

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JOB SARAIVA FURTADO NETO

AÇÃO DE EULER-HEISENBERG
NO CONTEXTO DE VIOLAÇÃO DE SIMETRIA DE LORENTZ

Maceió

2013

JOB SARAIVA FURTADO NETO

AÇÃO DE EULER-HEISENBERG
NO CONTEXTO DE VIOLAÇÃO DE SIMETRIA DE LORENTZ

Dissertação apresentada no Instituto de Física
da Universidade Federal de Alagoas, como parte
dos requisitos para a obtenção do título de
Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Mariz

Maceió

2013

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

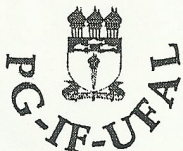
F992a Furtado Neto, Job Saraiva.
Ação de Euler-Heisenberg no contexto de violação de simetria de Lorentz / Job Saraiva Furtado Neto. – 2013.
63 f. : il.

Orientador: Tiago Homero Mariz do Nascimento.
Dissertação (Mestrado em Física da Matéria Condensada) –
Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 56-63.
Apêndices: f. 51-55

1. Violação da invariância de Lorentz. 2. Ação de Euler-Heisenberg. 3. Fótons – Divisão. I. Título.

CDU: 539.122



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14, Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL, Brasil
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

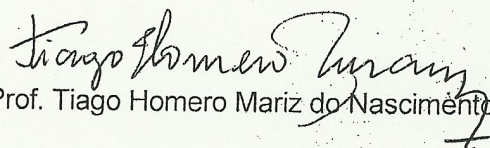
“Ação de Euler-Heisenberg no Contexto de Violação de
Simetria de Lorentz”.

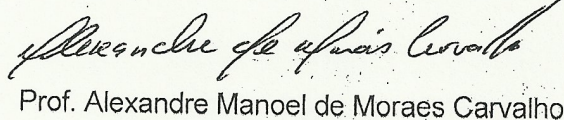
por

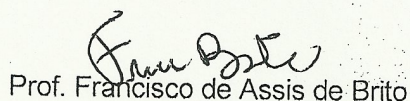
Job Saraiva Furtado Neto

A Banca Examinadora composta pelos professores Tiago Homero Mariz do Nascimento (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Alexandre Manoel de Moraes Carvalho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, e Francisco de Assis de Brito, do Departamento de Física da universidade Federal de Campina Grande consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 26 de julho de 2013


Prof. Tiago Homero Mariz do Nascimento


Prof. Alexandre Manoel de Moraes Carvalho


Prof. Francisco de Assis de Brito

À MINHA FAMÍLIA E AMIGOS

AGRADECIMENTOS

À minha família (Ivânia, Iracy, Chica, Irismar, Yarlen, Talys, Marco, etc) que sempre me apoiou e me ajudou a conquistar meus objetivos.

Ao meu professor e orientador Tiago Mariz, pela paciência e pela excelente orientação.

Ao meu amigo Henrique, que estava literalmente em todos os momentos dessa minha caminhada, e que me ensinou muito sobre o que é ser humano.

Ao meu amigo Manel, amigo de longa data, que me auxiliou imensamente nas confecções das imagens deste trabalho.

Ao meu amigo Aduino que sempre me presenteou com boas conversas e boas partidas de video game.

À minha namorada Saneq que, apesar de não ter acompanhado toda a jornada, foi um ponto de apoio fundamental na reta final, agradeço também pela compreensão quando não podia visita-la e pelo incentivo quando encontrava-me desestimulado.

Aos amigos que fiz durante essa jornada: Adhemar, Aléssio, Átila, Anderson, Beliato, Emanuel, Fábio, Jonathas, José Fábio, Juarez, Júlio, Leonade, Leandro, Messias, Pedro, Rúbens, Túlio, Waléria, Wellington, Zé Maria, dentre outros.

Aos professores do IF-UFAL que me deram aulas no mestrado, contribuindo com minha formação. Em especial, Fidélis e Iram.

Aos amigos da URCA, André, Ana, Alan, Carlos. Aos eternos mentores, professores da URCA, Wilson Hugo, Augusto Nobre, Eduardo, Cláudio Dantas, que sempre me guiaram para o melhor caminho.

Aos funcionários do IF que são sempre muito simpáticos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

A ação efetiva de Euler-Heisenberg descreve a dinâmica não linear de campos eletromagnéticos no vácuo. Tal ação leva em conta a polarização no vácuo para um laço, além de descrever também a propagação de fótons através de campos eletromagnéticos arbitrários que variam lentamente. Então, desde a sua descoberta, a ação efetiva de Euler-Heisenberg tem sido estudada em vários contextos, tais como o espalhamento da luz pela luz, produção de pares no vácuo, divisão de fótons, birrefringência no vácuo, ação efetiva em gravidade e teoria de cordas, dentre outros. Neste trabalho realizamos inicialmente um estudo sobre as transformações de Lorentz de observador e de partícula, mostrando que, na presença de um campo de fundo, as rotações e mudanças de velocidade (boost) quebram a equivalência entre essas duas transformações (observador e partícula). Estudamos também a violação da invariância de Lorentz através da consideração de alguns termos referentes ao modelo padrão estendido, com foco na eletrodinâmica quântica estendida. Efetuamos um cálculo não perturbativo no coeficiente $c_{\mu\nu}$, coeficiente este responsável pela violação da simetria de Lorentz de partícula, no entanto impomos invariância rotacional. A partir dos resultados desse cálculo, conseguimos recuperar o resultado perturbativo para o efeito da divisão de fótons no vácuo, assim como a ação efetiva de Euler-Heisenberg com violação de Lorentz, linear no coeficiente c_{00} .

Palavras-chave: Violação da invariância de Lorentz. Ação de Euler-Heisenberg. Divisão de fótons.

ABSTRACT

The Euler-Heisenberg effective action describe the non linear dynamics of electromagnetics fields in vacuum. Such action take in account the vacuum polarization for one loop, besides, describe also the photon propagation through of arbitrary electromagnetics fields that vary slowly. So, since its discovery, the Euler-Heisenberg effective action has been studied in several contexts, such as the scattering of light by light, vacuum pairs production, photon splitting, vacuum birefringence, effective action in gravity and string theory, among others. In this work, we perform initially a study about the Lorentz transformations of observer and particle, showing that, in the presence of a background field, rotations and boosts break the equivalence between these transformations (observer and particle). We study also the Lorentz invariance violation through of the consideration of some terms referents to the standard model extension (SME), with focus on quantum electrodynamics extension. We made a non perturbative calculation on the coefficient $c_{\mu\nu}$, being this coefficient the responsible for the particle Lorentz breaking symmetry, however we impose the rotational invariance. From the results of these calculations we can recover the perturbative result for the photon splitting effect in vacuum, such as the Euler-Heisenberg effective action with Lorentz violation, linear on coefficient c_{00} .

Keywords: Lorentz invariance violation. Euler-Heisenberg effective action. Photon splitting.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	3
2	A VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ	7
2.1	Introdução	7
2.2	As transformações de Lorentz	9
2.2.1	As TL's de observador e de partícula	11
2.3	Como os campos se transformam sob transformação de observador .	11
2.4	A violação da invariância de Lorentz e exemplos	14
2.4.1	Quebra da invariância de Lorentz através de uma rotação e de um boost	15
3	ELETRODINÂMICA COM VIOLAÇÃO DE SIMETRIA DE LORENTZ	21
3.1	Modelo padrão	21
3.2	Modelo padrão estendido	23
3.3	Eletrodinâmica com violação de simetria de Lorentz	25
4	INDUÇÃO DA AÇÃO DE EULER-HEISENBERG	28
4.1	Introdução	29
4.2	Regras de Feynman	29
4.3	Cálculo do traço e integrais	33
4.4	Limite colinear	42
4.5	Ação de Euler-Heisenberg com violação de simetria de Lorentz	44

5 CONCLUSÕES	48
A Resultados restantes referentes à equação 4.53	50
Referências	55

LISTA DE FIGURAS

2.1	Figura 1 - Referencial S_0 (a) e Referencial S (b)	12
2.2	Figura 2 - TL de observador: rotação em um campo de fundo constante .	16
2.3	Figura 3 - TL de partícula: rotação em um campo de fundo constante . .	16
2.4	Figura 4 - S' se movendo com velocidade \vec{v} em relação ao capacitor (S) .	17
2.5	Figura 5 - Trajetórias: (1) velocidade inicial \vec{u} (2) velocidade inicial $\vec{u} - \vec{v}$	19

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O conceito de simetria foi estudado inicialmente pelos matemáticos, basicamente ao se tratar de geometria, estando diretamente vinculado à ideia de isometria (preservação da distância) [1]. Em física, o conceito de simetria está imerso no teorema de Noether [2], que diz que cada simetria existente na natureza está relacionada à uma quantidade conservada. Em virtude disto, por muito tempo, manter uma simetria era algo extremamente necessário em um modelo físico para que este fosse dito consistente. Apenas a partir da década de 70 foi que modelos que incorporam violações nos diversos tipos de simetrias existentes passaram a ser efetivamente considerados.

A natureza se expressa através de quatro interações fundamentais, são estas as interações gravitacional, eletromagnética, fraca e forte, onde todas, exceto a primeira, são descritas pelo Modelo Padrão (MP), que descreve a física de partículas elementares. Foi na década de 50 que tivemos um primeiro indício de que as simetrias poderiam ser efetivamente violadas, quando foi verificada experimentalmente uma violação de CP (conjugação de Carga e Paridade) no setor da interação fraca do MP. Acredita-se que o MP seja o limite de baixas

energias de uma teoria mais fundamental, teoria esta que unificaria o MP e a interação gravitacional, fornecendo assim, um modelo de gravitação quântica. Contudo, para que tal teoria fundamental forneça uma descrição quântica da gravitação é necessário que esta seja construída na escala de Planck (escala determinada pela massa de Planck $M_{planck} \approx 10^{19} GeV$), visto que, apenas nesta escala os efeitos quânticos da gravitação são consideráveis.

Nessas teorias mais fundamentais da natureza ocorre um processo chamado de quebra espontânea de simetria, através do qual surge naturalmente o efeito da violação da invariância de Lorentz e CPT [3, 4]. Foi baseado neste fato que Kostelecky e Colladay [5, 6] formularam o Modelo Padrão Estendido (MPE), isto é, com base na quebra espontânea de simetria de Lorentz em teorias mais fundamentais, ele propôs um modelo padrão que inclui em sua lagrangiana uma extensão mínima de todos os possíveis termos com quebra de invariância de Lorentz e CPT.

O trabalho [7] foi um dos precursores no que diz respeito aos estudos acerca dos modelos que englobam violação de simetria de Lorentz. No entanto o MPE é atualmente uma das teorias mais bem sucedidas no que se trata de violação da invariância de Lorentz. É importante notar que, apesar de o MPE conter coeficientes responsáveis pela violação de simetria de Lorentz e de CPT, a simetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ é mantida, conservando várias propriedades importantes, assim como a renormalização da teoria [8].

Alguns trabalhos recentes dividem o MPE em dois setores principais, sendo estes setores conhecidos como MPE mínimo e não mínimo. No primeiro temos apenas termos renormalizáveis com operadores de dimensão $d = 3$ ou $d = 4$, por outro lado o MPE não mínimo apresenta operadores de dimensão $d \geq 5$, que faz destes termos não renormalizáveis. Dentro do setor mínimo do MPE alguns trabalhos foram realizados verificando a possibilidade de ocorrência de efeitos que, possivelmente, só ocorreriam caso houvesse de fato violação da invariância de Lorentz. Este é o caso do trabalho [9] que aborda o efeito da divisão de fótons no

vácuo, visto que, na eletrodinâmica quântica (EDQ), um fóton propagando-se no vácuo tem amplitude zero para decair em múltiplos fótons para qualquer ordem de perturbação. Este resultado é visto no trabalho do Schwinger acerca do método do tempo próprio e da ação efetiva de Euler-Heisenberg.

Assim, nesta dissertação temos como objetivo induzir a ação efetiva de Euler-Heisenberg com violação de simetria de Lorentz, através do gráfico de um laço (loop) de quatro pernas de fótons, avaliando o setor fermiônico da EDQ estendida, em um método não perturbativo no coeficiente $c_{\mu\nu}$. A partir desses resultados seremos capazes de discutir o efeito (inerente dessas teorias) da divisão de fótons (no vácuo), assim como algumas amplitudes de espalhamentos, tais como o espalhamento fóton-fóton e o espalhamento Delbrück, a fim de estimarmos experimentalmente o coeficiente $c_{\mu\nu}$, responsável pela escala da quebra da invariância de Lorentz.

O capítulo seguinte tratará de apresentar as transformações de Lorentz passiva e ativa, assim como as suas formas equivalentes, as transformações de Lorentz de observador e de partícula. Através de exemplos simples, mostraremos como a equivalência entre essas transformações é quebrada, quando temos a presença de um campo de fundo constante.

No capítulo 3, apresentaremos o MPE, mais especificamente a EDQ estendida. Contudo, inicialmente será apresentado brevemente o MP, no que diz respeito a EDQ, para que então seja apresentada a EDQ estendida, assim como suas motivações e possíveis indícios experimentais e observacionais.

No capítulo 4, entrando diretamente no objetivo deste trabalho, induziremos a ação efetiva de Euler-Heisenberg não perturbativamente no coeficiente $c_{\mu\nu}$ da EDQ estendida, entretanto, ao impormos a invariância rotacional. Para isso, consideraremos o setor fermiônico da EDQ estendida pelo coeficiente $c_{\mu\nu}$ e calcularemos o gráfico de um loop fermiônico com quatro pernas externas de fótons. Com esse cálculo seremos capazes de recuperar o resultado perturbativo no coeficiente $c_{\mu\nu}$ [9] e induzir a ação efetiva de Euler-Heisenberg com violação

de simetria de Lorentz.

Finalmente, apresentaremos nossas principais conclusões acerca do estudo realizado, no capítulo 5.

Durante toda esta dissertação, utilizaremos as unidades naturais, ou seja, consideraremos $\hbar = c = 1$, onde \hbar é a constante de Planck dividida por 2π , c é a velocidade da luz no vácuo. Além disso, a métrica adotada apresenta os seguintes elementos diagonais $(+1, -1, -1, -1)$.

Capítulo 2

A VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ

Neste capítulo apresentaremos inicialmente uma sucinta introdução histórica acerca das transformações de Lorentz, mostrando a motivação por trás do seu surgimento. Em seguida demonstraremos essas transformações simploriamente, para então apresentar as transformações de Lorentz de observador e de partícula. Posteriormente mostramos como os campos elétricos e magnéticos se transformam perante uma transformação de observador, visto que tais relações serão utilizadas ao solucionarmos os exemplos que mostram a quebra da invariância de Lorentz.

2.1 Introdução

Entre o final do século XIX e o início do século XX, após a eletrodinâmica de Maxwell estar praticamente consolidada, havia algumas questões que encontravam-se sem solução. Por

exemplo, considere uma carga elétrica movendo-se com velocidade constante. Um observador que não esteja em repouso em relação à carga perceberá um campo elétrico e um campo magnético, enquanto que um observador em repouso em relação à carga perceberá apenas o campo elétrico gerado por esta carga, ou seja, duas observações diferentes são feitas a partir de referenciais equivalentes. Com base neste fato, duas conclusões podem ser consideradas, ou a eletrodinâmica de Maxwell requer alterações ou o princípio da relatividade (proposto por Galileu) não se aplica aos fenômenos eletromagnéticos. Várias teorias modificando a eletrodinâmica foram propostas, não obstante, experimentos posteriores vieram à refutar tais teorias, uma a uma. Houve também a proposta do éter, mas foi prontamente desconsiderada após o famoso experimento de Michelson-Morley. Desse modo, são as transformações de Galileu que deveriam sofrer alterações, com base nos seguintes postulados: (i) as leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais e a velocidade da luz no vácuo vale c para todos os referenciais inerciais, independente do movimento da fonte.

Com base nestes postulados, Einstein encontrou novas transformações (tais transformações já haviam sido encontradas Lorentz) que mantinham a equivalência entre referenciais que se moviam próximos à velocidade da luz, além de recuperar as transformadas de Galileu no limite de baixas velocidades. Estas transformações são escritas como:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right).\end{aligned}$$

Elas podem ser encontradas através da equação de onda, fazendo com que esta mantenha-se invariante mediante uma transformação linear em x e em t .

A teoria da relatividade restrita vem passando por uma série de teste, sem jamais

ter sido refutada. No entanto, mais recentemente, teorias têm mostrado que a invariância de Lorentz pode ser quebrada em um limite de altas energias. No final da década de 80, foi mostrado por Kostelecký e Samuel [3, 4] que há interações presentes em teoria de cordas que podem levar à quebra espontânea da simetria de Lorentz. Foi devido a impossibilidade tecnológica de se testar modelos em teoria de cordas que emergiu o grande interesse em modelos de teoria de campos com violação da invariância de Lorentz, visto que tais modelos podem ser vistos como o limite de baixas energias dessas teorias fundamentais. Na próxima seção elucidaremos de que maneira ocorre esta violação de simetria de Lorentz, explanando as chamadas transformações de observador e de partícula, além de apresentar um exemplo de um elétron se movendo em um campo elétrico de fundo gerado por um capacitor de placas paralelas.

