomos através de uma solução numérica da equação de Gross-Pitaevskii de campo médio nos leva ao seguinte limite na equação [2.1] (53):

$$\int d\mathbf{r}^3 |\psi|^2 = 4\pi k_c, \quad k_c = 0,5746, \quad [2.2]$$

onde $k = \frac{|a_s|N}{l_0}$ é a combinação dos comprimentos de espalhamento da onda s dos átomos no condensado a_s , N é o número de átomos condensados e

$l_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ é o comprimento característico da armadilha onde m é a massa atômica e ω a frequência da armadilha. Como dito anteriormente, podemos adicionar átomos ao condensado até um ponto em que k torne-se maior que k_c

levando a contração e explosão do condensado. Vamos tentar descrever analiticamente o comportamento de condensados colapsantes por meio de uma técnica variacional especialmente desenvolvida para sistemas dissipativos. Nós começamos escrevendo o Lagrangeano do sistema como uma soma de dois termos: um termo conservativo mais um termo não-conservativo isto é, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_C + \mathcal{L}_{NC}$. A abordagem variacional é aplicada ao Lagrangeano médio definido como

$$L = \langle \mathcal{L} \rangle = \int d\mathbf{r}^3 \mathcal{L} \quad [2.3]$$

e o princípio de Hamilton é escrito como:

$$\delta I = \delta \left[\int d\mathbf{r}^3 \mathcal{L} \right] = \delta \left[\int d\mathbf{r}^3 (\mathcal{L}_C + \mathcal{L}_{NC}) \right] = 0. \quad [2.4]$$

As equações de Euler-Lagrange que descrevem a dinâmica dos condensados são definidas como,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi_i} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}_C}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{L}_C}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right)} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}_C}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right)} - \frac{\delta \mathcal{L}_C}{\delta \psi_i} = Q_i, \quad [2.5]$$

onde o índice i varia de 1 a 2, $\psi_1 = \psi$, $Q_1 = Q$, e $\psi_2 = \psi^*$ e $Q_2 = Q^*$. Aqui, Q_i leva em conta todos os processos não-conservativos ocorrendo no sistema e, de acordo com a equação [2.4], é dado por:

$$Q_i = \frac{\delta \mathcal{L}_{NC}}{\delta \psi_i} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}_{NC}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{L}_{NC}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y}\right)} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}_{NC}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial z}\right)}. \quad [2.6]$$

Para achar soluções aproximadas para as equações de Euler-Lagrange em sistemas não conservativos, nós assumimos que o extremo da integral variacional I pode ser expresso como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = f(b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t), \mathbf{r}) \quad [2.7]$$

onde f é o *ansatz* e as funções $b_i(t)$ são funções paramétricas desconhecidas a ser determinadas. A essência do *ansatz* é a de reduzir o espaço de soluções variacionais admissíveis para um espaço finito de soluções gerado pelos parâmetros variacionais. Introduzindo o *ansatz* na integral variacional, isto é,

$$I = \int d\mathbf{r} \mathcal{L}(t, \mathbf{r}, f(b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t))) \quad [2.8]$$

e arrumando os termos δb_j (integrando por partes onde necessário) nós temos a seguinte equação básica

$$-\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \langle \mathcal{L}_c \rangle}{\partial \dot{b}_j} \right) + \frac{\partial \langle \mathcal{L}_c \rangle}{\partial b_j} = 2Re \int dt \frac{\partial \psi^*}{\partial b_j} Q(\mathbf{r}, b_1, \dots, b_n), \quad [2.9]$$

onde $j = 1, \dots, n$ e Q representa os termos dissipativos não-lineares na equação dinâmica, por exemplo $Q \equiv i(\epsilon_1 |\psi|^2 + \epsilon_2 |\psi|^4) \psi$ para a equação [2.1]. Pode ser observado aqui, que essas equações são uma extensão das bem conhecidas equações de Euler-Lagrange para sistemas conservativos onde o lado direito da equação é zero, devido à conservação de energia.

