

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

GERAÇÃO DE TERMOS COM VIOLAÇÃO DE SIMETRIA  
DE LORENTZ À TEMPERATURA FINITA

Wellington Romero Serafim Freire

MACEIÓ-2015

WELLINGTON ROMERO SERAFIM FREIRE

Geração de termos com violação de simetria  
de Lorentz à temperatura finita

Tese de Doutorado apresentada ao  
Programa de Pós-Graduação em Física  
da Universidade Federal de Alagoas  
como requisito parcial para a obtenção  
do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Mariz

Maceió - 2015

*Instituto de Física - UFAL*

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Bibliotecário Responsável: Janis Christine Angelina Cavalcante**

F862g Freire, Wellington Romero Serafim.  
Geração de termos com violação de simetria de Lorentz à temperatura finita /  
Wellington Romero Serafim Freire. – Maceió, 2015.  
101f. : il.

Orientador: Tiago Mariz.  
Tese (doutorado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física.  
Maceió, 2015.

Bibliografia: f. 90-101.

1.Termo de Chern-Simons. 2.Termo tipo éter.3.Temperatura finita. 4.Simetria de Lorentz. 5. Física – Partículas I. Título.

CDU: 539.12





**Universidade Federal de Alagoas**

**Instituto de Física**

Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL. Brasil  
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE  
TESE DE DOUTORADO**

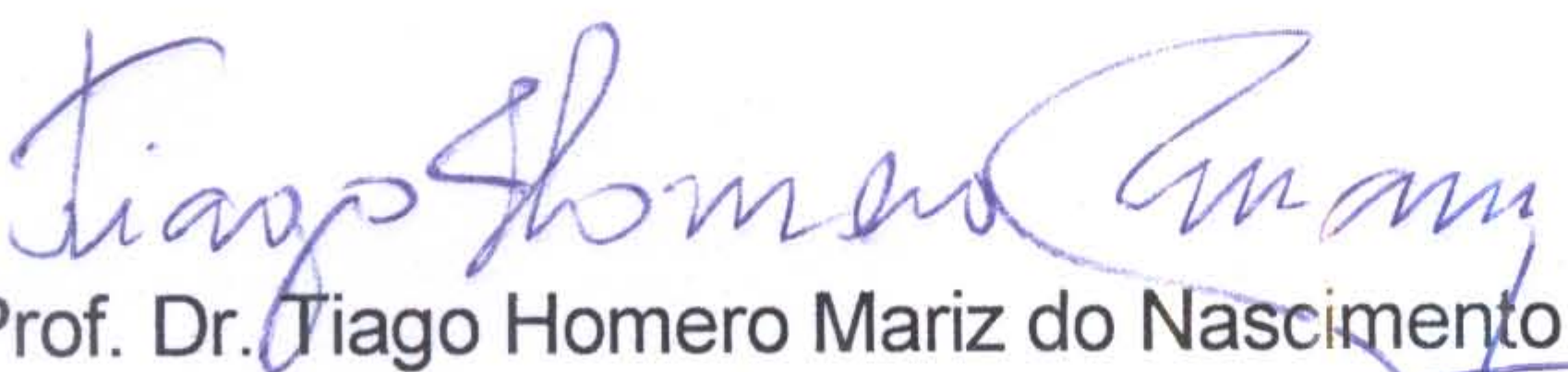
***“Geração de termos com violação de simetria de Lorentz à  
temperatura finita”***

**por**

**Wellington Romero Serafim Freire**


A Banca Examinadora composta pelos professores Tiago Homero Mariz do Nascimento (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, José Roberto Soares do Nascimento, do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, Francisco de Assis de Brito, do Departamento de Física da Universidade Federal Campina Grande, Marcelo Leite Lyra, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, e Alexandre Manoel de Moraes Carvalho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, consideram o candidato **aprovado com grau A**.


Maceió, 03 de julho de 2015

  
Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento

  
Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento

  
Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

  
Prof. Dr. Marcelo Leite Lyra

  
Prof. Dr. Alexandre Manoel de Moraes Carvalho



# DEDICATÓRIA

Aos meus pais, irmãos, esposa e filha.

## AGRADECIMENTOS

- Agradeço a Deus, pela força de lutar todos os dias pelos meus sonhos.
- Ao meu orientador Prof. Tiago Mariz pela dedicação e ótima orientação.
- A todos os professores que de forma direta ou indireta, contribuíram positivamente para minha formação, em especial aqueles de muitas conversas e boas risadas, como o “velho guru” Francisco Fidelis, Marcelo Lyra, Alexandre, Glauber, Marcos Vermelho, Carlos Jacinto, Eduardo, Ítalo, Tereza e todos que compõe o IF.
- Aos colegas de curso, Geovana, Samuel, Taíla, Rosa, Fábio, Job, Aléssio, Valdemir, Leandro, Leônade, Juarez, Ana Paula, Elaine, Tainã e os demais.
- A todos meus familiares, meu pai Romero, minha mãe Conceição, irmãos Erick, Clériston, Péricles e cunhadas, Danielly, Juliana e Renata.
- A minha esposa Raphaella Serafim e filha Carolina Serafim, pela compreensão devido minha ausência de todas as semanas.

## RESUMO

Nesta tese, investigamos a geração do termo de Chern-Simons de derivada superior, assim como o termo tipo éter, ambos à temperatura finita. Também estudamos a questão da invariância de gauge ampla, com o termo de Chern-Simons e Chern-Simons de derivada superior. Constatamos que o coeficiente do termo de Chern-Simons de derivada superior anula-se, quando tomamos o limite de altas temperaturas. Esse resultado parece se repetir para os demais termos de derivada superior. Dentro ainda do contexto de Chern-Simons, observamos que a ação de Chern-Simons e a ação de Chern-Simons de derivada superior são invariantes sob transformação de gauge ampla. Para isso, conseguimos calcular a ação efetiva exata, contudo, para uma escolha de gauge específica. Finalmente, com relação ao termo tipo éter, constatamos que o cálculo à temperatura finita é ambíguo, assim como observado no cálculo à temperatura zero.

# Sumário

Folha de rosto . . . . .	i
Dedicatória . . . . .	ii
Agradecimentos . . . . .	iii
Resumo . . . . .	iv
<b>1 Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2 Eletrodinâmica Quântica Estendida</b>	<b>9</b>
2.1 Introdução . . . . .	9
2.2 Eletrodinâmica Quântica . . . . .	10
2.3 Eletrodinâmica Quântica Estendida . . . . .	12
2.4 Violação de Simetria de Lorentz . . . . .	15
2.5 Violação de Simetria de CPT . . . . .	17
<b>3 Indução de Termos de Chern-Simons a <math>T \neq 0</math></b>	<b>22</b>
3.1 Introdução . . . . .	22
3.2 Indução do Termo de Chern-Simons a $T \neq 0$ . . . . .	25
3.3 Termos de Derivada Superior . . . . .	33
3.4 Indução de Chern-Simons com Derivada Superior a $T \neq 0$ . . . . .	35



---

<b>4</b>	<b>Invariância de Gauge Ampla</b>	<b>44</b>
4.1	Introdução . . . . .	44
4.2	Transformação de Gauge Ampla . . . . .	50
4.3	Termo de Chern-Simons . . . . .	52
4.4	Termo de Chern-Simons de Derivada Superior . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Geração do Termo Tipo Éter à Temperatura Finita</b>	<b>58</b>
5.1	Introdução . . . . .	58
5.2	Anomalia do termo de Chern-Simons . . . . .	60
5.3	Geração do Termo de Tipo Éter . . . . .	64
5.4	Contribuição Não Mínima . . . . .	65
5.5	Contribuição Mínima . . . . .	76
5.6	Contribuição Mínima, Não-Mínima . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Considerações Finais e Perspectivas</b>	<b>84</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>87</b>

# Lista de Figuras

3.1	Gráfico da função $F(\xi)$ . . . . .	33
3.2	Gráfico da função $B(\xi)$ . . . . .	42
3.3	Gráfico da função $C_1(\xi)$ . . . . .	42
3.4	Gráfico da função $C_2(\xi)$ . . . . .	43
5.1	As contribuições para a função de dois pontos do campo vetorial. . . . .	81

# Abstract

In this thesis, we investigated the generation of the higher derivative Chern-Simons term, as well as the ether-like term, both at finite temperature. We also examined the question of the large gauge invariance, with respect to the Chern-Simons term and the high derivative one. We observed that the coefficient of the Chern-Simons term vanishes, when we taken into account the limit of high temperature. This happens to occur also for the other high derivative terms. With respects to the Chern-Simons term, we observed that the action of the Chern-Simons term and the high derivative one are invariant under the large gauge transformation. For this, we calculated the exactly effective action, however, for a specific gauge choice. Finally, with respects to the ether-like term, we observed that the calculation at finite temperature is ambiguous, as well as it is observed for the calculation at zero temperature.

# Capítulo 1

## Introdução

O Modelo Padrão (MP) da física de partículas é uma teoria que descreve as interações eletromagnética, forte e fraca, bem como as partículas fundamentais que constituem toda a matéria. Desenvolvida na década de 1970, é uma teoria quântica de campos, consistente com a mecânica quântica e a relatividade especial. Entretanto, não podemos dizer que o MP seja uma teoria completa da física de partículas, pois ela não descreve a interação gravitacional, nem explica, por exemplo, certas observações experimentais, tais como a oscilação de neutrinos, a assimetria bariônica, a matéria escura, entre outras.

Uma teoria que podemos dizer que seja completa é a teoria de cordas, pois nela a gravidade surge naturalmente. Desse modo, com o objetivo de tentar explicar as inconsistências teóricas, assim como as observações experimentais não elucidadas pelo MP, na literatura encontramos inúmeros trabalhos relacionados com estudos de extensões do MP, principalmente através de termos extras adicionados à teoria, pensando sempre que estas extensões sejam resquícios de teorias mais fundamentais,



tais como a teoria de cordas.

Seguindo essa ideia, no final da década de 1990, Kostelecký e Colladay apresentaram o Modelo Padrão Estendido (MPE) [1, 2], no qual eles adicionaram à teoria todos os possíveis termos com violação de simetria de Lorentz e de CPT, contudo, renormalizáveis e invariantes de calibre (gauge). A motivação principal para esse estudo surgiu do fato de que em teorias de cordas podemos ter a quebra espontânea de simetria de Lorentz e de CPT [3, 4]. Portanto, esses termos adicionados ao MP seriam vestígios dessas teorias de cordas com quebra de simetria de Lorentz<sup>1</sup>. Deste modo, detecções de violações de simetria de Lorentz seriam comprovações indiretas da existência de teorias fundamentais.

Nos últimos anos, o MPE vem sendo bastante estudado na literatura [5, 6, 7, 8, 9, 10], principalmente com o objetivo de detectar quaisquer desvios da simetria de Lorentz, além de tentar explicar as observações experimentais ainda não contempladas pelo MP, assim com as suas inconsistências teóricas. Na Ref. [11] encontramos inúmeras tabelas com toda a fenomenologia encontrada, até o momento, sobre os coeficientes do MPE.

Nesta tese, estamos interessados em estudar as correções quânticas do MPE, principalmente, no regime de temperatura finita. Em especial, propomos analisar a questão da geração do termo de Chern-Simons de derivada superior [12], assim como o termo tipo éter [13], ambos à temperatura finita e em 3+1 dimensões. Ainda no contexto de termos de Chern-Simons, estudamos a averiguação da invariância de gauge ampla, quando consideramos uma configuração particular para o campo de

---

<sup>1</sup>Na verdade, com quebra de simetria de Lorentz e de CPT; contudo, em uma quebra de simetria de CPT temos sempre uma quebra de simetria de Lorentz.

gauge. Com relação ao termo tipo éter, analisando o assunto da ambiguidade relacionada com o valor do coeficiente induzido, ao efetuarmos as correções radiativas.

No Capítulo 2 apresentaremos um embasamento teórico mais detalhado sobre a eletrodinâmica quântica (EDQ) com violação de simetria de Lorentz e de CPT, contida no MPE. O conteúdo exposto servirá como base teórica para desenvolvermos as idéias dos capítulos subsequentes.

Discutiremos no Capítulo 3 os resultados do nosso primeiro trabalho [12]. Para isso, inicialmente iremos efetuar de forma didática e sistemática a geração do termo de Chern-Simons, nos regimes de temperatura zero e temperatura finita. Esses cálculos, serão de certa forma, base para os demais cálculos empregados nesta tese. No final do Capítulo, efetuaremos o cálculo da indução do termo de Chern-Simons de derivada superior, à temperatura zero e temperatura finita. Constataremos que os termos de derivada superior, na verdade, anulam-se quando tomamos o limite de altas temperaturas.

No capítulo 4 será estudado a questão da invariância de gauge ampla, nos modelos de Chern-Simons e de derivada superior, também pertencente ao primeiro trabalho [12]. Contudo, inicialmente, iremos fazer uma introdução sobre o assunto, ao discutirmos a questão da invariância de gauge infinitesimal e ampla do termo de Chern-Simons em 2+1 dimensões. Iremos demonstrar a expressão para a invariância de gauge ampla, que será utilizada para averiguarmos a que ação de Chern-Simons, assim como a ação de Chern-Simons de derivada superior, são invariantes sob transformação de gauge ampla.

Já no capítulo 5, nosso objetivo é expor os resultados encontrados em [13], mostrando que o termo tipo éter gerado à temperatura finita apresenta resultados

ambíguos, assim como o seu estudo à temperatura zero. Comentaremos, de forma resumida, sobre a questão da ambiguidade dos termos com violação de simetria de Lorentz, que parece ser um assunto bastante recorrente nesta teoria.

No último capítulo serão apresentadas as nossas considerações finais e perspectivas.

Nesta tese, utilizaremos o sistema de unidades naturais,  $\hbar = k_B = c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$ , e a métrica do espaço-tempo de Minkowski,  $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ .

# Capítulo 2

## Eletrodinâmica Quântica

### Estendida

Neste capítulo faremos uma breve introdução acerca da eletrodinâmica usual, apresentando algumas de suas propriedades básicas no que diz respeito às transformações de gauge. Em seguida mostramos uma extensão da eletrodinâmica quântica que inclui todos os possíveis termos que violam as simetrias de Lorentz e CPT, além de comentarmos sucintamente sobre violação de simetria de CPT e suas implicações.

#### 2.1 Introdução

Com o intuito de investigar e obter algum indício sobre as teorias fundamentais, tal qual a teoria de cordas, alguns modelos foram contruídos em uma escala de energia acessível, isto é, a escala de energia do MP. Estes modelos são capazes de prover a possibilidade de se testar experimentalmente tais teorias.

Um desses modelos, que consolidou-se ao longo dos anos, é o MPE, proposto



por Kostelecký e Colladay [1, 2]. Tal modelo tem sua origem no fenômeno de quebra espontânea de simetria em teorias fundamentais [3, 4]. Neste modelo é inserido na lagrangiana todos os possíveis termos que violam as simetrias de Lorentz e de CPT, no entanto, preservando a renormalizabilidade, a invariância de gauge e a simetria  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  do MP usual.

Dentro do contexto de observações experimentais e fenomenológicas, há uma dificuldade inerente aos modelos que buscam indícios de violação de invariância de Lorentz. Tal dificuldade reside no fato de que as correções esperadas devido à quebra da invariância de Lorentz devem ser muito pequenas, porém, há uma grande gama de experimentos através dos quais podemos ter indícios acerca da violação da invariância de Lorentz, além de uma grande variedade de observações fenomenológicas. Veja a Ref. [11] para maiores detalhes.

É importante lembrar também que há um setor do MPE que consiste de operadores com dimensão de massa  $d \geq 5$ . Neste setor, que ficou conhecido como setor não mínimo, o termo de Chern-Simons de derivada superior possui operadores de dimensão de massa  $d = 5$ . Embora o setor mínimo do MPE, isto é, o setor no qual os operadores tem dimensão de massa  $d \leq 4$  tenha recebido mais atenção, limites nos coeficientes de violação para o setor não mínimo têm motivado fortemente o estudo de tal setor do MPE.

## 2.2 Eletrodinâmica Quântica

A eletrodinâmica quântica (EDQ) é a teoria quântica de campos relativística da eletrodinâmica. Em essência, ela descreve como luz e matéria interagem e foi a

primeira teoria a entrar em completo acordo com a mecânica quântica e a relatividade especial.

A EQD fundamenta-se sobre dois grandes pilares, a mecânica quântica relativística e a invariância de gauge. A origem da invariância de gauge se dá a partir da observação de que vários potenciais diferentes podem descrever os mesmos campos eletromagnéticos. Em teoria de campos, o conceito de invariância de gauge foi inicialmente estudado por Weyl [28] em 1918 e constitui um dos pontos mais importantes da física de partículas. A invariância sobre transformações de gauge locais é de extrema importância no que diz respeito as interações fundamentais e a interpretação atual de tal conceito foi dada por Fock em 1926 [29].

Considere agora a lagrangiana de Dirac, dada por

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi. \quad (2.1)$$

Esta lagrangiana é invariante sob a transformação de gauge global, isto é,  $\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi$ , onde  $\alpha$  é um fator de fase constante. Ao inserirmos agora uma localidade na fase, ou seja, tomando  $\alpha = \alpha(x)$ , a lagrangiana de Dirac (2.1) não se mantém invariante, pois, após a transformação, temos

$$\mathcal{L}_D \rightarrow \mathcal{L}_D + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha. \quad (2.2)$$

Para contrabalançar os efeitos da localidade de fase, se faz necessária a inserção de um termo de interação à lagrangiana que transforme de acordo com

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (2.3)$$

Assim a lagrangiana escrita como

$$\mathcal{L}_{mat} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m - eA)\psi, \quad (2.4)$$

mantém-se invariante sob as transformações de gauge locais no spinor e no campo de gauge. Podemos ainda escrever a equação acima de maneira mais compacta e conveniente em termos da derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (2.5)$$

e conseqüentemente,

$$\mathcal{L}_{mat} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi. \quad (2.6)$$

A lagrangiana que descreve a dinâmica dos campos de gauge é a lagrangiana de Maxwell, sendo esta dada por:

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

onde,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é o tensor intensidade de campo eletromagnético. A lagrangiana de Maxwell claramente é invariante sob transformação de gauge. Finalmente podemos escrever a lagrangiana que compõe a eletrodinâmica quântica, sendo esta composta unicamente pelas lagrangianas de Maxwell e de Dirac,

$$\mathcal{L}_{EDQ} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m - e\not{A})\psi. \quad (2.8)$$

Tal lagrangiana é, como visto acima, invariante sob transformação de gauge, detém simetria  $U(1)$  e descreve a dinâmica e interação dos campos de gauge com os campos espionais.

## 2.3 Eletrodinâmica Quântica Estendida

A apresentação de alguns dos aspectos da EDQ usual que foi feita na seção anterior será de suma importância para o entendimento da EDQ munida de violação de simetria de Lorentz que será apresentada ao longo desta seção.

A eletrodinâmica que trabalharemos aqui, também conhecida como eletrodinâmica estendida, é constituída essencialmente da eletrodinâmica usual, porém, adicionam-se à lagrangiana todos os possíveis termos que violam as simetrias de Lorentz e de CPT. Os termos acrescidos são pequenos a ponto de serem desprezados no regime de energia do setor eletrofraco, desta forma o presente modelo recupera o MP convencional. Uma outra consequência da pequena magnitude dos coeficientes de violação é a possibilidade de se trabalhar em um regime perturbativo. É importante lembrar que a EDQ estendida preserva a simetria de gauge local,  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  do MP convencional assim como a renormalização.

Como já foi mencionado na introdução, a principal motivação para o estudo de tais modelos surgiu da observação do fenômeno de quebra espontânea de simetria em teorias mais fundamentais. No caso de um campo escalar, o processo de quebra espontânea de simetria dá origem a um valor esperado no vácuo (VEV) não nulo para o campo de Higgs, originando assim a massa das partículas do MP. Tal processo ficou conhecido como mecanismo de Higgs. Já no caso de um campo tensorial, obtemos, após o processo de quebra espontânea de simetria, surge um tensor de fundo constante que aponta para a existência de uma direção preferencial no espaço-tempo, quebrando assim a sua isotropia, que é um conceito bem definido na relatividade restrita.

Sendo assim, a lagrangiana da EDQ estendida, pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overbrace{(k_{AF})_{\mu}}^{\Lambda}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\overbrace{A_{\nu}F_{\lambda\rho}}^{\Lambda^3} - \frac{1}{4}(k_F)^{\mu\nu\lambda\rho}\overbrace{F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}}^{\Lambda^4} + \frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^{\mu}D_{\mu}\psi - \bar{\psi}M\psi, \quad (2.9)$$

onde,  $\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu} + \Gamma_1^{\mu}$  e  $M = m + M_1$ , sendo



$$\begin{aligned}
\Gamma_1^\mu &= c^{\mu\nu}\gamma_\nu + d^{\mu\nu}\gamma_\nu\gamma_5 + e^\mu + if^\mu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\nu\mu}\sigma_{\lambda\nu} \\
M_1 &= a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma^\mu\gamma_5 + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Todos os coeficientes da EDQ estendida acima violam as transformações de Lorentz de partícula, no entanto, somente os coeficientes  $a_\mu, b_\mu, e_\mu, f_\mu, g_{\lambda\mu\nu}$  (setor fermiônico) e  $(k_{AF})_\mu$  (setor bosônico) são responsáveis pela violação de CPT. Note que todos esses coeficientes são os VEV's dos campos tensoriais das teorias fundamentais, ou seja,  $\langle B_\mu \rangle = b_\mu$ ,  $\langle C_{\mu\nu} \rangle = c_{\mu\nu}$ , e assim por diante.

O setor bosônico é composto pela lagrangiana de Maxwell usual, pelo termo de Chern-Simons quadrimensional (4D) CPT-ímpar, que é governado pelo coeficiente  $(k_{AF})_\mu$  e pelo termo CPT-par, governado pelo coeficiente  $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$ . O termo CS é responsável por uma violação nas simetrias de Lorentz e CPT, e percebe-se que o coeficiente  $(k_{AF})_\mu$  possui dimensão de massa  $\Lambda$  ( $d = 1$ ), visto que a lagrangiana possui dimensão de massa  $\Lambda^4$  ( $d = 4$ ) e o operador por  $A^\nu F^{\lambda\rho}$  possui dimensão de massa  $\Lambda^3$  ( $d = 3$ ). O último termo do setor bosônico possui um operador  $F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho}$  com dimensão de massa ( $d = 4$ ) e portanto o coeficiente  $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$  é adimensional. Além disso, tal coeficiente é CPT-par, isto é, viola apenas a simetria de Lorentz, tem simetria de tensor de Riemann e pode ser induzido radiativamente através de correções no coeficiente  $c_{\mu\nu}$  do setor fermiônico.

No setor fermiônico, os operadores contraídos com os coeficientes  $a_\mu, b_\mu, e_\mu, f_\mu$  e  $g_{\lambda\nu\mu}$  são CPT-ímpar, enquanto que os operadores associados aos coeficientes  $c_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}$  e  $H_{\mu\nu}$  são CPT-par. Note ainda que os coeficientes incluídos em  $\Gamma_1^\mu$  são adimensionais, enquanto que os coeficientes presentes em  $M_1$  têm dimensão de massa  $d = 1$  e que, sob uma redefinição espinorial, os coeficientes  $a_\mu, e_\mu$  e  $f_\mu$  podem ser

absorvidos pelos espinores  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  [27].

Ainda no setor fermiônico, devemos lembrar que, os termos dominados pelos coeficientes  $b_\mu$  e  $c_{\mu\nu}$  são os únicos que dão existência a correções quânticas no setor bosônico, tal que

$$(k_{AF})_\mu = C b_\mu, \quad (2.11)$$

$$(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} = D (g_{\mu\lambda}c_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}c_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}c_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}c_{\mu\rho}), \quad (2.12)$$

e  $C$  e  $D$  são constantes de proporcionalidade. Estudos mostram que a constante  $C$  pode possuir ambiguidade. A escolha do procedimento de regularização dimensional, nos possibilitou induzir ainda mais a ambiguidade em ambos os regimes, perturbativos e não perturbativos. O argumento apresentado sobre a formulação não perturbativa é mais satisfatória, por não haver razão para escolher qualquer outra definição sobre os métodos perturbativos [33].

Neste trabalho nos deteremos à lagrangiana

$$\mathcal{L}_b = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m - e\cancel{A} - \cancel{b}\gamma_5)\psi, \quad (2.13)$$

com o intuito de realizarmos a indução do termo CS usual e de derivada superior, além de efetuarmos uma discussão sobre a invariância de gauge ampla e sobre o termo tipo éter, ambas discussões à temperatura finita.

