UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA UFBA-UFAL

ADINA ROCHA DOS SANTOS

ESPECTRO DO LAPLACIANO PONDERADO E HIPERSUPERFÍCIES EM *GRADIENT RICCI SOLITONS*

Maceió

2016

ADINA ROCHA DOS SANTOS

ESPECTRO DO LAPLACIANO PONDERADO E HIPERSUPERFÍCIES EM *GRADIENT RICCI SOLITONS*

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática UFBA-UFAL da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva

Maceió

2016

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S237t Santos, Adina Rocha dos.
Espectro do laplaciano ponderado e hipersuperfícies em gradient Ricci solitons / Adina Rocha dos Santos. – 2016.
78 f. : il.

Orientador: Hilário Alencar da Silva.
Tese (doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Doutorado Interinstitucional em Matemática UFBA/UFAL. Maceió, 2011.

Bibliografia: f. 75-78.

1. Espectro essencial. 2. Operador laplaciano ponderado. 3. Hipersuperfície – Crescimento de volume. 4. Curvatura média. 5. Índice de f-estabilidade. I. Título.

CDU: 514.764.27

AUTORA: ADINA ROCHA DOS SANTOS

Espectro do Laplaciano Ponderado e Hipersuperfícies em *Gradient Ricci Solitons*

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, aprovada ao 01 dia do mês de agosto do ano de 2016.

Dr. Hilário Alencar da Silva, UFAL (Orientador)

Banca Examinadora:

Dr. Detang Zhou, UFF (Examinador Externo)

Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório, UFAL

Dr. Gregório Manoel da Silva Neto, UFAL

Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa, UFC (Examinador Externo)

A Deus, meu criador.
Aos meus queridos pais Ahilud e Francisco.
A minha irmã Flávia Adaís.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Hilário Alencar pelo apoio e incentivo, por sua orientação durante o Doutorado; pelas conversas e discussões, as quais contribuíram de forma significativa em minha formação acadêmica e profissional, principalmente, por mostrar as possíveis saídas em momentos complicados.

Sou grata ao professor Detang Zhou da Universidade Federal Fluminense (UFF) por discutir e levantar possíveis problemas matemáticos durante minhas visitas a UFF, em Niterói; alguns dos quais foram resolvidos e estão presentes nesta Tese.

Agradeço ao professor Gregório Pacelli Bessa da Universidade Federal do Ceará (UFC) por dar sugestões que melhoram alguns resultados presentes nesta tese.

A CAPES pelo suporte financeiro ao longo de todo o curso de Doutorado.

"E conhecereis a verdade e a verdade vos libertará."
(João 8:32)

RESUMO

Obtemos estimativas superiores do ínfimo do espectro essencial do operador Laplaciano ponderado de variedades ponderadas não compactas e completas, assumindo condições de crescimento de volume ponderado. Além disso, encontramos exemplos onde ocorre a igualdade em tais estimativas. Como uma aplicação, estimamos a curvatura média ponderada de hipersuperfícies imersas isometricamente em variedades ponderadas com índice de f-estabilidade finito. Mostramos ainda que dada uma hipersuperfície imersa isometricamente em um *gradient shrinking Ricci soliton* com curvatura média ponderada constante, volume ponderado finito e satisfazendo mais algumas condições, tem índice de f-estabilidade maior que ou igual a dois.

Palavras-chaves: Espectro Essencial; Laplaciano Ponderado; Crescimento de Volume; Estimativa; Curvatura Média; Índice.

ABSTRACT

We obtain upper estimates to the greatest lower bound of the essential spectrum of weighted Laplacian operator of non-compact weighted manifold under assumptions of the weighted volume growth. Furthermore, we find examples where the equality occurs in the estimates obtained. As a consequence, we give estimates for the weighted mean curvature of complete noncompact hypersurfaces into weighted manifold with with finite index f-stability. Although we show that given a hypersurface isometrically immersed in a Ricci soliton gradient weighted with constant weighted mean curvature, finite weighted volume and satisfying more some conditions, has index of f-stability greater than or equal to two.

Keywords: Essential Spectrum; Weighted Laplacian; Volume growth; Estimate; Mean Curvature; Index.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – A função χ_r com suporte compacto em $M \setminus \Omega$. 31
Figura 2 – A função h_j. 32
Figura 3 – A função $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. 36
Figura 4 – A função $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. 40

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **10**

2 PRELIMINARES E NOTAÇÕES **21**

2.1 Variedade Riemanniana, Curvatura de Ricci, Laplaciano 21

2.2 Curvatura de Ricci Bakry-Émery e Laplaciano Ponderado 24

2.3 Alguns Resultados Espectrais para o Laplaciano Ponderado 26

3 ESTIMATIVAS DO ÍNFIMO DO ESPECTRO ESSENCIAL **30**

3.1 Estimativa 1 30

3.2 Estimativa 2 38

3.3 Aplicação 42

4 OPERADOR f-ESTABILIDADE E ÍNDICE DE f-ESTABILIDADE **47**

5 ESTIMATIVAS PARA CURVATURA MÉDIA PONDERADA **52**

6 *GRADIENT RICCI SOLITON* **60**

6.1 Subvariedade Própria e Volume Ponderado Finito 60

6.2 Índice de f-estabilidade de hipersuperfície 65

Referências **75**

1 INTRODUÇÃO

O L^2-espectro do operador Laplaciano, denotado por $\sigma(-\Delta)$, tem sido analisado e computado para uma grande classe de variedades não compactas e completas. Por exemplo, assumindo que a variedade não compacta e completa tem curvatura de Ricci não negativa e crescimento de volume Euclidiano, foi provado por Donnelly (DONNELLY, 1997) que o espectro essencial do operador Laplaciano $\sigma_{ess}(-\Delta)$ deve ser $[0,+\infty)$. É clássico que o espectro essencial do operador Laplaciano em variedade compacta é vazio, e assim, seu L^2-espectro é discreto.

Dado que o L^2-espectro do operador Laplaciano para uma classe de variedades não compactas e completas é essencial, torna-se importante estimar o ínfimo do espectro essencial de $-\Delta$, denotado por $\inf \sigma_{ess}(-\Delta)$, de variedades não compactas e completas. Existem muitos resultados interessantes sobre espectro essencial e estimativas para $\inf \sigma_{ess}(-\Delta)$ de variedades não compactas e completas, a saber, (CHENG, 1975), (PINSKY, 1978), (PINSKY, 1979), (DONNELLY; LI, 1979), (BROOKS, 1981), (BROOKS, 1984), (ESCOBAR, 1986), (ESCOBAR; FREIRE, 1992), (ZHOU, 1994), (HIGUCHI, 2001) e (LI; WANG, 2002).

O problema de estimar o $\inf \sigma_{ess}(-\Delta)$ de variedade não compactas e completas M sob suposições geométricas simples tem sido intensamente estudado ao longo destas últimas décadas. Por exemplo, Donnelly (DONNELLY, 1981) provou que

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta) \leq (n-1)^2 k/4$$

para variedades com curvatura de Ricci limitada inferiormente pela constante $-(n-1)k$, onde $n = \dim M$ e $k \geq 0$.

Em (BROOKS, 1981) e (BROOKS, 1984), Brooks generalizou a estimativa obtida por Donnelly. De fato, ele mostrou que se M tem volume infinito, então

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta) \leq \bar{\mu}_v^2/4,$$

onde $\bar{\mu}_v = \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{Vol}(B_r)$; e se M tem volume finito,

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta) \leq \bar{\mu}_w^2/4,$$

onde $\bar{\mu}_w = \limsup_{r\to\infty} \frac{-1}{r} \log(\mathrm{Vol}(M) - \mathrm{Vol}(B_r))$. Mais tarde, Higuchi (HIGUCHI, 2001) melhorou as estimativas de Brooks.

Em muitas ocasiões, é natural considerar ao longo de uma variedade Riemanniana (M^n, g) uma estrutura adicional de medida ponderada $e^{-f} d\sigma$, onde f é uma função suave em M, chamada *função potencial*, e $d\sigma$ é o elemento de volume induzido pela métrica $g = \langle\, , \rangle$. As variedades Riemannianas, munidas com medidas ponderadas, surgem naturalmente como resultado do limite Gromov-Hausdorff de sequências colapsadas (ver Cheeger e Colding (CHEEGER; COLDING, 1997), (CHEEGER; COLDING, 2000a), (CHEEGER; COLDING, 2000b) e Fukaya (FUKAYA, 1987)) e também desempenham um papel essencial nos trabalhos de Hamilton (HAMILTON, 1982) sobre fluxo de Ricci.

Uma *variedade ponderada* é uma tripla $M_f^n = (M^n, g, e^{-f}d\sigma)$. O *operador Laplaciano ponderado* Δ_f, definido por

$$\Delta_f u := \Delta u - \langle \nabla f, \nabla u \rangle,$$

está associado a $e^{-f}d\sigma$ bem como Δ está associado a $d\sigma$. Além disso, Δ_f é um operador autoadjunto e positivo no espaço L_f^2 das funções quadrado integráveis em M com respeito a medida $e^{-f}d\sigma$, e logo, o L_f^2-espectro de $-\Delta_f$ em M, denotado por $\sigma(-\Delta_f)$, é um subconjunto de $[0, +\infty)$.

O espectro de Δ_f pode ser decomposto na união disjunta $\sigma_d(-\Delta_f) \cup \sigma_{ess}(-\Delta_f)$, onde $\sigma_d(-\Delta_f)$ é o conjunto de autovalores isolados com multiplicidade finita, chamado *espectro discreto*, e seu complemento $\sigma_{ess}(-\Delta_f)$, chamado *espectro essencial*, é o conjunto de autovalores com multiplicidade infinita e pontos de acumulação do espectro.

Seja B_r a bola geodésica de M centrada em um ponto fixado $o \in M$ e raio $r > 0$. O *volume ponderado* de B_r é dado por

$$\mathrm{Vol}_f(B_r) = \int_{B_r} e^{-f}d\sigma$$

e o *volume ponderado* de M é definido por

$$\mathrm{Vol}_f(M) = \int_M e^{-f}d\sigma.$$

O primeiro objetivo desta tese é dar estimativas para $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f)$ para variedades não compactas e completas em função do crescimento de volume ponderado das bolas e esferas geodésicas. A seguir, enunciamos nossos principais resultados.

Teorema 1.1. *Seja M_f uma variedade ponderada não compacta e completa.*

(i) *Se* $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$*, então*

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \frac{\mu_v^2}{4},$$

onde $\mu_v = \liminf_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{Vol}_f(B_r).$

(ii) *Se* $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$*, então*

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \frac{\mu_w^2}{4}, \tag{1.1}$$

onde $\mu_w = \liminf_{r \to \infty} \frac{-1}{r} \log(\mathrm{Vol}_f(M) - \mathrm{Vol}_f(B_r)).$

Além disso, se $M_f = (\mathbb{R}^n, g, e^{-f}d\sigma)$ *com*

$$f = \frac{r}{2} \quad e \quad g = dr^2 + \lambda^2(r)d\theta^2,$$

tal que $\lambda : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função suave não negativa satisfazendo*

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda'(0) = 1 \quad e \quad \lambda(r) = e^{-\frac{r}{2(n-1)}} \quad para \ \ todo \ r \geq r_0 > 0, \tag{1.2}$$

então ocorre a igualdade em (1.1). *Aqui* $d\theta^2$ *denota a métrica canônica da esfera unitária* $(n-1)$*-dimensional* $S_1^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ *centrada na origem e* $r(x)$ *é a distância Euclidiana à origem.*

Observação 1.1. *Agora, supondo que* $f = C$ *é uma função constante, temos*

$$\Delta_f = \Delta, \quad \mathrm{Vol}_f = e^{-C}\,\mathrm{Vol}, \quad e \quad \mathrm{vol}_f = e^{-C}\,\mathrm{vol}.$$

Além disso, $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = \inf \sigma_{ess}(-\Delta)$ *é o ínfimo do espectro essencial do Laplaciano agindo em* $L^2(M)$*. Neste caso, o Teorema 1.1 foi provado por Higuchi, ver Corolário 2 de (HIGUCHI, 2001).*

Seja $\Omega \subset M$ um domínio compacto. O ínfimo do espectro de Δ_f em $M \setminus \Omega$, com a condição de contorno de Dirichlet em $\partial\Omega$, admite a caracterização variacional

$$\lambda_1^f(M \setminus \Omega) = \inf_{u \in C_c^\infty(M \setminus \Omega)} \frac{\displaystyle\int_{M \setminus \Omega} |\nabla u|^2 e^{-f} d\sigma}{\displaystyle\int_{M \setminus \Omega} u^2 e^{-f} d\sigma},$$

onde $C_c^\infty(M \setminus \Omega)$ denota o conjunto das funções suaves $u : M \setminus \Omega \to \mathbb{R}$ com suporte compacto em $M \setminus \Omega$.

Seja ∂B_r a esfera geodésica de M com centro em um ponto fixado $o \in M$ e raio $r > 0$. O *volume ponderado* de ∂B_r é dado por

$$\mathrm{vol}_f(\partial B_r) = \int_{\partial B_r} e^{-f} dA,$$

onde dA é a forma volume em ∂B_r.

Agora, estamos prontos para enunciar o segundo resultado deste trabalho, a saber:

Teorema 1.2. *Sejam* M_f *uma variedade ponderada não compacta completa e* Ω *um subconjunto compacto de* M*. Se existe uma constante real positiva* α*, tal que*

$$\left| \frac{d}{dr} \big(\log \mathrm{vol}_f(\partial B_r) \big) \right| \leq \alpha \quad para \ \ todo \ r \geq r_0,$$

então

$$\lambda_1^f(M \setminus \Omega) \leq \frac{\alpha^2}{4}. \tag{1.3}$$

Consequentemente,

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \frac{\alpha^2}{4}. \tag{1.4}$$

Além disso, se $M_f = (\mathbb{R}^n, g, e^{-f} d\sigma)$ *com*

$$f = \frac{\alpha r}{2} \quad e \quad g = dr^2 + \lambda^2(r) d\theta^2,$$

tal que $\lambda : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função suave não negativa satisfazendo*

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda'(0) = 1 \quad e \quad \lambda(r) = e^{-\frac{\alpha}{2(n-1)}r} \quad para \;\; todo \; r \geq r_0 > 0, \tag{1.5}$$

então ocorre a igualdade em (1.3) e (1.4) para qualquer compacto $\Omega \supset B_{r_0}$. *Aqui* $d\theta^2$ *denota a métrica canônica da esfera unitária* $(n-1)$*-dimensional* $S_1^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ *centrada na origem e* $r(x)$ *é a distância Euclidiana à origem.*

Observação 1.2. *Existe uma classe de variedades Riemannianas completas que satisfazem as condições do Teorema 1.2 (ver Exemplo 3.1 no Capítulo 2).*

Agora, iremos enunciar algumas aplicações decorrentes do Teorema 1.1:

Teorema 1.3. *Sejam* $\beta > 0$ *uma constante real e* $M_\beta = (\mathbb{R}^n, g_{can}, e^{-r^\beta} d\sigma)$ *uma variedade ponderada com potencial* $f(r) = r^\beta$, *onde* g_{can} *é a métrica canônica do espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *e* $d\sigma$ *denota a medida de volume induzida por* g_{can} *em* $\mathbb{R}^n$.

(i) *Se* $\beta > 1$, *então* $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = +\infty$. *Ou seja,* $\sigma(-\Delta_f)$ *é discreto.*

(ii) *Se* $\beta = 1$, *então* $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = \dfrac{1}{4}$.

(iii) *Se* $0 < \beta < 1$, *então* $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = 0$.

Continuaremos a enunciar aplicações decorrentes do Teorema 1.1 e do Teorema 1.2. Mas agora, para isto, é necessário introduzir algumas definições que serão úteis na compreensão dos enunciados de tais aplicações.

Uma extensão natural do tensor curvatura de Ricci para este novo contexto é o *tensor curvatura de Ricci Bakry-Émery* dado por

$$\mathrm{Ric}_f = \mathrm{Ric} + \nabla^2 f,$$

onde $\nabla^2 f$ é a hessiana de f em M. Bakry-Émery (BAKRY; ÉMERY, 1985) estudou a relação entre este tensor com processos de difusão. O tensor curvatura de Ricci Bakry-Émery tem interessantes conexões com as desigualdade de Sobolev logarítmicas, desigualdades isoperimétricas e semigrupos do calor (ver (LEDOUX, 2000)). Além disso, a equação $\mathrm{Ric}_f = \lambda g$, para alguma constante real λ, é exatamente a equação do *gradient Ricci soliton*, o qual desempenha um papel importante na teoria do fluxo de Ricci (ver (CAO; ZHOU, 2010)).

Se M_f é variedade não compacta e completa com $\mathrm{Ric}_f \geq 0$ e $\lim_{r\to\infty} \dfrac{|f|}{r} = 0$, o L_f^2-espectro essencial de $-\Delta_f$ foi provado ser $[0,+\infty)$ por Silvares (SILVARES, 2014). Além disso, para variedades ponderadas compactas com $\mathrm{Ric}_f \geq kg$ para constante $k > 0$, o L_f^2-espectro de $-\Delta_f$ é discreto, ver (HEIN; NABER, 2014). Ainda podemos considerar a generalização do tensor curvatura de Ricci Bakry-Émery:

$$\mathrm{Ric}_f{}^{nm} = \mathrm{Ric}_f - \frac{df \otimes df}{nm}, \qquad m > 0,$$

onde Ric_f é o tensor curvatura de Ricci Bakry-Émery da variedade ponderada $\overline{M}_f$ (ver (WEI; WYLIE, 2009)).

Seja $x : M^n \to \overline{M}_f^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientável M^n em uma variedade ponderada $\overline{M}_f^{n+1}$. A *segunda forma fundamental* A de x é definida por

$$A(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}, \qquad X,Y \in T_pM, \;\; p \in M,$$

onde $\perp$ simboliza a projeção no fibrado normal de M. O *vetor curvatura média ponderada* de M é definida por

$$\mathbf{H}_f = \mathbf{H} + (\overline{\nabla} f)^{\perp},$$

com $\mathbf{H} = \text{traço}A$. A hipersuperfície M é chamada *f-mínima* quando o vetor curvatura média ponderada $\mathbf{H}_f$ é identicamente nulo; e, quando existe uma constante real C, tal que $\mathbf{H}_f = -C\eta$, onde η é campo vetorial normal unitário, dizemos que a hipersuperfície M tem *curvatura média ponderada*.

O operador

$$L_f = \Delta_f + |A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}_f}(\eta,\eta)$$

é chamado *operador f-estabilidade* da imersão x e está associado com a forma quádrica

$$I_f(u,u) = -\int_M u L_f u e^{-f} d\sigma.$$

Para cada domínio compacto $\Omega \subset M$, defina o índice, $\mathrm{ind}_f\,\Omega$, de L_f em Ω como a dimensão do maior subespaço de $C_c^{\infty}(\Omega)$ no qual a forma quádrica I_f é negativa definida. O *índice*, $\mathrm{ind}_f\,M$, de L_f em M (ou simplesmente, o índice de M) é definido por

$$\mathrm{ind}_f\,M = \sup_{\Omega \subset M} \mathrm{ind}_f\,\Omega,$$

onde o supremo é tomado sobre todos domínios compactos $\Omega \subset M$. Para mais detalhes, ver (CHENG; ZHOU, 2015).

Como aplicação das estimativas do ínfimo do espectro essencial do operador Laplaciano ponderado dadas no Teorema 1.1 e no Teorema 1.2, obtemos os seguintes resultados:

Teorema 1.4. *Seja M^n uma hipersuperfície não compacta e completa imersa isometricamente em uma variedade ponderada completa e orientada $\overline{M}_f^{n+1}$ com campo vetorial normal unitário η. Sejam*

$$\mu_v = \liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{Vol}_f(B_r) \quad e \quad \mu_w = \liminf_{r\to\infty} \frac{-1}{r} \log(\mathrm{Vol}_f(M) - \mathrm{Vol}_f(B_r)).$$

Se M tem curvatura média ponderada constante H_f e $\mathrm{ind}_f\,M < \infty$, então

$$\frac{H_f^2}{nm} \geq -\frac{\mu^2}{4} + \inf_{M\setminus B_r} \left\{ \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta) + \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{n(1+m)} \right\} \tag{1.6}$$

e

$$\frac{H_f^2}{n(1+m)} \leq \frac{\mu^2}{4} - \inf_{M\setminus B_r}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta,\eta)\right\}$$

para qualquer constante $m>0$, onde $\mu=\mu_v$ se $\mathrm{Vol}_f(M)=+\infty$ e $\mu=\mu_w$ se $\mathrm{Vol}_f(M)<+\infty$. Em particular, se

$$\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta,\eta) \geq \frac{\mu^2}{4}$$

para alguma constante positiva m, então M é uma hipersuperfície f-mínima.

Observação 1.3. *É conhecido que, se uma variedade ponderada completa M_f satisfaz $\mathrm{Ric}_f \geq kg$ para alguma constante $k>0$, então M_f não é necessariamente compacta. Um dos exemplos é o Gaussian shrinking soliton $\left(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\sigma\right)$ com a métrica canônica g_{can} e $\mathrm{Ric}_f = \frac{1}{2}g$.*

Dizemos que o volume ponderado de M tem *crescimento polinomial* se existem constantes positivas α, C e R_0, tais que

$$\mathrm{Vol}_f(B_r) \leq Cr^{\alpha}$$

para qualquer $r \geq R_0$.

Como consequência do Teorema 1.4, segue-se o

Corolário 1.1. *Seja $\overline{M}_f^{n+1}$ uma variedade ponderada completa e orientada com $\overline{\mathrm{Ric}}_f \geq kg$, onde $k>0$ é uma constante fixada. Então, não existe hipersuperfície f-mínima não compacta e completa M^n imersa em $\overline{M}_f^{n+1}$ com $\mathrm{ind}_f M < \infty$ e satisfazendo*

(i) $\mu_v < 2\sqrt{k}$ *se* $\mathrm{Vol}_f(M)=+\infty$ *ou*

(ii) $\mu_w < 2\sqrt{k}$ *se* $\mathrm{Vol}_f(M)<+\infty$.

Corolário 1.2. *Seja M^n uma hipersuperfície não compacta e completa imersa isometricamente em uma variedade ponderada completa e orientada $\overline{M}_f^{n+1}$. Assuma que o volume ponderado de M é infinito e tem crescimento polinomial. Se M tem curvatura média ponderada constante H_f e $\mathrm{ind}_f M < \infty$, então existe uma constante $r_0>0$, tal que para todo $r \geq r_0$,*

$$\frac{H_f^2}{nm} \geq \inf_{M\setminus B_r}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta) + \frac{\langle\overline{\nabla} f,\eta\rangle^2}{n(1+m)}\right\} \tag{1.7}$$

e

$$\frac{H_f^2}{n(1+m)} \leq -\inf_{M\setminus B_r}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta,\eta)\right\},$$

onde m é uma constante positiva e η é o campo vetorial unitário normal a M. Em particular, se

$$\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta,\eta) \geq 0$$

para alguma constante $m>0$, então M é uma hipersuperfície f-mínima.

Corolário 1.3. *Seja M^n uma hipersuperfície não compacta e completa imersa isometricamente em uma variedade ponderada completa e orientada $\overline{M}_f^{n+1}$. Assuma que o volume ponderado de M é infinito e satisfaz $\mathrm{Vol}_f(B_r) \leq Ce^{\alpha r}$ para $r \geq R_0$ e para constantes positivas C e α. Se M tem curvatura média ponderada constante H_f e $\mathrm{ind}_f M < \infty$, então existe uma constante $r_0 > 0$, tal que, para todo $r \geq r_0$,*

$$\frac{H_f^2}{nm} \geq -\frac{\alpha^2}{4} + \inf_{M \backslash B_r} \left\{ \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta, \eta) + \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{n(1+m)} \right\} \tag{1.8}$$

e

$$\frac{H_f^2}{n(1+m)} \leq \frac{\alpha^2}{4} - \inf_{M \backslash B_r} \left\{ \overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta, \eta) \right\},$$

onde m é uma constante positiva e η é o campo vetorial unitário normal a M. Em particular, se

$$\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta, \eta) \geq \frac{\alpha^2}{4}$$

para algum $m > 0$, então M é uma hipersuperfície f-mínima.