2.2 As transformações de Lorentz

Como já foi mencionado anteriormente, as transformações de Lorentz relacionam sistemas físicos a partir de perspectivas de diferentes observadores inerciais. Tais transformações deixam as soluções das equações de Maxwell, ou seja, equações de onda, invariantes. Portanto, considere a seguinte equação de onda:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

que representa uma equação de onda no vácuo propagando-se na direção x com velocidade c . Buscamos transformações lineares que relacionem o sistema de coordenadas (x, t) à um novo (x', t') movendo-se com velocidade v em relação ao primeiro. Tais transformações são

da forma,

$$x' = \alpha x + \beta t \quad (2.2)$$

$$t' = \lambda x + \delta t. \quad (2.3)$$

Agora basta encontrar α, β, λ e δ . Para tal, substituímos as transformações lineares acima na equação de onda e encontramos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \frac{\beta^2}{c^2} &= 1, \\ \alpha &= \delta, \\ \frac{c^2 \lambda}{\beta} &= 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Quando as expressões acima são substituídas em (2.2) e (2.3), encontramos

$$x' = \alpha \left(x + \frac{\beta}{\alpha} t \right), \quad (2.5)$$

$$t' = \alpha \left(\frac{\beta}{\alpha c^2} x + t \right), \quad (2.6)$$

tal que ao serem comparadas com as transformações de Galileu, obtemos

$$\frac{\beta}{\alpha} = -v \quad (2.7)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma. \quad (2.8)$$

Por fim, observamos que as transformações passam a ser,

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (2.9)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad (2.10)$$

sendo γ o fator de Lorentz. Veja que fizemos uma transformação (boost) na direção do eixo x , contudo, nada nos impede de realizar a mesma transformação nas direções dos eixo y e do eixo z . Há ainda rotações nas coordenadas espaciais que são invariantes de Lorentz. A seguir exemplificaremos melhor como são classificadas as transformações de Lorentz.

2.2.1 As TL's de observador e de partícula

Antes do início dos estudos acerca de modelos com violação de simetria de Lorentz, havia basicamente dois tipos de TL's a serem consideradas, conhecidas como transformações passiva e ativa. Tais transformações são equivalentes, visto que, enquanto uma (passiva) mantém os pontos do espaço-tempo fixos relacionando os dois sistemas de coordenadas, a outra (ativa) mantém as bases fixas, movendo os pontos do espaço-tempo. Claramente vemos que estas duas transformações estão relacionadas por uma função inversa, como pode ser visto em [10], e representam a mesma física. No entanto, ao adicionarmos ao sistema um campo vetorial de fundo que seleciona uma direção preferencial no universo, quebrando assim a isotropia, a equivalência entre estas duas transformações é quebrada, e tais transformações passam a ser chamadas de transformações de observador (passiva, na presença de campo de fundo) e de partícula (ativa, na presença de campo de fundo).

Antes de exemplificar como a invariância de Lorentz é quebrada através da TL de partícula, mostraremos como os campos elétricos e magnéticos se transformam mediante uma transformação de observador [11] [12].

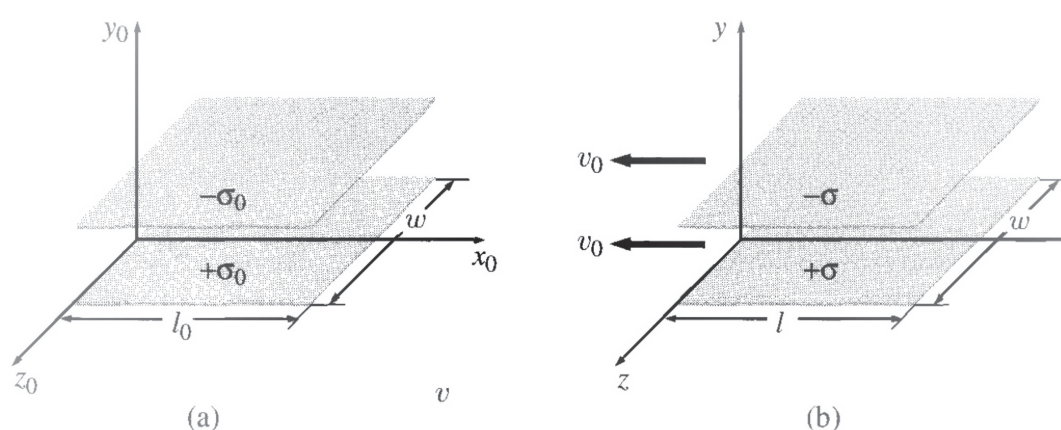
2.3 Como os campos se transformam sob transformação de observador

Nesta seção trataremos das regras gerais de transformação para os campos eletromagnéticos. Para elucidar tal transformação partiremos do fato de que a carga é invariante e, diferentemente da massa, é um número fixo que independe da velocidade a qual ela está se movendo. Suporemos também que as regras de transformação são as mesmas, independentemente de como

os campos são produzidos.

Considere então o campo elétrico em uma região entre placas paralelas de um grande capacitor. Suponha que o capacitor está em repouso em S_0 e tenha uma carga superficial $\pm\sigma_0$ (veja Fig. 2.1). Assim, o campo elétrico nesta região é,

Figura 2.1: **Figura 1 - Referencial S_0 (a) e Referencial S (b)**



Fonte: Griffiths, 2011

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{y}. \quad (2.11)$$

Podemos ainda considerar este sistema movendo-se para a direita com velocidade v_0 , que é o mesmo que considerar as placas movendo-se para a esquerda. Chamaremos tal sistema de sistema S . Neste caso o campo assume a forma

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y}, \quad (2.12)$$

sendo o valor da carga superficial diferente, visto que tal movimento altera o comprimento da placa por um fator de Lorentz, fazendo com que a carga por unidade de área também seja

modificada por um fator de Lorentz, tal que:

$$\sigma = \gamma_0 \sigma_0; \quad \gamma_0^{-1} = \sqrt{1 - v_0^2/c^2} \quad (2.13)$$

Dessa forma temos que $\vec{E}_\perp = \gamma_0 \vec{E}_{0\perp}$. Para o caso relativo as componentes paralelas ao movimento, temos que $\vec{E}_\parallel = \vec{E}_{0\parallel}$, via raciocínio análogo.

As equações de transformação para os campos obtidas anteriormente não são as leis de transformação mais gerais, visto que partimos do repouso, e portanto não havia cargas em movimento, e conseqüentemente não havia campo magnético. Para encontrarmos as transformações mais gerais partiremos do sistema S , que além do campo elétrico gerado na direção y , $\vec{E}_y = \sigma/\epsilon_0$, há um campo magnético devido as densidades de correntes superficiais $\vec{J}_\pm = \mp \sigma v_0 \hat{x}$. Devido a regra da mão direita, este campo aponta na direção negativa do eixo z e sua magnitude é dada pela lei de Ampère,

$$B_z = -\mu_0 \sigma v_0. \quad (2.14)$$

Inserindo agora um terceiro sistema S' , movendo-se para a direita com velocidade v em relação a S , obviamente os campos associados a S' , são:

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_z = -\mu_0 \sigma' v', \quad (2.15)$$

onde v' é a velocidade de S' em relação ao referencial em repouso S_0 , dado por

$$v' = \frac{v + v_0}{1 + vv_0/c^2}, \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad (2.16)$$

e como já foi visto,

$$\sigma' = \gamma' \sigma_0. \quad (2.17)$$

Temos como objetivo desta seção encontrar E' e B' em função de E e B . Para tal, usaremos as equações (2.15), de modo que

$$E'_y = \left(\frac{\gamma'}{\gamma_0} \right) \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B'_z = - \left(\frac{\gamma'}{\gamma_0} \right) \mu_0 \sigma v'. \quad (2.18)$$

É fácil verificar também que

$$\frac{\gamma'}{\gamma_0} = \gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2} \right), \quad (2.19)$$

De modo que ao substituirmos nas equações acima, obtemos

$$E'_y = \gamma \left(E_y - \frac{v}{c^2 \epsilon_0 \mu_0} B_z \right), \quad (2.20)$$

e

$$B'_z = \gamma (B_z - \mu_0 \epsilon_0 v E_y). \quad (2.21)$$

Ao usar a relação $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, também podemos escrevê-las como

$$E'_y = \gamma (E_y - v B_z) \quad (2.22)$$

$$B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right). \quad (2.23)$$

Analogamente podemos verificar as demais relações,

$$E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x, \quad (2.24)$$

$$E'_z = \gamma (E_z + v B_y), \quad B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right). \quad (2.25)$$

Estas são as transformações mais gerais quando temos dois referenciais em movimento, as quais serão utilizadas a seguir ao tratar do exemplo de um elétron propagando-se em uma região de campo elétrico entre placas paralelas.

2.4 A violação da invariância de Lorentz e exemplos

Anteriormente fizemos uma breve elucidação acerca das TL's de observador e de partícula, ressaltando suas diferenças e suas relações com as transformações ativas e passivas.

É bom observar que, ao realizarmos uma transformação de observador (por observador entendemos transformação passiva na presença de um campo de fundo), o campo de fundo transforma-se como um campo vetorial. Não obstante, ao realizarmos uma transformação de partícula, o campo de fundo transforma-se como um campo escalar, que pode ser visto também através de análise de rotação, veja [10, 13]. Assim vemos que a física descrita em cada uma das transformações é diferente, logo as transformações não são mais invariantes. Neste trabalho estamos interessados na quebra de simetria de Lorentz via transformação de partícula, e deixamos claro que mantemos a invariância das TL's de observador, para garantir de que a física descrita seja independente do sistema de referência escolhido.

Agora, estamos aptos a tratar do exemplo de um elétron imerso em um campo elétrico constante de fundo e avaliar a quebra da invariância de Lorentz através de um boost.

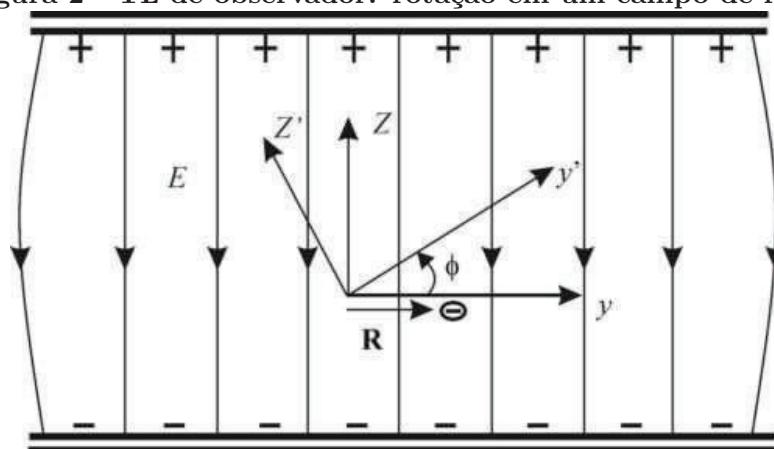
2.4.1 Quebra da invariância de Lorentz através de uma rotação e de um boost

Vamos observar inicialmente uma rotação por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ em meio a um campo elétrico de fundo constante (gerado por um capacitor de placas paralelas) na direção z , de modo que o vetor posição de um elétron imerso neste campo seja $\vec{R} = (0, a, 0)$. Uma representação esquemática é apresentada na Fig. 2.2.

Veja que, usando uma transformação de observador como está sendo representado na figura acima, o vetor posição segue perpendicular ao campo elétrico de fundo, ou seja, após a rotação ($\vec{R} \perp \vec{E}$).

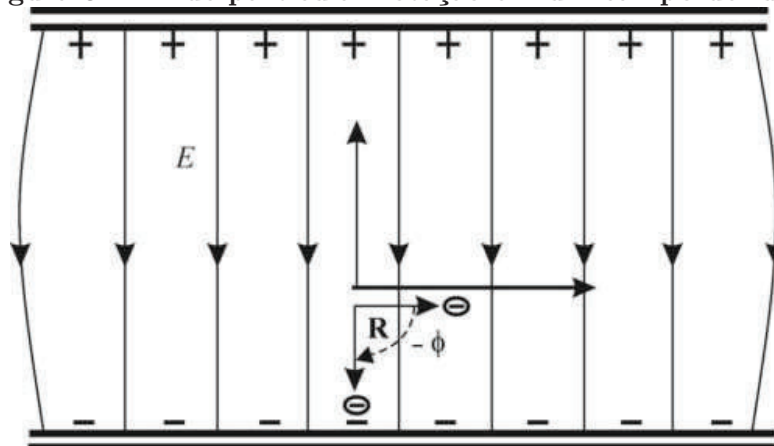
No entanto, ao realizarmos uma transformação de partícula, isto é, uma rotação de $-\frac{\pi}{2}$ radianos na partícula, como mostrado na Fig 2.3, vemos agora que o vetor posição do elétron

Figura 2.2: Figura 2 - TL de observador: rotação em um campo de fundo constante

Fonte: Belich *et al.*, 2007

é paralelo ao campo de fundo, diferentemente do caso em que foi feita uma transformação de observador.

Figura 2.3: Figura 3 - TL de partícula: rotação em um campo de fundo constante

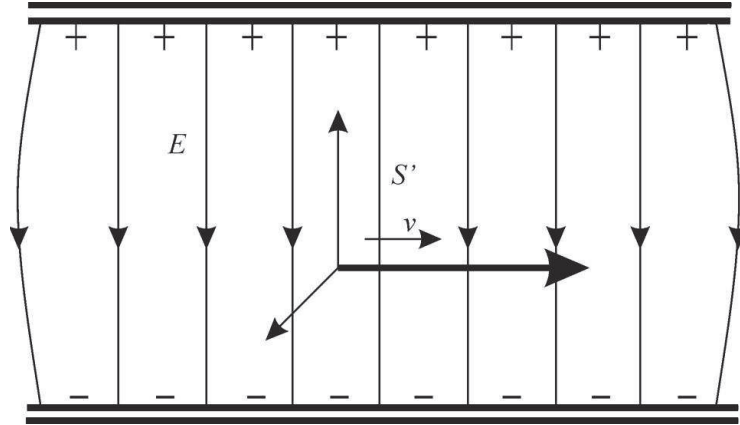
Fonte: Belich *et al.*, 2007

Note que, a presença de um campo de fundo quebra a invariância entre as transformações passiva e ativa, que pode ser vista devido ao fato de que na primeira o vetor posição segue perpendicular ao campo enquanto que na segunda o vetor posição segue paralelo ao campo. É fácil ver que na ausência de um campo de fundo a equivalência é mantida,

observando-se que em ambas as transformações o vetor posição permanece antiparalelo ao eixo Z após a transformação.

Agora considere o mesmo capacitor de placas paralelas que possui um campo elétrico constante, o qual será considerado o nosso campo elétrico de fundo. Na região entre as placas, imerso neste campo de fundo, temos dois sistemas de referências S e S' , onde o primeiro encontra-se em repouso em relação as placas do capacitor e o segundo movimenta-se com velocidade \vec{v} em relação ao primeiro, paralelamente às placas capacitores. Uma representação esquemática é mostrada na Fig. 2.4.

Figura 2.4: **Figura 4 - S' se movendo com velocidade \vec{v} em relação ao capacitor (S)**



Fonte: Belich *et al.*, 2007

Mostramos anteriormente como se transformam, de forma geral, os campos elétricos e magnéticos sob uma transformação de observador, equações (2.22) a (2.25). Estas equações podem ser simplificadas na forma vetorial da seguinte forma

$$E'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp} \quad (2.26)$$

$$B'_{\perp} = \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \right)_{\perp} . \quad (2.27)$$

Se considerarmos o estado inicial no qual S está em repouso, o campo magnético inicial é nulo, o que simplifica as equações.

Quando realizamos uma transformação de partícula sobre o elétron, não estamos movendo as placas do capacitor, portanto o campo elétrico assume características de um campo de fundo que não está variando. Vemos assim que, como a transformação de partícula atua somente nos pontos do espaço-tempo, somente o elétron se desloca com velocidade $-\vec{v}$ em relação as placas do capacitor, portanto o campo elétrico de fundo não se modifica, diferentemente da transformação de observador, em que o campo elétrico é reduzido e surge uma contribuição de campo magnético.