## 2.4 Violação de Simetria de Lorentz

Para completar a discussão acima já feita, comentaremos aqui sobre alguns dos aspectos fundamentais acerca de como se dá a violação de simetria de Lorentz que tanto já foi mencionada anteriormente. Para isso, vamos considerar a seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{AF})_{\mu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\nu}F_{\rho\sigma}. \quad (2.14)$$

A lagrangiana acima mencionada é conhecida como o modelo de Chern-Simons 4D e foi inicialmente estudada no trabalho de Carrol, Field e Jackiw (CFJ) [35]. Notamos, que no caso onde  $(k_{AF})^{\mu} = (0, \vec{k}_{AF})$  encontramos uma estrutura muito similar ao termo de Chern-Simons tridimensional (3D).

No trabalho CFJ supracitado, é mostrado que o termo de Chern-Simons, constituído de um quadrivetor constante  $(k_{AF})_{\mu}$ , viola as simetrias de Lorentz (e de paridade (P) para  $(k_{AF})_0$ , enquanto que de reversão temporal (T) para  $(k_{AF})_i$ ) ao passo que preserva a invariância de gauge. A ideia de quebra de simetria de Lorentz através de um quadrivetor constante de fundo consolidou-se, em especial, através do MPE proposto por Kostelecky, cuja eletrodinâmica foi apresentada na seção anterior.

Os campos de fundo inclusos no MPE violam as transformações de Lorentz de partícula, enquanto que as transformações de Lorentz de observador permanecem preservadas. Uma transformação de observador consiste basicamente de uma transformação de Lorentz passiva na presença de um campo de fundo, à medida que uma transformação de partícula consiste em uma transformação de Lorentz ativa na presença de um campo de fundo. Para perceber como se dá a violação de fato na presença de um campo de fundo, basta lembrar que as transformações passivas (espaço-tempo fixo) e ativas (referencial fixo) são equivalentes entre si. Não obstante, a presença de um campo de fundo quebra a equivalência entre essas transformações, e é desta forma que os campos de fundo presentes no MPE violam a simetria de Lorentz, isto é, violando as transformações de Lorentz de partícula.

A seguir, apresentaremos os aspectos gerais relativos à violação de simetria de CPT e mostraremos, como o coeficiente de violação  $b_\mu$  do setor fermiônico do MPE viola a simetria CPT.

## 2.5 Violação de Simetria de CPT

Simetria CPT, é uma simetria das leis da física para as transformações que envolvem simultaneamente carga (C), inversão espacial (paridade) (P) e reversão temporal (T). Por muito tempo acreditou-se que as simetrias C, P e T eram, separadamente, simetrias da física pois tanto a gravitação quanto o eletromagnetismo e depois as interações fortes respeitavam essa simetria. As primeiras medidas indicavam que a teoria era invariante sob transformações de CP, mas não C e P separadamente. A quebra da simetria de paridade foi bastante surpreendente. Sabemos, que há também uma pequena violação de CP gerada pelas interações fracas.

A ideia da simetria CP surgiu quando a descoberta da violação da paridade em certas reações radioativas nos anos 1950, porém só foi realmente explorada em 1964, quando a interação fraca violava tal simetria, com isto, se denominava violação de simetria CP, a descoberta do decaimento do méson neutro K. Os méritos do grande feito foram atribuídos James Cronin e Val Fitch que receberam o Prêmio Nobel de Física em 1980.

A teoria de Dirac expõe além das transformações de Lorentz, duas importantes simetrias tipo espaço-tempo, a paridade e a inversão temporal. A paridade, exibe uma propriedade espacial, ou seja, inverte o sinal da parte espacial, em um



quadrivetor qualquer, isto é,  $x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) \rightarrow \tilde{x}_\mu = (x^0, -\mathbf{x})$ , de maneira análoga aplica-se ao momento, veja,  $p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) \rightarrow \tilde{p}_\mu = (p^0, -\mathbf{p})$ .

Já a reversão temporal, inverte o fluxo do tempo no cone de luz, ou seja,  $x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) \rightarrow \tilde{x}_\mu = (-x^0, \mathbf{x})$  para o momento temos,  $p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) \rightarrow \tilde{p}_\mu = (-p^0, \mathbf{p})$ . Todavia, a norma no espaço tempo de Minkowski se conserva.

Ainda neste contexto de simetrias discretas, é conveniente discutir uma terceira operação, a saber, a conjugação de carga. Esta operação, denotada por C, não está relacionada a características do espaço-tempo, mas sim a simetria partícula-antipartícula, transformando partícula em antipartícula e vice-versa.

As relações de inversão de paridade que usaremos aqui são as seguintes:

$$P\psi(x)P^{-1} \equiv \psi^p(x) = \alpha_p \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

$$P\bar{\psi}(x)P^{-1} \equiv \bar{\psi}^p(x) = \alpha_p^* \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^0. \quad (2.16)$$

As relações de reversão temporal usadas são dadas por

$$T\psi(x)T^{-1} \equiv \psi^t(x) = \alpha_t \gamma^1 \gamma^3 \psi(-t, \mathbf{x}), \quad (2.17)$$

$$T\bar{\psi}(x)T^{-1} \equiv \bar{\psi}^t(x) = -\alpha_t^* \bar{\psi}(-t, \mathbf{x}) \gamma^1 \gamma^3. \quad (2.18)$$

E por fim, as relações de conjugação de carga a serem usadas são:

$$C\psi(x)C^{-1} \equiv \psi^c(x) = \alpha_c C \bar{\psi}^T(x) \quad (2.19)$$

$$C\bar{\psi}(x)C^{-1} \equiv \bar{\psi}^c(x) = \alpha_c^* \psi^T(x) C, \quad (2.20)$$

$$CA_\mu(x)C^{-1} = -A_\mu(x), \quad (2.21)$$

onde  $C = i\gamma^2\gamma^0$ . Veja o livro-texto [38] para maiores detalhes sobre as transformações.

Nossa tarefa final neste capítulo é mostrar que o termo  $\not{b}\gamma_5$  viola CPT. Vamos partir de uma estrutura semelhante, no entanto ao invés de considerarmos inicialmente um quadrivetor constante de fundo, como o  $b_\mu$ , vamos levar em conta um quadrivetor  $B_\mu = B_\mu(x)$  que, tal qual o campo de gauge, transforma-se sob conjugação de carga. Dessa forma, avaliando inicialmente o termo  $B_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$  sob conjugação de paridade, temos:

$$\begin{aligned} PB_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi P^{-1} &= PB_\mu P^{-1}P\bar{\psi}P^{-1}\gamma^\mu\gamma_5P\psi P^{-1} \\ &= |\alpha_p|^2 B_\mu(t, -\mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{t}, -\mathbf{x})\gamma^0\gamma^\mu\gamma_5\gamma^0\psi(\mathbf{t}, -\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Na última passagem foram inseridos dois operadores identidade na forma  $P^{-1}P$  e usadas as relações de inversão de paridade (2.15) e (2.16). Como  $|\alpha_p|^2 = 1$  temos que,

$$PB_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi P^{-1} = \begin{cases} -B_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi & \text{para } \mu = 0 \\ +B_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi & \text{para } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.23)$$

Agora para a reversão temporal, de maneira análoga, precisamos encontrar

$$\begin{aligned} TB_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi T^{-1} &= TB_\mu T^{-1}T\bar{\psi}T^{-1}\gamma^\mu\gamma_5T\psi T^{-1} \\ &= -|\alpha_t|^2 B_\mu(-t, \mathbf{x})\bar{\psi}(-\mathbf{t}, \mathbf{x})\gamma^1\gamma^3\gamma^\mu\gamma_5\gamma^1\gamma^3\psi(-\mathbf{t}, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Novamente, como  $|\alpha_t|^2 = 1$ , podemos escrever o resultado da reversão temporal na forma

$$TB_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi T^{-1} = \begin{cases} +B_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi & \text{para } \mu = 0 \\ -B_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi & \text{para } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.25)$$

Finalmente, para a conjugação de carga, encontramos que

$$\begin{aligned} CB_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi C^{-1} &= CB_\mu C^{-1}C\bar{\psi}C^{-1}\gamma^\mu\gamma_5C\psi C^{-1} \\ &= -B_\mu(t, \mathbf{x})\bar{\psi}(\mathbf{t}, \mathbf{x})\gamma^\mu\gamma_5\psi(\mathbf{t}, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Desta forma podemos ver, através da tabela mostrada abaixo, que as estruturas tensoriais associadas as quantidades  $B_0$  e  $B_i$  violam as seguintes simetrias,

Tabela 2.1: Coeficientes e simetrias discretas

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$B_0\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi$	-	-	+	+	-	-	+
$B_i\bar{\psi}\gamma^i\gamma_5\psi$	-	+	-	-	+	-	+

Observe que se o quadrivetor  $B_\mu = B_\mu(x)$  for promovido a um quadrivetor constante  $b_\mu$ , que obviamente não transforma sob conjugação de carga, há uma mudança de sinal na conjugação de carga e conseqüentemente na transformação de CPT também, como podemos ver na tabela que segue.

Tabela 2.2: Coeficientes e simetrias discretas

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$b_0\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi$	+	-	+	-	+	-	-
$b_i\bar{\psi}\gamma^i\gamma_5\psi$	+	+	-	+	-	-	-

Com isso, mostramos que a estrutura  $\not{b}\gamma_5$  do setor fermiônico do MPE viola de fato a simetria de CPT, como queríamos demonstrar. Abaixo mostramos a tabela completa de violação de CPT para todos os coeficientes do MPE. Observe que, por simplicidade, omitimos os campos e as derivadas contraídos com os coeficientes.

Tabela 2.3: Coeficientes e simetrias discretas

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$c_{00}, (k_F)_{0j0k},$ $c_{jk}, (k_F)_{jklm}$	+	+	+	+	+	+	+
$b_j, g_{j0l}, g_{jk0}, (k_{AF})_j$	+	+	-	+	-	-	-
$b_0, g_{j00}, g_{jkl}, (k_{AF})_0$	+	-	+	-	+	-	-
$c_{0j}, c_{j0}, (k_F)_{0jkl}$	+	-	-	-	-	+	+
$a_0, e_0, f_j$	-	+	+	-	-	+	-
$H_{jk}, d_{0j}, d_{j0}$	-	+	-	-	+	-	+
$H_{0j}, d_{00}, d_{jk}$	-	-	+	+	-	-	+
$a_j, e_j, f_0$	-	-	-	+	+	+	-

Um outro ponto importante, ainda no contexto de violação de CPT, é o resultado encontrado por Greenberg [85], que nos diz que violação de CPT implica em violação de Lorentz, mas que a recíproca nem sempre é verdadeira, pois a invariância de simetria de CPT é uma condição necessária, mas não suficiente para garantir a invariância de Lorentz.

# Capítulo 3

## Indução de Termos de Chern-Simons a $T \neq 0$

Aqui, iremos inicialmente discutir a geração através de correções radiativas do termo de Chern-Simons 4D, à temperatura finita. O procedimento adotado servirá, de certa forma, como base para os demais cálculos realizados nesta tese. Em seguida, iremos efetuar a indução do termo de Chern-Simons de derivada de ordem superior, à temperatura zero e finita. Nesse cálculo iremos constatar que no limite de altas temperaturas o resultado será nulo. Um comportamento que parece se repetir nos termos de derivadas superiores.

### 3.1 Introdução

A questão da indução do termo de Chern-Simons 4D (segundo termo da Eq. (2.14)) surgiu já no segundo trabalho de Kostelecký, Ref. [2]. Ele já argumentava que a correção radiativa deveria ser nula, pois, teoricamente, a densidade de

energia poderia ser negativa (com a presença do termo de Chern-Simons), e experimentalmente, existia uma previsão fenomenológica na qual  $(k_{AF})^\mu$  deveria ser da ordem de  $10^{-43}\text{GeV}$  [35], ou seja,  $(k_{AF})^\mu$  deveria ser realmente nulo. Desse modo, o resultado não nulo para a indução, através de correções radiativas, poderia causar severas restrições à viabilidade da teoria.

Contudo, em 1999, Kostelecký e Jackiw apresentaram um trabalho [33], afirmando que para o cálculo não perturbativo, referente ao coeficiente  $b^\mu$  o resultado para indução era finito e determinado. Já para o cálculo perturbativo, o resultado era finito e indeterminado. Dessa forma, o resultado nulo para a indução poderia ser encontrado no cálculo perturbativo.

Para uma maior compreensão dessa questão, vamos de uma forma geral, inicialmente, considerar o funcional gerador da EDQ estendida, a qual descreve o setor bosônico e fermiônico, dado por

$$Z = \int D\bar{\psi}D\psi A_\mu e^{iS}, \quad (3.1)$$

onde  $S = \int d^4x \mathcal{L}$  é a ação. A lagrangiana correspondente é escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{AF})\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}A_\nu F_{\lambda\rho} + \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m - \not{b}\gamma_5)\psi, \quad (3.2)$$

sendo  $\mathcal{D} = \not{\partial} + ie\mathcal{A}$ . Os dois primeiros termos da lagrangiana descrevem os bósons, enquanto que o último termo descreve os férmions, no qual iremos ater nossa atenção para indução do termo de Chern-Simons. Com isso, a lagrangiana descrita pelos férmions assume a forma

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m - e\mathcal{A} - \not{b}\gamma_5)\psi. \quad (3.3)$$

Restringimos o MPE aos coeficientes  $(k_{AF})^\mu$  e  $b^\mu$  pois eles são os únicos que possuem as mesmas transformações discretas de C, P e T (veja tabela 2.3).

Portanto, eles devem se relacionar através de correções radiativas. Além disso, o termo  $b_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$  possui a matriz  $\gamma_5$ , que é fundamental para obtenção do tensor Levi-Civita encontrado no termo de Chern-Simons.

A fim de calcularmos a geração do termo de Chern-Simons 4D através das correções radiativas, primeiro efetuamos a integração fermiônica, tal que

$$\begin{aligned} Z &= \int DA_\mu e^{i \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (k_{AF}) \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} A_\nu F_{\lambda\rho} \right)} \int D\bar{\psi} D\psi e^{i \int d^4x \bar{\psi} (i\not{\partial} - m - e\not{A} - \not{b}\gamma_5) \psi} \\ &= \int DA_\mu e^{i \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (k_{AF}) \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} A_\nu F_{\lambda\rho} \right)} e^{iS_{\text{eff}}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde a ação efetiva é dada por

$$S_{\text{eff}} = -i \text{Tr} \ln(\not{\partial} - m - e\not{A} - \not{b}\gamma_5). \quad (3.5)$$

Aqui,  $\text{Tr}$  é o traço sobre o espaço das coordenadas e momentos, assim como sobre as matrizes de Dirac. Podemos facilmente reescrever a ação efetiva acima como  $S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}^{(0)} + S_{\text{eff}}^{(1)}$ , onde  $S_{\text{eff}}^{(0)} = -i \text{Tr} \ln(\not{\partial} - m - \not{b}\gamma_5)$ , assim como

$$S_{\text{eff}}^{(1)} = i \text{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{\not{\partial} - m - \not{b}\gamma_5} e\not{A} \right]^n. \quad (3.6)$$

Para a indução do termo de Chern-Simons, devemos considerar  $n = 2$  na ação efetiva acima. Na próxima seção iremos de forma explícita e didática efetuar esse cálculo, pois, inclusive, os demais cálculos deste tese terão na sua essência a mesma metodologia. Estudos sobre a indução do termo de Chern-Simons foram efetuados exaustivamente na literatura, em diferentes contextos e esquemas de regularização [1, 30, 33, 42, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56]. Para o cálculo não perturbativo, temos o resultado finito e determinado, dado por

$$(k_{AF})^\mu = \frac{3e^2}{16\pi^2} b^\mu, \quad (3.7)$$

ao passo que para o cálculo perturbativo, temos o resultado finito e indeterminado, tal que

$$(k_{AF})^\mu = C b^\mu, \quad (3.8)$$

onde  $C$  é uma constante que assume diversos valores, inclusive, o resultado nulo. No próximo capítulo iremos discutir com mais detalhes essa questão da ambiguidade do coeficiente  $C$ , pois, como será constatado, esta ambiguidade também é encontrada no termo tipo éter, que será estudado no capítulo 5.

Também temos o estudo da indução levando em conta a temperatura finita [57, 58, 59]. Na última seção deste capítulo iremos apresentar o cálculo da indução do termo de Chern-Simons de derivada superior, à temperatura zero e finita. Esse cálculo foi o primeiro a ser apresentada na literatura relativo ao termo de Chern-Simons de derivada superior [12]. Contudo, podemos encontrar na literatura um trabalho anterior relacionado com a indução radiativa de termos de derivada superior, o qual foi levado em conta o coeficiente  $g^{\mu\nu\lambda}$  [62, 44], que de certa forma, está relacionado com o coeficiente  $b^\mu$ .

### 3.2 Indução do Termo de Chern-Simons a $T \neq 0$

Nesta seção iremos efetuar o cálculo da indução do termo de Chern-Simons 4D, já bastante estudado na literatura. Contudo, aqui, iremos efetuá-lo com bastante detalhes e inclusive no contexto de temperatura finita. Para isso devemos tomar  $n = 2$  em (3.6), tal que obtemos

$$S_{\text{eff}}^{(1,2)} = \frac{ie^2}{2} \text{Tr} \frac{1}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5} \not{A} \frac{1}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5} \not{A}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{ie^2}{2} tr \int d^4x \langle x | \frac{1}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5} A \frac{1}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5} A | x \rangle \\
&= \frac{ie^2}{2} tr \int d^4x \langle x | \frac{1}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - i\not{\partial} - m - \not{b}\gamma_5} \gamma^\nu A^\mu A^\nu | x \rangle. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Da primeira para a segunda linha, usamos  $Tr \mathcal{O} = tr \int d^4x \mathcal{O}$ , ao passo que da segunda para a terceira consideramos  $A^\mu S(p) = S(p - i\partial) A^\mu$ , onde  $G(p) = (\not{p} - m - \not{b}\gamma_5)^{-1}$  é o chamado propagador. Observe que agora  $tr$  é apenas o traço sobre as matrizes de Dirac. Agora, aplicando a completeza,

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} |p\rangle \langle p| = 1, \quad (3.10)$$

a Eq. (3.9) assume a forma

$$\begin{aligned}
S_{\text{eff}}^{(1,2)} &= \frac{ie^2}{2} tr \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - i\not{\partial} - m - \not{b}\gamma_5} \gamma^\nu \\
&\quad \times A^\mu(x) A^\nu(x). \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Lembrando que o campo de gauge é representado pela transformada de Fourier

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} \tilde{A}^\mu(k), \quad (3.12)$$

a ação efetiva pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
S_{\text{eff}}^{(1,2)} &= \frac{ie^2}{2} tr \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d^4x G(p) \gamma^\mu G(p - k) \gamma^\nu \\
&\quad \times e^{-ix(k+k')} \tilde{A}^\mu(k) \tilde{A}^\nu(k') \\
&= \frac{ie^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Pi^{\mu\nu} A^\mu(k) \tilde{A}^\nu(-k), \quad (3.13)
\end{aligned}$$

onde temos o tensor de polarização

$$\Pi^{\mu\nu} = tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) \gamma^\mu G(p - k) \gamma^\nu. \quad (3.14)$$

Agora, nosso próximo passo é escolher o método perturbativo no coeficiente  $b^\mu$ , tal que o propagador é escrito como

$$G(p) = \frac{1}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5} = \frac{1}{\not{p} - m} + \frac{1}{\not{p} - m} \not{b}\gamma_5 \frac{1}{\not{p} - m} + \dots \quad (3.15)$$

Assim, considerando apenas termos lineares em  $b^\mu$ , os quais contribuirão para a indução do termo de Chern-Simons, a Eq. (3.14) toma a forma

$$\begin{aligned} \Pi_{CS}^{\mu\nu} &= tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p) \not{b}\gamma_5 S(p) \gamma^\mu S(p-k) \gamma^\nu \\ &+ tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p) \gamma^\mu S(p-k) \not{b}\gamma_5 S(p-k) \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Continuando, para calcularmos as integrais acima, podemos utilizar a parametrização de Feynman ou a expansão derivada (ou melhor, a expansão no momento externo  $k^\mu$ ). Vamos utilizar a expansão derivativa [121, 122, 123, 124], pois ela é mais adequada para cálculos com temperatura finita.

Para isso, escrevendo

$$S(p-k) = \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} = \frac{1}{\not{p} - m} + \frac{1}{\not{p} - m} \not{k} \frac{1}{\not{p} - m} + \dots, \quad (3.17)$$

ao definirmos também o propagador

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}, \quad (3.18)$$

tal que

$$S(p-k) = S(p) + S(p) \not{k} S(p) + \dots, \quad (3.19)$$

o tensor de polarização do termo de Chern-Simons (3.16), com apenas termos lineares em  $k^\mu$ , assume a forma

$$\Pi_{CS}^{\mu\nu} = tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p) \not{b}\gamma_5 S(p) \gamma^\mu S(p) \not{k} S(p) \gamma^\nu$$

$$\begin{aligned}
& +tr \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S(p)\gamma^\mu S(p)\not{k}S(p)\not{b}\gamma_5 S(p)\gamma^\nu \\
& +tr \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S(p)\gamma^\mu S(p)\not{b}\gamma_5 S(p)\not{k}S(p)\gamma^\nu.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Note que as integrais acima possuem divergência logarítmica. Desse modo, vamos utilizar a esquema de regularização dimensional, no qual

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}, \tag{3.21}$$

onde  $\mu$  representa um parâmetro de massa qualquer. Com o propósito de efetuarmos os traços sobre as matrizes de Dirac, vamos utilizar a propriedade cíclica a fim de colocarmos a matriz  $\gamma_5$  no final das expressões, tal que agora

$$\begin{aligned}
\Pi_{CS}^{\mu\nu} &= \mu^{4-D} tr \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} S(p)\gamma^\mu S(p)\not{k}S(p)\gamma^\nu S(p)\not{b}\gamma_5 \\
& + \mu^{4-D} tr \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} S(p)\gamma^\nu S(p)\gamma^\mu S(p)\not{k}S(p)\not{b}\gamma_5 \\
& + \mu^{4-D} tr \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} S(p)\not{k}S(p)\gamma^\nu S(p)\gamma^\mu S(p)\not{b}\gamma_5.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Esse procedimento evita inconsistências com relação ao cálculo do traço sobre as matrizes de Dirac, pois a matriz  $\gamma_5$  só bem definida em 4 dimensões do espaço-tempo.

Dessa forma, ao efetuarmos o traço considerando as expressões de (3.22), encontramos o resultado

$$\begin{aligned}
\Pi_{CS}^{\mu\nu} &= 4i\mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^4} (p^2 - m^2) \\
& \times [-3(p^2 - m^2)\epsilon^{\mu\nu bk} - 4p^\mu \epsilon^{\nu bkp} + 4p^\nu \epsilon^{\mu bkp} + 4p \cdot k \epsilon^{\mu\nu bp}],
\end{aligned} \tag{3.23}$$

onde aqui estamos utilizando a notação compacta  $\epsilon^{\mu\nu bk} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} b_\lambda k_\rho$ , ou seja, letras latinas no tensor de Levi-Civita são na verdade quadrivetores contraídos. Para

calcularmos as integrais acima, também vamos considerar que  $p^\alpha p^\beta \rightarrow \frac{p^2}{D} g^{\alpha\beta}$ . Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{CS}^{\mu\nu} &= 4i(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} \left( \frac{12}{D} - 3 \right) \epsilon^{\mu\nu bk} \\ &\quad + 4i(\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{m^2}{(p^2 - m^2)^3} \frac{12}{D} \epsilon^{\mu\nu bk}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

tal que, ao efetuarmos as integrais, usando

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{D/2}}{\Gamma(\alpha)(-m^2)^{\alpha-D/2}} \Gamma(\alpha - D/2), \quad (3.25)$$

encontramos  $\Pi_{CS}^{\mu\nu} = 0$ . Nesse caso, no cálculo perturbativo, o valor do coeficiente é  $C = 0$ . Caso não tivéssemos colocado a matriz  $\gamma_5$  no final das expressões, o resultado seria  $C = \frac{e^2}{4\pi^2}$ . No capítulo 5 iremos discutir melhor essa aparente ambiguidade nos cálculos do tensor de polarização do termo de Chern-Simons.