Observação 1.4. *Quando f é uma função constante, o Corolário 1.2 foi obtido por Alencar e do Carmo, ver Teorema 1.1 de (ALENCAR; CARMO, 1993), e melhorado por do Carmo e Zhou, ver Teorema 4.1 de (CARMO; ZHOU, 1999). Ainda, o Corolário 1.3 foi provado por do Carmo e Zhou, ver Teorema 4.4 de (CARMO; ZHOU, 1999).*

Corolário 1.4. *Seja $\overline{M}_f^{n+1}$ uma variedade ponderada completa e orientada com $\overline{\mathrm{Ric}}_f \geq kg$, onde $k > 0$ é uma constante fixada. Então, não existe hipersuperfície f-mínima não compacta e completa M^n imersa em $\overline{M}_f^{n+1}$ com $\mathrm{ind}_f M < \infty$, $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$ e crescimento de volume ponderado polinomial.*

Corolário 1.5. *Seja $\overline{M}_f^{n+1}$ uma variedade ponderada completa e orientada com $\overline{\mathrm{Ric}}_f \geq kg$, onde $k > 0$ é uma constante fixada. Então, não existe hipersuperfície f-mínima não compacta e completa M^n imersa em $\overline{M}_f^{n+1}$ com $\mathrm{ind}_f M < \infty$, $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$ e $\mathrm{Vol}_f(B_r) \leq Ce^{\alpha r}$ para qualquer $r \geq R_0$, onde C e $\alpha < 2\sqrt{k}$ são constantes positivas.*

Agora, usando a estimativa de $\lambda_1(M \setminus \Omega)$ vista no Teorema 1.2, obtemos a aplicação:

Teorema 1.5. *Seja M^n uma hipersuperfície não compacta e completa imersa isometricamente em uma variedade ponderada completa e orientada $\overline{M}_f^{n+1}$. Assuma que*

$$\left| \frac{d}{dr} \left(\log \mathrm{vol}_f(\partial B_r) \right) \right| \leq \alpha \;\; para \;\; todo \; r \geq t_0 > 0.$$

Se M tem curvatura média ponderada constante H_f e $\mathrm{ind}_f M < \infty$, então existe uma constante $r_0 > 0$, tal que para todo $r \geq r_0$,

$$\frac{H_f^2}{nm} \geq -\frac{\alpha^2}{4} + \inf_{M \backslash B_r} \left\{ \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta, \eta) + \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{n(1+m)} \right\} \tag{1.9}$$

e

$$\frac{H_f^2}{n(1+m)} \leq \frac{\alpha^2}{4} - \inf_{M\backslash B_r} \left\{ \overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta,\eta) \right\},$$

onde m é uma constante positiva e η é o campo vetorial unitário normal a M. Em particular, se

$$\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta,\eta) \geq \frac{\alpha^2}{4}$$

para algum real $m > 0$, então M é uma hipersuperfície f-mínima.

Como uma consequência do Teorema 1.5, segue-se

Corolário 1.6. *Seja $\overline{M}_f^{n+1}$ uma variedade ponderada completa e orientada com $\overline{\mathrm{Ric}}_f \geq kg$, onde $k > 0$ é uma constante fixada. Então, não existe hipersuperfície f-mínima não compacta e completa M^n imersa em $\overline{M}_f^{n+1}$ com $\mathrm{ind}_f M < \infty$ e*

$$\left| \frac{d}{dr}\left(\log \mathrm{vol}_f(\partial B_r)\right)\right| \leq \alpha < 2\sqrt{k}$$

para todo $r \geq t_0 > 0$.

Uma variedade Riemanniana completa $(\overline{M}^m, g)$ é chamada *gradient Ricci soliton* quando existe uma função $f \in C^\infty(\overline{M})$, tal que o tensor curvatura de Ricci de $(\overline{M}^m, g)$ satisfaz

$$\overline{\mathrm{Ric}} + \overline{\nabla}^2 f = kg$$

para alguma constante k. Para $k = 0$, o *Ricci soliton* é *steady*, para $k > 0$, ele é *shrinking* e para $k < 0$, *expanding*. A função f é chamada de função potencial do *gradient Ricci soliton*.

Os *gradient Ricci solitons* são generalizações naturais das variedades de Einstein e correspondem às soluções autossimilares do fluxo de Ricci de Hamilton (ver (HAMILTON, 1982) e (HAMILTON, 1988)). Um exemplo de um *gradient Ricci soliton* é o *Gaussian shrinking soliton*

$$\mathbb{R}_f^{n+1} = \left(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f}d\sigma\right)$$

que satisfaz

$$\overline{\mathrm{Ric}} + \overline{\nabla}^2 f = \frac{1}{2}g,$$

onde g_{can} é a métrica canônica e $f(x) = \dfrac{|x|^2}{4}$ é o potencial.

Podemos considerar hipersuperfícies f-mínimas ou com curvatura média ponderada constante em *gradient Ricci solitons*. Em particular, uma self-shrinker para o fluxo de curvatura média é uma hipersuperfície f-mínima do *Gaussian shrinking soliton* $\mathbb{R}_f^{n+1} = \left(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f}d\sigma\right)$.

Em (CHENG; ZHOU, 2013), Cheng e Zhou mostraram que as seguintes condições são equivalentes para um self-shrinker completo $\Sigma \subset \mathbb{R}_f^{n+1}$:

- Σ é própria;
- Σ tem crescimento de volume Euclidiano;
- Σ tem crescimento de volume polinomial;
- Σ tem volume ponderado finito.

Estas equivalências continuam sendo válidas para hipersuperfícies f-mínimas imersas em um *gradient shrinking Ricci soliton* completo $\overline{M}_f$ satisfazendo $\overline{\mathrm{Ric}}_f = \frac{1}{2}g$, onde f é uma função convexa (ver (CHENG *et al.*, 2015)).

O resultado a seguir fornece condições necessárias para que uma subvariedade seja própria.

Teorema 1.6. *Seja M^n uma subvariedade completa não compacta de uma variedade ponderada completa $\overline{M}^m_f$. Se M^n tem volume ponderado finito e a norma do vetor curvatura média ponderada é limitada superiormente, então M^n é própria.*

Dizemos que uma função $f \in C^\infty(\overline{M})$ é dita *convexa* se a hessiana de f é não negativa, isto é, $\overline{\nabla}^2 f(X,X) \geq 0$ para todo $X \in T\overline{M}$.

Teorema 1.7. *Sejam $f \in C^\infty(\overline{M})$ uma função convexa e $\overline{M}^m_f$ um gradient Ricci soliton completo. Se $x : M^n \to \overline{M}^m_f$ é uma imersão própria, não compacta e completa, com vetor curvatura média ponderada satisfazendo*

$$\sup_{x\in M}\langle \boldsymbol{H}_f, \overline{\nabla} f\rangle < +\infty,$$

então M^n tem volume ponderado finito e crescimento de volume polinomial.

Um campo vetorial diferenciável $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é *paralelo*, se

$$\overline{\nabla}_Y X = 0$$

para todos campos vetoriais $Y \in T\overline{M}$. Seja $\mathscr{P}_{\overline{M}}$ o conjunto de todos campos vetoriais tangentes a $\overline{M}$ que são paralelos e globalmente definidos.

Por exemplo, o *Gaussian shrinking soliton* $\left(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-|x|^2/4}\right)$ tem exatamente $n+1$ campos vetoriais paralelos linearmente independentes que são globalmente definidos em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Um outro exemplo é o *cylinder shrinking soliton* $\left(\mathbb{S}^{n+1-k} \times \mathbb{R}^k, g, e^{-f}\right)$, $k \geq 1$, com métrica

$$g = 2(n-k-1)g_{\mathbb{S}^{n-k}} + g_{\mathbb{R}^k}$$

e função potencial

$$f(\theta,x) = \frac{|x|^2}{4},\ \theta \in \mathbb{S}^{n-k},\ x \in \mathbb{R}^k.$$

Neste exemplo,

$$\dim \mathscr{P}_{\mathbb{S}^{n+1-k}\times\mathbb{R}^k} = k.$$

Teorema 1.8. *Sejam* $\overline{M}^{n+1}_f$ *um gradient Ricci soliton satisfazendo* $\overline{\mathrm{Ric}}_f = \frac{1}{2}g$*,* $\mathscr{P}_{\overline{M}_f}$ *o conjunto dos campos vetoriais e paralelos globalmente definidos em* $\overline{M}_f$ *e* M^n *uma hipersuperfície propriamente imersa em* $\overline{M}^{n+1}_f$*. Assuma que* M *tem curvatura média ponderada constante e volume ponderado finito. Se a função unidade* $1 \notin \{\langle X, \eta\rangle;\ X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}$*, então*

$$\dim \mathscr{P}_{\overline{M}_f} - \mathrm{Ind}_f M \ \leq\ \dim\{X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}; \langle X, \eta\rangle \equiv 0\},$$

onde η *é o campo normal unitário. Além disso, se assumirmos que existe um campo* $X_0 \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}$*, tal que* $\langle X_0, \eta\rangle \not\equiv 0$*, então*

$$\dim\{X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}; \langle X, \eta\rangle \equiv 0\} \ \leq \dim \mathscr{P}_{\overline{M}_f} - 1.$$

Observação 1.5. *Seja* $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *uma subvariedade orientada, não planar, própria e satisfazendo* $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$*,* $H = \frac{1}{2}\langle x, \eta\rangle + C$ *e* $\mathrm{Ind}_f M \leq n$*, onde* H *é a curvatura média,* x *é o vetor posição de* $\mathbb{R}^{n+1}$*,* η *é o campo normal unitário da hipersuperfície e* C *é uma constante real. McGonagle e Ross ((MCGONAGLE; ROSS, 2015), pg. 288, Theorem 5.6) mostraram que existe um número natural* k*, tal que* $n + 1 - \mathrm{Ind}_f M \leq k \leq n$ *e* $\Sigma = \Sigma_0 \times \mathbb{R}^k$*. Além disso,* $\mathrm{Ind}_f M \geq 2$*.*

Vale ressaltar que o resultado devido a McGonagle e Ross ainda é válido quando não supomos que Σ *é própria. Isto pode ser visto no Teorema 1.6.*

Observação 1.6. *Vale ressaltar que o Teorema 1.8, no caso em que* M *é uma subvariedade, ainda é válido quando não supomos que* M *é própria. Isto pode ser visto no Teorema 1.6.*

Como consequências do Teorema 1.8, temos

Corolário 1.7. *Sejam* $\overline{M}^{n+1}_f$ *um gradient Ricci soliton satisfazendo* $\overline{\mathrm{Ric}}_f = \frac{1}{2}g$*,* $\mathscr{P}_{\overline{M}_f}$ *o conjunto dos campos vetoriais e paralelos globalmente definidos em* $\overline{M}^{n+1}_f$ *e* M^n *uma hipersuperfície propriamente imersa em* $\overline{M}_f$*. Assuma que* M *tem curvatura média ponderada constante e volume ponderado finito. Se a função unidade* $1 \notin \{\langle X, \eta\rangle;\ X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}$ *e existe um campo* $X_0 \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}$*, tal que* $\langle X_0, \eta\rangle \not\equiv 0$*, então*

$$\mathrm{Ind}_f M \geq 1.$$

Além disso, se $\mathrm{Ind}_f M = 1$*, então*

$$\dim\{X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f};\ \langle X, \eta\rangle \equiv 0\} = \dim \mathscr{P}_{\overline{M}_f} - 1.$$

Corolário 1.8. *Sejam* $\overline{M}^{n+1}_f = (\Sigma^{n+1-k} \times \mathbb{R}^k, g, e^{-f}d\sigma)$ *um gradient Ricci soliton satisfazendo* $\overline{\mathrm{Ric}}_f = \frac{1}{2}g$ *e* M^n *uma hipersuperfície propriamente imersa em* $\overline{M}_f$ *com curvatura média ponderada constante e volume ponderado finito. Assuma que* $M \neq M_0 \times \mathbb{R}^{k-1}$*, onde* $M_0 \subset \Sigma$*. Se* $\dim \mathscr{P}_{\overline{M}_f} = k$ *e existe um campo* $X_0 \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}$*, tal que* $\langle X_0, \eta\rangle \not\equiv 0$*, então* $\mathrm{Ind}_f M \geq 2$*.*

Esta Tese de Doutorado está estruturada da seguinte forma:

Capítulo 1 - Neste capítulo, revisamos alguns conceitos elementares de Geometria Riemanniana (ver (PETERSEN, 2006)), tais como: tensor curvatura de Ricci, campo gradiente, hessiana e operador Laplaciano. Estendemos, de modo natural, alguns destes conceitos para variedades ponderadas, como por exemplo: tensor curvatura de Ricci Bakry-Émery e Laplaciano ponderado. Finalizamos o capítulo, apresentado alguns resultados da Teoria Espectral para o Laplaciano ponderado (ver (BÉRARD, 1985)). Além disso, fixamos as notações usadas ao longo desta tese.

Capítulo 2 - Demonstramos os resultados relacionados ao espectro essencial do operador Laplaciano ponderado. A saber: Teorema 1.1, Teorema 1.2 e Teorema 1.3. Além disso, damos algumas consequências de tais resultados. Vale ressaltar que neste capítulo, obtemos uma classe de variedades completas que satisfazem as hipóteses do Teorema 1.2.

Capítulo 3 - Neste capítulo, mostramos que uma hipersuperfície com curvatura média ponderada constante é o ponto crítico para a primeira variação da área ponderada. Também, obtemos a segunda variação da área ponderada para hipersuperfícies com curvatura média ponderada constante e definimos naturalmente o operador f-estabilidade e o índice de f-estabilidade.

Capítulo 4 - Damos algumas aplicações dos teoremas obtidos no Capítulo 2. De fato, enunciamos e demonstramos o Teorema 1.4 e o Teorema 1.5, e seus respectivos corolários. Estes resultados tratam-se de estimativas da curvatura média ponderada de hipersuperfícies não compactas com índice de f-estabilidade finito.

Capítulo 5 - Neste capítulo, vamos analisar os volumes ponderados de subvariedades próprias não compactas de um *gradient Ricci soliton*. Além disso, iremos demonstrar alguns resultados sobre o índice de f-estabilidade de hipersuperfícies em *gradient Ricci solitons*. Os resultados que serão demonstrados neste capítulo são: Teorema 1.6, Teorema 1.7, Teorema 1.8, Corolário 1.7 e Corolário 1.8.

Os resultados do Capítulo 2 e Capítulo 4 podem ser encontrados em (ROCHA, 2016).

2 PRELIMINARES E NOTAÇÕES

Neste capítulo, revisamos alguns conceitos elementares de Geometria Riemanniana (ver (PETERSEN, 2006)), tais como: tensor curvatura de Ricci, campo gradiente, hessiana e operador Laplaciano. Estendemos, de modo natural, alguns destes conceitos para variedades ponderadas, como por exemplo: tensor curvatura de Ricci Bakry-Émery e Laplaciano ponderado. Finalizamos o capítulo, apresentado alguns resultados da Teoria Espectral para o Laplaciano ponderado (ver (BÉRARD, 1985)). Além disso, fixamos as notações usadas ao longo desta tese.

2.1 Variedade Riemanniana, Curvatura de Ricci, Laplaciano

Sejam M uma variedade diferenciável e T_pM o espaço tangente de M em $p \in M$. Uma *métrica diferenciável* em M é uma correspondência $p \mapsto \langle \cdot,\cdot \rangle_p$, que associa a cada $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle_p$ em T_pM, o qual varia diferencialmente, isto é, para quaisquer campos vetoriais diferenciáveis $X,Y \in TM$, a função $g : M \to \mathbb{R}$, definida por $p \mapsto \langle X|_p, Y|_p \rangle_p$, é diferenciável.

Definição 2.1. *Uma variedade Riemanniana, denotada por (M,g), é uma variedade diferenciável M, munida de uma métrica diferenciável $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$.*

Seja $C^\infty(M)$ o conjunto das funções $u : M \to M$ de classe C^∞, ou simplesmente, o conjunto das funções u que são suaves. Denote por $\mathfrak{X}(M)$ o conjuntos dos campos vetoriais de classe C^∞ tangentes a M.

A *conexão de Levi-Civita* ∇ de uma variedade Riemanniana (M,g) é unicamente determinada pelas seguintes propriedades:

1. $Y \mapsto \nabla_Y X$ é um $(1,1)$-tensor:

$$\nabla_{\alpha Y + \beta Z} X = \alpha \nabla_Y X + \beta \nabla_Z X,$$

   onde $X, Y, Z \in TM$, α e β são funções reais definidas em M.

2. $X \mapsto \nabla_Y X$ é uma derivação:

$$\nabla_Y (X_1 + X_2) = \nabla_Y X_1 + \nabla_Y X_2 \quad \text{e} \quad \nabla_Y (fX) = Y(f)X + f\nabla_Y X,$$

   onde $f \in C^\infty(M)$, $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in TM$.

3. ∇ é compatível com a métrica $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$:

$$Z(\langle X,Y \rangle) = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

4. ∇ é livre de torção:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$

Definição 2.2. *O tensor curvatura Riemanniana é um* $(1,3)$*-tensor definido por*

$$R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde $X, Y \in TM$ *e* $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

O tensor curvatura Riemanniana também pode ser definido por

$$R(X,Y,Z,W) := \langle R(X,Y)Z, W \rangle,$$

o qual é um $(0,4)$-tensor que satisfaz

$$R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = R(Y,X,W,Z) = R(W,Z,Y,X).$$

Definição 2.3. *O tensor curvatura de Ricci é o* $(0,2)$*-tensor*

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \textit{traço}(W \mapsto R(W,X)Y),$$

onde $X,Y,Z \in TM$ *são campos vetorial suaves.*

Considere um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ no fibrado tangente TM. Assim

$$\mathrm{Ric}(V,W) = \text{traço}(X \mapsto R(X,V)W) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i,V)W, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} R(e_i,V,W,e_i).$$

Visto que

$$R(e_i,V,W,e_i) = R(W,e_i,e_i,V) = -R(e_i,W,e_i,V) = R(e_i,W,V,e_i),$$

temos

$$\mathrm{Ric}(V,W) = \mathrm{Ric}(W,V).$$

O qual mostra que o tensor de Ricci é simétrico. Dado um número real k, dizemos que

$$\mathrm{Ric} \geq kg,$$

se $\mathrm{Ric}(X,X) \geq k\langle X,X \rangle = k|X|^2$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Agora, vamos continuar definindo objetos intrínsecos da variedade Riemanniana (M,g), ou seja, objetos que dependem da métrica g, como por exemplo: campo gradiente, hessiana e operador Laplaciano.

Definição 2.4. *Seja $f \in C^\infty(M)$. O único campo vetorial suave ∇f satisfazendo*

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X)$$

para todo $X \in TM$, é chamado gradiente de f.

O campo gradiente satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;
2. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$,

para quaisquer funções $f, g \in C^\infty(M)$. Além disso, dados $p \in M$ e uma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v \in T_pM$, então

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = (f \circ \gamma)'(0).$$

Definição 2.5. *Seja $f \in C^\infty(M)$. A hessiana de f é dada por*

$$\nabla^2 f(X,Y) := \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle$$

para todos $X, Y \in TM$. Além disso, o operador Laplaciano de f, denotado por Δf, é definido por

$$\Delta f := traço \nabla^2 f.$$

A hessiana de f é um (0,2)-tensor simétrico, isto é,

$$\nabla^2 f(X,Y) = \nabla^2 f(Y,X)$$

para todos $X, Y \in TM$.

Definição 2.6. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. O divergente de X é definido por*

$$\operatorname{div} X := traço\, (Y \mapsto \nabla_Y X)\,.$$

Considere um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ em uma vizinhança $U \subset M$ de $p \in M$. Portanto, o operador Laplaciano de f, na vizinhança $U \subset M$, é dado por

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = \operatorname{div} \nabla f.$$

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana orientada e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal positiva de T_pM. A *forma de volume*, induzida pela métrica $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$, é definida por

$$d\sigma(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \det(\langle v_i, e_j \rangle).$$

Exemplo 2.1. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\S_1^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ a esfera unitária $(n-1)$-dimensional centrada na origem. Considere a variedade ponderada n-dimensional*

$$(I \times S_1^{n-1})_f = (I \times S_1^{n-1}, g, e^{-f} d\sigma),$$

onde $f = f(r)$ é a função potencial,

$$g = dr^2 + \lambda^2(r) d\theta^2$$

é uma métrica rotacionalmente simétrica e $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função suave não negativa. Logo, em coordenadas, $d\sigma = (\lambda(r))^{n-1} dr \wedge d\theta$ e o volume ponderado da bola geodésica de raio r é dado por

$$\mathrm{Vol}_f(B_r) = \int_{B_r} e^{-f} d\sigma = \int_0^r \int_{S_1^{n-1}} (\lambda(t))^{n-1} e^{-f(t)} d\theta dt = \omega_n \int_0^r (\lambda(t))^{n-1} e^{-f(t)} dt, \tag{2.1}$$

onde ω_n é o volume $(n-1)$-dimensional de S_1^{n-1}. O volume ponderado da fronteira de B_r é igual a

$$\mathrm{vol}_f(\partial B_r) = \int_{S_1^{n-1}} (\lambda(r))^{n-1} e^{-f(r)} d\theta = \omega_n (\lambda(r))^{n-1} e^{-f(r)}. \tag{2.2}$$

2.2 Curvatura de Ricci Bakry-Émery e Laplaciano Ponderado

É natural considerar uma variedade Riemanniana (M^n, g) munida com uma forma de volume ponderado $e^{-f} d\sigma$, onde $f \in C^\infty(M)$ é chamada *função potencial* e $d\sigma$ é a forma de volume induzido pela métrica g. Uma *variedade ponderada* é uma tripla

$$M_f^n = (M^n, g, e^{-f} d\sigma).$$

Estendemos, de modo natural, alguns destes conceitos para variedades ponderadas, como por exemplo: Laplaciano ponderado.

Definição 2.7. *Sejam M_f^n uma variedade ponderada e $u \in C^\infty(M)$. O operador Laplaciano ponderado Δ_f de u é definido por*

$$\Delta_f u := \Delta u - \langle \nabla f, \nabla u \rangle,$$

onde Δu denota o operador Laplaciano de u com respeito a métrica g.

O operador Laplaciano ponderado Δ_f está associado a $e^{-f} d\sigma$, bem como Δ está associado a $d\sigma$. Isto é visto no seguinte resultado:

Teorema 2.1 (Teorema de Green para Laplaciano ponderado)**.** *Sejam $\Omega \subset M$ um conjunto compacto e $u, v \in C^\infty(\Omega)$. Então*

$$\int_\Omega (u \Delta_f v) e^{-f} d\sigma + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle e^{-f} d\sigma = \int_{\partial\Omega} u \eta(v) e^{-f} d\partial\Omega, \tag{2.3}$$

$$\int_{\Omega}(u\Delta_f v - v\Delta_f u)e^{-f}\, d\sigma = \int_{\partial\Omega}(u\eta(v) - v\eta(u))e^{-f}\, d\partial\Omega, \tag{2.4}$$

onde η denota a normal unitária exterior a Ω ao longo de $\partial\Omega$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(e^{-f}u\nabla v) &= e^{-f}u \operatorname{div}\nabla v + \langle\nabla(e^{-f}u), \nabla v\rangle \\ &= e^{-f}u\Delta v - e^{-f}u\langle\nabla f, \nabla v\rangle + e^{-f}\langle\nabla u, \nabla v\rangle \\ &= e^{-f}u\Delta_f v + e^{-f}\langle\nabla u, \nabla v\rangle. \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados da igualdade acima e aplicando o teorema da divergência para o campo $X = e^{-f}u\nabla v$, segue-se a igualdade (2.3). A desigualdade (2.4) é obtida integrando a diferença $u\Delta_f v - v\Delta_f u$ e em seguida aplicando a igualdade (2.3). □

Corolário 2.1. *Sejam $\Omega \subset M$ um conjunto compacto e $u \in C^\infty(\Omega)$, tal que $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Então*

$$\int_{\Omega}\Delta_f u e^{-f}\, d\sigma = 0. \tag{2.5}$$

Demonstração. Basta usar o Teorema 2.1, igualdade 2.4, escolhendo a função $v \equiv 1$ em Ω. □

Uma extensão natural do tensor curvatura de Ricci, para este novo contexto, é o tensor curvature de Ricci Bakry-Émery que foi definido por Bakry e Émery (BAKRY; ÉMERY, 1985).

Definição 2.8. *O tensor curvatura de Ricci Bakry-Émery é definido por*

$$\operatorname{Ric}_f = \operatorname{Ric} + \nabla^2 f,$$

onde Ric *é o tensor curvatura de Ricci de M e $\nabla^2 f$ é a hessiana de f em M.*

É conhecido que, se uma variedade ponderada completa M_f satisfaz $\operatorname{Ric}_f \geq kg$ para alguma constante $k > 0$, então M_f não é necessariamente compacta. Um dos exemplos é o *Gaussian shrinking soliton* $\left(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^{-\frac{|x|^2}{4}}d\sigma\right)$ com a métrica canônica g_{can} e $\operatorname{Ric}_f = \dfrac{1}{2}g$.

Podemos considerar uma *generalização do tensor curvatura de Ricci Bakry-Émery* dado por

$$\overline{\operatorname{Ric}_f}^{nm} = \overline{\operatorname{Ric}_f} - \frac{df \otimes df}{nm}$$

para alguma constante real $m > 0$ (ver (WEI; WYLIE, 2009)).

2.3 Alguns Resultados Espectrais para o Laplaciano Ponderado

Finalizamos este capítulo, apresentado alguns resultados da Teoria Espectral para o Laplaciano ponderado.

Seja $\mathscr{H}$ o *espaço de Hilbert*, isto é, um espaço vetorial com um produto interno $(\cdot,\cdot)$ o qual é ainda completo com respeito a norma $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$. Seja $T : D(T) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ um operador (ilimitado) densamente definido em $\mathscr{H}$. Relembramos que o *conjunto resolvente* de T é o conjunto dos pontos $\lambda \in \mathbb{C}$, tais que $(T-\lambda)$ tem imagem $\mathscr{R}(T-\lambda)$ densa em $\mathscr{H}$ e $(T-\lambda)^{-1}$ se estende a um operador limitado em $\mathscr{H}$.

O *espectro* de T, denotado por $\sigma(T)$, é o complemento do conjunto resolvente de T. Ainda, $\sigma(T)$ pode ser decomposto na união disjunta $\sigma_d(T) \cup \sigma_{ess}(T)$, onde $\sigma_d(T)$ é o conjunto de autovalores isolados com multiplicidade finita, chamado *espectro discreto*, e seu complemento $\sigma_{ess}(T)$, chamado *espectro essencial*, é o conjunto de autovalores com multiplicidade infinita e pontos de acumulação do espectro. Assim definidos, podemos ver que o espectro e o espectro essencial são fechados de $\mathbb{R}$.

