

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**RAFAEL ARAÚJO GUILLOU**

**DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO DE ESCORAS E TIRANTES NO  
DIMENSIONAMENTO DE BLOCOS DE TRANSIÇÃO ENTRE PILARES  
ROTACIONADOS**

**Maceió**

**2014**

RAFAEL ARAÚJO GUILLOU

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO DE ESCORAS E TIRANTES NO  
DIMENSIONAMENTO DE BLOCOS DE TRANSIÇÃO ENTRE PILARES  
ROTACIONADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Aline da Silva Ramos  
Barboza

Maceió

2014

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade**

G962d      Guillou, Rafael Araújo.  
Desenvolvimento de um modelo de escoras e tirantes no dimensionamento de Blocos de transição entre pilares rotacionados / Rafael Araújo Guillou. – Maceió, 2014.  
120 f. : il.

Orientadora: Aline da Silva Ramos Barboza.  
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2014.

Bibliografia: f. 118-120.

1. Pilares rotacionados. 2. Blocos de transição. 3. Bielas e tirantes.  
4. Análise não lineares. 5. Concreto armado. I. Título.

CDU: 624.166.4



Universidade Federal de Alagoas – UFAL  
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC  
Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil – PPGECC



**APLICAÇÃO DE UM MODELO DE BIELAS E TIRANTES NO DIMENSIONAMENTO  
DE BLOCOS DE TRANSIÇÃO ENTRE PILARES ROTACIONADOS.**

**RAFAEL ARAÚJO GUILLOU**

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 12 do mês de dezembro do ano de 2014.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Aline da Silva Ramos Barboza  
Orientadora – CTEC/UFAL

Prof. Dr. Eduardo Nobre Lage  
CTEC/UFAL

Prof. Dr. Rafael Alves de Souza  
UEM



Campus A. C. Simões, Av. Lourival de Melo Mota, S/N  
Tabuleiro do Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas  
Tel/Fax: (82) 3214-1863  
E-mail: [ppgecc@ctec.ufal.br](mailto:ppgecc@ctec.ufal.br)  
Homepage: [www.ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgecc](http://www.ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgecc)

Aos meus irmãos, Bruno e Felipe,  
à minha parceira Joyce e aos meus  
pais, Arthur e Marinita, por sempre  
me apoiarem.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus irmãos, Bruno e Felipe, à minha parceira Joyce e aos meus pais, Arthur e Marinita, pelo apoio e compreensão ao longo dessa jornada.

À orientadora Aline Ramos, que sempre esteve presente, apoiando e contribuindo para obtenção dos melhores resultados.

Aos professores Severino Marques e Eduardo Nobre, do PPGEC/CTEC/UFAL, pelos comentários e sugestões para a construção desta dissertação, durante o meu Exame de Qualificação de Mestrado.

Aos amigos Lucas, Hevânio, Cledson, Heleno, Marcos Diego e aos amigos feitos no mestrado, Thabatta e Roberto, pelo compartilhamento de conhecimentos durante o período de curso.

À CAPES e à FUNDEPES, pelo apoio financeiro através da concessão da bolsa de mestrado.

A todos que me ajudaram direta ou indiretamente.

## RESUMO

Por motivos arquitetônicos, em alguns dos sistemas estruturais de edifícios surge a necessidade de modificar a direção de pilares de um pavimento para o outro. Uma das soluções adotadas na zona de transição de direção é a utilização de um bloco de concreto armado para auxiliar a transferência das cargas entre os pilares. Esta solução é proposta por analogia aos blocos utilizados na transição da superestrutura à infraestrutura de uma edificação, comumente chamado de blocos de fundação. Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo estudar um modelo de bielas e tirantes tridimensional para o dimensionamento de blocos de concreto armado para transição entre pilares rotacionados, a partir dos resultados de análises elásticas de tensões, e avaliar numericamente os modos de falha, resistências últimas e condições de serviços do bloco dimensionado, considerando a não linearidade física dos materiais com um modelo de plasticidade. O modelo tridimensional proposto interliga modelos planos anteriormente definidos em estudos do autor. Verifica-se que a diferença entre os esforços do modelo proposto e o do modelo plano não são significativas, ratificando, com isso, a utilização do modelo plano. A partir das análises não lineares, verifica-se que a capacidade resistente do elemento estudado é significativamente maior que a sollicitação aplicada, por influência da resistência à tração do concreto, ou seja, a não consideração da resistência à tração do concreto no modelo de bielas e tirantes despreza grande parte da capacidade resistente do elemento. Além disso, observa-se que a configuração de ruína ocorre pelo escoamento do aço na armadura chamada de "principal". Com os resultados do trabalho, busca-se contribuir com a proposição de uma solução mais adequada para a região de transição entre pilares rotacionados.

**Palavras-chave:** Pilares rotacionados. Blocos de transição. Bielas e tirantes. Análises não lineares.

## ABSTRACT

For architectural reasons, in some structural building systems, the need to change the direction of columns from one floor to another arises. One of the adopted solutions in the transition zone is to use a block of reinforced concrete to assist the transfer of loads between the columns. This solution is proposed by analogy to the blocks used in the transition from the superstructure to the infrastructure of a building, commonly called the pile caps. In this context, this work aims to study a three-dimensional strut-and-tie model applied to the design of reinforced concrete blocks used in the transition between rotated columns, from the results of elastic analysis of stresses and numerically evaluate the failure modes, last resistance and service conditions of the designed block, considering the physical non-linearity of the materials with a model of plasticity. The three-dimensional model was proposed linking plane models defined previously in studies of the author. It was found that the difference of the stresses between the proposed model and the plane model are not significant, confirming thereby the use of the plane model. From the nonlinear analysis, it was found that the load capacity of the investigated element is significantly greater than the applied load, by influence of the tensile strength of the concrete. This means that as the tensile strength of the concrete in the strut and tie model is not considered, is neglected much of the load capacity of the element. Furthermore, it was observed that the configuration of ruin occurred by yielding of steel in the armor called "main". With the results of the study, it was sought to contribute to propose a better solution for the transition region between rotated columns.

**Keywords:** Rotated columns. Transition blocks. Strut and tie. Nonlinear analysis.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Rotação dos pilares entre os pavimentos.....	17
Figura 1.2 – Bloco de concreto armado utilizado na transição de pilares rotacionados.....	18
Figura 2.1 – Bloco sobre uma estaca.....	21
Figura 2.2 – Regiões B (Bernoulli) e D (Descontínua).....	22
Figura 2.3 – Posição das bielas e tirantes a partir dos diagramas de tensão.....	24
Figura 2.4 – Configurações típicas de distribuições de tensão de compressão.....	26
Figura 2.5 – Falha do elemento devido a não consideração das tensões transversais	26
Figura 2.6 – Representação de uma biela com configuração curvilínea.....	27
Figura 2.7 – Exemplos de nós contínuos (A) e singulares (B).....	31
Figura 2.8 – Classificação dos nós.....	31
Figura 2.9 – Nó-CCC em estado hidrostático plano.....	32
Figura 2.10 – Caso de nó-CCC.....	33
Figura 2.11 – Zona nodal estendida e caso de nó-CCT.....	33
Figura 2.12 – Parâmetros para calcular $w_t$ .....	35
Figura 2.13 – Parâmetros de resistência das regiões nodais.....	37
Figura 2.14 – Região de perturbação de St. Venant.....	38
Figura 2.15 – Isóbaras das tensões.....	39
Figura 2.16 – Sistema tridimensional e bidimensional.....	39

Figura 2.17 – Diagrama de tensões do bloco parcialmente carregado.....	41
Figura 2.18 – Modelo de bielas e tirantes e tirantes em zonas de regularização.....	42
Figura 2.19 – Esforços de tração nas bordas e armadura correspondente.....	42
Figura 2.20 – Idealização do modelo de consolos curtos.....	43
Figura 2.21 – Modelo de consolo curto adaptado para blocos de uma estaca.....	44
Figura 2.22 – Geometria do modelo analisado em Guillou (2011).....	44
Figura 2.23 – Tensão vertical de compressão ao longo da altura do bloco.....	45
Figura 2.24 – Comportamento das tensões transversais no plano ZY central do bloco.....	46
Figura 2.25 – Tensão transversal fora do eixo de transição.....	46
Figura 2.26 – Tensões na direção X do bloco.....	47
Figura 2.27 – Comportamento do bloco semelhantes a um consolo.....	47
Figura 2.28 – Tensões principais máximas.....	48
Figura 2.29 – Diagrama genérico das tensões transversais – $\sigma_x$ .....	48
Figura 2.30 – Parâmetros para a definição geométrica dos modelos (medidas em cm).....	49
Figura 2.31 – Diagrama tensão-deformação compressão uniaxial.....	51
Figura 2.32 – Coeficiente de Poisson.....	51
Figura 2.33 – Tração uniaxial.....	52
Figura 2.34 – Estados biaxiais de tensões.....	52
Figura 2.35 – Estados triaxiais de compressão.....	53
Figura 2.36 – Superfície de plastificação e ruptura.....	53

Figura 2.37 – (a) Plano desviatório; (b) Plano meridional.....	54
Figura 2.38 – Plano desviatório da superfície de falha.....	56
Figura 2.39 – (a) Plano meridional; (b) Plano desviatório.....	56
Figura 2.40 – Curva tensão-deformação na compressão uniaxial.....	57
Figura 2.41 – Curva tensão-deformação na tração uniaxial.....	57
Figura 2.42 – Deformação volumétrica do concreto.....	60
Figura 2.43 – Superfície do potencial de fluxo hiperbólica.....	61
Figura 2.44 – Parâmetros que definem a função hiperbólica.....	61
Figura 2.45 – Superfície de plastificação no plano de tensões.....	63
Figura 2.46 – Curva de Kupfer para concreto classe B50.....	63
Figura 2.47 – Plano desviatório da superfície de falha.....	64
Figura 2.48 – Relação constitutiva do aço.....	65
Figura 2.49 – Diagrama tensão-deformação de compressão uniaxial.....	67
Figura 2.50 – Diagrama tensão-deformação de tração uniaxial.....	69
Figura 2.51 – Elemento C3D8 ( <i>Continuum 3D, 8 nodes</i> ).....	71
Figura 2.52 – Padrões de malhas estruturadas em duas dimensões.....	71
Figura 2.53 – Geometria, malha e condições de contorno do corpo-de-prova.....	72
Figura 2.54 – Comparação dos diagramas de tensão-deformação resultante da análise e Teórico.....	73
Figura 2.55 – Geometria e armação do modelo.....	74
Figura 2.56 – Malha e condições de contorno da viga.....	74

Figura 2.57 – Disposição da armadura no modelo da viga.....	75
Figura 2.58 – Técnica " <i>embedded elements</i> ".....	76
Figura 2.59 – Curvas Força x Deslocamento.....	76
Figura 2.60 – Propagação do dano dt com diferentes carregamentos.....	77
Figura 2.61 – Fissuras previstas para o caso estudado.....	78
Figura 3.1 – Comparação dos esforços, em kN, dos modelos planos. À esquerda o modelo no RSA. À direita o modelo estudado em Guillou (2011).....	79
Figura 3.2 – Modelo de bielas e tirantes espacial.....	80
Figura 3.3 – Esforços normais, em kN, nos planos A e D da treliça.....	81
Figura 3.4 – Esforços normais, em kN, nos planos B e C da treliça.....	82
Figura 3.5 – Esforços, em kN, nas barras de travamento diagonais no plano horizontal Superior.....	82
Figura 3.6 – Esforços, em kN, nas barras de travamento diagonais no plano horizontal Médio.....	83
Figura 3.7 – Esforços, em kN, nas barras de travamento diagonais no plano horizontal Inferior.....	83
Figura 4.1 – Equilíbrio do nó N4.....	92
Figura 4.2 – Equilíbrio do nó N4 adaptado.....	92
Figura 4.3 – Tipos de armaduras utilizadas (adap. TQS Informática Ltda, s/d).....	98
Figura 4.4 – Detalhamento do bloco de transição.....	99
Figura 4.5 – Verificação da ancoragem da armadura principal, nó N3.....	100
Figura 5.1 – Modelo de diagrama tensão-deformação para compressão uniaxial.....	103

Figura 5.2 – Diagrama tensão-deformação de compressão uniaxial utilizado no modelo..	104
Figura 5.3 – Diagrama tensão-abertura de fissuras.....	106
Figura 5.4 – Diagrama tensão-deformação de tração uniaxial utilizado no modelo.....	108
Figura 5.5 – Geometria do modelo.....	109
Figura 5.6 – Armadura principal inserida no modelo.....	109
Figura 5.7 – Armadura de fendilhamento inserida no modelo.....	110
Figura 5.8 – Malha e deslocamento imposto no trecho superior de pilar.....	110
Figura 5.9 – Malha e restrição à translação do trecho inferior de pilar.....	110
Figura 5.10 – Diagrama Força-Deslocamento.....	111
Figura 5.11 – Diagramas tensão-deformação utilizados na comparação.....	112
Figura 5.12 – Diagramas força-deslocamento de acordo com $\sigma_0$ .....	112
Figura 5.13 – Evolução do dano no tração ao longo do bloco.....	113
Figura 5.14 – Dano na compressão no trecho descendente da curva força-deslocamento....	115

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Valores de $\beta_s$ de acordo com a situação (ACI 318, 2005).....	28
Tabela 2.2 – Valores de $\beta_s$ de acordo com a situação (CEB-FIP, 1993).....	29
Tabela 2.3 – Valores de $\beta_s$ de acordo com a situação (NBR 6118, ABNT 2014).....	29
Tabela 2.4 – Valores de $\beta_n$ de acordo com a situação (ACI 318, 2005).....	36
Tabela 2.5 – Valores de $\beta_n$ de acordo com a situação (CEB-FIP, 1993).....	36
Tabela 2.6 – Valores de $\beta_n$ de acordo com a situação (NBR 6118, ABNT 2014).....	37
Tabela 2.7 – Valores de $\beta_n$ de acordo com a situação (CSA-A23.3, 2004).....	37
Tabela 2.8 – Relação entre os esforços no modelo de bielas e tirantes e resultantes da análise numérica.....	49
Tabela 2.9 – Parâmetros do aço.....	65
Tabela 2.10 – Parâmetros do modelo de Mazars.....	66
Tabela 2.11 – Parâmetros utilizados para o CDP.....	67
Tabela 2.12 – Caracterização do concreto à compressão.....	68
Tabela 2.13 – Caracterização do concreto à tração.....	70
Tabela 3.1 – Parâmetros geométricos do modelo de bielas e tirantes.....	81
Tabela 3.2 – Resumo dos esforços.....	84
Tabela 3.3 – Comparação entre os esforços dos modelos.....	84
Tabela 3.4 – Comparação entre as relações dos modelos de bielas e tirantes e resultantes da análise elástica.....	84
Tabela 4.1 – Parâmetros dos elementos dimensionados.....	86
Tabela 4.2 – Coeficiente $\beta_n$ utilizado para cada nó e de acordo com cada norma.....	88
Tabela 4.3 – Resistência efetiva à compressão dos nós.....	89
Tabela 4.4 – Resistências das faces do nó N1.....	90

Tabela 4.5 – Resistência característica necessária para o nó N1.....	90
Tabela 4.6 – Resistências das faces do nó N3.....	91
Tabela 4.7 – Resistência característica necessária para o nó N3.....	92
Tabela 4.8 – Resistências das faces do nó N4.....	93
Tabela 4.9 – Menores áreas das bielas.....	93
Tabela 4.10 – Coeficiente $\beta_s$ utilizado para cada biela e de acordo com cada norma.....	94
Tabela 4.11 – Parâmetro $\epsilon_1$ de cada biela.....	95
Tabela 4.12 – Resistência efetiva à compressão das bielas.....	95
Tabela 4.13 – Resistência de cálculo das bielas.....	96
Tabela 4.14 – Resistência característica do concreto necessária para cada código	
Normativo.....	96
Tabela 4.15 – Comparação entre armaduras dimensionadas ( $\text{cm}^2$ ).....	97
Tabela 4.16 – Resistência característica do concreto necessária de acordo com o método	
de dimensionamento.....	97
Tabela 5.1 – Parâmetros do aço.....	102
Tabela 5.2 – Caracterização do concreto à compressão.....	105
Tabela 5.3 – Parâmetros considerados para o modelo de tração.....	107
Tabela 5.4 – Caracterização do concreto à tração.....	108

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	17
<b>1.1</b>	<b>Comentários iniciais</b> .....	17
<b>1.2</b>	<b>Justificativa</b> .....	18
<b>1.3</b>	<b>Objetivos</b> .....	19
<b>1.4</b>	<b>Delimitação do trabalho</b> .....	19
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	21
<b>2.1</b>	<b>Bloco sobre estacas</b> .....	21
<b>2.2</b>	<b>Teoria dos modelos de bielas e tirantes</b> .....	22
2.2.1	Dimensionamento dos tirantes.....	24
2.2.2	Dimensionamento das bielas.....	25
2.2.3	Dimensionamento dos nós.....	30
<b>2.3</b>	<b>Dimensionamento de blocos sobre uma estaca</b> .....	38
2.3.1	Teoria de blocos parcialmente carregados.....	38
2.3.2	Armadura principal.....	42
<b>2.4</b>	<b>Análise do campo de tensões em blocos de transição entre pilares rotacionados</b> .....	44
<b>2.5</b>	<b>Considerações gerais sobre o comportamento mecânico do concreto</b> .....	50
2.5.1	Considerações gerais sobre a teoria da plasticidade aplicada ao concreto.....	54
2.5.2	Modelo <i>Concrete Damaged Plasticity</i> (CDP).....	56
<b>2.6</b>	<b>Modelagem numérica com Concrete Damaged Plasticity</b> .....	64
2.6.1	Propriedades dos materiais.....	64
2.6.1.1	Propriedades do aço.....	65
2.6.1.2	Propriedades do concreto.....	65



2.6.2	Malha de elementos finitos.....	70
2.6.3	Compressão uniaxial no corpo-de-prova.....	72
2.6.3.1	Geometria, condições de contorno e malha.....	72
2.6.3.2	Análise dos resultados.....	72
2.6.4	Viga apoiada nas duas extremidades.....	73
2.6.4.1	Geometria, condições de contorno e malha.....	73
2.6.4.2	Análise dos resultados.....	76
<b>3</b>	<b>DESENVOLVIMENTO E ANÁLISES DE UM MODELO DE BIELAS E TIRANTES TRIDIMENSIONAL.....</b>	<b>79</b>
<b>3.1</b>	<b>Desenvolvimento do modelo.....</b>	<b>79</b>
<b>3.2</b>	<b>Análise do modelo.....</b>	<b>81</b>
<b>4</b>	<b>DIMENSIONAMENTO E DETALHAMENTO DO BLOCO ESTUDADO.....</b>	<b>86</b>
<b>4.1</b>	<b>Dimensionamento análogo aos blocos sobre uma estaca.....</b>	<b>86</b>
4.1.1	Resistência à compressão.....	86
4.1.2	Armadura de fendilhamento.....	87
4.1.3	Armadura principal.....	87
<b>4.2</b>	<b>Dimensionamento do bloco com o modelo de bielas e tirantes.....</b>	<b>87</b>
4.2.1	Dimensionamento dos tirantes.....	87
4.2.2	Verificação dos nós.....	88
4.2.2.1	Nó N1.....	89
4.2.2.2	Nó N3.....	91
4.2.2.3	Nó N4.....	92
4.2.3	Verificação das bielas.....	93
<b>4.3</b>	<b>Análise dos resultados e comparação entre os métodos de dimensionamento... 96</b>	
<b>4.4</b>	<b>Detalhamento.....</b>	<b>98</b>

<b>5</b>	<b>ANÁLISES NUMÉRICAS APLICANDO A NÃO LINEARIDADE FÍSICA DO CONCRETO.....</b>	<b>102</b>
<b>5.1</b>	<b>Propriedades dos materiais.....</b>	<b>102</b>
5.1.1	Propriedades de aço.....	102
5.1.2	Propriedades do concreto.....	102
5.1.2.1	Comportamento na compressão.....	103
5.1.2.2	Comportamento na tração.....	105
<b>5.2</b>	<b>Geometria, malha e condições de contorno.....</b>	<b>108</b>
<b>5.3</b>	<b>Análise dos resultados.....</b>	<b>111</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>116</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>118</b>

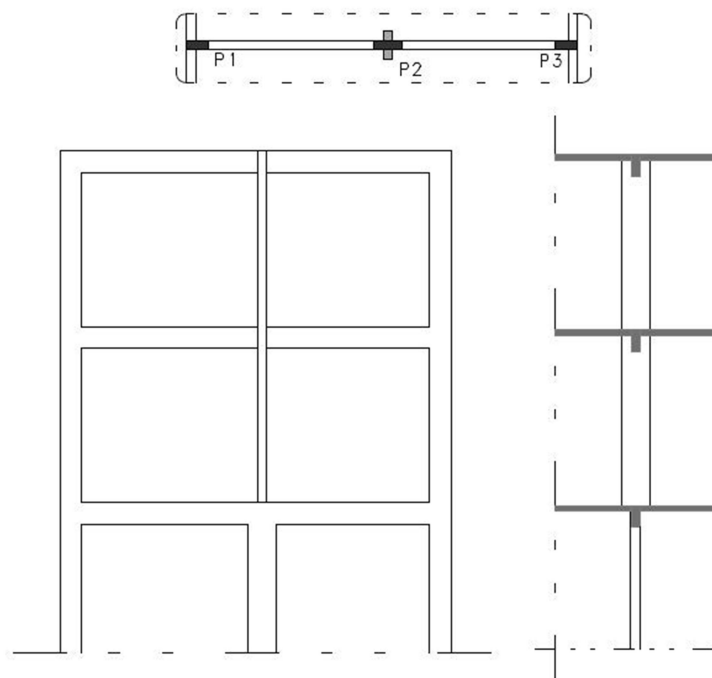
# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Comentários iniciais

Um dos maiores desafios dos projetistas atuais é a compatibilização entre os projetos para uma edificação. Nem sempre a melhor solução para um determinado projeto, seja ele estrutural, de instalações ou arquitetônico, é a melhor solução para o edifício como um todo. Muitas são as ocasiões nas quais o projetista tem que ser flexível para novas ideias e sair de sua “zona do conforto” para o melhor progresso do empreendimento.