Finalmente, vamos a seguir considerar o sistema à temperatura finita, ao implementarmos a temperatura  $T = 1/\beta$  no resultado do tensor de polarização após o cálculo do traço, Eq. (3.23). Para isso, primeiro vamos alterar o espaço de Minkowski para o espaço euclidiano, ao usarmos o mapeamento

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &\rightarrow -\delta^{\mu\nu}; \quad p^2 \rightarrow -p_E^\mu; \quad p \cdot k \rightarrow -p_E \cdot k_E; \quad p^\mu \rightarrow -p_E^\mu; \\ p_0 &\rightarrow ip_0; \quad \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(4\pi)^D} \rightarrow i \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \mu^{3-d} \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d}; \end{aligned} \quad (3.26)$$

e assim por diante. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{CS}^{\mu\nu} &= 4 \int \frac{dp_0}{(2\pi)} \mu^{3-d} \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p_E^2 + m^2)^3} \\ &\quad \times \left[ 3(p_E^2 + m^2) \epsilon^{\mu\nu b_E k_E} + 4p_E^\mu \epsilon^{\nu b_E k_E p_E} - 4p_E^\nu \epsilon^{\mu b_E k_E p_E} - 4p_E \cdot k_E \epsilon^{\mu\nu b_E p_E} \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Agora, separando as partes espacial e temporal, ao adotarmos  $p_E^\mu = \vec{p}^\mu + p_0 \delta^{\mu 0}$ , onde  $\vec{p}^\mu = (0, p^i)$ , para os três últimos termos de (3.27), temos

$$\Rightarrow 4p_E^\mu p_E^\alpha \epsilon^{\nu b_E k_E \alpha} - 4p_E^\nu p_E^\mu \epsilon^{\mu b_E k_E \alpha} - 4k_E^\alpha p_E^\alpha p_\beta \epsilon^{\mu\nu b_E k_E \beta}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\vec{p}^\mu \vec{p}^\alpha \epsilon^{\nu b_E k_E \alpha} + 4p_0^2 \delta^{\mu 0} \delta^{\alpha 0} \epsilon^{\nu b_E k_E \alpha} - 4\vec{p}^\nu \vec{p}^\alpha \epsilon^{\mu b_E k_E \alpha} \\
&\quad - 4p_0^2 \delta^{\nu 0} \delta^{\alpha 0} \epsilon^{\mu b_E k_E \alpha} - 4k_E^\alpha \vec{p}^\alpha \vec{p}^\beta \epsilon^{\mu \nu b_E \beta} - 4k_E^\alpha p_0^2 \delta^{\alpha 0} \delta^{\beta 0} \epsilon^{\mu \nu b_E \beta}. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Na expressão acima, ainda podemos usar  $\vec{p}^\alpha \vec{p}^\beta = \frac{\vec{p}^2}{d} (\delta^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha 0} \delta^{\beta 0})$ , tal que encontramos

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & -4\frac{\vec{p}^2}{d} \epsilon^{\mu \nu b_E k_E} + 4\frac{\vec{p}^2}{d} \delta^{\mu 0} \epsilon^{0 \nu b_E k_E} - 4p_0^2 \delta^{\mu 0} \epsilon^{0 \nu b_E k_E} - 4\frac{\vec{p}^2}{d} \epsilon^{\mu \nu b_E k_E} + 4\frac{\vec{p}^2}{d} \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu 0 b_E k_E} \\
& - 4p_0^2 \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu 0 b_E k_E} - 4\frac{\vec{p}^2}{d} \epsilon^{\mu \nu b_E k_E} + 4\frac{\vec{p}^2}{d} k_0 \epsilon^{\mu \nu b_E 0} - 4p_0^2 k_0 \epsilon^{\mu \nu b_E 0}. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Assim, a Eq. (3.27) toma a forma

$$\begin{aligned}
\Pi_{CS}^{\mu\nu} &= 4 \int \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d (\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2)^3} \\
&\quad \times \left[ 3(\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2) \epsilon^{\mu \nu b_E k_E} - 12\frac{\vec{p}^2}{d} \epsilon^{\mu \nu b_E k_E} + 4 \left( \frac{\vec{p}^2}{d} - p_0^2 \right) \delta^{\mu 0} \epsilon^{0 \nu b_E k_E} \right. \\
&\quad \left. + 4 \left( \frac{\vec{p}^2}{d} - p_0^2 \right) \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu 0 b_E k_E} + 4 \left( \frac{\vec{p}^2}{d} - p_0^2 \right) k_0 \epsilon^{\mu \nu b_E 0} \right]. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Neste momento, vamos efetuar a integração na componente espacial  $\vec{p}$ , de tal forma que obtemos

$$\begin{aligned}
\Pi_{CS}^{\mu\nu} &= 16 \int \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} 2^{-d-2} \pi^{-d/2} \left[ \frac{\Gamma(2-d/2)}{(p_0^2 + m^2)^{2-d/2}} - \frac{2p_0^2 \Gamma(3-d/2)}{(p_0^2 + m^2)^{3-d/2}} \right] \\
&\quad \times (\delta^{\mu 0} \epsilon^{0 \nu b_E k_E} + \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu 0 b_E k_E} + k_0 \epsilon^{\mu \nu b_E 0}). \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Na expressão acima podemos simplificar o denominador, ao considerarmos  $p_0^2 = (p_0^2 + m^2) - m^2$ , assim como a função gamma, ao usarmos  $2\Gamma(3-d/2) = -(d-4)\Gamma(2-d/2)$ .

Desse modo, encontramos

$$\begin{aligned}
\Pi_{CS}^{\mu\nu} &= 16 \int \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} 2^{-d-2} \pi^{-d/2} \Gamma(2-d/2) \left[ \frac{(d-3)}{(p_0^2 + m^2)^{2-d/2}} - \frac{(d-4)m^2}{(p_0^2 + m^2)^{3-d/2}} \right] \\
&\quad \times (\delta^{\mu 0} \epsilon^{0 \nu b_E k_E} + \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu 0 b_E k_E} + k_0 \epsilon^{\mu \nu b_E 0}). \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Como esperado, ao calcularmos a integral na componente temporal  $p_0$ ,  $\Pi_{CS}^{\mu\nu} = 0$ .

Contudo, para levarmos em conta o comportamento de temperatura finita, devemos usar, por exemplo, o formalismo de Matsubara, ao fazermos a discretização da componente temporal

$$p_0 \rightarrow (n + 1/2)2\pi/\beta = (n + 1/2)2\pi T, \quad (3.33)$$

assim como na medida de integração

$$\int \frac{dp_0}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n = T \sum_n. \quad (3.34)$$

Assim, a Eq. (3.32) pode ser rescrita como

$$\begin{aligned} \Pi_{CS}^{\mu\nu} &= 16 \frac{m}{2\pi\xi} \sum_n \mu^{(3-d)} 2^{(-d-2)} \pi^{(-d/2)} \Gamma(2 - d/2) \\ &\times \left[ \left( \frac{\xi^2}{m^2} \right)^{(2-d/2)} \frac{d-3}{[(n+1/2)^2 + \xi^2]^{2-d/2}} - \left( \frac{\xi^2}{m^2} \right)^{(3-d/2)} \frac{(d-4)m^2}{[(n+1/2)^2 + \xi^2]^{3-d/2}} \right] \\ &\times (\delta^{\mu 0} \epsilon^{0\nu b_E k_E} + \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu 0 b_E k_E} + k_0 \epsilon^{\mu\nu b_E 0}), \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde  $\xi = \frac{m}{2\pi T}$ . Para calcularmos o somatório acima, vamos usar uma representação explícita em relação à frequência de Matsubara [61], dada por

$$\sum_n [(n+b)^2 + \xi^2]^{-\lambda} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda - 1/2)}{\Gamma(\lambda) (\xi^2)^{\lambda-1/2}} + 4 \sin(\pi\lambda) f_\lambda(\xi, b), \quad (3.36)$$

onde

$$f_\lambda(\xi, b) = \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - \xi^2)^\lambda} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{e^{2\pi(z+ib)} - 1} \right), \quad (3.37)$$

a qual é válida para  $\lambda < 1$ , com polos em  $1/2, -1/2$  e  $-3/2, \dots$ . Na Eq. (5.31), o primeiro termo é a contribuição de temperatura zero, ao passo que o segundo termo corresponde à contribuição de temperatura finita.

Note que, enquanto o denominador do primeiro termo de (3.35) possui expoente  $\lambda = 2 - d/2 \rightarrow 1/2$  (no limite  $d \rightarrow 3$ ), o denominador do segundo termo

apresenta  $\lambda = 3 - d/2 \rightarrow 3/2$ . Desse modo, a fim de utilizarmos o somatório (3.36), devemos também considerar a seguinte relação de recorrência:

$$f_\lambda(\xi, b) = -\frac{1}{2\xi^2} \frac{2\lambda - 3}{\lambda - 1} f_{\lambda-1}(\xi, b) - \frac{1}{4\xi^2} \frac{1}{(\lambda - 2)(\lambda - 1)} \frac{\partial^2}{\partial b^2} f_{\lambda-2}(\xi, b), \quad (3.38)$$

de tal modo que conseguimos relacionar um denominador com potência  $\lambda = 3/2$  com dois de potências  $\lambda = 1/2$  e  $\lambda = -1/2$ , ou seja, dentro agora da validade do somatório (3.36). Assim, ao considerarmos  $b \rightarrow 1/2$ , tal que

$$f_\lambda(\xi, b) \Big|_{b \rightarrow 1/2} = \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - \xi^2)^\lambda} \frac{1}{2} (\tanh(\pi z) - 1), \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial b^2} f_\lambda(\xi, b) \Big|_{b \rightarrow 1/2} = \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - \xi^2)^\lambda} \pi^2 \sec^2 h^2(\pi z) \tanh(\pi z), \quad (3.40)$$

após expandirmos em  $d \rightarrow 3$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{CS}^{\mu\nu} &= F(\xi) (\delta^{\mu 0} \epsilon^{0\nu b_E k_E} + \delta^{\nu 0} \epsilon^{\mu 0 b_E k_E} + k_0 \epsilon^{\mu\nu b_E 0}) \\ &= F(\xi) \epsilon^{i\lambda\mu\nu} b_i k_\lambda, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde

$$F(\xi) = - \int_{|\xi|}^{\infty} dz (z^2 - \xi^2)^{1/2} \sec^2 h^2(\pi z) \tanh(\pi z). \quad (3.42)$$

Na Fig. 3.1 apresentamos um gráfico da função  $F(\xi)$ , ou seja, com variação através do inverso de  $T$ .

Vamos a seguir analisar os limites assintóticos da função  $F(\xi)$ . Para a temperatura zero, devemos considerar o limite  $\xi \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow 0$ ), tal que  $F(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ , ou seja,  $\Pi_{CS}^{\mu\nu} \rightarrow 0$ , como esperado. Por outro lado, para altas temperaturas, devemos tomar o limite  $\xi \rightarrow 0$  ( $T \rightarrow \infty$ ), de modo que

$$F(\xi \rightarrow 0) \rightarrow - \int_0^{\infty} dz z \sec^2 h^2(\pi z) \tanh(\pi z) = -\frac{1}{2\pi^2}. \quad (3.43)$$

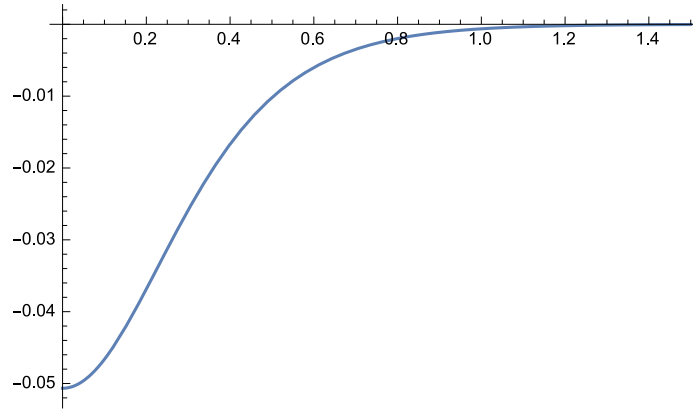


Figura 3.1: Gráfico da função  $F(\xi)$

Assim, para o coeficiente do termo de Chern-Simons, no limite de altas temperaturas, temos  $(k_{AF})^0 \rightarrow 0$  e

$$(k_{AF})^i \rightarrow -\frac{e^2}{4\pi^2} b^i. \quad (3.44)$$

O resultado acima foi inicialmente encontrado em [57], e como podemos observar, ele contribui de forma positiva para a energia, além de ser consistente com a unitariedade e causalidade da teoria [125], pois apenas a componente tipo-espaço  $b^i$  está presente.

### 3.3 Termos de Derivada Superior

A maioria dos estudos do MPE estão relacionados com os operadores de dimensão de massa  $d = 3$  e  $d = 4$ , conseqüentemente, os coeficientes contraídos possuem dimensão de massa  $d = 1$  e adimensional, respectivamente. Veja a Eq. (2.9) para a identificação desses operadores. Contudo, como já mencionamos, no MPE também temos operadores de dimensão de massa  $d \geq 5$ , os quais são não renormalizáveis, contraídos com coeficientes de dimensão de massa  $d \leq -1$ . Embora esses



operadores de derivada superior, provavelmente, sejam mais relevantes a estudos envolvendo altas energias, eles são pouco estudados na literatura.

Entretanto, recentemente, alguns estudos relacionados com termos de derivada superior têm sido realizados, tais como [115, 116, 117, 87, 118, 39, 119, 112, 44, 120]. Em particular, o trabalho realizado por Kostelecký [112] sobre operadores de dimensão de massa arbitrário da EDQ estendida apresenta a forma geral dos termos de derivada superior para o setor bosônico, dada por

$$S_{(d)} = \int d^4x \mathcal{K}_{(d)}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_d} A_{\alpha_1} \partial_{\alpha_3} \dots \partial_{\alpha_d} A_{\alpha_2}, \quad (3.45)$$

onde  $d$  é a dimensão do operador tensorial  $A_{\alpha_1} \partial_{\alpha_3} \dots \partial_{\alpha_d} A_{\alpha_2}$ , ao passo que o coeficiente  $\mathcal{K}_{(d)}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_d}$  tem dimensão de massa  $4 - d$ .

Para termos CPT-par, os primeiros quatro índices do coeficiente  $\mathcal{K}_{(d)}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_d}$  possuem simetria de tensor de Riemann, enquanto que os demais índices são simétricos. Por outro lado, para o termo CPT-ímpar, o coeficiente  $\mathcal{K}_{(d)}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_d}$  é antissimétrico nos três primeiros índices e simétrico nos demais.

A partir do setor fermiônico da EQD estendida, Eq. (2.9), sabemos que, à temperatura zero, podemos gerar o termo de Chern-Simons de derivada superior, dado por

$$S_{(5)} = \int d^4x \mathcal{K}_{(5)}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} A_\mu \partial_\rho \partial_\alpha \partial_\beta A_\nu, \quad (3.46)$$

com  $\mathcal{K}_{(5)}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} \propto \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} b_\sigma g^{\alpha\beta}$ , ao expandirmos o resultado em [33] ou diretamente em [106].

Na próxima seção, iremos calcular a geração do termo de Chern-Simons de derivada superior (3.46), usando o método da expansão derivativa, no regime de temperatura finita. É interessante mencionar que o termo de derivada superior

acima (3.46) surge quando o termo bosônico de Myers-Pospelov [87] é induzido radiativamente a partir do setor fermiônico [106]. Portanto, efeitos de temperatura finita sobre o termo de Chern-Simons de derivada superior estão de certa forma relacionados com o termo de Myers-Pospelov. Dessa forma, estudos dessa natureza merecem ser considerados, a fim de obtermos uma melhor caracterização dos modelos de derivada superior com violação de simetria de Lorentz.

### 3.4 Indução de Chern-Simons com Derivada Superior a $T \neq 0$

Vamos a seguir calcular a geração radiativa do termo de Chern-Simons de derivada superior. Para isso, consideramos a expansão do propagador na Eq. (3.16) até a terceira ordem em  $k^\mu$ , tal que podemos chegar a expressão

$$\begin{aligned}
\Pi_{CSDS}^{\mu\nu} = & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}[S(p)\gamma^\mu S(p)\gamma_5 \not{S}(p)\not{S}(p)\not{S}(p)\not{S}(p)\gamma^\nu \\
& + S(p)\gamma^\mu S(p)\not{S}(p)\gamma_5 \not{S}(p)\not{S}(p)\not{S}(p)\gamma^\nu \\
& + S(p)\gamma^\mu S(p)\not{S}(p)\not{S}(p)\gamma_5 \not{S}(p)\not{S}(p)\gamma^\nu \\
& + S(p)\gamma^\mu S(p)\not{S}(p)\not{S}(p)\not{S}(p)\gamma_5 \not{S}(p)\gamma^\nu \\
& + S(p)\gamma_5 \not{S}(p)\gamma^\mu S(p)\not{S}(p)\not{S}(p)\not{S}(p)\gamma^\nu].
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Como as integrais acima são todas convergentes, podemos calcular o traço sobre as matrizes de Dirac, sem precisar colocar a matriz  $\gamma_5$  no final das expressões. O resultado encontrado é

$$\Pi_{CSDS}^{\mu\nu} = 4i\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} b_\sigma k_\rho k^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^3}$$

$$\begin{aligned}
& -16i\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_\sigma k_\rho k^\alpha k^\beta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2 - m^2)^4} \\
& +24im^2\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_\sigma k_\rho k^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^4} \\
& +24i\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}k_\rho b^\beta k^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2 - m^2)^4} \\
& +32i\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}k_\rho (b \cdot k) k^\beta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2 - m^2)^4} \\
& -128i\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_\sigma k_\rho k^\alpha k^\beta \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2 - m^2)^5} \\
& -128i\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}k_\rho b^\beta k^\delta k^\gamma \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta p_\delta p_\gamma}{(p^2 - m^2)^5}, \tag{3.48}
\end{aligned}$$

onde aqui também simplificamos os denominadores, ao usarmos  $p^2 = (p^2 - m^2) + m^2$ ,  $p^4 = (p^2 - m^2)^2 + 2m^2(p^2 - m^2) + m^4$  e assim por diante. Então, ao consideramos a solução (3.25), assim como

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{D/2} g^{\mu\nu} (-m^2/2)}{\Gamma(\alpha) (-m^2)^{\alpha-D/2}} \Gamma(\alpha - D/2 - 1), \tag{3.49}$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^\kappa p^\lambda p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{D/2} g^{\kappa\lambda\mu\nu} (-m^2/2)^2}{\Gamma(\alpha) (-m^2)^{\alpha-D/2}} \Gamma(\alpha - D/2 - 2), \tag{3.50}$$

onde  $g^{\kappa\lambda\mu\nu} = g^{\kappa\lambda} g^{\mu\nu} + g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} + g^{\kappa\nu} g^{\mu\lambda}$ , obtemos o resultado

$$\Pi_{CSDS}^{\mu\nu} = -\frac{\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} b_\sigma k_\rho k^2}{12m^2\pi^2}, \tag{3.51}$$

ou seja, a lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}_{CSDS} = \frac{e^2}{24m^2\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} b_\sigma A_\mu \partial_\rho \square A_\nu. \tag{3.52}$$

Desse modo, ao compararmos com a Eq. (3.46), temos  $\mathcal{K}_{(5)}^{\mu\nu\rho\alpha\beta} = \frac{e^2}{24m^2\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} b_\sigma g^{\alpha\beta}$ .

Vale a pena comentar que o termo de Chern-Simons de derivada superior (3.52) também é induzido a partir de um outro termo do MPE, a saber, aquele governado pelo coeficiente  $g^{\mu\nu\rho}$ , contudo, apenas quando  $g^{\mu\nu\rho}$  é totalmente antisimétrico [62].

Estimativas numéricas sobre o coeficiente  $b^\mu$ , do termo de derivada superior acima, podem ser obtidas a partir de limites experimentais sobre o coeficiente  $\mathcal{K}_{(5)}^{\mu\nu\rho\alpha\beta}$  do setor bosônico (veja [111], tabela XIX). Desse modo, a partir de dados observacionais relacionados com a radiação cósmica de fundo, podemos estimar  $b \sim 10^{-24}$ . Além disso, a partir de sistemas relacionados com a birrefringência astrofísica, podemos estimar que o coeficiente seja  $\sim 10^{-36}$ . Nessas estimativas, consideramos  $m$  sendo a massa do elétron,  $m \simeq 0.5 \times 10^{-3} \text{ GeV}$ , e  $e \simeq 10^{-1}$  para a carga do elétron. Nas estimativas acima, observamos que os valores obtidos para o coeficiente  $b^\mu$  estão compatíveis com as sensibilidades máximas para o setor do elétron, tabela II da Ref. [111].

Vamos a seguir efetuar o cálculo de temperatura finita do termo de Chern-Simons de derivada (3.52), sempre seguindo a metodologia apresentada na seção 3.2. Então, para isso, ao passarmos o espaço de Minkowski para o espaço euclidiano, seguindo o mapeamento (3.26), encontramos

$$\begin{aligned}
\Pi_{CSDS}^{\mu\nu} = & -4\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} b_E^\sigma k_E^\rho k_E^2 \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E^2 + m^2)^3} \\
& + 16\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} b_E^\sigma k_E^\rho k_E^\alpha k_E^\beta \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta}{(p_E^2 + m^2)^4} \\
& + 24m^2 \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} b_E^\sigma k_E^\rho k_E^2 \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E^2 + m^2)^4} \\
& - 24\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} k_E^\rho b_E^\beta k_E^2 \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta}{(p_E^2 + m^2)^4} \\
& - 32\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} k_E^\rho (b_E \cdot k_E) k_E^\beta \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta}{(p_E^2 + m^2)^4} \\
& - 128\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} b_E^\sigma k_E^\rho k_E^\alpha k_E^\beta \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta}{(p_E^2 + m^2)^5} \\
& + 128\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} k_E^\rho b_E^\beta k_E^\delta k_E^\gamma \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta p_E^\delta p_E^\gamma}{(p_E^2 + m^2)^5}, \tag{3.53}
\end{aligned}$$

a partir da Eq. (3.48).

Agora, ao efetuarmos a separação das partes espacial e temporal, considerando  $p_E^\mu = \vec{p}^\mu + p_0\delta^{\mu 0}$ , onde  $\vec{p}^\mu = (0, p^i)$ , assim como o fato da simetria de rotação espacial, ao considerarmos

$$\hat{p}^\alpha \hat{p}^\beta \rightarrow \frac{\hat{p}^2}{3}(\delta^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha 0}\delta^{\beta 0}) \quad (3.54)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{p}^\alpha \hat{p}^\beta \hat{p}^\delta \hat{p}^\gamma &\rightarrow \frac{\hat{p}^4}{15}[(\delta^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha 0}\delta^{\beta 0})(\delta^{\delta\gamma} - \delta^{\delta 0}\delta^{\gamma 0}) + (\delta^{\alpha\delta} - \delta^{\alpha 0}\delta^{\delta 0})(\delta^{\beta\gamma} - \delta^{\beta 0}\delta^{\gamma 0}) \\ &\quad + (\delta^{\alpha\gamma} - \delta^{\alpha 0}\delta^{\gamma 0})(\delta^{\beta\delta} - \delta^{\beta 0}\delta^{\delta 0})], \end{aligned} \quad (3.55)$$

encontramos  $\Pi_{CSDS}^{\mu\nu} = \Pi_{(a)}^{\mu\nu} + \Pi_{(b)}^{\mu\nu} + \Pi_{(c)}^{\mu\nu} + \Pi_{(d)}^{\mu\nu}$ , com as seguintes expressões para estas quatro estruturas de tensores:

$$\begin{aligned} \Pi_{(a)}^{\mu\nu} &= -4\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_E^\sigma k_E^\rho k_E^2 \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[ \frac{32}{15}I_1(p_0, m) + \frac{32m^2}{3}I_2(p_0, m) - \frac{10}{3}I_4(p_0, m) \right. \\ &\quad \left. - 6m^2I_5(p_0, m) + I_6(p_0, m) \right], \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{(b)}^{\mu\nu} &= 8\epsilon^{\mu\nu 0\rho}b_E^0 k_E^\rho k_E^2 \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[ \frac{16}{15}I_1(p_0, m) - \frac{16}{3}p_0^2I_2(p_0, m) - I_4(p_0, m) \right. \\ &\quad \left. + 3p_0^2I_5(p_0, m) \right], \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{(c)}^{\mu\nu} &= -16\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_E^\sigma k_E^\rho (k_E^0)^2 \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[ -\frac{8}{15}I_1(p_0, m) + \frac{8}{3}(p_0^2 - m^2)I_2(p_0, m) \right. \\ &\quad \left. + 8p_0^2m^2I_3(p_0, m) + \frac{1}{3}I_4(p_0, m) - p_0^2I_5(p_0, m) \right], \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{(d)}^{\mu\nu} &= -128\epsilon^{\mu\nu 0\rho}b_E^0 k_E^\rho (k_E^0)^2 \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{5}I_1(p_0, m) + \right. \\ &\quad \left. - 2p_0^2I_2(p_0, m) + p_0^4I_3(p_0, m) \right], \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde as integrais  $I_{1,2,3,4,5,6}(p_0, m)$  são dadas por

$$I_{1,2,3}(p_0, m) = \int \frac{d^3p_E}{(2\pi)^3} \frac{\alpha_{1,2,3}}{(\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2)^5}, \quad (3.60)$$

$$I_{4,5}(p_0, m) = \int \frac{d^3p_E}{(2\pi)^3} \frac{\alpha_{4,5}}{(\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2)^4}, \quad (3.61)$$

$$I_6(p_0, m) = \int \frac{d^3p_E}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2)^3}, \quad (3.62)$$

tal que  $\alpha_1 = \vec{p}^4$ ,  $\alpha_2 = \alpha_4 = \vec{p}^2$  e  $\alpha_3 = \alpha_5 = 1$ . Note que estamos trabalhando em  $d = 3$ , pois, como já mencionamos, as integrais em (3.53) são todas finitas.