Suponha agora um elétron movendo-se com velocidade \vec{u} paralelamente as placas do capacitor. Olhando apenas para a componente y do movimento vemos que o observador S verá o elétron em queda, sendo acelerado apenas pelo campo elétrico, visto que, como S encontra-se em repouso $\vec{B} = 0$. Sendo assim, a força que o elétron sente é a força de Lorentz, dada por $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$. Sendo $\vec{F} = dp/dt$, extraímos que

$$p = \frac{mu_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_y}{c}\right)^2}} = Ft. \quad (2.28)$$

Visto que $p = 0$ quando $t = 0$. Isolando u_y a partir da equação anterior temos,

$$u_y = \frac{\left(\frac{F}{m}\right)t}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}. \quad (2.29)$$

Com o intuito de encontrar a posição na vertical, integramos a expressão anterior 2.29 de 0 a t , cuja solução é,

$$y(t) = \frac{mc^2}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} - 1 \right). \quad (2.30)$$

Note que a equação acima representa uma hipérbole, diferentemente da parábola que é encontrada no caso não relativístico. Tomando uma expansão em série de Taylor da quantidade $\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2$, que nos dá

$$y(t) = \frac{F}{2m}t^2. \quad (2.31)$$

Já o observador em S' verá o elétron submetido a uma força

$$\vec{F}' = eE' = e\gamma\vec{E} \quad (2.32)$$

Da mesma forma que fizemos para encontrar $y(t)$ para o caso anterior faremos agora, e encontramos

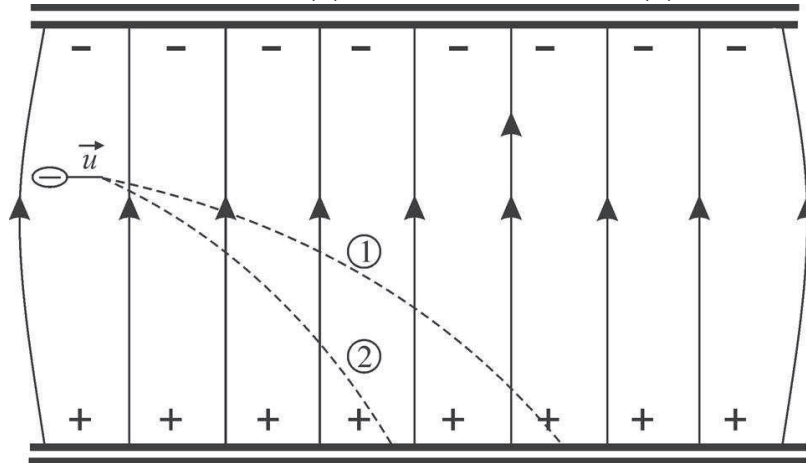
$$y'(t) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}y(t). \quad (2.33)$$

Analogamente para o alcance do elétron ($x(t)$),

$$x'(t) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}x(t). \quad (2.34)$$

Podemos ver que no limite de baixas energias S e S' coincidem, ou seja, o alcance do elétron é $A = x'(t) = x(t)$. No caso da transformação de partícula, o elétron sofre um boost que lhe imprime uma velocidade $-\vec{v}$, e desta forma o observador S o verá caindo de modo a obter o alcance de $A = (\vec{u} - \vec{v})t_q$, sendo t_q o tempo de queda. No caso anterior, como a velocidade do elétron era \vec{u} este registrava um alcance maior, como podemos ver na Fig. 2.5

Figura 2.5: **Figura 5 - Trajetórias: (1) velocidade inicial \vec{u} (2) velocidade inicial $\vec{u} - \vec{v}$**



Fonte: Belich *et al.*, 2007

Vimos através deste exemplo que, a presença do campo de fundo torna as duas transformações não mais equivalentes, ou seja, elas passam a descrever uma física diferente. Sob

transformação de partícula o campo de fundo fica inalterado e o elétron sofre um boost instantâneo e seu alcance é reduzido. Portanto, neste sentido a simetria de Lorentz é quebrada pela presença de um campo de fundo. Na natureza espera-se que hajam quadrivetores que quebrem espontaneamente a simetria, como sugerido em [14], [7], [5].

Capítulo 3

ELETRODINÂMICA COM VIOLAÇÃO DE SIMETRIA DE LORENTZ

Neste capítulo inicialmente faremos uma breve introdução acerca do chamado modelo padrão das partículas elementares e campos, no qual a eletrodinâmica está incluída. Em seguida, falaremos do modelo padrão estendido (MPE), apresentando algumas motivações para o seu estudo, assim como alguns comentários sobre os seus termos. Ao final do capítulo será mostrada a lagrangiana da eletrodinâmica estendida, onde comentaremos acerca de seus operadores, como uma preparação para os cálculos do próximo capítulo.

3.1 Modelo padrão

A primeira evidência de unificação das forças da natureza surgiu com Newton, ao

mostrar que as leis que regem a mecânica clássica são as mesmas que regem a mecânica celeste. Posteriormente, Maxwell unificou as forças elétricas e magnéticas. Desde então a unificação das leis da natureza vem sendo buscada de forma mais intensa. Uma consequência desta busca é o modelo padrão, que descreve as interações forte, fraca e eletromagnética, assim como as partículas fundamentais que constituem toda a matéria.

O modelo padrão (MP) foi basicamente desenvolvido durante a década de 70 e situa-se na escala de $10^{-18}m$, e é constituído do setor eletrofraco (interações eletromagnéticas e fracas, unificadas) combinado com o setor da cromodinâmica (interações fortes). Neste cenário são conhecidos 12 bósons de gauge (ou calibre), sendo o setor eletrofraco composto pelos bósons γ, W^+, W^-, Z_0 e o setor da cromodinâmica composto por 8 gluons (g). Também temos 12 férmions, sendo os léptons $e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau$ e os quarks u, d, c, s, t, b . Acredita-se que a origem de tal cenário deu-se após o resfriamento do universo primordial, onde todas as partículas eram sem massa e todas as interações eram unificadas.

O MP foi construído sobre dois pilares principais: a teoria quântica de campos e as simetrias de gauge. Também temos a quebra espontânea de simetria, resultando na origem do bóson de Higgs. Ao focarmos na eletrodinâmica quântica, a origem a invariância de gauge se dá a partir da observação de que vários potenciais diferentes podem descrever os mesmo campos eletromagnéticos. Estes vários potenciais estão conectados por um grupo de transformações contínuas, gerando uma simetria contínua $U(1)$ na lagrangiana.

O paradigma da EDQ está nas consequências de se impor invariância rotacional por fase local, da seguinte forma:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x). \quad (3.1)$$

Não obstante, a lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (3.2)$$

não permanece invariante, visto que o segundo termo (setor de Dirac) não satisfaz a invariância, pois $[\partial_\mu, e^{i\alpha(x)}] \neq 0$. A solução é adicionar um termo de interação à lagrangiana e criar um mecanismo que balanceie os efeitos da localidade da fase. Assim, as seguintes transformações

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)\end{aligned}$$

mantêm a lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (3.3)$$

invariante, onde introduzimos a derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Apesar do modelo padrão possuir simetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, a expressão para sua lagrangiana é bastante semelhante à lagrangiana acima, contudo, nela encontramos mais simetrias e estruturas internas.

Embora o modelo padrão seja eficiente em explicar os resultados experimentais, ele não é aceito como uma teoria completa. Isso deve-se ao fato de que o modelo padrão possui alguns problemas, tais como o problema da hierarquia e a incapacidade de descrever a interação gravitacional.

3.2 Modelo padrão estendido

Vimos na seção anterior alguns aspectos acerca do modelo padrão e desta forma fica mais clara a elucidação no que diz respeito ao modelo padrão estendido. Como já vimos na seção anterior, acredita-se que o modelo padrão seja o limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental que inclui todas as forças da natureza, como por exemplo a teoria de cordas.

Em algumas dessas teorias fundamentais temos o processo de quebra espontânea de simetria de Lorentz, que é o processo utilizado para gerar o modelo padrão estendido, como já foi enfatizado na introdução. Tal processo é análogo ao mecanismo de Higgs, no qual um campo escalar ganha um valor esperado no vácuo diferente de zero e gera a massa para as partículas do modelo padrão. No caso de um campo tensorial que contém índices de Lorentz, um valor esperado não nulo seleciona uma direção preferencial no espaço-tempo, quebrando assim, espontaneamente, a transformação de Lorentz de partícula, ao passo que a transformação de Lorentz de observador permanece inalterada.

Dessa forma, a proposta do modelo padrão estendido é incluir no modelo padrão todos os possíveis termos que violam as simetrias de Lorentz e CPT, a fim de investigar indícios de teorias fundamentais, com quebra espontânea de simetria de Lorentz, em escalas de energias praticáveis. Portanto, quaisquer confirmações do MPE, seriam também confirmações dessas teorias fundamentais.

Observe que também falamos de violação de simetria de CPT. Isso acontece, pois toda violação desta simetria acarreta também em uma violação de simetria de Lorentz [21]. Contudo, nem toda violação de simetria de Lorentz ocasiona uma violação de simetria CPT.

Esses termos com quebra de simetria de Lorentz e CPT do MPE são invariantes de gauge, assim como renormalizáveis. Deste modo, os coeficientes tensoriais que controlam a escala de violação de simetria de Lorentz são adimensionais e de dimensão de massa $d = 1$, contraídos com operadores de dimensão de massa $d = 4$ e $d = 3$, respectivamente. Operadores não renormalizáveis de dimensão de massa $d \geq 5$ têm sido considerados na literatura, em especial veja as Refs. [22, 23, 25, 24]. Embora esses operadores sejam não renormalizáveis, os seus coeficientes possuem dimensão de massa $d \leq -1$, isto é, podem ser considerados naturalmente suprimidos pela massa de Planck. Uma outra fonte de motivação para o estudo desses operadores de dimensão de massa $d \geq 5$ está na descrição supersimétrica do MPE,

onde apenas termos com operadores de dimensão de massa $d \geq 5$ são permitidos.

Até o presente momento, muitos limites experimentais vêm sendo atribuídos aos coeficientes do MPE, associados a dados experimentais envolvendo hádrons, káons [29, 30], prótons e nêutrons [31, 32], elétrons [34, 35, 36, 37], múons [38, 39] e fótons [40, 41, 42, 43]. Para uma relação mais completa, veja [44].

3.3 Eletrodinâmica com violação de simetria de Lorentz

A eletrodinâmica estendida é composta basicamente da eletrodinâmica usual, no entanto, sendo também adicionado à lagrangiana todos os possíveis termos que incorporam a violação de simetria de Lorentz e CPT.

Esses termos adicionais na EDQ estendida devem ser pequenos a ponto de poderem ser considerados desprezíveis no regime de energia do setor eletrofraco usual, para que assim a teoria recupere o modelo padrão convencional. Tal condição imposta nos coeficientes de violação de simetria de Lorentz permite ainda que trabalhem dentro de um regime perturbativo. Este cenário sobre o qual trabalhamos a violação de simetria de Lorentz e CPT preserva a simetria de gauge local $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ do modelo padrão usual, assim como a renormalização.

A lagrangiana da EDQ estendida, é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overbrace{(k_{AF})^\mu}^M \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \overbrace{A^\nu F^{\lambda\rho}}^{M^3} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} \overbrace{F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}}^{M^4} + \frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - \bar{\psi}M\psi, \quad (3.4)$$

onde $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Gamma_1^\mu$ e $M = m + M_1$, sendo

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\mu &= c^{\mu\nu}\gamma_\nu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\nu + e^\mu + if^\mu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\nu\mu}\sigma_{\lambda\nu} \\ M_1 &= a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma_5\gamma^\mu + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

O primeiro termo é a lagrangiana de Maxwell usual, e os outros dois termos são os que violam a simetria de Lorentz, lembrando que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

A primeira das contribuições extra é o termo de Chern-Simons quadridimensional, que é CPT ímpar e portanto viola as simetrias de Lorentz e CPT. Note que o coeficiente $(k_{AF})^\mu$ tem dimensão de massa $d = 1$, ao passo que o operador $A^\nu F^{\lambda\rho}$ (campos e derivadas) tem dimensão de massa $d = 3$, visto que a lagrangiana tem dimensão de massa $d = 4$. Esse termo foi recentemente bastante estudado na literatura, em vários contextos, como por exemplo, em efeitos de dispersão [7] e em indução radiativa [72].

O segundo dos termos extra contém um operador com dimensão de massa $d = 4$ e portanto o coeficiente $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$ é adimensional, além de ter simetria de tensor de Riemann. Tal termo tem sido pouco estudado na literatura, e no capítulo a seguir veremos ele emergir como uma correção quântica não linear à teoria de Maxwell com violação de simetria de Lorentz.

No setor fermiônico, os termos extras adicionados à lagrangiana de Dirac, os operadores contraídos com os coeficientes a_μ , b_μ , e_μ , f_μ e $g_{\lambda\nu\mu}$, violam as simetrias de Lorentz e CPT (CPT ímpar), enquanto que os operadores relacionados com os coeficientes $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu}$, violam apenas a simetria de Lorentz (CPT par). Contudo, sob uma certa redefinição espinorial, os termos relacionados com os coeficientes a_μ , e_μ e f_μ são removidos da lagrangiana, apenas os coeficientes $\bar{c}_{\mu\nu}$, $\bar{d}_{\mu\nu}$ (totalmente simétrico), $\tilde{g}_{\lambda\nu\mu}$ (totalmente antissimétrico), b_μ e $H_{\mu\nu}$ sobrevivem. Note que os coeficientes contidos em M_1 têm dimensão de massa $d = 1$, enquanto que os coeficientes contidos em Γ_1^μ são adimensionais.

Ainda no setor fermiônico, vale a pena enfatizar que apenas os coeficientes b_μ e $c_{\mu\nu}$ geram correções quânticas no setor bosônico, tal que $(k_{AF})_\mu \propto b_\mu$ e

$$(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} \propto g_{\mu\lambda}c_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}c_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}c_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}c_{\mu\rho}$$

. No próximo capítulo, veremos que essa última proporcionalidade será de fato encontrado, quando tomarmos o limite perturbativo da ação de Euler-Heisenberg, com violação de simetria de Lorentz.

Capítulo 4

INDUÇÃO DA AÇÃO DE EULER-HEISENBERG

Neste capítulo estudaremos a geração da ação de Euler-Heisenberg, no contexto de violação de simetria de Lorentz, a partir de um termo que é CPT par, da EDQ estendida. Para tal, consideraremos um cálculo não perturbativo no coeficiente, além de assumir invariância rotacional. Inicialmente, vamos mostrar as regras de Feynman utilizadas e montar a expressão para o loop de quatro pernas de fótons que será utilizado para a indução da ação de Euler-Heisenberg. Em seguida, vamos realizar a parametrização de Feynman, calcular o traço e as integrais nos momentos e nos parâmetros de Feynman. Neste momento iremos tomar o limite colinear e recuperar o resultado perturbativo, já obtido na literatura [9]. Finalmente, após levarmos em conta as devidas permutações, induziremos a ação de Euler-Heisenberg com violação de simetria de Lorentz.

4.1 Introdução

A ação efetiva de Euler-Heisenberg tem sido extensivamente investigada em vários contextos, nas últimas décadas [45, 46]. No entanto, os estudos relacionados à violação de simetria de Lorentz [5, 6] têm sido realizados, até então, no contexto de divisão de fótons [8, 47, 48, 49, 50, 51].

A geração radiativa da ação de Euler-Heisenberg apresentada neste trabalho é de suma importância, visto que, as correções não lineares apresentadas tornam possíveis os cálculos para amplitudes de espalhamentos específicos, tais como o espalhamento de um fóton em um campo eletromagnético de um núcleo (espalhamento Delbrück) [52, 53] e o espalhamento de um fóton em um campo magnético intenso [54, 55]. Como esses espalhamentos já foram comprovados experimentalmente, temos aqui uma oportunidade de estimar numericamente os coeficientes de violação de simetria de Lorentz. Recentemente, foi argumentado que o espalhamento fóton-fóton pode ser observado no grande colisor de Hádrons (Large Hadron Collider - LHC) [56], como uma oportunidade para discutir interações não comutativas [57], entre outras, e portanto efeitos de violação de simetria de Lorentz.