O *operador adjunto* é definido por

$$D(T^*) = \{y \in \mathscr{H};\ x \mapsto (Tx,y) \text{ é um funcional linear limitado em } D(T)\}$$

e T^*y é definido via o teorema da representação de Riesz pela identidade $(x,T^*y) = (Tx,y)$ para qualquer $x \in D(T)$.

Definição 2.9. *Dizemos que T é um operador simétrico se $(Tx,y) = (x,Ty)$ para todos $x,y \in D(T)$ e T é um operador autoadjunto se $T = T^*$.*

É conhecido que o espectro de um operador autoadjunto T é real, ou seja, $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Além disso, se T é um *operador positivo*, isto é, $(Tx,x) \geq 0$ para qualquer $x \in D(T)$, então $\sigma(T) \subseteq [0,+\infty)$.

Agora, iremos analisar o espectro do operador Laplaciano ponderado $-\Delta_f$, onde M_f é uma variedade ponderada não compacta e completa. Denote por $L^2(M,g,e^{-f}d\sigma)$ ou, simplesmente $L^2_f(M)$, o conjunto das funções $u : M \to \mathbb{R}$ quadrado integráveis com respeito a medida $e^{-f}d\sigma$, isto é,

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-f} d\sigma < +\infty.$$

Este espaço é um espaço de Hilbert, com produto interno

$$(u,v)_{L^2_f} = \int_\Omega uve^{-f}\, d\sigma$$

e L^2_f-norma $\|u\|_{L^2_f} := (u,u)^{1/2}_{L^2_f}$.

Sabe-se que o conjunto $C_c^\infty(M)$, das funções $u : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ com suporte compacto, é denso em $L_f^2(M)$ para norma $\|\cdot\|_{L_f^2}$. Assim, podemos ver o Laplaciano

$$-\Delta_f : C_c^\infty(M) \to L_f^2(M)$$

como um operador elíptico densamente definido em $L_f^2(M)$. Decorre do teorema de Green, ver (2.3) e (2.4), que $-\Delta$ é simétrico e positivo. De fato,

$$(u, -\Delta_f v)_{L_f^2} - (v, -\Delta_f u)_{L_f^2} = -\int_M (u\Delta_f v - v\Delta_f u)e^{-f} d\sigma = 0$$

e

$$(u, -\Delta_f u)_{L_f^2} = -\int_M (u\Delta_f u)e^{-f} d\sigma = \int_M |\nabla u|^2 e^{-f} d\sigma \geq 0$$

para quaisquer funções $u, v \in C_c^\infty(M)$. Um teorema clássico da teoria espectral afirma que o operador Laplaciano $-\Delta_f : C_c^\infty(M) \to L_f^2(M)$ tem uma única extensão autoadjunta em $L_f^2(M)$, que também denotaremos por $-\Delta_f$. Logo o espectro de $-\Delta_f$ é real e não negativo, isto é,

$$\sigma(-\Delta_f) \subseteq [0, +\infty).$$

Para um domínio compacto $K \subset M$, considere o problema dos autovalores de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta_f u + \lambda u = 0, & \text{em} \quad K \setminus \partial K \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial K. \end{cases}$$

É conhecido que L_f^2-espectro do operador $-\Delta_f$ restrito ao espaço $C^\infty(K)$ é discreto. O conjunto de todos os autovalores de Dirichlet contados com sua multiplicidade é uma sequência não decrescente

$$0 < \lambda_1^f(K) < \lambda_2^f(K) \leq \lambda_3^f(K) \leq \dots$$

com $\lambda_j^f(K) \to \infty$ quando $j \to \infty$. A *caracterização variacional* para o primeiro autovalor $\lambda_1^f(K)$, dada por

$$\lambda_1^f(K) = \inf_{u \in C^\infty(K)} \frac{\displaystyle\int_K |\nabla u|^2 e^{-f} d\sigma}{\displaystyle\int_K |u|^2 e^{-f} d\sigma},$$

implica que

$$\lambda_1^f(\Omega) \leq \lambda_1^f(K)$$

para quaisquer domínios compactos K e Ω tais que $K \subseteq \Omega \subset M$. O *primeiro autovalor* de $-\Delta_f$ em $M \setminus \Omega$ é caracterizado por

$$\begin{aligned} \lambda_1^f(M \setminus \Omega) &= \inf\{\lambda_1^f(K) : \ K \subset M \setminus \Omega \ \text{ é um domínio compacto}\} \\ &= \inf_{u \in C_c^\infty(M \setminus \Omega)} \frac{\displaystyle\int_{M \setminus \Omega} |\nabla u|^2 e^{-f} d\sigma}{\displaystyle\int_{M \setminus \Omega} |u|^2 e^{-f} d\sigma}. \end{aligned}$$

Além disso, pode ser visto no Teorema 6.1 em (BESSA *et al.*, 2013) que

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = \sup_{\Omega} \lambda_1^f(M \setminus \Omega), \tag{2.6}$$

onde Ω pertence ao conjunto de domínios compactos de M.

Seja $o \in M$ um ponto fixado e B_r a bola geodésica de M com centro em $o \in M$ e raio $r > 0$. Denote por $A(r_0, r) = B_r \setminus B_{r_0}$ para algum real positivo fixado r_0. O primeiro autovalor de $M \setminus B_{r_0}$ também pode ser dado como

$$\lambda_1^f(M \setminus B_{r_0}) = \inf_{r > r_0} \lambda_1^f(A(r_0, r)).$$

O seguinte resultado é essencialmente uma adaptação de um resultado devido a Cheng e Yau (ver (CHENG; YAU, 1975), Corollary 1).

Proposição 2.1. *Sejam $M_f = (M, g, e^{-f} d\sigma)$ uma variedade ponderada e $u \in C^\infty(M)$ uma função positiva. Então*

$$\lambda_1^f(M \setminus B_{r_0}) \geq \inf_{M \setminus B_{r_0}} \left(-\frac{\Delta_f u}{u} \right)$$

para qualquer constante positiva r_0.

Demonstração. Seja $o \in M$ um ponto fixado e $A = A(r_0, r) = B_r \setminus B_{r_0}$. Considere uma função $w : M \to \mathbb{R}$ não nula e não negativa satisfazendo

$$\Delta_f w + \lambda_1^f(A) w = 0, \tag{2.7}$$

com $w(\partial A) = 0$ e $w(x) \geq 0$ para todo $x \in A$ e, defina

$$h(x) = \frac{w}{u}.$$

Como Δ_f é um operador elíptico e

$$\Delta_f h + \frac{2}{u} \langle \nabla u, \nabla h \rangle = \left(\frac{\Delta_f w}{w} - \frac{\Delta_f u}{u} \right) h.$$

Assim,

$$\frac{\Delta_f w}{w} - \frac{\Delta_f u}{u} \geq 0 \qquad \text{em} \quad A \tag{2.8}$$

ou

$$\inf_{x \in A} \left\{ \frac{\Delta_f w}{w}(x) - \frac{\Delta_f u}{u}(x) \right\} < 0. \tag{2.9}$$

Se a desigualdade (2.8) ocorre, segue do princípio do máximo que h não pode atingir o seu máximo no interior de $A = A(r_0, r)$, a menos que h seja constante. Assim, teríamos $h \equiv 0$, pois $h(\partial A) \equiv w(\partial A) \equiv 0$. Entretanto, w é uma função não nula, portanto h não pode ser nula. Logo,

$$\inf_{x \in A} \left\{ \frac{\Delta_f w}{w}(x) - \frac{\Delta_f u}{u}(x) \right\} < 0.$$

Segue da igualdade (2.7) e da desigualdade (2.9) que

$$\inf_{x\in A}\left\{-\lambda_1^f(A)-\frac{\Delta_f u}{u}\right\}<0,$$

ou seja,

$$\lambda_1^f(A)\geq \inf_{M\setminus B_{r_0}}\left(-\frac{\Delta_f u}{u}\right).$$

□

3 ESTIMATIVAS DO ÍNFIMO DO ESPECTRO ESSENCIAL DO LAPLACIANO PONDERADO

Neste capítulo, iremos demonstrar os resultados enunciados na Introdução relacionados ao espectro essencial do operador Laplaciano ponderado. A saber: Teorema 1.1, Teorema 1.2 e Teorema 1.3. Além disso, damos algumas consequências interessantes de tais resultados. Vale ressaltar que neste capítulo, obtemos uma classe de variedades completas que satisfazem as hipóteses do Teorema 1.2.

3.1 Estimativa 1

Sejam $M_f = (M^n, g, e^{-f}d\sigma)$ uma variedade ponderada e $K \subset M$ um conjunto compacto. Para cada número positivo $\delta > 0$, defina o conjunto

$$A_\delta(\partial K) = \{x \in M \setminus K;\ \ d(x, \partial K) \leq \delta\},$$

com $d(x, \partial K)$ denotando a distância geodésica entre x e ∂K. Além disso, vamos considerar a função $\mu_\delta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por

$$\mu_\delta(r) = \frac{1}{r}\log \mathrm{Vol}_f(A_\delta(\partial B_r)), \tag{3.1}$$

onde ∂B_r é a esfera geodésica de raio $r > 0$ e centro $o \in M$.

Estabelecidas as notações acima, temos o seguinte:

Lema 3.1. *Seja M_f uma variedade ponderada não compacta e completa. Para cada $\delta > 0$ fixado, considere*

$$\mu_\delta = \liminf_{r\to\infty} \mu_\delta(r) \qquad e \qquad \bar{\mu}_\delta = \limsup_{r\to\infty} \mu_\delta(r), \tag{3.2}$$

com $\mu_\delta(r)$ definido em (3.1).

(i) *Se* $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$*, então* $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \mu_\delta^2/4$*. Além disso,* $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = 0$ *se* $\mu_\delta < 0$.

(ii) *Se* $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$*, então* $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \bar{\mu}_\delta^2/4$.

Demonstração. Para um domínio compacto arbitrário $\Omega \subset M$, é conhecido que

$$\lambda_1^f(M \setminus \Omega) = \inf_{u \in C_c^\infty(M\setminus\Omega)} \frac{\displaystyle\int_{M\setminus\Omega} |\nabla u|^2 e^{-f} d\sigma}{\displaystyle\int_{M\setminus\Omega} u^2 e^{-f} d\sigma}$$

e, por (2.6),

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = \sup_{\Omega \subset M} \lambda_1^f(M \setminus \Omega).$$

Assim, para concluir a prova deste lema, basta mostrar a seguinte desigualdade: para cada $\delta > 0$ e cada domínio compacto $\Omega \subset M$, existe uma função $u \in C_c^\infty(M)$ com suporte compacto em $M \setminus \Omega$, tal que

$$\frac{\displaystyle\int_M |\nabla u|^2 e^{-f} d\sigma}{\displaystyle\int_M u^2 e^{-f} d\sigma} < \alpha^2(\varepsilon) + \varepsilon_1,$$

para $\varepsilon, \varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequenos, onde $\alpha^2(\varepsilon) \to \mu_\delta^2/4$ quando $\varepsilon \to 0$.

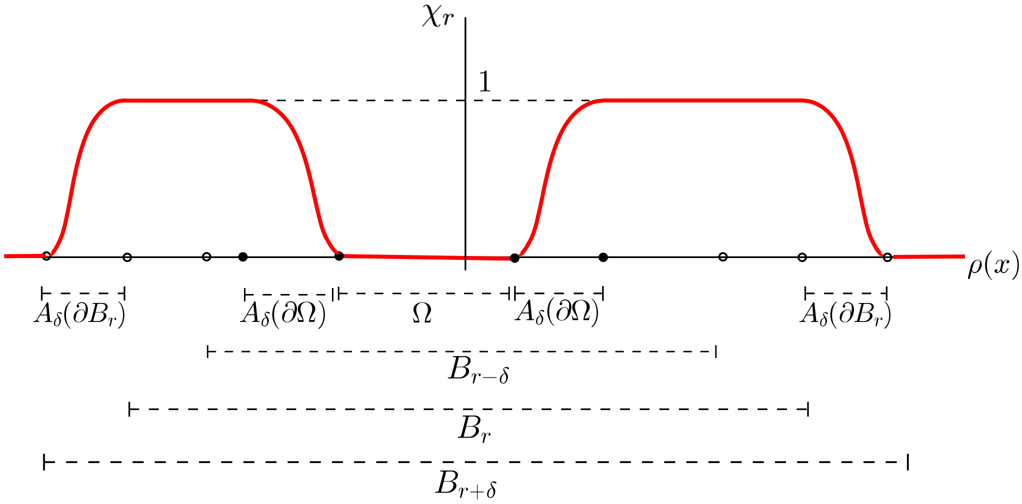
Agora, vamos construir uma função $u(x) = e^{h_j(x)} \cdot \chi_r(x)$ com suporte compacto em $M \setminus \Omega$. Para isso, sejam $o \in M$ um ponto fixado e $\rho(x) = d(x,o)$ a função distância de o até $x \in M$. Defina χ_r e h_j, ver Figura 1 e Figura 2, da seguinte forma: para r suficientemente grande satisfazendo $\Omega \subset B_{r-\delta}$, seja

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \Omega \text{ ou } \rho(x) > r + \delta, \\ d(x,\Omega)/\delta, & \text{se } 0 < d(x,\Omega) \leq \delta, \\ 1 - d(x,B_r)/\delta, & \text{se } r < \rho(x) \leq r + \delta, \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e para cada número real $\alpha \geq 0$ e inteiro positivo j, seja

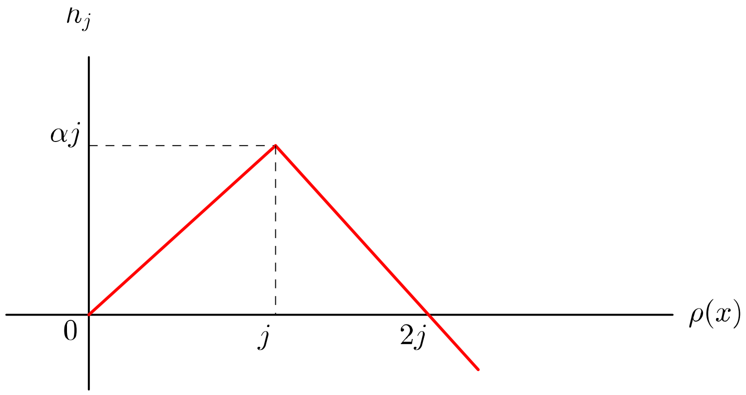
$$h_j(x) = \begin{cases} \alpha\rho(x), & \text{se } \rho(x) \leq j, \\ 2\alpha j - \alpha\rho(x), & \text{se } \rho(x) > j. \end{cases}$$

Figura 1 – A função χ_r com suporte compacto em $M \setminus \Omega$.



Fonte: (ROCHA, 2016)

Figura 2 – A função h_j.



Fonte: (ROCHA, 2016)

Note que $\nabla\chi_r$ tem suporte em $A_\delta(\partial B_r)\cup A_\delta(\partial\Omega)$, $|\nabla\chi_r|\leq 1/\delta$ e $|\nabla h_j|^2\leq\alpha^2$. Para j e r suficientemente grandes satisfazendo $r>j$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{M\setminus\Omega}|\nabla u|^2e^{-f}d\sigma\\
&= \int_{M\setminus\Omega}e^{2h_j}(|\nabla h_j\cdot\chi_r+\nabla\chi_r|^2)e^{-f}d\sigma\\
&\leq \int_{M\setminus\Omega}e^{2h_j}(2\chi_r\cdot\langle\nabla h_j,\nabla\chi_r\rangle+|\nabla\chi_r|^2)e^{-f}d\sigma+\int_{M\setminus\Omega}u^2|\nabla h_j|^2e^{-f}d\sigma\\
&\leq \alpha^2\int_{M\setminus\Omega}u^2e^{-f}d\sigma+\left(\frac{2\alpha}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)\left(\int_{A_\delta(\partial\Omega)}e^{2h_j}e^{-f}d\sigma+\int_{A_\delta(\partial B_r)}e^{2h_j}e^{-f}d\sigma\right). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Note que podemos considerar r_0, tal que $\Omega\subset B_{r_0-\delta}\subset B_{r-\delta}$ para qualquer r suficientemente grande. Assim,

$$\int_{A_\delta(\partial\Omega)}e^{2h_j}e^{-f}d\sigma\leq\int_{A_\delta(\partial\Omega)}e^{2\alpha\rho}e^{-f}d\sigma\leq e^{2\alpha r_0}\mathrm{Vol}_f(A_\delta(\partial\Omega)). \qquad (3.4)$$

Logo, existe uma constante finita C, que não depende de r e j, tal que

$$\left(\frac{2\alpha}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)\int_{A_\delta(\partial\Omega)}e^{2h_j}e^{-f}d\sigma\leq C. \qquad (3.5)$$

(i) Note que

$$\int_{M\setminus\Omega}u^2e^{-f}d\sigma=\int_{M\setminus\Omega}e^{2h_j}\chi_r^2e^{-f}d\sigma\to\infty \quad \text{quando} \quad r,j\to\infty. \qquad (3.6)$$

De fato, suponha que $j<r$ é tal que $(\Omega\cup A_\delta(\partial\Omega))\subset B_j$. Assim,

$$\int_{M\setminus\Omega}u^2e^{-f}d\sigma=\int_{M\setminus\Omega}e^{2h_j}\chi_r^2e^{-f}d\sigma\geq\int_{B_j\setminus A_\delta(\partial\Omega)}e^{2\alpha\rho}e^{-f}d\sigma\geq e^{2\alpha C}\mathrm{Vol}_f(B_j\setminus A_\delta(\partial\Omega)),$$

onde C é o raio da primeira bola geodésica que toca $A_\delta(\partial\Omega)$ quando fazemos uma variação decrescente de B_j. Como $\mathrm{Vol}_f(M)=+\infty$, por hipótese, então

$$\int_{M\setminus\Omega}u^2e^{-f}d\sigma\geq e^{2\alpha C}\mathrm{Vol}_f(B_j\setminus A_\delta(\partial\Omega))\to\infty \quad \text{quando} \quad r,j\to\infty.$$

Se $\mu_\delta \geq 0$, então existe uma sequência $\{r_n\}$ com $r_n > 2j(2+\mu_\delta/\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$, satisfazendo

$$\mu_\delta(r_n) = \frac{1}{r_n}\log \mathrm{Vol}_f(A_\delta(\partial B_{r_n})) \leq \mu_\delta + \varepsilon.$$

Ao escolher $\alpha = \alpha(\varepsilon) = (\mu_\delta + 2\varepsilon)/2$, obtemos

$$h_j(x) = (2j - \rho(x))\alpha \leq (2j - r_n)(\mu_\delta + 2\varepsilon)/2$$

e

$$\int_{A_\delta(\partial B_{r_n})} e^{2h_j} e^{-f} d\sigma \leq e^{(2j-r_n)(\mu_\delta+2\varepsilon)} e^{(\mu_\delta+\varepsilon)r_n} = e^{(2j(\mu_\delta+2\varepsilon)-r_n\varepsilon)} \leq 1. \tag{3.7}$$

Portanto, por (3.3), (3.5), (3.6) e (3.7), podemos encontrar n e j, tais que $u_n = e^{h_j}\chi_{r_n}$ e

$$\frac{\int_M |\nabla u_n|^2 e^{-f} d\sigma}{\int_M u_n^2 e^{-f} d\sigma} \leq \alpha^2(\varepsilon) + \varepsilon_1$$

para $\varepsilon_1 > 0$, onde $\alpha = (\mu_\delta + 2\varepsilon)/2$. Agora, quando $\mu_\delta < 0$, temos que, para cada $\varepsilon > 0$ satisfazendo $\mu_{\delta+\varepsilon} < 0$, existe uma sequência $\{r_n\}$, tal que $\mu_\delta(r_n) \leq \mu_\delta + \varepsilon$. Para $\alpha = 0$ e $e^{h_j} = \mathbf{1}$,

$$\int_{A_\delta(\partial B_{r_n})} e^{2h_j} e^{-f} d\sigma = \mathrm{Vol}_f(A_\delta(\partial B_{r_n})) \leq e^{(\mu_\delta+\varepsilon)r_n} < 1.$$

Daí, para todo $\varepsilon_1 > 0$ e n suficientemente grande,

$$\frac{\int_M |\nabla u_n| e^{-f} d\sigma}{\int_M u_n^2 e^{-f} d\sigma} \leq \varepsilon_1,$$

onde $u_n = \mathbf{1}\chi_{r_n}$.

(ii) Visto que $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$, por hipótese, e $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq +\infty$, então podemos assumir que $-\infty < \bar{\mu}_\delta \leq 0$. Decorre da definição de $\bar{\mu}_\delta$ que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma sequência $\{r_n\}$, tal que $r_n > 2j(2\varepsilon - \bar{\mu}_\delta)/(\varepsilon - 2\bar{\mu}_\delta)$ e

$$\bar{\mu}_\delta - \varepsilon \leq \mu_\delta(r_n) = \frac{1}{r_n}\log \mathrm{Vol}_f(A_\delta(\partial B_{r_n})) \leq \bar{\mu}_\delta + \varepsilon.$$

Aqui, podemos assumir que esta sequência $\{r_n\}$ satisfaz $r_{n+1} - r_n \geq \delta$. Escolhendo $\alpha = \alpha(\varepsilon) = -(\bar{\mu}_\delta - 2\varepsilon)/2$ e $g(x) = e^{\alpha\rho(x)}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_r} g^2 e^{-f} d\sigma &\geq \sum_{A(r)} \int_{B_{r_n+\delta}\setminus B_{r_n}} g^2 e^{-f} d\sigma \geq \sum_{A(r)} e^{2\alpha r_n} \cdot \mathrm{Vol}_f(A_\delta(\partial B_{r_n}))\\ &\geq \sum_{A(r)} e^{2\alpha r_n} e^{(\bar{\mu}_\delta - \varepsilon)r_n} = \sum_{A(r)} e^{\varepsilon r_n} \to \infty \quad \text{quando } r \to \infty,\end{aligned}$$

onde $A(r) = \{n;\ r_n + \delta \leq r\}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{M\setminus\Omega} u^2 e^{-f} d\sigma &= \int_{M\setminus\Omega} e^{2h_j}\chi_r^2 e^{-f} d\sigma\\ &\geq \int_{B_j} g^2 e^{-f} d\sigma - \int_\Omega g^2 e^{-f} d\sigma \to \infty \quad \text{quando } r, j \to \infty\end{aligned}$$

e

$$\int_{A_\delta(\partial B_{r_n})} e^{2h_j} e^{-f} d\sigma \leq e^{(2j-r_n)(2\varepsilon-\bar{\mu}_\delta)} e^{(\bar{\mu}_\delta+\varepsilon)r_n} \leq 1.$$

Logo, tomando n e j suficientemente grandes e usando argumentos análogos aos apresentados no caso do volume ponderado infinito, obtemos a estimativa desejada. $\square$

Observe que $\mu_{\delta_1} \leq \mu_{\delta_2}$ e $\bar{\mu}_{\delta_1} \leq \bar{\mu}_{\delta_2}$ para $\delta_1 < \delta_2$. Assim, existe o limite

$$\mu_0 = \lim_{\delta\to 0} \mu_\delta \qquad \text{e} \qquad \bar{\mu}_0 = \lim_{\delta\to 0} \bar{\mu}_\delta,$$

com μ_δ definido em (3.2).

Lema 3.2. *Seja M_f uma variedade ponderada não compacta e completa. Então*

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \mu^2/4,$$

onde $\mu = \max\{\mu_0, 0\}$ *se* $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$ *e* $\mu = \bar{\mu}_0$ *se* $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$.

Demonstração. Decorre diretamente do Lema 3.1 que $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \mu_0^2/4$ se M_f tem volume ponderado infinito e $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \bar{\mu}_0^2/4$ se M_f tem volume ponderado finito. Agora, quando $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$ e $\mu_0 = \lim_{\delta\to 0} \mu_\delta < 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mu_\delta < 0$. Usando o Lema 3.1 (i), obtemos $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = 0$. Isto conclui a prova deste lema. $\square$

Vamos agora usar o Lema 3.1 e o Lema 3.2 para provar o próximo resultado que também foi enunciado na Introdução (ver Teorema 1.1):

Teorema 3.1. *Seja M_f uma variedade ponderada não compacta e completa.*

(i) *Se* $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$, *então*

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \frac{\mu_v^2}{4},$$

onde $\mu_v = \liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{Vol}_f(B_r)$.

(ii) *Se* $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$, *então*

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \frac{\mu_w^2}{4}, \tag{3.8}$$

onde $\mu_w = \liminf_{r\to\infty} \frac{-1}{r} \log(\mathrm{Vol}_f(M) - \mathrm{Vol}_f(B_r))$.

Além disso, se $M_f = (\mathbb{R}^n, g, e^{-f} d\sigma)$ *com*

$$f = \frac{r}{2} \quad e \quad g = dr^2 + \lambda^2(r) d\theta^2,$$

tal que $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função suave não negativa satisfazendo*

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda'(0) = 1 \quad e \quad \lambda(r) = e^{-\frac{r}{2(n-1)}} \quad para \ \ todo \ r \geq r_0 > 0, \tag{3.9}$$

então ocorre a igualdade em (3.8). Aqui $d\theta^2$ denota a métrica canônica da esfera unitária $(n-1)$-dimensional $S_1^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ centrada na origem e $r(x)$ é a distância Euclidiana à origem.