Os projetistas estruturais locam os pilares de acordo com a arquitetura do edifício, e em algumas ocasiões não encontram uma solução estrutural desejável para satisfazer os *layouts* de todos os pavimentos ao mesmo tempo. Algumas destas ocasiões podem ser resolvidas com a mudança de direção ou rotação do pilar entre pavimentos, como ilustra a Figura 1.1, não sendo necessária a mudança completa de concepção estrutural, nem abdicar do modelo arquitetônico.

**Figura 1.1 – Rotação dos pilares entre os pavimentos**

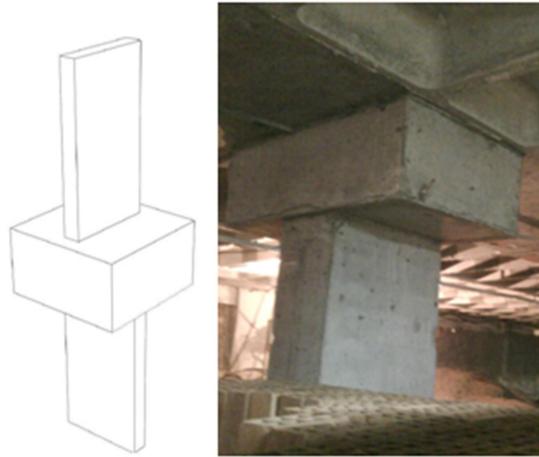


Fonte: Elaborada pelo autor.

Na prática profissional, uma das soluções adotadas para assegurar a transferência de cargas entre os pilares rotacionados é a utilização de um bloco de concreto armado na zona de transição entre os mesmos (Figura 1.2). Entretanto, não se trata de um procedimento

normatizado. A escassez de trabalhos sobre o tema faz com que os engenheiros tenham receio de adotar a rotação de pilares.

**Figura 1.2 – Bloco de concreto armado utilizado na transição de pilares rotacionados**



Fonte: Elaborada pelo autor.

É nesse contexto que este trabalho se insere, propondo o desenvolvimento de um estudo detalhado do comportamento de tensões em um bloco de concreto armado posicionado na região de transição de pilares rotacionados.

## **1.2 Justificativa**

Os blocos de concreto armado utilizados na transição de pilares rotacionados são dimensionados analogamente aos blocos utilizados na transição da superestrutura à infraestrutura de uma edificação, comumente chamado de blocos de fundação. Esses ligam a fundação profunda (estacas, tubulões, entre outros) ao pilar, sendo responsável pela transferência dos esforços.

Apesar dos sistemas “pilar-bloco-pilar” e “pilar-bloco-fundação” apresentarem mudanças de transição geométrica semelhantes, são necessários estudos específicos verificando a distribuição de tensões ao longo dos blocos, levando em conta as diversas situações e condições possíveis.

Por ser um elemento diferenciado e complexo, uma das soluções adotadas para o dimensionamento do bloco é por meio de análises numéricas.

Com estudos e métodos detalhados sobre o tema, será possível garantir a integridade da transição dos pilares rotacionados, dando segurança aos engenheiros e flexibilidade aos arquitetos e construtores. O resultado deste trabalho visa contribuir com esse estudo.

### 1.3 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo geral estudar o comportamento de um bloco de concreto armado utilizado na transição entre pilares rotacionados e utilizar um modelo de bielas e tirantes para o dimensionamento do mesmo.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- ✓ Determinar o campo de tensões atuantes no bloco de transição por meio de análises numéricas elásticas, e desenvolver um modelo de bielas e tirantes comparando-o com modelos já estudados.
- ✓ Dimensionar e detalhar um bloco de transição, a partir do modelo de bielas e tirantes, comparando-o com dimensionamentos de blocos sobre uma estaca realizados atualmente.
- ✓ Elaborar um modelo em elementos finitos, utilizando o detalhamento completo do bloco estudado, aplicando a não linearidade física dos materiais empregados, para avaliação de carga última e configuração de ruína.

### 1.4 Delimitação do trabalho

O modelo de bielas e tirantes estudado neste trabalho tem como referência o estudo desenvolvido em Guillou (2011), considerando as seguintes limitações:

- ✓ Rotações de 90°: são analisadas apenas mudanças completas de direção, não sendo parte do trabalho análises de mudanças parciais de direção ou rotações diferentes de 90°;
- ✓ Rotações centradas: não são estudados modelos que contemplam excentricidade entre os elementos;
- ✓ Esforços atuantes: nos modelos de blocos analisados apenas existem esforços normais provindos dos pilares e do peso próprio do sistema.
- ✓ Análise estrutural: na construção do modelo de bielas e tirantes, a análise de tensões é feita considerando o concreto um material elástico linear e as deformações e deslocamentos do sistema insuficientes para gerar efeitos de segunda ordem. Já no modelo em elementos finitos, construído a partir do dimensionamento do bloco com o modelo de bielas e tirantes e tirantes, é considerada a não linearidade física assumindo-se a aderência perfeita entre o aço

e o concreto, o carregamento aplicado monotonicamente e os materiais homogêneos e isotrópicos.

## ➤ **ESTRUTURA DO TRABALHO**

O tema em estudo no presente trabalho será apresentado em seções considerando-se os objetivos e as etapas de desenvolvimento.

Na Seção 1, Introdução, faz-se uma breve introdução sobre o tema em estudo definindo a zona de transição entre os pilares rotacionados. Além disso, são apresentadas as justificativas para o desenvolvimento do estudo, bem como definidos os objetivos buscados com o mesmo.

Na Seção 2, Revisão Bibliográfica, são descritos os fundamentos teóricos a serem considerados para desenvolvimento do estudo.

Na Seção 3, Desenvolvimento e análises de um modelo de bielas e tirantes tridimensional, desenvolve-se um modelo de bielas e tirantes tridimensionais, a partir da distribuição de tensões elásticas.

Na Seção 4, Dimensionamento e detalhamento de um bloco, faz-se uma análise comparativa para o dimensionamento e detalhamento dos blocos considerando o modelo de bielas e tirantes mais adequado e as recomendações disponíveis na literatura.

Na Seção 5, Análises numéricas aplicando a não linearidade física, a partir do detalhamento completo do bloco, dimensionado com o modelo de bielas e tirantes, analisa-se um modelo em elementos finitos considerando a não linearidade dos materiais utilizados, para avaliação da capacidade resistente do bloco e configuração de ruína.

Na Seção 6, Considerações Finais, são apresentadas os comentários finais do trabalho e as conclusões obtidas com o estudo desenvolvido. Além disso, apresentam-se algumas sugestões para continuidade da pesquisa.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Bloco sobre estacas

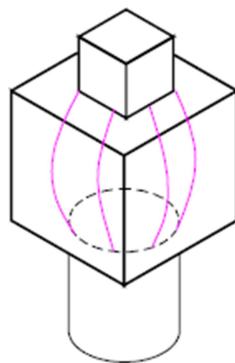
A norma brasileira NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014) define os blocos sobre estacas como estruturas de volume usadas para transmitir as cargas de fundação às estacas. Uma vez que as dimensões da seção transversal dos mesmos não são suficientemente menores que a dimensão longitudinal, torna-se inadequada a utilização da hipótese simplificadora de Bernoulli, a qual afirma que as seções planas das vigas permanecem planas e perpendiculares ao eixo fletido do elemento durante o processo de deformação.

No item 22.7.3 da referida norma (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014), é afirmado que para o dimensionamento dos blocos são aceitos modelos tridimensionais, lineares ou não, e modelos biela-tirante tridimensionais, esse preferível por definir melhor a distribuição de esforços pelos tirantes. Nesta norma inexistente roteiro para verificações e dimensionamento destes elementos.

Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) seguem o mesmo raciocínio e afirmam que em casos nos quais o estado de tensões não é predominantemente plano deve-se recorrer a um modelo tridimensional de bielas e tirantes. No entanto, afirmam que estruturas tridimensionais de largura constante, caso seja possível, podem ser estudadas dividindo-as em planos individuais.

Segundo Munhoz (2004), blocos sobre uma estaca (Figura 2.1), também chamados de blocos de transição, são tratados como blocos parcialmente carregados. Os blocos utilizados na transição de pilares rotacionados são dimensionados analogamente a esses.

**Figura 2.1 – Bloco sobre uma estaca**



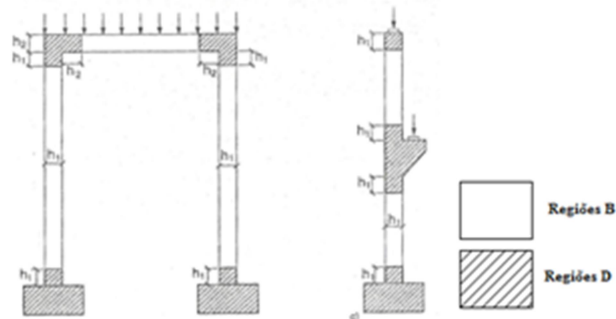
Fonte: Munhoz (2004).

## 2.2 Teoria dos modelos de bielas e tirantes

Modelos de bielas e tirantes são representações discretas dos campos de tensões encontrados em elementos estruturais de concreto armado, como afirmam Silva e Giongo (2000). São modelos genéricos de treliça, utilizados como base racional para o dimensionamento e detalhamento de qualquer elemento de concreto armado.

Bergmeister et al. (1993) dizem que qualquer estrutura pode ser classificada subdividindo-a em regiões B (Bernoulli, *bending, beam*) e D (Descontínua, distúrbio, detalhe), como ilustra a Figura 2.2.

**Figura 2.2 – Regiões B (Bernoulli) e D (Descontínua)**



Fonte: Silva e Giongo (2000).

As regiões B são denominadas contínuas, nas quais a hipótese simplificadora de Bernoulli é válida. Estas regiões podem ser dimensionadas, quando não fissuradas, a partir de parâmetros da seção transversal (área, momento de inércia, etc.) e das leis usuais da mecânica dos sólidos. Para elementos fissurados pode-se utilizar a treliça de Morsch, sendo essa um caso especial de modelo de bielas e tirantes.

As regiões D são descontínuas, geometricamente ou estaticamente, e a hipótese simplificadora deixa de ser válida. Para estas regiões é possível a utilização de modelos de bielas e tirantes, porém ainda hoje muitos destes elementos são detalhados a partir de experimentos ou práticas usuais.

Segundo Silva e Giongo (2000), nos modelos de bielas e tirantes, os campos de tensão de compressão no concreto são representados pelas bielas e os campos de tensão de tração pelos tirantes, que são absorvidos pela armadura. Tanto as bielas como os tirantes são representados por barras, sendo essas ligadas por nós.

Os modelos de bielas e tirantes podem ser projetados a partir do fluxo de tensões da estrutura. É possível determinar a direção e o módulo das tensões elásticas a partir de análises numéricas, a exemplo do método dos elementos finitos, e assim desenvolver o modelo.



Conhecendo-se um modelo adequado, as forças nas bielas e tirantes são calculadas automaticamente por meio de equilíbrio de forças internas e externas. A partir das forças resultantes, faz-se o dimensionamento, seguido do detalhamento.

Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) afirmam que para a elaboração do modelo, a orientação da geometria pode ser determinada a partir de campos elásticos de tensões, enquanto que o dimensionamento pode ser realizado utilizando a teoria da plasticidade.

Os mesmos autores explicam que métodos plásticos de análises são os mais adequados para a determinação da capacidade última, enquanto que métodos elásticos são melhores para análise de estruturas sob condições de serviço. Entretanto, afirmam que uma análise linear ou não linear elástica é aceitável e segura para os dois casos. Isto se torna, então, uma vantagem, já que é possível utilizar o mesmo modelo de bielas e tirantes tanto para o estado limite último como para o de utilização. No entanto, a análise elástica é considerada conservativa, negligenciando parte da capacidade última da estrutura.

Quanto ao dimensionamento, Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) indicam a utilização do limite inferior da teoria da plasticidade. Já que o concreto possui certa ductilidade, o modelo escolhido não deve apresentar deformações que excedam o limite. Nas regiões de altas tensões este requisito é atendido ao orientar a geometria do modelo utilizando a teoria da elasticidade. Já as regiões de médias e baixas tensões não precisam ser fielmente reproduzidas pelo modelo de bielas e tirantes e tirantes, já que a estrutura consegue se adaptar à estrutura interna modelada. Para regiões de médias e baixas trações, o reforço pode ser reproduzido a partir de considerações práticas, como a utilização de armaduras mínimas. Estas armaduras podem ser recomendadas a partir de experimentação ou de cálculos sofisticados de fissuração. O presente trabalho não contempla este estudo.

O Teorema do Limite Inferior da Teoria da Plasticidade estabelece que um campo de solicitações internas que satisfaz as condições de equilíbrio e de contorno e que não viole o critério de escoamento em nenhum ponto da estrutura fornece um limite inferior para a estimativa da capacidade de materiais elasto-plásticos perfeitos.

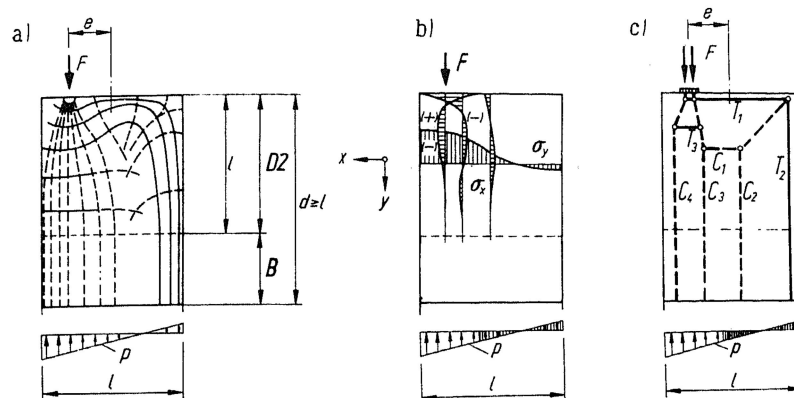
Bergmeister et al. (1993) afirmam que é fundamental ter conhecimento das hipóteses utilizadas para a formulação do modelo e lista as mais importantes:

- ✓ A falha é devido à formação de um mecanismo resultante do escoamento de um ou mais tirantes;
- ✓ O esmagamento das bielas de concreto não devem ocorrer antes do escoamento dos tirantes. Isto é evitado limitando o nível de tensões no concreto;

- ✓ Existem apenas esforços uniaxiais nas bielas ou tirantes;
- ✓ Todos os carregamentos externos devem ser aplicados nos nós do modelo. Caso haja carregamento distribuído, este deve ser substituído por forças concentradas equivalentes que representem adequadamente o modelo;
- ✓ A armadura deve ser adequadamente detalhada, prevenindo assim falhas na ligação local ou na ancoragem.

Para desenvolver modelos de bielas e tirantes em casos que se possuem a direção e o módulo das tensões elásticas, segundo Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987), pode-se orientar as bielas de acordo com as tensões principais de compressão. Também é possível posicionar as bielas ou tirantes mais importantes no centro de gravidade dos correspondentes diagramas de tensões, como ilustra a Figura 2.3.

**Figura 2.3 – Posição das bielas e tirantes a partir dos diagramas de tensão.**



Fonte: Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987).

Silva e Giongo (2000) destacam alguns aspectos para a definição geométrica do modelo. São eles: os tipos de ações atuantes, diretamente relacionados com a distribuição de tensões elásticas; os ângulos entre bielas e tirantes, determinados a partir da análise elástica; a área de aplicação das ações e reações; número de camadas da armadura; e o cobrimento da armadura. Os últimos três aspectos são utilizados para o dimensionamento das bielas e dos nós.

### 2.2.1 Dimensionamento dos tirantes

Os esforços nos tirantes geralmente são absorvidos pelas barras da armadura. Segundo Silva e Giongo (2000), o eixo da armadura deve coincidir com o do tirante do modelo. Considerando o Estado Limite Último, a área de aço necessária para resistir o esforço do tirante é dada por

$$A_s = \frac{F_{st}}{f_{yd}} \quad (2.1)$$

onde:

$A_s$  – área da seção transversal de aço;

$F_{st}$  – esforço resultante de tração de cálculo;

$f_{yd}$  – resistência, de cálculo, ao escoamento do aço ( $f_{yk}/1,15$ ).