4.2 Regras de Feynman

A fim de efetuarmos a indução radiativa da ação de Euler-Heisenberg, no contexto de quebra de simetria de Lorentz, vamos estudar esta geração a partir do termo CPT-par $i\bar{\psi}c_{\mu\nu}\gamma^\mu(\partial^\nu + ieA^\nu)\psi$, da EDQ estendida. Para isso, vamos assumir invariância rotacional, no qual o coeficiente $c_{\mu\nu}$ é reduzido ao produto de dois vetores tipo-tempo, ou seja, $c_{\mu\nu} = \kappa u_\mu u_\nu$, sendo $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ e κ o coeficiente que determina a escala da violação de Lorentz. Desta

forma, a lagrangiana fermiônica de interesse é escrita como

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}(i\tilde{\partial}_\mu\gamma^\mu - m - e\tilde{A}_\mu\gamma^\mu)\psi, \quad (4.1)$$

onde $\tilde{\partial}_\mu = (g_{\mu\nu} + c_{\mu\nu})\partial^\nu$ e $\tilde{A}_\mu = (g_{\mu\nu} + c_{\mu\nu})A^\nu$. Portanto, as regras de Feynman são o propagador do férmion

$$\longrightarrow = \frac{i}{\not{\tilde{p}} - m}, \quad (4.2)$$

e o vértice férmion-fóton

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \updownarrow \end{array} \longrightarrow = -ie\gamma^\mu, \quad (4.3)$$

com $\not{\tilde{p}} = \tilde{p}_\mu\gamma^\mu$ e $\tilde{p}_\mu = ((1 + \kappa)p_0, p_i)$. Com isso, a ação efetiva toma a forma

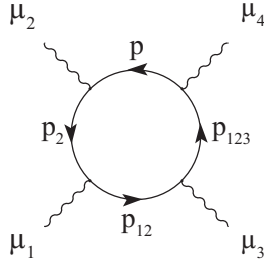
$$\begin{aligned} S_{eff}^{(4)} &= \frac{1}{4} \int d^4x \int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4 e^{i(k_1+k_2+k_3+k_4)\cdot x} \\ &\times \frac{1}{6} G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) \tilde{A}_{\mu_1}(k_1) \tilde{A}_{\mu_2}(k_2) \tilde{A}_{\mu_3}(k_3) \tilde{A}_{\mu_4}(k_4), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{aligned} G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= 2T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) + 2T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ &+ 2T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4), \end{aligned} \quad (4.5)$$

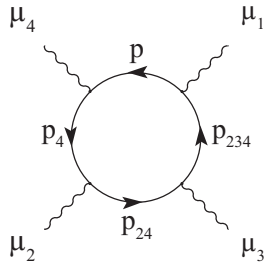
com

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \mu_1 \quad \mu_4 \\ \text{wavy lines} \\ \text{circle} \\ \text{wavy lines} \\ \mu_2 \quad \mu_3 \end{array} &= iT_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3, \tilde{k}_4) \\ &= -e^4 tr \int \frac{d^4\tilde{p}}{(2\pi)^4} S(\tilde{p})\gamma^{\mu_1} S(\tilde{p}_1)\gamma^{\mu_2} S(\tilde{p}_{12})\gamma^{\mu_3} S(\tilde{p}_{123})\gamma^{\mu_4}, \end{array} \quad (4.6)$$



$$\begin{aligned}
&= iT_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3, \tilde{k}_4) \\
&= -e^4 tr \int \frac{d^4\tilde{p}}{(2\pi)^4} S(\tilde{p})\gamma^{\mu_2} S(\tilde{p}_2)\gamma^{\mu_1} S(\tilde{p}_{12})\gamma^{\mu_3} S(\tilde{p}_{123})\gamma^{\mu_4}, \quad (4.7)
\end{aligned}$$

e



$$\begin{aligned}
&= T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3, \tilde{k}_4) \\
&= -e^4 tr \int \frac{d^4\tilde{p}}{(2\pi)^4} S(\tilde{p})\gamma^{\mu_4} S(\tilde{p}_4)\gamma^{\mu_2} S(\tilde{p}_{24})\gamma^{\mu_3} S(\tilde{p}_{234})\gamma^{\mu_1}, \quad (4.8)
\end{aligned}$$

onde tr representa o traço sobre as matrizes de Dirac, $S(\tilde{p}) = (\not{\tilde{p}} - m)^{-1}$, $\tilde{A}_\mu(k) = ((1 + \kappa)A_0(k), A_i(k))$, $\tilde{p}_1 = \tilde{p} + \tilde{k}_1$, $\tilde{p}_{12} = \tilde{p} + \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2$, $\tilde{p}_{123} = \tilde{p} + \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3$ e assim por diante. O fator global 2 em (4.5) faz menção as duas orientações do loop de férmions. Note que podemos obter $T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ e $T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ a partir de $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, quando realizamos as mudanças $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$ e $\tilde{k}_1 \leftrightarrow \tilde{k}_2$ assim como $\mu_1 \leftrightarrow \mu_4$ e $\tilde{k}_1 \leftrightarrow \tilde{k}_4$ respectivamente, de modo que

$$T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = T_1^{\mu_2\mu_1\mu_3\mu_4}(k_2, k_1, k_3, k_4), \quad (4.9)$$

$$T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = T_1^{\mu_4\mu_2\mu_3\mu_1}(k_4, k_2, k_3, k_1). \quad (4.10)$$

Portanto, precisamos apenas calcular a expressão para $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = ie^4 tr \int \frac{d^4\tilde{p}}{(2\pi)^4} \frac{(\not{\tilde{p}} + m)\gamma^{\mu_1}(\not{\tilde{p}}_1 + m)\gamma^{\mu_2}(\not{\tilde{p}}_{12} + m)\gamma^{\mu_3}(\not{\tilde{p}}_{123} + m)\gamma^{\mu_4}}{(\tilde{p}^2 - m^2)(\tilde{p}_1^2 - m^2)(\tilde{p}_{12}^2 - m^2)(\tilde{p}_{123}^2 - m^2)}. \quad (4.11)$$

Neste ponto, resolveremos o problema em duas partes, primeiramente trataremos o denominador da expressão usando parametrização de Feynman, para então calcularmos o traço do numerador.

De uma forma simplificada, a parametrização de Feynman trata de reescrever o denominador de uma forma que seja mais fácil calcular as integrais. Sabendo que

$$\frac{1}{A_1 A_2 A_3 A_4} = 6 \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_{12}} dx_3 \times \frac{1}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + (1-x_{123}) A_4]^4}, \quad (4.12)$$

onde x_1 , x_2 e x_3 são os parâmetros de Feynman, $x_{12} = x_1 + x_2$ e $x_{123} = x_1 + x_2 + x_3$. As quantidades A_1 , A_2 , A_3 e A_4 podem ser associadas aos denominadores da equação (4.11), respectivamente. Após um certo trabalho algébrico, ao realizarmos a seguinte mudança

$$p^\mu \rightarrow q^\mu = p^\mu - k_1^\mu(1-x_1) - k_2^\mu(1-x_{12}) - k_3^\mu(1-x_{123}) \quad (4.13)$$

para eliminar os termos cruzados, encontramos que

$$\frac{1}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + (1-x_1-x_2-x_3) A_4]^4} = \frac{1}{(\tilde{p}^2 - M^2)^4}, \quad (4.14)$$

onde M^2 é dado por

$$\begin{aligned} M^2 &= m^2 - \tilde{k}_1^2(1-x_1)x_1 - \tilde{k}_2^2 x_{12}(1-x_{12}) - \tilde{k}_3^2 x_{123}(1-x_{123}) \\ &- 2(1-x_{12})x_1 \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 - 2(1-x_{123})x_1 \tilde{k}_1 \tilde{k}_3 - 2(1-x_{123})x_{12} \tilde{k}_2 \tilde{k}_3. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Agora podemos reescrever a equação (4.11) como,

$$\begin{aligned} T_1^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} &= 6ie^4 \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_{12}} dx_3 \\ &\times \int \frac{d^4 \tilde{p}}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}[(\not{\tilde{q}} + m)\gamma^{\mu_1}(\not{\tilde{q}}_1 + m)\gamma^{\mu_2}(\not{\tilde{q}}_{12} + m)\gamma^{\mu_3}(\not{\tilde{q}}_{123} + m)\gamma^{\mu_4}]}{(\tilde{p}^2 - M^2)^4}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde

$$q_I^\mu = p_I^\mu - k_1^\mu(1-x_1) - k_2^\mu(1-x_1-x_2) - k_3^\mu(1-x_1-x_2-x_3), \quad (4.17)$$

com $I = 1, 12, 123$. A seguir vamos mostrar, de forma detalhada, como efetuar o traço sobre as matrizes e as integrais.

4.3 Cálculo do traço e integrais

Para calcularmos o traço do numerador, vamos usar o fato de que o traço de um número ímpar de matrizes de Dirac é sempre nulo. Denotando por

$$\text{tr}[Num(T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4})] = \text{tr}[(\not{q} + m)\gamma^{\mu_1}(\not{q}_1 + m)\gamma^{\mu_2}(\not{q}_{12} + m)\gamma^{\mu_3}(\not{q}_{123} + m)\gamma^{\mu_4}], \quad (4.18)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}[Num(T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4})] &= \text{tr}[\not{q}\gamma^{\mu_1}\not{q}_1\gamma^{\mu_2}\not{q}_{12}\gamma^{\mu_3}\not{q}_{123}\gamma^{\mu_4} + \not{q}\gamma^{\mu_1}\not{q}_1\gamma^{\mu_2}m\gamma^{\mu_3}m\gamma^{\mu_4} \\ &\quad + \not{q}\gamma^{\mu_1}m\gamma^{\mu_2}\not{q}_{12}\gamma^{\mu_3}m\gamma^{\mu_4} + \not{q}\gamma^{\mu_1}m\gamma^{\mu_2}m\gamma^{\mu_3}\not{q}_{123}\gamma^{\mu_4} \\ &\quad + m\gamma^{\mu_1}\not{q}_1\gamma^{\mu_2}\not{q}_{12}\gamma^{\mu_3}m\gamma^{\mu_4} + m\gamma^{\mu_1}\not{q}_1\gamma^{\mu_2}m\gamma^{\mu_3}\not{q}_{123}\gamma^{\mu_4} \\ &\quad + m^2\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\not{q}_{12}\gamma^{\mu_3}\not{q}_{123}\gamma^{\mu_4} + m^2\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}m^2\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ao substituírmos todos os q e q_I presentes na equação acima, de acordo com as equações (4.13) e (4.17), vamos calcular inicialmente o termo divergente, isto é, o numerador

$$\text{tr}[\not{p}\gamma^{\mu_1}\not{p}\gamma^{\mu_2}\not{p}\gamma^{\mu_3}\not{p}\gamma^{\mu_4}] = \tilde{p}_\alpha\tilde{p}_\beta\tilde{p}_\lambda\tilde{p}_\rho\text{tr}[\gamma^\alpha\gamma^{\mu_1}\gamma^\beta\gamma^{\mu_2}\gamma^\lambda\gamma^{\mu_3}\gamma^\rho\gamma^{\mu_4}]. \quad (4.20)$$

Para efetuarmos as integrais nos momentos, vamos levar em conta que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{p}_{\nu_1}\tilde{p}_{\nu_2}\cdots\tilde{p}_{\nu_p}}{(\tilde{p}^2 - M^2)^\alpha} &= (1 + \kappa)^{-1} \int \frac{d^4\tilde{p}}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{p}_{\nu_1}\tilde{p}_{\nu_2}\cdots\tilde{p}_{\nu_p}}{(\tilde{p}^2 - M^2)^\alpha} \\ &= (1 + \kappa)^{-1} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_{\nu_1}p_{\nu_2}\cdots p_{\nu_p}}{(p^2 - M^2)^\alpha}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde $d^4\tilde{p} = d\tilde{p}_0dp_1dp_2dp_3$ e $d\tilde{p}_0 = (1 + \kappa)dp_0$, ou seja, o efeito de violação de Lorentz está concentrado no fator de $(1 + \kappa)^{-1}$ e dentro do parâmetro de massa M . Dessa forma, ao adotarmos a regularização dimensional, fazendo com que a dimensão do espaço-tempo seja

estendida a D dimensões, temos que

$$(1 + \kappa)^{-1} \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^2} \frac{p^\alpha p^\beta p^\lambda p^\rho}{(p^2 - M^2)^4} = (1 + \kappa)^{-1} \mu^{4-D} \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{1}{6} \Gamma(2 - D/2) \\ \times \left(\frac{1}{-M^2} \right)^{2-D/2} \frac{1}{4} (g^{\alpha\beta} g^{\lambda\rho} + g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} + g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda}). \quad (4.22)$$

Expandindo a função gama, escolhendo $\epsilon = 4 - D$, obtemos que

$$\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \Gamma\left(-0 + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ = \frac{(-1)^0}{0!} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right] = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.23)$$

Também através da expansão

$$a^\epsilon = 1 + \epsilon \ln(a), \quad (4.24)$$

construímos

$$\left(\frac{-M^2}{4\pi\mu^2} \right)^{D/2-2} = 1 + \left(\frac{D}{2} - 2 \right) \ln \left(\frac{-M^2}{4\pi\mu^2} \right) + \dots \quad (4.25)$$

Ao substituirmos então a expansão da função gama e a expansão da acima, encontramos:

$$(1 + \kappa)^{-1} \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^2} \frac{p^\alpha p^\beta p^\lambda p^\rho}{(p^2 - M^2)^4} = \frac{1}{24} \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \ln \left(\frac{M^2}{\mu'^2} \right) \right] (1 + \kappa)^{-1} \\ \times (g^{\alpha\beta} g^{\lambda\rho} + g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} + g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda}), \quad (4.26)$$

onde $\mu'^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma-i\pi}$. Expandindo M^2 no logaritmo acima, temos

$$\ln \left(\frac{M^2}{\mu'^2} \right) = \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right) + \ln \left(1 + \frac{M_k^2}{m^2} \right), \quad (4.27)$$

onde a quantidade M_k^2 é o deslocamento na massa que advém da parametrização, ou seja, M_k^2

é dado por

$$M_k^2 = -\tilde{k}_1^2 (1 - x_1) x_1 - \tilde{k}_2^2 x_{12} (1 - x_{12}) - \tilde{k}_3^2 x_{123} (1 - x_{123}) \\ - 2(1 - x_{12}) x_1 \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - 2(1 - x_{123}) x_1 \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 - 2(1 - x_{123}) x_{12} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3. \quad (4.28)$$

Vamos agora calcular as integrais sobre os parâmetros de Feynman, não obstante, ao substituírmos (4.27) em (4.26), vemos que não há dependência nos parâmetros para a contribuição divergente, portanto, um cálculo direto nos mostra que

$$6ie^4 \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 = ie^4. \quad (4.29)$$

Então, de acordo com os cálculos já efetuados e considerando que

$$\begin{aligned} & (g^{\alpha\beta} g^{\lambda\rho} + g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} + g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda}) \text{tr}[\gamma^\alpha \gamma^{\mu_1} \gamma^\beta \gamma^{\mu_2} \gamma^\lambda \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4}] \\ &= 32(g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} - 2g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} + g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3}), \end{aligned} \quad (4.30)$$

finalmente obtemos a contribuição divergente do cálculo, dada por.

$$\begin{aligned} T_{1g\epsilon}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= - \left[\frac{e^4}{6\pi^2\epsilon} - \frac{e^4}{12\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right) \right] (1 + \kappa)^{-1} \\ &\quad \times (g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} - 2g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} + g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Nosso passo seguinte será encontrar, de forma explícita, as contribuições da ordem de $1/m^2$, de termos que contenham a quantidade $g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4}$, isto é, sem índices nos momentos externos. Desse modo, devemos também selecionar aqueles termos que possuem momentos de integração da forma $p^{\mu_1} p^{\mu_2} g^{\mu_3\mu_4}$, $p^{\mu_3} p^{\mu_4} g^{\mu_1\mu_2}$ e $p^{\mu_1} p^{\mu_2} p^{\mu_3} p^{\mu_4}$. Separamos tais termos da equação (4.19), de modo que ao calcularmos o traço sobre as matrizes de Dirac, encontramos

$$\begin{aligned} \text{tr}[Num(T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4})] &= R_{p^4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + R_{p^2k^2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + R_{m^4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + R_{m^2k^2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \\ &\quad + R_{pkpk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + R_{ppkk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + R_{p^2pp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + R_{pppp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + \dots, \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde

$$R_{p^4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = 4p^4 g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} \quad (4.33a)$$

$$R_{p_2k_2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -4p^2(2m^2 - \tilde{K} \cdot \tilde{K}_1 + \tilde{K} \cdot \tilde{K}_{12} - \tilde{K} \cdot \tilde{K}_{123} - \tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}_{12} + \tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}_{123} - \tilde{K}_{12} \cdot \tilde{K}_{123})g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} \quad (4.33b)$$

$$R_{m^4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = 4m^4 g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} \quad (4.33c)$$

$$R_{m_2k_2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -4m^2(\tilde{K} \cdot \tilde{K}_1 - \tilde{K} \cdot \tilde{K}_{12} + \tilde{K} \cdot \tilde{K}_{123} + \tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}_{12} - \tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}_{123} + \tilde{K}_{12} \cdot \tilde{K}_{123})g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} \quad (4.33d)$$

$$R_{pkpk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = 8g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}(\tilde{K} \cdot p\tilde{K}_{12} \cdot p + \tilde{K}_1 \cdot p\tilde{K}_{123} \cdot p) \quad (4.33e)$$

$$R_{ppkk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = 8[p^{\mu_1}p^{\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}(m^2 + \tilde{K} \cdot \tilde{K}_{12} - \tilde{K} \cdot \tilde{K}_{123} - \tilde{K}_{12} \cdot \tilde{K}_{123}) \quad (4.33f)$$

$$+ p^{\mu_3}p^{\mu_4}g^{\mu_1\mu_2}(m^2 - \tilde{K} \cdot \tilde{K}_1 + \tilde{K} \cdot \tilde{K}_{12} - \tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}_{12})] \quad (4.33g)$$

$$R_{p_2pp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -8p^2(p^{\mu_1}p^{\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} + p^{\mu_3}p^{\mu_4}g^{\mu_1\mu_2}) \quad (4.33h)$$

$$R_{pppp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = 32p^{\mu_1}p^{\mu_2}p^{\mu_3}p^{\mu_4}. \quad (4.33i)$$

As quantidades \tilde{K} , \tilde{K}_1 , \tilde{K}_{12} e \tilde{K}_{123} são os deslocamentos presentes nos momentos após a parametrização de Feynman, isto é,

$$\tilde{K}^\mu = -\tilde{k}_1^\mu(1-x_1) - \tilde{k}_2^\mu(1-x_1-x_2) - \tilde{k}_3^\mu(1-x_1-x_2-x_3) \quad (4.34)$$

$$\tilde{K}_I^\mu = \tilde{K}^\mu + \tilde{k}_I^\mu \quad (4.35)$$

onde $I = 1, 12, 123$, tal que $\tilde{k}_{12} = \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2$ e $\tilde{k}_{123} = \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3$. Note que a contribuição divergente (4.31) surge das equações (4.33a), (4.33h) e (4.33i).