Neste momento, devemos calcular as integrais sobre a componente espacial  $\vec{p}$ , de tal modo que obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{(a)}^{\mu\nu} &= \frac{m^2}{8\pi} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} b_E^\sigma k_E^\rho k_E^2 \left[ \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{2}{3m^2} \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{3}{2}} \right], \\ &+ \frac{1}{12\pi} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} b_E^\sigma k_E^\rho k_E^2 \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\Pi_{(b)}^{\mu\nu} = -\frac{m^2}{8\pi} \epsilon^{\mu\nu 0\rho} b_E^0 k_E^\rho k_E^2 \left[ \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{2}{3m^2} \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{3}{2}} \right], \quad (3.64)$$

$$\Pi_{(c)}^{\mu\nu} = \frac{m^2}{\pi} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} b_E^\sigma k_E^\rho (k_E^0)^2 \left[ \frac{5m^2}{4} \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{7}{2}} - \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}} \right], \quad (3.65)$$

$$\Pi_{(d)}^{\mu\nu} = -\frac{m^2}{\pi} \epsilon^{\mu\nu 0\rho} b_E^0 k_E^\rho (k_E^0)^2 \left[ \frac{5m^2}{4} \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{7}{2}} - \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}} \right] \quad (3.66)$$

Note que  $\Pi_{(b)}^{\mu\nu}$  e  $\Pi_{(d)}^{\mu\nu}$  cancela os termos  $b_E^0$  de  $\Pi_{(a)}^{\mu\nu}$  e  $\Pi_{(c)}^{\mu\nu}$ , respectivamente. Portanto, somando todas as expressões, obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{CSDS}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{m^2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} b_E^\sigma k_E^\rho k_E^2 B(m) - \frac{1}{m^2} \epsilon^{\mu\nu i\rho} b_E^i k_E^\rho k_E^2 C_1(m) \\ &- \frac{1}{m^2} \epsilon^{\mu\nu i\rho} b_E^i k_E^\rho (k_E^0)^2 C_2(m), \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde

$$B(m) = -\frac{m^2}{12\pi} \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.68)$$

$$C_1(m) = \frac{m^2}{12\pi} \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{m^4}{8\pi} \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}}, \quad (3.69)$$

$$C_2(m) = \frac{m^4}{\pi} \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{5m^6}{4\pi} \int \frac{dp_0}{2\pi} (p_0^2 + m^2)^{-\frac{7}{2}}, \quad (3.70)$$

com  $i = 1, 2, 3$ .

O comportamento da temperatura finita dos termos acima pode ser obtido ao usarmos o formalismo Matsubara, através das discretizações (3.33) e (3.34), tal

que

$$B(\xi) = -\frac{\xi^2}{24\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-3/2}, \quad (3.71)$$

$$C_1(\xi) = \frac{\xi^2}{24\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-3/2} - \frac{\xi^4}{16\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-5/2} \quad (3.72)$$

$$C_2(\xi) = \frac{\xi^4}{2\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-5/2} - \frac{5\xi^6}{8\pi^2} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-7/2}, \quad (3.73)$$

nas quais consideramos  $B(m) \rightarrow B(\xi)$ ,  $C_1(m) \rightarrow C_1(\xi)$ , e  $C_2(m) \rightarrow C_2(\xi)$ , com

$$\xi = \frac{m}{2\pi T}.$$

Como os somatórios acima são todos convergentes, eles podem ser calculados facilmente numericamente. Entretanto, os limites assintóticos,  $T \rightarrow 0$  e  $T \rightarrow \infty$ , não são fáceis de obter. Desse modo, uma maneira de fazermos isso é usar o somatório (3.36). Contudo, ao analisarmos as expressões (3.71), (3.72) e (3.73), as potências dos denominadores são  $\lambda = 3/2$ ,  $\lambda = 5/2$  e  $\lambda = 7/2$ , respectivamente, ou seja, eles estão fora do alcance de validade. Todavia, podemos usar a relação de recorrência (3.38) a fim de baixar o valor de  $\lambda$ , tal que para  $\lambda = 3/2$  devemos usar a relação de recorrência uma vez, para  $\lambda = 5/2$  duas vezes e para  $\lambda = 7/2$  três vezes. Também devemos considerar  $\lambda = 3/2 \rightarrow D/2$ ,  $\lambda = 5/2 \rightarrow D/2 + 1$  e  $\lambda = 7/2 \rightarrow D/2 + 2$ , de maneira que podemos evitar os polos  $\lambda = 1/2, -1/2$  do somatório (3.36). Assim, a expressões (3.71), (3.72) e (3.73) tomam a forma

$$B(\xi) = -\frac{m^{3-D}}{24\pi^2} \xi^{D-1} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-\frac{D}{2}}, \quad (3.74)$$

$$C_1(\xi) = \frac{m^{3-D}}{24\pi^2} \xi^{D-1} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-\frac{D}{2}} - \frac{m^{3-D}}{16\pi^2} \xi^{D+1} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-\frac{D}{2}-1}, \quad (3.75)$$

$$C_2(\xi) = \frac{m^{3-D}}{2\pi^2} \xi^{D+1} \sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-\frac{D}{2}-1}$$

$$-\frac{5m^{3-D}}{8\pi^2}\xi^{D+3}\sum_n [(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-\frac{D}{2}-2}. \quad (3.76)$$

De fato, ao usarmos a relação de recorrência (3.38), após levarmos em conta o limite  $D \rightarrow 3$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{(5)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{m^2}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_\sigma k_\rho k^2 B(\xi) + \frac{1}{m^2}\epsilon^{\mu\nu i\rho}b_i k_\rho k^2 C_1(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{m^2}\epsilon^{\mu\nu i\rho}b_i k_\rho k_0^2 C_2(\xi), \end{aligned} \quad (3.77)$$

com

$$B(\xi) = \frac{1}{6}\int_{|\xi|}^{\infty} dz \sqrt{z^2 - \xi^2} \tanh(\pi z) \operatorname{sech}^2(\pi z) - \frac{1}{12\pi^2}, \quad (3.78)$$

$$C_1(\xi) = \frac{\xi^2}{12}\int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{\tanh(\pi z) \operatorname{sech}^2(\pi z)}{\sqrt{z^2 - \xi^2}}, \quad (3.79)$$

$$C_2(\xi) = \frac{\pi^2 \xi^2}{6}\int_{|\xi|}^{\infty} dz \sqrt{z^2 - \xi^2} \operatorname{sech}^5(\pi z) [\sinh(3\pi z) - 11\sinh(\pi z)], \quad (3.80)$$

onde também retornamos ao espaço de Minkowski.

Ao analisarmos as equações acima, observamos que quando  $T \rightarrow 0$  ( $\xi \rightarrow \infty$ ) todas as integrais se anulam, tal que  $\Pi_{CSDS}^{\mu\nu}$  assume o resultado  $-\frac{1}{12\pi^2 m^2}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}b_\sigma k_\rho k^2$ . Esse é de fato o resultado de temperatura zero, obtido previamente em (3.51). Por outro lado, quando  $T \rightarrow \infty$  ( $\xi \rightarrow 0$ ) a expressão (3.78) anula-se, assim como as expressões (3.79) e (3.80), ou seja,  $\Pi_{CSDS}^{\mu\nu} \rightarrow 0$ . Isso acontece, principalmente, pois os somatórios acima são fortemente suprimidos pela temperatura, sugerindo assim que os operadores de dimensão de massa  $d \geq 5$ , em geral, anulam-se a altas temperaturas.

O gráfico das funções  $B(\xi)$ ,  $C_1(\xi)$  e  $C_2(\xi)$ , que podem ser calculados numericamente através das expressões (3.71), (3.72) e (3.73) ou (3.78), (3.79) e (3.80), são



apresentados nas Figs. 3.2, 3.3, e 3.4. É interessante notar que essas funções são as mesmas que aquelas obtidas na geração do termo de Chern-Simons de derivada superior, com o coeficiente  $g^{\mu\nu\rho}$  [44]. Isso é de certa forma pelo motivo de que, sob uma redefinição do campo fermiônico [27], a componente totalmente antissimétrica de  $g^{\mu\nu\rho}$  é complementarmente absorvida pelo coeficiente  $b^\mu$ .

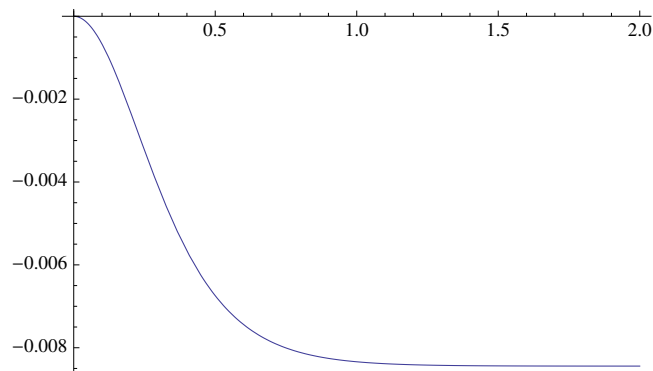


Figura 3.2: Gráfico da função  $B(\xi)$

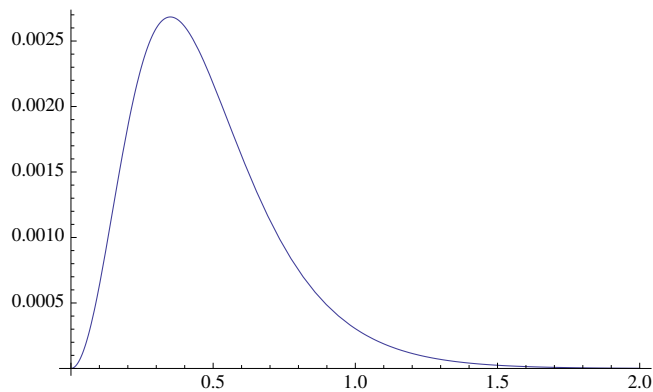
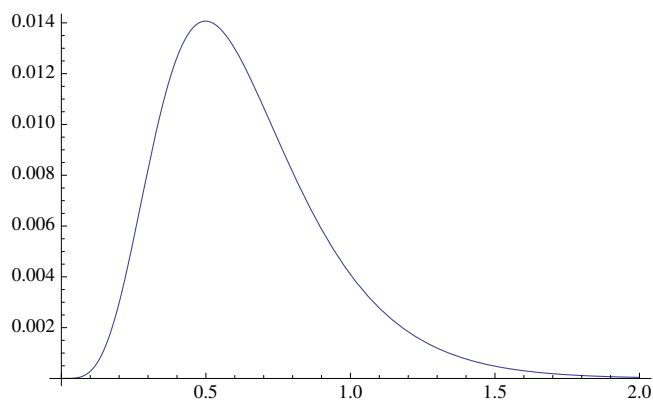


Figura 3.3: Gráfico da função  $C_1(\xi)$

Figura 3.4: Gráfico da função  $C_2(\xi)$

# Capítulo 4

## Invariância de Gauge Ampla

Neste capítulo, inicialmente, vamos estudar a questão da invariância de gauge ampla, quando consideramos correções radiativas à temperatura finita. Iremos comentar sucintamente sobre a solução encontrada no modelo em 0+1 dimensão, que posteriormente, foi estendido para o modelo em 2+1 dimensões. Em seguida vamos fazer uma breve demonstração da expressão para invariância de gauge ampla, no contexto de gauge específico. Finalmente, iremos calcular a ação de Chern-Simons, assim como a ação de Chern-Simons de derivada superior, de forma exata, a fim de podermos observarmos que são de fato invariantes sob transformação de gauge ampla.

### 4.1 Introdução

O termo de Chern-Simons foi inicialmente estudado em 2+1 dimensões (3D) do espaço-tempo. Também temos estudos em outras dimensões ímpares, como em 0+1 dimensão (1D) [64] e em 4+1 dimensões (5D) [65]. Em dimensões ímpares, o

termo de Chern-Simons não viola da simetria de Lorentz, muito menos a simetria de CPT. Nessas dimensões, o termo do setor fermiônico responsável pela indução no setor bosônico é o termo de massa  $m\bar{\psi}\psi$ . Esse termo viola conjuntamente as simetrias de P e T. Dessa forma, a simetria de CPT é mantida, ao contrário do termo  $b_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ , responsável pela indução do termo de Chern-Simons em 3+1 dimensões (4D), o qual viola separadamente as simetrias P e T (veja tabela 2.3 para maiores detalhes).

Vamos a seguir discutir de forma resumida a questão da invariância de gauge ampla nos termos de Chern-Simons. Para isso, vamos inicialmente considerar a ação de Chern-Simons 3D não abeliana [66, 67], dada por

$$S_{CS} = \int d^3x \mathcal{L}_{CS}, \quad (4.1)$$

onde a lagrangiana de Chern-Simons é dada por

$$\mathcal{L}_{CS} = M\epsilon^{\mu\nu\lambda}\text{tr}(A_\mu\partial_\nu A_\lambda + \frac{2}{3}gA_\mu A_\nu A_\lambda). \quad (4.2)$$

Aqui,  $\text{tr}$  significa o traço sobre as matrizes dos campos de gauge não abeliano ( $A_\mu = A_\mu^a T^a$ ),  $g$  é a constante de acoplamento, enquanto que  $M$  é o coeficiente do termo de Chern-Simons 3D, com dimensão de massa  $d = 1$ .

A ação de Chern-Simons, ao contrário da ação de Maxwell, é uma ação topológica. Um dos objetivos de se estudar a ação Chern-Simons 3D é a possibilidade de geração massa para os campos de gauge [66]. Embora seja invariante sob transformações de gauge *infinitesimais*, a ação Chern-Simons, para uma teoria não abeliana, não é invariante sob transformações de gauge *amplas*, dadas por

$$A_\mu \rightarrow U^{-1}A_\mu U + \frac{1}{g}U^{-1}\partial_\mu U, \quad (4.3)$$

onde  $U = e^{-i\alpha}$ . Na verdade, ao aplicarmos a transformação acima,

$$S_{CS} \rightarrow S_{CS} + \frac{8\pi^2 M}{g^2} W, \quad (4.4)$$

ou seja, a sua mudança de variável é proporcional ao chamado número de voltas da transformação de gauge,

$$W = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} \text{tr} \partial_\mu U U^{-1} \partial_\nu U U^{-1} \partial_\lambda U U^{-1}, \quad (4.5)$$

que de fato é um número inteiro<sup>1</sup>.

Contudo, ao analisarmos a integral de trajetória observamos que ela pode ser invariante sob transformação de gauge ampla quando o coeficiente  $M$  é quantizado [66]. Para observarmos isso, dada a integral de trajetória

$$Z = \int DA_\mu e^{iS_{CS}}, \quad (4.6)$$

ao aplicarmos a transformação de gauge ampla (4.3), obtemos

$$Z \rightarrow Z e^{i \frac{8\pi^2 M}{g^2} W}. \quad (4.7)$$

Portanto, para que a integral de trajetória seja invariante, temos que

$$\frac{8\pi^2 M}{g^2} W = 2\pi N. \quad (4.8)$$

Como  $W$  é um número inteiro, então podemos escrever  $N = nW$ , tal que encontramos

$$M = \frac{g^2}{4\pi} n, \quad (4.9)$$

ou seja, o coeficiente de Chern-Simons é quantizado em múltiplos de  $\frac{g^2}{4\pi}$ , e assim a integral de trajetória fica invariante sob transformações de gauge amplas.

---

<sup>1</sup>Note que para transformações de gauge infinitesimais,  $W = 0$ , ou seja, neste caso a ação fica invariante.

Quando os férmions interagem com o campo de gauge, da mesma forma que acontece em 4D, temos a geração de um termo Chern-Simons através de correções quânticas, de modo que

$$S_{CS} \rightarrow S_{CS} = \left( M - \frac{g^2 N_f}{8\pi} \right) \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} \text{tr}(A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \frac{2}{3} g A_\mu A_\nu A_\lambda), \quad (4.10)$$

ou seja, temos um acréscimo no coeficiente do termo de Chern-Simons, tal que  $M \rightarrow M - \frac{g^2 N_f}{8\pi}$ , onde  $N_f$  é o número de sabores de férmions. Portanto, para que a integral de trajetória seja agora invariante sob transformações de gauge amplas, temos que

$$\frac{8\pi^2 M W}{g^2} - \pi N_f W = 2\pi n' W, \quad (4.11)$$

ou seja,

$$n' = n - \frac{N_f}{2}. \quad (4.12)$$

Portanto, para que  $n'$  seja um número inteiro, o número de sabores de férmions  $N_f$  deve ser um número par. Desse modo, temos também a invariância de gauge ampla na integral de trajetória.

Vamos agora considerar a geração do termo de Chern-Simons 3D à temperatura finita. Quando o sistema encontra-se em equilíbrio térmico com uma temperatura  $T = 1/\beta$ , após indução através das correções radiativas, temos que

$$S_{CS} \rightarrow S_{CS} = \left[ M - \frac{g^2 N_f}{8\pi} \tanh\left(\frac{\beta m}{2}\right) \right] \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} \text{tr}(A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \frac{2}{3} g A_\mu A_\nu A_\lambda). \quad (4.13)$$

Refazendo toda a análise acima, após submetermos a integral de trajetória à transformação de gauge ampla (4.3), facilmente encontramos que

$$n' = n - \frac{N_f}{2} \tanh\left(\frac{\beta m}{2}\right). \quad (4.14)$$

Portanto, agora, a integral de trajetória não é mais invariante sob transformações de gauge amplas, pois como a função  $\tanh\left(\frac{\beta m}{2}\right)$  assume valores reais,  $n'$ , na sua grande maioria, não será um número inteiro. Note que sob transformações de gauge infinitesimais a integral de trajetória fica invariante. Temos aqui uma inconsistência, pois não é esperado que a temperatura altere a invariância de gauge em ambas as suas formas, infinitesimal ou ampla.

Esse comportamento ambíguo sobre a invariância de gauge, despertou um grande interesse sobre tal tópico na década de 1990. Um mecanismo encontrado para a sua resolução foi discutido pela primeira vez na teoria de Chern-Simons 1D abeliana [64]. Discutiremos brevemente sobre essa resolução a seguir.

Quando os férmions interagem com o campo de gauge em 1D, à temperatura finita, a ação efetiva pode ser calculada exatamente, resultando em

$$S_{\text{eff}} = -iN_f \ln \left( \cos \frac{a_0}{2} + i \tanh \frac{\beta m}{2} \sin \frac{a_0}{2} \right), \quad (4.15)$$

onde

$$a_0 = \int dt A_0(t), \quad (4.16)$$

com  $A_0(t)$  sendo o campo de gauge. O termo de Chern-Simons pode ser extraído da ação efetiva acima, o qual é linear em  $a$ , dada por

$$S_{CS} = \frac{N_f}{2} \tanh \left( \frac{\beta m}{2} \right) a_0. \quad (4.17)$$

Observe a semelhança com o segundo termo da Eq. (4.13), que também foi gerado através de correções radiativas, à temperatura finita.

Nosso ponto de discussão agora é o fato de que, sob a transformação de gauge ampla, dada por

$$a_0 \rightarrow a_0 + 2\pi N, \quad (4.18)$$

onde  $N$  é um número inteiro, a ação de Chern-Simons (4.17) não é invariante, muito menos a sua correspondente integral de trajetória. Por outro lado, já na ação efetiva (4.15) conseguimos constatar que a expressão é invariante sob a transformação de gauge ampla (4.18). Portanto, o que aprendemos com esse estudo relativamente simples em 1D é que devemos observar a invariância de gauge ampla na ação efetiva como um todo e não nos termos a compõe.

Na próxima seção iremos discutir detalhadamente como é obtida a invariância de gauge ampla dada pela Eq. (4.18).

Após a análise da teoria de Chern-Simons 1D, vamos agora discutir um pouco sobre o modelo em 3D. Primeiramente, não esperamos ser capazes de calcular exatamente a ação efetiva em 3D de forma geral, tal que consigamos constatar a sua não extensividade. Contudo, ao nos restringirmos à escolha de gauge

$$A_0 = A_0(t), \quad A_i = A_i(x, y, z), \quad (4.19)$$

na qual temos um campo elétrico nulo e um campo magnético independente do tempo, conseguimos dessa forma calcular a ação efetiva exatamente, sendo dada por

$$S_{\text{eff}} = -\frac{gN_f}{2\pi} \int d^2x \arctan\left(\tanh\frac{\beta m}{2} \tan\frac{ga_0}{2}\right) \epsilon^{ij} \partial_i A_j. \quad (4.20)$$

O termo de Chern-Simons pode ser extraído da expressão acima, ao considerarmos a contribuição linear em  $a$ , tal que encontramos

$$S_{CS} = -\frac{g^2 N_f}{4\pi} \tanh\left(\frac{\beta m}{2}\right) \int dt \int d^2x \epsilon^{ij} A_0 \partial_i A_j, \quad (4.21)$$

como também

$$S_{CS} = -\frac{g^2 N_f}{8\pi} \tanh\left(\frac{\beta m}{2}\right) \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda, \quad (4.22)$$



porém com as restrições sobre o quadripotencial  $A_\mu$ , dadas por (4.19). Observe que a expressão acima é exatamente aquela encontrada pelo método perturbativo da ação efetiva, dada por (4.13).

Portanto, o que verificamos acima é que, ao contrário da ação de Chern-Simons (4.22), ou da correspondente integral de trajetória, a ação efetiva (4.20) é invariante sob a transformação de gauge ampla (4.18), assim como constatado no modelo 1D.

## 4.2 Transformação de Gauge Ampla

Nesta seção nosso objetivo é demonstrar que a transformação de gauge ampla (4.3) possui a expressão (4.18), quando nos restringimos à escolha de gauge (4.19), ou seja, a um campo elétrico nulo e a um campo magnético independente do tempo.

Para isso, vamos inicialmente levar em conta que os campos fermiônicos obedecem as condições de contorno antiperiódicas, tal que

$$\psi(\beta, x) = -\psi(0, x) \text{ e } \bar{\psi}(\beta, x) = -\bar{\psi}(0, x), \quad (4.23)$$

ao passo que os campos bosônicos obedecem condições de contorno periódicas, dadas por

$$A_\mu(\beta, x) = A_\mu(0, x). \quad (4.24)$$

As respectivas transformações de gauge são

$$\psi(\tau, x) \rightarrow e^{-ie\Omega(\tau, x)}\psi(\tau, x), \quad \bar{\psi}(\tau, x) \rightarrow e^{ie\Omega(\tau, x)}\bar{\psi}(\tau, x), \quad (4.25)$$

assim como

$$A_\mu(\tau, x) \rightarrow A_\mu(\tau, x) + \partial_\mu\Omega(\tau, x), \quad (4.26)$$

na sua forma infinitesimal. Note que redefinimos o parâmetro de gauge, tal que  $\Omega = \frac{1}{e}\alpha$ . Desse modo, ao submetermos os campos fermiônicos (4.23) às transformações (4.25), encontramos

$$e^{ie(\Omega(\beta,x)-\Omega(0,x))} = 1, \quad (4.27)$$

ou seja, temos que

$$\Omega(\beta, x) = \Omega(0, x) + \frac{2\pi N}{e}. \quad (4.28)$$

Por outro lado, ao submetermos os bosônicos (4.24) às transformações (4.26), obtemos

$$\partial_\mu \Omega(\beta, x) = \partial_\mu \Omega(0, x). \quad (4.29)$$

Vamos agora efetuar uma transformação de gauge na qual  $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Omega$  seja uma constante no tempo [70]. Assim, para a componente temporal  $A_0 = A_0(\tau, 0)$ , temos

$$A_0(\tau', 0) \rightarrow A'_0 = A_0(\tau', 0) + \partial_0 \Omega(\tau', x) \quad (4.30)$$

Desse modo, ao integrarmos  $A'_0$  no intervalo de 0 a  $\beta$ , encontramos

$$\int_0^\beta d\tau' A'_0 = \int_0^\beta d\tau' A_0(\tau', 0) + \Omega(\tau', x) \Big|_0^\beta, \quad (4.31)$$

ou seja

$$A'_0 = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau' A_0(\tau', 0) + \frac{2\pi N}{e\beta} \quad (4.32)$$

Observe que neste cálculo utilizamos as condições (4.28) e (4.29).