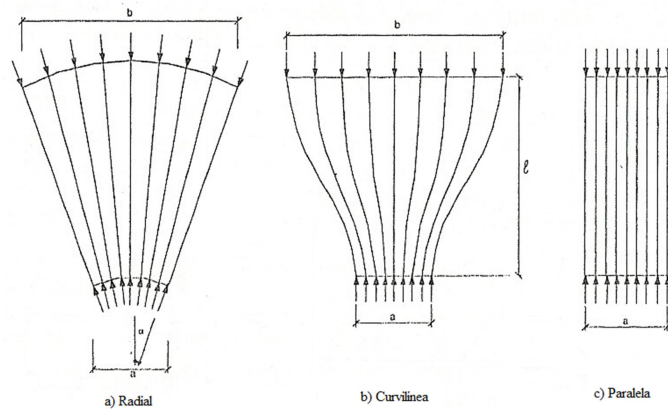
A utilização de um maior número de camadas contribui com a resistência nas regiões nodais. Também é necessário verificar as condições de ancoragem nestas regiões. O comprimento de ancoragem pode ser calculado, por exemplo, utilizando os parâmetros encontrados na NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014), porém se deve considerar a geometria dos nós.

### 2.2.2 Dimensionamento das bielas

As bielas são discretizações dos campos de compressão no concreto. Essas são idealizadas em formatos característicos, dependendo de como a distribuição de tensões ocorre no elemento. Silva e Giongo (2000) enumeram três configurações típicas de distribuições de tensões de compressão (Figura 2.4):

- ✓ Radial (“Leque”): idealização de um campo de tensão com curvatura desprezível, e conseqüentemente não se desenvolvem tensões de tração transversais.
- ✓ Linhas curvilíneas com afunilamento da seção (“Garrafa”): propagação de tensões por meio de curvaturas acentuadas, provocando tensões transversais consideráveis.
- ✓ Paralela (“Prisma”): As tensões se distribuem uniformemente, sem perturbação.

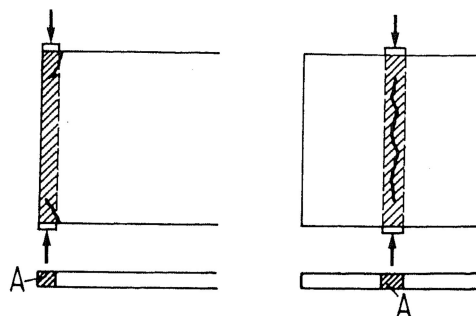
**Figura 2.4 – Configurações típicas de distribuições de tensão de compressão**



Fonte: Silva e Giongo (2000).

Como afirmam Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987), a resistência do concreto à compressão depende de seu estado multiaxial de tensões. As tensões transversais de compressão que surgem são favoráveis, principalmente se acontecer nas duas direções, enquanto que as de tração são desfavoráveis. Como já dito, a configuração curvilínea é caracterizada por apresentar tensões transversais devido a sua acentuada curvatura. É necessário então considerar estas tensões transversais, principalmente as de tração, para evitar o aparecimento de fissuras indesejáveis ou o esmagamento prematuro da seção. A Figura 2.5 apresenta a falha no concreto ao considerar-se uma configuração de tensões paralelas quando ocorre na verdade uma configuração curvilínea.

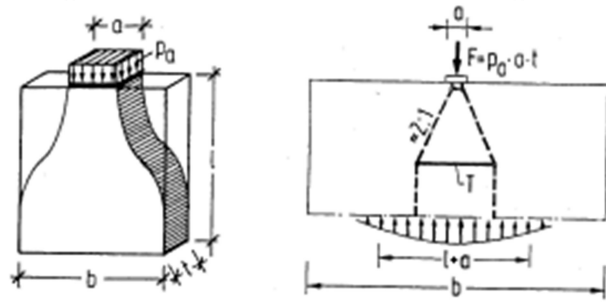
**Figura 2.5 – Falha do elemento devido a não consideração das tensões transversais**



Fonte: Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987).

Segundo Bergmeister et al. (1993), as tensões de tração transversais podem ser resistidas pelo próprio concreto, caso tenham um valor menor que a resistência à tração deste material, ou por armaduras inseridas como reforço. Para determinar o valor de tais tensões é possível representar uma biela de configuração curvilínea a partir de um modelo de bielas e tirantes secundário. A Figura 2.6 ilustra a situação.

Figura 2.6 – Representação de uma biela com configuração curvilínea



Fonte: Adaptado de Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987).

Como qualquer elemento estrutural de concreto, o dimensionamento da biela parte do princípio que a solicitação de cálculo deve ser menor que a resistência do elemento, ou seja,

$$R_d \geq S_d \quad (2.2)$$

onde:

$R_d$  - resistência de cálculo;

$S_d$  - solicitação de cálculo.

A resistência da biela ( $R_{ds}$ ) é calculada a partir de

$$R_{sd} = A_{cs} \cdot f_{cu} \quad (2.3)$$

onde:

$A_{cs}$  - área da seção transversal da biela;

$f_{cu}$  - resistência efetiva à compressão da biela.

A área da seção transversal da biela é determinada na elaboração do modelo da treliça. De acordo com a ACI 318 (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, 2005), caso a seção da biela seja variável, pode-se idealizar a mudança de seção de forma linear. Obviamente, se por toda a biela a resistência é igual, a pior situação irá ocorrer na extremidade com menor área.

A resistência efetiva da biela é menor do que a resistência efetiva dos banzos comprimidos devido a diversos fatores, entre eles, os efeitos de tração da armadura que a atravessa. Os procedimentos para se determinar a resistência efetiva das bielas e tirantes variam conforme a referência adotada. Neste trabalho serão utilizados os procedimentos

indicados pelo CEB-FIP (COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993), CSA-A23.3 (CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION, 2004), ACI 318 (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, 2005) e NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014).

➤ **ACI 318-05:**

A resistência efetiva do concreto é dada por,

$$f_{cu} = 0,85 \cdot \beta_s \cdot f'_c \cdot \phi \quad (2.4)$$

onde

$f_{cu}$  - resistência efetiva do concreto;

$\phi$  - ponderador da resistência do concreto ( $\phi = 0,75$ );

$f'_c$  - resistência característica do concreto.

O valor de  $\beta_s$  varia de acordo com a Tabela 2.1.

**Tabela 2.1 – Valores de  $\beta_s$  de acordo com a situação (ACI 318, 2005).**

Situação		$\beta_s$
Bielas com seção transversal uniforme ao longo do seu comprimento		1,00
Bielas em que a largura da seção mediana seja maior que a largura nos nós (configuração curvilínea)	Com armadura satisfazendo a tração transversal	0,75
	Sem armadura satisfazendo a tração transversal	$0,60\lambda$
Bielas em membros de tração		0,40
Para todos os demais casos		0,60

Fonte: American Concrete Institute. ACI 318 (2005).

Os valores de  $\lambda$  podem ser encontrados no item 11.7.4.3 do ACI 318 (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, 2005), e não serão abordados neste texto, pois no presente trabalho será considerada a armadura para resistir aos esforços transversais, em todos os casos.

➤ **CEB-FIP (COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993):**

A resistência de projeto de uma região sob compressão uniaxial é determinada por,

$$f_{cu} = \beta_s \cdot \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] \cdot f_{cd} \quad (2.5)$$

onde:

$f_{ck}$  - resistência característica do concreto (em MPa);

$f_{cd}$  - resistência de cálculo do concreto ( $f_{ck}/\gamma_c$ );

$\gamma_c$  - coeficiente de ponderação da resistência do concreto ( $\gamma_c = 1,5$ ).

O valor de  $\beta_s$  varia de acordo com a Tabela 2.2

**Tabela 2.2– Valores de  $\beta_s$  de acordo com a situação (CEB-FIP, 1993)**

Situação	$\beta_s$
Bielas em zonas não fissuradas	0,85
Bielas em zonas fissuradas	0,60

Fonte: Comitê Euro-International Du Beton. CEB-FIP (1993).

➤ **NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014)**

A resistência efetiva das bielas é determinada pela Equação (2.5), sendo  $\gamma_c = 1,4$  e  $\beta_s$  variando de acordo com a Tabela 2.3.

**Tabela 2.3 – Valores de  $\beta_s$  de acordo com a situação (NBR 6118, 2014).**

Situação	$\beta_s$
Bielas prismáticas	0,85
Bielas atravessadas por mais de um tirante	0,60
Bielas atravessadas por tirante único	0,72

Fonte: Associação Brasileira Normas Técnicas. NBR 6118 (2014).

➤ **CSA-A23.3 (CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION, 2004):**

Os valores sugeridos para a resistência das bielas são determinados por,

$$f_{cu} = \frac{f'_c}{0,8 + 170\varepsilon_1} \leq 0,85 \cdot f'_c \quad (2.6)$$

em que

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + 0,002) \cdot \cotg^2\theta \quad (2.7)$$

e

$$\varepsilon_s = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (2.8)$$

onde:

$\varepsilon_1$  - deformação de tração na direção perpendicular à biela;

$\varepsilon_s$  - deformação média na barra de armadura que atravessa a biela;

$\theta$  - ângulo entre as bielas e a barra de armadura que a atravessa;

$E_s$  - módulo de elasticidade do aço.

É importante ressaltar que, segundo o código normativo CSA-A23.3 (CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION, 2004), o valor de  $f_{cu}$  ainda deve ser multiplicado pelo fator de segurança do concreto,  $\phi_c = 0,6$ .

### 2.2.3 Dimensionamento dos nós

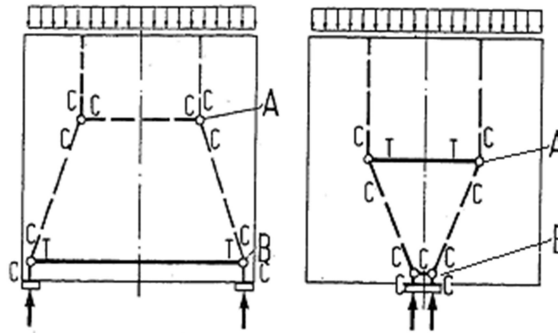
No modelo, os nós são utilizados para conectar as barras de bielas e tirantes, além de ser o local de aplicação das forças concentradas. Porém, esses são apenas simplificações do que ocorre da realidade. Enquanto no modelo de bielas e tirantes há uma abrupta mudança de direção das forças, em um elemento estrutural de concreto armado, esta mudança ocorre ao longo de certo comprimento e largura.

Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) classificam os nós em dois tipos: contínuos e singulares. Os nós contínuos são aqueles que ligam campos de compressão amplos no concreto ou tração em tirantes que representam barras de aço bem distribuídas. Nesses o desvio das forças acontece em certo comprimento, tornando a mudança de direção mais suave. Já os nós singulares, são aqueles onde as bielas ou tirantes representam campos de



tensão concentrados. Nesses o desvio das forças acontece de forma localizada e concentrada. Na Figura 2.7 ilustram-se exemplos destes tipos de nós.

**Figura 2.7 – Exemplos de nós contínuos (A) e singulares (B)**

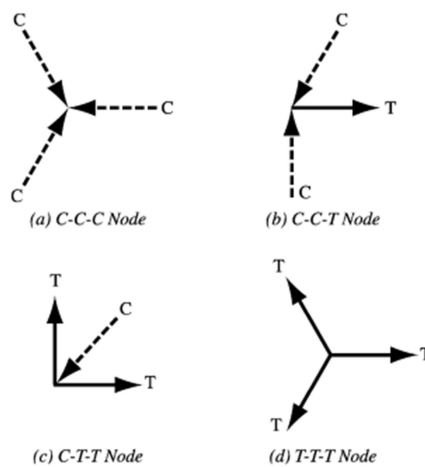


Fonte: Adaptado de Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987)

As regiões D geralmente apresentam os dois tipos de nós. Segundo Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) é desnecessária a verificação das tensões no concreto em nós contínuos, caso seja garantida uma ancoragem segura. O Comitê Euro-International du Beton - CEB-FIP (1993 apud SILVA; GIONGO, 2000) compartilha desta ideia e afirma que verificação das tensões no nó dentro da estrutura só é necessária em casos de descontinuidades geométricas. Afirma ainda que as tensões de compressão nos nós só precisam ser verificadas onde forças concentradas são aplicadas à superfície do elemento estrutural.

Os nós também podem ser classificados quanto aos campos de tensão que neles atuam. A Figura 2.8 ilustra os tipos de nós de acordo com tal classificação.

**Figura 2.8 – Classificação dos nós**



Fonte: American Concrete Institute. ACI 318 (2005).

O dimensionamento dos nós singulares acontece de forma semelhante ao dimensionamento das bielas. Calcula-se a resistência nas faces do nó por

$$R_{nd} = A_{cn} \cdot f_{cn} \quad (2.9)$$

onde:

- $R_{nd}$  – resistência de cálculo da região nodal;
- $A_{cn}$  – área da face da região nodal;
- $f_{cn}$  – resistência efetiva à compressão da região nodal.

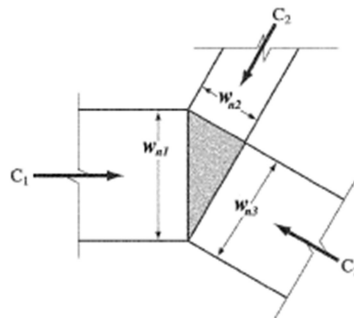
E verifica-se a integridade da região nodal a partir da Equação (2.2).

As faces da região nodal que precisam ser verificadas e as suas respectivas áreas são determinadas na etapa de definição da geometria do modelo, de acordo com o tipo de nó que está sendo verificado.

➤ **Nó-CCC:**

Para o dimensionamento de um nó do tipo CCC é preciso verificar a tensão em cada face do nó. Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) comentam sobre a possibilidade de uma idealização de um estado hidrostático plano. Este estado se caracteriza por apresentar forças perpendiculares às faces dos nós e tensões uniformes e iguais em todas as faces carregadas, como ilustra a Figura 2.9. Neste caso seria apenas necessário verificar uma face do nó, já que nas outras as tensões seriam iguais. No entanto, nem todas as geometrias se comportam desta forma. Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) dizem que esta idealização é satisfatória desde que a relação entre as tensões nas faces não seja menor que 0,50.

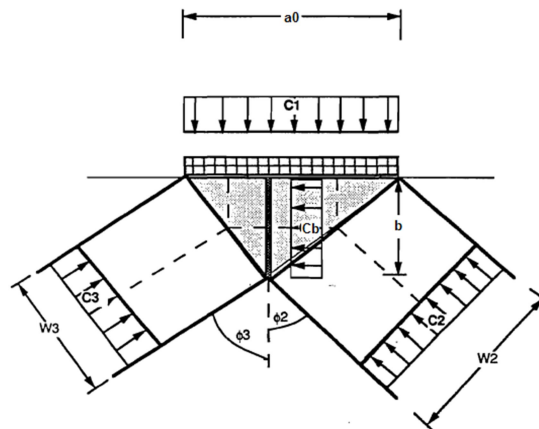
**Figura 2.9 – Nó-CCC em estado hidrostático plano**



Fonte: American Concrete Institute. ACI 318 (2005).

Um caso muito comum de nós do tipo CCC é ilustrado da Figura 2.10. Schäfer e Schlaich (1988) propõem, também, analisar a tensão  $\sigma_b$ , além da tensão nas três faces do nó.

Figura 2.10 – Caso de nó-CCC



Fonte: Bergmeister et al. (1993).

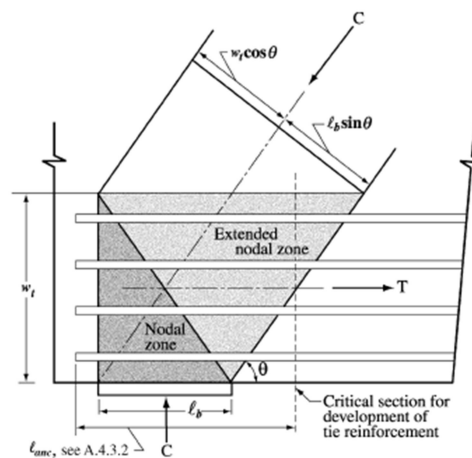
Neste caso, sabendo o valor da largura da face de aplicação da carga ( $a_0$ ) e a dimensão  $b$  que limita a biela transversal, é possível encontrar as espessuras das faces limitadas pelas bielas a partir de

$$w_s = \frac{a_0}{2} \operatorname{sen} \phi + b \cos \phi \quad (2.10)$$

➤ **Nó-CCT:**

Para o dimensionamento de nós do tipo CCT, é considerada a zona nodal estendida que representa os limites da espessura efetiva da biela,  $w_s$ , e do tirante,  $w_t$ , como ilustra a Figura 2.11.

Figura 2.11 – Zona nodal estendida e caso de nó-CCT



Fonte: American Concrete Institute. ACI 318 (2005).

A espessura da biela pode ser calculada a partir de

$$w_s = l_b \cdot \text{sen}\theta + w_t \cdot \text{cos}\theta \quad (2.11)$$

onde:

$l_b$  - largura do apoio;

$\theta$  - ângulo entre a biela e a barra de armadura que a atravessa.

Já a espessura do tirante é calculada por

$$w_t = n \cdot s + 2 \cdot c_1 \quad (2.12)$$

em que

$$c_1 \leq \begin{cases} d' \\ \frac{c_2}{2} \end{cases} \quad (2.13)$$

onde:

$n$  - número de camadas de barras de aço;

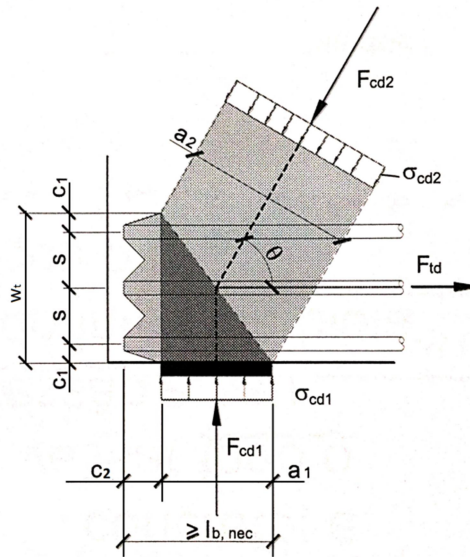
$s$  - espaçamento entre camadas de barras de aço;

$d'$  - distância entre a face do elemento e o eixo da barra de aço mais próxima;

$c_2$  - comprimento que a barra de aço avança após o final do nó.

A Figura 2.12 ilustra os parâmetros acima.

Figura 2.12 – Parâmetros para calcular  $w_t$



Fonte: Adaptado de Santos (2013).

No ACI (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, 2005), é afirmado, ainda, que no caso de apenas uma camada de barras de aço, a espessura do tirante pode ser considerada como a soma do diâmetro das barras e duas vezes o cobrimento até a face do elemento de concreto.

Os demais tipos de nós não serão abordados neste trabalho. O procedimento de dimensionamento destes nós pode ser encontrado nas referências citadas ao longo deste texto.

Os procedimentos para se determinar a resistência efetiva dos nós também variam conforme a referência, porém são diferentes dos utilizados para as bielas. Os parâmetros de resistência nos nós, adotados neste trabalho, são retirados das mesmas referências utilizadas para as bielas.

➤ **ACI 318-05:**

A resistência efetiva do concreto é dada por

$$f_{cn} = 0,85 \cdot \beta_n \cdot f'_c \cdot \phi \quad (2.14)$$

O valor de  $\beta_n$  varia de acordo com a Tabela 2.4.

**Tabela 2.4 – Valores de  $\beta_n$  de acordo com a situação (ACI 318, 2005).**

Situação	$\beta_n$
Zonas nodais limitadas por bielas ou apoios	1,00
Zonas nodais ancorando um tirante	0,80
Zonas nodais ancorando dois ou mais tirantes	0,60

Fonte: American Concrete Institute. ACI 318 (2005).