É fácil ver que nas equações (4.33) há três tipos de dependências a serem integradas, isto é, dependências do tipo p^4 , p^2 e integrais sem p . Solucionaremos uma integral de cada tipo, omitindo a quantidade $(1 + \kappa)^{-1}$ que multiplica todas as integrais. Começando por

$R_{p^4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ (4.33a), que tem uma dependência do tipo p^4 , temos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^D} \frac{R_{p^4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}}{(p^2 - M^2)^4} &= 4g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} \mu^{4-D} \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^4} \frac{p^4}{(p^2 - M^2)^4} \\ &= 4g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} \mu^{4-D} \frac{i}{4\pi} \frac{D(D+2)}{4} \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(4)} \left(-\frac{1}{M^2}\right)^{2-D/2}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Neste ponto, completamos a quantidade D para que fique igual ao argumento da função gama no numerador, para que então, usando a propriedade

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1),$$

separemos as contribuições finitas das infinitas. Como os termos divergentes resultantes vão contribuir para o primeiro termo da expressão (4.31), vamos então nos concentrar nos termos finitos, até ordem de $1/m^2$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} I_{p^4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{R_{p^4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}}{(p^2 - M^2)^4} \\ &= \left(-\frac{5i}{24\pi^2} - \frac{i}{4\pi^2} \frac{M_k^2}{m^2} + \dots\right) g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Agora, vamos resolver a integral sobre os momentos do termo seguinte, $R_{p_{2k}^2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$

(4.33b). Para este termo, temos um momento de integração da forma p^2 , tal que, como

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - M^2)^4} &= -\frac{i}{16\pi^2} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(4-2-1)}{\Gamma(4)} \left(\frac{1}{M^2}\right)^{4-2-1} \\ &= -\frac{ig^{\mu\nu}}{192\pi^2} \frac{1}{M^2}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

ao considerarmos a expansão $1/M^2 = 1/m^2 - M_k^2/m^4 + \dots$, obtemos

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - M^2)^4} = -\frac{ig^{\mu\nu}}{192\pi^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{M_k^2}{m^4} + \dots\right). \quad (4.39)$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
I_{p2k2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{R_{p2k2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}}{(p^2 - M^2)^4} \\
&= \left(\frac{i}{6\pi^2} - \frac{iM_k^2}{6m^2\pi^2} + \frac{i}{12m^2\pi^2} (-\tilde{K} \cdot \tilde{K}_1 + \tilde{K} \cdot \tilde{K}_{12} - \tilde{K} \cdot \tilde{K}_{123} \right. \\
&\quad \left. - \tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}_{12} + \tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}_{123} - \tilde{K}_{12} \cdot \tilde{K}_{123}) + \dots \right) g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4}. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Para calcularmos a integral sobre os momentos do termo $R_{m4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ (4.33c), devemos buscar, inicialmente, a solução para integrais sem p . Para as integrais sem dependências em p , temos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M^2)^4} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(4)} \left(\frac{1}{M^2} \right)^2 \\
&= \frac{i}{96\pi^2} \frac{1}{M^4}, \quad (4.41)
\end{aligned}$$

que através da expansão $1/M^4 = 1/m^4 - 2M_k^2/m^6 + \dots$, obtemos

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M^2)^4} = \frac{i}{96m^4\pi^2} - \frac{2iM_k^2}{96m^6\pi^2} + \dots \quad (4.42)$$

Veja que a primeira contribuição da expressão acima é da ordem $1/m^4$. Portanto, encontramos que

$$I_{m4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{R_{m4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}}{(p^2 - M^2)^4} = \left(\frac{i}{24\pi^2} - \frac{iM_k^2}{12m^2\pi^2} + \dots \right) g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4}. \quad (4.43)$$

Vamos solucionar agora a integral sobre os momentos relativo ao termo $R_{m2k2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ (4.33d). Veja que, assim como no caso anterior, esta integral não tem dependência em p , ficando portanto, com

$$\begin{aligned}
I_{m2k2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{R_{m2k2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}}{(p^2 - M^2)^4} \\
&= \left(-\frac{i}{24m^2\pi^2} (\tilde{K} \cdot \tilde{K}_1 - \tilde{K} \cdot \tilde{K}_{12} + \tilde{K} \cdot \tilde{K}_{123} \right. \\
&\quad \left. + \tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}_{12} - \tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}_{123} + \tilde{K}_{12} \cdot \tilde{K}_{123}) + \dots \right) g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4}. \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Como já foi calculado a integral sobre os momentos com uma dependência do tipo $p^\mu p^\nu$, a solução para a integral sobre os momentos do termo $R_{pkpk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ (4.33e) pode ser expressa, diretamente, como

$$\begin{aligned} I_{pkpk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{R_{pkpk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}}{(p^2 - M^2)^4} \\ &= \left(-\frac{i}{24m^2\pi^2} (K \cdot K_{12} + K_1 \cdot K_{123}) + \dots \right) g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Analogamente para $R_{ppkk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ (4.33f), temos

$$\begin{aligned} I_{ppkk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{R_{ppkk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}}{(p^2 - M^2)^4} \\ &= \left(-\frac{i}{12\pi^2} + \frac{iM_k^2}{12m^2\pi^2} - \frac{i}{24m^2\pi^2} (\tilde{K} \cdot \tilde{K}_{12} - \tilde{K} \cdot \tilde{K}_{123} - \tilde{K}_{12} \cdot \tilde{K}_{123}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{24m^2\pi^2} (-\tilde{K} \cdot \tilde{K}_1 + \tilde{K} \cdot \tilde{K}_{12} - \tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}_{12}) + \dots \right) g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

O cálculo da integral sobre os momentos para o termo $R_{p2pp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ (4.33h) origina divergência, e portanto, faz-se necessário o uso de regularização dimensional, como já foi feito anteriormente. Dessa forma, para o resultado finito da integração, encontramos

$$I_{p2pp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{R_{p2pp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}}{(p^2 - M^2)^4} = \left(\frac{i}{12\pi^2} - \frac{i}{4\pi^2} \frac{M_k^2}{m^2} + \dots \right) g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4}. \quad (4.47)$$

Observe que os termos divergentes vão também contribuir para o primeiro termo de (4.31).

Por fim, vamos calcular agora a integral sobre os momentos do termo $R_{pppp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ (4.33i), que origina divergência, tal que novamente usaremos regularização dimensional. Temos então que

$$I_{pppp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{R_{pppp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}}{(p^2 - M^2)^4} = \frac{i}{12\pi^2} \frac{M_k}{m^2} g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} + \dots \quad (4.48)$$

Aqui, omitimos também as outras permutações de tensores métricos.

Desta forma, incorporando o fator global $(1 + \kappa)^{-1}$ que havia sido omitido anterior-

mente, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\chi^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= 6ie^4(1+\kappa)^{-1} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \\
&\times (I_{p^4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + I_{p^2k^2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + I_{m^4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + I_{m^2k^2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \\
&+ I_{pkpk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + I_{ppkk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + I_{p^2pp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + I_{pppp}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}), \tag{4.49}
\end{aligned}$$

tal que, ao calcularmos as integrais nos parâmetros de Feynman, obtemos

$$\begin{aligned}
\chi^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4}{240m^2\pi^2}(1+\kappa)^{-1}g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} \\
&\times (13\tilde{k}_1^2 + 4\tilde{k}_2^2 + 8\tilde{k}_3^2 + 9\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 17\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 - \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3). \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Note que as contribuições independentes da massa cancelam-se entre si, restando apenas as contribuições da ordem de $1/m^2$, como esperado.

Através do mesmo procedimento acima, podemos separar as outras contribuições referentes as demais permutações de tensores métricos, isto é, os coeficientes que acompanham as quantidades $g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4}$ e $g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}$. Portanto, encontramos que

$$\begin{aligned}
T_{1gg_1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \chi^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + \chi^{\mu_1\mu_3\mu_2\mu_4} + \chi^{\mu_1\mu_4\mu_2\mu_3} \\
&= -\frac{e^4}{240\pi^2m^2}(1+\kappa)^{-1} \\
&\times [g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}(13\tilde{k}_1^2 + 4\tilde{k}_2^2 + 8\tilde{k}_3^2 + 9\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 17\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 - \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3) \\
&-g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4}(17\tilde{k}_1^2 + 16\tilde{k}_2^2 + 17\tilde{k}_3^2 + 16\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 18\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 16\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3) \\
&+g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}(8\tilde{k}_1^2 + 4\tilde{k}_2^2 + 13\tilde{k}_3^2 - \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 17\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 9\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3)]. \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Além destes termos já calculados, há termos com apenas um tensor métrico e com os demais índices nos momentos externos, isto é, termos da forma $g^{\mu_1\mu_2}t_{34}^{\mu_3\mu_4}$. O procedimento para calcular estes termos é estritamente semelhante ao que já foi utilizado anteriormente. Devemos separar na equação (4.19) os termos que contenham $g^{\mu_1\mu_2}$, no entanto destes termos devemos subtrair aqueles da forma $g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}$, visto que estes contribuem para a equação

(4.51). Além destes devemos selecionar aqueles que contenham $p^{\mu_1}p^{\mu_2}$, devido ao fato de que após a integração sobre os momentos surgirá uma métrica do tipo $g^{\mu_1\mu_2}$. Assim, após as devidas integrações, obtemos a expressão

$$\begin{aligned} T_{1gk_1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4}{240\pi^2 m^2} (1 + \kappa)^{-1} g^{\mu_1\mu_2} [(2\tilde{k}_2^{\mu_3} + \tilde{k}_3^{\mu_3})(13\tilde{k}_1^{\mu_4} - 4\tilde{k}_2^{\mu_4}) + \\ &- (9\tilde{k}_2^{\mu_3} - 4\tilde{k}_3^{\mu_3})\tilde{k}_3^{\mu_4} + \tilde{k}_1^{\mu_3}(9\tilde{k}_1^{\mu_4} - 9\tilde{k}_2^{\mu_4} + 8\tilde{k}_3^{\mu_4})]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Finalmente, ao calcularmos também as contribuições para a ordem de $1/m^4$, seguindo os mesmos procedimentos acima, obtemos

$$\begin{aligned} T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= T_{1g\epsilon}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \sum_{i=1}^4 T_{1gg_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ &+ \sum_{i=1}^{12} T_{1gk_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \sum_{i=1}^9 T_{1kk_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4), \end{aligned} \quad (4.53)$$

onde

$$\begin{aligned} T_{1gg_2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4}{5040m^4\pi^2} g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} (1 + \kappa)^{-1} [48\tilde{k}_1^4 + (79\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 113\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 48\tilde{k}_2^2 \\ &+ 13\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 65\tilde{k}_3^2)\tilde{k}_1^2 + 40(\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2)^2 + 74(\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3)^2 + 9\tilde{k}_2^4 - 2(\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3)^2 \\ &+ 27\tilde{k}_3^4 + 156\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3\tilde{k}_2^2 + 131\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 - 3\tilde{k}_2^2\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + (92\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 \\ &+ 27\tilde{k}_2^2 + 16\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3)\tilde{k}_3^2 + \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2(159\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 39\tilde{k}_2^2 - 24\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 20\tilde{k}_3^2)], \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} T_{1gg_3}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4}{5040m^4\pi^2} g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} (1 + \kappa)^{-1} [57\tilde{k}_1^4 + (110\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 118\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 92\tilde{k}_2^2 \\ &+ 71\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 96\tilde{k}_3^2)\tilde{k}_1^2 + 72(\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2)^2 + 80(\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3)^2 + 54\tilde{k}_2^4 + 72(\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3)^2 \\ &+ 57\tilde{k}_3^4 + 180\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3\tilde{k}_2^2 + 177\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 108\tilde{k}_2^2\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 2(59\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 \\ &+ 46\tilde{k}_2^2 + 55\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3)\tilde{k}_3^2 + \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2(177\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 108\tilde{k}_2^2 + 66\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 71\tilde{k}_3^2)], \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned}
T_{1g^4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = & -\frac{e^4}{5040m^4\pi^2}g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}(1+\kappa)^{-1}[27\tilde{k}_1^4 + (16\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 92\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 27\tilde{k}_2^2 \\
& + 20\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 65\tilde{k}_3^2)\tilde{k}_1^2 - 2(\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2)^2 + 74(\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3)^2 + 9\tilde{k}_2^4 + 40(\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3)^2 \\
& + 48\tilde{k}_3^4 + 156\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3\tilde{k}_2^2 + 159\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 39\tilde{k}_2^2\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + (113\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 \\
& + 48\tilde{k}_2^2 + 79\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3)\tilde{k}_3^2 + \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2(131\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 - 3(\tilde{k}_2^2 + 8\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3) + 13\tilde{k}_3^2)].
\end{aligned} \tag{4.56}$$

As demais expressões para os $T_{1gk_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ e $T_{1kk_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ encontram-se todas no apêndice A. A seguir, tomaremos o limite colinear e recuperaremos o resultado para divisão de fótons já obtido na literatura.

4.4 Limite colinear

A partir do resultado não perturbativo em (4.53), podemos recuperar o resultado perturbativo obtido por [9] no limite colinear. Para tal, se considerarmos que o fóton incidente tem energia E_1 e momentum \vec{k}_1 , então pela conservação dos momenta $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4$, temos a inequação

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4| \leq |\vec{k}_2| + |\vec{k}_3| + |\vec{k}_4|. \tag{4.57}$$

Dessa forma, como $k_i^2 = E_i^2 - \vec{k}_i^2 = 0$ ou $|\vec{k}_i^2| = E_i$ (com $i = 1, 2, 3, 4$), de modo a satisfazer a condição de conservação de energia $E_1 = E_2 + E_3 + E_4$, todos os momenta \vec{k}_i devem estar alinhados. Portanto, os fótons incidentes e os fótons que decaíram devem ser colineares, tal que, os quadrimomentos de todos os fótons são mutuamente ortogonais, $k_i^\mu k_{j\mu} = 0$. Considerando que estes quadrimomentos são proporcionais a um k_0^μ , satisfazendo $k_0^2 = 0$, podemos escrever $k_i^\mu = k_i k_0^\mu$, de modo que, $k_i^\mu k_{j\mu} = k_i k_j k_0^2 = 0$, onde k_i agora são coeficientes escalares ao invés de quadrimomentos. Consideraremos a condição de transversalidade da polarização

dos quadrivetores usual, ou seja, $\epsilon_{i\mu}k_i^\mu = k_i\epsilon_{i\mu}k_0^\mu = 0$. Então, de acordo com o requerimento de colinearidade, temos também que $\epsilon_{i\mu}k_j^\mu = k_j\epsilon_{i\mu}k_0^\mu = 0$. Levando em conta estas considerações, encontramos

$$\begin{aligned}
G_{col}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4\tilde{k}_0^2}{120\pi^2m^2}(1+\kappa)^{-1} \\
&\times [g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}(9k_1^2 - 8k_2^2 - k_3^2 + 2k_1k_2 + 16k_1k_3 - 18k_2k_3) \\
&+ g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4}(4k_1^2 - 8k_2^2 + 4k_3^2 - 8k_1k_2 + 16k_1k_3 - 8k_2k_3) \\
&- g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}(k_1^2 + 8k_2^2 - 9k_3^2 + 18k_1k_2 + 16k_1k_3 - 2k_2k_3)] \\
&+ \mathcal{O}(\tilde{k}_0^4) + \mathcal{O}(\tilde{k}_0^{\mu_i}). \tag{4.58}
\end{aligned}$$

Para obtermos a equação anterior, tomamos a equação (4.53) e trocamos μ_1 por μ_2 e μ_1 por μ_4 para obtermos $T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ e $T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, respectivamente, a partir de $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, no entanto, sem mudar os índices nos momentos, de acordo com a prescrição dada na referencia [9]. Note que, como esperado, o termo divergente (4.31) desaparece, e, por simplicidade omitimos os resultados vindos de $\sum_{i=1}^{12} T_{1gk_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4)$. Se expandirmos até primeira ordem em κ , as contribuições de violação de Lorentz tornam-se

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_0^2(1+\kappa)^{-1} &= [(k_0^0)^2(1+\kappa)^2 - (k_0^i)^2](1+\kappa)^{-1} \\
&= 2\kappa(k_0^0)^2 + \mathcal{O}(\kappa^2). \tag{4.59}
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado apresentado na referencia [9] é recuperado, pois, nesta ordem de κ os termos em $\mathcal{O}(\tilde{k}_0^4)$ e em $\mathcal{O}(\tilde{k}_0^{\mu_i})$, desaparecem, restando apenas o termo dado por

$$\begin{aligned}
G_{coll,\kappa}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4c_{\mu\nu}k_0^\mu k_0^\nu}{60\pi^2m^2} [g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}(9k_1^2 - 8k_2^2 - k_3^2 + 2k_1k_2 + 16k_1k_3 - 18k_2k_3) \\
&+ g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4}(4k_1^2 - 8k_2^2 + 4k_3^2 - 8k_1k_2 + 16k_1k_3 - 8k_2k_3) \\
&- g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}(k_1^2 + 8k_2^2 - 9k_3^2 + 18k_1k_2 + 16k_1k_3 - 2k_2k_3)], \tag{4.60}
\end{aligned}$$

onde $c_{\mu\nu}k_0^\mu k_0^\nu = \kappa(k_0^0)^2$, no entanto para $c_{00} \neq 0$ e $c_{0i} = c_{ij} = 0$.