Para finalizarmos a demonstração, vamos agora encontrar uma expressão  $\Omega(\tau)$ , ou seja, independente do espaço. Isso pode ser encontrado, ao integrarmos novamente a expressão (4.30), no intervalo de 0 a  $\tau$ , ou seja,

$$\int_0^\tau d\tau' A'_0 = \int_0^\tau d\tau' A_0(\tau', 0) + \Omega(\tau', x) \Big|_0^\tau. \quad (4.33)$$

Desse modo, ao considerarmos a separação de variáveis  $\Omega(\tau, x) = \Omega(\tau, 0) + \Omega(0, x)$ , obtemos

$$\Omega(\tau) = - \int_0^\tau d\tau' A_0(\tau', 0) + \left( \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau' A_0(\tau', 0) + \frac{2\pi N}{e\beta} \right) \tau. \quad (4.34)$$

Maiores discussões sobre a demonstração acima podem ser encontradas no estudo do modelo de Chern-Simons 3D [64, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74]. Contudo, a expressão para o parâmetro de gauge (4.34) pode ser utilizada em qualquer dimensão. No nosso caso, estamos interessados em estudar o termo de Chern-Simons 4D, assim como o termo de Chern-Simons de derivada superior. Isso será efetuado nas próximas seções.

Finalmente, ao considerarmos a transformação de gauge ampla, levando em conta o parâmetro de gauge (4.34), encontramos que

$$A_0 \rightarrow \frac{1}{\beta} \int_0^\beta dt A_0(t) + \frac{2\pi N}{\beta} = \frac{a_0}{\beta} + \frac{2\pi N}{\beta}, \quad A_i \rightarrow A_i(x, y, z), \quad (4.35)$$

ou seja, ao fatorarmos o coeficiente  $1/\beta$ ,

$$a_0 \rightarrow a_0 + 2\pi N. \quad (4.36)$$

### 4.3 Termo de Chern-Simons

Para investigar a questão da invariância de gauge ampla relativa ao modelo de Chern-Simons 4D, vamos usar o método da expansão derivada, assim como considerar a restrição de gauge dada pela Eq. (4.19), ou seja,

$$A_0 = A_0(t), \quad A_i = A_i(x, y, z). \quad (4.37)$$

Vale a pena mencionar que essa escolha específica de gauge é consistente com o limite estático, como constatado em [73]. Além do mais, nesse pano de fundo, acreditamos

que a ação efetiva (3.5) poderá ser calculada exatamente, assim como nos modelos em 1D e 3D.

Inicialmente, vamos tomar a ação efetiva (3.5), rescrevendo-a no espaço euclidiano, ou seja,

$$S_{\text{eff}} = - \sum_n \text{Tr} \ln(\vec{\not{p}} + \tilde{\omega}_n \gamma^0 + m - \vec{\not{A}} - \gamma_5 \not{b}_E), \quad (4.38)$$

onde  $\vec{\not{p}} = p^i \gamma^i$ ,  $\not{b}_E = b^0 \gamma^0 + b^i \gamma^i$ , e

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n - \frac{a_0}{\beta} = (n + 1/2) \frac{2\pi}{\beta} - \frac{a_0}{\beta}. \quad (4.39)$$

Agora, seguindo o procedimento realizado em Ref. [72], vamos primeiro derivar a ação efetiva (4.38) em relação a  $a_0$ , e, posteriormente, considerar apenas o termo linear em  $A^i$ , de modo que podemos escrever

$$\frac{\partial S_{\text{eff}}^{(1)}}{\partial a_0} = \sum_n \text{Tr} \frac{1}{\vec{\not{p}} + \tilde{\omega}_n \gamma^0 + m - \gamma_5 \not{b}_E} \vec{\not{A}} \frac{1}{\vec{\not{p}} + \tilde{\omega}_n \gamma^0 + m - \gamma_5 \not{b}_E} \gamma^0. \quad (4.40)$$

Como estamos interessados apenas em contribuições de primeira ordem em  $b_\mu$ , destacamos a expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_b^{(1)}}{\partial a_0} &= \sum_n \text{Tr} [S_E(\vec{p}) \gamma^i S_E(\vec{p} - i\vec{\partial}) \gamma_5 \not{b}_E S_E(\vec{p} - i\vec{\partial}) \gamma^0 \\ &\quad + S_E(\vec{p}) \gamma_5 \not{b}_E S_E(\vec{p}) \gamma^i S_E(\vec{p} - i\vec{\partial}) \gamma^0] A^i, \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde  $S_E(\vec{p}) = (\vec{\not{p}} + \tilde{\omega}_n \gamma^0 + m)^{-1}$ . Veja que a equação acima é semelhante a Eq. (3.16), e, por consequência disso, os cálculos de Eq. (4.41) são semelhantes aos que foram realizados anteriormente no Capítulo 3.

Para gerarmos o termo de Chern-Simons 4D, vamos agora utilizar o método da expansão derivada, tal que precisamos expandir o propagador  $S_E(\vec{p} - i\vec{\partial})$  até primeira ordem em  $\partial^k$ . Assim, temos

$$\frac{\partial S_{CS}}{\partial a_0} = i \int d^3x \Pi_{CS}^{i0} A^i, \quad (4.42)$$

onde

$$\begin{aligned}\Pi_{CS}^{i0} &= \sum_n \int \frac{d^3 p_E}{(2\pi)^3} \text{tr} [S_E(\vec{p}) \gamma_5 \not{b}_E S_E(\vec{p}) \gamma^i S_E(\vec{p}) \vec{\not{b}} S_E(\vec{p}) \gamma^0 \\ &\quad + S_E(\vec{p}) \gamma^i S_E(\vec{p}) \vec{\not{b}} S_E(\vec{p}) \gamma_5 \not{b}_E S_E(\vec{p}) \gamma^0 \\ &\quad + S_E(\vec{p}) \gamma^i S_E(\vec{p}) \gamma_5 \not{b}_E S_E(\vec{p}) \vec{\not{b}} S_E(\vec{p}) \gamma^0].\end{aligned}\quad (4.43)$$

A partir de agora, vamos calcular o traço sobre as matrizes de Dirac e, assim, encontrar a expressão

$$\begin{aligned}\Pi_{CS}^{i0} &= -12i\epsilon^{i0jk} b^j \partial^k \sum_n \int \frac{d^3 p_E}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_n^2 + m^2)^2} \\ &\quad - 16i\epsilon^{0jkl} b^j \partial^k \sum_n \int \frac{d^3 p_E}{(2\pi)^3} \frac{p^i p^l}{(\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_n^2 + m^2)^3} \\ &\quad + 16i\epsilon^{ijk0} b^j \partial^k \sum_n \int \frac{d^3 p_E}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{\omega}_n^2}{(\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_n^2 + m^2)^3} \\ &\quad + 16i\epsilon^{i0jl} b^j \partial^k \sum_n \int \frac{d^3 p_E}{(2\pi)^3} \frac{p^k p^l}{(\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_n^2 + m^2)^3},\end{aligned}\quad (4.44)$$

onde passamos  $\gamma_5$  até o fim de cada expressão. O próximo passo é calcular a integral na componente espacial  $\vec{p}$ , tal que ao utilizarmos  $p^i p^l \rightarrow \vec{p}^2 \delta^{il} / d$ , encontramos

$$\begin{aligned}\Pi_{CS}^{i0} &= -i\epsilon^{i0jk} b^j \partial^k 2^{1-d} m \pi^{-d/2} (\mu^2)^{\frac{3}{2} - \frac{d}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \\ &\quad \times \sum_n \left[ \frac{(d-3)}{(\tilde{\omega}_n^2 + m^2)^{2 - \frac{d}{2}}} - \frac{(d-4)m^2}{(\tilde{\omega}_n^2 + m^2)^{3 - \frac{d}{2}}} \right].\end{aligned}\quad (4.45)$$

Observe que a expressão acima é exatamente aquela que encontramos no Capítulo 3, dada por (3.32). Portanto, ao utilizarmos o mesmo procedimento para o cálculo dos somatórios, obtemos a expressão

$$\Pi_{CS}^{i0} = -i\epsilon^{i0jk} b^j \partial^k F'(\xi, a_0),\quad (4.46)$$

onde

$$F'(\xi, a_0) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz \sqrt{z^2 - \xi^2} \sinh(2\pi z) \frac{2 \cos(a_0) \cosh(2\pi z) - \cos(2a_0) + 3}{[\cos(a_0) + \cosh(2\pi z)]^3}.\quad (4.47)$$

Ao integrarmos a expressão acima com relação a  $a_0$ , também podemos escrever

$$F'(\xi, a_0) = \frac{\partial}{\partial a_0} F(\xi, a_0) = \frac{\partial}{\partial a_0} \int_{|\xi|}^{\infty} dz \sqrt{z^2 - \xi^2} \frac{2 \sin(a_0) \sinh(2\pi z)}{[\cos(a_0) + \cosh(2\pi z)]^2}. \quad (4.48)$$

Portanto, ao compararmos com a Eq. (4.42) e voltarmos para o espaço de Minkowski, obtemos ação Chern-Simons 4D, dada por

$$S_{CS} = \int d^3x \epsilon^{i0jk} b_j \partial_k A_i F(\xi, a_0), \quad (4.49)$$

onde

$$F(\xi, a_0) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz \sqrt{z^2 - \xi^2} \frac{2 \sin(a_0) \sinh(2\pi z)}{[\cos(a_0) + \cosh(2\pi z)]^2}. \quad (4.50)$$

Desse modo, facilmente podemos verificar que a expressão acima é invariante sob a transformação de gauge ampla (4.36), ou seja,  $F(\xi, a_0) \rightarrow F(\xi, a_0 + 2\pi N) = F(\xi, a_0)$ . Apesar dos inúmeros trabalhos realizados na literatura sobre a geração do termo de Chern-Simons 4D, à temperatura zero e finita, a Eq. (4.50) não havia ainda sido determinada até o presente momento [12].

Note que a expansão perturbativa em termos de  $a_0$  produz o resultado perturbativo usual (3.41), ou seja,

$$F(\xi, a_0) = a_0 \int_{|\xi|}^{\infty} dz \sqrt{z^2 - \xi^2} \operatorname{sech}^2(\pi z) \tanh(\pi z) + \mathcal{O}(a_0^2). \quad (4.51)$$

obtido inicialmente na literatura em [57], e em [44] a partir do termo derivado  $\bar{\psi} \frac{i}{2} g^{\kappa\lambda\mu} \sigma_{\kappa\lambda} (\partial_\mu + iA_\mu) \psi$ , governado pelo coeficiente  $g^{\kappa\lambda\mu}$ .

## 4.4 Termo de Chern-Simons de Derivada Superior

Nesta seção, vamos considerar, finalmente, a geração do termo de Chern-Simons de derivada superior, expandindo o propagador  $S_E(\vec{p} - i\vec{\partial})$ , em Eq. (4.41), até

a terceira ordem em  $\partial^k$ . Como já mencionado, a ação correspondente é semelhante a Eq. (4.57), no entanto, dada pela expressão

$$\frac{\partial S_{CSDS}}{\partial a_0} = i \int d^3x \Pi_{CSDS}^{i0} A^i, \quad (4.52)$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi_{CSDS}^{i0} &= 4i\epsilon^{i0jk} b^j \partial^k \vec{\nabla}^2 \sum_n \int \frac{d^3p_E}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_n^2 + m^2)^3} \\ &\quad - 16i\epsilon^{i0jk} b^j \partial^k \partial^l \partial^m \sum_n \int \frac{d^3p_E}{(2\pi)^3} \frac{p^l p^m}{(\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_n^2 + m^2)^4} \\ &\quad - 24im^2 \epsilon^{i0jk} b^j \partial^k \vec{\nabla}^2 \sum_n \int \frac{d^3p_E}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_n^2 + m^2)^4} \\ &\quad - 24i\epsilon^{i0jk} b^l \partial^k \vec{\nabla}^2 \sum_n \int \frac{d^3p_E}{(2\pi)^3} \frac{p^k p^l}{(\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_n^2 + m^2)^4} \\ &\quad + 128i\epsilon^{i0jk} b^j \partial^k \partial^l \partial^m \sum_n \int \frac{d^3p_E}{(2\pi)^3} \frac{p^l p^m}{(\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_n^2 + m^2)^5} \\ &\quad - 128i\epsilon^{i0kl} b^j \partial^k \partial^m \partial^n \sum_n \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{p^j p^l p^m p^n}{(\vec{p}^2 + \tilde{\omega}_n^2 + m^2)^5}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Na expressão acima também devemos usar a substituição  $p^j p^l p^m p^n \rightarrow \vec{p}^4 (\delta^{jl} \delta^{mn} + \delta^{jm} \delta^{ln} + \delta^{jn} \delta^{ml}) / [d(d+2)]$ , de modo que após avaliarmos as integrais na componente espacial  $\vec{p}$ , obtemos

$$\Pi_{CSDS}^{i0} = -\frac{i}{m^2} \epsilon^{i0jk} b^j \partial^k \vec{\nabla}^2 G'(\xi, a_0), \quad (4.54)$$

com

$$G'(\xi, a_0) = \frac{1}{12} \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{2z^2 - \xi^2}{\sqrt{z^2 - \xi^2}} \sinh(2\pi z) \frac{2 \cos(a_0) \cosh(2\pi z) - \cos(2a_0) + 3}{[\cos(a_0) + \cosh(2\pi z)]^3} - \frac{1}{12\pi^2}, \quad (4.55)$$

o qual pode ser escrito como

$$G'(\xi, a_0) = \frac{\partial}{\partial a_0} G(\xi, a_0) = \frac{\partial}{\partial a_0} \left( \frac{1}{12} \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{2z^2 - \xi^2}{\sqrt{z^2 - \xi^2}} \frac{2 \sin(a_0) \sinh(2\pi z)}{[\cos(a_0) + \cosh(2\pi z)]^2} - \frac{a_0}{12\pi^2} \right). \quad (4.56)$$

Dessa forma, ao compararmos com a Eq. (4.52), a ação de Chern-Simons de derivada superior assume a forma

$$S_{CSDS} = \int d^3x \epsilon^{i0jk} b_j \partial_k \vec{\nabla}^2 A_i G(\xi, a_0), \quad (4.57)$$

onde

$$G(\xi, a_0) = \frac{1}{12} \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{2z^2 - \xi^2}{\sqrt{z^2 - \xi^2}} \frac{2 \sin(a_0) \sinh(2\pi z)}{[\cos(a_0) + \cosh(2\pi z)]^2} - \frac{a_0}{12\pi^2}. \quad (4.58)$$

Portanto, como queríamos demonstrar,  $G(\xi, a_0) \rightarrow G(\xi, a_0 + 2\pi N) = G(\xi, a_0)$ , isto é, a ação de Chern-Simons de derivada superior é também invariante sob transformação de gauge ampla. Com isso, completamos a nossa análise.



## Capítulo 5

# Geração do Termo Tipo Éter à Temperatura Finita

Iniciaremos este capítulo discutindo a questão da ambiguidade do termo Chern-Simons quadridimensional. Em seguida, iremos estudar a questão da indução do termo tipo éter à temperatura. Observaremos que a questão da ambiguidade, discutida para o termo de Chern-Simons CPT ímpar, também se estenderá para o termo tipo éter CPT par.

### 5.1 Introdução

O problema de ambiguidades é conhecido por esta presente em teorias com violação de Lorentz. Já em 1999, o seminal estudo realizado por Jackiw em [36] estabeleceu as razões fundamentais para os resultados ambíguos em correções pertur-

ativas na EDQ com violação de Lorentz. A ambiguidade do termo Chern-Simons, discutido com detalhes em [35], tornou-se um exemplo paradigmático. Além disso, a ambiguidade no coeficiente do termo de Chern-Simons foi também demonstrada ocorrer à temperatura finita [57]. Uma discussão detalhada sobre essa questão foi apresentada em [75, 76].

O termo Chern-Simons não é o único que possui ambiguidade no seu coeficiente, em nível quântico. Essa dependência dos resultados sobre o regime de regularização foi observada no termo tipo éter [86] e nos termos de derivadas superior com violação de Lorentz [87]. Recentemente, a geração perturbativa em termos de derivadas superior com temperatura finita também foi discutido em [44]. As questões relacionadas com a unitariedade na teoria envolvendo tal termo foi considerada em [88, 89, 90].

Contudo, nossa motivação aqui é o estudo do termo CPT par com violação de simetria de Lorentz, isto é, o termo tipo éter, proposto em [91], como um possível ingrediente do modelo padrão estendido, discutido em [92], dentro do contexto de dimensões superior, e aplicado no contexto de branas, em [93].

Estamos interessados principalmente no estudo da indução desse termo, a partir da EDQ com violação de simetria de Lorentz, que possui um acoplamento não mínimo CPT ímpar e um termo com o coeficiente  $b_\mu$ . Esse estudo já foi efetuado em [14], contudo, para temperatura zero, o qual foi demonstrado que a questão da ambiguidade também está presente, para este termo CPT par. Assim, a pergunta natural que surge é se esse comportamento da ambiguidade também se estenderá para o caso de temperatura finita, assim como acontece para o termo Chern-Simons [57, 75, 76]. Este é o foco de estudo deste capítulo.

## 5.2 Anomalia do termo de Chern-Simons

A ambiguidade na geração do termo de Chern-Simons não é um consequência inerente das teorias com violação de simetria de Lorentz, mas sim um fato recorrente em teoria quântica de campos. Antes de falarmos exatamente sobre o termo de Chern-Simons, vamos inicialmente discutir o cálculo do gráfico do triângulo (da anomalia axial), no qual iremos observar que os seus resultados se apresentam finitos, porém indeterminados [36].

O gráfico de Feynman do triângulo de loop fermiônico, com massa, em 3+1 dimensões, com vértices vetorial axial, vetorial e vetorial pode ser escrito como  $T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = T_1^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) + T_2^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2)$ , onde

$$T_1^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = -\text{tr} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{l} - m} \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{1}{\not{l} - \not{q} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{l} - \not{p}_1 - m} \gamma^\mu \quad (5.1)$$

e  $T_2^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = T_1^{\nu\mu\alpha}(p_2, p_1)$ , com  $q = p_1 + p_2$ . Os momentos vetoriais são  $p_1^\mu$  e  $p_2^\nu$ , ao passo que o momento vetorial axial é  $q^\alpha$ .

A fim de verificarmos a identidade de Ward axial, ou seja, se

$$q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = 2m T^{\mu\nu}(p_1, p_2), \quad (5.2)$$

onde  $T^{\mu\nu}(p_1, p_2) = T_1^{\mu\nu}(p_1, p_2) + T_2^{\mu\nu}(p_1, p_2)$ , com

$$T_1^{\mu\nu}(p_1, p_2) = -\text{tr} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{l} - m} \gamma_5 \frac{1}{\not{l} - \not{q} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{l} - \not{p}_1 - m} \gamma^\mu \quad (5.3)$$

e  $T_2^{\mu\nu}(p_1, p_2) = T_1^{\nu\mu}(p_2, p_1)$ , ou melhor, se  $q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = 0$ , para  $m = 0$ , inicialmente usamos a identidade  $\not{q}\gamma_5 = \gamma_5(\not{l} - \not{q} - m) + (\not{l} - m)\gamma_5 + 2m\gamma_5$ . Assim, obtemos que  $q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = 2m T^{\mu\nu}(p_1, p_2) + R_1^{\mu\nu} + R_2^{\mu\nu}$ , onde

$$R_1^{\mu\nu} = \text{tr} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{\not{l} - \not{p}_2 - m} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{l} - \not{q} - m} \gamma^\mu - \frac{1}{\not{l} - m} \gamma_5 \gamma^\nu \frac{1}{\not{l} - \not{p}_1 - m} \gamma^\mu \right] \quad (5.4)$$

e

$$R_2^{\mu\nu} = \text{tr} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{\not{l} - \not{p}_1 - m} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{l} - \not{q} - m} \gamma^\nu - \frac{1}{\not{l} - m} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{\not{l} - \not{p}_2 - m} \gamma^\nu \right], \quad (5.5)$$

no qual, facilmente, também observamos que  $R_2^{\mu\nu}(p_1, p_2) = R_1^{\nu\mu}(p_2, p_1)$ .

Observe que ao considerarmos os deslocamentos

$$l \rightarrow l + p_2 \text{ e } l \rightarrow l + p_1, \quad (5.6)$$

nos primeiros termos das equações (5.4) e (5.5), trivialmente obtemos  $R_1^{\mu\nu} = 0 = R_2^{\mu\nu}$ . Desse modo, a identidade de Ward axial é satisfeita, ou seja,  $q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = 2mT^{\mu\nu}(p_1, p_2)$ .

Contudo, como as integrais em (5.4) e (5.5) são linearmente divergentes, podemos ter também  $R_1^{\mu\nu}$  e  $R_2^{\mu\nu} \neq 0$ , quando consideramos deslocamentos diferentes daqueles que em (5.6). Para observarmos isso, vamos considerar o exemplo genérico, no qual um deslocamento  $a_\mu$  é realizado apenas no primeiro termo do integrando abaixo:

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} [f(l+a) - f(l)] \\ &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} [a^\mu \partial_\mu f(l) + a^\mu a^\nu \partial_\mu \partial_\nu f(l) + \dots]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Desde que a integral acima seja linearmente divergente, i.e.,  $f(\pm\infty) \neq 0$  e  $\partial_\mu f(\pm\infty) = \partial_\mu \partial_\nu f(\pm\infty) = \dots = 0$ , apenas o primeiro termo sobrevive. Assim,  $\Delta(a)$  pode gerar um termo de superfície não nulo, dado por

$$\Delta(a) = \frac{2i\pi^2}{(2\pi)^4} a^\mu \lim_{l \rightarrow \infty} l_\mu l^2 f(l), \quad (5.8)$$

no qual usamos o teorema de Gauss e coordenadas esféricas em 3 + 1 dimensões.

Retornando agora para as expressões (5.4) e (5.5), que podem ser reescritas na forma de termos de superfície do tipo (5.7), ou seja,

$$R_1^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} [f(l - p_2) - f(l)] \quad (5.9)$$

e

$$R_2^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} [f(l - p_1) - f(l)], \quad (5.10)$$

ao considerarmos o deslocamento  $a^\lambda = -p_2^\lambda$  em (5.8), obtemos um resultado não nulo para  $R_1^{\mu\nu}$ , dado por

$$\begin{aligned} R_1^{\mu\nu} &= \frac{2i\pi^2}{(2\pi)^4} (-p_2)^\lambda \lim_{l \rightarrow \infty} l_\lambda l^2 \text{tr} \frac{(\not{l} + m)\gamma_5 \gamma^\nu (\not{l} - \not{p}_1 + m)\gamma^\mu}{(l^2 - m^2)[(l - p_1)^2 - m^2]} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\beta\nu\alpha\mu} p_1^\alpha p_2^\lambda \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l_\lambda l^\beta}{l^2} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Alternativamente, para o deslocamento  $a^\lambda = -p_1^\lambda$ , obtemos o mesmo resultado, tal que  $R_2^{\mu\nu}(p_1, p_2) = R_1^{\mu\nu}(p_1, p_2)$ . Assim, desta vez a identidade de Ward axial não é satisfeita, pois temos

$$q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = 2mT^{\mu\nu}(p_1, p_2) - \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta. \quad (5.12)$$

Note, contudo, que não foi necessário efetuar deslocamentos da variável de integração em nenhum momento deste cálculo, pois as expressões  $R_1^{\mu\nu}$  e  $R_2^{\mu\nu}$  já se apresentavam na forma de termos de superfície, como observado em (5.9) e (5.10).