Demonstração. (i) Sejam

$$\mu_\delta = \liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{Vol}_f(A_\delta(\partial B_r)) \quad \text{e} \quad \mu_v = \liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{Vol}_f(B_r).$$

Visto que $\mu_{\delta_1} \leq \mu_{\delta_2}$ sempre que $\delta_1 < \delta_2$, então $\mu_0 = \lim_{\delta\to 0} \mu_\delta(r)$ satisfaz $\mu_0 \leq \mu_\delta$. Para $\delta > 0$ arbitrariamente fixado, podemos tomar r suficientemente grande, tal que

$$\mathrm{Vol}_f(A_\delta(\partial B_r)) \leq \mathrm{Vol}_f(B_r).$$

Assim, $\mu_\delta \leq \mu_v$ e $\mu_0 \leq \mu_\delta \leq \mu_v$ para todo $\delta > 0$. Se $\mu_0 \geq 0$, então, segue do Lema 3.2, que

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \frac{\mu_0^2}{4} \leq \frac{\mu_v^2}{4}.$$

Além disso, $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = 0$, se $\mu_0 < 0$.

(ii) Sejam

$$\bar{\mu}_\delta = \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{Vol}_f(A_\delta(\partial B_r)) \quad \text{e} \quad \mu_w = \liminf_{r\to\infty} \frac{-1}{r} \log(\mathrm{Vol}_f(M) - \mathrm{Vol}_f(B_r)).$$

Como $\bar{\mu}_{\delta_1} \leq \bar{\mu}_{\delta_2}$ sempre que $\delta_1 < \delta_2$, então existe $\bar{\mu}_0 = \lim_{\delta\to 0} \bar{\mu}_\delta$ e

$$\bar{\mu}_0 \leq \bar{\mu}_\delta \leq \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log(\mathrm{Vol}_f(M) - \mathrm{Vol}_f(B_r)) = -\mu_w \leq 0. \tag{3.10}$$

A segunda desigualdade da expressão acima decorre da desigualdade

$$\mathrm{Vol}_f(A_\delta(\partial B_r)) \leq \mathrm{Vol}_f(M) - \mathrm{Vol}_f(B_r).$$

Seja $\bar{\mu}_\delta < 0$. Para cada $\varepsilon > 0$ satisfazendo $\bar{\mu}_\delta + \varepsilon < 0$, existe r_0 tal que

$$\frac{1}{r} \log \mathrm{Vol}_f(A_\delta(\partial B_r)) < \bar{\mu}_\delta + \varepsilon$$

e

$$\mathrm{Vol}_f(M) - \mathrm{Vol}_f(B_r) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_f(A_\delta(\partial B_{r+k\delta})) \leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{(\bar{\mu}_\delta+\varepsilon)(r+k\delta)},$$

para cada $r \geq r_0$. Daí,

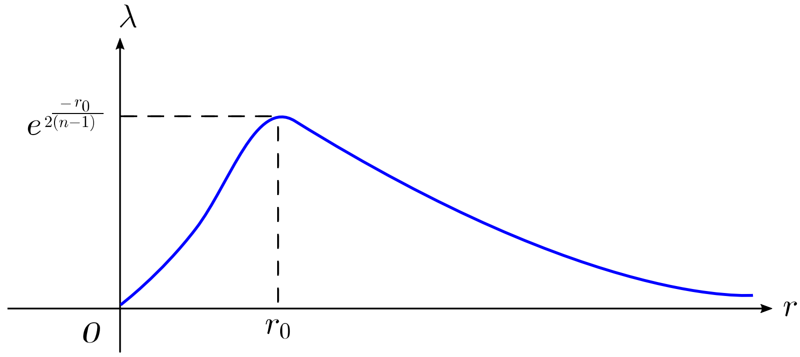
$$\frac{1}{r} \log(\mathrm{Vol}_f(M) - \mathrm{Vol}_f(B_r)) \leq \bar{\mu}_\delta + \varepsilon - \frac{1}{r} \log(1 - e^{(\bar{\mu}_\delta+\varepsilon)\delta}),$$

o qual implica $-\mu_w \leq \bar{\mu}_\delta + \varepsilon$. Logo, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos $-\mu_w \leq \bar{\mu}_\delta$ e, usando a desigualdade (3.10), concluímos que $-\mu_w = \bar{\mu}_\delta = \bar{\mu}_0$. Além disso, $\bar{\mu}_\delta = -\mu_w = 0$ se $\bar{\mu}_\delta = 0$. Portanto, $|\bar{\mu}_0| = \mu_w$. O item (ii) resulta do Lema 3.2.

Seja $M_f = (\mathbb{R}^n, g, e^{-f} d\sigma)$ com

$$f = \frac{r}{2} \quad \text{e} \quad g = dr^2 + \lambda^2(r) d\theta^2,$$

Figura 3 – A função $\lambda : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$.



Fonte: (AUTORA, 2016)

tal que $\lambda : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, ver Figura 3, é uma função suave não negativa satisfazendo

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda'(0) = 1 \quad \text{e} \quad \lambda(r) = e^{-\frac{r}{2(n-1)}} \quad \text{para todo} \quad r \geq r_0 > 0.$$

Note que

$$\Delta_f u = \Delta\left(e^{\frac{1}{2}r}\right) - \frac{1}{2}\left\langle \nabla r, \nabla\left(e^{\frac{1}{2}r}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}r}\Delta r + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}r}|\nabla r|^2 - \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}r}|\nabla r|^2 = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}r}\Delta r,$$

onde

$$\Delta r = (n-1)\frac{\frac{d}{dr}\left(e^{-\frac{r}{2(n-1)}}\right)}{e^{-\frac{r}{2(n-1)}}} = -\frac{1}{2}$$

para todo $r \geq r_0 > 0$. Portanto u é uma solução positiva da equação

$$\Delta_f u + \frac{1}{4}u = 0$$

para todo $r \geq r_0 > 0$. Visto que

$$\lambda_1^f(M \setminus B_r) \geq \inf_{M \setminus B_r}\left\{-\frac{\Delta_f u}{u}\right\}$$

para cada função positiva, então

$$\lambda_1^f(M \setminus B_r) \geq \frac{1}{4} \tag{3.11}$$

para todo $r \geq r_0 > 0$. Decorre da expressão (2.1), ver Exemplo 2.1 do Capítulo 1, que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_f(B_r) &= \omega_n \int_0^{r_0} (\lambda(t))^{n-1} e^{-t/2} dt + \omega_n \int_{r_0}^{r} \left(e^{-\frac{t}{2(n-1)}}\right)^{n-1} e^{-t/2} dt \\
&= \mathrm{Vol}_f(B_{r_0}) + \omega_n \int_{r_0}^{r} e^{-t} dt \\
&= \mathrm{Vol}_f(B_{r_0}) + \omega_n \left(e^{-r_0} - e^{-r}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\mathrm{Vol}_f(M) = \lim_{r \to \infty} \mathrm{Vol}_f(B_r) = \mathrm{Vol}_f(B_{r_0}) + \omega_n e^{-r_0}.$$

Portanto $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$. Neste caso, vamos calcular μ_w:

$$\begin{aligned}\mu_w &= \liminf_{r\to\infty} \frac{-1}{r}\log(\mathrm{Vol}_f(M) - \mathrm{Vol}_f(B_r)) \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{-1}{r}\log\left(\omega_n e^{-r}\right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Assim, usando as desigualdades (3.11) e (2.6) e o item (ii) do Teorema 3.1, obtemos que

$$\frac{1}{4} \le \lambda_1^f(M\setminus B_r) \le \inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \le \frac{\mu_w^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Isto conclui a prova do Teorema 3.1. □

Observação 3.1. *No Teorema 6.2 de (BESSA* et al.*, 2013), Bessa, Pigola e Setti deram uma limitação superior para* $\inf\sigma_{ess}(-\Delta_f)$ *em termos do crescimento do volume ponderado das bolas geodésicas da variedade ponderada. De fato, eles mostraram que:*

(i) *Se* $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$, *então*

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \le \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r}\log \mathrm{Vol}_f(B_r).$$

(ii) *Se* $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$, *então*

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \le \limsup_{r\to\infty} \frac{-1}{r}\log(\mathrm{Vol}_f(M) - \mathrm{Vol}_f(B_r)).$$

Logo, o Teorema 3.1 fornece uma estimativa melhorada para $\inf\sigma_{ess}(-\Delta_f)$ *em relação a obtida por Bessa, Pigola e Setti.*

Agora, supondo que $f = C$ é uma função constante, temos

$$\Delta_f = \Delta, \quad \mathrm{Vol}_f = e^{-C}\mathrm{Vol} \quad \text{e} \quad \mathrm{vol}_f = e^{-C}\mathrm{vol}.$$

Além disso, $\inf\sigma_{ess}(-\Delta_f) = \inf\sigma_{ess}(-\Delta)$ é o ínfimo do espectro essencial do Laplaciano. Logo, como uma consequência do Teorema 3.1, segue o

Corolário 3.1. *Seja M uma variedade não compacta e completa.*

(i) *Se* $\mathrm{Vol}(M) = +\infty$, *então*

$$\inf\sigma_{ess}(-\Delta) \le \frac{\mu_v^2}{4},$$

onde $\mu_v = \liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r}\log \mathrm{Vol}(B_r)$.

(ii) *Se* $\mathrm{Vol}(M) < +\infty$, *então*

$$\inf\sigma_{ess}(-\Delta) \le \frac{\mu_w^2}{4},$$

onde $\mu_w = \liminf_{r\to\infty} \frac{-1}{r}\log(\mathrm{Vol}(M) - \mathrm{Vol}(B_r))$.

Observação 3.2. *O Corolário 3.1 foi provado por Higuchi, ver Corolário 2 de (HIGUCHI, 2001).*

3.2 Estimativa 2

Seja $\Omega \subset M$ um domínio compacto. O ínfimo do espectro de $-\Delta_f$ em $M \setminus \Omega$, com a condição de contorno de Dirichlet em $\partial\Omega$, admite a caracterização variacional

$$\lambda_1^f(M \setminus \Omega) = \inf_{u \in C_c^\infty(M\setminus\Omega)} \frac{\displaystyle\int_{M\setminus\Omega} |\nabla u|^2 e^{-f} d\sigma}{\displaystyle\int_{M\setminus\Omega} u^2 e^{-f} d\sigma},$$

onde $C_c^\infty(M \setminus \Omega)$ denota o conjunto das funções suaves $u : M \setminus \Omega \to \mathbb{R}$ com suporte compacto em $M \setminus \Omega$. Além disso, pode ser visto no Teorema 6.1 em (BESSA *et al.*, 2013) que

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = \sup_{\Omega} \lambda_1^f(M \setminus \Omega), \tag{3.12}$$

onde Ω pertence ao conjunto de domínios compactos de M.

Estamos interessados em estimar $\lambda_1^f(M \setminus \Omega)$, onde Ω é um subconjunto compacto arbitrário de M. Para isso, vamos olhar para o comportamento oscilatório de soluções de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Vamos precisar de um resultado obtido por Fite (veja (FITE, 1918), Teorema I):

Teorema 3.2 ((FITE, 1918))**.** *Assuma que q e λ são funções contínuas para $t \in [t_0, +\infty)$ tais que $|q(t)| \leq \alpha$ e $\lambda(t) \geq h > 0$ para todo $t \geq t_0$, onde α e h são constantes satisfazendo $4h - \alpha^2 > 0$. Então cada solução para a equação diferencial*

$$y'' + qy' + \lambda y = 0 \tag{3.13}$$

muda de sinal um número infinito de vezes, ou seja, cada solução para (3.13) é oscilatória.

Observação 3.3. *Os critérios de oscilação na forma integral foram usados primeiramente por do Carmo e Zhou (CARMO; ZHOU, 1999) para obter estimativas para o primeiro autovalor $\lambda_1(M \setminus \Omega)$ do operador Laplaciano, supondo crescimento polinomial ou exponencial de volume. Outros autores também têm utilizado este critério para estimar o primeiro autovalor de outros operadores elípticos, supondo condições sob o volume, por exemplo, veja (BIANCHINI* et al.*, 2009), (ELBERT, 2002) e (IMPERA; RIMOLDI, 2015). Nesta última referencia, Impera e Rimoldi têm obtido estimativas para $\lambda_1^f(M \setminus \Omega)$ do operador Laplaciano ponderado.*

Agora, podemos usar o resultado sobre soluções oscilatórias para provar o Teorema 3.3 que também foi enunciado na Introdução, ver Teorema 1.2.

Teorema 3.3. *Sejam M_f uma variedade ponderada não compacta completa e Ω um subconjunto compacto de M. Se existe uma constante real positiva α, tal que*

$$\left| \frac{d}{dr} \left(\log \mathrm{vol}_f(\partial B_r) \right) \right| \leq \alpha \quad para \;\; todo \; r \geq r_0,$$

então

$$\lambda_1^f(M\setminus\Omega)\le\frac{\alpha^2}{4}. \tag{3.14}$$

Consequentemente,

$$\inf\sigma_{ess}(-\Delta_f)\le\frac{\alpha^2}{4}. \tag{3.15}$$

Além disso, se $M_f=(\mathbb{R}^n,g,e^{-f}d\sigma)$ com

$$f=\frac{\alpha r}{2}\quad e\quad g=dr^2+\lambda^2(r)d\theta^2,$$

tal que $\lambda:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ é uma função suave não negativa satisfazendo

$$\lambda(0)=0,\quad \lambda'(0)=1\quad e\quad \lambda(r)=e^{-\frac{\alpha}{2(n-1)}r}\ \ para\ \ todo\ r\ge r_0>0, \tag{3.16}$$

então ocorre a igualdade em (3.14) e (3.15) para qualquer compacto $\Omega\supset B_{r_0}$. Aqui $d\theta^2$ denota a métrica canônica da esfera unitária $(n-1)$-dimensional $S_1^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ centrada na origem e $r(x)$ é a distância Euclidiana à origem.

Demonstração. Seja $v(t)=\mathrm{vol}_f(\partial B_t)$ a área ponderada para esfera geodésica ∂B_t centrada em $o\in M$ e raio $t>0$. Então, pela fórmula da co-área, temos

$$\mathrm{Vol}_f(B_r)=\int_{B_r}e^{-f}d\sigma=\int_0^r\int_{\partial B_t}e^{-f}dA\,dt=\int_0^r v(t)dt.$$

Escolha $t_0\ge r_0$ tal que $\Omega\subset B_{t_0}$ e defina $q(r):=\dfrac{v'(r)}{v(r)}$, $r\ge t_0$. Visto que, por hipótese,

$$|q(r)|=\left|\frac{d}{dr}(\log v(r))\right|\le\alpha,$$

para todo $r\ge t_0$, obtemos que a equação diferencial

$$y''(r)+\frac{v'(r)}{v(r)}y'(r)+\lambda y(r)=0,\quad r\ge t_0, \tag{3.17}$$

satisfaz a condição do Teorema 3.2. Portanto, para cada $\lambda>0$, tal que

$$4\lambda-\alpha^2>0,$$

a equação diferencial (3.17) é oscilatória, ou seja, cada solução $y(r)$, $r\in[t_0,+\infty)$, da equação (3.17), muda de sinal um número infinito de vezes. Fixado um valor inicial $y(t_0)=y_0$ e $y'(t_0)=y_0'$, temos que cada solução para (3.17) pode ser estendida para $[t_0,+\infty)$.

Seja $y:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ uma solução oscilatória não trivial de (3.17) com $v(r)=\mathrm{vol}_f(\partial B_r)$. Assim, existem dois números r_1 e r_2 em $[t_0,+\infty)$, tais que $r_1<r_2$ e $y(r_1)=y(r_2)=0$ e $y(t)\ne0$ para cada $t\in(r_1,r_2)$. Defina $\varphi(x)=y(r(x))$ e $\Omega_\lambda=B_{r_2}\setminus B_{r_1}$, onde $r(x)=\mathrm{dist}(x,o)$ é a distância geodésica de $x\in M$ a um ponto fixado $o\in M$. Segue da fórmula da co-área que

$$0\le\lambda_1^f(M\setminus\Omega)\ \le\ \lambda_1^f(\Omega_\lambda)\le\frac{\int_{\Omega_\lambda}|\nabla\varphi|^2e^{-f}d\sigma}{\int_{\Omega_\lambda}|\varphi|^2e^{-f}d\sigma}=\frac{\int_{r_1}^{r_2}(y'(t))^2v(t)\,dt}{\int_{r_1}^{r_2}(y(t))^2v(t)\,dt}.$$

Como, pela equação (3.17),

$$(yvy')' = (y')^2v + yv'y' + yvy'' = (y')^2v + \left(y'' + \frac{v'}{v}y'\right)yv = (y')^2v - \lambda y^2 v,$$

então

$$0 \leq \lambda_1^f(M \setminus \Omega) \leq \frac{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \lambda (y(t))^2 v(t)\,dt}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} (y(t))^2 v(t)\,dt} = \lambda.$$

Sabendo que λ é uma constante positiva maior que $\dfrac{\alpha^2}{4}$, então

$$\lambda_1^f(M \setminus \Omega) \leq \frac{\alpha^2}{4}.$$

Logo, aplicando a desigualdade anterior em (3.12), obtemos

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \frac{\alpha^2}{4}.$$

Agora, seja $M_f = (\mathbb{R}^n, g, e^{-f}d\sigma)$ com

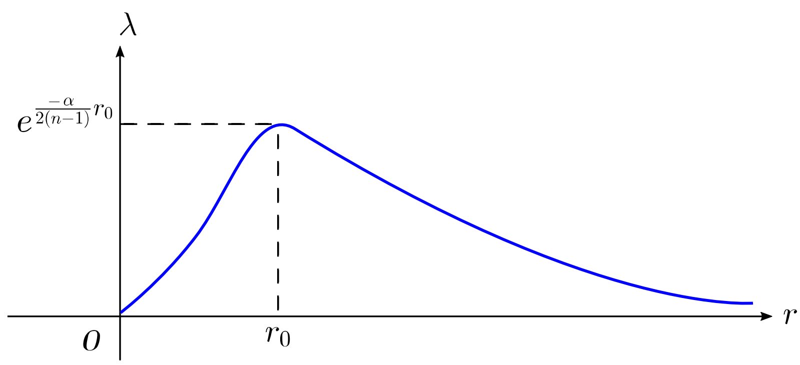
$$f = \frac{\alpha r}{2} \quad \text{e} \quad g = dr^2 + \lambda^2(r)d\theta^2,$$

tal que $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, ver Figura 4, é uma função não negativa satisfazendo

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda'(0) = 1, \quad \text{e} \quad \lambda(r) = e^{-\frac{\alpha}{2(n-1)}r} \;\text{ para todo } r \geq r_0 > 0.$$

Para cada constante α, defina a função $u(r) = e^{\frac{\alpha}{2}r}$. Note que

Figura 4 – A função $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$.



Fonte: (AUTORA, 2016)

$$\Delta_f u = \Delta\left(e^{\frac{\alpha}{2}r}\right) - \frac{\alpha}{2}\left\langle \nabla r, \nabla\left(e^{\frac{\alpha}{2}r}\right)\right\rangle = \frac{\alpha}{2}e^{\frac{\alpha}{2}r}\Delta r + \frac{\alpha^2}{4}e^{\frac{\alpha}{2}r}|\nabla r|^2 - \frac{\alpha^2}{4}e^{\frac{\alpha}{2}r}|\nabla r|^2 = \frac{\alpha}{2}e^{\frac{\alpha}{2}r}\Delta r,$$

onde

$$\Delta r = (n-1)\frac{\frac{d}{dr}\left(e^{-\frac{\alpha}{2(n-1)}r}\right)}{e^{-\frac{\alpha}{2(n-1)}r}} = -\frac{\alpha}{2}$$

para todo $r \geq r_0 > 0$. Portanto u é uma solução positiva de

$$\Delta_f u + \frac{\alpha^2}{4} u = 0$$

para todo $r \geq r_0 > 0$. Segue da Proposição 2.1 que

$$\lambda_1^f(M \setminus B_r) \geq \inf_{M \setminus B_r} \left\{ -\frac{\Delta_f u}{u} \right\},$$

para qualquer função positiva, então

$$\lambda_1^f(M \setminus B_r) \geq \frac{\alpha^2}{4}.$$

Logo,

$$\lambda_1^f(M \setminus \Omega) \geq \lambda_1^f(M \setminus B_{r_0}) \geq \frac{\alpha^2}{4} \tag{3.18}$$

para qualquer compacto $\Omega \supset B_{r_0}$. Por outro lado, usando a igualdade (2.1), ver Exemplo 2.1 do Capítulo 1, obtemos

$$\left| \frac{d}{dr} \left(\log \mathrm{vol}_f(\partial B_r) \right) \right| = \left| \frac{d}{dr} \left(\log(\omega_n e^{-\alpha r} \right) \right| = |-\alpha| = \alpha \quad \text{para todo } r \geq r_0 > 0.$$

Decorre do item (i) do Teorema 3.3 que

$$\lambda_1(M \setminus \Omega) \leq \frac{\alpha^2}{4}.$$

Assim, usando a desigualdade (3.18) e a desigualdade acima, concluímos que

$$\lambda_1(M \setminus \Omega) = \inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = \frac{\alpha^2}{4}$$

para cada compacto $\Omega \supset B_{r_0}$. □

Exemplo 3.1. *Existe uma classe de variedades Riemannianas que satisfazem as condições do Teorema 3.3. De fato, seja $M_f^n = (\mathbb{R}^n, g, e^{-f} d\sigma)$ com potencial $f = f(r)$ e uma métrica suave $g = dr^2 + \lambda^2(r) d\theta^2$, onde $d\theta^2$ denota a métrica canônica $(n-1)$-dimensional da esfera unitária $S_1^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ centrada na origem e $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função suave não negativa, tal que $\lambda(0) = 0$, $\lambda'(0) = 1$ e*

$$\left| (n-1) \frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)} - f'(r) \right| \leq \alpha, \quad \alpha > 0,$$

para todo $r \geq r_0 > 0$. Decorre do Exemplo 2.1, igualdade (2.1), que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \log(\mathrm{vol}_f(\partial B_r)) &= \frac{d}{dr} \log\left(\omega_n (\lambda(r))^{n-1} e^{-f(r)} \right) \\ &= (n-1) \frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)} - f'(r) \end{aligned} \tag{3.19}$$

para todo $r \geq r_0$. Logo

$$\left| \frac{d}{dr} \log(\mathrm{vol}_f(\partial B_r)) \right| = \left| (n-1) \frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)} - f'(r) \right| \leq \alpha.$$

Observação 3.4. *A condição*

$$\frac{d}{dr}\left(\log \mathrm{vol}_f(\partial B_r)\right) \leq \alpha, \quad r > 0,$$

implica que

$$\mathrm{Vol}_f(B_r) \leq Ce^{\alpha r},$$

onde $C = 1/\alpha$. *Mas* M *não tem necessariamente volume ponderado infinito. Olhe para* $M_f = (\mathbb{R}^n, g, e^{-f}d\sigma)$ *com* $f = \alpha r/2$ *e* $g = dr^2 + \lambda^2(r)d\theta^2$, *tal que* $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função suave não negativa satisfazendo (3.16);* M_f *tem volume ponderado finito, ou seja,*

$$\mathrm{Vol}_f(B_r) = \mathrm{Vol}_f(B_{r_0}) + \omega_n \int_{r_0}^{r} e^{-\alpha t}dt = \mathrm{Vol}_f(B_{r_0}) + \frac{\omega_n}{\alpha}\left(-e^{-\alpha r} + e^{-\alpha r_0}\right),$$

e, portanto,

$$\mathrm{Vol}_f(M) = \lim_{r\to\infty} \mathrm{Vol}_f(B_r) = \mathrm{Vol}_f(B_{r_0}) + \frac{\omega_n}{\alpha e^{\alpha r_0}}.$$

Isto pode ser visto nas expressão (2.1) do Exemplo 2.1.

Agora, supondo que $f = C$ é uma função constante, decorre do Teorema 3.3 a seguinte consequência:

Corolário 3.2. *Sejam* M *uma variedade não compacta completa e* Ω *um subconjunto de* M. *Se*

$$\left|\frac{d}{dr}(\log \mathrm{vol}(\partial B_r))\right| \leq \alpha \quad \text{para } r \geq r_0,$$

então

$$\lambda_1(M \setminus \Omega) \leq \frac{\alpha^2}{4}. \tag{3.20}$$

Consequentemente,

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta) \leq \frac{\alpha^2}{4}. \tag{3.21}$$

Além disso, se $M = (\mathbb{R}^n, g)$ *com* $g = dr^2 + \lambda^2(r)d\theta^2$, *tal que* $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função suave não negativa satisfazendo*

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda'(0) = 1 \quad e \quad \lambda(r) = e^{-\frac{\alpha}{(n-1)}r} \text{ para todo } r \geq r_0 > 0,$$

então ocorre a igualdade em (3.20) e em (3.21) para qualquer compacto $\Omega \supset B_{r_0}$. *Aqui* $d\theta^2$ *denota a métrica canônica da esfera unitária* $(n-1)$*-dimensional* $S_1^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ *centrada na origem e* $r(x)$ *é a distância Euclidiana à origem.*

3.3 Aplicação

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $S_1^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ a esfera unitária $(n-1)$-dimensional centrada na origem. Considere a variedade ponderada n-dimensional

$$(I \times S_1^{n-1})_f = (I \times S_1^{n-1}, g, e^{-f}d\sigma),$$

onde $f = f(r)$ é a função potencial,

$$g = dr^2 + \lambda^2(r)d\theta^2$$

é uma métrica rotacionalmente simétrica e $\lambda : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função suave não negativa. Para esta variedade, o volume ponderado da bola geodésica $B_r = B_r(o)$, onde $o \in M$ é um ponto fixado, é dado por

$$\mathrm{Vol}_f(B_r) = \omega_n \int_0^r (\lambda(t))^{n-1} e^{-f(t)} dt, \tag{3.22}$$

(ver Exemplo 2.1), igualdade (2.1), onde ω_n é a área da esfera unitária $(n-1)$-dimensional S_1^{n-1}.