4.5 Ação de Euler-Heisenberg com violação de simetria de Lorentz

Agora iremos discutir a geração da ação de Euler-Heisenberg no contexto de violação de simetria de Lorentz, na primeira ordem de correção, $\alpha^2 = e^4/16\pi^2$. O fato interessante é que, para tal, é necessário calcular $G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ sem levar em consideração o limite colinear. Assim, $T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ e $T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ são obtidos a partir de $T_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ quando trocamos tanto os índices quanto os momenta, ou seja, $T_2^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = T_1^{\mu_2\mu_1\mu_3\mu_4}(k_2, k_1, k_3, k_4)$ assim como $T_3^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = T_1^{\mu_4\mu_2\mu_3\mu_1}(k_4, k_2, k_3, k_1)$. Procedendo desta forma, surpreendentemente, todas as contribuições da ordem de $1/m^2$ desaparecem completamente.

Devido ao fato de as contribuições da ordem de $1/m^2$ desaparecerem, iremos olhar agora para os termos na próxima ordem de expansão, isto é, termos da ordem de $\mathcal{O}(1/m^4)$. De maneira análoga ao que foi feito para encontrarmos os termos da ordem de $1/m^2$, ou seja, usando as mesmas regras de integração, encontramos

$$G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = G_{gg}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \sum_{i=1}^6 G_{gk_i}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) + G_{kk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (4.61)$$

onde

$$G_{gg}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} (1 + \kappa)^{-1} \times [g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} (7\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_4 \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 7\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_4 - 10\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 \tilde{k}_3 \cdot \tilde{k}_4) + g^{\mu_1\mu_3} g^{\mu_2\mu_4} (7\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_4 \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 - 10\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_4 + 7\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 \tilde{k}_3 \cdot \tilde{k}_4) - g^{\mu_1\mu_4} g^{\mu_2\mu_3} (10\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_4 \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 - 7(\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_4 + \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 \tilde{k}_3 \cdot \tilde{k}_4))], \quad (4.62)$$

$$G_{gk_1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} g^{\mu_1\mu_2} (1 + \kappa)^{-1} [\tilde{k}_4^{\mu_3} (10\tilde{k}_3^{\mu_4} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - 7(\tilde{k}_2^{\mu_4} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + \tilde{k}_1^{\mu_4} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3)) - 7\tilde{k}_3^{\mu_4} (\tilde{k}_2^{\mu_3} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_4 + \tilde{k}_1^{\mu_3} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_4) + 7(\tilde{k}_2^{\mu_3} \tilde{k}_1^{\mu_4} + \tilde{k}_1^{\mu_3} \tilde{k}_2^{\mu_4}) \tilde{k}_3 \cdot \tilde{k}_4], \quad (4.63a)$$

$$G_{gk_2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} g^{\mu_1\mu_3} (1 + \kappa)^{-1} [\tilde{k}_4^{\mu_2} (-7\tilde{k}_3^{\mu_4} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 10\tilde{k}_2^{\mu_4} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 - 7\tilde{k}_1^{\mu_4} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3) + \tilde{k}_3^{\mu_2} (7\tilde{k}_1^{\mu_4} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_4 - 7\tilde{k}_2^{\mu_4} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_4) + 7\tilde{k}_1^{\mu_2} (\tilde{k}_3^{\mu_4} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_4 - \tilde{k}_2^{\mu_4} \tilde{k}_3 \cdot \tilde{k}_4)], \quad (4.63b)$$

$$G_{gk_3}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} g^{\mu_1\mu_4} (1 + \kappa)^{-1} [\tilde{k}_4^{\mu_2} (7\tilde{k}_1^{\mu_3} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 - 7\tilde{k}_2^{\mu_3} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3) + \tilde{k}_3^{\mu_2} (-7\tilde{k}_4^{\mu_3} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 10\tilde{k}_2^{\mu_3} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_4 - 7\tilde{k}_1^{\mu_3} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_4) + 7\tilde{k}_1^{\mu_2} (\tilde{k}_4^{\mu_3} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 - \tilde{k}_2^{\mu_3} \tilde{k}_3 \cdot \tilde{k}_4)], \quad (4.63c)$$

$$G_{gk_4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} g^{\mu_2\mu_3} (1 + \kappa)^{-1} [\tilde{k}_4^{\mu_1} (-7\tilde{k}_3^{\mu_4} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - 7\tilde{k}_2^{\mu_4} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 10\tilde{k}_1^{\mu_4} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3) + 7(\tilde{k}_3^{\mu_1} (\tilde{k}_2^{\mu_4} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_4 - \tilde{k}_1^{\mu_4} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_4) + \tilde{k}_2^{\mu_1} (\tilde{k}_3^{\mu_4} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_4 - \tilde{k}_1^{\mu_4} \tilde{k}_3 \cdot \tilde{k}_4))], \quad (4.63d)$$

$$G_{gk_5}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} g^{\mu_2\mu_4} (1 + \kappa)^{-1} [-7\tilde{k}_4^{\mu_1} (\tilde{k}_1^{\mu_3} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 - \tilde{k}_2^{\mu_3} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3) - \tilde{k}_3^{\mu_1} (7\tilde{k}_4^{\mu_3} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 7\tilde{k}_2^{\mu_3} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_4 - 10\tilde{k}_1^{\mu_3} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_4) - 7\tilde{k}_2^{\mu_1} (\tilde{k}_1^{\mu_3} \tilde{k}_3 \cdot \tilde{k}_4 - \tilde{k}_4^{\mu_3} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3)], \quad (4.63e)$$

$$G_{gk_6}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} g^{\mu_3\mu_4} (1 + \kappa)^{-1} [7\tilde{k}_4^{\mu_1} (\tilde{k}_3^{\mu_2} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - \tilde{k}_1^{\mu_2} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3) + 7\tilde{k}_3^{\mu_1} (\tilde{k}_4^{\mu_2} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - \tilde{k}_1^{\mu_2} \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_4) + \tilde{k}_2^{\mu_1} (-7\tilde{k}_4^{\mu_2} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 - 7\tilde{k}_3^{\mu_2} \tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_4 + 10\tilde{k}_1^{\mu_2} \tilde{k}_3 \cdot \tilde{k}_4)], \quad (4.63f)$$

e

$$G_{kk}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{180\pi^2 m^4} (1 + \kappa)^{-1} \times [\tilde{k}_2^{\mu_1} (7\tilde{k}_3^{\mu_2} \tilde{k}_4^{\mu_3} \tilde{k}_1^{\mu_4} + (7\tilde{k}_4^{\mu_2} \tilde{k}_1^{\mu_3} - 10\tilde{k}_1^{\mu_2} \tilde{k}_4^{\mu_3}) \tilde{k}_3^{\mu_4}) + \tilde{k}_3^{\mu_1} (7\tilde{k}_1^{\mu_2} \tilde{k}_4^{\mu_3} \tilde{k}_2^{\mu_4} + \tilde{k}_4^{\mu_2} (7\tilde{k}_2^{\mu_3} \tilde{k}_1^{\mu_4} - 10\tilde{k}_1^{\mu_3} \tilde{k}_2^{\mu_4})) + \tilde{k}_4^{\mu_1} (\tilde{k}_3^{\mu_2} (7\tilde{k}_1^{\mu_3} \tilde{k}_2^{\mu_4} - 10\tilde{k}_2^{\mu_3} \tilde{k}_1^{\mu_4}) + 7\tilde{k}_1^{\mu_2} \tilde{k}_2^{\mu_3} \tilde{k}_3^{\mu_4})], \quad (4.64)$$

com $\tilde{k}_4 = -\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2 - \tilde{k}_3$. Vemos então que, de fato, as contribuições da ordem de $1/m^2$ realmente desaparecem e que as ações de Euler-Heisenberg são proporcionais a ordem de $1/m^4$ na primeira ordem de correção. Portanto, considerando o resultado (4.61) a ação efetiva (4.4) toma a seguinte forma

$$S_{\text{EH}} = -\frac{\alpha^2}{180m^4} \int d^4x \int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 d^4k_4 e^{i(k_1+k_2+k_3+k_4)\cdot x} G(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (4.65)$$

onde

$$G(k_1, k_2, k_3, k_4) = G^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) \tilde{A}_{\mu_1}(k_1) \tilde{A}_{\mu_2}(k_2) \tilde{A}_{\mu_3}(k_3) \tilde{A}_{\mu_4}(k_4), \quad (4.66)$$

assim nós temos

$$\begin{aligned} G(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \frac{5}{3} \tilde{F}_{\mu\nu}(k_1) \tilde{F}^{\mu\nu}(k_2) \tilde{F}_{\lambda\rho}(k_3) \tilde{F}^{\lambda\rho}(k_4) + \frac{5}{3} \tilde{F}_{\mu\nu}(k_1) \tilde{F}^{\mu\nu}(k_3) \tilde{F}_{\lambda\rho}(k_2) \tilde{F}^{\lambda\rho}(k_4) \\ &+ \frac{5}{3} \tilde{F}_{\mu\nu}(k_1) \tilde{F}^{\mu\nu}(k_4) \tilde{F}_{\lambda\rho}(k_2) \tilde{F}^{\lambda\rho}(k_3) - \frac{14}{6} F_{\mu\nu}(k_1) \tilde{F}^{\nu\lambda}(k_2) \tilde{F}_{\lambda\rho}(k_3) \tilde{F}^{\rho\mu}(k_4) \\ &- \frac{14}{6} F_{\mu\nu}(k_1) \tilde{F}^{\nu\lambda}(k_2) \tilde{F}_{\lambda\rho}(k_4) \tilde{F}^{\rho\mu}(k_3) - \frac{14}{6} F_{\mu\nu}(k_1) \tilde{F}^{\nu\lambda}(k_3) \tilde{F}_{\lambda\rho}(k_2) \tilde{F}^{\rho\mu}(k_4) \\ &- \frac{14}{6} F_{\mu\nu}(k_1) \tilde{F}^{\nu\lambda}(k_3) \tilde{F}_{\lambda\rho}(k_4) \tilde{F}^{\rho\mu}(k_2) - \frac{14}{6} F_{\mu\nu}(k_1) \tilde{F}^{\nu\lambda}(k_4) \tilde{F}_{\lambda\rho}(k_2) \tilde{F}^{\rho\mu}(k_3) \\ &- \frac{14}{6} F_{\mu\nu}(k_1) \tilde{F}^{\nu\lambda}(k_4) \tilde{F}_{\lambda\rho}(k_3) \tilde{F}^{\rho\mu}(k_2), \end{aligned} \quad (4.67)$$

com $\tilde{F}^{\mu\nu}(k_1) = \tilde{k}_1^\mu \tilde{A}^\nu(k_1) - \tilde{k}_1^\nu \tilde{A}^\mu(k_1)$, e assim sucessivamente. Então, invertendo a transformada de Fourier na expressão (4.65) a ação efetiva de Euler-Heisenberg com violação de simetria de Lorentz torna-se

$$S_{\text{EH}} = -\frac{\alpha^2}{180m^4} (1 + \kappa)^{-1} \int d^4x (5 \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\lambda\rho} \tilde{F}^{\lambda\rho} - 14 \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\nu\lambda} \tilde{F}_{\lambda\rho} \tilde{F}^{\rho\mu}), \quad (4.68)$$

onde agora $\tilde{F}^{\mu\nu} = \tilde{\partial}^\mu \tilde{A}^\nu(x) - \tilde{\partial}^\nu \tilde{A}^\mu(x)$. No geral, cálculos envolvendo violação de simetria de Lorentz são realizados até a primeira ordem no coeficiente que controla a violação. Então,

expandindo a ação até a primeira ordem em κ obtemos

$$\begin{aligned}
S_{\text{EH}} = & -\frac{\alpha^2}{180m^4} \int d^4x (5F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} - 14F_{\mu\nu}F^{\nu\lambda}F_{\lambda\rho}F^{\rho\mu}) \\
& -\frac{\alpha^2}{90m^4} \int d^4x (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} (5F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} - 14F^{\alpha\beta}F^{\nu\lambda}F_{\lambda\rho}F^{\rho\mu}) \\
& +\frac{\alpha^2}{180m^4} \int d^4x c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} (5F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} - 14F_{\mu\nu}F^{\nu\lambda}F_{\lambda\rho}F^{\rho\mu}) + \mathcal{O}(c_{\mu\nu}^2),
\end{aligned} \tag{4.69}$$

onde introduzimos o coeficiente $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, dado por

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\alpha}c_{\nu\beta} + g_{\nu\beta}c_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta}c_{\nu\alpha} - g_{\nu\alpha}c_{\mu\beta}. \tag{4.70}$$

A ação efetiva de Euler-Heisenberg, induzida pela primeira vez em 1936 por Hans Euler e Werner Heisenberg, foi associada inicialmente aos efeitos quânticos não lineares da EDQ no vácuo. Tal ação leva em conta a polarização no vácuo para um loop, além de descrever também a propagação de fótons através de campos eletromagnéticos arbitrários que variam lentamente. Então, desde a sua descoberta, a ação efetiva de Euler-Heisenberg tem sido estudada em vários contextos, tais como o espalhamento da luz pela luz, produção de pares no vácuo, divisão de fótons, birefringência no vácuo, ação efetiva em gravidade e teoria de cordas, dentre outros. O resultado acima é (eq. 4.68), de certa forma, não usual, apesar de se assemelhar à ação de Euler-Heisenberg convencional [58]. Então, a partir desse resultado estamos aptos à calcular algumas amplitudes de espalhamento com violação de simetria de Lorentz de interesse, como foi mencionado no início deste capítulo.

Capítulo 5

CONCLUSÕES

Nesta dissertação é tratado um tema que vem recebendo muita atenção nos últimos anos, principalmente devido ao fato de que modelos que incorporam violação de invariância de Lorentz serem o limite de baixas energias de teorias mais fundamentais, tais como teoria de cordas. Em especial, estudamos a questão da indução da ação efetiva de Euler-Heisenberg, com quebra de simetria de Lorentz, até então não estudada na literatura.

Para isso, trabalhamos com a EDQ estendida, focando nossa atenção nas correções quânticas não lineares provenientes do setor fermiônico, estendido por um termo derivativo caracterizado pelo coeficiente $c_{\mu\nu}$. Efetuamos um cálculo não perturbativo no coeficiente $c_{\mu\nu}$, contudo, assumimos a invariância rotacional, no qual $c_{\mu\nu} = \kappa u_\mu u_\nu$, onde $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ é um quadrivetor tipo-tempo.

Antes de obtermos a ação efetiva de Euler-Heisenberg, ao impormos o limite colinear, seguindo a prescrição utilizada em [9], conseguimos encontrar o resultado perturbativo em $c_{\mu\nu}$ para a amplitude do efeito da divisão de fótons no vácuo, a partir dos resultados não perturbativos, da ordem de $1/m^2$.

Finalmente, ao levarmos em conta as devidas permutações nos índices não contraídos, assim como nos índices dos momentos, a ação de Euler-Heisenberg, com quebra de simetria de Lorentz, é prontamente induzida. Embora ela seja de certa forma não usual, ela se assemelha bastante à expressão convencional, sendo portanto da ordem de $1/m^4$, como esperado. Dessa forma, todas as contribuições de ordem $1/m^2$ anularam-se após as permutações.

Em geral, os cálculos relacionados com quebra de simetria de Lorentz são realizados em primeira ordem no coeficiente que controla a escala de violação de simetria. Desse modo, ao expandirmos a ação efetiva até primeira ordem em κ , conseguimos encontrar uma expressão para a ação efetiva em termos com coeficiente $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$. Esse resultado foi comprovado analiticamente, ao efetuarmos o cálculo perturbativo, contudo, suas expressões não foram mostradas nesta dissertação (veja [81], para maiores detalhes).

Uma perspectiva deste trabalho, seria efetuar o cálculo de estimativas numéricas para o coeficiente $c_{\mu\nu}$, ao associarmos o efeito extra proveniente deste coeficiente ao erro experimental de respectivas amplitudes de espalhamento, entre elas, o espalhamento fóton-fóton e o espalhamento Delbrück, além da amplitude da divisão de fótons, na presença de um campo magnético intenso. Também estudos relacionados com operadores de dimensão de massa $d = 5$ e $d = 6$, podem ser levados em conta, em especial algumas propostas foram sugeridas em [78], para o efeito da divisão de fótons no vácuo.