Vamos retornar ao gráfico (5.1) e considerar o deslocamento arbitrário

$$l \rightarrow l + \alpha p_1 + (\alpha - \beta) p_2, \quad (5.13)$$

tal que para o termo de superfície, temos

$$\begin{aligned}
\Delta_1^{\mu\nu\alpha}(a) &= T_1^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, a) - T_1^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) \\
&= -\text{tr} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{l} + \not{q} - m} \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{1}{\not{l} + \not{q} - \not{q} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{l} + \not{q} - \not{p}_1 - m} \gamma^\mu \\
&\quad + \text{tr} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{l} - m} \gamma^\alpha \gamma_5 \frac{1}{\not{l} - \not{q} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{l} - \not{p}_1 - m} \gamma^\mu, \tag{5.14}
\end{aligned}$$

ou melhor,

$$\begin{aligned}
\Delta_1^{\mu\nu\alpha}(a) &= -\frac{2i\pi^2}{(2\pi)^4} a^\lambda \lim_{l \rightarrow \infty} l_\lambda l^2 \text{tr} \frac{(\not{l} + m) \gamma^\alpha \gamma_5 (\not{l} - \not{q} + m) \gamma^\nu (\not{l} - \not{p}_1 + m) \gamma^\mu}{(l^2 - m^2)[(l - q)^2 - m^2][(l - p_1)^2 - m^2]} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\beta\nu\alpha\mu} a^\lambda \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l_\lambda l^\beta}{l^2} \\
&= -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} a^\beta. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Para o tensor  $\Delta_2^{\mu\nu\alpha}(a)$ , seguimos o mapeamento  $p_1 \rightarrow p_2$  e  $\mu \rightarrow \nu$ , tal que obtemos

$$\Delta^{\mu\nu\alpha}(a) = -\frac{\beta}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (p_1^\beta - p_2^\beta). \tag{5.16}$$

Portanto, levando em conta a expressão geral

$$T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, a) = T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) + \Delta^{\mu\nu\alpha}(a), \tag{5.17}$$

para quaisquer deslocamentos, para a identidade de Ward axial, obtemos que

$$q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, a) = 2m T^{\mu\nu}(p_1, p_2) - \frac{1 - \beta}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}. \tag{5.18}$$

Seguindo os mesmo passos, para a identidade de Ward vetorial, encontramos

$$p_{1\mu} T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, a) = \frac{1 + \beta}{4\pi^2} \epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma} p_{1\alpha} p_{2\gamma}. \tag{5.19}$$

Então, nos resultados acima, por exemplo, ao fixarmos que a identidade de Ward vetorial deva ser satisfeita,  $\beta = -1$ , tal que  $p_{1\mu} T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2) = 0$  e

$$q_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2, a) = 2m T^{\mu\nu}(p_1, p_2) - \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta. \tag{5.20}$$

Portanto, temos aqui um exemplo no qual as correções radiativas são finitas, porém indeterminadas, contudo, elas podem ser fixadas pelo experimento.

Podemos facilmente rescrever o gráfico  $T^{\mu\nu\alpha}(p_1, p_2)$  em termos do tensor de polarização  $\Pi_{CS}^{\mu\nu}(p)$ , Eq. (3.16), ao considerarmos  $p_1 \rightarrow p$  e  $p_2 \rightarrow -p$ , tal que  $\Pi_{CS}^{\mu\nu}(p) = b_\alpha T^{\mu\nu\alpha}(p, -p)$ . Dessa forma, a expressão (5.17) pode ser reescrita como

$$\Pi_{CS}^{\mu\nu}(p, a) = \Pi_{b1}^{\mu\nu}(p) - \frac{\beta}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} b_\alpha p_\beta. \quad (5.21)$$

Portanto, observamos que, trivialmente,  $p_\mu \Pi_{b1}^{\mu\nu}(p, a) = p_\mu \Pi_{b1}^{\mu\nu}(p) = 0$ , tal que uma fixação sobre  $\beta$  não é possível, caracterizando assim que agora as correções quânticas são indeterminadas, contudo, elas não podem ser fixadas.

### 5.3 Geração do Termo de Tipo Éter

Começamos com a EDQ estendida cuja ação envolve ambos acoplamentos mínimos e não mínimos (proporcional  $e$  e  $g$  respectivamente) e um termo axial no setor fermiônico [14]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\cancel{\partial} - \gamma^\mu (eA_\mu + g\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\nu\lambda} b^\rho) - m - \gamma_5 \cancel{b}] \psi. \quad (5.22)$$

Muitos aspectos relacionados a este modelo com temperatura zero foram discutidos em [87, 14]. Em particular, foi mencionado que este modelo permite a geração de contribuições com loop finito ao termo tipo éter e termos de violação de Lorentz com derivada superior. Portanto, vamos discutir esse modelo, ou para ser mais preciso, as contribuições do termo de éter à temperatura finita. A ação efetiva para o modelo

com um loop é dada por

$$S_{eff}[b, A] = -i \text{Tr} \ln(i\rlap{/}\partial - e\gamma^\mu A_\mu - g\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\mu F^{\nu\lambda}b^\rho - m - \gamma_5\rlap{/}b). \quad (5.23)$$

Posteriormente, iremos obter as contribuições CPT ímpar para esta ação efetiva.

## 5.4 Contribuição Não Mínima

A correção de segunda ordem no quadri-vetor que viola Lorentz  $b_\mu$  no setor puramente não mínimo, onde  $e = 0$ , foi discutida com detalhes em [14, 15, 86], mostrando assim que essa correção é do tipo

$$S_{FF}(p) = -\frac{g^2}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}b_\alpha F_{\beta\gamma}(p)b_{\alpha'}F_{\beta'\gamma'}(-p)I_{\delta\delta'} \quad (5.24)$$

onde

$$\begin{aligned} I_{\delta\delta'} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \text{tr}[m^2\gamma_\delta\gamma_{\delta'} + k^\mu k^\nu \gamma_\mu\gamma_\delta\gamma_\nu\gamma_{\delta'}], \\ &= 4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} (g_{\delta\delta'}m^2 + 2k_\delta k_{\delta'} - g_{\delta\delta'}k^2). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Para o caso de temperatura zero, esta contribuição tem como resultado

$$S_{FF}(p) = C_0 g^2 m^2 (b^\alpha F_{\alpha\beta})^2, \quad (5.26)$$

onde a constante  $C_0$  é conhecida por possuir valor igual a  $\frac{1}{4\pi^2}$  ou zero, veja [?, 86]. Este é exatamente o termo tipo éter proposto em [92]. Com o objetivo de implementarmos a temperatura finita, tomamos a Eq. (5.25) e alteramos do espaço Minkowski para o espaço Euclidiano. Com isso, executamos o procedimento a seguir:  $k_0 \rightarrow ik_0$  ( $g^{\mu\nu} \rightarrow -\delta^{\mu\nu}$ ),  $d^4k \rightarrow id^4k_E$ , e  $k^2 \rightarrow -k_0^2 - \vec{k}^2 = -k_E^2$ , de modo que, obtemos

$$I^{\delta\delta'} = 4i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2} (-\delta^{\delta\delta'} m^2 + 2k_E^\delta k_E^{\delta'} - \delta^{\delta\delta'} k_E^2). \quad (5.27)$$



O procedimento utilizado nos cálculos foi o de primeiro separarmos as componentes de espaço e tempo dos quadri-momentos  $k_E^\delta = (k_0, \vec{k})$ , onde  $k_E^\delta \rightarrow \hat{k}^\delta + k_0\delta^{\delta 0}$ , tal que  $\hat{k}^\delta = (0, \vec{k})$ . Este procedimento de cálculo é uma reminiscência do artigo [57]. Também, devido a simetria da integral em rotação espacial, é possível utilizar as substituições

$$\hat{k}^\alpha \hat{k}^\beta \rightarrow \frac{\hat{k}^2}{d} (\delta^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha 0} \delta^{\beta 0}), \quad (5.28)$$

onde, com tal procedimento, promovemos o espaço de 3-dimensões para espaço de  $d$  dimensões. Portanto, através da introdução de um parâmetro arbitrário  $\mu$ , mantemos a dimensão de massa inalterada, temos

$$\begin{aligned} I^{\delta\delta'} &= 4i \int \frac{dk_0}{2\pi} (\mu^2)^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2} (-\delta^{\delta\delta'} m^2 + 2k_E^\delta k_E^{\delta'} - \delta^{\delta\delta'} k_E^2) \\ &= 8i \int \frac{dk_0}{2\pi} (\mu^2)^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\vec{k}^2 + k_0^2 + m^2)^2} \left[ \frac{\vec{k}^2}{d} (\delta^{\delta\delta'} - \delta^{\delta 0} \delta^{\delta' 0}) + k_0^2 \delta^{\delta 0} \delta^{\delta' 0} \right] \\ &\quad - 4i \int \frac{dk_0}{2\pi} (\mu^2)^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\vec{k}^2 + k_0^2 + m^2)} \delta^{\delta\delta'}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Então, através do cálculo das integrais nas componentes espaciais  $\vec{k}$ , obtemos

$$\begin{aligned} I^{\delta\delta'} &= -i 2^{2-d} \pi^{-d/2} (\mu^2)^{\frac{3}{2}-\frac{d}{2}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \delta^{\delta 0} \delta^{\delta' 0} \\ &\quad \times \int \frac{dk_0}{2\pi} (k_0^2 + m^2)^{\frac{d}{2}-2} (m^2 + (d-1)k_0^2). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Se calcularmos agora a integral  $k_0$ ,  $I^{\delta\delta'} = 0$ , que reproduz um dos resultados encontrados à temperatura zero [86].

Vamos agora empregar o formalismo Matsubara, que consiste em considerar  $k_0 = (n + 1/2)2\pi/\beta$  e fazer a mudança  $(1/2\pi) \int dk_0 \rightarrow 1/\beta \sum_n$ . No entanto, não podemos simplesmente tomar o limite  $d \rightarrow 3$  na Eq. (5.30), porque a soma exhibe singularidades. Assim, com objetivo de isolar essas singularidades, vamos usar uma

representação explícita para a soma sobre as frequências de Matsubara [61], dada por

$$\sum_n [(n + \eta)^2 + \xi^2]^{-\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda - 1/2)}{\Gamma(\lambda)(\xi^2)^{\lambda-1/2}} + 4 \sin(\pi\lambda) f_\lambda(\xi, \eta) \quad (5.31)$$

onde

$$f_\lambda(\xi, \eta) = \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - \xi^2)^\lambda} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{e^{2\pi(z+i\eta)} - 1} \right), \quad (5.32)$$

que é válido para  $\operatorname{Re} \lambda < 1$ , além dos pólos em  $\lambda = 1/2, -1/2, \dots$ . Na realidade,  $\xi = \frac{m}{2\pi T}$ , e  $\eta = 1/2$  enquanto que todos os propagadores são fermiônicos. Portanto, aplicando estes resultados para a expressão (5.30), obtemos

$$I^{\delta\delta'} = \frac{im^2}{\pi^2 \xi^2} \delta^{\delta 0} \delta^{\delta' 0} F_1(\xi), \quad (5.33)$$

onde

$$F_1(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{(2z^2 - \xi^2)}{(z^2 - \xi^2)^{1/2}} (1 - \tanh(\pi z)). \quad (5.34)$$

No limite de alta temperatura, a expressão acima é dependente da temperatura, podendo ser reescrita como

$$I^{\delta\delta'} = \frac{i}{3} T^2 \delta^{\delta 0} \delta^{\delta' 0} + O\left(\frac{m}{T}\right). \quad (5.35)$$

Outra forma para obter a contribuição para a função de dois pontos, isto é, para encontrar  $I^{\delta\delta'}$ , baseia-se em aplicar o formalismo de Matsubara para a expressão (5.25), ou, como é o mesmo, (5.27), sem a simetrização (5.28). Mais uma vez, para o caso da temperatura finita, realizamos a rotação de Wick e a discretização da coordenada de ordem zero pela regra  $k_0 \rightarrow 2\pi T(n + 1/2)$ , onde  $T = 1/\beta$ , de modo que chegamos à seguinte forma para  $I_{\delta\delta'}$

$$\begin{aligned} I_{\delta\delta'} &= iT \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[4\pi^2 T^2 (n + 1/2)^2 + \vec{k}^2 + m^2]^2} \\ &\quad \times \operatorname{tr}[m^2 \gamma_\delta \gamma_{\delta'} - 4\pi^2 T^2 (n + 1/2)^2 \gamma_0 \gamma_\delta \gamma_0 \gamma_{\delta'} + k^i k^j \gamma_i \gamma_\delta \gamma_j \gamma_{\delta'}]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Resta-nos encontrar o traço acima. Usamos o fato de que as matrizes de Dirac possuem dimensão  $4 \times 4$  e produzem as seguintes relações

$$\begin{aligned}\text{tr}(\gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d) &= 4(\eta^{ab} \eta^{cd} - \eta^{ac} \eta^{bd} + \eta^{ad} \eta^{bc}); \\ \text{tr}(\gamma^a \gamma^b) &= 4\eta^{ab}.\end{aligned}\tag{5.37}$$

Temos três situações, (i)  $\delta, \delta' = k, l$  (ambos os índices espaciais são livres). Temos

$$\begin{aligned}I_{kl} &= iT \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[4\pi^2 T^2 (n + 1/2)^2 + \vec{k}^2 + m^2]^2} \\ &\quad \times \text{tr}[m^2 \gamma_k \gamma_l - 4\pi^2 T^2 (n + 1/2)^2 \gamma_0 \gamma_k \gamma_0 \gamma_l + k^i k^j \gamma_i \gamma_k \gamma_j \gamma_l], \\ &= -4iT \delta_{kl} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[4\pi^2 T^2 (n + 1/2)^2 + \vec{k}^2 + m^2]^2} \\ &\quad \times \left[ m^2 + 4\pi^2 T^2 (n + 1/2)^2 + \left( \frac{d-2}{d} \right) \vec{k}^2 \right].\end{aligned}\tag{5.38}$$

Aqui substituímos a dimensão espacial por  $d$ , com o objetivo de verificar a presença de ambiguidades. Para avaliarmos esta expressão, usamos a identidade

$$\int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{a \vec{k}^2 + M_n^2}{(\vec{k}^2 + M_n^2)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left[ \frac{d}{2} \frac{a \Gamma(1 - d/2)}{(M_n^2)^{1-d/2}} + \frac{M_n^2 \Gamma(2 - d/2)}{(M_n^2)^{2-d/2}} \right].\tag{5.39}$$

Dando continuidade, partindo da expressão (5.38) que no nosso caso, devemos escolher  $M_n^2 = m^2 + 4\pi^2 T^2 (n + 1/2)^2$ , e  $a = \frac{d-2}{d}$ . Neste caso, temos

$$I_{kl} = -\frac{4iT}{(4\pi)^{d/2}} \delta_{kl} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(M_n^2)^{1-d/2}} \left( \frac{ad}{2} + 1 - \frac{d}{2} \right) = 0.\tag{5.40}$$

Este resultado nulo, corresponde ao caso alcançado da regularização em [86] à temperatura zero. Por isso, pelo menos em uma das regularizações, esta parte da função de dois pontos desaparece. Observe que, se escolhermos  $d = 3$  desde o início, o resultado também será zero. Efetivamente, isso significa que a implementação da

temperatura finita desempenha o papel de uma regularização específica diferente daquelas que são usados em [86] e produzindo o resultado para o limite de temperatura zero.

(ii)  $\delta = i, \delta' = 0$ , ou vice-versa. Neste caso, todos os traços em (5.36) desaparecem diretamente. Logo, o resultado é zero.

(iii)  $\delta = 0, \delta' = 0$ . Vamos considerar a expressão, (5.25) para o caso  $\delta = \delta' = 0$ . Primeiro, impomos aqui  $\delta = \delta' = 0$  e encontramos

$$I_{00} = 4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} [-g_{00}(k^2 - m^2) + 2k_0^2]. \quad (5.41)$$

Em seguida, realizamos a rotação Wick e levamos em conta que  $g_{00} = 1$ , temos

$$I_{00} = 4i \int \frac{dk_0 d^3 \vec{k}}{(2\pi)^4} \left[ \frac{1}{k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2} - 2 \frac{k_0^2}{(k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2)^2} \right]. \quad (5.42)$$

Então, integramos sobre  $d^3 \vec{k}$ :

$$I_{00} = \frac{4i}{(4\pi)^{3/2}} \int \frac{dk_0}{2\pi} \left[ \frac{\Gamma(-1/2)}{(k_0^2 + m^2)^{-1/2}} - 2 \frac{k_0^2 \Gamma(1/2)}{(k_0^2 + m^2)^{1/2}} \right]. \quad (5.43)$$

Agora, mudamos a integração sobre  $k_0$  tornando-se uma soma discreta, com  $\int dk_0 \rightarrow 2\pi T \sum_n$ , e  $k_0^2 \rightarrow 4\pi^2 T^2 (n + 1/2)^2$ , como de costume. Assim, ao introduzirmos  $M_n^2 = m^2 + 4\pi^2 T^2 (n + 1/2)^2$ , podemos escrever

$$I_{00} = \frac{4i}{(4\pi)^{3/2}} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\Gamma(-1/2)}{(M_n^2)^{-1/2}} - 2\Gamma(1/2) \frac{(M_n^2 - m^2)}{(M_n^2)^{1/2}} \right] \quad (5.44)$$

desde que  $\Gamma(1/2) = -1/2\Gamma(-1/2)$ , temos

$$\begin{aligned} I_{00} &= \frac{4i\Gamma(-1/2)}{(4\pi)^{3/2}} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{(M_n^2)^{-1/2}} + \frac{(M_n^2 - m^2)}{(M_n^2)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{4i\Gamma(-1/2)}{(4\pi)^{3/2}} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{2}{(M_n^2)^{-1/2}} - \frac{m^2}{(M_n^2)^{1/2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Introduzimos  $\xi = \frac{m}{2\pi T}$ , ou seja,  $M_n^2 = 4\pi^2 T^2 [\xi^2 + (n + 1/2)^2]$ . Assim,

$$I_{00} = \frac{4i\Gamma(-1/2)}{(4\pi)^{3/2}} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{4\pi T}{[\xi^2 + (n + 1/2)^2]^{-1/2}} - \frac{m^2}{2\pi T [\xi^2 + (n + 1/2)^2]^{1/2}} \right\} \quad (5.46)$$

Para somar sobre  $n$ , usamos a fórmula (5.31). No nosso caso,  $\lambda = 1/2$  ou  $\lambda = -1/2$ . A integral em (5.31) converge em ambos os casos, os únicos termos problemáticos são aqueles que envolvem uma funções gama de Euler. Para evitarmos tamanha dificuldade, vamos adotar, a contante positiva  $\epsilon$  como parâmetro na expressão para  $I_{00}$ :

$$I_{00} = -\frac{i}{\pi} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{4\pi T}{[\xi^2 + (n + 1/2)^2]^{-1/2+\epsilon}} - \frac{m^2}{2\pi T [\xi^2 + (n + 1/2)^2]^{1/2+\epsilon}} \right\} \quad (5.47)$$

Usando a fórmula (5.31), temos  $I_{00} = I_{00}^{(a)} + I_{00}^{(b)}$  e obtemos

$$I_{00}^{(a)} = -\frac{i}{\pi} T \left[ \frac{4\pi T \sqrt{\pi} \Gamma(-1 + \epsilon)}{\Gamma(-1/2) (\xi^2)^{-1+\epsilon}} - \frac{m^2 \sqrt{\pi} \Gamma(\epsilon)}{2\pi T \Gamma(1/2) (\xi^2)^\epsilon} \right], \quad (5.48)$$

$$I_{00}^{(b)} = \frac{i}{\pi} T \left[ 8\pi T \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - \xi^2)^{-1/2}} (1 - \tanh(\pi z)) - \frac{m^2}{\pi T} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - \xi^2)^{1/2}} (1 - \tanh(\pi z)) \right]. \quad (5.49)$$

É claro que a singularidade só pode surgir a partir de  $I_{00}^{(a)}$ . Vamos estudá-la em detalhes. Primeiro de tudo, precisamos lembrar que  $\xi = \frac{m}{2\pi T}$ . Em seguida, temos

$$I_{00}^{(a)} = -\frac{i}{\pi^2} \frac{m^2 \sqrt{\pi}}{(\xi^2)^\epsilon} \left[ \frac{\Gamma(-1 + \epsilon)}{\Gamma(-1/2)} - \frac{\Gamma(\epsilon)}{2\Gamma(1/2)} \right]. \quad (5.50)$$

Portanto, levaremos em conta que  $\Gamma(-1/2) = -2\Gamma(1/2)$ . Obtemos

$$I_{00}^{(a)} = -\frac{i}{\pi^2} \frac{m^2 \sqrt{\pi}}{(\xi^2)^\epsilon} \left[ \frac{\Gamma(-1 + \epsilon) + \Gamma(\epsilon)}{\Gamma(-1/2)} \right], \quad (5.51)$$

onde  $\Gamma(-1 + \epsilon) + \Gamma(\epsilon) = -1$  (ocorre a mesma relação entre funções gama e Euler implícitas, cancelando as divergências no caso de temperatura zero [86]). Podemos

tender  $\epsilon \rightarrow 0$ . Portanto, colocamos  $(\xi^2)^\epsilon = 1$ . Assim,

$$I_{00}^{(a)} = \frac{i}{\pi^2} \frac{m^2 \sqrt{\pi}}{\Gamma(-1/2)} = -\frac{im^2}{2\pi^2}. \quad (5.52)$$

O resultado completo para  $I_{00}$  é

$$\begin{aligned} I_{00} &= -\frac{im^2}{2\pi^2} + i \left[ 8T^2 \int_{|\xi|}^{\infty} dz (z^2 - \xi^2)^{1/2} (1 - \tanh(\pi z)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2}{\pi^2} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - \xi^2)^{1/2}} (1 - \tanh(\pi z)) \right] \\ &= -\frac{im^2}{2\pi^2} + i \left[ 8T^2 F_2(\xi) - \frac{m^2}{\pi^2} F_3(\xi) \right], \end{aligned} \quad (5.53)$$

onde

$$F_2(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz (z^2 - \xi^2)^{1/2} (1 - \tanh(\pi z)), \quad (5.54)$$

$$F_3(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - \xi^2)^{1/2}} (1 - \tanh(\pi z)). \quad (5.55)$$

No entanto, em qualquer caso, os termos que envolvem as integrais nessa expressão são finitas tanto nos limites inferior quanto no limite superior. Pode-se notar que a contribuição da temperatura zero é não nula (5.52) (o desenvolvimento do cálculo correspondente) não foi discutida em [86]. A principal razão para isso consiste no fato de que este procedimento exige um papel muito especial d coordenada zero, que pode ser explicado naturalmente nomeadamente pela prescrição a temperatura finita. Após a terceira forma de cálculo, podemos calcular o primeiro traço em (5.24) em quatro dimensões, tal como foi feito na [86], o resultado é expresso em termos de  $k^2$  e só depois aplica-se a temperatura finita. Neste caso, temos, a introdução da temperatura finita após a rotação Wick.

$$I_{\delta\delta'} = 2i\eta_{\delta\delta'} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{k_E^2 + 2m^2}{(k_E^2 + m^2)^2} = 2i\eta_{\delta\delta'} I, \quad (5.56)$$

onde

$$I = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{k_E^2 + 2m^2}{(k_E^2 + m^2)^2}. \quad (5.57)$$

Vamos calcular a integral  $I$ . No cálculo abaixo, omitiremos o índice “ $E$ ” daqui em diante. Em primeiro lugar, podemos escrever

$$\frac{1}{k^2 + m^2} = \frac{1}{k^2 + m^2} - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} = -\frac{m^2}{k^2(k^2 + m^2)} + \frac{1}{k^2}. \quad (5.58)$$

Assim, o integrando de  $I$  parece

$$\frac{k^2 + 2m^2}{(k^2 + m^2)^2} = \frac{m^2}{(k^2 + m^2)^2} - \frac{m^2}{k^2(k^2 + m^2)} + \frac{1}{k^2} = -\frac{m^4}{k^2(k^2 + m^2)^2} + \frac{1}{k^2}. \quad (5.59)$$