Dada uma função $u = u(r)$, temos que

$$\Delta_f u = \Delta u - \langle \nabla u, \nabla f \rangle = u''(r) + \left((n-1)\frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)} - f'(r) \right) u'(r). \tag{3.23}$$

Lema 3.3. *Seja $\beta > 0$. Então*

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r t^{n-1} e^{-t^\beta} dt < +\infty.$$

Demonstração. Fazendo a substituição $u = t^\beta$, obtemos

$$\int_0^r t^{n-1} e^{-t^\beta} dt = \frac{1}{\beta} \int_0^{r^\alpha} u^{\frac{n-\beta}{\beta}} e^{-u} du. \tag{3.24}$$

Existe uma constante real u_0, tal que

$$u^{\frac{n-\beta}{\beta}} \leq e^{u/2}$$

para $u \geq u_0$; e, portanto,

$$\frac{1}{\beta} \int_{r_0}^{r^\beta} u^{\frac{n-\beta}{\beta}} e^{-u} du \leq \frac{1}{\beta} \int_{r_0}^{r^\beta} e^{-u/2} du = -\frac{2}{\beta}\left(e^{-r^\beta/2} - e^{-r_0/2} \right). \tag{3.25}$$

Agora, usando a igualdade (3.24) e a desigualdade (3.25), concluímos

$$\int_0^r t^{n-1} e^{-t^\beta} dt \leq \frac{1}{\beta} \int_0^{r_0} u^{\frac{n-\beta}{\beta}} e^{-u} du - \frac{2}{\beta}\left(e^{-r^\beta/2} - e^{-r_0/2} \right).$$

Logo

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r t^{n-1} e^{-t^\beta} dt \leq \frac{1}{\beta} \int_0^{r_0} u^{\frac{n-\beta}{\beta}} e^{-u} du + \frac{2}{\beta} e^{-r_0/2} < +\infty.$$

□

Teorema 3.4. *Sejam $\beta > 0$ uma constante real e $M_\beta = (\mathbb{R}^n, g_{can}, e^{-r^\beta} d\sigma)$ uma variedade ponderada com potencial $f(r) = r^\beta$, onde g_{can} é a métrica canônica do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ e $d\sigma$ denota a medida de volume induzida por g_{can} em $\mathbb{R}^n$.*

(i) *Se* $\beta > 1$, *então* $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = +\infty$. *Ou seja,* $\sigma(-\Delta_f)$ *é discreto.*

(ii) *Se* $\beta = 1$, *então* $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = \dfrac{1}{4}$.

(iii) *Se* $0 < \beta < 1$, *então* $\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) = 0$.

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que

$$\inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < \beta < 1; \\ \dfrac{1}{4}, & \text{se } \beta = 1; \\ +\infty, & \text{se } \beta > 1. \end{cases} \tag{3.26}$$

De fato, note que $g = dr^2 + r^2 d\theta^2$, onde $d\theta^2$ denota a métrica canônica da esfera $(n-1)$-dimensional. Assim, podemos usar a igualdade (3.22) com $\lambda(r) = r$, ou seja,

$$\mathrm{Vol}_f(B_r) = \omega_n \int_0^r t^{n-1} e^{-t^\beta} dt. \tag{3.27}$$

Assim, pelo Lema 3.3,

$$\mathrm{Vol}_f(M) = \lim_{r\to\infty} \mathrm{Vol}_f(B_r) = \omega_n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t^\beta} dt < +\infty \tag{3.28}$$

e

$$\mathrm{Vol}_f(M) - \mathrm{Vol}_f(B_r) = \omega_n \int_r^\infty t^{n-1} e^{-t^\beta} dt. \tag{3.29}$$

Agora, defina as funções

$$h(r) = \int_r^\infty t^{n-1} e^{-t^\beta} dt \quad \text{e} \quad g(r) = \frac{1}{\beta} r^{n-\beta} e^{-r^\beta}.$$

Observe que tais funções satisfazem a seguinte igualdade:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 1.$$

Com efeito, como

$$\lim_{r\to\infty} g(x) = \lim_{r\to\infty} h(x) = 0,$$

então podemos usar a regra de L'Hospital,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{r\to\infty} \frac{h'(x)}{g'(x)},$$

onde

$$h'(x) = -r^{n-1} e^{-r^\beta}$$

e

$$g'(x) = e^{-r^\beta} \left[\frac{(n-\beta)}{\beta} r^{n-\beta-1} - r^{n-1} \right].$$

Daí,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{r\to\infty}\frac{\frac{(n-\beta)}{\beta}r^{n-\beta-1}-r^{n-1}}{-r^{n-1}}=\lim_{r\to\infty}-\frac{(n-\beta)}{\beta}r^{-\beta}+1=1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mu_w &= \liminf_{r\to\infty}\frac{-1}{r}\log(\mathrm{Vol}_f(M)-\mathrm{Vol}_f(B_r))=\liminf_{r\to\infty}\frac{-1}{r}\log\left(\omega_n\int_r^{\infty}t^{n-1}e^{-t^{\beta}}dt\right)\\
&= \liminf_{r\to\infty}\frac{-1}{r}\log\left(\omega_n h(x)\right)=\liminf_{r\to\infty}\frac{-1}{r}\left(\log\omega_n+\log h(x)\right)\\
&= \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{1}{r}\log\omega_n-\frac{1}{r}\log g(x)+\frac{1}{r}\log\frac{g(x)}{h(x)}\right),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\log g(x) &= \lim_{r\to\infty}\frac{-1}{r}\log\left(\frac{1}{\beta}r^{n-\beta}e^{-r^{\beta}}\right)\\
&= \lim_{r\to\infty}\frac{-1}{r}\left(\log\frac{1}{\beta}+\log r^{n-\beta}+\log e^{-r^{\beta}}\right)\\
&= \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{1}{r}\log\frac{1}{\beta}-(n-\beta)\frac{\log r}{r}+r^{\beta-1}\right).
\end{aligned}$$

Logo

$$\mu_w=\begin{cases}0, & \text{se } 0<\beta<1;\\ 1, & \text{se } \beta=1;\\ +\infty, & \text{se } \beta>1;\end{cases}$$

e, usando o Teorema 3.1, obtemos (3.26).

Vamos mostrar que vale a igualdade em (3.26). Com efeito, aplique a função $u(r)=e^{r/2}$ na expressão obtida em (3.23),

$$\Delta_f u=\frac{1}{4}e^{r/2}+\left(\frac{n-1}{r}-\beta r^{\beta-1}\right)\frac{1}{2}e^{r/2}=\left(\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}r^{\beta-1}+\frac{n-1}{2r}\right)e^{-r/2}. \tag{3.30}$$

Agora, aplicando a Proposição 2.1 à função positiva $u(r)=e^{-r/2}$ e usando a expressão (3.12), obtemos

$$\begin{aligned}
\inf\sigma_{ess}(-\Delta_f) &= \sup_{B_r}\lambda_1^f(M\setminus B_r)\geq\sup_{B_r}\inf_{M\setminus B_r}\left\{-\frac{\Delta_f u}{u}\right\}\\
&= \sup_{B_r}\inf_{M\setminus B_r}\left\{-\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}r^{\beta-1}-\frac{n-1}{2r}\right\}\\
&= \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}r^{\beta-1}-\frac{n-1}{2r}\right),
\end{aligned}$$

no qual implica,

$$\inf\sigma_{ess}(-\Delta_f)\geq\begin{cases}+\infty, & \text{se } \beta>1;\\ \frac{1}{4}, & \text{se } \beta=1;\\ 0, & \text{se } \beta<1.\end{cases} \tag{3.31}$$

Logo, a prova dos itens (i), (ii) e (iii) deste teorema decorre das expressões (3.31) e (3.26). $\square$

4 OPERADOR f-ESTABILIDADE E ÍNDICE DE f-ESTABILIDADE

Neste capítulo, mostramos que uma hipersuperfície com curvatura média ponderada constante é o ponto crítico para a primeira variação da área ponderada. Também, obtemos a segunda variação da área ponderada para hipersuperfícies com curvatura média ponderada constante e definimos naturalmente o operador f-estabilidade e o índice de f-estabilidade.

Seja $x: M^n \to \overline{M}_f^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana n-dimensional orientável M^n em uma variedade ponderada $\overline{M}_f^{n+1}$. A *segunda forma fundamental* A de x é definida por

$$A(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}, \qquad X,Y \in T_pM, \ \ p \in M,$$

onde $\perp$ denota a projeção sobre o fibrado normal de M.

Definição 4.1. *O vetor curvatura média poderada de M é definido por*

$$\boldsymbol{H}_f = \boldsymbol{H} + (\overline{\nabla} f)^{\perp},$$

onde

$$\boldsymbol{H} = traço A.$$

A hipersuperfície M é chamada f-mínima quando o vetor curvatura média ponderada $\boldsymbol{H}_f$ é identicamente nulo; quando existe uma constante real C, tal que $\boldsymbol{H}_f = -C\eta$, onde η é o campo vetorial normal unitário, dizemos que a hipersuperfície M tem curvatura média ponderada constante.

Definição 4.2. *Uma variação de x é uma aplicação $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to \overline{M}_f$ tal que, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $F_t : M \to \overline{M}_f$, definida por $F_t(p) = F(t,p)$, é uma imersão isométrica com $F_0(p) = x(p)$ para todo $p \in M$. A variação é própria, se existe um compacto $K \subset M$, tal que $F_t(p) = x(p)$ para todo $p \in M \setminus K$.*

Se $e^{-f}d\sigma_t$ denota o elemento de volume ponderado da métrica induzida em M pela imersão F_t, o *funcional área ponderada*, associado a variação F, é a função $\mathscr{A}_f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathscr{A}_f(t) = \int_M e^{-f} d\sigma_t = \mathrm{Vol}_f(F_t(M)).$$

O *funcional volume ponderado* é a função $\mathscr{V}_f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathscr{V}_f(t) = \int_{[0,t]\times M} F^* \left(e^{-f} d\mu \right),$$

onde $e^{-f}d\mu$ denota o elemento de volume ponderado da variedade $\overline{M}_f$.

Teorema 4.1 (Primeira Fórmula da Variação)**.** *Sejam $x : M \to \overline{M}_f$ uma imersão isométrica e $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to \overline{M}_f$ uma variação própria com campo variacional $\partial_t F(t,p)$. Então*

$$\mathscr{A}_f'(0) = \int_M H_f u e^{-f} d\sigma \tag{4.1}$$

e

$$\mathscr{V}_f'(0) = \int_M u e^{-f} d\sigma. \tag{4.2}$$

onde $\boldsymbol{H}_f = -H_f \eta$ e $u(p) = \langle \partial_t F(0,p), \eta(p) \rangle$ para todo $p \in M$.

Demonstração. De fato,

$$\mathscr{A}_f'(0) = \int_M \frac{d}{dt}\left(e^{-f}\right) d\sigma_t + \int_M e^{-f} \frac{d}{dt}(d\sigma_t).$$

Seja $E_t(p) = \partial_t F(t,p)$ o campo variacional da variação F. É conhecido que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} d\sigma_t = \left[-\langle E_0, \mathbf{H}\rangle + \operatorname{div}(E_0^\top)\right] d\sigma.$$

Além disso,

$$\frac{d}{dt} e^{-f} = -e^{-f} \langle E, \overline{\nabla} f \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_f'(0) &= -\int_M e^{-f} \langle E_0, \overline{\nabla} f \rangle d\sigma + \int_M e^{-f} \left[-\langle E_0, \mathbf{H}\rangle + \operatorname{div}(E_0^\perp)\right] d\sigma \\
&= -\int_M e^{-f} \langle E_0, \mathbf{H} + \overline{\nabla} f \rangle d\sigma + \int_M e^{-f} \operatorname{div}(E_0^\perp)\, d\sigma \\
&= -\int_M e^{-f} \langle E_0, \mathbf{H}_f \rangle d\sigma - \int_M e^{-f} \langle E_0^\top, \nabla f \rangle d\sigma + \int_M e^{-f} \operatorname{div}(E_0^\perp)\, d\sigma.
\end{aligned}$$

Visto que

$$\operatorname{div}(e^{-f} E_0^\top) = e^{-f} \operatorname{div}(E_0^\top) - e^{-f} \langle \nabla f, E_0^\top \rangle$$

e F é uma variação própria ($E = 0$ em $M \setminus K$), obtemos

$$\mathscr{A}_f'(0) = -\int_M e^{-f} \langle E_0, \mathbf{H}_f \rangle d\sigma = \int_M H_f u e^{-f} d\sigma,$$

onde $u = \langle E, \eta \rangle$. Isto prova a igualdade (4.1).

Agora, fixe um ponto $p \in M$ e escolha um referencial ortonormal adaptado e positivo $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \eta\}$ em uma vizinhança de p. Assim,

$$F^*(e^{-f} d\mu) = a(t,p) dt \wedge d\sigma,$$

onde

$$\begin{aligned}
a(t,p) &= F^*(e^{-f} d\mu)(e_1, e_2, \ldots, e_n, \partial_t) \\
&= e^{-f} d\mu\,(dF_t(e_1), dF_t(e_2), \ldots, dF_t(e_n), \partial_t F(t,p)) \\
&= e^{-f} \operatorname{vol}(dF_t(e_1), dF_t(e_2), \ldots, dF_t(e_n), \partial_t F(t,p)) \\
&= e^{-f} \langle \partial_t F(t,p), \eta_t \rangle \sqrt{\det(\langle dF_t(e_i), dF_t(e_j)\rangle)}
\end{aligned}$$

e η_t é o campo vetorial unitário normal à imersão F_t. Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_f'(0) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int_{[0,t]\times M} a(t,p)dt\wedge d\sigma = \int_M a(0,p)d\sigma \\
&= \int_M \langle \partial_t F(0,p),\eta_t\rangle\, e^{-f}d\sigma \\
&= \int_M ue^{-f}d\sigma,
\end{aligned}$$

onde $u = \langle \partial_t F(0,p),\eta_t\rangle$. □

A expressão (4.1) é conhecida como a *primeira fórmula da variação* do funcional área ponderada.

Observação 4.1. *Em (MCGONAGLE; ROSS, 2015), McGonagle e Ross obtiveram a primeira fórmula da variação para hipersuperfícies $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}_f$, isto é, no caso onde $\overline{M}_f = \mathbb{R}^{n+1}_f$ (ver (MCGONAGLE; ROSS, 2015), igualdade (2.1), pg. 282).*

Definição 4.3. *Dizemos que uma variação F é normal quando o campo variacional $\partial_t F$ é normal a $F_t(M)$. A variação F preserva volume ponderado, se $\mathscr{V}_f(t) = \mathscr{V}_f(0)$ para todo $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.*

Lema 4.1. *Dada uma função $u \in C_c^\infty(M)$ satisfazendo $\int_M ue^{-f}d\sigma = 0$, existe uma variação própria e normal $F : (-\varepsilon,\varepsilon)\times M \to \overline{M}_f$, com campo variacional $\partial_t F(0,p) = u(p)\eta(p)$ e $\mathscr{V}_f(t) = \mathscr{V}_f(0)$ para todo $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.*

Demonstração. A prova deste lema segue de argumentos análogos aos apresentados por Barbosa, do Carmo e Eschenburg na prova do Lema 2.2 de (BARBOSA *et al.*, 1988). Por isso, omitiremos tal demonstração. □

Decorre do Lema 4.1 que cada função $u \in C_c^\infty(M)$, satisfazendo a condição

$$\int_M ue^{-f}d\sigma = 0,$$

está associada a uma variação própria, normal e que preserva o volume ponderado.

Corolário 4.1. *Seja $x : M \to \overline{M}_f$ uma imersão isométrica. Então, a hipersuperfície M tem curvatura média ponderada constante se, e somente se, $\mathscr{A}_f'(0) = 0$ para toda variação própria e normal que preserva volume ponderado.*

Demonstração. Suponha que M tem curvatura média ponderada constante, isto é $H_f = C$. Seja F uma variação própria e normal de $x : M \to \overline{M}_f$ que preserva volume ponderado, então decorre do Teorema 4.1 que

$$\mathscr{A}_f'(0) = C\int_M e^{-f}\langle \partial_t F(0,p),\eta\rangle d\sigma = C\mathscr{V}'(0) = 0.$$

A conclusão deste resultado segue de argumentos análogos aos apresentados por Barbosa e do Carmo na prova da Proposição 2.7 de (BARBOSA; CARMO, 1984). □

Observação 4.2. *As hipersuperfícies f-mínimas são pontos críticos do funcional área ponderada, ver Teorema 4.1 e Corolário 4.1. Já, as hipersuperfícies com curvatura média ponderada constante são pontos críticos do funcional área ponderada restrito às variações próprias e normais que preservam o volume ponderado, ou melhor, para funções $u \in C_c^\infty(M)$ que satisfazem a condição adicional*

$$\int_M ue^{-f}d\sigma = 0.$$

Para cada ponto crítico, obtemos a *segunda variação* do funcional área ponderada:

Teorema 4.2 (Segunda Fórmula da Variação)**.** *Sejam $x : M \to \overline{M}_f$ uma imersão isométrica com curvatura média ponderada constante e $F : (-\varepsilon,\varepsilon)\times M \to \overline{M}_f$ uma variação própria e normal. Então*

$$\mathscr{A}_f''(0) = -\int_M \left(u\Delta_f u + \left(|A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta)\right)u^2\right)e^{-f}d\sigma, \tag{4.3}$$

onde A é a segunda forma fundamental e $\overline{\mathrm{Ric}}_f = \overline{\mathrm{Ric}} + \overline{\nabla}^2 f$ é o tensor curvatura de Ricci Bakry-Émery.

Demonstração. De fato, sejam $E_t = \partial_t F(t,\cdot)$ o campo variacional associado a variação F e $H_f = C$, onde C é uma constante real. Assim,

$$\mathscr{A}_f'(t) = \int_M H_f(t)\langle E_t,\eta_t\rangle e^{-f}d\sigma_t$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}''(0) &= \int_M H_f'(0)ue^{-f}d\sigma + \int_M H_f \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(\langle E_t,\eta_t\rangle e^{-f}d\sigma_t\right)\\
&= \int_M H_f'(0)ue^{-f}d\sigma + C\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_M \langle E_t,\eta_t\rangle e^{-f}d\sigma_t\\
&= \int_M H_f'(0)ue^{-f}d\sigma + C\mathscr{V}_f'(0)\\
&= \int_M H_f'(0)ue^{-f}d\sigma.
\end{aligned}$$

Note que

$$-H_f'(0) = -H'(0) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\langle\overline{\nabla}f,\eta_t\rangle = -H'(0) + \overline{\nabla}^2 f(\eta,\eta)u + \langle\overline{\nabla}f,\overline{\nabla}_{E_0}\eta\rangle, \tag{4.4}$$

onde $u = \langle E_0,\eta\rangle$. É conhecido que

$$-H'(0) = \Delta u + |A|^2 u + \overline{\mathrm{Ric}}(\eta,\eta)u. \tag{4.5}$$

Seja $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ um referencial ortonormal de TM. Como $[E_0,e_i] = 0$ para cada $i = 1,2,\ldots,n$, então

$$\nabla u = \sum_{i=1}^n e_i(\langle E_0,\eta\rangle)e_i = \sum_{i=1}^n\langle\overline{\nabla}_{e_i}E_0,\eta\rangle e_i + \sum_{i=1}^n\langle E_0,\overline{\nabla}_{e_i}\eta\rangle e_i = \sum_{i=1}^n\langle\overline{\nabla}_{E_0}e_i,\eta\rangle e_i = -\overline{\nabla}_{E_0}\eta. \tag{4.6}$$

Assim, substituído (4.5) e (4.6) em (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} -H_f'(0) &= \Delta u + |A|^2 u + \overline{\mathrm{Ric}}(\eta,\eta)u + \overline{\nabla}^2 f(\eta,\eta)u - \langle \overline{\nabla} f, \nabla u\rangle \\ &= \Delta_f u + |A|^2 u + \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta)u. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathscr{A}_f''(0) = -\int_M \left(u\Delta_f u + \left(|A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta)\right)u^2\right)e^{-f}d\sigma.$$

□

Observação 4.3. *A segunda fórmula da variação do funcional área ponderada, $\mathscr{A}_f''(0)$, pode ser vista em (MCGONAGLE; ROSS, 2015), Lema 2.3, para imersões isométricas de hipersuperfícies M^n em $\mathbb{R}^{n+1}_f$ com curvatura média ponderada constante. Quando f é uma função constante, a primeira e segunda fórmula da variação foram dadas por Barbosa e do Carmo (BARBOSA; CARMO, 1984) e Barbosa, do Carmo e Eschenburg (BARBOSA* et al.*, 1988).*

Definição 4.4. *O operador*

$$L_f = \Delta_f + |A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta)$$

é chamado operador f-estabilidade da imersão x. No caso f-mínima, o operador f-estabilidade age em $\mathscr{F} = C_c^\infty(M)$; no caso da hipersuperfície com curvatura média ponderada constante, o operador f-estabilidade age em

$$\mathscr{F} = \left\{u \in C_c^\infty(M);\ \int_M ue^{-f}d\sigma = 0\right\}.$$

O operador L_f é um operador autoadjunto e está associado à forma quadrática

$$I_f(u,u) = -\int_M uL_f ue^{-f}d\sigma.$$

Definição 4.5. *Para cada domínio compacto $\Omega \subset M$, defina o índice, $\mathrm{Ind}_f\,\Omega$, de L_f em Ω como a dimensão do maior subespaço de $\mathscr{F}$, no qual I_f é negativa definida. O índice, $\mathrm{Ind}_f M$, de L_f em M (ou simplesmente, o índice de M) é então definida por*

$$\mathrm{Ind}_f M = \sup_{\Omega\subset M} \mathrm{Ind}_f\,\Omega,$$

onde o supremo é tomado sobre todos domínios compactos $\Omega \subset M$.

Se $\mathrm{Ind}_f M = 0$, dizemos que M é L_f-*estável*. Caso contrário, ou seja, $\mathrm{Ind}_f M > 0$, M é L_f-*instável*.

5 ESTIMATIVAS PARA CURVATURA MÉDIA PONDERADA

Damos algumas aplicações dos teoremas obtidos no Capítulo 2. De fato, enunciamos e demonstramos o Teorema 1.4 e o Teorema 1.5, e seus respectivos corolários, os quais foram enunciados na Introdução. Estes resultados tratam-se de estimativas da curvatura média ponderada de hipersuperfícies não compactas com índice de f-estabilidade finito.

Sejam $x : M^n \to \overline{M}_f^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície orientável M^n em uma variedade ponderada $\overline{M}_f^{n+1}$ e

$$\mathbf{H}_f = \mathbf{H} + (\overline{\nabla} f)^{\perp}$$

o vetor curvatura média ponderada da hipersuperfície M. O operador f-estabilidade é dado por

$$L_f = \Delta_f + |A|^2 + \overline{\mathrm{Ric}_f}(\eta, \eta),$$

onde $\overline{\mathrm{Ric}}_f = \overline{\mathrm{Ric}} + \overline{\nabla}^2 f$ é o tensor curvatura de Ricci Bakry-Émery. No caso f-mínima, o operador f-estabilidade age em $\mathscr{F} = C_c^\infty(M)$; no caso da hipersuperfície com curvatura média ponderada constante, o operador f-estabilidade age em

$$\mathscr{F} = \left\{ u \in C_c^\infty(M);\ \int_M u e^{-f} d\sigma = 0 \right\}.$$

O operador L_f é um operador autoadjunto e está associado à forma quadrática

$$I_f(u,u) = -\int_M u L_f u e^{-f} d\sigma.$$

Definição 5.1. *Para cada domínio compacto $\Omega \subset M$, defina o índice,* $\mathrm{Ind}_f\,\Omega$*, de L_f em Ω como a dimensão do maior subespaço de $\mathscr{F}$ no qual I_f é negativa definida. O índice,* $\mathrm{Ind}_f M$*, de L_f em M (ou simplesmente, o índice de M) é então definido por*

$$\mathrm{Ind}_f M = \sup_{\Omega \subset M} \mathrm{Ind}_f\,\Omega,$$

onde o supremo é tomado sobre todos domínios compactos $\Omega \subset M$.

Observação 5.1. *No caso da hipersuperfície com curvatura média ponderada constante, podemos analisar o índice de L_f em M, com L_f agindo em $C_c^\infty(M)$ ao invés de*

$$\left\{ u \in C_c^\infty(M);\ \int_M u e^{-f} d\sigma = 0 \right\}.$$

Isto define o índice forte de L_f em M, denotado por $\mathrm{ind}_f M$*. Entretanto, pode-se verificar que $Ind_f M < \infty$ é equivalente a $ind_f(M) < \infty$, então no Teorema 5.1, Teorema 5.2 e seus respectivos corolários, torna-se irrelevante supor $ind_f M < \infty$ ao invés de* $\mathrm{Ind}_f M < \infty$.

Lema 5.1. *Seja m um número real, tal que $m < -1$ ou $m > 0$. Então*

$$(a+b)^2 \geq \frac{a^2}{1+m} - \frac{b^2}{m}$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Inicialmente, note que

$$\left(\frac{1}{k}a + kb\right)^2 \geq 0, \quad \text{onde } k = \sqrt{\frac{1+m}{m}}.$$

Logo,

$$0 \leq \frac{1}{k^2}a^2 + 2ab + k^2b^2 = \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)a^2 + (k^2-1)b^2 + (a+b)^2,$$

isto é,

$$(a+b)^2 \geq \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)a^2 + (1-k^2)b^2 = \frac{a^2}{1+m} - \frac{b^2}{m}.$$

□

Seja

$$\overline{\mathrm{Ric}}_f^{\,nm} = \overline{\mathrm{Ric}}_f - \frac{df \otimes df}{nm}, \quad m > 0,$$

uma generalização do tensor curvatura de Ricci Bakry-Émery.