O maior inconveniente do método variacional é que alguns aspectos da dinâmica são sacrificados para se obter uma aproximação analítica simples da verdadeira solução não conhecida analiticamente. Em geral, deveremos ter a seguinte propriedade: aumentando gradualmente o número de parâmetros no *ansatz* de tal maneira a cobrir, no limite, o espaço de todas as funções suaves, as soluções obtidas pelo princípio variacional deverão se aproximar da solução exata. Uma direta, embora formal, realização do esquema acima pode ser alcançada considerando as bases contáveis de funções $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$ (por exemplo, no espaço de Hilbert) com o *ansatz* $\psi(x, t) = \sum C_j(t) \varphi_j(x)$. É fácil mostrar que as soluções obtidas pelo princípio da mínima ação na forma infinitesimal discutida acima satisfazem a propriedade requerida. Realmente, no limite de um número infinito de parâmetros variacionais, nós podemos encontrar variações dos parâmetros tal que $\delta\psi = \delta u + i\delta v$ com as variações reais δu e δv arbitrárias e independentes. Portanto, se nós escrevemos o princípio de variação geral na forma

$$\int dt \int dx \{ \delta\psi^* EQ(\psi) + \delta\psi EQ^*(\psi) \} = 0, \quad [2.10]$$

onde a equação dinâmica é $EQ(\psi) = 0$, então substituindo a variação $\delta\psi = \delta u + i\delta v$, usando a independência e arbitrariedade de δu e δv , nós obtemos $EQ(\psi) + EQ^*(\psi) = 0$ e $EQ(\psi) - EQ^*(\psi) = 0$ que são equivalentes as equações dinâmicas.

Na ausência de termos dissipativos ($\varepsilon_j = 0$) a equação [2.1] segue do Lagrangeano funcional

$$\mathcal{L}_C = \frac{i}{2}(\psi^* \psi_t - \psi_t^* \psi) + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{r^2}{2}|\psi|^2 - \frac{\sigma}{2}|\psi|^4. \quad [2.11]$$

Note que, embora ψ e ψ^* estejam relacionados através da conjugação complexa, eles são linearmente independentes. Além disso, as equações de Euler-Lagrange para essas variáveis são relacionadas através da seguinte equação:

$$\frac{\delta\mathcal{L}_C}{\delta\psi^*} = \left(\frac{\delta\mathcal{L}_C}{\delta\psi}\right)^* = Q. \quad [2.12]$$

Substituindo o *ansatz* Gaussiano $\psi(\mathbf{r}, t) = a(t) \exp \{i\phi(t) - \alpha(t) r^2\}$, onde $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$, no Lagrangeano conservativo médio

$$\langle \mathcal{L}_C \rangle = \int d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{i}{2}(\psi_t^* \psi - \psi^* \psi_t) + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{r^2}{2}|\psi|^2 - \frac{\sigma}{2}|\psi|^4 \right\} \quad [2.13]$$

nós obtemos

$$\langle \mathcal{L}_C \rangle = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{4a^2}{\alpha_R^{3/2}} \left[\dot{\phi} - \frac{\sigma a^2}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{4\alpha_R} \left(2[\alpha_R^2 + \alpha_I^2] - \dot{\alpha}_I + \frac{1}{4} \right) \right]. \quad [2.14]$$