No caso da temperatura de zero, com a representação de Feynman, temos:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + 2m^2}{(k^2 + m^2)^2} = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m^4}{k^2(k^2 + m^2)^2} = \\ &= -2m^4 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{x}{(k^2 + m^2 x)^3} = -\frac{m^2}{16\pi^2}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

que corresponde ao resultado [86], uma vez que o integrando do  $\frac{1}{k^2}$ , o último termo de (5.59), desaparece dentro da regularização dimensional. Assim, a expressão equivalente de  $I$  é

$$I = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ -\frac{2m^4 x}{(k^2 + m^2 x)^3} + \frac{1}{k^2} \right]. \quad (5.61)$$

Podemos apresentar esta expressão como  $I = I' + I_0$ , onde,

$$I' = -2m^4 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{x}{(k^2 + m^2 x)^3}, \quad (5.62)$$

$$\text{e } I_0 = -2m^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2}.$$

Agora, vamos implementar a temperatura finita apenas para esta expressão:

$$I' = -2m^4 T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{x}{[k^2 + 4\pi^2 T^2 (n + 1/2)^2 + m^2 x]^3}. \quad (5.63)$$

Podemos reescrever a expressão anterior em termos de  $\xi = \frac{m}{2\pi T}$ , escrevendo da forma

$$I' = -\frac{m^4 T}{16\pi(2\pi T)^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 dx \frac{x}{[(n+1/2)^2 + \xi^2 x]^{3/2}}. \quad (5.64)$$

Para fatorar a dependência da temperatura, introduzimos nova variável  $\tilde{x} = \xi^2 x$ , de modo que

$$I' = -\frac{m^4 T}{16\pi(2\pi T)^3} \left(\frac{4\pi^2 T^2}{m^2}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\xi^2} d\tilde{x} \frac{\tilde{x}}{[(n+1/2)^2 + \tilde{x}]^{3/2}}. \quad (5.65)$$

Agora, para aplicarmos o somatório (5.31), devemos usar a relação de recorrência

$$f_\lambda(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\xi^2} \frac{2\lambda-3}{\lambda-1} f_{\lambda-1}(\xi, \eta) - \frac{1}{4\xi^2} \frac{1}{(\lambda-2)(\lambda-1)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} f_{\lambda-2}(\xi, \eta), \quad (5.66)$$

por causa  $\lambda = 3/2$  é claramente fora do alcance de validade. Portanto, isso nos permite manipularmos o resultado para  $I'$  como

$$I' = -\frac{m^2}{16\pi^2} + \frac{T^2 \pi^2}{2} F_4(\xi), \quad (5.67)$$

onde

$$F_4(\xi) = \int_0^{\xi^2} d\tilde{x} \int_{|\sqrt{\tilde{x}}|}^{\infty} dz (z^2 - \tilde{x})^{1/2} \sec h^2(\pi z) \tanh(\pi z). \quad (5.68)$$

Agora, vamos discutir a integral  $I_0$ . No caso de temperatura zero, é certamente nulo. Em princípio, poderíamos tratá-la como zero a temperatura finita, (tratando esta restrição como mais uma regularização). No entanto, se aplicarmos a temperatura finita, temos

$$I_0 = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{k}^2 + 4\pi^2 T^2 (n+1/2)^2}. \quad (5.69)$$

A integral é simples:

$$I_0 = -\frac{T^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n + \frac{1}{2} \right|. \quad (5.70)$$



Mais uma vez, nós mudamos a soma sobre todos  $n$  pela soma sobre apenas a parte positiva  $n$ , ou seja,

$$I_0 = -T^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1/2) = -T^2 \left[ \zeta(-1) + \frac{1}{2} \zeta(0) \right], I_0 = -\frac{T^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n + \frac{1}{2} \right|. \quad (5.71)$$

onde nós levamos em conta que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ . Desde que  $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ , e  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ , tem-se

$$I_0 = \frac{T^2}{3}. \quad (5.72)$$

De uma tal forma, tem-se

$$I^{\delta\delta'} = 2\delta^{\delta\delta'} (I' + I_0) = 2\delta^{\delta\delta'} \left[ -\frac{m^2}{16\pi^2} + \frac{T^2}{3} + \frac{T^2\pi^2}{2} F_4(\xi) \right]. \quad (5.73)$$

É instrutivo também discutirmos o quarto cálculo da contribuição puramente não mínimo, para a função de dois pontos, o que tem sido considerado em [86]. Aqui, foi mostrado que o resultado é zero no caso de temperatura zero. Foi demonstrado que existe na dimensão arbitrária  $D$  do espaço-tempo, a expressão (5.24), após substituição  $k_\mu k_\nu \rightarrow \frac{1}{D} \eta_{\mu\nu} k^2$  a subsequente rotação de Wick, temos

$$I_{\delta\delta'} = 2i\eta_{\delta\delta'} I. \quad (5.74)$$

Desta forma, ao contrário do caso anterior, temos agora

$$I = 2 \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{k_E^2 \left(\frac{D-2}{D}\right) + m^2}{(k_E^2 + m^2)^2}. \quad (5.75)$$

Podemos implementar a temperatura finita para esta expressão. Se introduzirmos  $d = D - 1$  como uma dimensão puramente espacial (em princípio,  $d = 3 + \epsilon$ ) e, em seguida, integrarmos sobre as componentes espaciais do momento, obtemos

$$I = \frac{2T}{(4\pi)^{d/2}(d+1)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(d-1)\Gamma(1-\frac{d}{2})}{[m^2 + 4\pi^2 T^2 (n + \frac{1}{2})^2]^{1-\frac{d}{2}}} + \frac{2\Gamma(2-\frac{d}{2})}{[m^2 + 4\pi^2 T^2 (n + \frac{1}{2})^2]^{2-\frac{d}{2}}} \right] \quad (5.76)$$

O resultado da soma utilizando (5.31) é,

$$\begin{aligned}
I = & \frac{(2\pi)^{d-2}T^{d-1}}{(4\pi)^{d/2}(d+1)} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{(\xi^2)^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2}}} \left( (d-1)\Gamma\left(\frac{1-d}{2}\right) + 2\Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \right) \right. \\
& + 4(d-1)\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) \sin\left(\pi\left(1-\frac{d}{2}\right)\right) f_{1-d/2}\left(\xi, \frac{1}{2}\right) \\
& \left. + 8\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \sin\left(\pi\left(2-\frac{d}{2}\right)\right) f_{2-d/2}\left(\xi, \frac{1}{2}\right) \right], \tag{5.77}
\end{aligned}$$

onde a expressão genérica para a função  $f_\lambda(\xi, \eta)$  é dado pela (5.32). Devido a identidade conhecida  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , podemos anular completamente o primeiro (independente da temperatura e, na verdade, composta por duas singularidades desde  $d = 3 + \epsilon$ ) termo desta expressão colaborando com o resultado de [86] que dentro deste processo o resultado para temperatura zero desaparece exatamente (nota-se que este cancelamento mútuo das singularidades também se baseia nas propriedades da função gama de Euler assim como em [86]). Ficamos com,

$$\begin{aligned}
I = & \frac{(2\pi)^{d-2}T^{d-1}}{(4\pi)^{d/2}(d+1)} \left[ 4(d-1)\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) \sin\left(\pi\left(1-\frac{d}{2}\right)\right) f_{1-d/2}\left(\xi, \frac{1}{2}\right) \right. \\
& \left. + 8\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \sin\left(\pi\left(2-\frac{d}{2}\right)\right) f_{2-d/2}\left(\xi, \frac{1}{2}\right) \right]. \tag{5.78}
\end{aligned}$$

Como não há mais singularidades nessa expressão, podemos colocar  $d = 3$  e, usando (5.54), observamos o resultado final

$$I_{\delta\delta'} = \delta_{\delta\delta'} \frac{T^2}{2} [2F_2(\xi) + F_3(\xi)]. \tag{5.79}$$

Encerramos esta seção expondo os resultados explícitos para o termo tipo éter obtido com o uso desses três procedimentos de cálculo do  $I^{\delta\delta'}$  produzindo resultados (5.33), (5.53), (5.73) e (5.79) respectivamente. As expressões correspondentes para a função de dois pontos (incluindo tanto o termo éter e o termo invariante de Lorentz) são

$$S_{FF1} = -g^2 T^2 F_1(\xi) (2\vec{b}^2 F_{ij} F^{ij} - 4b^k F_{kj} b_i F^{ij});$$

$$\begin{aligned}
S_{FF2} &= -g^2 \left[ -\frac{m^2}{4\pi^2} (1 + 4F_2(\xi)) + 16T^2 F_3(\xi) \right] (2\vec{b}^2 F_{ij} F^{ij} - 4b^k F_{kj} b_i F^{ij}); \\
S_{FF3} &= g^2 \left[ -\frac{m^2}{16\pi^2} + \frac{T^2}{3} + \frac{T^2 \pi^2}{2} F_4(\xi) \right] (2b^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 4b^\mu F_{\mu\nu} b_\lambda F^{\lambda\nu}); \\
S_{FF4} &= g^2 \frac{T^2}{2} [2F_2(\xi) + F_3(\xi)] (2b^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 4b^\mu F_{\mu\nu} b_\lambda F^{\lambda\nu}). \tag{5.80}
\end{aligned}$$

Aqui, as funções  $F_1(\xi)$ ,  $F_2(\xi)$ ,  $F_3(\xi)$ , e  $F_4(\xi)$  podem ser observadas a partir das expressões (5.34), (5.54), (5.55), e (5.68), respectivamente. Concluimos esta seção com a afirmação de que cada um dos regimes implicava em um dos resultados apresentados em (5.80) sendo fisicamente consistente. No entanto, dentro do primeiro dos quatro planos, o resultado desaparece à temperatura zero, dentro do segundo só o espaço é semelhante onde  $b^\mu$  contribui para o resultado a temperatura zero (o que reflete o fato de que a introdução da temperatura finita quebra a simetria de Lorentz). Já terceiro, o resultado encontrado em [86] é naturalmente promovido para o caso com a presença de temperatura finita.

## 5.5 Contribuição Mínima

Agora, iremos concentrar nossa atenção para as correções tipo éter, essencialmente dependente de  $e$ . A correção de segunda ordem de violação de simetria de Lorentz no vetor  $b_\mu$  num setor puramente mínimo, onde  $g = 0$ , é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
S_{AA}(p) &= \frac{ie^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left( \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} \gamma_5 \not{b} \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} \gamma_5 \not{b} \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} + \right. \\
&+ \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \not{b} \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} \gamma_5 \not{b} \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} + \\
&\left. + \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \not{b} \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_5 \not{b} \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m} \right) A_\mu(-p) A_\nu(p), \tag{5.81}
\end{aligned}$$

onde,  $p$  é o momento externo. Vamos escrever

$$S(k+p) = \frac{1}{\not{k} + \not{p} - m}, \quad (5.82)$$

que pode ser expandida como

$$S(k+p) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\not{k} - m} \left( -\not{p} \frac{1}{\not{k} - m} \right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} S_i, \quad (5.83)$$

sendo

$$S_i \equiv \frac{1}{\not{k} - m} \left( -\not{p} \frac{1}{\not{k} - m} \right)^i. \quad (5.84)$$

A expressão da Eq.(5.81) pode ser escrita na forma

$$S_{AA}(p) = \frac{ie^2}{2} A_\mu(-p) A_\nu(p) \Pi^{\mu\nu}(p) + \mathcal{O}(p^3), \quad (5.85)$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p) = & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr}[\gamma^\mu S_0 \gamma_5 \not{b} S_0 \gamma_5 \not{b} S_0 \gamma^\nu (S_0 + S_1 + S_2) \\ & + \gamma^\mu S_0 \gamma_5 \not{b} S_0 \gamma^\nu (S_0 + S_1 + S_2) \gamma_5 \not{b} (S_0 + S_1 + S_2) \\ & + \gamma^\mu S_0 \gamma^\nu (S_0 + S_1 + S_2) \gamma_5 \not{b} (S_0 + S_1 + S_2) \gamma_5 \not{b} (S_0 + S_1 + S_2)]. \end{aligned} \quad (5.86)$$

As contribuições que nos interessam são quadráticas em  $p$ . Estes termos são finitos por contagem de potência, portanto, livre de ambiguidades. Após a expansão e o cálculo do traço, chegamos à seguinte expressão:  $\Pi^{\mu\nu} \rightarrow \Pi_1^{\mu\nu} + \Pi_2^{\mu\nu} + \Pi_3^{\mu\nu} + \Pi_4^{\mu\nu}$ , com os

$$\begin{aligned} \Pi_1^{\mu\nu} = & - \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{8}{(k_E^2 + m^2)^3} [(b_E \cdot p_E)^2 \delta^{\mu\nu} + (b_E \cdot p_E) p_E^\mu b_E^\nu + (b_E \cdot p_E) b_E^\mu p_E^\nu \\ & + p_E^2 b_E^\mu b_E^\nu + b_E^2 p_E^2 \delta^{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_2^{\mu\nu} = & \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^4} [-16m^2(b_E \cdot p_E)^2 \delta^{\mu\nu} + 32k_E^\mu k_E^\nu (b_E \cdot p_E)^2 + 32b_E^\mu b_E^\nu (p_E \cdot k_E)^2 \\
& + 24b_E^2 (p_E \cdot k_E)^2 \delta^{\mu\nu} + 16m^2 p_E^\mu b_E^\nu (b_E \cdot p_E) + 16m^2 b_E^\mu p_E^\nu (b_E \cdot p_E) \\
& + 48k_E^\mu p_E^\nu (b_E \cdot p_E)(b_E \cdot k_E) + 48p_E^\mu k_E^\nu (b_E \cdot p_E)(b_E \cdot k_E) + 48(b_E \cdot k_E)^2 p_E^2 \delta^{\mu\nu} \\
& - 16m^2 b_E^\mu b_E^\nu p_E^2 + 48m^2 b_E^2 p_E^2 \delta^{\mu\nu} + 24k_E^\mu k_E^\nu b_E^2 p_E^2 + 48k_E^\mu b_E^\nu (b_E \cdot k_E) p_E^2 \\
& + 48b_E^\mu k_E^\nu (b_E \cdot k_E) p_E^2 + 24k_E^\mu p_E^\nu (b_E \cdot k_E)^2 + 24p_E^\mu k_E^\nu b_E^2 (p_E \cdot k_E) \\
& + 64k_E^\mu b_E^\nu (b_E \cdot p_E)(p_E \cdot k_E) + 64b_E^\mu k_E^\nu (b_E \cdot p_E)(p_E \cdot k_E) + 48p_E^\mu b_E^\nu (b_E \cdot k_E)(p_E \cdot k_E) \\
& + 48b_E^\mu p_E^\nu (b_E \cdot k_E)(p_E \cdot k_E) + 96(b_E \cdot p_E)(b_E \cdot k_E)(p_E \cdot k_E) \delta^{\mu\nu}], \tag{5.88}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_3^{\mu\nu} = & - \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^5} [192(b_E \cdot k_E)^2 (p_E \cdot k_E)^2 \delta^{\mu\nu} + 192m^2 b_E^2 (p_E \cdot k_E)^2 \delta^{\mu\nu} \\
& + 128k_E^\mu k_E^\nu b_E^2 (p_E \cdot k_E)^2 + 256k_E^\mu b_E^\nu (b_E \cdot k_E)(p_E \cdot k_E)^2 \\
& + 256b_E^\mu k_E^\nu (b_E \cdot k_E)(p_E \cdot k_E)^2 + 192k_E^\mu k_E^\nu (b_E \cdot k_E)^2 p_E^2 + 192m^2 k_E^\mu k_E^\nu b_E^2 p_E^2 \\
& + 192k_E^\mu p_E^\nu (b_E \cdot k_E)^2 (p_E \cdot k_E) + 192p_E^\mu k_E^\nu (b_E \cdot k_E)^2 (p_E \cdot k_E) \\
& + 192m^2 k_E^\mu p_E^\nu b_E^2 (p_E \cdot k_E) + 192m^2 p_E^\mu k_E^\nu b_E^2 (p_E \cdot k_E) \\
& + 512k_E^\mu k_E^\nu (b_E \cdot p_E)(b_E \cdot k_E)(p_E \cdot k_E)], \tag{5.89}
\end{aligned}$$

$$\Pi_4^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1280}{(k_E^2 + m^2)^6} [k_E^\mu k_E^\nu (b_E \cdot k_E)^2 (p_E \cdot k_E)^2 + m^2 k_E^\mu k_E^\nu b_E^2 (p_E \cdot k_E)^2] \tag{5.90}$$

A fim de combater de uma forma eficaz a questão do comportamento da temperatura finita das expressões acima, podemos separar os componentes de espaço e tempo dos quadri-momentos  $k_E^\sigma = (k_0, \vec{k})$  onde  $k_E^\sigma \rightarrow \hat{k}^\sigma + k_0 \delta^{\sigma 0}$ , de modo que  $\hat{k}^\sigma = (0, \vec{k})$ . Além disso, devido à simetria da integral de rotação espacial, é possível utilizar as substituições,

$$\hat{k}^\alpha \hat{k}^\beta \rightarrow \frac{\hat{k}^2}{d} (\delta^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha 0} \delta^{\beta 0}) \tag{5.91}$$

e

$$\begin{aligned} \hat{k}^\alpha \hat{k}^\beta \hat{k}^\delta \hat{k}^\gamma \rightarrow & \frac{\hat{k}^4}{d(d+2)} [(\delta^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha 0} \delta^{\beta 0})(\delta^{\delta\gamma} - \delta^{\delta 0} \delta^{\gamma 0}) + (\delta^{\alpha\delta} - \delta^{\alpha 0} \delta^{\delta 0})(\delta^{\beta\gamma} - \delta^{\beta 0} \delta^{\gamma 0}) \\ & + (\delta^{\alpha\gamma} - \delta^{\alpha 0} \delta^{\gamma 0})(\delta^{\beta\delta} - \delta^{\beta 0} \delta^{\delta 0})]. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Estes procedimentos nos levam ao resultado

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = & A((b_E \cdot p_E)^2 \delta^{\mu\nu} + p_E^2 b_E^\mu b_E^\nu - (b_E \cdot p_E) b_E^\mu p_E^\nu - (b_E \cdot p_E) p_E^\mu b_E^\nu - b_E^2 p_E^2 \delta^{\mu\nu} + b_E^2 p_E^\mu p_E^\nu) \\ & + B(b_0^2 p_0^2 \delta^{\mu\nu} + b_0^2 p_E^2 \delta^{\mu 0} \delta^{\nu 0} - b_0^2 p_0 p_E^\mu \delta^{\nu 0} - b_0^2 p_0 \delta^{\mu 0} p_E^\nu) \\ & + C(b_E^2 p_0^2 \delta^{\mu\nu} + b_E^2 p_E^2 \delta^{\mu 0} \delta^{\nu 0} - b_E^2 p_0 \delta^{\mu 0} p_E^\nu - b_E^2 p_0 p_E^\mu \delta^{\nu 0}) \\ & + D(b_0^2 p_E^2 \delta^{\mu\nu} - b_0^2 p_E^\mu p_E^\nu), \end{aligned} \quad (5.93)$$

onde

$$A = -\frac{1}{3} 2^{3-d} m^2 \pi^{-\frac{d}{2}} \Gamma\left(4 - \frac{d}{2}\right) \int \frac{dk_0}{2\pi} (k_0^2 + m^2)^{\frac{d}{2}-4} \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} B = & -\frac{1}{3} 2^{1-d} \pi^{-\frac{d}{2}} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \int \frac{dk_0}{2\pi} (k_0^2 + m^2)^{\frac{d}{2}-5} \\ & \times (3m^4 + (d-5)k_0^2(6m^2 + (d-3)k_0^2)) \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$C = \frac{1}{3} 2^{2-d} m^2 \pi^{-\frac{d}{2}} \Gamma\left(4 - \frac{d}{2}\right) \int \frac{dk_0}{2\pi} (m^2 + k_0^2)^{\frac{d}{2}-5} (m^2 + (d-7)k_0^2) \quad (5.96)$$

$$D = -\frac{1}{3} 2^{2-d} \pi^{-\frac{d}{2}} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \int \frac{dk_0}{2\pi} (m^2 + k_0^2)^{\frac{d}{2}-4} (m^2 + (d-5)k_0^2). \quad (5.97)$$

Pode-se verificar que diretamente cada uma das quatro contribuições para a expressão (5.93) é proporcional a  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , e  $D$  respectivamente, e medimos a invariância separadamente. Portanto, a invariância de gauge será automaticamente mantida à temperatura finita. Se, então, calcularmos o  $k_0$  das integrais nestas expressões, obtemos  $A = -\frac{1}{6m^2\pi^2}$  e  $B = 0 = C = D$ , como esperado.

Estamos agora em condições de aplicar a temperatura finita através da aplicação do formalismo de Matsubara, que consiste na tomada  $k_0 = (n + 1/2)2\pi/\beta$  e mudando

$(1/2\pi) \int dk_0 \rightarrow 1/\beta \sum_n$ . Ao realizarmos os somatórios, obtemos

$$A = -\frac{1}{6m^2\pi^2} - \frac{1}{6m^2} \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{(\xi^2 - 2z^2)}{(z^2 - \xi^2)^{1/2}} \sec h^2(\pi z) \tanh(\pi z), \quad (5.98)$$

$$B = -C = \frac{1}{12m^2} \pi^2 \xi^2 \int_{|\xi|}^{\infty} dz (z^2 - \xi^2)^{1/2} \sec h^5(\pi z) (\sinh(3\pi z) - 11 \sinh(\pi z)), \quad (5.99)$$

$$D = \frac{1}{6m^2} \xi^2 \int_{|\xi|}^{\infty} dz (z^2 - \xi^2)^{-1/2} \sec h^2(\pi z) \tanh(\pi z). \quad (5.100)$$

Observa-se que, no limite de alta temperatura,  $\xi \rightarrow 0$ , todos os coeficientes acima desaparecem.

A contribuição para a ação efetiva, que corresponde a (5.93) com os coeficientes dependentes da temperatura  $A, B, C$ , e  $D$ , são idênticos a expressão

$$S_{AA} = A(2b^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 4b^\mu F_{\mu\nu} b_\lambda F^{\lambda\nu}) + B b_i^2 F_{0\mu} F^{0\mu} + D b_0^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (5.101)$$

Vemos que este resultado envolve, em primeiro lugar, o termo usual tipo éter, em segundo, o termo invariante Lorentz Maxwell acompanhado pelo multiplicador constante (que envolve tanto  $b^2$  e  $b_0^2$ ), terceiro, o termo  $F_{0\mu} F^{0\mu}$  que pode ser tratado como uma forma particular do termo éter correspondente ao caso em que o vetor  $b^\mu$  é dependente do espaço.

## 5.6 Contribuição Mínima, Não-Mínima

Agora, vamos considerar os diagramas de Feynman “misturados”, envolvendo ambos os acoplamentos mínimos e não-mínimos, e descrito na Fig.5.1. Da mesma forma com os cálculos de [106], aqui nós consideramos as inserções com violação de

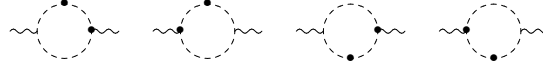


Figura 5.1: As contribuições para a função de dois pontos do campo vetorial.

Lorentz  $\not{b}\gamma_5$  introduzido tanto nos vértices quanto nos propagadores (ambas inserções são indicadas pelo símbolo  $\bullet$ ). Os cálculos não diferem essencialmente daqueles realizados em [87], uma vez que os loop das integrais e os traços são idênticos à soma (na verdade, a única diferença entre os papéis está relacionada com o fato de que em um dos vértices, em  $A_\mu$  do campo, é substituído pelo seu “similar”  $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}b^\nu F^{\lambda\rho}$ ). Como resultado, chegamos a

$$S_{AF} = eg \int d^4x I_\rho \epsilon^{\rho\nu\lambda\mu} (\epsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} F^{\alpha\beta} b^\gamma \partial_\lambda A_\mu + A_\nu \epsilon_{\mu\kappa\eta\sigma} \partial_\lambda F^{\kappa\eta} b^\sigma), \quad (5.102)$$

onde,  $I_\rho$  é um vetor constante cuja forma explícita é

$$I_\rho = 2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{b_\rho(k^2 + 3m^2) - 4k_\rho(b \cdot k)}{(k^2 - m^2)^3}, \quad (5.103)$$

pode ser calculado através de diferentes regimes de regularização (uma lista muito incompleta das abordagens para calcular este vetor, que é equivalente ao cálculo do termo Chern-Simons 4D pode ser encontrado em [33, 30, 42, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 107]). Então, vamos discutir este resultado na temperatura finita, pelo menos por dois métodos de cálculo, tendo um mero propósito de ilustrar a ambiguidade dos resultados para este vetor. Dentro de uma abordagem mais simples, podemos seguir a linha elaborada em [75] e repetir todos os cálculos realizados. Em [75], dois sistemas foram utilizados para obter  $I_\rho$ . Dentro do primeiro regime, trabalhamos com a expressão (5.103) e consideramos separadamente o tempo e as partes do espaço em  $b_\mu$ , que depois de simetrização correspondente obtemos,

$$I_0 = \frac{1}{4} b_0;$$



$$I_i = \frac{1}{4}b_i \left[ \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2}F_5(\xi) \right], \quad (5.104)$$

onde  $\xi = \frac{m}{2\pi T}$ , e a função  $F_5(\xi)$  foi discutida com detalhes em [75] e obtemos

$$F_5(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz (z^2 - \xi^2)^{1/2} \operatorname{sech}^2(\pi z) \tanh(\pi z). \quad (5.105)$$

Dentro de outro esquema, impõem-se, em primeiro lugar a simetria esférica, fazendo a substituição  $k_\rho k^\nu \rightarrow \frac{1}{4}\delta_\rho^\nu k^2$  em (5.103) que permite a reescrever (5.103) como

$$I_\rho = 6ib_\rho \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^3}, \quad (5.106)$$

que os rendeu

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{3}{16}b_0 \left[ \frac{1}{2\pi^2} + F_5(\xi) \right]; \\ I_i &= \frac{3}{16}b_i \left[ \frac{1}{2\pi^2} + F_5(\xi) \right]. \end{aligned} \quad (5.107)$$

Então, dentro dessa abordagem o vetor  $I_\mu$  é proporcional a  $b_\mu$  assim como no caso da temperatura zero.