Como uma aplicação das estimativas do ínfimo do espectro essencial do operador Laplaciano ponderado dadas no Teorema 3.1, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5.1. *Seja M^n uma hipersuperfície não compacta e completa imersa isometricamente em uma variedade ponderada completa e orientada $\overline{M}_f^{n+1}$ com campo vetorial normal unitário η. Sejam*

$$\mu_v = \liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{Vol}_f(B_r) \quad e \quad \mu_w = \liminf_{r\to\infty} \frac{-1}{r} \log(\mathrm{Vol}_f(M) - \mathrm{Vol}_f(B_r)).$$

Se M tem curvatura média ponderada constante H_f e $\mathrm{ind}_f M < \infty$, então

$$\frac{H_f^2}{nm} \geq -\frac{\mu^2}{4} + \inf_{M\setminus B_r}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta) + \frac{\langle\overline{\nabla} f, \eta\rangle^2}{n(1+m)}\right\} \tag{5.1}$$

e

$$\frac{H_f^2}{n(1+m)} \leq \frac{\mu^2}{4} - \inf_{M\setminus B_r}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}_f^{\,nm}(\eta,\eta)\right\}$$

para qualquer constante $m > 0$ fixada, onde $\mu = \mu_v$ se $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$ e $\mu = \mu_w$ se $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$. Em particular, se

$$\overline{\mathrm{Ric}}_f^{\,nm}(\eta,\eta) \geq \frac{\mu^2}{4}$$

para alguma constante positiva m, então M é uma hipersuperfície f-mínima.

Demonstração. Note que a função $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$, restrita a M, induz uma medida ponderada $e^{-f}d\sigma$ em M. Seja

$$M^n_f = (M, g, e^{-f}d\sigma)$$

a variedade ponderada induzida pela imersão.

Como $\mathrm{ind}_f M < \infty$ por hipótese, então, usando a Proposição 5 de (IMPERA; RIMOLDI, 2015), existem um conjunto compacto Ω e uma função positiva u em M, tais que

$$0 = L_f u = \Delta_f u + |A|^2 u + \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta, \eta)u$$

em $M \setminus \Omega$. Sejam $o \in M$ e r_0 um número real suficientemente grande, de modo que Ω esteja contido em $B_{r_0}(o)$. Logo, segue da igualdade (3.12) e do Teorema 3.1 que

$$\lambda_1^f(M \setminus B_r) \leq \inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \frac{\mu^2}{4},$$

onde $\mu = \mu_v$ se $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$ e $\mu = \mu_w$ se $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$. Agora, usando a Proposição 2.1 e a desigualdade anterior, obtemos

$$\frac{\mu^2}{4} \geq \lambda_1^f(M \setminus B_r) \geq \inf_{M \setminus B_r}\left(-\frac{\Delta_f u}{u}\right) \geq \inf_{M \setminus B_r}\left\{\frac{H^2}{n} + \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta, \eta)\right\},$$

pois $|A|^2 \geq \dfrac{H^2}{n}$. Visto que $H_f = H - \langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle$ é constante, decorre do Lema 5.1 que

$$H^2 = ((H_f) + \langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle)^2 \geq \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{1+m} - \frac{H_f^2}{m}$$

e

$$H^2 = ((H_f) + \langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle)^2 \geq \frac{H_f^2}{1+m} - \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{m}$$

para $m > 0$. Portanto,

$$\frac{\mu^2}{4} \geq \lambda_1^f(M \setminus B_r) \geq \inf_{M \setminus B_r}\left\{\frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{n(1+m)} - \frac{H_f^2}{nm} + \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta, \eta)\right\}$$

e

$$\frac{\mu^2}{4} \geq \lambda_1^f(M \setminus B_r) \geq \inf_{M \setminus B_r}\left\{\frac{H_f^2}{n(1+m)} - \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{nm} + \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta, \eta)\right\}.$$

Logo,

$$\frac{H_f^2}{nm} \geq -\frac{\mu^2}{4} + \inf_{M \setminus B_r}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta, \eta) + \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{n(1+m)}\right\}$$

e

$$\frac{H_f^2}{n(1+m)} \leq \frac{\mu^2}{4} - \inf_{M \setminus B_r}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta, \eta)\right\},$$

pois H_f é constante. Em particular, se

$$\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta, \eta) \geq \frac{\mu^2}{4},$$

então, usando a última desigualdade, obtemos que M é uma hipersuperfície f-mínima. $\square$

Observação 5.2. *É conhecido que, se uma variedade ponderada completa $\overline{M}_f$ satisfaz $\overline{\mathrm{Ric}}_f \geq kg$ para alguma constante $k > 0$, então $\overline{M}_f$ não é necessariamente compacta. Um dos exemplos é o Gaussian shrinking soliton $\left(\mathbb{R}^n, g_{can}, e^{-\frac{|x|^2}{4}} d\sigma\right)$ com a métrica canônica g_{can} e $\overline{\mathrm{Ric}}_f = \frac{1}{2}g$.*

Corolário 5.1. *Seja $\overline{M}_f^{n+1}$ uma variedade ponderada completa e orientada com $\overline{\mathrm{Ric}}_f \geq kg$, onde $k > 0$ é uma constante fixada. Então, não existe hipersuperfície f-mínima não compacta e completa M^n imersa em $\overline{M}_f^{n+1}$ com $\mathrm{ind}_f M < \infty$ e satisfazendo*

(i) $\mu_v < 2\sqrt{k}$ *se* $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$ *ou*

(ii) $\mu_w < 2\sqrt{k}$ *se* $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$.

Demonstração. De fato, como $\overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta) \geq k$ por hipótese, e $\langle\overline{\nabla} f,\eta\rangle^2 \geq 0$, então

$$\inf_{M\setminus B_r}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta) + \frac{\langle\overline{\nabla} f,\eta\rangle^2}{n(1+m)}\right\} \geq k.$$

Portanto, decorre do Teorema 5.1, desigualdade (5.1), que

$$\frac{H_f^2}{nm} \geq -\frac{\mu^2}{4} + \inf_{M\setminus B_r}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta) + \frac{\langle\overline{\nabla} f,\eta\rangle^2}{n(1+m)}\right\} \geq -\frac{\mu^2}{4} + k,$$

onde $\mu = \mu_v$ se $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$ ou $\mu = \mu_w$ se $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$. Logo, H_f não pode ser nula se $\mu_v < 2\sqrt{k}$ ou $\mu_w < 2\sqrt{k}$. □

É dito que o volume ponderado de M tem *crescimento polinomial* quando existem constantes positivas α, C e R_0, tais que

$$\mathrm{Vol}_f(B_r) \leq Cr^{\alpha}$$

para qualquer $r \geq R_0$. Assim,

$$0 \leq \mu_v = \liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r}\log \mathrm{Vol}_f(B_r) \leq \liminf_{r\to\infty}\frac{1}{r}\log(Cr^{\alpha}) = 0,$$

isto é, $\mu_v = 0$. Logo, segue do Teorema 5.1 a seguinte consequência:

Corolário 5.2. *Seja M^n uma hipersuperfície não compacta e completa imersa isometricamente em uma variedade ponderada completa e orientada $\overline{M}_f^{n+1}$. Assuma que o volume ponderado de M é infinito e tem crescimento polinomial. Se M tem curvatura média ponderada constante H_f e $\mathrm{ind}_f M < \infty$, então existe uma constante $r_0 > 0$ tal que, para todo $r \geq r_0$,*

$$\frac{H_f^2}{nm} \geq \inf_{M\setminus B_r}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta) + \frac{\langle\overline{\nabla} f,\eta\rangle^2}{n(1+m)}\right\} \tag{5.2}$$

e

$$\frac{H_f^2}{n(1+m)} \leq -\inf_{M\setminus B_r}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta,\eta)\right\},$$

onde m é uma constante positiva e η é o campo vetorial unitário normal a M. Em particular, se

$$\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta,\eta) \geq 0$$

para alguma constante $m > 0$, então M é uma hipersuperfície f-mínima.

Observe ainda que, se assumirmos $\mathrm{Vol}_f(B_r) \leq Ce^{\alpha r}$ para $r \geq R_0$, então

$$\mu_v = \liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{Vol}_f(B_r) \leq \liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log(Ce^{\alpha r}) = \alpha.$$

Logo, como uma consequência do Teorema 5.1, obtemos o seguinte:

Corolário 5.3. *Seja M^n uma hipersuperfície não compacta e completa imersa isometricamente em uma variedade ponderada completa e orientada $\overline{M}_f^{n+1}$. Assuma que o volume ponderado de M é infinito e satisfaz $\mathrm{Vol}_f(B_r) \leq Ce^{\alpha r}$ para $r \geq R_0$ e para constantes positivas C e α. Se M tem curvatura média ponderada constante H_f e $\mathrm{ind}_f M < \infty$, então existe uma constante $r_0 > 0$ tal que, para todo $r \geq r_0$,*

$$\frac{H_f^2}{nm} \geq -\frac{\alpha^2}{4} + \inf_{M\setminus B_r} \left\{ \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta) + \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta\rangle^2}{n(1+m)} \right\} \tag{5.3}$$

e

$$\frac{H_f^2}{n(1+m)} \leq \frac{\alpha^2}{4} - \inf_{M\setminus B_r} \left\{ \overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta,\eta) \right\},$$

onde m é uma constante positiva fixada e η é o campo vetorial unitário normal a M. Em particular, se

$$\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta,\eta) \geq \frac{\alpha^2}{4}$$

para algum $m > 0$, então M é uma hipersuperfície f-mínima.

Observação 5.3. *Quando f é uma função constante, o Corolário 5.2 foi obtido por Alencar e do Carmo, ver Teorema 1.1 de (ALENCAR; CARMO, 1993), e melhorado por do Carmo e Zhou, ver Teorema 4.1 de (CARMO; ZHOU, 1999). Ainda, o Corolário 5.3 foi provado por do Carmo e Zhou, ver Teorema 4.4 de (CARMO; ZHOU, 1999), supondo que f é uma função constante.*

Usando a desigualdade (5.2) do Corolário 5.2 e a desigualdade (5.3) do Corolário 5.3, podemos obter os próximos dois resultados:

Corolário 5.4. *Seja $\overline{M}_f^{n+1}$ uma variedade ponderada completa e orientada com $\overline{\mathrm{Ric}}_f \geq kg$, onde $k > 0$ é uma constante fixada. Então, não existe hipersuperfície f-mínima não compacta e completa M^n imersa em $\overline{M}_f^{n+1}$ com $\mathrm{ind}_f M < \infty$, $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$ e crescimento de volume ponderado polinomial.*

Corolário 5.5. *Seja $\overline{M}_f^{n+1}$ uma variedade ponderada completa e orientada com $\overline{\mathrm{Ric}}_f \geq kg$, onde $k > 0$ é uma constante fixada. Então, não existe hipersuperfície f-mínima não compacta e completa M^n imersa em $\overline{M}_f^{n+1}$ com $ind_f M < \infty$, $\mathrm{Vol}_f(M) = +\infty$ e $\mathrm{Vol}_f(B_r) \leq Ce^{\alpha r}$ para qualquer $r \geq R_0$, onde C e $\alpha < 2\sqrt{k}$ são constantes positivas.*

Agora, usando a estimativa de $\lambda_1(M \setminus \Omega)$ vista no Teorema 3.3, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5.2. *Seja M^n uma hipersuperfície não compacta e completa imersa isometricamente em uma variedade ponderada completa e orientada $\overline{M}_f^{n+1}$. Assuma que*

$$\left|\frac{d}{dr}\left(\log \mathrm{vol}_f(\partial B_r)\right)\right| \leq \alpha \ \ para \ \ todo\ r \geq t_0 > 0.$$

Se M tem curvatura média ponderada constante H_f e $\mathrm{ind}_f M < \infty$, então existe uma constante $r_0 > 0$ tal que, para todo $r \geq r_0$,

$$\frac{H_f^2}{nm} \geq -\frac{\alpha^2}{4} + \inf_{M \setminus B_r}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta) + \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta\rangle^2}{n(1+m)}\right\} \tag{5.4}$$

e

$$\frac{H_f^2}{n(1+m)} \leq \frac{\alpha^2}{4} - \inf_{M \setminus B_r}\left\{\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta,\eta)\right\},$$

onde m é uma constante positiva e η é o campo vetorial unitário normal a M. Em particular, se

$$\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta,\eta) \geq \frac{\alpha^2}{4}$$

para algum real $m > 0$, então M é uma hipersuperfície f-mínima.

Demonstração. Note que a função $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$, restrita a M, induz uma medida ponderada $e^{-f}d\sigma$ em M. Assim, temos uma variedade ponderada induzida $M_f^n = (M, g, e^{-f}d\sigma)$.

Como $\mathrm{ind}_f M < \infty$ por hipótese, então, usando a Proposição 5 de (IMPERA; RIMOLDI, 2015), existem um conjunto compacto Ω e uma função positiva u em M, tais que

$$0 = L_f u = \Delta_f u + |A|^2 u + \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta)u$$

em $M \setminus \Omega$. Sejam $o \in M$ e $r_0 > 0$ satisfazendo $\Omega \subset B_{r_0}$. Logo, decorre do Teorema 3.3 e da igualdade (3.12) que

$$\lambda_1^f(M \setminus B_r) \leq \inf \sigma_{ess}(-\Delta_f) \leq \frac{\alpha^2}{4}.$$

Segue da Proposição 2.1 e da desigualdade anterior que

$$\frac{\alpha^2}{4} \ \ \geq \ \ \lambda_1^f(M \setminus B_r) \geq \inf_{M \setminus B_r}\left(-\frac{\Delta_f u}{u}\right) \geq \inf_{M \setminus B_r}\left\{\frac{H^2}{n} + \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta,\eta)\right\},$$

pois $|A|^2 \geq \frac{H^2}{n}$. Visto que $H_f = H - \langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle$ é constante, então decorre do Lema 5.1 que

$$H^2 = ((H_f) + \langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle)^2 \geq \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{1+m} - \frac{H_f^2}{m}$$

e

$$H^2 = ((H_f) + \langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle)^2 \geq \frac{H_f^2}{1+m} - \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{m}$$

para $m > 0$. Portanto,

$$\frac{\alpha^2}{4} \quad \geq \quad \lambda_1^f(M \setminus B_r) \geq \inf_{M \setminus B_r} \left\{ \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{n(1+m)} - \frac{H_f^2}{nm} + \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta, \eta) \right\}$$

e

$$\frac{\alpha^2}{4} \quad \geq \quad \lambda_1^f(M \setminus B_r) \geq \inf_{M \setminus B_r} \left\{ \frac{H_f^2}{n(1+m)} - \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{nm} + \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta, \eta) \right\}.$$

Logo,

$$\frac{H_f^2}{nm} \geq -\frac{\alpha^2}{4} + \inf_{M \setminus B_r} \left\{ \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta, \eta) + \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{n(1+m)} \right\}$$

e

$$\frac{H_f^2}{n(1+m)} \leq \frac{\alpha^2}{4} - \inf_{M \setminus B_r} \left\{ \overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta, \eta) \right\}.$$

Em particular, se

$$\overline{\mathrm{Ric}}_f^{nm}(\eta, \eta) \geq \frac{\alpha^2}{4}$$

para algum $m > 0$, então M é uma hipersuperfície f-mínima. □

Como uma consequência da desigualdade (5.4) do Teorema 5.2, segue-se

Corolário 5.6. *Seja $\overline{M}_f^{n+1}$ uma variedade ponderada completa e orientada com $\overline{\mathrm{Ric}}_f \geq kg$, onde $k > 0$ é uma constante fixada. Então, não existe hipersuperfície f-mínima não compacta e completa M^n imersa em $\overline{M}_f^{n+1}$ com $\mathrm{ind}_f M < \infty$ e*

$$\left| \frac{d}{dr} \big(\log \mathrm{vol}_f(\partial B_r) \big) \right| \leq \alpha < 2\sqrt{k}$$

para todo $r \geq t_0 > 0$.

Demonstração. De fato, como $\overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta, \eta) \geq k$ por hipótese, e $\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2 \geq 0$, então

$$\inf_{M \setminus B_r} \left\{ \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta, \eta) + \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{n(1+m)} \right\} \geq k.$$

Portanto, decorre do Teorema 5.2, desigualdade (5.4), que

$$\frac{H_f^2}{nm} \geq -\frac{\alpha^2}{4} + \inf_{M \setminus B_r} \left\{ \overline{\mathrm{Ric}}_f(\eta, \eta) + \frac{\langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle^2}{n(1+m)} \right\} \geq -\frac{\alpha^2}{4} + k$$

para hipersuperfícies que satisfazem

$$\left| \frac{d}{dr} \big(\log \mathrm{vol}_f(\partial B_r) \big) \right| \leq \alpha$$

para todo $r \geq t_0 > 0$. Logo, H_f não pode ser nula se $\alpha < 2\sqrt{k}$. $\square$

6 *GRADIENT RICCI SOLITON*

Os *gradient Ricci solitons* são generalizações naturais das variedades de Einstein e correspondem as soluções autossimilares do fluxo de Ricci de Hamilton (ver (HAMILTON, 1982) e (HAMILTON, 1988)). Um exemplo de um *gradient Ricci soliton* é o *Gaussian shrinking soliton*

$$\mathbb{R}^{n+1}_f = \left(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f} d\sigma\right)$$

que satisfaz

$$\overline{\mathrm{Ric}} + \overline{\nabla}^2 f = \frac{1}{2} g_{can},$$

onde g_{can} é a métrica canônica e $f(x) = \dfrac{|x|^2}{4}$ é o potencial.

Definição 6.1. *Uma variedade Riemanniana completa $(\overline{M}^m, g)$ é chamada gradient Ricci soliton quando existe uma função $f \in C^\infty(\overline{M})$, tal que o tensor curvatura de Ricci de $(\overline{M}^m, g)$ satisfaz*

$$\overline{\mathrm{Ric}} + \overline{\nabla}^2 f = kg$$

para alguma constante k. Para $k = 0$, o Ricci soliton é steady, para $k > 0$, ele é shrinking e para $k < 0$, expanding. A função f é chamada de função potencial do gradient Ricci soliton.

Neste capítulo, vamos analisar os volumes ponderados de subvariedades próprias não compactas de um *gradient Ricci soliton*. Além disso, iremos demonstrar alguns resultados sobre o índice de f-estabilidade de hipersuperfícies imersas isometricamente em um *gradient Ricci soliton*. Os resultados que serão demonstrados neste capítulo foram enunciados na Introdução. A saber: Teorema 1.6, Teorema 1.7, Teorema 1.8, Corolário 1.7 e Corolário 1.8.

6.1 Subvariedade Própria e Volume Ponderado Finito

Podemos considerar subvariedades imersas isometricamente em um *gradient Ricci soliton*. Em particular, uma *self-shrinker* Σ^n para o fluxo de curvatura média é uma f-mínima do *Gaussian shrinking soliton* $\mathbb{R}^{n+1}_f$.

Definição 6.2. *Uma aplicação contínua $\varphi : X \to Y$ entre espaços topológicos é própria se para cada subconjunto compacto $K \subset Y$, a $\varphi^{-1}(K) \subset X$ é compacta. Em particular, dizemos que uma subvariedade $M^n \subset \overline{M}^m$ é própria se a aplicação inclusão $i : M^n \to \overline{M}^m$ é própria.*

Em ((CHENG; ZHOU, 2013), pg. 688, Theorem 1.3), Cheng e Zhou mostraram que as seguintes condições são equivalentes para uma *self-shrinker* completa $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}_f$:

- Σ é própria;

- Σ tem crescimento de volume Euclidiano;
- Σ tem crescimento de volume polinomial;
- Σ tem volume ponderado finito.

Estas equivalências continuam sendo válidas para hipersuperfícies f-mínimas imersas em um *gradient shrinking Ricci soliton* completo $\overline{M}_f$ com $\overline{\mathrm{Ric}}_f = \frac{1}{2}g$, onde f é uma função convexa (ver (CHENG *et al.*, 2015), pg. 4049, Corollary 1).

O resultado a seguir fornece condições necessárias para que uma subvariedade seja própria.

Teorema 6.1. *Seja M^n uma subvariedade não compacta e completa de uma variedade ponderada completa $\overline{M}^m_f$. Se M^n tem volume ponderado finito e a norma do vetor curvatura média ponderada é limitada superiormente, então M^n é própria.*

Demonstração. Suponhamos que M não é própria. Assim existe um número real positivo R, tal que $\overline{B}^{\overline{M}}_R(o) \cap M$ não é compacta em M, onde $\overline{B}^{\overline{M}}_R(o)$ denota o fecho de $B^{\overline{M}}_R(o)$. Então para qualquer $a > 0$ suficiente pequeno com $a < 2R$, existe uma sequência $\{p_k\}$ de pontos em $B^{\overline{M}}_R(o) \cap M$ com $\mathrm{dist}_M(p_k, p_j) \geq a > 0$ para quaisquer k e j distintos.

Visto que $B^M_{a/2}(p_k) \cap B^M_{a/2}(p_j) = \emptyset$ para quaisquer $k \neq j$, obtemos $B^M_{a/2}(p_j) \subset B^{\overline{M}}_{2R}(o)$, onde $B^M_{a/2}(p_k)$ e $B^M_{a/2}(p_j)$ denotam as bolas intrínsecas de M de raios $a/2$, centradas em p_k e p_j, respectivamente.

Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_xM. Se $x \in B^M_{a/2}(p_j)$, então a função distância extrínseca a p_j, denotada por $r_j(x) = \mathrm{dist}_{\overline{M}}(x, p_j)$, satisfaz

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}^2 r_j(e_i,e_i) &= \langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla} r_j, e_i\rangle = \langle \overline{\nabla}_{e_i}\nabla r_j, e_i\rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i}(\overline{\nabla} r_j)^{\perp}, e_i\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{e_i}\nabla r_j, e_i\rangle - \langle (\overline{\nabla} r_j)^{\perp}, \overline{\nabla}_{e_i} e_i\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_i}\nabla r_j, e_i\rangle + \langle (\overline{\nabla}_{e_i}\nabla r_j)^{\perp}, e_i\rangle - \langle A(e_i,e_i), \overline{\nabla} r_j\rangle \\
&= \nabla^2 r_j(e_i,e_i) - \langle \mathbf{H}, \overline{\nabla} r_j\rangle. \qquad (6.1)
\end{aligned}$$

Observe que $\overline{M}$ tem geometria limitada na bola $B^{\overline{M}}_{2R}(o)$, isto é, existem números reais positivos k e i_0, tais que a curvatura seccional de $\overline{M}$ é limitada superiormente por k e o raio de injetividade de $\overline{M}$ é limitado inferiormente por i_0 em uma vizinhança de um ponto $o \in \overline{M}$. Escolhendo $R > 0$, tal que $2R < \min\{i_0, 1/\sqrt{k}\}$, decorre da conhecida comparação da Hessiana da função distância (ver Lema 7.1, (COLDING; MINICOZZI II, 2011)), que

$$\overline{\nabla}^2 r_j(e_i,e_i) \geq -\sqrt{k} + \frac{1}{r_j}|e_i - \langle e_i, \overline{\nabla} r_j\rangle \overline{\nabla} r_j|^2 \qquad (6.2)$$

em $\overline{B}^{\overline{M}}_{2R}(o)$. Portanto, decorre das expressões em (6.1) e (6.2) que

$$\begin{aligned}
\Delta r_j &= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 r_j(e_i,e_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}^2 r_j(e_i,e_i) + \langle \mathbf{H}, \overline{\nabla} r_j\rangle \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \left(-\sqrt{k} + \frac{1}{r_j}|e_i - \langle e_i, \overline{\nabla} r_j\rangle \overline{\nabla} r_j|^2 \right) + |\mathbf{H}|\,|\overline{\nabla} r_j| + \langle (\overline{\nabla} f)^{\perp}, \overline{\nabla} r_j\rangle - \langle (\overline{\nabla} f)^{\perp}, \overline{\nabla} r_j\rangle \\
&\geq -n\sqrt{k} + \frac{n}{r_j} - \frac{|\nabla r_j|^2}{r_j} - |\mathbf{H}_f| - |(\overline{\nabla} f)^{\perp}|
\end{aligned}$$

em $\overline{B}^{\overline{M}}_{2R}(o) \cap M$. Visto que $\overline{B}^{\overline{M}}_{2R}(o)$ é compacta, e, por hipótese, a norma de $\mathbf{H}_f$ é limitada superiormente, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta r_j &\geq -n\sqrt{k} + \frac{n}{r_j} - \frac{|\nabla r_j|^2}{r_j} - \sup_{p \in B^{\overline{M}}_{2R}(o)\cap M} |\mathbf{H}_f(p)| - \sup_{p \in B^{\overline{M}}_{2R}(o)\cap M} |(\overline{\nabla} f(p))^{\perp}| \\
&\geq \frac{n}{r_j} - \frac{|\nabla r_j|^2}{r_j} - C,
\end{aligned}$$

onde

$$C = n\sqrt{k} + \sup_{p \in B^{\overline{M}}_{2R}(o)\cap M} |\mathbf{H}_f(p)| + \sup_{p \in \overline{B}^{\overline{M}}_{2R}(o)} |\overline{\nabla} f(p)| < +\infty.$$