Substituindo os parâmetros a, ϕ, α_R e α_I na equação [2.9], nós encontramos seus comportamentos dinâmicos de acordo com o sistema de equações:

$$\dot{a} = 3\alpha_I a - \frac{7\varepsilon_1}{8\sqrt{2}} a^3 - \frac{2\varepsilon_2}{3\sqrt{3}} a^5, \quad [2.15]$$

$$\dot{\alpha}_R = \left\{ 4\alpha_I - \frac{\varepsilon_1}{2\sqrt{2}} a^2 - \frac{4\varepsilon_2}{9\sqrt{3}} a^4 \right\} \alpha_R, \quad [2.16]$$

$$\dot{\alpha}_I = 2(\alpha_R^2 - \alpha_I^2) + \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} a^2 \alpha_R, \quad [2.17]$$

$$\dot{\phi} = -3\alpha_R + \frac{7\sigma}{8\sqrt{2}}a^2. \quad [2.18]$$

Temos assim três equações acopladas para os parâmetros essenciais do nosso *ansatz*. Os parâmetros críticos do sistema são obtidos da equação [2.2]. Substituindo o *ansatz* Gaussiano, nós encontramos que os parâmetros críticos do sistema podem ser obtidos do valor crítico definido na equação [2.2] que, combinado com a função Gaussiana nos leva a

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{a^2}{\alpha_R^{3/2}} = 4\pi k_c. \quad [2.19]$$

Para $\alpha_R(0) = 1$ nós temos a amplitude crítica $a_c = 2,708$. Esse é o valor crítico exato para o colapso para uma condição inicial Gaussiana (53). Simulações numéricas do sistema [2.15-2.18] mostram que o *ansatz* Gaussiano captura esse limite muito bem, veja figura 2. O valor crítico para o colapso calculado a partir do sistema [2.15-2.18] é um pouco maior $2,99 < a_c \leq 2,999$. Além disso, a figura 2 mostra que o *ansatz* Gaussiano também captura o comportamento tipo pulso do condensado colapsante e mostra a seqüência de implosões e explosões.

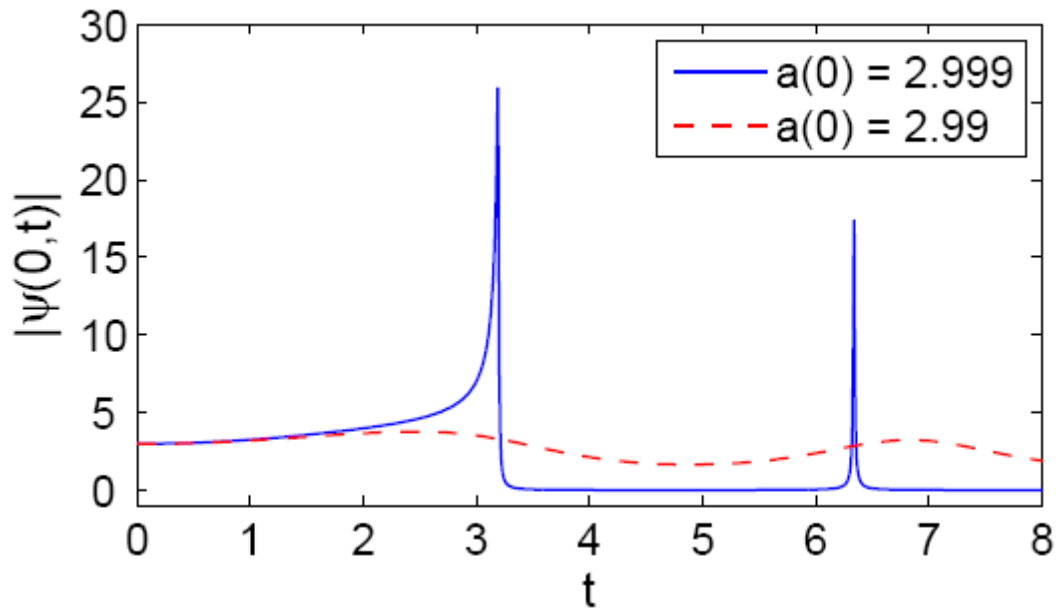


Fig. 2. Simulações numéricas do sistema [2.15-2.18] ilustrando o comportamento dinâmico crítico da amplitude $\alpha_R(t)$, para as condições iniciais $a(0) = 2,99$ (linha tracejada) e $a(0) = 2,999$ (linha contínua). Aqui nós escolhemos $\varepsilon_1 = 0,002$, $\varepsilon_2 = 0,003$, $\alpha_R(0) = 1$.