Mais detalhes destes cálculos podem ser encontrados em [75]. Em princípio, pode-se, em alternativa, seguir a abordagem desenvolvida em [76] com base no formalismo proposto por [57], e obtemos mais possibilidades para esses vetores (notamos que esta lista de desenvolvimento de cálculo não é exaustiva, e, em princípio, outros valores para o vetor  $I^\mu$  podem ser encontrados). Assim, demonstramos que esta fonte para a ambiguidade do termo éter ainda trabalha na temperatura finita.

Resta substituir esses valores referentes a  $I_\mu$  na expressão, (5.102) para o termo de éter. Após a contração dos dois símbolos de Levi-Civita, tem-se

$$S_{AF} = eg \int d^4x \left[ 2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(b \cdot I) - 4F^{\alpha\beta}F_{\alpha\gamma}I_\beta b^\gamma \right], \quad (5.108)$$

onde a temperatura dependente do vetor  $I_\beta$  é ambígua, em alguns esquemas de cálculo que acaba sendo proporcional ao vetor  $b^\mu$  e pode ser lida a partir das expressões (5.104) ou (5.107), dependendo do esquema de cálculos que nós escolhemos. O primeiro, termo da invariância de Lorentz também é ambíguo. Por isso nós demonstramos a finitude e ambiguidade para a contribuição do termo éter a partir deste setor. Para concluirmos nosso estudo, podemos constatar que o resultado completo para o termo tipo éter como no caso de temperatura finita é representado por uma soma das contribuições em (5.80) com a expressão (5.101) e o resultado (5.108) na formulação em (5.104) ou a forma (5.107) do vetor  $I_\mu$  sendo usado. Portanto, concluímos que o termo tipo éter como no caso da temperatura finita possui duas ambiguidades, bem como no caso da temperatura zero.

# Capítulo 6

## Considerações Finais e Perspectivas

Estudamos nesta tese, a geração através de correções radiativas do termo de Chern-Simons de derivada superior, assim como do termo tipo éter, ambos à temperatura finita e em 3+1 dimensões. Também, dentro do contexto dos termos de Chern-Simons, estudamos a questão da invariância da ação sob transformação de gauge ampla. Com relação ao termo tipo éter, constatamos que ele é ambíguo à temperatura finita, assim como o cálculo à temperatura zero.

No Capítulo 2, introduzimos de forma sucinta a EDQ estendida, que serviu de base para os cálculos seguintes relacionados com a indução dos termos com violação de simetria de Lorentz e de CPT.

Discutimos, inicialmente, no Capítulo 3 a geração através de correções radiativas do termo de Chern-Simons 4D, à temperatura finita. O procedimento adotado, de certa forma, serviu como base para os demais cálculos realizados nesta tese. No final do Capítulo, apresentamos o cálculo da indução do termo de Chern-Simons de

derivada superior, à temperatura finita. O resultado obtido corrobora os resultados encontrados anteriormente, com relação ao limite de altas temperaturas, no qual os termos de derivada superior se anulam. Foram realizadas estimativas numéricas sobre o coeficiente  $b_\mu$ , as quais ficaram dentro da sensibilidade máxima.

No capítulo 4, analisamos a questão da invariância de gauge ampla. Para isso, averiguamos que a ação de Chern-Simons e a ação de Chern-Simons de derivada superior são ambas invariantes sob transformação de gauge ampla. Neste Capítulo, com o intuito de ganharmos mais conhecimento sobre o assunto, inicialmente, realizamos uma resumida, contudo, esclarecedora discussão sobre a invariância de gauge ampla em modelos 1D e 3D.

Finalmente, no Capítulo 5, após realizarmos a geração do termo tipo éter à temperatura finita, observamos que o cálculo é ambíguo, assim como o estudo à temperatura zero. Contudo, no início discutimos a questão com base no termo de Chern-Simons, observando que quando temos divergências lineares, fatalmente o cálculo sofrerá com essa indeterminação.

Perspectivas do nosso trabalho serão o estudo de termos com violação de simetria de Lorentz não lineares, tais como a investigação da indução de correções de ordem superior ao termo de Chern-Simons. Na verdade seria estudar os termos não lineares relacionados com a ação de Euler-Heisenberg, contudo, com violação de simetria de Lorentz e de CPT. Em teorias 3D, esse estudo foi realizado em [74], o qual foi gerado um termo semelhante ao Chern-Simons, contudo, com derivadas a mais.

Também propomos estudar a indução do termo de Chern-Simons gravitacional 4D [39], contudo, olhando para os efeitos de temperatura finita. Estudos dessa

natureza já foram efetuados à temperatura zero [106], todavia, à temperatura finita, nunca foram considerados. Inclusive, recentemente, foi argumentado que essa seria uma maneira factível de calcularmos experimentalmente a anomalia gravitacional, através dos semimetais de Weyl [108].

Para finalizarmos, estamos interessados em analisar a questão da não analiticidade do coeficiente do termo de Chern-Simons, à temperatura finita. Na verdade, iremos observar se o coeficiente possui o mesmo comportamento, quando tomamos os limites  $(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0)$  ou  $(\vec{k} = 0, k_0 \rightarrow 0)$ . Acreditamos que os comportamentos do coeficiente, em função da temperatura, não serão os mesmos, caracterizando assim a não analiticidade. Em teorias 3D, esse estudo foi realizado em [109].

# Referências Bibliográficas

- [1] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997), hep-ph/9703464.
- [2] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998) [hep-ph/9809521].
- [3] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. D **40**, 1886 (1989).
- [4] V. A. Kostelecky and R. Potting, Nucl. Phys. B **359**, 545 (1991).
- [5] V. A. Kostelecky, “CPT and Lorentz symmetry. Proceedings: 1nd Meeting, Bloomington, USA, 1999”.
- [6] V. A. Kostelecky, “CPT and Lorentz symmetry. Proceedings: 2nd Meeting, Bloomington, USA, 2001”.
- [7] V. A. Kostelecky, “CPT and Lorentz symmetry. Proceedings: 3rd Meeting, Bloomington, USA, 2004”.
- [8] V. A. Kostelecky, “CPT and Lorentz symmetry. Proceedings: 4nd Meeting, Bloomington, USA, 2007”.

- [9] V. A. Kostelecky, “CPT and Lorentz symmetry. Proceedings: 5nd Meeting, Bloomington, USA, 2010”.
- [10] V. A. Kostelecky, “CPT and Lorentz symmetry. Proceedings: 6th Meeting, Bloomington, USA, 2013”.
- [11] V. A. Kostelecky and N. Russell, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 11 (2011) [arXiv:0801.0287 [hep-ph]].
- [12] J. Leite, T. Mariz and W. Serafim, *J. Phys. G* **40**, 075003 (2013).
- [13] T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and W. Serafim, *Phys. Rev. D* **90**, no. 4, 045015 (2014) [arXiv:1406.2873 [hep-th]].
- [14] G. Gazzola, H. G. Fargnoli, A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio and M. C. Nemes, *J. Phys. G* **39**, 035002 (2012), hep-ph/10123291.
- [15] A. P. Baeta Scarpelli, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, *Eur. Phys. J. C* **73**, 2526 (2013), hep-ph/13042256.
- [16] D. Bear, R. E. Stoner, R. L. Walsworth, V. A. Kostelecky and C. D. Lane, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5038 (2000) [*Phys. Rev. Lett.* **89**, 209902 (2002)] [physics/0007049].
- [17] D. F. Phillips, M. A. Humphrey, E. M. Mattison, R. E. Stoner, R. F. C. Vessot and R. L. Walsworth, *Phys. Rev. D* **63**, 111101 (2001) [physics/0008230].
- [18] H. Dehmelt, R. Mittleman, R. S. van Dyck, Jr. and P. Schwinberg, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4694 (1999) [hep-ph/9906262].

- [19] R. K. Mittleman, I. I. Ioannou, H. G. Dehmelt and N. Russell, Phys. Rev. Lett. **83**, 2116 (1999).
- [20] R. Bluhm, V. A. Kostelecky and N. Russell, Phys. Rev. Lett. **82**, 2254 (1999) [hep-ph/9810269].
- [21] S. Liberati and L. Maccione, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **59**, 245 (2009) [arXiv:0906.0681 [astro-ph.HE]].
- [22] R. Lehnert, In \*Di Domenico, A. (ed.): Handbook on neutral kaon interferometry at a Phi-factory\* 131-154 [hep-ph/0611177].
- [23] Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002) [hep-ph/0201258].
- [24] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. D **39**, 683 (1989), hep-ph/101103.
- [25] L. Fonda and G. C. Ghirardi, Symmetry Principles in Quantum Physics (Marcel Dekker Inc., 1970).
- [26] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos, and M. T. D. Orlando, Violação da Simetria de Lorentz, Revista Brasileira de Ensino de Física 29, 5764 (2007).
- [27] D. Colladay and P. McDonald, J. Math. Phys. **43**, 3554 (2002) [hep-ph/0202066].
- [28] H. Weyl, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. ) **1918**, 465 (1918).
- [29] V. Fock, Z. Phys. **39**, 226 (1926) [Surveys High Energ. Phys. **5**, 245 (1986)].
- [30] M. Perez-Victoria, Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999) [hep-th/9905061].



- [31] F. A. Brito, L. S. Grigorio, M. S. Guimaraes, E. Passos and C. Wotzasek, Phys. Rev. D **78**, 125023 (2008) [arXiv:0810.3180 [hep-th]].
- [32] W. F. Chen, AIP Conf. Proc. **601**, 242 (2001) [hep-th/0106035].
- [33] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999) [hep-ph/9901358].
- [34] P. Goswami and S. Tewari, Phys. Rev. B **88**, no. 24, 245107 (2013) [arXiv:1210.6352 [cond-mat.mes-hall]].
- [35] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [36] R. Jackiw, “When radiative corrections are finite but undetermined,” Int. J. Mod. Phys. B **14**, 2011 (2000), hep-th/9903044.
- [37] L. H. Ryder, Cambridge, Uk: Univ. Pr. ( 1985) 443p
- [38] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p
- [39] R. Jackiw and S. Y. Pi, Phys. Rev. D **68**, 104012 (2003) [gr-qc/0308071].
- [40] R. Jackiw, “Four-dimensional Einstein theory extended by a three-dimensional Chern-Simons term,” gr-qc/0310115.
- [41] S. M. Carroll and G. B. Field, Phys. Rev. Lett. **79**, 2394 (1997) [astro-ph/9704263].
- [42] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Phys. Lett. B **513**, 245 (2001) [hep-th/0105037].

- [43] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **67**, 085021 (2003).
- [44] J. Leite and T. Mariz, Europhys. Lett. **99**, 21003 (2012), hep-ph/11102127.
- [45] D. Bazeia, T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos and R. F. Ribeiro, J. Phys. A **36**, 4937 (2003) [hep-th/0303122].
- [46] J. M. Chung and P. Oh, Phys. Rev. D **60**, 067702 (1999) [hep-th/9812132].
- [47] S. R. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999) [hep-ph/9812418].
- [48] J. M. Chung, Phys. Rev. D **60**, 127901 (1999) [hep-th/9904037].
- [49] W. F. Chen, Phys. Rev. D **60**, 085007 (1999) [hep-th/9903258].
- [50] J. M. Chung, Phys. Lett. B **461**, 138 (1999) [hep-th/9905095].
- [51] G. Bonneau, Nucl. Phys. B **593**, 398 (2001) [hep-th/0008210].
- [52] Y. A. Sitenko, Phys. Lett. B **515**, 414 (2001) [hep-th/0103215].
- [53] M. Chaichian, W. F. Chen and R. Gonzalez Felipe, Phys. Lett. B **503**, 215 (2001) [hep-th/0010129].
- [54] J. M. Chung and B. K. Chung, Phys. Rev. D **63**, 105015 (2001) [hep-th/0101097].
- [55] Y. L. Ma and Y. L. Wu, Phys. Lett. B **647**, 427 (2007) [hep-ph/0611199].
- [56] A. A. Andrianov, P. Giacconi and R. Soldati, JHEP **0202**, 030 (2002) [hep-th/0110279].

- [57] L. Cervi, L. Griguolo and D. Seminara, Phys. Rev. D **64**, 105003 (2001) [hep-th/0104022].
- [58] D. Ebert, V. C. Zhukovsky and A. S. Razumovsky, Phys. Rev. D **70**, 025003 (2004) [hep-th/0401241].
- [59] J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro and N. F. Svaiter, hep-th/0012039.
- [60] A. J. Buras, hep-ph/9806471.
- [61] L. H. Ford, Phys. Rev. D **21**, 933 (1980).
- [62] T. Mariz, “Radiatively induced Lorentz-violating operator of mass dimension five in QED,” Phys. Rev. D **83**, 045018 (2011), hep-ph/10105013.
- [63] A. K. Das and M. B. Hott, Phys. Rev. D **50**, 6655 (1994) [hep-ph/9407283].
- [64] G. V. Dunne, K. M. Lee and C. h. Lu, Phys. Rev. Lett. **78**, 3434 (1997) [hep-th/9612194].
- [65] F. Bonetti, T. W. Grimm and S. Hohenegger, JHEP **1307**, 043 (2013) [arXiv:1302.2918 [hep-th]].
- [66] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Annals Phys. **140**, 372 (1982) [Annals Phys. **185**, 406 (1988)] [Annals Phys. **281**, 409 (2000)].
- [67] C. R. Hagen, Annals Phys. **157**, 342 (1984).
- [68] S. Deser, L. Griguolo and D. Seminara, Phys. Rev. Lett. **79**, 1976 (1997) [hep-th/9705052].

- [69] S. Deser, L. Griguolo and D. Seminara, Phys. Rev. D **57**, 7444 (1998) [hep-th/9712066].
- [70] C. Fosco, G. L. Rossini and F. A. Schaposnik, Phys. Rev. Lett. **79**, 1980 (1997) [Phys. Rev. Lett. **79**, 4296 (1997)] [hep-th/9705124].
- [71] C. D. Fosco, G. L. Rossini and F. A. Schaposnik, Phys. Rev. D **56**, 6547 (1997) [hep-th/9707199].
- [72] I. J. R. Aitchison and C. D. Fosco, Phys. Rev. D **57**, 1171 (1998) [hep-th/9709035].
- [73] F. T. Brandt, A. K. Das and J. Frenkel, Phys. Rev. D **62**, 085012 (2000) [hep-ph/0005150].
- [74] F. T. Brandt, A. K. Das, J. Frenkel, S. Pereira and J. C. Taylor, Phys. Rev. D **64**, 065018 (2001) [hep-th/0103221].
- [75] M. Gomes, J. R. Nascimento, E. Passos, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, Phys. Rev. D **76**, 047701 (2007) [arXiv:0704.1104 [hep-th]].
- [76] J. R. Nascimento, E. Passos, A. Y. Petrov and F. A. Brito, JHEP **0706**, 016 (2007) [arXiv:0705.1338 [hep-th]].
- [77] S. Carroll, G. Field, and R. Jackiw, Limits on a Lorentz and parity violating modification of electrodynamics Phys Rev D **41**12311990.
- [78] M. Goldhaber and V. Trimble, Limits on the chirality of interstellar and intergalactic space J Astrophys Astr **17**171996; S. Carroll and G. Field, Limits

- there evidence for cosmic anisotropy in the polarization of distant radio sources? Phys Rev Lett **79**2341997.
- [79] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Topologically Massive Gauge Theories Ann Phys (NY) **140**3721982; (E) vpy1854061988.
- [80] D. Colladay and V. Kostelecky, Lorentz violating extension of the standard model Phys Rev D **58**1160021998.
- [81] S. Coleman and S. Glashow, “High-energy tests of Lorentz invariance” (Harvard University preprint, hep-ph/9812418v3); see also A. Andrianov, R. Soldati, and L. Sorbo, Dynamical Lorentz symmetry breaking from 3+1 axion-uc Wess-uc Zumino model Phys Rev D **59**0250021999.
- [82] J.-M. Chung and P. Oh, “Lorentz and CPT violating in the derivative expansion of QED” (MIT preprint, hep-th/9812132v3).
- [83] R. Jackiw and V. Kostelecky, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics” (Indiana, MIT preprint; hep-ph/9901358).
- [84] M. Peskin and D. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory (Addison-Wesley, Reading MA, 1995), p. 661.
- [85] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002) [hep-ph/0201258].
- [86] M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, Phys. Rev. D **81**, 045018 (2010) [arXiv:0911.3548 [hep-th]].
- [87] R. C. Myers and M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. **90**, 211601 (2003), hep-ph/0301124.

- [88] C. M. Reyes, L. F. Urrutia and J. D. Vergara, Phys. Rev. D **78**, 125011 (2008) [arXiv:0810.5379 [hep-ph]].
- [89] C. M. Reyes, Phys. Rev. D **82**, 125036 (2010) [arXiv:1011.2971 [hep-ph]].
- [90] C. M. Reyes, Phys. Rev. D **87**, no. 12, 125028 (2013) [arXiv:1307.5340 [hep-th]].
- [91] V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004) [hep-th/0312310].
- [92] S. M. Carroll and H. Tam, Phys. Rev. D **78**, 044047 (2008) [arXiv:0802.0521 [hep-ph]].
- [93] V. Santos and C. A. S. Almeida, Phys. Lett. B **718**, 1114 (2013) [arXiv:1211.4542 [hep-th]].
- [94] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira, Jr. and J. A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C **41**, 421 (2005) [hep-th/0410104].
- [95] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira, Jr. and J. A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C **42**, 127 (2005) [hep-th/0411151].
- [96] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira, Jr., J. A. Helayel-Neto and F. M. O. Mouchereck, Phys. Rev. D **74**, 065009 (2006) [hep-th/0604149].
- [97] H. Belich, L. P. Colatto, T. Costa-Soares, J. A. Helayel-Neto and M. T. D. Orlando, Eur. Phys. J. C **62**, 425 (2009) [arXiv:0806.1253 [hep-th]].
- [98] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr and C. E. H. Santos, Phys. Rev. D **78**, 105014 (2008) [arXiv:0810.2817 [hep-th]].

- [99] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr, J. S. Rodrigues and M. R. O. Silva, Phys. Rev. D **80**, 085026 (2009) [arXiv:0907.1924 [hep-th]].
- [100] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr, A. R. Gomes and P. R. D. Pinheiro, Phys. Rev. D **80**, 125040 (2009) [arXiv:0909.0544 [hep-th]].
- [101] F. R. Klinkhamer and M. Schreck, Nucl. Phys. B **848**, 90 (2011) [arXiv:1011.4258 [hep-th]].
- [102] M. Schreck, Phys. Rev. D **86**, 065038 (2012) [arXiv:1111.4182 [hep-th]].
- [103] R. Casana, E. S. Carvalho and M. M. Ferreira, Jr, Phys. Rev. D **84**, 045008 (2011) [arXiv:1107.2664 [hep-th]].
- [104] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr and R. P. M. Moreira, Phys. Rev. D **84**, 125014 (2011) [arXiv:1108.6193 [hep-th]].
- [105] M. S. Guimaraes, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and C. Wotzasek, Europhys. Lett. **95**, 51002 (2011) [arXiv:1010.3666 [hep-th]].
- [106] T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, Phys. Rev. D **85**, 125003 (2012) [arXiv:1111.0198 [hep-th]].
- [107] Y. A. Sitenko and K. Y. Rulik, Eur. Phys. J. C **28**, 405 (2003) [hep-th/0212007].
- [108] M. N. Chernodub, A. Cortijo, A. G. Grushin, K. Landsteiner and M. A. H. Vozmediano, Phys. Rev. B **89**, no. 8, 081407 (2014), hep-th/13110878.
- [109] Y. C. Kao and M. F. Yang, Phys. Rev. D **47**, 730 (1993).

- [110] M. Perez-Victoria, JHEP **0104**, 032 (2001), hep-th/0102021.
- [111] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **80**, 015020 (2009) [arXiv:0905.0031 [hep-ph]].
- [112] A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **85**, 096005 (2012) [arXiv:1112.6395 [hep-ph]].
- [113] P. Horava, Phys. Rev. **D79**, 084008 (2009), hep-ph/09013775.
- [114] F. A. Brito, M. L. F. Freire and W. Serafim, Eur. Phys. J. C **74**, no. 12, 3202 (2014) [arXiv:1411.5656 [hep-th]].
- [115] R. Gambini and J. Pullin, Phys. Rev. D **59**, 124021 (1999), gr-qc/9809038.
- [116] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl and L. F. Urrutia, Phys. Rev. D **65**, 103509 (2002), hep-th/0108061.
- [117] D. Sudarsky, L. Urrutia and H. Vucetich, Phys. Rev. Lett. **89**, 231301 (2002), gr-qc/0204027.
- [118] P. A. Bolokhov, S. Nibbelink Groot and M. Pospelov, Phys. Rev. D **72** (2005) 015013, hep-ph/0505029.
- [119] P. A. Bolokhov and M. Pospelov, Phys. Rev. D **77** (2008) 025022, hep-ph/0703291.
- [120] F. A. Brito, M. S. Guimaraes, E. Passos, P. Sampaio and C. Wotzasek, Phys. Rev. D **86**, 105036 (2012) [arXiv:1210.2369 [hep-th]].
- [121] I. J. R. Aitchison and C. M. Fraser, Phys. Rev. D **31**, 2605 (1985).



- [122] C. M. Fraser, *Z. Phys. C* **28**, 101 (1985).
- [123] A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, V. A. Novikov and M. A. Shifman, *Sov. J. Nucl. Phys.* **39**, 77 (1984) [*Yad. Fiz.* **39**, 124 (1984)].
- [124] K. S. Babu, A. K. Das and P. Panigrahi, *Phys. Rev. D* **36**, 3725 (1987).
- [125] C. Adam and F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001) [hep-ph/0101087].
- [126] H. Belich, Jr., M. M. Ferreira, Jr., J. A. Helayel-Neto and M. T. D. Orlando, [*Phys. Rev. D* **69**, 109903 (2004)] [hep-th/0212330].
- [127] T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos, R. F. Ribeiro and F. A. Brito, *JHEP* **0510**, 019 (2005) [hep-th/0509008].
- [128] S. S. Chern and J. Simons, *Ann. Math.* **99**, 48 (1974).
- [129] *Topological Aspects of Low Dimensional Systems*, Les Houches Summer School, 1998.
- [130] A. N. Redlich, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 18 (1984).
- [131] A. N. Redlich, *Phys. Rev. D* **29**, 2366 (1984).
- [132] E. Witten, *Phys. Lett. B* **117**, 324 (1982).
- [133] S. R. Coleman and B. R. Hill, *Phys. Lett. B* **159**, 184 (1985).
- [134] E. R. Poppitz, *Phys. Lett. B* **252**, 417 (1990).
- [135] I. J. R. Aitchison, C. D. Fosco and J. A. Zuk, *Phys. Rev. D* **48**, 5895 (1993).

- 
- [136] F. T. Brandt, A. K. Das and J. Frenkel, “Parity breaking electromagnetic interactions in thermal QED(3),” hep-ph/0004195.