Logo, em $B^{\overline{M}}_{2R}(o) \cap M$,

$$\Delta r_j^2 = 2r_j \Delta r_j + 2|\nabla r_j|^2 \geq 2r_j \left(\frac{n}{r_j} - \frac{|\nabla r_j|^2}{r_j} - C \right) + 2|\nabla r_j|^2 = 2n - 2Cr_j.$$

Escolhendo $a < \min\{2n/C, 2R\}$, temos para $0 < \zeta \leq a/2$,

$$\begin{aligned}
\int_{B^M_\zeta(p_j)} (2n - 2Cr_j)\, d\sigma &\leq \int_{B^M_\zeta(p_j)} \Delta r_j^2 \, d\sigma = \int_{\partial B^M_\zeta(p_j)} \langle \nabla r_j^2, \nu\rangle \, d\sigma \\
&\leq \int_{\partial B^M_\zeta(p_j)} 2r_j |\nabla r_j| |\nu| dA \leq \int_{\partial B^M_\zeta(p_j)} 2r_j \, dA \\
&\leq 2\zeta A_j(\zeta), \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

onde ν denota o campo vetorial normal unitário apontando para fora de $\partial B^M_\zeta(p_j)$ e $A_j(\zeta)$ denota área de $\partial B^M_\zeta(p_j)$. Segue da fórmula da coárea que

$$\begin{aligned}
\int_{B^M_\zeta(p_j)} (n - Cr_j)\, d\sigma &= \int_0^\zeta \int_{\partial B^M_t(p_j)} (n - Cr_j) dA_t \, dt \\
&\geq \int_0^\zeta (n - Ct) \int_{\partial B^M_t(p_j)} dA_t \, dt \\
&\geq (n - C\zeta) V_j(\zeta),
\end{aligned}$$

onde $V_j(\zeta)$ denota o volume de $B^M_\zeta(p_j)$. Portanto, usando a desigualdade (6.3),

$$(n - C\zeta)V_j(\zeta) \leq \zeta A_j(\zeta). \qquad (6.4)$$

Novamente, usando a fórmula da coárea, obtemos

$$V_j'(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}\int_{B^M_\zeta(p_j)} d\sigma = \frac{d}{d\zeta}\int_0^\zeta \int_{\partial B^M_t(p_j)} dA_t\, dt = \int_{\partial B^M_\zeta(p_j)} dA = A_j(\zeta).$$

Assim, segue da igualdade anterior e da desigualdade (6.4) que

$$\frac{d}{d\zeta}\log V_j(\zeta) = \frac{V_j'(\zeta)}{V_j(\zeta)} = \frac{A_j(\zeta)}{V_j(\zeta)} \geq \frac{n}{\zeta} - C. \tag{6.5}$$

Integrando (6.5) de $\varepsilon > 0$ a ζ,

$$\log V_j(\zeta) - \log V_j(\varepsilon) \geq n\log\zeta - n\log\varepsilon - C(\zeta-\varepsilon),$$

ou seja,

$$\frac{V_j(\zeta)}{V_j(\varepsilon)} \geq \frac{\zeta^n}{\varepsilon^n} e^{-C(\zeta-\varepsilon)}.$$

Agora, observando que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{V_j(\varepsilon)}{\varepsilon^n} = \omega_n,$$

obtemos

$$V_j(\zeta) \geq \omega_n \zeta^n e^{-C\zeta}$$

para $0 < \zeta \leq a/2$. Assim, concluímos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_f(M) &= \int_M e^{-f}\, d\sigma \geq \sum_{j=1}^{\infty}\int_{B^M_{a/2}(p_j)} e^{-f}\, d\sigma \\ &\geq \left(\inf_{\overline{B}^{\overline{M}}_{2R}(o)} e^{-f}\right)\sum_{j=1}^{\infty} V_j(a/2) = +\infty.\end{aligned}$$

Isto contradiz a afirmação de que o volume ponderado de M é finito. Logo, M^n é uma subvariedade própria de $\overline{M}^m_f$. □

Definição 6.3. *Uma função $f \in C^\infty(\overline{M})$ é dita convexa se a hessiana de f é não negativa, isto é, $\overline{\nabla}^2 f(Y,Y) \geq 0$ para todo $Y \in T\overline{M}$.*

Observação 6.1. *Seja $\overline{M}_f = (\overline{M}, g, e^f d\sigma)$ um gradient shrinking Ricci soliton completo satisfazendo*

$$\overline{\mathrm{Ric}} + \overline{\nabla}^2 f = \frac{1}{2}g.$$

Neste caso, Cao e Zhou (CAO; ZHOU, 2010) mostraram que, fazendo uma translação de f,

$$\overline{R} + |\overline{\nabla} f|^2 - f = 0 \quad e \quad \overline{R} \geq 0. \tag{6.6}$$

Assim, decorre das igualdades em (6.6) que

$$|\overline{\nabla} f|^2 \leq f. \tag{6.7}$$

Além disso, existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, tais que

$$\frac{1}{4}(r(x)-c_1)^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}(r(x)+c_2)^2, \tag{6.8}$$

onde $r(x) = \mathrm{dist}_{\overline{M}}(x,o)$ é a distância de $x \in \overline{M}$ à um ponto fixado $o \in \overline{M}$. A constante c_2 depende somente da dimensão da variedade e c_1 depende da geometria de g na bola unitária centrada em o (ver (CAO; ZHOU, 2010), Lemma 2.1, Lemma 2.2 e Theorem 1.1). Em (MUNTEANU; WANG, 2012), Munteanu e Wang mostraram que as desigualdades em (6.8) são válidas supondo apenas que $\overline{\mathrm{Ric}}_f \geq \frac{1}{2}g$ e $|\overline{\nabla} f|^2 \leq f$.

Teorema 6.2. *Sejam $f \in C^\infty(\overline{M})$ uma função convexa e $\overline{M}^m_f$ um gradient shrinking Ricci soliton completo. Se $x : M^n \to \overline{M}^m_f$ é uma subvariedade própria, não compacta e completa, com vetor curvatura média ponderada satisfazendo*

$$\sup_{x\in M}\langle \boldsymbol{H}_f, \overline{\nabla} f\rangle < +\infty,$$

então M^n tem volume ponderado finito e crescimento de volume polinomial.

Demonstração. Como $\overline{M}_f$ é um *gradient shrinking Ricci soliton*, é bem conhecido que, escalonando a métrica g e fazendo uma translação de f, ainda denotando por g e f, podemos normalizar a métrica e obter

$$\overline{\mathrm{Ric}}_f = \frac{1}{2}g.$$

Assim, segue da Observação 6.1 que

$$\overline{R} + |\overline{\nabla} f|^2 - f = 0, \qquad \overline{R} + \overline{\Delta} f = \frac{m}{2}, \qquad \overline{R} \geq 0,$$

e, portanto,

$$\overline{\Delta} f - |\overline{\nabla} f|^2 + f = \frac{m}{2} \quad \text{e} \quad |\overline{\nabla} f|^2 \leq f. \tag{6.9}$$

É importante ressaltar que mesmo quando fazemos o escalonamento da métrica e a translação de f, a subvariedade M continua sendo própria e satisfazendo

$$\sup_{x\in M}\langle \mathbf{H}_f, \overline{\nabla} f\rangle < +\infty.$$

Assim, segue da igualdade em (6.9) que

$$\begin{aligned}
\Delta_f f + f &= \Delta f - |\nabla f|^2 + f = \overline{\nabla}^2 f(e_i,e_i) + \langle \mathbf{H}, \overline{\nabla} f^\perp\rangle - |\nabla f|^2 + f \\
&= \overline{\Delta} f - \sum_{i=n+1}^{m} \overline{\nabla}^2 f(\eta_i,\eta_i) + \langle \mathbf{H}_f, \overline{\nabla} f^\perp\rangle - |\overline{\nabla} f^\perp|^2 - |\nabla f|^2 + f \\
&= \overline{\Delta} f - \sum_{i=n+1}^{m} \overline{\nabla}^2 f(\eta_i,\eta_i) + \langle \mathbf{H}_f, \overline{\nabla} f^\perp\rangle - |\overline{\nabla} f|^2 + f \\
&\leq \frac{m}{2} - \sum_{i=n+1}^{m} \overline{\nabla}^2 f(\eta_i,\eta_i) + C,
\end{aligned}$$

onde $C = \sup_{x \in M} \langle \mathbf{H}_f, \overline{\nabla} f^{\perp} \rangle$. Como f é uma função convexa, então

$$\Delta_f f + f \leq \frac{m}{2} + C.$$

Observe que

$$\frac{1}{4}(r(x) - c)^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}(r(x) + c)^2, \tag{6.10}$$

onde c é uma constante (ver Observação 6.1, desigualdades em (6.8)). Daí, podemos concluir que f é própria em $\overline{M}$ e $f|_M : M \to \mathbb{R}$ é também uma função própria.

Assim, como $f|_M : M \to \mathbb{R}$ é própria,

$$|\nabla f|^2 \leq f \quad \text{e} \quad \Delta_f f + f \leq \frac{m}{2} + C,$$

então decorre do Theorem 1.1 de (CHENG; ZHOU, 2013) que M tem volume ponderado finito e crescimento de volume polinomial no conjunto dos subníveis de f com respeito ao escalonamento da métrica e da translação de f, e, portanto, com respeito a métrica original e o potencial original. Logo, segue-se de (6.10) que o volume de M tem crescimento polinomial. □

6.2 Índice de f-estabilidade de hipersuperfície

Seja $\overline{M}^{n+1}_f$ um *gradient Ricci soliton* com $\overline{\mathrm{Ric}}_f = kg$. Considere uma imersão isométrica $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}_f$ de uma hipersuperfície M^n em $\overline{M}^{n+1}_f$. Neste caso, o operador f-estabilidade de M é dado por

$$L_f = \Delta_f + |A|^2 + k$$

e

$$I_f(u,u) = -\int_M u L_f u e^{-f} d\sigma$$

é a forma quádrica associada a L_f (ver Capítulo 3, Teorema 4.2).

Definição 6.4. *Dizemos que um campo vetorial diferenciável $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é paralelo, se*

$$\overline{\nabla}_Y X = 0$$

para todos campos vetoriais $Y \in T\overline{M}$.

Lema 6.1. *Sejam $\overline{M}^{n+1}_f$ um gradient Ricci soliton, com $\overline{\mathrm{Ric}}_f = kg$, e M^n uma hipersuperfície imersa isometricamente em $\overline{M}^{n+1}_f$. Se M tem curvatura média ponderada constante, então*

$$L_f \langle X, \eta \rangle = k \langle X, \eta \rangle$$

e

$$\Delta_f \langle X, \eta \rangle^2 = -2|A|^2 \langle X, \eta \rangle^2 + 2|AX^{\top}|^2$$

para todo $X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}$, onde η é o campo vetorial unitário normal a M.

Demonstração. Por hipótese, $H_f = C$, isto é, $H = \langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle + C$, onde C é uma constante real. Assim

$$\nabla H = \nabla \langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle.$$

Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ um referencial geodésico em M. Note que

$$\begin{aligned} \nabla H &= e_i(H)e_i = \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla} f, \eta \rangle e_i + \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}_{e_i} \eta \rangle e_i \\ &= \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla} f, \eta \rangle e_i - \langle A(e_i, e_j), \eta \rangle \langle \overline{\nabla} f, e_j \rangle e_i. \end{aligned}$$

Para $u = \langle X, \eta \rangle$ e $a_{ij} = \langle A e_i, e_j \rangle$, temos

$$\nabla u = e_j(u)e_j = \langle \overline{\nabla}_{e_j} \eta, X \rangle e_j = -a_{ji} \langle e_i, X \rangle e_j. \tag{6.11}$$

Logo,

$$\langle \nabla H, X \rangle = \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla} f, \eta \rangle \langle e_i, X \rangle - a_{ij} \langle \overline{\nabla} f, e_j \rangle \langle e_i, X \rangle = \langle \overline{\nabla}_{X^\top} \overline{\nabla} f, \eta \rangle + \langle \overline{\nabla} f, \nabla u \rangle.$$

Além disso,

$$e_i(u) = \langle \overline{\nabla}_{e_i} \eta, X \rangle = -a_{ij} \langle e_j, X \rangle$$

e, derivando a expressão anterior e observando que $\nabla_{e_k} e_j = 0$, obtemos

$$e_k(e_i(u)) = -a_{ij,k} \langle e_j, X \rangle - a_{ij} \langle X, \overline{\nabla}_{e_k} e_j \rangle = -a_{ij,k} \langle e_j, X \rangle - a_{ij} a_{kj} \langle X, \eta \rangle.$$

Segue da equação de Codazzi que

$$\overline{R}(e_j, e_k) e_i^\perp = \left(a_{ki,j} - a_{ji,k} \right) \eta,$$

ou seja,

$$\langle \overline{R}(e_j, e_k) e_i, \eta \rangle = a_{ki,j} - a_{ji,k}.$$

Portanto,

$$e_k(e_i(u)) = -a_{ki,j} \langle e_j, X \rangle + \langle \overline{R}(e_j, e_k) e_i, \eta \rangle \langle e_j, X \rangle - a_{ij} a_{kj} \langle X, \eta \rangle$$

e

$$\begin{aligned} \Delta u &= e_i(e_i(u)) = -a_{ii,j} \langle e_j, X \rangle + \langle \overline{R}(e_j, e_i) e_i, \eta \rangle \langle e_j, X \rangle - a_{ij} a_{ij} \langle X, \eta \rangle \\ &= \langle \nabla H, X \rangle + \langle \overline{R}(X^\top, e_i) e_i, \eta \rangle - |A|^2 \langle X, \eta \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{X^\top} \overline{\nabla} f, \eta \rangle + \langle \overline{\nabla} f, \nabla u \rangle + \overline{\mathrm{Ric}}(X^\top, \eta) - |A|^2 u. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$0 = \frac{1}{2} \langle X^\top, \eta \rangle = \overline{\mathrm{Ric}}_f(X^\top, \eta) = \overline{\mathrm{Ric}}(X^\top, \eta) + \overline{\nabla}^2 f(X^\top, \eta) = \overline{\mathrm{Ric}}(X^\top, \eta) + \langle \overline{\nabla}_{X^\top} \overline{\nabla} f, \eta \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_f u &= \Delta u - \langle \nabla f, \nabla u \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{X^\top} \overline{\nabla} f, \eta \rangle + \langle \overline{\nabla} f, \nabla u \rangle + \overline{\nabla}^2 f(X^\top, \eta) - |A|^2 u - \langle \nabla f, \nabla u \rangle \\ &= -|A|^2 u \end{aligned} \tag{6.12}$$

e

$$L_f u = \Delta_f u + |A|^2 u + ku = ku.$$

Além disso, usando as igualdades (6.12) e (6.11), concluímos que

$$\Delta_f u^2 = 2u\Delta_f u + 2|\nabla u|^2 = -2|A|^2u^2 + 2|AX^\top|^2.$$

$\square$

Definição 6.5. *O subespaço vetorial de $C^\infty(M)$ gerado por $E \subset C^\infty(M)$, denotado por* $\operatorname{Span} E$, *é o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de E.*

Lema 6.2. *Sejam $\overline{M}_f^{n+1}$ um gradient Ricci soliton satisfazendo $\overline{\mathrm{Ric}}_f = \frac{1}{2}g$, e M^n uma hipersuperfície compacta imersa isometricamente em $\overline{M}_f^{n+1}$. Se M tem curvatura média ponderada constante, então I_f é negativa definida no*

$$\operatorname{Span}\{1, \langle X, \eta\rangle;\ X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}.$$

Demonstração. Decorre do Lema 6.1 que a função $u = \langle X, \eta\rangle$, com $X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}$, satisfaz $L_f u = \frac{1}{2}u$. Assim, como M é compacta, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_M ue^{-f}d\sigma &= \int_M L_f ue^{-f}d\sigma = \int_M \left(\Delta_f u + |A|^2 u + \frac{1}{2}u\right)e^{-f}d\sigma \\ &= \int_M \left(|A|^2 + \frac{1}{2}\right)ue^{-f}d\sigma. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_M |A|^2 ue^{-f}d\sigma = 0. \tag{6.13}$$

Observe que

$$I_f(1,1) = -\int_M 1L_f 1e^{-f}d\sigma = -\int_M \left(|A|^2 + \frac{1}{2}\right)e^{-f}d\sigma \tag{6.14}$$

e

$$I_f(u,u) = -\int_M uL_f ue^{-f}\,d\sigma = -\frac{1}{2}\int_M u^2e^{-f}\,d\sigma. \tag{6.15}$$

Logo, usando as expressões (6.13), (6.14) e (6.15), obtemos

$$\begin{aligned} I_f(c_0+u, c_0+u) &= I_f(c_0,c_0) + I_f(u,u) + 2I_f(c_0,u) \\ &= -\int_M \left[c_0^2|A|^2 + \frac{c_0^2}{2} + \frac{1}{2}u^2 + 2c_0\left(\Delta_f u + |A|^2u + \frac{1}{2}u\right)\right]e^{-f}d\sigma \\ &= -\int_M \left[c_0^2|A|^2 + \frac{c_0^2}{2} + \frac{1}{2}u^2 + c_0u\right]e^{-f}d\sigma \\ &= -c_0\int_M |A|^2e^{-f}d\sigma - \frac{1}{2}\int_M (c_0+u)^2e^{-f}d\sigma < 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que I_f é negativa definida no $\operatorname{Span}\{1, \langle X, \eta\rangle;\ X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}$. $\square$

Observação 6.2. *Se M uma hipersuperfície compacta imersa isometricamente em $\overline{M}_f$, então*

$$\int_M (\alpha + \langle X, \eta \rangle) e^{-f} d\sigma = 0,$$

onde

$$\alpha = -\int_M \langle X, \eta \rangle e^{-f} d\sigma.$$

Logo,

$$\mathscr{F} \cap \mathrm{Span}\{1, \langle X, \eta \rangle; \ X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}\} \neq \emptyset$$

se $P_{\overline{M}_f}$ é não vazio. Ver definição do conjunto $\mathscr{F}$ no Capítulo 3.

Agora vamos analisar as hipersuperfícies não compactas. Para isto, consideramos as funções que têm suporte compacto em M.

Lema 6.3. *Seja M^n uma hipersuperfície não compacta imersa isometricamente em um gradient Ricci soliton $\overline{M}_f^{n+1}$ satisfazendo $\overline{\mathrm{Ric}}_f = \frac{1}{2}g$. Se $\phi \in C_c^\infty(M)$ e $u \in C^\infty(M)$, então*

$$I_f(\phi u, \phi u) = -\int_M \phi^2 u L_f u e^{-f} d\sigma + \int_M |\nabla \phi|^2 u^2 e^{-f} d\sigma.$$

Além disso, se M tem curvatura média ponderada constante e $X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}$, então

$$\int_M \phi^2 |A|^2 \langle X, \eta \rangle e^{-f} d\sigma = -2 \int_M \phi \langle \nabla \phi, AX^\top \rangle e^{-f} d\sigma.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} I_f(\phi u, \phi u) &= -\int_M (\phi u) L_f(\phi u) e^{-f} d\sigma \\ &= -\int_M \left[(\phi u)\Delta_f(\phi u) + \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) \phi^2 u^2 \right] e^{-f} d\sigma \\ &= -\int_M \left[\phi^2 u \Delta_f u + \phi u^2 \Delta_f \phi + 2\phi u \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle + \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) \phi^2 u^2 \right] e^{-f} d\sigma. \end{aligned}$$

Como ϕ tem suporte compacto, então

$$0 = \int_M \mathrm{div}(\phi u^2 e^{-f} \nabla \phi) d\sigma = \int_M \left(\phi u^2 \Delta_f \phi + 2u\phi \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle + u^2 |\nabla \phi|^2 \right) e^{-f} d\sigma.$$

Logo, usando as duas últimas expressões, obtemos

$$\begin{aligned} I_f(\phi u, \phi u) &= -\int_M \left[\phi^2 u \Delta_f u - |\nabla \phi|^2 u^2 + \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) \phi^2 u^2 \right] e^{-f} d\sigma \\ &= -\int_M \phi^2 u L_f u e^{-f} d\sigma + \int_M |\nabla \phi|^2 u^2 e^{-f} d\sigma. \end{aligned}$$

Visto que H_f é constante e X é um campo paralelo de $\overline{M}_f$, obtemos do Lema 6.1,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_M \phi^2 \langle X, \eta \rangle e^{-f} d\sigma &= \int_M \phi^2 L_f \langle X, \eta \rangle e^{-f} d\sigma \\ &= -\int_M \langle \nabla \phi^2, \nabla \langle X, \eta \rangle \rangle e^{-f} d\sigma + \int_M \left(|A|^2 + \frac{1}{2} \right) \phi^2 \langle X, \eta \rangle e^{-f} d\sigma. \end{aligned}$$

Portanto, segue da igualdade anterior e da expressão (6.11) que

$$\int_M |A|^2\phi^2\langle X,\eta\rangle e^{-f}d\sigma = \int_M \langle\nabla\phi^2,\nabla\langle X,\eta\rangle\rangle e^{-f}d\sigma = -2\int_M \phi\langle\nabla\phi, AX^\top\rangle e^{-f}d\sigma.$$

□

Seja $\mathscr{P}_{\overline{M}}$ o conjunto de todos campos vetoriais tangentes a $\overline{M}$ que são paralelos e globalmente definidos. Observe que $\mathscr{P}_{\overline{M}}$ é um subespaço vetorial de dimensão finita e menor que ou igual a dimensão de $\overline{M}$. De fato, dados X, $Y \in \mathscr{P}_{\overline{M}}$, temos que $\langle X,\eta\rangle$, $|X|$ e $|Y|$ são funções constantes, pois X e Y são campos vetoriais paralelos. Agora, suponha que $\overline{M}$ seja uma variedade $n+1$-dimensional, logo se existissem $n+2$ campos linearmente independentes em $P_{\overline{M}}$, então estes $n+2$ campos no ponto $x\in\overline{M}$ formariam uma base do espaço tangente $T_x\overline{M}$. Isto é um absurdo, pois a dimensão de $T_x\overline{M}$ é igual a $n+1$.

Exemplo 6.1. *O Gaussian shrinking soliton* $\left(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-|x|^2/4}\right)$ *tem exatamente* $n+1$ *campos vetoriais paralelos linearmente independentes e globalmente definidos em* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplo 6.2. *Um outro exemplo é o cylinder shrinking soliton* $\left(\mathbb{S}^{n+1-k}\times\mathbb{R}^k, g, e^{-f}\right)$, $k\geq 1$, *com métrica*

$$g = 2(n-k-1)g_{\mathbb{S}^{n-k}} + g_{\mathbb{R}^k}$$

e função potencial

$$f(\theta,x) = \frac{|x|^2}{4},\ \theta\in\mathbb{S}^{n-k},\ x\in\mathbb{R}^k.$$

Neste exemplo, temos que

$$\dim\mathscr{P}_{\mathbb{S}^{n+1-k}\times\mathbb{R}^k} = k.$$

Lema 6.4. *Seja M uma hipersuperfície imersa isometricamente em $\overline{M}_f$ com campo vetorial unitário η. Então*

$$\dim V \leq \dim\mathscr{P}_{\overline{M}_f} + 1,$$

onde $V = \operatorname{Span}\{1,\langle X,\eta\rangle;\ X\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}$. *Além disso,*

$$\dim(\phi V) \leq \dim V$$

para qualquer $\phi\in C_c^\infty(M)$.