➤ **CEB-FIP (COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993):**

A resistência de projeto de uma região sob compressão uniaxial é determinada por

$$f_{cn} = \beta_n \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} \quad (2.15)$$

onde:

$f_{ck}$  - resistência característica do concreto (em MPa);

$f_{cd}$  - resistência de cálculo do concreto ( $f_{ck}/\gamma_c$ );

$\gamma_c$  - coeficiente de ponderação da resistência do concreto ( $\gamma_c = 1,5$ ).

O valor de  $\beta_n$  varia de acordo com a Tabela 2.5.

**Tabela 2.5– Valores de  $\beta_n$  de acordo com a situação (CEB-FIP, 1993).**

Situação	$\beta_n$
Nós onde confluem apenas bielas	0,85
Nós em que barras tracionadas são ancoradas	0,60

Fonte: Comité Euro-International Du Beton. CEB-FIP (1993)

➤ **NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICA, 2014)**

A resistência efetiva das regiões nodais é determinada pela equação (2.15), sendo  $\gamma_c = 1,4$  e  $\beta_n$  variando de acordo com a Tabela 2.6.

**Tabela 2.6 – Valores de  $\beta_n$  de acordo com a situação (NBR 6118, 2014).**

Situação	$\beta_n$
Nós CCC	0,85
Nós CTT e TTT	0,60
Nós CCT	0,72

Fonte: Associação Brasileira Normas Técnicas. NBR 6118 (2014).

➤ **CSA-A23.3 (2004):**

A resistência efetiva do concreto é dada por

$$f_{cn} = 0,6 \cdot \beta_n \cdot f'_c \quad (2.16)$$

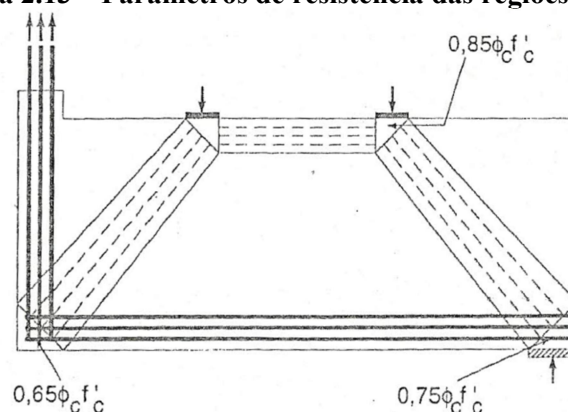
O valor de  $\alpha$  varia de acordo com a Tabela 2.7 e as situações descritas são ilustradas na Figura 2.13.

**Tabela 2.7 – Valores de  $\beta_n$  de acordo com a situação (CSA-A23.3, 2004).**

Situação	$\beta_n$
Zonas nodais limitadas por bielas ou áreas de aplicação de ação ou reação	0,85
Zonas nodais ancorando um tirante em uma única direção	0,75
Zonas nodais ancorando tirantes em mais de uma direção	0,65

Fonte: Canadian Standards Association. CSA-A23.3 (2004).

**Figura 2.13 – Parâmetros de resistência das regiões nodais**



Fonte: Canadian Standards Association. CSA-A23.3, (1994 apud SILVA; GIONGO, 2000)

## 2.3 Dimensionamento de blocos sobre uma estaca

Na prática, os blocos sobre uma estaca são dimensionados considerando a teoria dos blocos parcialmente carregados para o cálculo da resistência à compressão no concreto e da armadura resistente das tensões de fendilhamento que ocorrem no centro do bloco.

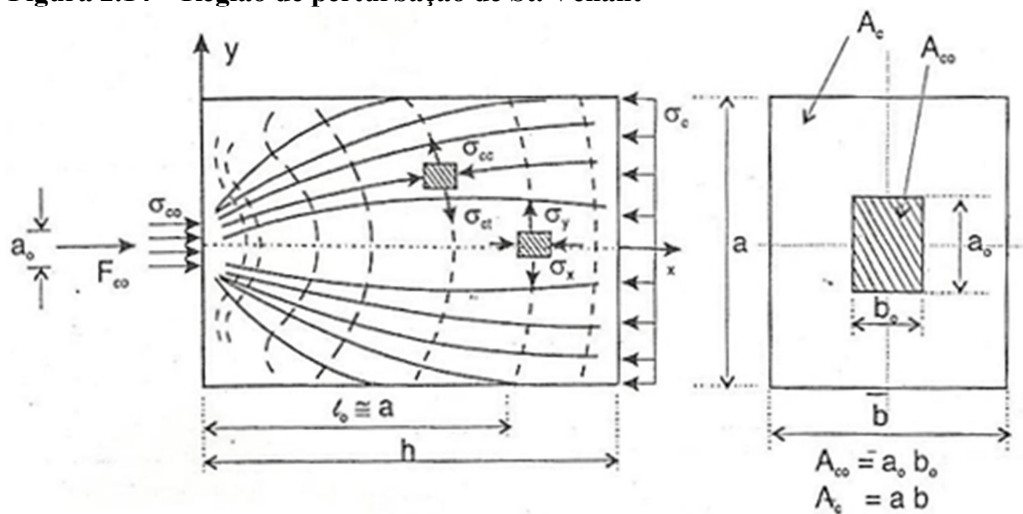
É considerada, também, uma chamada armadura principal, que considera a diferença entre as dimensões do pilar e da estaca, que leva ao surgimento de tensões de tração na face superior ou inferior do bloco.

### 2.3.1 Teoria de blocos parcialmente carregados

São chamados blocos parcialmente carregados aqueles em que forças concentradas ou distribuídas em uma área relativamente pequena atuam sobre o mesmo. Leonhardt e Mönnig (1978) dizem que em geral estas forças agem como influências externas às estruturas. Como exemplos têm as cargas de roda, cargas de pilares, etc.

Segundo Fusco (2003), pelo fato da força ser aplicada em uma área parcial, o material do bloco fica sujeito a estados múltiplos de tensão. Isso acontece até que após certo comprimento de introdução  $\ell_0$  (comprimento de regularização) se produz uma distribuição uniforme de tensões. Este comprimento é da ordem de grandeza da maior dimensão “a” da seção em que é aplicada a força. A região descrita é denominada região de perturbação de St. Venant (Figura 2.14).

Figura 2.14 – Região de perturbação de St. Venant



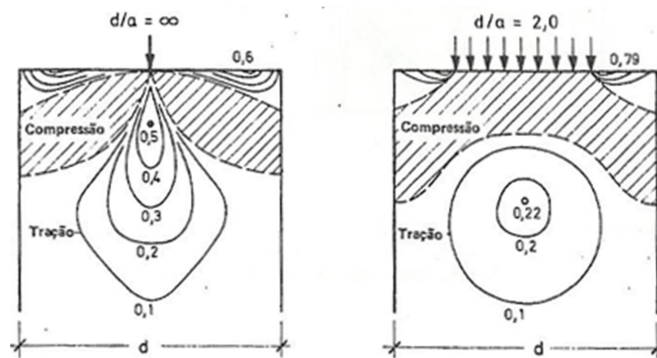
Fonte: Fusco (2003).



Fusco (2003) ainda afirma que ao longo do eixo da peça, na direção longitudinal, a tensão  $\sigma_x$  será sempre de compressão. Nas duas direções transversais, as tensões  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  serão de compressão apenas nas imediações da face de carregamento, sendo de tração no restante do comprimento de perturbação.

Leonhardt e Mönnig (1978) dizem que estas tensões transversais são chamadas de tensões de fendilhamento. Lembram também que surgem nos chamados “cantos mortos”, próximos à área carregada, tensões de tração oblíquas e, nas superfícies externas, tensões de tração de bordo, capazes de provocar a fissuração do concreto (Figura 2.15).

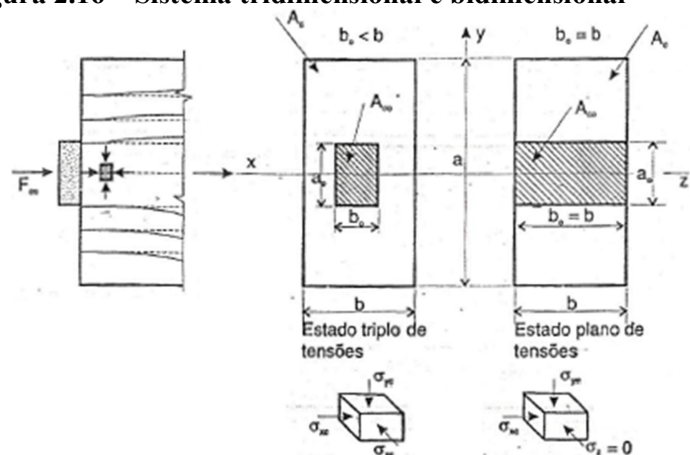
**Figura 2.15 – Isóbaras das tensões**



Fonte: Leonhardt e Mönnig, (1978).

O sistema parcialmente carregado pode ser considerado bidimensional ou tridimensional. Leonhardt e Mönnig (1978) afirmam que quando a peça de concreto for delgada ou a área carregada se estender por toda ou quase toda a espessura da peça, o sistema deve ser considerado plano, caso não ocorra deve ser considerado em estado triplo de tensões (Figura 2.16)

**Figura 2.16 – Sistema tridimensional e bidimensional**



Fonte: Fusco (2003).

Leonhardt e Mönning (1978) ainda afirmam que se a área sobre a qual a carga atua for muito menor que a área superficial da peça, o concreto só rompe caso a pressão for muito maior que a resistência cúbica à compressão, porque, sob a área carregada, surge uma compressão transversal em uma ou duas direções, dependendo se é um caso bidimensional ou tridimensional. Esta compressão acontece devido à existência de massa de concreto não sujeita a ações externas ao redor da área carregada, gerando um efeito de confinamento.

Os blocos são considerados livres da possibilidade de rompimento por compressão excessiva caso a condição expressa na Equação (2.2) seja obedecida, considerando a resistência à compressão do concreto descrita por

$$R_d = A_{co} \cdot f_{cd}^* \quad (2.17)$$

com

$$f_{cd}^* = f_{cd} \cdot \sqrt{\frac{A_{c1}}{A_{c0}}} \leq 3,3 \cdot f_{cd} \quad (2.18)$$

onde:

$A_{co}$  - área de aplicação de carga (área do pilar);

$A_{c1}$  - área máxima de mesma forma e mesmo centro de gravidade que  $A_{co}$ , inscrita na área que está sendo aplicada a carga (seções homotéticas);

$f_{cd}^*$  - resistência efetiva do concreto considerando-se o efeito de confinamento;

Caso a resistência do concreto seja inferior ao carregamento, é comum a utilização de uma armadura complementar de cintamento que aumenta o confinamento no elemento. A formulação para determinação desta armadura pode ser encontrada em Fusco (2003), porém não faz parte do escopo deste trabalho.

Já a armadura de fendilhamento está presente em todos os blocos parcialmente carregados e deve ser determinada por

$$F_{st} = 0,3 \cdot \left(1 - \frac{a_o}{a}\right) \cdot S_d \quad (2.19)$$

onde:

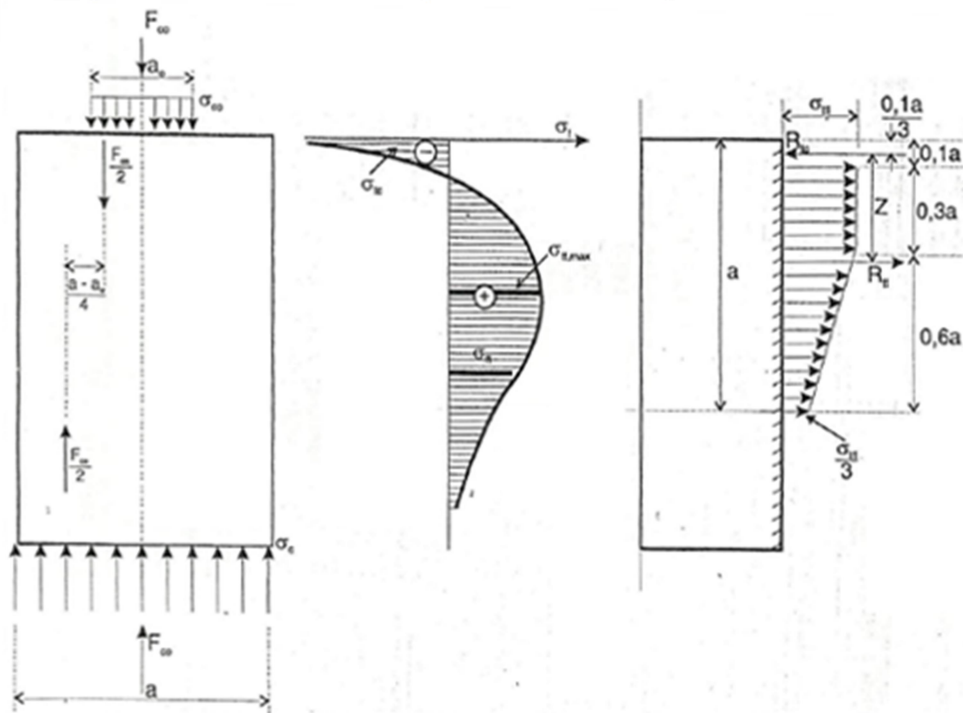
$a_o$  - largura da região de aplicação de carga;

$a$  - largura do bloco;

$S_d$  - solicitação de cálculo.

Fusco (2003) cita o método simplificado proposto por Langendonck, o qual afirma que a resultante das tensões de tração transversal no bloco,  $F_{ST}$ , pode ser encontrada seguindo a Equação (2.19). Este método considera uma distribuição de tensões transversais no bloco, como ilustrado na Figura 2.17.

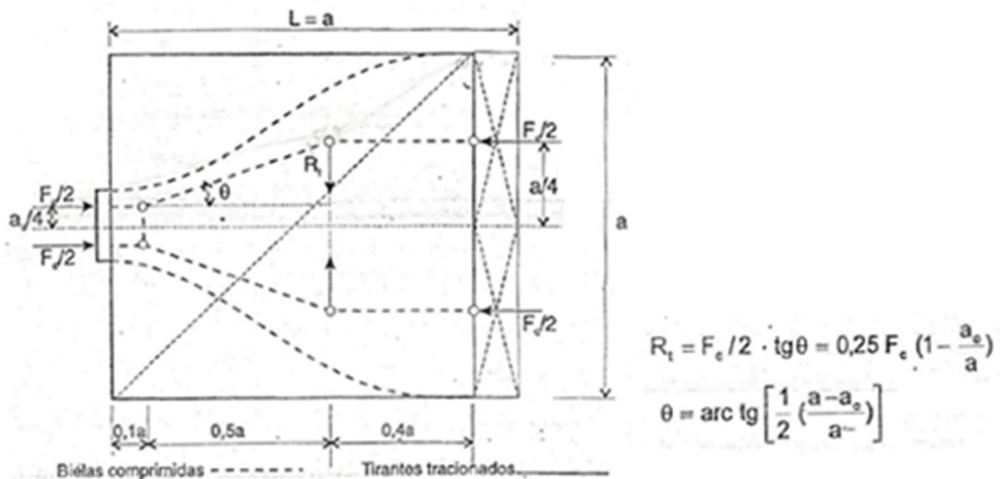
**Figura 217 – Diagrama de tensões do bloco parcialmente carregado**



Fonte: Fusco (2003).

O modelo de bielas e tirantes que representa a distribuição dos esforços nas zonas de regularização, ilustrado na Figura 2.18, conduz a resultados bastante semelhantes aos dados pela Equação (2.19). Opta-se por utilizar o procedimento simplificado de Langendonck por ser mais conservador.

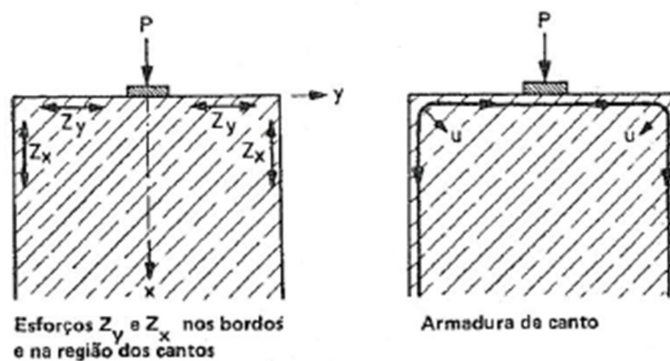
Figura 2.18 – Modelo de bielas e tirantes e tirantes em zonas de regularização



Fonte: Fusco (2003).

Os esforços de canto e de borda citados anteriormente são absorvidos dimensionando-se uma armadura, como ilustra a Figura 2.19, para resultantes  $Z_y$  e  $Z_x$ . Leonhardt e Mönnig (1978) dizem que estes esforços podem ser encontrados de forma simplificada, considerando-os 15% e 10% da força aplicada, respectivamente. Esta armadura não será dimensionada no presente trabalho.

Figura 2.1 – Esforços de tração nas bordas e armadura correspondente

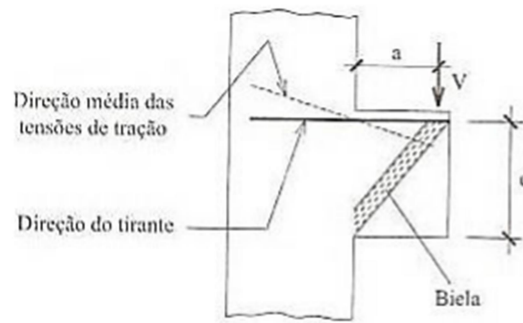


Fonte: Leonhardt e Mönnig (1978).

### 2.3.2 Armadura principal

A armadura principal é calculada por analogia ao modelo de bielas e tirantes para consolos curtos, ilustrado na Figura 2.20.

**Figura 2.20 – Idealização do modelo de consolos curtos**



Fonte: El Debs (2000).

A área de aço necessária para o tirante é determinado por

$$A_{s,tir} = \frac{V_d a}{f_{yd} d} \quad (2.20)$$

onde:

$V_d$  - solicitação de cálculo;

$f_{yd}$  - tensão de escoamento de projeto do aço.

Analisando a Figura 2.21, percebe-se que fazendo

$$a = \frac{Ap - Ae}{4} \quad (2.21)$$

e

$$Vd = \frac{Fd}{2} \quad (2.22)$$

tem-se

$$A_{s,tir} = \frac{Fd}{2} \frac{1}{df_{yd}} \frac{Ap - Ae}{4} \quad (2.23)$$

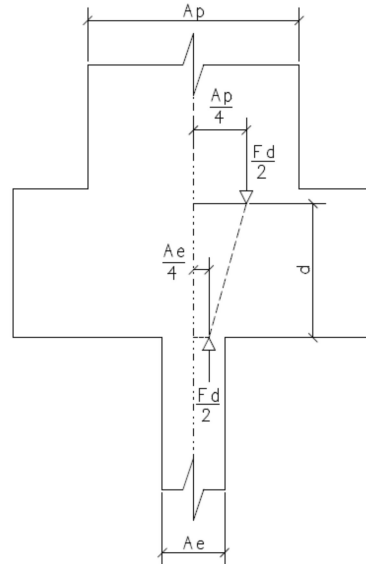
onde:

$Ap$  - dimensão do pilar na direção analisada;

$Ae$  - dimensão da estaca na direção analisada;

$F_d$  - carga do pilar.