A solução obtida aqui ilustra que a presente abordagem variacional, adequada para lidar com sistemas dissipativos não-lineares, funciona muito bem dentro dos limites do *ansatz* usado. Em problemas não-lineares nas quais não existem soluções analíticas exatas, a solução variacional serve para complementar os resultados obtidos por simulações numéricas. As equações de Euler-Lagrange [2.15-2.18] que descrevem a dinâmica da amplitude do condensado ilustram bem o balanço introduzido pelos termos dissipativos: sem eles as amplitudes cresceriam exponencialmente como observado em simulações numéricas (31).

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, estudamos o processo de colapso e explosão do condensado de Bose-Einstein utilizando, para isso, uma abordagem variacional apropriada para encontrar soluções aproximadas de equações que incluem termos de dissipação não-linear.

Através de um *ansatz* Gaussiano, nós encontramos uma solução variacional para uma equação de Gross-Pitaevskii de campo médio estendida que inclui efeitos dissipativos e, além de obter valores bastante razoáveis para a amplitude crítica, também fomos capazes de capturar de forma satisfatória as séries de colapsos e explosões observadas em Condensados de Bose-Einstein atrativos. Uma grande vantagem do uso desta abordagem é que ela nos fornece aproximações analíticas simples para sistemas dissipativos, que são os sistemas físicos mais encontrados na natureza. Como soluções analíticas exatas não são conhecidas para a maioria destes sistemas, este método torna-se importante para ajudar-nos em interpretações físicas e também para complementar as simulações numéricas destes problemas. A abordagem desenvolvida aqui também tem vantagens sobre o método variacional usual para a resolução de sistemas dissipativos. Ao contrário do método usual, nós não precisamos de um “sistema espelho” (43,46,54) para a construção do Lagrangeano e, por isso, reduzimos o número de equações a ser resolvidas pela metade. A aplicabilidade deste método

é limitada apenas pela disponibilidade de funções cujas soluções são conhecidas na sua forma analítica explícita.

Como dito anteriormente, esta abordagem variacional tem um grande número de aplicações no campo de ondas dissipativas não-lineares. Por exemplo, ela pode ser aplicada ao estudo de formação de sólitons brilhantes durante o colapso de um condensado atrativo, que foi recentemente observado (55). Outros trabalhos nessa linha de pesquisa estão sendo desenvolvidos por nosso grupo.

Referências bibliográficas

1. S. N. Bose, Z. Phys. **26**, 178 (1924).
2. A. Einstein, Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. **1924**, 261 (1924).
3. F. London, Phys. Rev. **54**, 947 (1938).
4. P. Sokol, in: *Bose Einstein Condensation*, editado por A. Griffin, D. W. Smoke e S. Stringari (Cambridge University Press, Cambridge), 51 (1995).
5. J. M. Blatt e K. W. Boer., Phys. Rev. **126**, 1621 (1962).
6. S. A. Moskalenko, Sov. Phys. Solid State **4**, 199 (1962).
7. L. L. Chase *et al*, Phys. Rev. Lett. **42**, 1231 (1979).
8. N. Peyghambarian, L. L. Chase e A. Mysyrowicz, Phys. Rev. B **27**, 2325 (1983).
9. M. Hasuo *et al*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1303 (1993).
10. J. Lin e J. P. Wolfe, Phys. Rev. Lett. **71**, 1222 (1993).
11. I. F. Silvera e J. T. M. Walraven, in: *Progress in Low Temperature Physics*, vol X, editado por D. F. Brewer (Elsevier, Amsterdã), 139 (1986).
12. T. J. Greytak, in: *Bose Einstein Condensation*, editado por A. Griffin, D. W. Smoke e S. Stringari (Cambridge University Press, Cambridge), 131 (1995).