Apêndice A

Resultados restantes referentes à equação 4.53

$$T_{1gk_1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{240m^2\pi^2}g^{\mu_1\mu_2}(1+\kappa)^{-1}[(2\tilde{k}_2^{\mu_3} + \tilde{k}_3^{\mu_3})(13\tilde{k}_1^{\mu_4} - 4\tilde{k}_2^{\mu_4}) - (9\tilde{k}_2^{\mu_3} - 4\tilde{k}_3^{\mu_3})\tilde{k}_3^{\mu_4} + \tilde{k}_1^{\mu_3}(9\tilde{k}_1^{\mu_4} - 9\tilde{k}_2^{\mu_4} + 8\tilde{k}_3^{\mu_4})], \quad (\text{A.1})$$

$$T_{1gk_2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -\frac{e^4}{240m^2\pi^2}g^{\mu_1\mu_3}(1+\kappa)^{-1}[\tilde{k}_3^{\mu_2}(17\tilde{k}_1^{\mu_4} - \tilde{k}_2^{\mu_4} + \tilde{k}_3^{\mu_4}) - \tilde{k}_2^{\mu_2}(9\tilde{k}_1^{\mu_4} + 8\tilde{k}_2^{\mu_4} + 9\tilde{k}_3^{\mu_4}) - \tilde{k}_1^{\mu_2}(\tilde{k}_1^{\mu_4} - \tilde{k}_2^{\mu_4} + 17\tilde{k}_3^{\mu_4})], \quad (\text{A.2})$$

$$T_{1gk_3}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{240m^2\pi^2}g^{\mu_1\mu_4}(1+\kappa)^{-1}[\tilde{k}_2^{\mu_2}(\tilde{k}_1^{\mu_3} - 8\tilde{k}_2^{\mu_3} - 4\tilde{k}_3^{\mu_3}) + \tilde{k}_3^{\mu_2}(18\tilde{k}_1^{\mu_3} + \tilde{k}_2^{\mu_3} + 9\tilde{k}_3^{\mu_3}) - \tilde{k}_1^{\mu_2}(16\tilde{k}_1^{\mu_3} + 34\tilde{k}_2^{\mu_3} + 17\tilde{k}_3^{\mu_3})], \quad (\text{A.3})$$

$$T_{1gk_4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{240m^2\pi^2}g^{\mu_2\mu_3}(1+\kappa)^{-1}[\tilde{k}_3^{\mu_1}(8\tilde{k}_1^{\mu_4} - 9\tilde{k}_2^{\mu_4} + 9\tilde{k}_3^{\mu_4}) + \tilde{k}_1^{\mu_1}(4\tilde{k}_1^{\mu_4} - 4\tilde{k}_2^{\mu_4} + 13\tilde{k}_3^{\mu_4}) + \tilde{k}_2^{\mu_1}(-9\tilde{k}_1^{\mu_4} - 8\tilde{k}_2^{\mu_4} + 26\tilde{k}_3^{\mu_4})], \quad (\text{A.4})$$

$$T_{1gk_5}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -\frac{e^4}{240m^2\pi^2}g^{\mu_2\mu_4}(1+\kappa)^{-1}[\tilde{k}_3^{\mu_1}(2\tilde{k}_1^{\mu_3} - 16\tilde{k}_2^{\mu_3} + \tilde{k}_3^{\mu_3}) + 16\tilde{k}_2^{\mu_1}(\tilde{k}_1^{\mu_3} + 2\tilde{k}_2^{\mu_3} + \tilde{k}_3^{\mu_3}) - \tilde{k}_1^{\mu_1}(\tilde{k}_1^{\mu_3} - 16\tilde{k}_2^{\mu_3} - 8\tilde{k}_3^{\mu_3})], \quad (\text{A.5})$$

$$T_{1gk_6}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{240m^2\pi^2}g^{\mu_3\mu_4}(1+\kappa)^{-1}[\tilde{k}_2^{\mu_1}(\tilde{k}_1^{\mu_2} - 8\tilde{k}_2^{\mu_2} - 34\tilde{k}_3^{\mu_2}) + \tilde{k}_1^{\mu_1}(9\tilde{k}_1^{\mu_2} - 4\tilde{k}_2^{\mu_2} - 17\tilde{k}_3^{\mu_2}) + \tilde{k}_3^{\mu_1}(18\tilde{k}_1^{\mu_2} + \tilde{k}_2^{\mu_2} - 16\tilde{k}_3^{\mu_2})], \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned}
T_{1gk_7}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4}{5040m^4\pi^2} g^{\mu_1\mu_2} (1 + \kappa)^{-1} \\
&\times [\tilde{k}_3^{\mu_3} (-\tilde{k}_2^{\mu_4} (48\tilde{k}_1^2 + 39\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - 51\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 18\tilde{k}_2^2 + 10\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 9\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_3^{\mu_4} (17\tilde{k}_1^2 - 19\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 26\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 9\tilde{k}_2^2 + 10\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 18\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_1^{\mu_4} (48\tilde{k}_1^2 + 79\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 48\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 96\tilde{k}_2^2 + 44\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 48\tilde{k}_3^2)) \\
&+ \tilde{k}_2^{\mu_3} (-\tilde{k}_2^{\mu_4} (96\tilde{k}_1^2 + 78\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - 3\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 36(\tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3) + 26\tilde{k}_3^2) \\
&- \tilde{k}_3^{\mu_4} (83\tilde{k}_1^2 + 102\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 26\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 39\tilde{k}_2^2 + 38\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 30\tilde{k}_3^2) \\
&+ 2\tilde{k}_1^{\mu_4} (48\tilde{k}_1^2 + 79\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 50\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 96(\tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3) + 74\tilde{k}_3^2)) \\
&+ \tilde{k}_1^{\mu_3} (\tilde{k}_3^{\mu_4} (34\tilde{k}_1^2 + 79\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 34\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 117\tilde{k}_2^2 + 79\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 27\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_1^{\mu_4} (39\tilde{k}_1^2 + 80\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 40\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 79\tilde{k}_2^2 + 58\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 31\tilde{k}_3^2) \\
&- \tilde{k}_2^{\mu_4} (79\tilde{k}_1^2 + 80\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 40\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 39\tilde{k}_2^2 + 81\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 90\tilde{k}_3^2))] , \quad (A.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{1gk_8}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4}{5040m^4\pi^2} g^{\mu_1\mu_3} (1 + \kappa)^{-1} \\
&\times [\tilde{k}_2^{\mu_2} (2\tilde{k}_2^{\mu_4} (13\tilde{k}_1^2 + 18\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 51\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 18(\tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3) + 13\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_3^{\mu_4} (48\tilde{k}_1^2 - 3\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 40\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 39\tilde{k}_2^2 + 38\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 30\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_1^{\mu_4} (30\tilde{k}_1^2 + 38\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 40\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 39\tilde{k}_2^2 - 3\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 48\tilde{k}_3^2)) \\
&+ \tilde{k}_1^{\mu_2} (\tilde{k}_1^{\mu_4} (3\tilde{k}_1^2 + 4\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 2\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 5\tilde{k}_2^2 - 37\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 - 17\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_3^{\mu_4} (113\tilde{k}_1^2 + 152\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 39(2\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 4\tilde{k}_2^2 + 3\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3) + 57\tilde{k}_3^2) \\
&- \tilde{k}_2^{\mu_4} (5\tilde{k}_1^2 + 4\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - 19\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 3\tilde{k}_2^2 + 45\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 64\tilde{k}_3^2)) \\
&+ \tilde{k}_3^{\mu_2} (\tilde{k}_3^{\mu_4} (-17\tilde{k}_1^2 - 37\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 2\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 5\tilde{k}_2^2 + 4\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 3\tilde{k}_3^2) \\
&- \tilde{k}_2^{\mu_4} (64\tilde{k}_1^2 + 45\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - 19\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 3\tilde{k}_2^2 + 4\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 5\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_1^{\mu_4} (57\tilde{k}_1^2 + 117\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 78\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 156\tilde{k}_2^2 + 152\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 113\tilde{k}_3^2))] , \quad (A.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{1gk_9}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4}{5040m^4\pi^2}g^{\mu_1\mu_4}(1+\kappa)^{-1} \\
&\times [\tilde{k}_2^{\mu_2}(\tilde{k}_1^{\mu_3}(16\tilde{k}_1^2 - 4\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - 2\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 - 3\tilde{k}_2^2 + 39\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 - 22\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_3^{\mu_3}(27\tilde{k}_1^2 - 3\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 19\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 18\tilde{k}_2^2 + 10\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 9\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_2^{\mu_3}(54\tilde{k}_1^2 - 6\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - 45\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 36(\tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3) + 26\tilde{k}_3^2)) \\
&- \tilde{k}_3^{\mu_2}(\tilde{k}_2^{\mu_3}(-34\tilde{k}_1^2 - 18\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 9\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 3\tilde{k}_2^2 + 4\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 5\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_3^{\mu_3}(38\tilde{k}_1^2 + 16\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - 2\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 30\tilde{k}_2^2 + 38\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 39\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_1^{\mu_3}(76\tilde{k}_1^2 + 135\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 76\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 159\tilde{k}_2^2 + 156\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 118\tilde{k}_3^2)) \\
&+ \tilde{k}_1^{\mu_2}(\tilde{k}_3^{\mu_3}(92\tilde{k}_1^2 + 110\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 36\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 114\tilde{k}_2^2 + 54\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 57\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_1^{\mu_3}(108\tilde{k}_1^2 + 144\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 72\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 110\tilde{k}_2^2 + 131\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 74\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_2^{\mu_3}(184\tilde{k}_1^2 + 220\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 89\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 228(\tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3) + 174\tilde{k}_3^2)], \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{1gk_{10}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4}{5040m^4\pi^2}g^{\mu_2\mu_3}(1+\kappa)^{-1} \\
&\times [\tilde{k}_1^{\mu_1}(\tilde{k}_1^{\mu_4}(18\tilde{k}_1^2 + 10\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 26\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 9\tilde{k}_2^2 - 19\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 17\tilde{k}_3^2) \\
&- \tilde{k}_2^{\mu_4}(9\tilde{k}_1^2 + 10\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - 51\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 18\tilde{k}_2^2 + 39\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 48\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_3^{\mu_4}(48\tilde{k}_1^2 + 44\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 48\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 96\tilde{k}_2^2 + 79\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 48\tilde{k}_3^2)) \\
&+ \tilde{k}_3^{\mu_1}(\tilde{k}_1^{\mu_4}(27\tilde{k}_1^2 + 79\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 34\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 117\tilde{k}_2^2 + 79\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 34\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_3^{\mu_4}(31\tilde{k}_1^2 + 58\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 40\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 79\tilde{k}_2^2 + 80\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 39\tilde{k}_3^2) \\
&- \tilde{k}_2^{\mu_4}(90\tilde{k}_1^2 + 81\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 40\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 39\tilde{k}_2^2 + 80\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 79\tilde{k}_3^2)) \\
&- \tilde{k}_2^{\mu_1}(-2\tilde{k}_3^{\mu_4}(74\tilde{k}_1^2 + 96\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 50\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 96\tilde{k}_2^2 + 79\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 48\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_1^{\mu_4}(30\tilde{k}_1^2 + 38\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 + 26\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 39\tilde{k}_2^2 + 102\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 83\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_2^{\mu_4}(26\tilde{k}_1^2 + 36\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_2 - 3\tilde{k}_1 \cdot \tilde{k}_3 + 36\tilde{k}_2^2 + 78\tilde{k}_2 \cdot \tilde{k}_3 + 96\tilde{k}_3^2)], \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{1gk_{11}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4}{5040m^4\pi^2}g^{\mu_2\mu_4}(1+\kappa)^{-1} \\
&\times[\tilde{k}_1^{\mu_1}(\tilde{k}_1^{\mu_3}(3\tilde{k}_1^2+4\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+2\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3-16\tilde{k}_2^2-37\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3+4\tilde{k}_3^2) \\
&- \tilde{k}_3^{\mu_3}(27\tilde{k}_1^2+16\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+20\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+54\tilde{k}_2^2+16\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3+27\tilde{k}_3^2) \\
&- \tilde{k}_2^{\mu_3}(54\tilde{k}_1^2+32\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2-5\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+108(\tilde{k}_2^2+\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3)+92\tilde{k}_3^2)) \\
&- \tilde{k}_2^{\mu_1}(\tilde{k}_3^{\mu_3}(92\tilde{k}_1^2+108\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2-5\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+108\tilde{k}_2^2+32\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3+54\tilde{k}_3^2) \\
&+2\tilde{k}_2^{\mu_3}(92\tilde{k}_1^2+108\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+33\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+108(\tilde{k}_2^2+\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3)+92\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_1^{\mu_3}(2(55\tilde{k}_1^2+72\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+36\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+54\tilde{k}_2^2+75\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3)+113\tilde{k}_3^2)) \\
&+ \tilde{k}_3^{\mu_1}(\tilde{k}_3^{\mu_3}(4\tilde{k}_1^2-37\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+2\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3-16\tilde{k}_2^2+4\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3+3\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_1^{\mu_3}(8\tilde{k}_1^2+33\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+8\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+72\tilde{k}_2^2+33\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3+8\tilde{k}_3^2) \\
&- \tilde{k}_2^{\mu_3}(113\tilde{k}_1^2+2(75\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+36\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+54\tilde{k}_2^2+72\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3+55\tilde{k}_3^2)))]],(A.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{1gk_{12}}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= -\frac{e^4}{5040m^4\pi^2}g^{\mu_3\mu_4}(1+\kappa)^{-1} \\
&\times[\tilde{k}_1^{\mu_1}(\tilde{k}_2^{\mu_2}(9\tilde{k}_1^2+10\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+19\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+18\tilde{k}_2^2-3\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3+27\tilde{k}_3^2) \\
&- \tilde{k}_1^{\mu_2}(39\tilde{k}_1^2+38\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2-2\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+30\tilde{k}_2^2+16\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3+38\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_3^{\mu_2}(57\tilde{k}_1^2+54\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+36\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+114\tilde{k}_2^2+110\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3+92\tilde{k}_3^2)) \\
&- \tilde{k}_3^{\mu_1}(\tilde{k}_2^{\mu_2}(22\tilde{k}_1^2-39\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+2\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+3\tilde{k}_2^2+4\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3-16\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_1^{\mu_2}(118\tilde{k}_1^2+156\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+76\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+159\tilde{k}_2^2+135\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3+76\tilde{k}_3^2) \\
&- \tilde{k}_3^{\mu_2}(74\tilde{k}_1^2+131\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+72\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+110\tilde{k}_2^2+144\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3+108\tilde{k}_3^2)) \\
&+ \tilde{k}_2^{\mu_1}(-\tilde{k}_1^{\mu_2}(5\tilde{k}_1^2+4\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+9\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+3\tilde{k}_2^2-18\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3-34\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_2^{\mu_2}(26\tilde{k}_1^2+36\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2-45\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+36\tilde{k}_2^2-6\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3+54\tilde{k}_3^2) \\
&+ \tilde{k}_3^{\mu_2}(174\tilde{k}_1^2+228\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_2+89\tilde{k}_1\cdot\tilde{k}_3+228\tilde{k}_2^2+220\tilde{k}_2\cdot\tilde{k}_3+184\tilde{k}_3^2)))](A.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{1kk_1}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= \frac{e^4}{5040m^4\pi^2}\tilde{k}_1^{\mu_1}\tilde{k}_2^{\mu_2}(1+\kappa)^{-1}[9(2\tilde{k}_2^{\mu_3}+\tilde{k}_3^{\mu_3})(\tilde{k}_1^{\mu_4}-2\tilde{k}_2^{\mu_4}) \\
&-3(13\tilde{k}_2^{\mu_3}-3\tilde{k}_3^{\mu_3})\tilde{k}_3^{\mu_4}+\tilde{k}_1^{\mu_3}(10\tilde{k}_1^{\mu_4}-10\tilde{k}_2^{\mu_4}+9\tilde{k}_3^{\mu_4})], \quad (A.13)
\end{aligned}$$

$$T_{1kk_2}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{5040m^4\pi^2} \tilde{k}_1^{\mu_1} \tilde{k}_3^{\mu_2} (1 + \kappa)^{-1} [\tilde{k}_2^{\mu_3} (37\tilde{k}_1^{\mu_4} + 3\tilde{k}_2^{\mu_4} - 5\tilde{k}_3^{\mu_4}) + 2\tilde{k}_3^{\mu_3} (-4\tilde{k}_1^{\mu_4} + 15\tilde{k}_2^{\mu_4} + 13\tilde{k}_3^{\mu_4}) - \tilde{k}_1^{\mu_3} (16\tilde{k}_1^{\mu_4} + 61\tilde{k}_2^{\mu_4} + 22\tilde{k}_3^{\mu_4})], \quad (\text{A.14})$$

$$T_{1kk_3}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{5040m^4\pi^2} \tilde{k}_1^{\mu_1} \tilde{k}_1^{\mu_2} (1 + \kappa)^{-1} [2(2\tilde{k}_2^{\mu_3} + \tilde{k}_3^{\mu_3})(13\tilde{k}_1^{\mu_4} + 15\tilde{k}_2^{\mu_4}) + 4(11\tilde{k}_2^{\mu_3} - 2\tilde{k}_3^{\mu_3})\tilde{k}_3^{\mu_4} + \tilde{k}_1^{\mu_3} (36\tilde{k}_1^{\mu_4} + 38\tilde{k}_2^{\mu_4} + 40\tilde{k}_3^{\mu_4})], \quad (\text{A.15})$$

$$T_{1kk_4}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{5040m^4\pi^2} \tilde{k}_2^{\mu_1} \tilde{k}_1^{\mu_2} (1 + \kappa)^{-1} [(2\tilde{k}_2^{\mu_3} + \tilde{k}_3^{\mu_3})(5\tilde{k}_1^{\mu_4} - 3\tilde{k}_2^{\mu_4}) - (24\tilde{k}_2^{\mu_3} + 37\tilde{k}_3^{\mu_3})\tilde{k}_3^{\mu_4} + \tilde{k}_1^{\mu_3} (4\tilde{k}_1^{\mu_4} - 4\tilde{k}_2^{\mu_4} + 5\tilde{k}_3^{\mu_4})], \quad (\text{A.16})$$