**Figura 2.21 – Modelo de consolo curto adaptado para blocos de uma estaca**

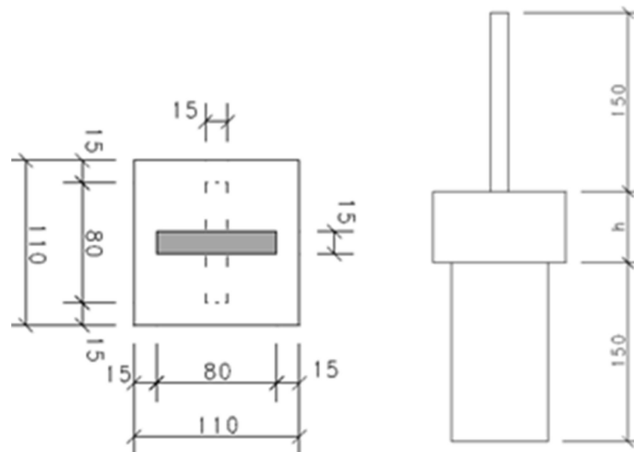


Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 2.4 Análise do campo de tensões em blocos de transição entre pilares rotacionados

Como dito anteriormente, para a proposição de um modelo de bielas e tirantes para o dimensionamento do bloco de transição entre pilares rotacionados, considera-se como referência as análises numéricas elásticas, com geometria ilustrada na Figura 2.22, realizadas em Guillou (2011). Nestas análises, observou-se que a propagação ou caminho das tensões conserva características advindas da teoria dos blocos parcialmente carregados (Fusco, 2003), porém apresentando alguns aspectos particulares.

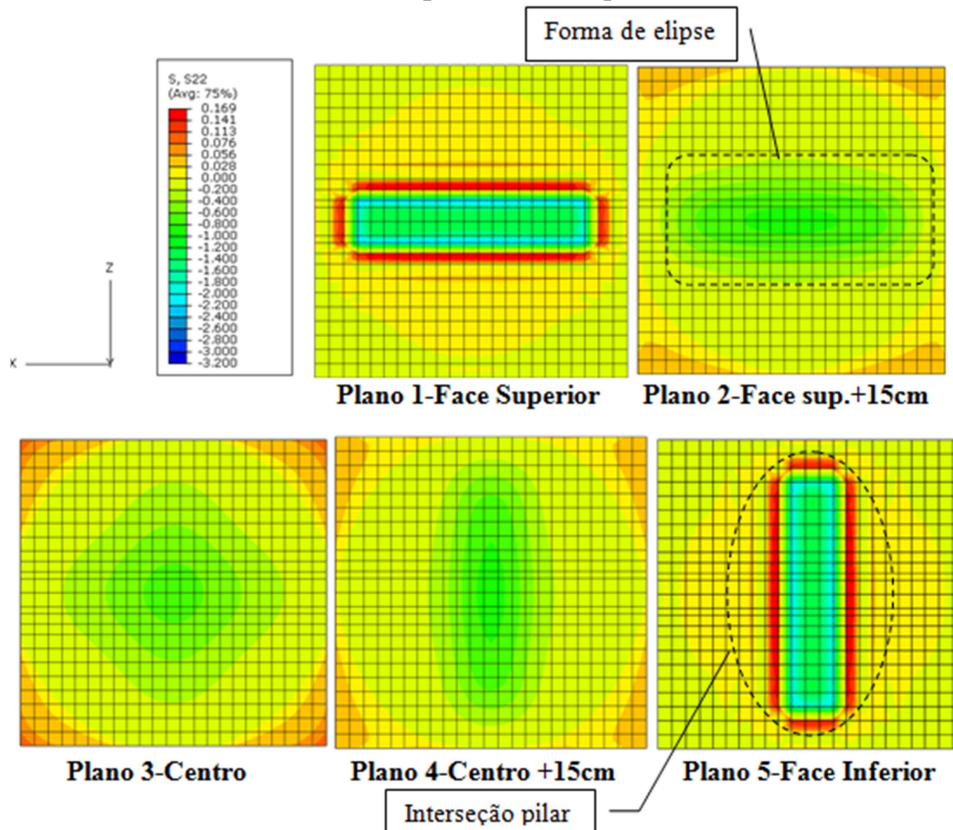
**Figura 2.22 – Geometria do modelo analisado em Guillou (2011)**



Fonte: Guillou (2011).

Para a teoria citada, é sabido que no bloco a tensão principal é de compressão. É observado nos modelos que a tensão provinda da seção superior do pilar se espalha tendendo a uniformizar-se e depois torna a concentrar-se na seção inferior. A Figura 2.23 ilustra como este fenômeno ocorre em um bloco com altura igual a 60,0 cm, mostrando a distribuição de tensões verticais ao longo da altura do bloco.

**Figura 2.23 – Tensão vertical de compressão ao longo da altura do bloco**

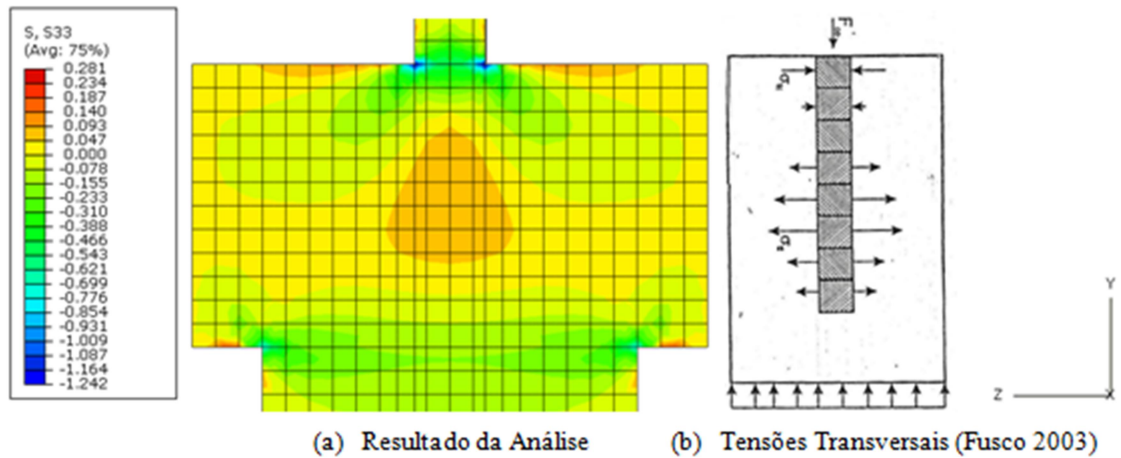


Fonte: Guillou (2011)

O comportamento descrito acima é comum quando se varia a altura, porém, como a altura influencia no espalhamento da carga, é evidente que haverá diferenças quanto à uniformização das tensões. Para alturas muito baixas o bloco se comporta de forma diferente.

Também é evidenciado que ao longo do eixo do elemento as tensões se comportam de forma semelhante ao que Fusco (2003) prediz. A tensão na direção longitudinal será sempre de compressão, enquanto que nas direções transversais acontecerá compressão nas imediações da face de carregamento e tração no restante do bloco. Observa-se, porém, que próximo ao pilar inferior existem tensões de compressão se concentrando principalmente nos vértices da interseção do pilar com o bloco. Isto acontece devido ao efeito de punção e por consequência do espalhamento, que ainda acontece, apesar de ser pouco (Figura 2.24).

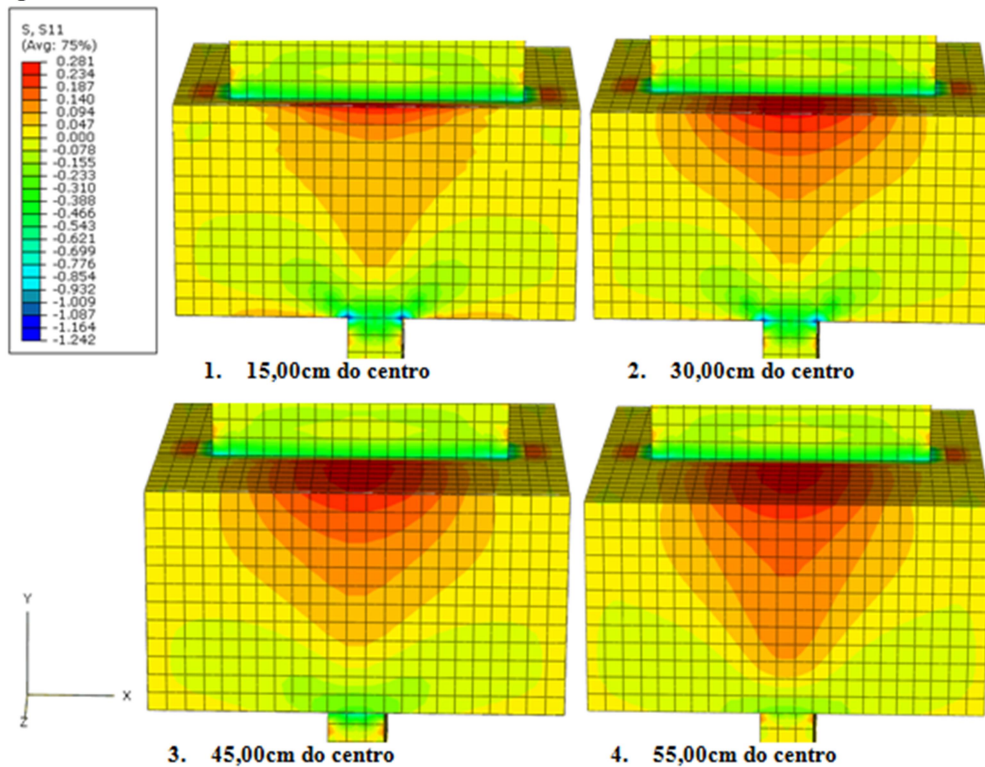
Figura 2.24 – Comportamento das tensões transversais no plano ZY central do bloco



Fonte: Guillou (2011).

Apesar dos comportamentos ao longo do eixo destes blocos de transição serem semelhantes ao da teoria dos blocos parcialmente carregados (Fusco, 2003), ao se afastar do centro percebem-se trações transversais relevantes que não são consideradas na teoria citada. A Figura 2.25 ilustra como estas tensões se comportam quando se afasta do centro do bloco.

Figura 2.25 – Tensão transversal fora do eixo de transição

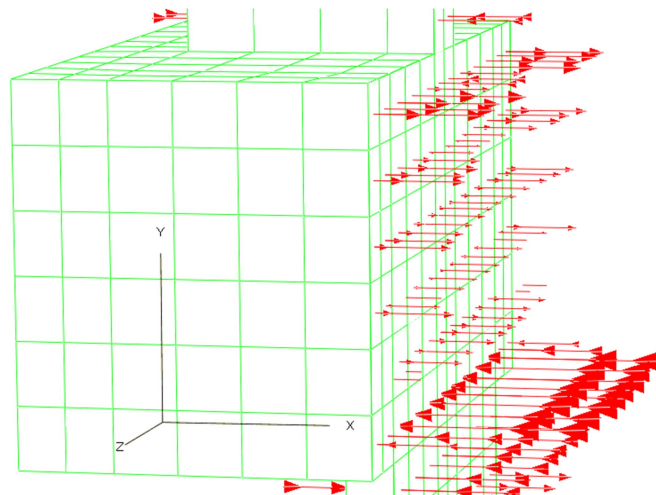


Fonte: Guillou (2011).



Como pode ser observada, a tração se concentra na superfície próxima ao pilar, e se espalha ao longo da altura do bloco ao passo que se afasta do centro. No mais, é fato que os maiores valores se encontram na superfície, o que leva a conclusão de que é preciso uma concentração de armadura na superfície superior do bloco. A Figura 2.26 ilustra as tensões através de vetores.

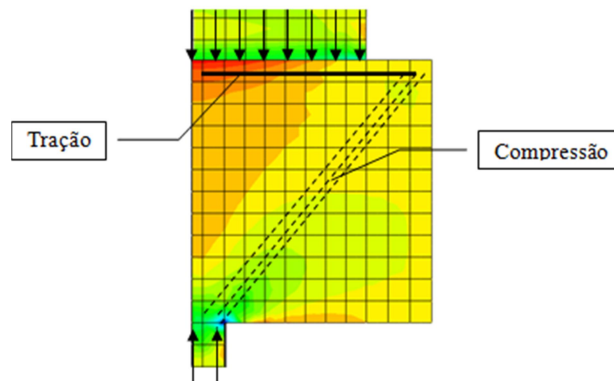
**Figura 2.26 – Tensões na direção X do bloco**



Fonte: Guillou (2011).

Dividindo-se o bloco e considerando as seções do pilar como cargas, como ilustra a Figura 2.27, vê-se um sistema em balanço, no qual o bloco se comporta como um consolo, tracionando na horizontal e comprimindo a diagonal. Tal efeito reitera a importância do cálculo da armadura principal para blocos sobre uma estaca, descrita na Subseção 2.3.2, quando a dimensão da estaca e do pilar são significativamente diferentes.

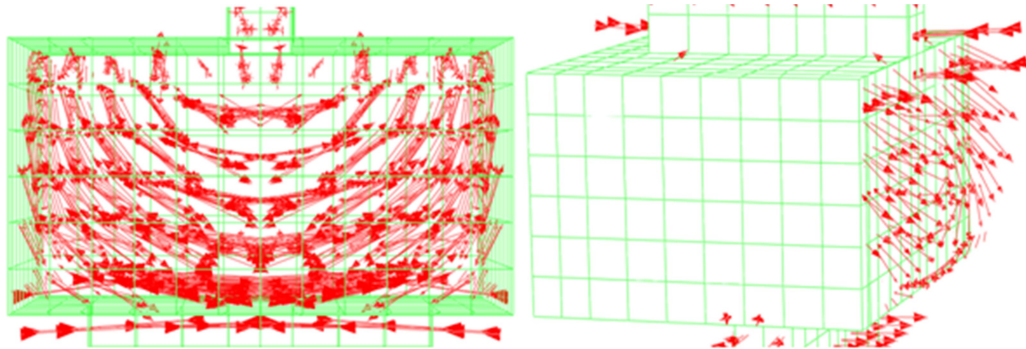
**Figura 2.27 – Comportamento do bloco semelhante a um consolo**



Fonte: Guillou (2011).

O fluxo das tensões máximas do bloco de 60,0 cm de altura está ilustrado na Figura 2.28. É possível verificar a mudança de direção dos vetores, na qual os vetores são perpendiculares ao plano na parte superior e paralelos na inferior, seguindo a direção da maior dimensão do pilar.

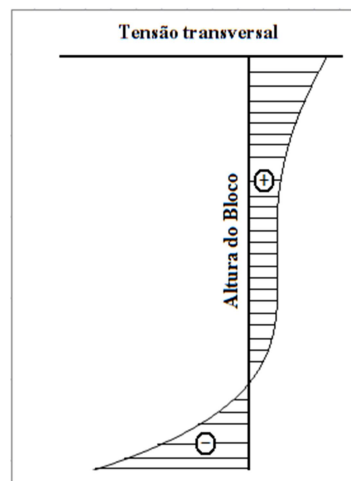
**Figura 2.28 – Tensões principais máximas**



Fonte: Guillou (2011).

Analisando os cortes nos diversos planos, observa-se que, com exceção do plano central, os blocos apresentam características gerais, quanto às tensões transversais, ilustrado na Figura 2.29. Os blocos, então, são considerados sujeitos a uma compressão de confinamento em uma extremidade seguida por tração no restante, havendo um pico de tração na outra extremidade.

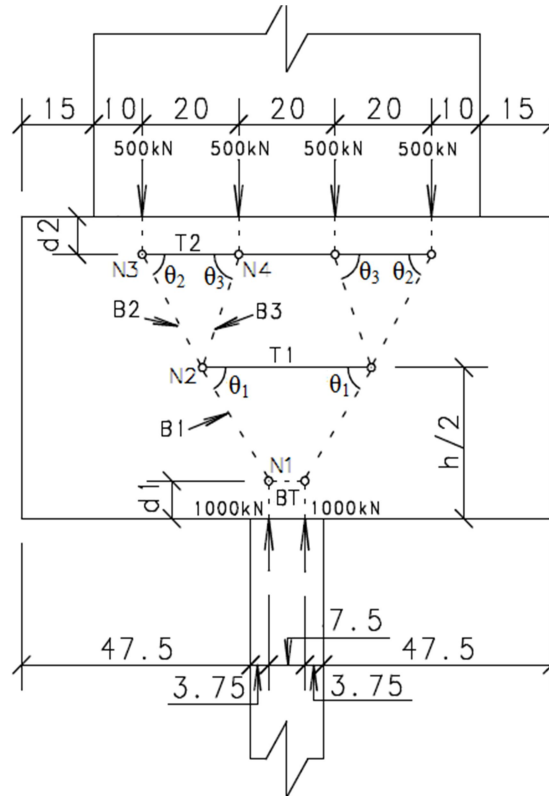
**Figura 2.29 – Diagrama genérico das tensões transversais –  $\sigma_x$**



Fonte: Guillou (2011).

A partir do campo de tensões estudado, foi proposto um modelo plano de bielas e tirantes como mostra a Figura 2.30.

**Figura 2.30 – Parâmetros para a definição geométrica dos modelos (medidas em cm)**



Fonte: Guillou (2011).

Em seguida, foram determinados os esforços para o modelo de bielas e tirantes e comparados com os obtidos no de elementos finitos. Observou-se que os esforços nas bielas no modelo de bielas e tirantes foram superiores aos do modelo em elementos finitos, enquanto que nos tirantes essa diferença era menor, como mostra a Tabela 2.8.

**Tabela 2.8 – Relação entre os esforços no modelo de bielas e tirantes e resultantes da análise numérica**

Modelo	Altura (cm)	Rbt (kN)		Rt1 (kN)		Rt2 (kN)	
		Máx	Méd	Máx	Méd	Máx	Méd
3	45	2,08	2,13	2,16	2,27	1,15	1,20
4	60	1,72	1,90	1,29	1,52	1,00	1,12
5	75	1,61	1,70	1,06	1,10	1,05	1,18
6	90	1,35	1,43	0,82	0,85	1,47	1,56

Fonte: Adaptado de Guillou (2011).

Os valores máximos da Tabela 2.8 são referentes aos maiores valores encontrados nos diversos planos analisados, enquanto que os médios são as médias aritméticas dos mesmos planos. Os modelos descritos (3, 4, 5 e 6) diferenciam-se apenas pela variação de altura.

A partir dessas observações, verificou-se, então, a necessidade de investigação de um modelo mais adequado, tendo em vista que se trata de um elemento de volume, e, portanto, acredita-se que uma melhor estimativa poderia ser obtida em um modelo tridimensional de bielas e tirantes.

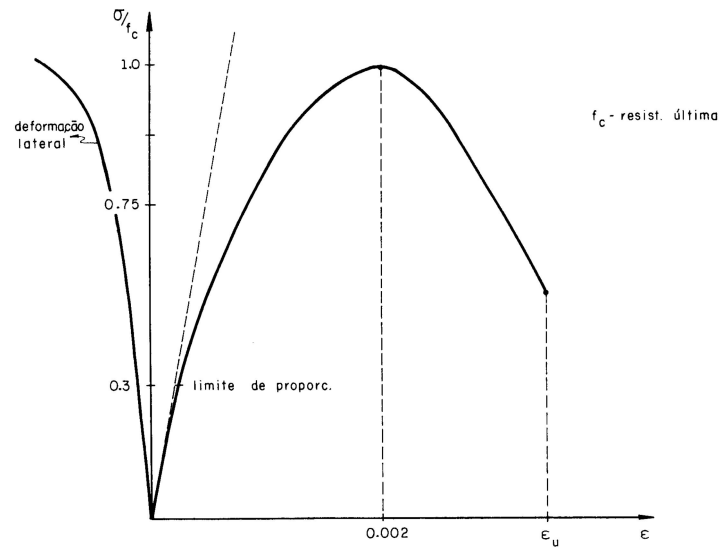
## **2.5 Considerações gerais sobre o comportamento mecânico do concreto**

Apesar de todas as simplificações feitas para a análise do concreto, sabe-se que este é um material compósito, heterogêneo, anisotrópico, não linear e que apresenta microfissuras antes mesmo de submetido a carregamentos externos.