13. T. J. Greytak e D. Kleppner, in: *New Trends in Atomic Physics*, editado por G. Grynberg e R. Stora (North Holland, Amsterdã), 1127 (1984).
14. I. F. Silvera, in: *Bose Einstein Condensation*, editado por A. Griffin, D. W. Smoke e S. Stringari (Cambridge University Press, Cambridge), 160 (1995).
15. I. F. Silvera e J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 164 (1980).
16. D. J. Wineland, R. E. Drullinger e F. L. Walls, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1639 (1978).
17. P. D. Lett et al, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 169 (1988).
18. A. L. Migdall et al, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2596 (1985).
19. N. Masuhara et al, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 935 (1988).
20. D. E. Pritchard, K. Helmerson e A. G. Martin, in: *Atomic Physics 11*, editado por S. Haroche, J. C. Gay e G. Grynberg (World Scientific, Singapura), 179 (1989).
21. M. H. Anderson et al, *Science* **269**, 198 (1995).
22. C. C. Bradley et al, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
23. K. B. Davis et al, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
24. V. S. Bagnato et al, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 133203 (2004).
25. E. Cornell, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* **101**, 419 (1996).
26. E. Dalfovo et al, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
27. P. A. Ruprecht et al, *Phys. Rev. A* **51**, 4704 (1995).
28. J. M. Gerton et al, *Nature* **408**, 692 (2001).
29. E. A. Donley et al, *Nature* **412**, 295(2001).

30. C. C. Bradley, C. A. Sackett e R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **78**, 985 (1997).
31. S. K. Adhikari, Phys. Rev. A **71**, 053603 (2005).
32. L. P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961).
33. E. P. Gross, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961).
34. A. L. Fetter e J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (McGraw-Hill Book Company, São Francisco).
35. P. S. Julienne, A. M. Smith e K. Burnett, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **30**, 141 (1993).
36. W. Krauth, Phys. Rev. Lett. **77**, 3695 (1996).
37. N. Bogoliubov, J. Phys. (Moscou) **11**, 23 (1947).
38. V. L. Ginzburg e L. D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**, 1064 (1950).
39. O. Penrose, Philos. Mag. **42**, 1373 (1951).
40. O. Penrose e L. Onsager, Phys. Rev. **104**, 576 (1956).
41. E. P. Gross, J. Math. Phys. **4**, 195 (1963).
42. A. S. Parkins e D. F. Walls, Phys. Rep. **303**, 1 (1998).
43. H. Bateman, Phys. Rev. **38**, 815 1931.
44. P. Glansdorff e Prigogine, Physica **20**, 773 (1954).
45. G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc. (Londres) **283**, 238 (1965); *ibid* **A 299**, 6 (1967); J. Fluid. Mech. **44**, 373 (1970); *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley-Interscience, New York, 1974).
46. J. C. Luke, J. Fluid. Mech. **27**, 395 (1967).

47. J. Jimenez e G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc. (Londres) **A 340**, 277 (1976).
48. D. Anderson e M. Lisak, Phys. Scr. **33**, (1986); *ibid* **T 63**, 69 (1996).
49. B. K. Shivamoggi e D. K. Rollins, Phys. Scr. **43**, 236 (1991).
50. A. M. Kamchatnov, Phys. Rep. **286**, 199 (1997); Physica D **188**, 247 (2004).
51. B. A. Malomed, Prog. in Opt. **43**, 71 (2002).
52. S. Chavez-Cerda, S. B. Cavalcanti e J. M. Hickmann, Eur. Phys. J. D **1313**, (1998).
53. A. Gammal, T. Frederico e L. Tomio, Phys. Rev. E **60**, 2421 (1999).
54. P. M. Morse e H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1953).
55. S. L. Cornish, S. T. Thompson e C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **96**, 170401 (2006).