$$T_{1kk_5}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{5040m^4\pi^2} \tilde{k}_2^{\mu_1} \tilde{k}_3^{\mu_2} (1 + \kappa)^{-1} [-2\tilde{k}_2^{\mu_3} (12\tilde{k}_1^{\mu_4} + 3\tilde{k}_2^{\mu_4} - 5\tilde{k}_3^{\mu_4}) - 4\tilde{k}_3^{\mu_3} (11\tilde{k}_1^{\mu_4} + 15\tilde{k}_2^{\mu_4} + 13\tilde{k}_3^{\mu_4}) + \tilde{k}_1^{\mu_3} (12\tilde{k}_1^{\mu_4} + 39\tilde{k}_2^{\mu_4} + 47\tilde{k}_3^{\mu_4})], \quad (\text{A.17})$$

$$T_{1kk_6}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{e^4}{5040m^4\pi^2} \tilde{k}_2^{\mu_1} \tilde{k}_2^{\mu_2} (1 + \kappa)^{-1} [3(2\tilde{k}_2^{\mu_3} + \tilde{k}_3^{\mu_3})(13\tilde{k}_1^{\mu_4} + 12\tilde{k}_2^{\mu_4}) + 6(13\tilde{k}_2^{\mu_3} - 3\tilde{k}_3^{\mu_3})\tilde{k}_3^{\mu_4} + \tilde{k}_1^{\mu_3} (38\tilde{k}_1^{\mu_4} + 36\tilde{k}_2^{\mu_4} + 81\tilde{k}_3^{\mu_4})], \quad (\text{A.18})$$

$$T_{1kk_7}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -\frac{e^4}{5040m^4\pi^2} \tilde{k}_3^{\mu_1} \tilde{k}_1^{\mu_2} (1 + \kappa)^{-1} [\tilde{k}_1^{\mu_3} (2\tilde{k}_1^{\mu_4} - 23\tilde{k}_2^{\mu_4} - 6\tilde{k}_3^{\mu_4}) + \tilde{k}_2^{\mu_3} (47\tilde{k}_1^{\mu_4} + 39\tilde{k}_2^{\mu_4} + 12\tilde{k}_3^{\mu_4}) + \tilde{k}_3^{\mu_3} (22\tilde{k}_1^{\mu_4} + 61\tilde{k}_2^{\mu_4} + 16\tilde{k}_3^{\mu_4})], \quad (\text{A.19})$$

$$T_{1kk_8}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -\frac{e^4}{5040m^4\pi^2} \tilde{k}_3^{\mu_1} \tilde{k}_3^{\mu_2} (1 + \kappa)^{-1} [\tilde{k}_1^{\mu_3} (-6\tilde{k}_1^{\mu_4} - 23\tilde{k}_2^{\mu_4} + 2\tilde{k}_3^{\mu_4}) + \tilde{k}_2^{\mu_3} (5\tilde{k}_1^{\mu_4} - 4\tilde{k}_2^{\mu_4} + 4\tilde{k}_3^{\mu_4}) - 2\tilde{k}_3^{\mu_3} (20\tilde{k}_1^{\mu_4} + 19\tilde{k}_2^{\mu_4} + 18\tilde{k}_3^{\mu_4})], \quad (\text{A.20})$$

$$T_{1kk_9}^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -\frac{e^4}{5040m^4\pi^2} \tilde{k}_3^{\mu_1} \tilde{k}_2^{\mu_2} (1 + \kappa)^{-1} [\tilde{k}_3^{\mu_3} (-9\tilde{k}_1^{\mu_4} + 10\tilde{k}_2^{\mu_4} - 10\tilde{k}_3^{\mu_4}) - 2\tilde{k}_1^{\mu_3} (\tilde{k}_1^{\mu_4} + 33\tilde{k}_2^{\mu_4} + \tilde{k}_3^{\mu_4}) + \tilde{k}_2^{\mu_3} (81\tilde{k}_1^{\mu_4} + 36\tilde{k}_2^{\mu_4} + 38\tilde{k}_3^{\mu_4})]. \quad (\text{A.21})$$

Referências Bibliográficas

- [1] K. Tenenblat "Introdução à Geometria diferencial" Editora Blucher
- [2] S. T. Thornton, J. B. Marion, "Classical Dynamics of Particles and Systems," 5^o Ed. Belmont, EUA: Books/Cole Thomson Learning, Inc. (2004) 656 p.
- [3] V. A. Kostelecky and S. Samuel, "Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory," Phys. Rev. D **39** (1989) 683.
- [4] V. A. Kostelecky and R. Potting, "CPT and strings," Nucl. Phys. B **359**, 545 (1991).
- [5] D. Colladay and V. A. Kostelecky, "CPT violation and the standard model," Phys. Rev. D **55** (1997) 6760 [arXiv:hep-ph/9703464].
- [6] D. Colladay and V. A. Kostelecky, "Lorentz-violating extension of the standard model," Phys. Rev. D **58** (1998) 116002 [arXiv:hep-ph/9809521].
- [7] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, "Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics," Phys. Rev. D **41** (1990) 1231.
- [8] V. A. Kostelecky, C. D. Lane and A. G. M. Pickering, "One loop renormalization of Lorentz violating electrodynamics," Phys. Rev. D **65** (2002) 056006 [hep-th/0111123].
- [9] V. A. Kostelecky and A. G. M. Pickering, "Vacuum photon splitting in Lorentz violating quantum electrodynamics," Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 031801 [hep-ph/0212382].

- [10] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos e M. T. D. Orlando, “Violação da Simetria de Lorentz,” *Rev. Bras. de Ens. de Fis.*, v. 29, n. 1, p. 57-64 (2007).
- [11] D. J. Griffiths “Introduction to Electrodynamics,” 3^o Ed. New Jersey, EUA: Prentice Hall, Inc. (1999) 576 p.
- [12] J. D. Jackson ”Classical Electrodynamics” 3 Ed. Wiley
- [13] J. Leite, ”Violação da Invariância de Lorentz no Regime de Temperatura Finita”, dissertação de mestrado, UFAL (2012)
- [14] S.R. Coleman and S.L. Glashow, *Phys. Rev. D* 59, 116008 (1999)
- [15] V.A. Kostelecky, ed., *CPT and Lorentz Symmetry*, World Scientific, Singapore, 1999.
- [16] V.A. Kostelecky, ed., *CPT and Lorentz Symmetry II*, World Scientific, Singapore, 2002.
- [17] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, “Non-commutative field theory and Lorentz violation,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001) [hep-th/0105082].
- [18] Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi and A. P. Polychronakos, “Testing noncommutative QED, constructing noncommutative MHD,” *Phys. Lett. B* **517**, 450 (2001) [hep-th/0106044].
- [19] H. M. Nussenzveig, “Curso de Física Básica Vol.4,” São Paulo, Brasil: Edgard Blücher (1998) 437 p.
- [20] D. Bailin, A. Love ”Introduction to gauge field theory” Ed. University of Sussex Press
- [21] O. W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 231602 (2002) [hep-ph/0201258].
- [22] R. C. Myers and M. Pospelov, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 211601 (2003) [hep-ph/0301124].

- [23] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **80**, 015020 (2009) [arXiv:0905.0031 [hep-ph]].
- [24] T. Mariz, Phys. Rev. D **83**, 045018 (2011) [arXiv:1010.5013 [hep-th]].
- [25] A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. D **85**, 096005 (2012) [arXiv:1112.6395 [hep-ph]].
- [26] P. Adamson *et al.* [MINOS Collaboration], “Testing Lorentz Invariance and CPT Conservation with NuMI Neutrinos in the MINOS Near Detector,” Phys. Rev. Lett. **101**, 151601 (2008) [arXiv:0806.4945 [hep-ex]].
- [27] P. Adamson *et al.* [MINOS Collaboration], “A Search for Lorentz Invariance and CPT Violation with the MINOS Far Detector,” Phys. Rev. Lett. **105**, 151601 (2010) [arXiv:1007.2791 [hep-ex]].
- [28] A. A. Aguilar-Arevalo *et al.* [MiniBooNE Collaboration], “Test of Lorentz and CPT violation with Short Baseline Neutrino Oscillation Excesses,” arXiv:1109.3480 [hep-ex].
- [29] P. Massarotti [KLOE Collaboration], “Recent results from KLOE,” Nuovo Cim. B **123**, 840 (2008).
- [30] A. Di Domenico *et al.* [KLOE Collaboration], “Search for CPT violation and decoherence effects in the neutral kaon system,” J. Phys. Conf. Ser. **171**, 012008 (2009).
- [31] V. A. Kostelecky, C. D. Lane, “Constraints on Lorentz violation from clock-comparison experiments” Phys Rev. D **60** 116010 (1999)
- [32] R. Bluhm *et al.*, “Clock-Comparison Tests of Lorentz and CPT Symmetry in Space” Phys. Rev. Lett. **88** 090801 (2002)
- [33] R. Bluhm *et al.*, “Probing Lorentz and CPT violation with space-based experiments” Phys. Rev. D **68** 125008 (2003)

- [34] H. Dehmelt et al. "Past Electron-Positron $g-2$ Experiments Yielded Sharpest Bound on CPT Violation for Point Particles" *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4694 (1999)
- [35] R. Mittleman et al. "Bound on CPT and Lorentz Symmetry with a Trapped Electron" *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2116 (1999)
- [36] G. Gabrielse et al. "Precision Mass Spectroscopy of the Antiproton and Proton Using Simultaneously Trapped Particles" *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3198 (1999)
- [37] R. Bluhm et al. "CPT and Lorentz Tests in Hydrogen and Antihydrogen" *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2254 (1999)
- [38] V.W. Hughes et al. "Test of CPT and Lorentz Invariance from Muonium Spectroscopy" *Phys. Rev. Lett.* **87**, 111804 (2001)
- [39] R. Bluhm et al. "CPT and Lorentz Tests with Muons" *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1098 (2000)
- [40] H. Muller, P. L. Stanwix, M. E. Tobar, E. Ivanov, P. Wolf, S. Herrmann, A. Senger and E. Kovalchuk *et al.*, "Relativity tests by complementary rotating Michelson-Morley experiments," *Phys. Rev. Lett.* **99**, 050401 (2007) [arXiv:0706.2031 [physics.class-ph]].
- [41] S. Reinhardt, G. Saathoff, H. Buhr, L. A. Carlson, A. Wolf, D. Schwalm, S. Karpuk and C. Novotny *et al.*, "Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities," *Nature Phys.* **3**, 861 (2007).
- [42] S. R. Parker, M. Mewes, P. L. Stanwix and M. E. Tobar, "Cavity Bounds on Higher-Order Lorentz-Violating Coefficients," *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180401 (2011) [arXiv:1102.0081 [hep-ph]].

- [43] F. Baynes, A. Luiten and M. Tobar, “Testing Lorentz Invariance Using an Odd-Parity Asymmetric Optical Resonator,” *Phys. Rev. D* **84**, 081101 (2011) [arXiv:1108.5414 [gr-qc]].
- [44] V. A. Kostelecky and N. Russell, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 11 (2011) [arXiv:0801.0287 [hep-ph]].
- [45] G. V. Dunne, In *Shifman, M. (ed.) et al.:
From Field to Strings, vol. 1* 445-522 [hep-th/0406216]
- [46] G. V. Dunne, ”The Heisenberg-Euler Effective Action: 75 years on”*Int. J. Mod. Phys. A* **27**, 1260004 (2012) [arXiv: 1202.1557 [hep-th]]
- [47] T. Jacobson, S. Liberati e D. Mattingly
”Threshold effects and Planck scale Lorentz violation: Combined constraints from high energy astrophysics”*Phys. Rev. D* **67**, 124011 (2003) [hep-ph/0209264]
- [48] C. Adam, F. R. Klinkhamer,
”Photon decay in a CPT-violating extension of quantum electrodynamics”*Nucl. Phys. B* **657**, 214 (2003) [hep-th/0212028]
- [49] G. Gelmini, S. Nussinov, C. E. Yaguna, *JCAP* **0506**, 012 (2005) [hep-th/0503130]
- [50] C. Kaufhold, F. R. Klinkhamer
Nucl. Phys. B **734**, 1(2006) [hep-th/0508074]
- [51] F. A. Brito, E. Passos, P. V. Santos, ”On the effective action of the vacuum photon splitting in Lorentz-violating QED”*Europhys. Lett.* **95**, 51001(2011) [arXiv: 1101.5390[hep-th]]

- [52] G. Jarlskog, L. Joensson, S. Pruenster, H. D. Schulz, H. J. Willutzki, G. G. Winter, “Measurement of Delbrück Scattering and Observation of Photon Splitting at High Energies” *Phys. Rev. D* 8, 3813-3823 (1973)
- [53] A. I. Milstein, M. Schumacher “Present status of Delbrück scattering” *Phys. Rept.* 243, 183 (1994)
- [54] S. L. Adler “constant magnetic field of arbitrary strength” *Annals Phys.* 67, 599 (1971)
- [55] S. L. Adler, C. Schubert “Photon Splitting in a Strong Magnetic Field: Recalculation and Comparison with Previous Calculations” *Phys. Rev. Lett.* 77, 1695 (1996)
- [56] D. d’Osterri, G. G. Silveira “Observing light-by-light scattering at the Large Hadron Collider” arXiv:1305.7142 [hep-ph]
- [57] J. L. Hewett, F. J. Petriello, T. G. Rizzo “Signals for noncommutative interactions at linear colliders” *Phys. Rev. D* 64, 075012 (2001)
- [58] R. Karplus and M. Neuman, “The Scattering of Light by Light”, *Phys. Rev.* 83, 776 (1951).
- [59] J. S. Schwinger, ”On Gauge Invariance and Vacuum Polarization” *Phys. Rev.* 82, 664 (1951).
- [60] W. Greiner, J. Reinhard “Quantum Electrodynamics,” 3^o Ed. Berlin, Germany: Springer-Verlag (2003) 475 p
- [61] Bastianelli, F. Dávila, J. M., Schubert, C ”Gravitational corrections to the Euler-Heisenberg Lagrangian” *JHEP*03(2009)086
- [62] Huet, I. McKeon, D.G.C., Schubert, C ”Euler-Heisenberg lagrangians and asymptotic analysis in 1+1 QED. Part I: two-loop” *JHEP*12(2010)036

- [63] Liang, Y. Czarnecki, A. "Photon-photon scattering: a tutorial" *Canadian Journal of Physics*, 2012, 90(1): 11-16, 10.1139/p11-144
- [64] Huet, Y. Trautenberg, M.R, Schubert, C. "The Euler-Heisenberg Lagrangian Beyond one loop" *International Journal of Modern Physics: Conference Series Vol. 14 (2012) 383-393*
- [65] M. I. Katsnelson, G. E. Volovik "Quantum electrodynamics with anisotropic scaling: Heisenberg-Euler action and Schwinger pair production in the bilayer graphene" *JETP Letters (2012), Volume 95, Issue 8, pp 411-415*
- [66] Rubtsov, G. Satunin P. Sibiryakov, S "On calculation of cross sections in Lorentz violating theories" *Physical Review D*, vol. 86, Issue 8, id. 085012
- [67] Brandt, F. T., Ashok Das, Frenkel J. "Parity violating electromagnetic interactions in QED(3) at finite temperature" *Phys.Rev* 01/2000; D62:085012.
- [68] U. D. Jentschura, H. Gies, S. R. Valluri, D. R. Lamm, and E. J. Weniger "QED Effective Action Revisited" *Canadian Journal of Physics*, 2002, 80(3): 267-284, 10.1139/p01-139
- [69] D. Bazeia, T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos and R. F. Ribeiro, "Lorentz and CPT symmetries in commutative and noncommutative space-time," *J. Phys. A A* **36**, 4937 (2003) [hep-th/0303122].
- [70] T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. .Petrov, "On the perturbative generation of the higher-derivative Lorentz-breaking terms," arXiv:1111.0198 [hep-th].
- [71] T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos, R. F. Ribeiro and F. A. Brito, "A Remark on Lorentz violation at finite temperature," *JHEP* **0510**, 019 (2005) [hep-th/0509008].
- [72] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, "Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics," *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 3572 [hep-ph/9901358].

- [73] V. A. Kostelecky and R. Lehnert, “Stability, causality, and Lorentz and CPT violation,” *Phys. Rev. D* **63** (2001) 065008 [hep-th/0012060].
- [74] M. S. Berger and V. A. Kostelecky, “Supersymmetry and Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **65** (2002) 091701 [hep-th/0112243].
- [75] V. A. Kostelecky, “Gravity, Lorentz violation, and the standard model,” *Phys. Rev. D* **69** (2004) 105009 [hep-th/0312310].
- [76] Sh. Zh. Akhmadaliev et al, “Delbruck scattering at energies of 140-450 MeV”, *Phys. Rev. C* **58**, 2844 (1998).
- [77] Z. Bialynicka-Birula, I. Bialynicki-Birula, “Nonlinear Effects in Quantum Electrodynamics. Photon Propagation and Photon Splitting in an External Field”, *Phys. Rev. D* **10**, 2341 (1970).
- [78] G. Rubtsov, P. Satunin, S. Sibiryakov “Calculation of cross sections in Lorentz-violating theories” *Phys Rev D* **86**, 085012 (2012)
- [79] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, “An Introduction To Quantum Field Theory,” Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p
- [80] L. H. Ryder, “Quantum Field Theory,” Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1985) 443p
- [81] J. Furtado, T. Mariz, “Lorentz-violating Euler-Heisenberg effective action”, artigo submetido ao *Phys. Rev. D*