Segundo Proença (1988), a microfissuração inicial e a sua propagação durante o processo de carregamento são responsáveis pelo comportamento não linear do concreto. Deve-se ressaltar que, basicamente, a propagação de fissuras ocorre devido à diferença entre as características mecânicas dos agregados graúdos e a argamassa, e essas se manifestam principalmente na interface destes dois.

A curva tensão-deformação obtida a partir de um ensaio uniaxial é ilustrada na Figura 2.31. É observado que até 30% da resistência à compressão  $f_c$ , caracteriza-se uma fase praticamente elástica, onde o acréscimo de tensão não afeta significativamente a configuração prévia de microfissuração. Entre 30 e 75%, desenvolve-se a fase principal, na qual passam a haver escorregamentos na pasta de cimento responsáveis pela maior parcela de “plastificação”.

**Figura 2.31 – Diagrama tensão-deformação compressão uniaxial**

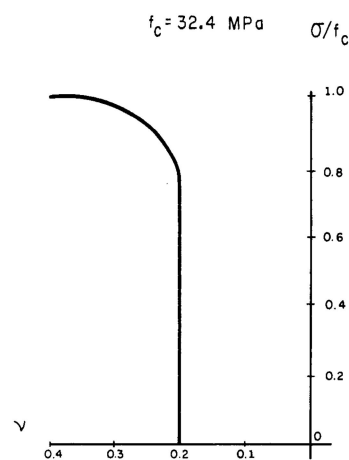


Fonte: Proença (1988).

Acima de 75% há uma interação entre as microfissuras, transformando-se em fissuras propriamente ditas. Após a resistência última, a curva apresenta um trecho descendente, no qual mesmo com o decréscimo de tensão há o aumento de deformação, chegando até a deformação última ou esmagamento do concreto.

A partir do ensaio de compressão uniaxial, sabe-se ainda que o módulo de elasticidade do concreto depende da resistência à compressão e que um valor representativo para o coeficiente de Poisson é 0,2, como mostrado na Figura 2.32.

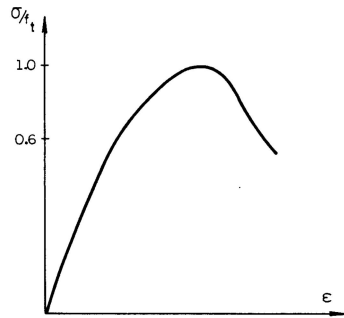
**Figura 2.32 – Coeficiente de Poisson**



Fonte: Proença (1988).

Já o diagrama tensão-deformação obtido em um ensaio de tração uniaxial é mostrado na Figura 2.33. Observa-se que até 60% da tensão máxima de tração a evolução de novas microfissuras é desprezível, enquanto que a direção de propagação é transversal à direção da tensão. A parte descendente da curva é difícil de ser acompanhada por conta da rápida propagação de fissuras nesta fase.

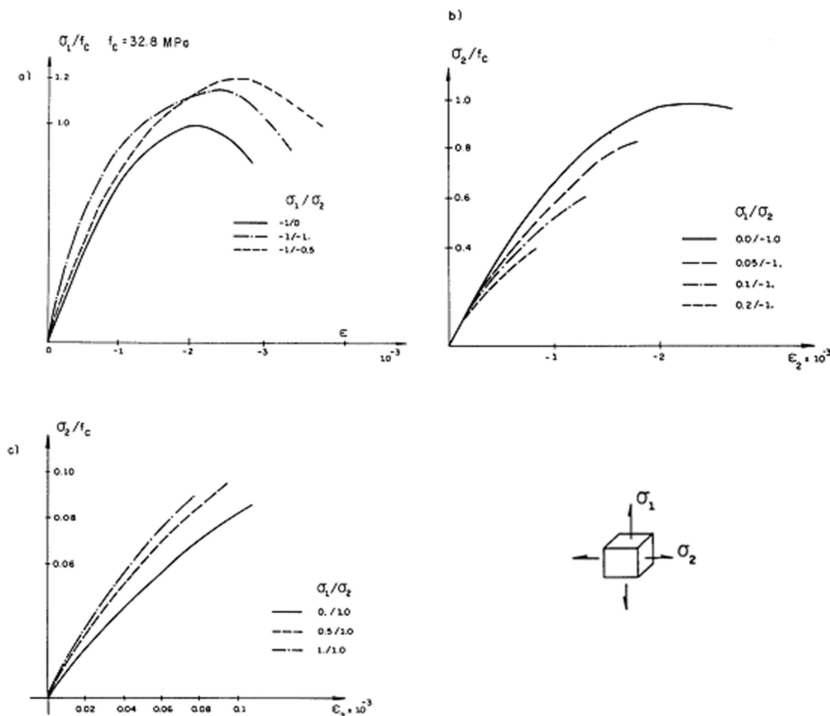
**Figura 2.33 – Tração uniaxial**



Fonte: Proença (1988).

Quanto ao comportamento do concreto em estados biaxiais de tensão, sabe-se que quando submetido à compressão nas duas direções há o aumento da resistência e da ductilidade. Quando submetido a tensões de compressão em uma direção e de tração na outra, há a diminuição da resistência e da ductilidade. Quando submetido à tração biaxial, a ductilidade diminui, porém a resistência permanece praticamente inalterada (Figura 2.34).

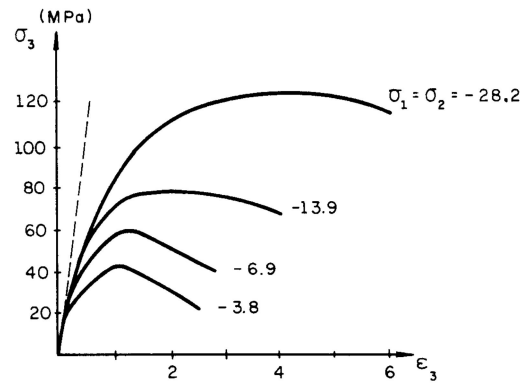
**Figura 2.34 – Estados biaxiais de tensões**



Fonte: Adaptado de Proença (1988).

Quando submetido a um estado triaxial de tensões de compressão, as curvas tensão-deformação apresentam-se como é mostrado na Figura 2.35. De forma geral, percebe-se que a resistência axial cresce com o aumento da pressão de confinamento.

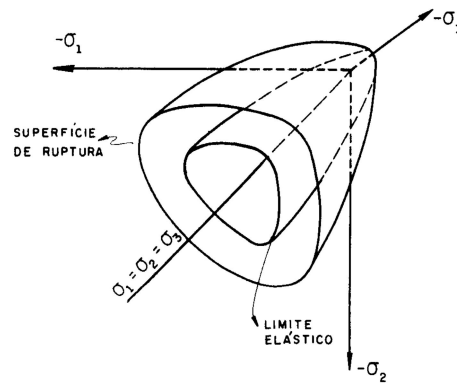
**Figura 2.35 – Estados triaxiais de compressão**



Fonte: Proença (1988).

Para o concreto submetido a um estado triaxial de tensões, é possível representar através de superfícies os limites elásticos e ruptura em um espaço tridimensional de tensões principais como ilustra a Figura 2.36.

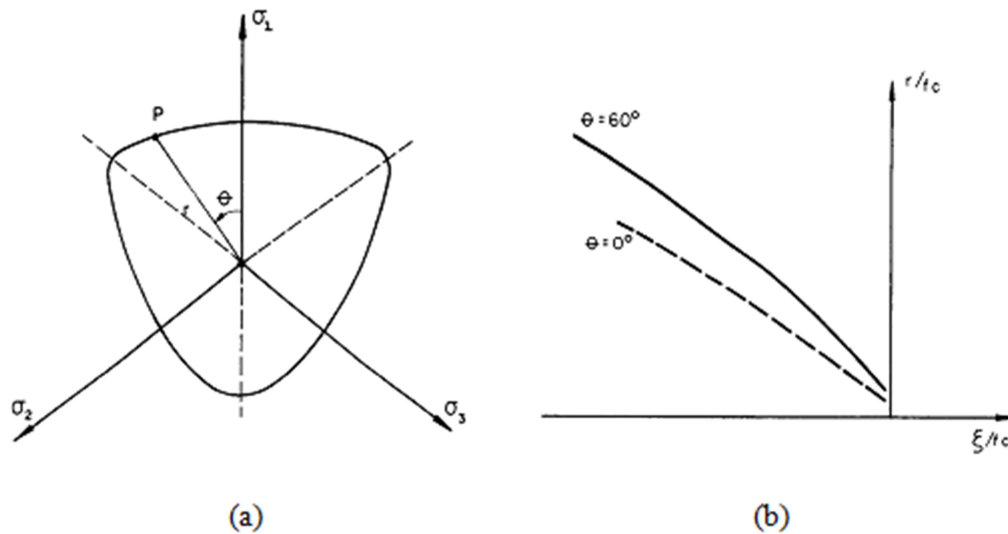
**Figura 2.36 – Superfície de plastificação e ruptura**



Fonte: Proença (1988).

A forma geral da superfície de ruptura pode ser descrita pelas formas dos planos desviatórios, ortogonal ao eixo hidrostático, e dos meridianos, que contêm o eixo hidrostático, como ilustra a Figura 2.37.

Figura 2.37 – (a) Plano desviatórico; (b) Plano meridional



Fonte: Adaptado de Proença (1988).

Experimentos indicam que a superfície de ruptura no plano desviatórico é de forma geral, regular, convexa (pelo menos para tensões de compressão) e aproximadamente triangular para pequenas tensões de tração ou compressão, tornando-se mais circular para altas tensões de compressão.

Já no plano meridional, a superfície de ruptura é curva, convexa e regular, além de que o carregamento hidrostático puro não causa ruptura.

### 2.5.1 Considerações gerais sobre a teoria da plasticidade aplicada ao concreto

A superfície de plastificação define os limites elásticos de um material sujeitos a um estado de tensão. Segundo Chen e Han (1988), para um material isotrópico, a superfície de plastificação pode ser expressa como

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad (2.24)$$

onde:

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - tensões principais no espaço tridimensional;

$k_1, k_2, \dots$  - propriedades dos materiais estudados.



Já que o valor fornecido pela equação acima tem que ser igual, independentemente do sistema de coordenadas adotado, substituem-se as tensões principais pelos invariantes do tensor de tensões,  $I_1, I_2$  e  $I_3$ , resultando em

$$f(I_1, I_2, I_3, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad (2.25)$$

Para melhorar a interpretação gráfica da superfície, substituem-se o segundo e terceiro invariantes do tensor de tensões, pelo segundo e terceiro invariantes do tensor desviador, ou seja,

$$f(I_1, J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad (2.26)$$

onde:

$J_2$  e  $J_3$  – Segundo e terceiro invariantes do tensor desviador.

Em situações em que variações na pressão hidrostática não produzem mudanças na deformação plástica, como no caso dos metais, é possível reduzir a Equação (2.26) em

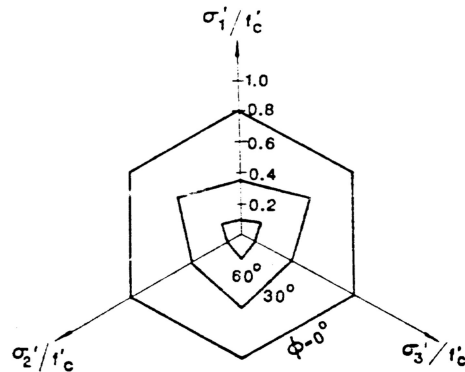
$$f(J_2, J_3, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad (2.27)$$

tornando a superfície de plastificação independente do primeiro invariante do tensor de tensões.

Já nos não metais, como solo, rochas e, inclusive, concreto, esta parcela deve ser considerada, já que a variação na pressão hidrostática influencia na deformação plástica. Modelos clássicos para simular superfícies de plastificação para metais foram propostos por Tresca e Von Mises, enquanto que para superfícies de plastificação de não metais têm-se, por exemplo, os de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager.

Segundo Proença (1988), a superfície de Mohr-Coulomb apresenta um inconveniente sobre o ponto de vista numérico, pois há descontinuidades nas primeiras derivadas. É possível relacionar este fato ao formato hexagonal ou à presença de arestas na superfície no plano desviador (Figura 2.38).

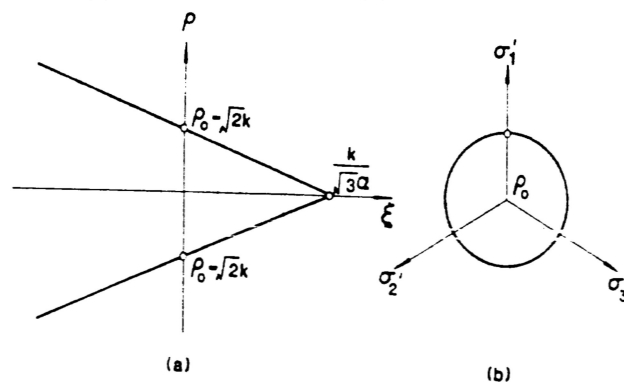
**Figura 2.38 – Plano deviatório da superfície de falha**



Fonte: Chen e Han (1988).

A superfície proposta por Drucker-Prager é geometricamente definida por um cone que pode estar inscrito ou circunscrito à pirâmide de Mohr. Sua expressão matemática deriva da equação proposta por Von Mises, inserindo uma parcela relativa ao primeiro invariante do tensor de tensões. A Figura 2.39 mostra o plano meridiano e o plano deviatório desta superfície.

**Figura 2.39 – (a) Plano meridiano; (b) Plano deviatório**



Fonte: Chen e Han (1988).

Proença (1988) afirma que apesar das vantagens sob o ponto de vista numérico, os resultados apresentam pouca concordância com as análises experimentais.

### 2.5.2 Modelo *Concrete Damaged Plasticity* (CDP)

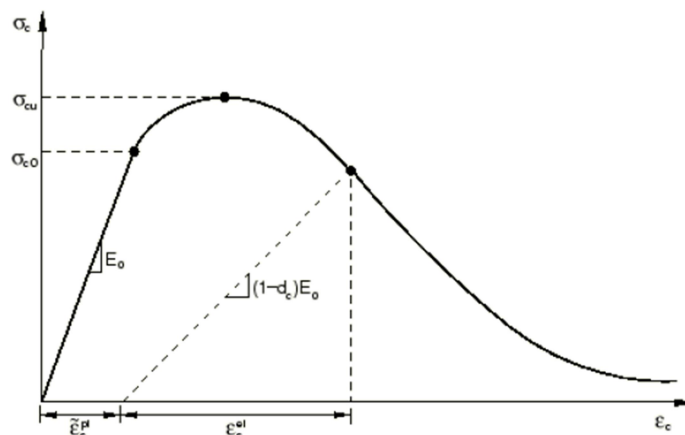
Nas simulações numéricas do bloco de transição, para consideração da não linearidade física do concreto armado, adota-se o modelo CDP (*Concrete Damaged Plasticity*). Segundo Kmiecik e Kaminski (2011), este modelo propõe uma evolução da hipótese de resistência de Drucker-Prager. Hibbitt, Karlsson e Sorensen (2011) definem o CDP como um modelo contínuo, com plasticidade e dano para o concreto, baseado em modelos propostos por

Lubliner et al. (1989) e Oller et al. (1990). Consiste na combinação da plasticidade com endurecimento (*multi-hardening*) não associativo e da elasticidade isotrópica com dano, simulando assim os danos irreversíveis que ocorrem durante o processo de fissuração.

Segundo estes mesmos autores, o concreto possui um comportamento quase-frágil quando submetido a baixas tensões de confinamento (cerca de cinco vezes maior que a resistência à compressão uniaxial). O CDP deve ser utilizado apenas nestas condições, pois quando as tensões de confinamento são muito elevadas, o comportamento frágil do concreto desaparece, já que o confinamento é suficiente para prevenir a propagação das fissuras.

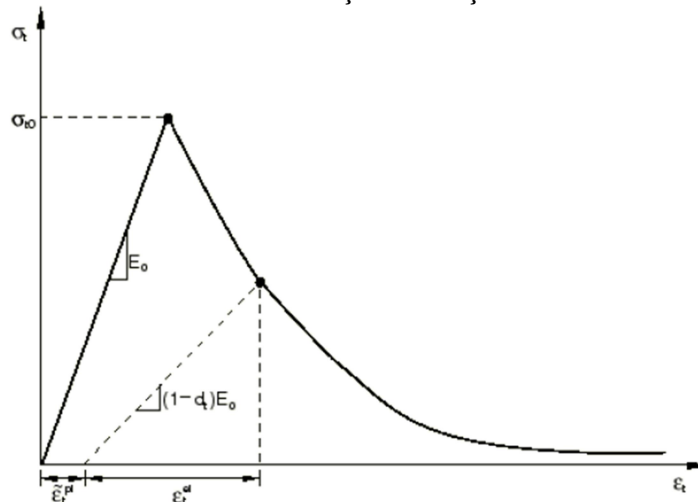
No CDP adota-se que o concreto sujeito à compressão uniaxial segue a curva ilustrada na Figura 2.40, e para tração uniaxial a curva encontra-se ilustrada na Figura 2.41.

**Figura 2.40 – Curva tensão-deformação na compressão uniaxial**



Fonte: Hibbitt et al. (2011).

**Figura 2.41 – Curva tensão-deformação na tração uniaxial**



Fonte: Hibbitt et al. (2011).

A resposta da compressão uniaxial é linear até o valor inicial da plastificação,  $\sigma_{co}$ . Após este ponto, caracteriza-se um endurecimento até a tensão última,  $\sigma_{cu}$ , seguido pelo amolecimento, que é a parte descendente da curva. Já a resposta à tração uniaxial é linear até o valor da tensão de falha,  $\sigma_{to}$ . Após este ponto há um amolecimento, representando a formação de microfissuras no concreto.

Nos dois estados de tensão, compressão ou tração, quando o concreto é descarregado após ter ultrapassado a tensão de falha, no trecho descendente das respectivas curvas, a resposta é enfraquecida e a rigidez elástica do material sofre o dano. A degradação da rigidez elástica é caracterizada por duas variáveis escalares,  $d_c$  e  $d_t$  (compressão e tração, respectivamente). Essas podem assumir valores iguais a zero, quando não há dano no material, até 1,0, que representa total perda de rigidez. De acordo com Johannsson e Reitzel (2011), estas variáveis podem ser calculadas a partir de

$$d_c = 1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_{cu}} \quad (2.28)$$

$$d_t = 1 - \frac{\sigma_t}{\sigma_{to}} \quad (2.29)$$

Assim, para os casos uniaxial de compressão e de tração, as relações tensão-deformação são dadas respectivamente por

$$\sigma_c = (1 - d_c)E_o(\varepsilon_c - \tilde{\varepsilon}_c^{pl}) \quad (2.31)$$

$$\sigma_t = (1 - d_t)E_o(\varepsilon_t - \tilde{\varepsilon}_t^{pl}) \quad (2.31)$$

onde:

$E_o$  - rigidez elástica do material;

$\tilde{\varepsilon}_t^{pl}$  e  $\tilde{\varepsilon}_c^{pl}$  - variáveis de endurecimento.