Demonstração. Seja $\{X_1,X_2,\dots,X_k\}$ uma base de $\mathscr{P}_{\overline{M}_f}$. Note que qualquer $u\in V$ se escreve como $u = c_0 + \langle X,\eta\rangle$, onde c_0 é uma constante real e $X\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f}$, então

$$u = c_0\cdot 1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i\langle X_i,\eta\rangle.$$

Isto nos mostra que $\{1,\langle X_1,\eta\rangle,\langle X_2,\eta\rangle,\dots,\langle X_k,\eta\rangle\}$ gera V. Logo,

$$\dim V \leq \dim\mathscr{P}_{\overline{M}_f} + 1.$$

Agora, sejam $\phi \in C_c^\infty(M)$ e $\{u_1, u_2, \dots u_s\}$ uma base de V. Assim o conjunto $\{\phi u_1, \phi u_2, \dots \phi u_s\}$ gera ϕV e

$$\dim(\phi V) \leq \dim V.$$

□

Lema 6.5. *Seja $\overline{M}_f^{n+1}$ um gradient Ricci soliton satisfazendo $\overline{\mathrm{Ric}}_f = \frac{1}{2}g$. Se M é uma hipersuperfície não compacta propriamente imersa em $\overline{M}_f$ com curvatura média ponderada constante e volume ponderado finito, então existe $\phi \in C_c^\infty(M)$, tal que I_f é negativa definida em ϕV e*

$$\dim(\phi V) = \dim V,$$

onde

$$V = \mathrm{Span}\{1, \langle X, \eta\rangle;\ \ X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}.$$

Demonstração. Observe que V é um subespaço vetorial não vazio de $C^\infty(M)$. Seja $u = c_0 + \langle X, \eta\rangle$, onde c_0 é uma constante real e $X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}$. Visto que H_f é constante e $X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}$, pelo Lema 6.1, temos

$$\begin{aligned} L_f u &= \Delta_f u + \left(|A|^2 + \frac{1}{2}\right) u = L_f\langle X, \eta\rangle + \left(|A|^2 + \frac{1}{2}\right) c_0 \\ &= \frac{1}{2}\langle X, \eta\rangle + \left(|A|^2 + \frac{1}{2}\right) c_0. \end{aligned}$$

Segue do Lema 6.3 que

$$\begin{aligned} I_f(\phi u, \phi u) &= -\int_M \phi^2 u L_f u e^{-f} d\sigma + \int_M |\nabla\phi|^2 u^2 e^{-f} d\sigma \\ &= -\int_M \phi^2 u \left(\frac{1}{2}\langle X, \eta\rangle + \left(|A|^2 + \frac{1}{2}\right) c_0\right) e^{-f} d\sigma + \int_M |\nabla\phi|^2 u^2 e^{-f} d\sigma \\ &= -\frac{1}{2}\int_M \phi^2 u^2 e^{-f} d\sigma - \int_M \phi^2 |A|^2 c_0^2 e^{-f} d\sigma - \int_M \phi^2 |A|^2 c_0 \langle X, \eta\rangle e^{-f} d\sigma \\ &\quad + \int_M |\nabla\phi|^2 u^2 e^{-f} d\sigma. \end{aligned}$$

Agora, usando mais uma vez o Lema 6.3 e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \left|\int_M \phi^2 |A|^2 c_0 \langle X, \eta\rangle e^{-f} d\sigma\right| &= 2\left|\int_M \phi\langle \nabla\phi, AX^\top\rangle c_0\, e^{-f} d\sigma\right| \\ &\leq 2\int_M |\phi|\,|\nabla\phi|\,|A|\,|X^\top|\,|c_0|\, e^{-f} d\sigma \\ &\leq \int_M \phi^2 |A|^2 c_0^2 e^{-f} d\sigma + \int_M |\nabla\phi|^2 |X^\top|^2 e^{-f} d\sigma. \end{aligned}$$

Logo,

$$I_f(\phi u, \phi u) \leq -\frac{1}{2}\int_M \phi^2 u^2 e^{-f} d\sigma + \int_M |\nabla\phi|^2 (u^2 + |X^\top|^2) e^{-f} d\sigma. \tag{6.16}$$

Seja $r(x)$ a distância extrínseca de $x \in M$ à um ponto fixado $o \in \overline{M}_f$. Para $R > 0$ suficientemente grande, defina a função $\phi_R : M \to \mathbb{R}$, tal que

$$\phi_R(x) = \begin{cases} 1, & r(x) \leq R; \\ \dfrac{2R - r(x)}{R}, & R \leq r(x) \leq 2R; \\ 0, & r(x) \geq 2R. \end{cases}$$

Observe que $|\nabla \phi_R| \leq 1/R$ e $\phi_R \in C_c^\infty(M)$, pois M é própria. Agora, substituindo $\phi = \phi_R$ na desigualdade (6.16), obtemos

$$I_f(\phi_R u, \phi_R u) \leq -\frac{1}{2}\int_M \phi_R^2 u^2 e^{-f} d\sigma + \frac{|X|^2 + c_0^2 + 2|c_0|\,|X|}{R^2}\int_{M\cap(B_{2R}\setminus B_R)} e^{-f} d\sigma,$$

(lembre-se que $|X|$ é constante, pois X é paralelo). Como $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$ e $|X|$ é constante, então, para cada $u \in V$, existe R_u suficiente grande, tal que

$$I_f(\phi_{R_u} u, \phi_{R_u} u) < 0.$$

Vamos encontrar uma função $\phi \in C_c^\infty(M)$ que não dependa da função u. De fato, considere o subconjunto

$$S = \left\{ u \in V;\ \int_M u^2 e^{-f} d\sigma = 1 \right\}.$$

Decorre do Lema 6.4 que $V \subset L_f^2(M)$ é um subespaço de dimensão finita menor que ou igual a $\dim \mathscr{P}_{\overline{M}_f} + 1$. Portanto, S é um conjunto compacto em $L_f^2(M)$. Assim, existe um número real positivo R_0, tal que qualquer função $u \in S$ é não identicamente nula em $M \cap B_{R_0}^{\overline{M}_f}(o)$. Caso contrário, poderíamos conseguir uma sequência $R_j \to \infty$ de números positivos tais que, para cada j, existe $u_j \in S$ com $u_j \equiv 0$ em $M \cap B_{R_0}^{\overline{M}_f}(o)$. Daí teríamos

$$u = \lim_{j\to\infty} u_j \ \in \ S$$

e $u \equiv 0$ em M. Mas isto não é possível, pois se $u \in S$, então

$$\int_M u^2 e^{-f} d\sigma = 1.$$

Logo, para R suficientemente grande e $R \geq R_0$ e para qualquer função $u \in S$, temos

$$I_f(\phi_R u, \phi_R u) \leq -\frac{1}{2}\int_M \phi_R^2 u^2 e^{-f} d\sigma + \frac{|X|^2 + c_0^2 + 2c_0|X|}{R^2}\int_{M\cap(B_{2R}\setminus B_R)} e^{-f} d\sigma < 0,$$

pois

$$M(R) = \int_M \phi_R^2 u^2 e^{-f} d\sigma > 0$$

é uma função crescente em R e, visto que $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{|X|^2 + c_0^2 + 2c_0|X|}{R^2}\int_{M\cap(B_{2R}\setminus B_R)} e^{-f} d\sigma = 0.$$

Com isso, podemos encontrar $\phi = \phi_R$ independente de u, tal que $I_f(\phi u, \phi u) < 0$ para toda $u \in S$. Se $u \in V$, então $\frac{1}{|u|_{L^2_f}} u \in S$ e, portanto, para $u \not\equiv 0$,

$$I_f(\phi u, \phi u) = |u|^2_{L^2_f} I_f\left(\phi \frac{u}{|u|_{L^2_f}}, \phi \frac{u}{|u|_{L^2_f}}\right) < 0.$$

Agora mostraremos que $\dim V = \dim(\phi V)$. De fato, seja $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ uma base ortonormal para o subespaço vetorial $V \subset L^2_f(M)$. Para função $\phi = \phi_{R_0}$ aqui construída, temos que $\phi u_i \equiv u_i \not\equiv 0$ em $M \cap B^{\overline{M}_f}_{R_0}(o)$. Logo, $\{\phi u_1, \phi u_2, \ldots, \phi u_s\}$ é linearmente independente, e pelo Lema 6.4, podemos concluir que $\dim(\phi V) = \dim V$. □

Observação 6.3. *Seja $x : \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada, não planar, própria e satisfazendo $\mathrm{Vol}_f(M) < +\infty$, $H = \frac{1}{2}\langle x, \eta\rangle + C$ e $\mathrm{Ind}_f M \leq n$, onde H é a curvatura média, x é o vetor posição de $\mathbb{R}^{n+1}$, η é o campo normal unitário da hipersuperfície e C é uma constante real. McGonagle e Ross (MCGONAGLE; ROSS, 2015) mostraram que existe um número natural i, tal que $n+1-\mathrm{Ind}_f M \leq i \leq n$ e $\Sigma = \Sigma_0 \times \mathbb{R}^i$. Além disso, $\mathrm{Ind}_f M \geq 2$.*

Vale ressaltar que o resultado devido a McGonagle e Ross ainda é válido quando não supomos que Σ é própria. Isto pode ser visto no Teorema 6.1.

Teorema 6.3. *Sejam $\overline{M}^{n+1}_f$ um gradient Ricci soliton satisfazendo $\overline{\mathrm{Ric}}_f = \frac{1}{2}g$, $\mathscr{P}_{\overline{M}_f}$ o conjunto dos campos paralelos globalmente definidos em $\overline{M}_f$ e M^n uma hipersuperfície propriamente imersa em $\overline{M}^{n+1}_f$. Assuma que M tem curvatura média ponderada constante e volume ponderado finito. Se a função unidade $1 \notin \{\langle X, \eta\rangle;\ X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}$, então*

$$\dim \mathscr{P}_{\overline{M}_f} - \mathrm{Ind}_f M \ \leq\ \dim\{X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}; \langle X, \eta\rangle \equiv 0\},$$

onde η é o campo normal unitário. Além disso, se assumirmos que existe um campo $X_0 \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}$, tal que $\langle X_0, \eta\rangle \not\equiv 0$, então

$$\dim\{X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}; \langle X, \eta\rangle \equiv 0\} \ \leq \dim \mathscr{P}_{\overline{M}_f} - 1.$$

Demonstração. Seja $V \equiv \mathrm{Span}\{1, \langle X, \eta\rangle;\ \ X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}$. Pelo Lema 6.5, existe uma função $\phi \in C^\infty_c(M)$, tal que $\dim \phi V = \dim V$ e I_f é negativa definida em ϕV. Lembre-se que o $\mathrm{Ind}_f M$ é a dimensão do maior subespaço de $\mathscr{F} \cap C^\infty_c(M)$ no qual I_f é negativa definida, com $\mathscr{F} = C^\infty_c(M)$ se M é uma f-minimal e

$$\mathscr{F} = \left\{u \in C^\infty_c(M);\ \int_M ue^{-f} d\sigma = 0\right\}$$

se M tiver curvatura média ponderada constante. Agora, observe que $\langle X, \eta\rangle \leq |X||\eta| = |X|$, onde $|X|$ é constante, pois X é um campo paralelo. Visto que o volume ponderado de M é finito, obtemos que $\int_M \phi\langle X,\eta\rangle e^{-f}d\sigma \leq |X|\int_M \phi e^{-f}d\sigma < +\infty$. Portanto, existe um número real c_0 satisfazendo

$$\int_M \phi(c_0+\langle X,\eta\rangle)e^{-f}d\sigma = 0.$$

Logo, $\phi(c_0+\langle X,\eta\rangle)\in\mathscr{F}\cap\phi V$ sempre que $\langle X,\eta\rangle\in\{\langle X,\eta\rangle;\, X\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}$. Como $1\notin\{\langle X,\eta\rangle;\, X\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}$ por hipótese, concluímos que

$$\dim\{\langle X,\eta\rangle;\, X\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}\leq\dim(\mathscr{F}\cap\phi V).$$

Como I_f é negativa definida em $\mathscr{F}\cap\phi V$, concluímos que

$$\dim\{\langle X,\eta\rangle;\, X\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}\leq\dim(\mathscr{F}\cap\phi V)\leq\mathrm{Ind}_f M.$$

Considere a transformação linear $T:\mathscr{P}_{\overline{M}_f}\to C^\infty(M)$ definida por $T(X)=\langle X,\eta\rangle$. Agora, aplicando o teorema do núcleo e da imagem, verifica-se que

$$\begin{aligned}\dim\mathscr{P}_{\overline{M}_f} &= \dim\{X\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f};\,\langle X,\eta\rangle\equiv 0\}+\dim\{\langle X,\eta\rangle;\, X\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}\\ &\leq \dim\{X\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f};\,\langle X,\eta\rangle\equiv 0\}+\mathrm{Ind}_f M.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Além disso, temos que

$$\dim\{X\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f};\,\langle X,\eta\rangle\equiv 0\}\leq\dim\mathscr{P}_{\overline{M}_f}-1,\tag{6.18}$$

pois assumimos que existe um campo $X_0\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f}$, tal que $\langle X_0,\eta\rangle\not\equiv 0$. Logo, usando as desigualdades (6.17) e (6.18), obtemos

$$\dim\mathscr{P}_{\overline{M}_f}-\mathrm{Ind}_f M\leq\ \dim\{X\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f};\,\langle X,\eta\rangle\equiv 0\}\ \leq\dim\mathscr{P}_{\overline{M}_f}-1.$$

□

Observação 6.4. *Vale ressaltar que o Teorema 6.3, no caso em que M é uma subvariedade, ainda é válido quando não supomos que M é própria. Isto pode ser visto no Teorema 6.1.*

Exemplo 6.3. *O produto $\Sigma^{n+1-k}\times\mathbb{R}^k$, de uma variedade de Einstein Σ^{n+1-k} com o Gaussian shrinking soliton $\mathbb{R}^k$, é um gradient Ricci soliton não compacto. Em particular, o cilindro esférico $\mathbb{S}^{n+1-k}\times\mathbb{R}^k$ é um gradient shrinking Ricci soliton não compacto. Observe que*

$$\dim\mathscr{P}_{\Sigma\times\mathbb{R}^k}\geq k,\qquad \dim\mathscr{P}_{\mathbb{R}^{n+1}_f}=n+1\quad e\quad \dim\mathscr{P}_{\mathbb{S}^{n+1-k}\times\mathbb{R}^k}=k.$$

Corolário 6.1. *Sejam $\overline{M}^{n+1}_f$ um gradient Ricci soliton satisfazendo $\overline{\mathrm{Ric}}_f=\frac{1}{2}g$, $\mathscr{P}_{\overline{M}_f}$ o conjunto dos campos paralelos globalmente definidos em $\overline{M}^{n+1}_f$ e M^n uma hipersuperfície propriamente imersa em $\overline{M}_f$. Assuma que M tem curvatura média ponderada constante e volume ponderado finito. Se a função unidade $1\notin\{\langle X,\eta\rangle;\, X\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}$ e existe um campo $X_0\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f}$, tal que $\langle X_0,\eta\rangle\not\equiv 0$, então*

$$\mathrm{Ind}_f M\geq 1.$$

Além disso, se $\mathrm{Ind}_f M=1$, então

$$\dim\{X\in\mathscr{P}_{\overline{M}_f};\,\langle X,\eta\rangle\equiv 0\}=\dim\mathscr{P}_{\overline{M}_f}-1.$$

Demonstração. Note que

$$\dim \mathscr{P}_{\overline{M}_f} - \mathrm{Ind}_f M \leq \dim\{X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}; \langle X, \eta\rangle \equiv 0\} \leq \dim \mathscr{P}_{\overline{M}_f} - 1.$$

Assim,

$$\mathrm{Ind}_f M \geq 1.$$

Agora suponha $\mathrm{Ind}_f M = 1$, temos

$$\dim\{X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f};\ \langle X, \eta\rangle \equiv 0\} = \dim \mathscr{P}_{\overline{M}_f} - 1.$$

□

Corolário 6.2. *Sejam* $\overline{M}_f^{n+1} = (\Sigma^{n+1-k} \times \mathbb{R}^k, g, e^{-f} d\sigma)$ *um gradient Ricci soliton satisfazendo* $\overline{\mathrm{Ric}}_f = \dfrac{1}{2} g$ *e* M^n *uma hipersuperfície propriamente imersa em* $\overline{M}_f$ *com curvatura média ponderada constante e volume ponderado finito. Assuma que* $M \neq M_0 \times \mathbb{R}^{k-1}$*, onde* $M_0 \subset \Sigma$*. Se* $\dim \mathscr{P}_{\overline{M}_f} = k$ *e existe um campo* $X_0 \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}$*, tal que* $\langle X_0, \eta\rangle \not\equiv 0$*, então* $\mathrm{Ind}_f M \geq 2$.

Demonstração. Temos, por hipótese, que $\dim \mathscr{P}_{\overline{M}_f} = k$ e $M \neq M_0 \times \mathbb{R}^{k-1}$. Assim,

$$1 \notin \{\langle X, \eta\rangle;\ X \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}\}.$$

Visto que existe um campo $X_0 \in \mathscr{P}_{\overline{M}_f}$, tal que $\langle X_0, \eta\rangle \not\equiv 0$, segue do Corolário 6.1 que

$$\mathrm{Ind}_f M \geq 1.$$

Mas, se $\mathrm{Ind}_f M = 1$, então teríamos

$$\dim\{X;\ \langle X, \eta\rangle \equiv 0\} = \dim \mathscr{P}_{\overline{M}_f} - 1 = k - 1$$

e

$$M = M_0 \times \mathbb{R}^{k-1},$$

onde $M_0 \subset \Sigma$. Isto não é possível. Logo,

$$\mathrm{Ind}_f M \geq 2.$$

□

REFERÊNCIAS

ALENCAR, H.; CARMO, M. do. Hypersurfaces of constant mean curvature with finite index and volume of polynomial growth. *Arch. Math. (Basel)*, v. 60, n. 5, p. 489–493, 1993. ISSN 0003-889X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01202317>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 56.

BAKRY, D.; ÉMERY, M. Diffusions hypercontractives. In: *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*. Springer, Berlin, 1985, (Lecture Notes in Math., v. 1123). p. 177–206. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0075847>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 25.

BARBOSA, J. L.; CARMO, M. do. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Math. Z.*, v. 185, n. 3, p. 339–353, 1984. ISSN 0025-5874. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01215045>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 51.

BARBOSA, J. L.; CARMO, M. do; ESCHENBURG, J. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds. *Math. Z.*, v. 197, n. 1, p. 123–138, 1988. ISSN 0025-5874. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01161634>. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 51.

BÉRARD, P. H. *Lectures on spectral geometry*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1985. 247 p. (15º Colóquio Brasileiro de Matemática. [15th Brazilian Mathematics Colloquium]). Some aspects of direct problems in spectral geometry, With an appendix by Gérard Besson, With a bibliography by Bérard and M. Berger. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

BESSA, G. P.; PIGOLA, S.; SETTI, A. Spectral and stochastic properties of the f-Laplacian, solutions of PDEs at infinity and geometric applications. *Rev. Mat. Iberoam.*, v. 29, n. 2, p. 579–610, 2013. ISSN 0213-2230. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.4171/RMI/731>. Citado 3 vezes nas páginas 28, 37 e 38.

BIANCHINI, B.; MARI, L.; RIGOLI, M. Spectral radius, index estimates for Schrödinger operators and geometric applications. *J. Funct. Anal.*, v. 256, n. 6, p. 1769–1820, 2009. ISSN 0022-1236. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2009.01.021>. Citado na página 38.

BROOKS, R. A relation between growth and the spectrum of the Laplacian. *Math. Z.*, v. 178, n. 4, p. 501–508, 1981. ISSN 0025-5874. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01174771>. Citado na página 10.

BROOKS, R. On the spectrum of noncompact manifolds with finite volume. *Math. Z.*, v. 187, n. 3, p. 425–432, 1984. ISSN 0025-5874. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01161957>. Citado na página 10.

CAO, H.-D.; ZHOU, D. On complete gradient shrinking Ricci solitons. *J. Differential Geom.*, v. 85, n. 2, p. 175–185, 2010. ISSN 0022-040X. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1287580963>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 63 e 64.

CARMO, M. P. do; ZHOU, D. Eigenvalue estimate on complete noncompact Riemannian manifolds and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 351, n. 4, p. 1391–1401, 1999. ISSN 0002-9947. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-99-02061-9>. Citado 3 vezes nas páginas 16, 38 e 56.

CHEEGER, J.; COLDING, T. H. On the structure of spaces with ricci curvature bounded below. i. *J. Differential Geom.*, Lehigh University, v. 46, n. 3, p. 406–480, 1997. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214459974>. Citado na página 10.

CHEEGER, J.; COLDING, T. H. On the structure of spaces with ricci curvature bounded below. ii. *J. Differential Geom.*, Lehigh University, v. 54, n. 1, p. 13–35, 2000. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214342145>. Citado na página 10.

CHEEGER, J.; COLDING, T. H. On the structure of spaces with ricci curvature bounded below. iii. *J. Differential Geom.*, Lehigh University, v. 54, n. 1, p. 37–74, 2000. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214342146>. Citado na página 10.

CHENG, S. Y. Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. *Math. Z.*, v. 143, n. 3, p. 289–297, 1975. ISSN 0025-5874. Citado na página 10.

CHENG, S. Y.; YAU, S. T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications. *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 28, n. 3, p. 333–354, 1975. ISSN 0010-3640. Citado na página 28.

CHENG, X.; MEJIA, T.; ZHOU, D. Stability and compactness for complete f-minimal surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 367, n. 6, p. 4041–4059, 2015. ISSN 0002-9947. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2015-06207-2>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 61.

CHENG, X.; ZHOU, D. Volume estimate about shrinkers. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 141, n. 2, p. 687–696, 2013. ISSN 0002-9939. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-2012-11922-7>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 60 e 65.

CHENG, X.; ZHOU, D. Stability properties and gap theorem for complete f-minimal hypersurfaces. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, v. 46, n. 2, p. 251–274, 2015. ISSN 1678-7544. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s00574-015-0092-z>. Citado na página 14.

COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P. *A course in minimal surfaces*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. v. 121. xii+313 p. (Graduate Studies in Mathematics, v. 121). ISBN 978-0-8218-5323-8. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1090/gsm/121>. Citado na página 61.

DONNELLY, H. On the essential spectrum of a complete Riemannian manifold. *Topology*, v. 20, n. 1, p. 1–14, 1981. ISSN 0040-9383. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383(81)90012-4>. Citado na página 10.

DONNELLY, H. Exhaustion functions and the spectrum of Riemannian manifolds. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 46, n. 2, p. 505–527, 1997. ISSN 0022-2518. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1512/iumj.1997.46.1338>. Citado na página 10.

DONNELLY, H.; LI, P. Pure point spectrum and negative curvature for noncompact manifolds. *Duke Math. J.*, v. 46, n. 3, p. 497–503, 1979. ISSN 0012-7094. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077313570>. Citado na página 10.

ELBERT, M. F. Constant positive 2-mean curvature hypersurfaces. *Illinois J. Math.*, v. 46, n. 1, p. 247–267, 2002. ISSN 0019-2082. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1258136153>. Citado na página 38.

ESCOBAR, J. F. On the spectrum of the Laplacian on complete Riemannian manifolds. *Comm. Partial Differential Equations*, v. 11, n. 1, p. 63–85, 1986. ISSN 0360-5302. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/03605308608820418>. Citado na página 10.

ESCOBAR, J. F.; FREIRE, A. The spectrum of the Laplacian of manifolds of positive curvature. *Duke Math. J.*, v. 65, n. 1, p. 1–21, 1992. ISSN 0012-7094. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-92-06501-X>. Citado na página 10.

FITE, W. B. Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 19, n. 4, p. 341–352, 1918. ISSN 0002-9947. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2307/1988973>. Citado na página 38.

FUKAYA, K. Collapsing of riemannian manifolds and eigenvalues of la-place operator. *Inventiones mathematicae*, v. 87, p. 517–548, 1987. Disponível em: <http://eudml.org/doc/143434>. Citado na página 11.

HAMILTON, R. S. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, v. 17, n. 2, p. 255–306, 1982. ISSN 0022-040X. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214436922>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 17 e 60.

HAMILTON, R. S. The Ricci flow on surfaces. In: *Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986)*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, (Contemp. Math., v. 71). p. 237–262. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1090/conm/071/954419>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 60.

HEIN, H.-J.; NABER, A. New logarithmic Sobolev inequalities and an ε-regularity theorem for the Ricci flow. *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 67, n. 9, p. 1543–1561, 2014. ISSN 0010-3640. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.21474>. Citado na página 13.

HIGUCHI, Y. A remark on exponential growth and the spectrum of the Laplacian. *Kodai Math. J.*, v. 24, n. 1, p. 42–47, 2001. ISSN 0386-5991. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2996/kmj/1106157294>. Citado 3 vezes nas páginas 10, 12 e 37.

IMPERA, D.; RIMOLDI, M. Stability properties and topology at infinity of f-minimal hypersurfaces. *Geom. Dedicata*, v. 178, p. 21–47, 2015. ISSN 0046-5755. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10711-014-9999-6>. Citado 3 vezes nas páginas 38, 54 e 57.

LEDOUX, M. The geometry of markov diffusion generators. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, UNIVERSITE PAUL SABATIER, v. 9, n. 2, p. 305–366, 2000. Disponível em: <http://eudml.org/doc/73517>. Citado na página 13.

LI, P.; WANG, J. Complete manifolds with positive spectrum. II. *J. Differential Geom.*, v. 62, n. 1, p. 143–162, 2002. ISSN 0022-040X. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1090425532>. Citado na página 10.

MCGONAGLE, M.; ROSS, J. The hyperplane is the only stable, smooth solution to the isoperimetric problem in Gaussian space. *Geom. Dedicata*, v. 178, p. 277–296, 2015. ISSN 0046-5755. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10711-015-0057-9>. Citado 4 vezes nas páginas 19, 49, 51 e 72.

MUNTEANU, O.; WANG, J. Analysis of weighted Laplacian and applications to Ricci solitons. *Comm. Anal. Geom.*, v. 20, n. 1, p. 55–94, 2012. ISSN 1019-8385. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.4310/CAG.2012.v20.n1.a3>. Citado na página 64.

PETERSEN, P. *Riemannian geometry*. Second. [S.l.]: Springer, New York, 2006. v. 171. xvi+401 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 171). ISBN 978-0387-29246-5; 0-387-29246-2. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

PINSKY, M. A. The spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature. I. *J. Differential Geom.*, v. 13, n. 1, p. 87–91, 1978. ISSN 0022-040X. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214434349>. Citado na página 10.

PINSKY, M. A. Spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature. II. *J. Differential Geom.*, v. 14, n. 4, p. 609–620 (1981), 1979. ISSN 0022-040X. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214435241>. Citado na página 10.

ROCHA, A. Essential spectrum of the weighted laplacian on noncompact manifolds and applications. *Geometriae Dedicata*, p. 1–23, 2016. ISSN 1572-9168. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10711-016-0186-9>. Citado 3 vezes nas páginas 20, 31 e 32.

SILVARES, L. On the essential spectrum of the Laplacian and the drifted Laplacian. *J. Funct. Anal.*, v. 266, n. 6, p. 3906–3936, 2014. ISSN 0022-1236. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2013.12.014>. Citado na página 13.

WEI, G.; WYLIE, W. Comparison geometry for the bakry-emery ricci tensor. *J. Differential Geom.*, Lehigh University, v. 83, n. 2, p. 337–405, 10 2009. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1261495336>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 25.

ZHOU, D. Essential spectrum of the Laplacian on manifolds of nonnegative curvature. *Internat. Math. Res. Notices*, n. 5, p. 209 ff., approx. 6 pp. (electronic), 1994. ISSN 1073-7928. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1155/S1073792894000231>. Citado na página 10.