No estado geral multiaxial de tensões, a relação constitutiva é dada por

$$\sigma = (1 - d)D_o^{el} : (\varepsilon - \varepsilon^{pl}) = D^{el} : (\varepsilon - \varepsilon^{pl}) \quad (2.32)$$

onde:

$\sigma$  - tensor de tensões de Cauchy;  
 $d$  - variável escalar de degradação da rigidez;  
 $\varepsilon$  - tensor de deformações:  $\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl}$ ;  
 $D_o^{el}$  - rigidez elástica inicial;  
 $D^{el}$  - de rigidez elástica degradada;  
 $\varepsilon^{pl}$  - deformação plástica.

O tensor de tensões efetivo é definido como

$$\bar{\sigma} = D_o^{el} : (\varepsilon - \varepsilon^{pl}) \quad (2.33)$$

A falha, tanto na compressão quanto na tração, é caracterizada por duas variáveis de endurecimento,  $\tilde{\varepsilon}_c^{pl}$  na compressão e  $\tilde{\varepsilon}_t^{pl}$  na tração, em que

$$\tilde{\varepsilon}^{pl} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_c^{pl} \\ \tilde{\varepsilon}_t^{pl} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

A evolução das variáveis de endurecimento é considerada a partir de

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^{pl} = h(\bar{\sigma}, \tilde{\varepsilon}^{pl}) \cdot \dot{\varepsilon}^{pl} \quad (2.35)$$

onde:

$\dot{\tilde{\varepsilon}}^{pl}$  - variação de deformação plástica.

O fluxo plástico é governado pelo potencial de fluxo  $G$ , de acordo com a regra não associativa, descrita por

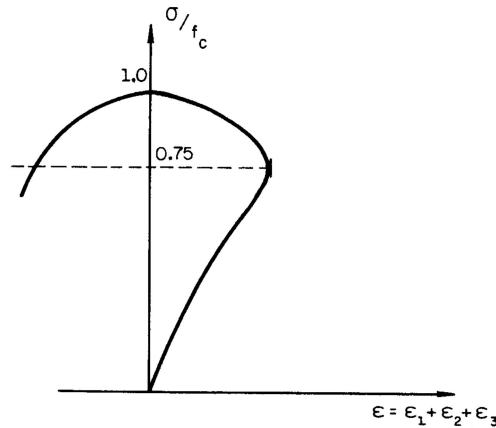
$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \lambda \frac{\partial G(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \quad (2.36)$$

onde:

$\lambda$  - multiplicador plástico não negativo.

Segundo Chen e Han (1988), é necessária a utilização de uma regra não associativa, pois no concreto, como mostra a Figura 2.42, há uma diminuição de volume quando a tensão aplicada é de até cerca de 75% da tensão de compressão máxima. Quando a tensão aplicada supera este valor, o concreto tende a expandir, surgindo então um ponto de inflexão. Tal comportamento viola a regra de fluxo associado.

**Figura 2.42 – Deformação volumétrica do concreto**



Fonte: Proença (1988).

O potencial de fluxo adotado no CDP é a função hiperbólica de Drucker-Prager, dada por

$$G = \sqrt{(\epsilon \sigma_{to} \tan \psi)^2 + \bar{q}^2} - \bar{p} \tan \psi \quad (2.37)$$

onde:

$\psi$  - ângulo de dilatação medido no plano p-q, sujeito a alta tensão de confinamento;

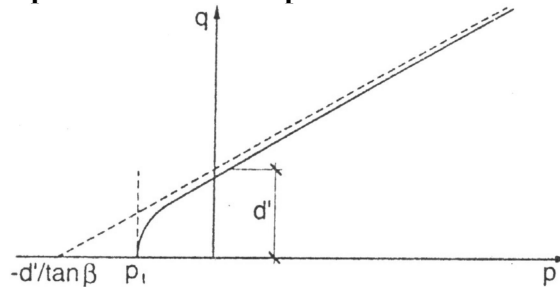
$\sigma_{to}$  - tensão de tração uniaxial no ponto de falha;

$\epsilon$  - excentricidade.

Essa função é contínua, suave e assegura que a direção do fluxo seja única.

A superfície do potencial de fluxo é definida no plano p-q (Figura 2.43), em que  $\bar{p}$  é a tensão hidrostática efetiva, definida pela Equação (2.38) e  $\bar{q}$  é a tensão equivalente de Mises efetiva, descrita na Equação (2.39).

**Figura 2.43 – Superfície do potencial de fluxo hiperbólica**



Fonte: Kmiecik e Kaminski (2011).

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} \text{traço}(\bar{\sigma}) \quad (2.38)$$

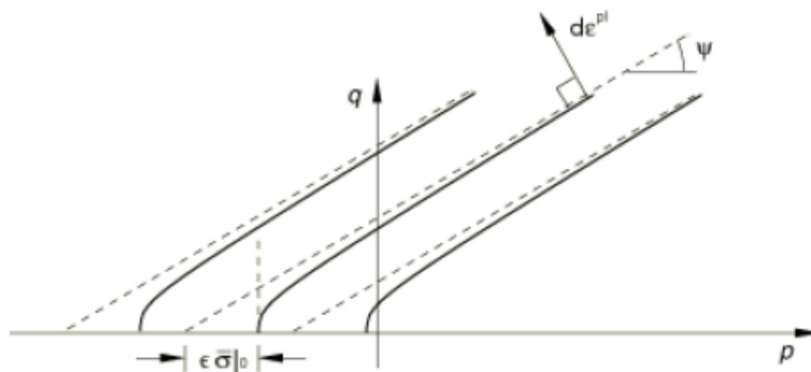
$$\bar{q} = \sqrt{\frac{3}{2} (\bar{S} : \bar{S})} \quad (2.39)$$

$\bar{S}$  é a parte deviatórica do tensor de tensões efetivo, dada por

$$\bar{S} = \bar{\sigma} + \bar{p}I \quad (2.40)$$

Hibbitt et al. (2011) dizem que a excentricidade é a taxa em que a função se aproxima da assíntota. Caso este valor seja igual a zero, o potencial de fluxo tende a uma reta, assim como no modelo clássico de Drucker-Prager. Os autores descrevem um valor padrão de 0,1. Segundo Jankowiak e Lodygowski (2005), este parâmetro pode ser calculado pela razão entre a resistência à tração e à compressão do concreto (Figura 2.44).

**Figura 2.44 – Parâmetros que definem a função hiperbólica**



Fonte: Hibbitt et al. (2011).

Já o ângulo de dilatação é quem determina a inclinação da superfície de falha, ao longo do eixo hidrostático, no plano meridional (Figura 2.44). Se este valor é igual a zero, o material não dilata. De acordo com Kmiecik e Kaminski (2011), é possível interpretar fisicamente o ângulo de dilatação como o ângulo de atrito interno do concreto. Afirma ainda que este valor está entre 36° e 40°. Este valor vai ao encontro dos utilizados por Jankowiak e Lodygowski (2005) e Johannsson e Reitzel (2011).

A função de falha do CDP é então definida como

$$F = \frac{1}{1 - \alpha} (\bar{q} - 3\alpha\bar{p} + \beta(\tilde{\varepsilon}^{pl})\langle\hat{\sigma}_{máx}\rangle - \gamma\langle\hat{\sigma}_{máx}\rangle) - \bar{\sigma}_c(\tilde{\varepsilon}_c^{pl}) = 0 \quad (2.41)$$

sendo

$$\alpha = \frac{\sigma_{bo}/\sigma_{co} - 1}{2(\sigma_{bo}/\sigma_{co}) - 1} \quad (2.42)$$

$$\beta = \frac{\bar{\sigma}_c(\tilde{\varepsilon}_c^{pl})}{\bar{\sigma}_t(\tilde{\varepsilon}_t^{pl})} (1 - \alpha) - (1 + \alpha) \quad (2.43)$$

$$\gamma = \frac{3(1 - K_c)}{2K_c - 1} \quad (2.44)$$

onde:

$\hat{\sigma}_{máx}$  - máxima tensão principal efetiva;

$\sigma_{bo}/\sigma_{co}$  - razão entre a tensão de falha do campo de tensão de compressão biaxial inicial e a tensão de falha do campo de tensão de compressão uniaxial;

$K_c$  - razão entre o segundo invariante de tensão no meridiano de tração e o do meridiano de compressão, para qualquer pressão invariante “ $p$ ”, quando a máxima tensão principal efetiva seja negativa;

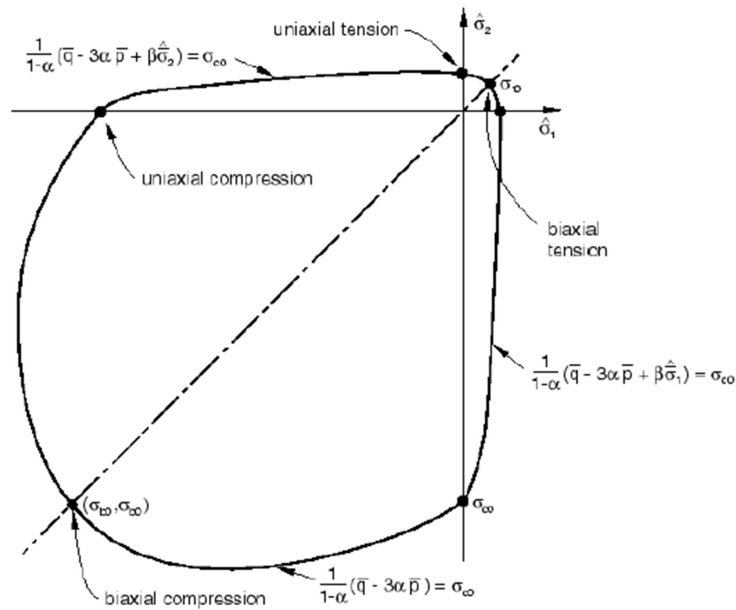
$\langle \cdot \rangle$  - Macauley bracket, definido por:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} (|x| + x) \quad (2.45)$$



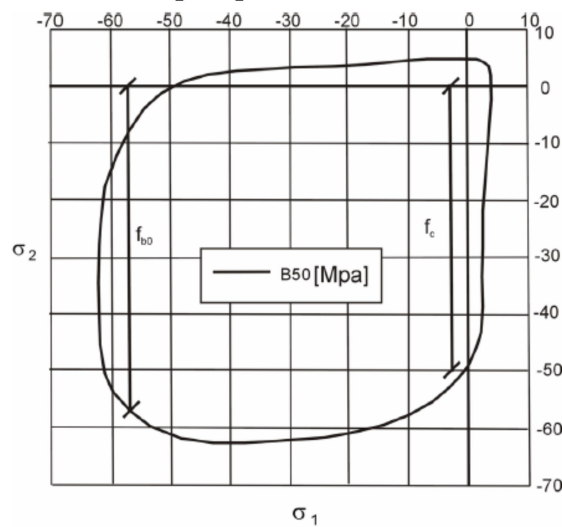
$\sigma_{bo}/\sigma_{co}$  é simplesmente a relação entre a resistência à compressão do concreto quando sujeito a um estado biaxial de compressão,  $\sigma_{bo}$ , e a resistência quando submetido a um estado uniaxial de compressão,  $\sigma_{co}$ . É possível obter tal parâmetro a partir dos resultados experimentais de Kupfer (1969 apud KMIECIK; KAMINSKI, 2011). O valor padrão descrito em Hibbitt et al. (2011) é de 1,16. A Figura 2.45 mostra o estado biaxial de tensões e a Figura 2.46 mostra a curva de Kupfer.

**Figura 2.45 – Superfície de plastificação no plano de tensões**



Fonte: Hibbitt et al. (2011).

**Figura 2.46 – Curva de Kupfer para concreto classe B50**

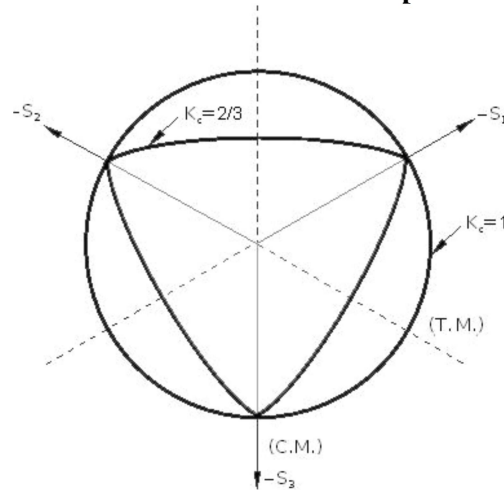


Fonte: Kupfer. et al. (1979, apud JANKOWIAK; LODYGOWSKI, 2005)

Geometricamente, o parâmetro “ $K_C$ ” é interpretado como a razão da distância entre o eixo hidrostático e os meridianos de compressão e de tração, respectivamente, no plano

desviatório (Kmiecik e Kaminski, 2011). Este parâmetro é encontrado ao realizar testes triaxiais de tensões. O valor de “ $K_c$ ” deve ser maior que 0,5 e quando igual a 1,0 o corte transversal da superfície de falha toma a forma de um círculo, assim como na hipótese básica de Drucker-Prager. O valor padrão descrito por Hibbitt et al. (2011) é igual a 0,666 (Figura 2.47).

**Figura 2.47 – Plano desviatório da superfície de falha**



Fonte: Hibbitt et al. (2011).

## 2.6 Modelagem numérica com *Concrete Damaged Plasticity*

Para analisar o comportamento de elementos de concreto armado modelados com o CDP, simula-se inicialmente um ensaio de compressão uniaxial em um corpo-de-prova cilíndrico, comparando-o com uma curva de compressão uniaxial teórico-experimental definida na literatura. Posteriormente modela-se uma viga apoiada nas duas extremidades, com o objetivo de comparar os resultados do modelo numérico com os do ensaio experimental realizado em Álvares (1993).

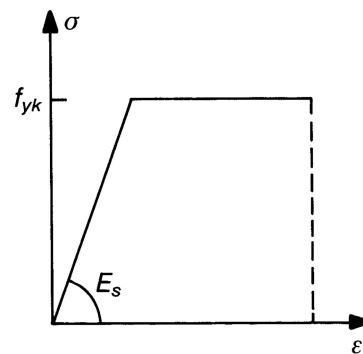
### 2.6.1 Propriedades dos materiais

Neste tópico são descritas as propriedades dos materiais, aço e concreto, utilizados nos dois modelos, tanto o corpo-de-prova, quanto a viga apoiada nas extremidades. Tais propriedades são baseadas nas características dos materiais utilizados no ensaio experimental em Álvares (1993), já que para alcançar o objetivo da comparação, tais variáveis devem ser as mais próximas possíveis.

### 2.6.1.1 Propriedades do aço

Para simular o comportamento mecânico do aço, admite-se uma relação constitutiva elástica linear até a tensão de escoamento do aço  $\epsilon$ , a partir deste ponto, considera-se perfeitamente plástico, como ilustrado pela Figura 2.48, em que seus parâmetros módulo de elasticidade ( $E_s$ ), coeficiente de Poisson ( $\nu_s$ ) e tensão de escoamento ( $f_{yk}$ ) são descritos na Tabela 2.9.

**Figura 2.48 – Relação constitutiva do aço**



Fonte: CEB-FIP (1993).

**Tabela 2.9– Parâmetros do aço**

<b>Módulo de Elasticidade (<math>E_s</math>)</b>	196000 MPa
<b>Coefficiente de Poisson (<math>\nu_s</math>)</b>	0,3
<b>Tensão de escoamento (<math>f_{yk}</math>)</b>	420 MPa

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 2.6.1.2 Propriedades do concreto

Para a análise não linear do concreto, utilizando o modelo CDP, é necessário o conhecimento dos parâmetros da fase elástica do concreto, Módulo de Elasticidade Inicial e Coeficiente de Poisson, além dos diagramas tensão-deformação de compressão e tração uniaxial e dos parâmetros do CDP, comentados no Tópico 2.5.2.

Álvares (1993) comparou resultados experimentais de vigas apoiadas nas extremidades com modelos numéricos desenvolvidos na ocasião. Para tais, adotou um modelo constitutivo para carregamento proporcional proposto por Mazars.

Este modelo, assim como o CDP, baseia-se na plasticidade e dano do concreto, tanto na tração quanto na compressão. O modelo de Mazars não faz parte do escopo deste trabalho, porém é necessária a citação já que as propriedades do concreto utilizados nos experimentos

de Álvares (1993) estão descritas com base nos parâmetros deste modelo ( $A_T, B_T, A_C, B_C$  e  $\epsilon_{do}$ ).

Em Álvares (1993) foram realizados ensaios de compressão uniaxial e diametral, com o objetivo de obter os parâmetros de compressão e tração do concreto que seria utilizado no experimento. Esses parâmetros são expostos na Tabela 2.10.

**Tabela 2.10 – Parâmetros do modelo de Mazars**

$A_T$	0,995
$B_T$	8000
$A_C$	0,85
$B_C$	1620
$\epsilon_{do}$	0,00007
<b>Modulo de Elasticidade (<math>E_{0c}</math>)</b>	29200 MPa
<b>Coefficiente de Poisson (<math>\nu_c</math>)</b>	0,2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo o modelo de Mazars, a lei constitutiva no caso de esforço uniaxial é dada por

$$\sigma = E_{0c}(1 - D_H(\tilde{\epsilon}))\epsilon \quad \begin{cases} D_H(\tilde{\epsilon}) = 0 & \text{se } \tilde{\epsilon} \leq \epsilon_{do} \\ D_H(\tilde{\epsilon}) \neq 0 & \text{se } \tilde{\epsilon} \geq \epsilon_{do} \end{cases} \quad (2.46)$$

em que

$$D_H(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{do}(1 - A_H)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_H}{\exp[B_H(\tilde{\epsilon} - \epsilon_{do})]} \quad (2.47)$$

onde  $A_H, B_H, \epsilon_{do} \geq 0$  e com

$$\begin{aligned} H = T \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon & \quad \text{no caso de tração} \\ H = C \quad \tilde{\epsilon} = -\sqrt{2} \nu_c \epsilon & \quad \text{no caso de compressão} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Sendo assim, com as equações acima e os parâmetros do concreto na Tabela 2.10, é fácil montar uma curva de tensão-deformação.

Os parâmetros do modelo CDP utilizados no modelo são descritos na Tabela 2.11.

Tabela 2.11 – Parâmetros utilizados para o CDP

$\Psi$	38°
$\epsilon$	0,1
$K_c$	0,666
$\sigma_{bo}/\sigma_{co}$	1,16

Fonte: Elaborada pelo autor.

### ➤ Comportamento na Compressão

Os dados da curva tensão-deformação do concreto são inseridos no *software* de forma tabular, sendo necessário trabalhar com valores de deformações inelásticas,  $\tilde{\epsilon}_c^{in}$ , dados por

$$\tilde{\epsilon}_c^{in} = \epsilon - \epsilon_{oc}^{el} \quad (2.49)$$

com

$$\epsilon_{oc}^{el} = \frac{\sigma_c}{E_{0c}} \quad (2.50)$$

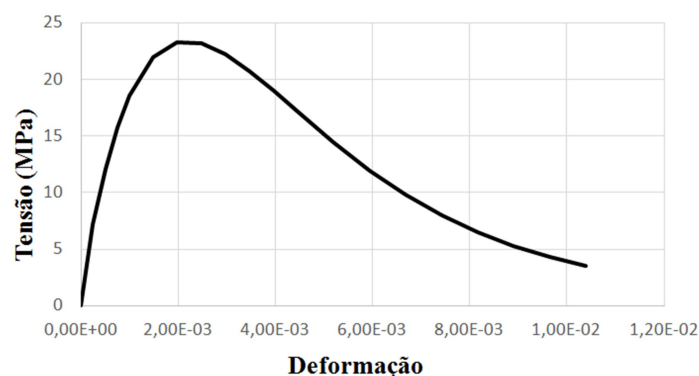
onde:

$\epsilon_{oc}^{el}$  - deformação elástica considerando a rigidez inicial;

$E_{0c}$  - módulo de elasticidade inicial do concreto.

O diagrama tensão-deformação de compressão uniaxial, resultado da utilização das Equações (2.46), (2.47) e (2.48) e dos parâmetros da Tabela 2.10, está ilustrado na Figura 2.49.

Figura 2.49 – Diagrama tensão-deformação de compressão uniaxial



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 2.12 resume os dados utilizados na caracterização do concreto à compressão.

**Tabela 2.12 – Caracterização do concreto à compressão**

$\sigma_c$ (MPa)	E	$\xi_c^{in}$	$d_c$
0,00	0,00	0,00	0,00
7,23	2,47E-04	0,00	0,00
12,05	4,95E-04	8,22E-05	0,00
15,77	7,42E-04	2,02E-04	0,00
18,57	9,90E-04	3,54E-04	0,00
21,99	1,48E-03	7,32E-04	0,00
23,30	1,98E-03	1,18E-03	0,00
23,22	2,47E-03	1,68E-03	0,00
22,26	2,97E-03	2,21E-03	0,04
20,77	3,46E-03	2,75E-03	0,11
19,02	3,96E-03	3,31E-03	0,18
17,17	4,45E-03	3,87E-03	0,26
14,44	5,20E-03	4,70E-03	0,38
11,94	5,94E-03	5,53E-03	0,49
9,78	6,68E-03	6,35E-03	0,58
7,96	7,42E-03	7,15E-03	0,66
6,47	8,17E-03	7,95E-03	0,72
5,26	8,91E-03	8,73E-03	0,77
4,30	9,65E-03	9,50E-03	0,82
3,55	1,04E-02	1,03E-02	0,85
1,46	1,53E-02	1,53E-02	0,94
1,08	4,01E-02	4,01E-02	0,95

Fonte: Elaborada pelo autor.

### ➤ Comportamento na Tração

Diferentemente do comportamento na compressão, não se pretende considerar o trecho descendente do diagrama tensão-deformação na tração uniaxial (Figura 2.41). Assim, admite-se que se o valor da tensão ultrapassar o valor da tração máxima elástica, o elemento falha. Determina-se o valor da tração máxima elástica seguindo as instruções da NBR 6118:2014, ou seja,

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} = 2,44 \text{ MPa} \quad (2.51)$$

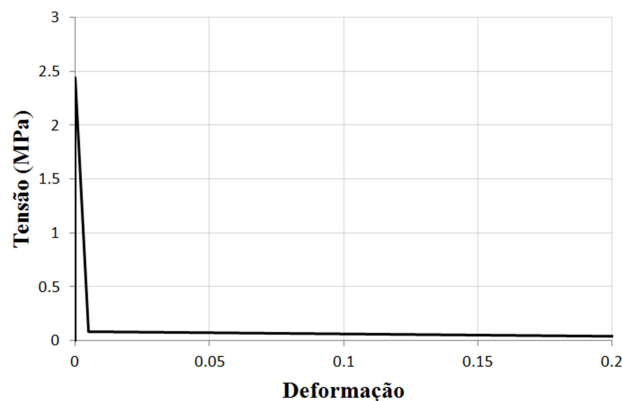
onde:

$f_{ck}$  - resistência à compressão característica (segundo o diagrama da Figura 2.49, 23,20 Mpa);

$f_{ct,m}$  - resistência à tração média do concreto.

No entanto, para avaliar o comportamento do elemento estrutural corretamente até a sua capacidade última, é necessário utilizar o diagrama ilustrado n Figura 2.50, em que são adicionados dois pontos além da tensão máxima elástica de tração, permitindo que cada elemento finito que chegar à tensão máxima continue se deformando, simulando uma abertura de fissura, porém já com o dano bastante elevado, diminuindo sua rigidez de forma que sua contribuição na resistência dos esforços seja insignificante.

**Figura 2.50 – Diagrama tensão-deformação de tração uniaxial**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os dados da curva tensão-deformação de tração uniaxial do concreto são inseridos no *software* de forma tabular, sendo necessário trabalhar com valores de deformações de fissuração,  $\tilde{\varepsilon}_t^{ck}$ , dados por

$$\tilde{\varepsilon}_t^{ck} = \varepsilon - \varepsilon_{ot}^{el} \quad (2.52)$$

com

$$\varepsilon_{ot}^{el} = \frac{\sigma_t}{E_{0c}} \quad (2.53)$$

A Tabela 2.13 resume os dados utilizados na caracterização do concreto à tração.

**Tabela 2.13 – Caracterização do concreto à tração**

$\sigma_t$ (MPa)	$\varepsilon$	$\tilde{\varepsilon}_t^{cr}$	$d_t$
0,00	0,00	0,00	0,00
2,44	8,36E-05	0,00	0,00
8,55E-02	5,00E-03	5,00E-03	0,98
2,44E-02	0,38	0,38	0,99

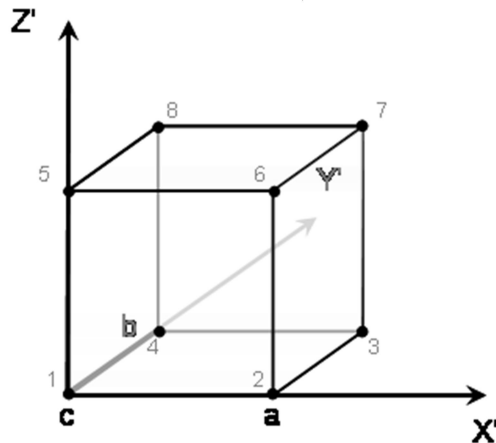
Fonte: Elaborada pelo autor.

## 2.6.2 Malha de elementos finitos

O elemento finito adotado nos dois modelos é identificado como C3D8 (*Continuum 3D, 8 nodes*) e é um hexaedro, também denominado como *Brick* pelo programa, pertencente à família *3D Stress* (Figura 2.51).



**Figura 2.51 – Elemento C3D8 (Continuum 3D, 8 nodes)**



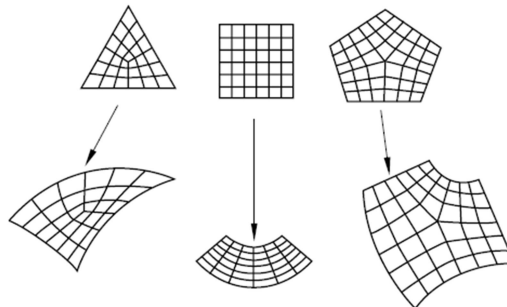
Fonte: Adaptado de Hibbitt et al. (2011).

Segundo Liu e Quek (2003), o resultado de simulações utilizando elementos hexaédricos é mais preciso do que com elementos tetraédricos, porém é mais difícil a geração de malhas em geometrias mais complexas. Como o sistema modelado tem forma simples, a escolha de um elemento hexaédrico para a simulação é conveniente.

Para a geração da malha de elementos finitos, utiliza-se o gerador do Abaqus/CAE<sup>®</sup>. Adota-se um tamanho global aproximado de 1,0 cm para os elementos, considerado suficiente para conceber resultados satisfatórios. A técnica utilizada para a geração da malha é chamada de *Structured*.

Esta técnica gera malhas estruturadas a partir de malhas pré-definidas de elementos simples, como um quadrado ou um cubo (Figura 2.52). Esta técnica dá um maior controle sobre a malha, porém a maior parte dos sólidos tem formas muito complexas para utilizar as malhas pré-estabelecidas.

**Figura 2.52 – Padrões de malhas estruturadas em duas dimensões**



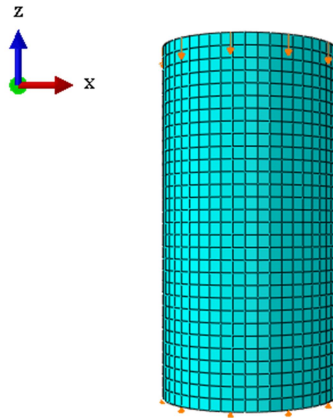
Fonte: Adaptado de Hibbitt et al. (2011).

### 2.6.3 Compressão uniaxial no corpo-de-prova

#### 2.6.3.1 Geometria, condições de contorno e malha

O cilindro modelado possui 15,00 cm de diâmetro e 30,00 cm de comprimento, dimensões usuais para corpos-de-prova. A Figura 2.53 ilustra a geometria, a malha e as condições de contorno do modelo.

**Figura 2.53 – Geometria, malha e condições de contorno do corpo-de-prova**



Fonte: Elaborada pelo autor.

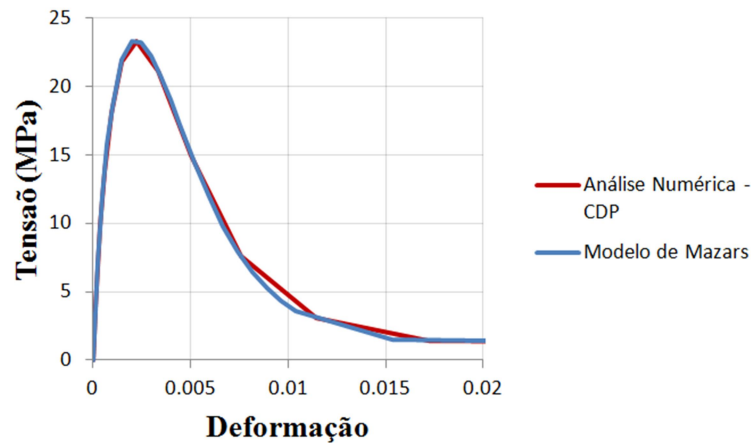
Como condições de contorno, tem-se que, na base, a translação do modelo é restrita para a "direção Z", ou seja, na direção de sua maior dimensão. Já no topo do modelo, aplica-se um deslocamento prescrito também na "direção Z". É necessário que a sollicitação seja um deslocamento, pois só assim é possível verificar o trecho descendente do diagrama tensão-deformação.

Durante o processamento, a sollicitação é inserida de forma incremental. Assim, não importa o valor da sollicitação inserido, pois, no final, basta ver o incremento que o modelo chegou até sua suposta falha.

#### 2.6.3.2 Análise dos resultados

As condições de contorno impostas no modelo resultam em uma distribuição de tensões uniformes e uniaxiais em todo o corpo-de-prova, já que não há nem sollicitação nem restrições nas demais direções. Tal configuração permite que seja avaliado o comportamento do concreto sujeito à compressão uniaxial, comparando o diagrama tensão-deformação de qualquer nó do modelo, com o diagrama advindo do modelo de Mazars. A Figura 2.54 ilustra esta comparação.

**Figura 2.54 – Comparação dos diagramas de tensão-deformação resultante da análise e teórico**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como esperado, o comportamento do modelo numérico sob compressão uniaxial está muito semelhante ao teórico, mostrando que os parâmetros de deformação inelástica e dano inseridos como propriedades do material estão adequados.

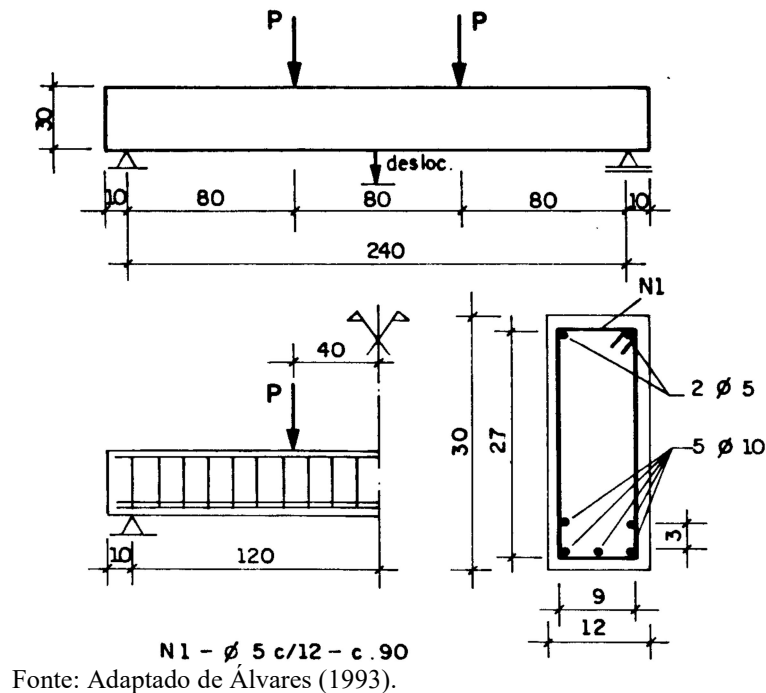
#### 2.6.4 Viga Apoiada nas duas extremidades

##### 2.6.4.2 Geometria, condições de contorno e malha

O modelo consiste em uma viga com seção transversal retangular, sendo a largura igual a 12,0 cm e a altura igual a 30,0 cm. O comprimento total da viga é de 2,60 m sendo que os apoios estão situados a 10,0 cm das extremidades, resultando em um vão livre de 2,40 m. As solicitações são aplicadas na face superior da viga e nos dois terços do vão livre. Já deslocamento é medido na face inferior da viga, no centro do vão livre.

A Figura 2.55 ilustra a geometria do modelo.

Figura 2.55 – Geometria e armação do modelo

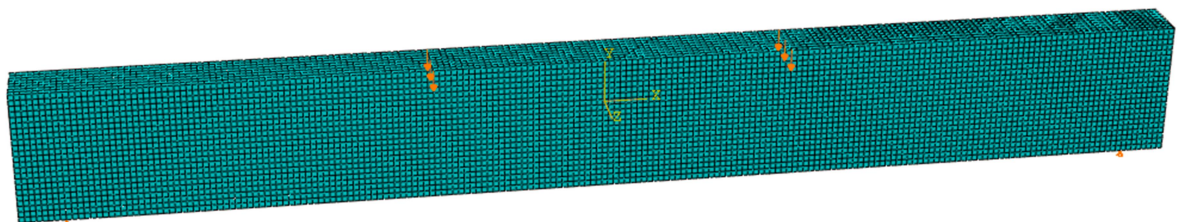


Quanto à armação da viga, são dispostas longitudinalmente cinco barras de 10 mm de diâmetro na parte inferior, sendo três barras localizadas na primeira camada e duas na segunda, distante 3 cm da primeira.

Como armadura transversal, estribos de dois ramos e diâmetro de 5 mm são distribuídos a cada 12 cm ao longo do comprimento da viga. Na parte superior da viga, são dispostas duas barras de 5 mm de diâmetro, para servir de guias para a armadura transversal.

As solicitações são aplicadas como deslocamentos impostos, na direção da altura da viga, e os apoios são simulados a partir da restrição à translação, também na direção da altura da viga. A Figura 2.56 ilustra a configuração da malha gerada e as condições de contorno utilizadas.

Figura 2.56 - Malha e condições de contorno da viga



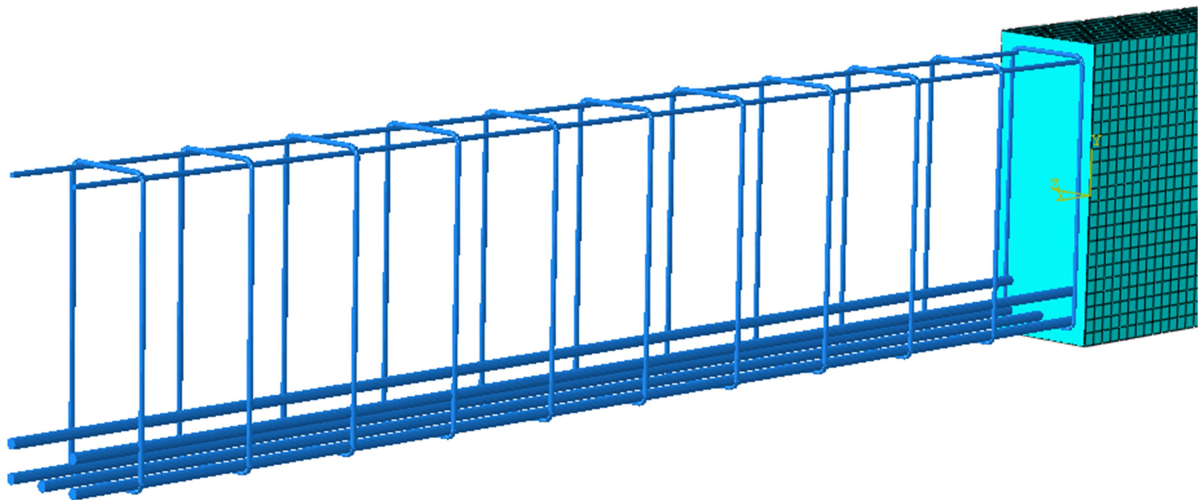
Fonte: Elaborada pelo autor.

A armadura é inserida como elemento de viga. Tal elemento é definido por uma barra unidimensional, com sua rigidez associada às propriedades mecânicas de uma seção transversal, a qual é considerada plana mesmo após a deformação da barra. Estas deformações consistem em alongamento axial, mudança da curvatura (flexão) e torção.

A seção transversal das barras de armadura é considerada circular, com diâmetro igual ao seu diâmetro nominal. Assim, as rigidezes à flexão e à torção são baixas, sendo predominante a deformação axial da barra.

A figura 2.57 ilustra a disposição da armadura no modelo da viga.

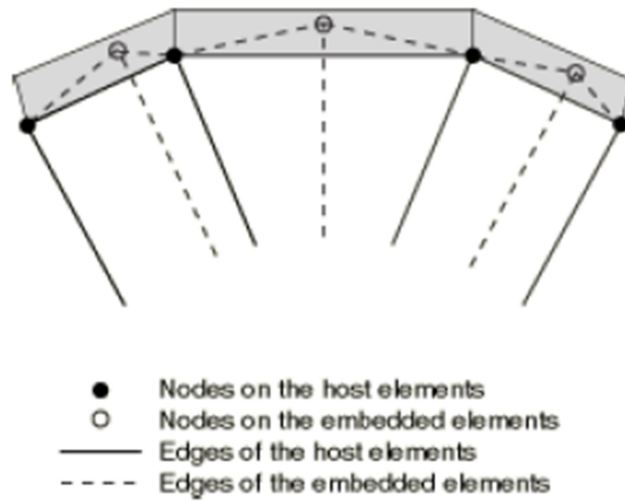
**Figura 2.57 – Disposição da armadura no modelo da viga**



Fonte: Elaborada pelo autor.

A ligação entre as barras de armadura e os sólidos que simulam o concreto, é considerada perfeita e realizada a partir de uma técnica chamada "*embedded elements*". Nessa, são definidos elementos que serão embutidos e elementos que serão hospedeiros. Quando um nó do elemento embutido se encontra dentro de um elemento hospedeiro, os graus de liberdade de translação do elemento embutido são eliminados e passam a ter uma ligação forçada com os valores interpolados dos graus de liberdade correspondentes no elemento hospedeiro. A Figura 2.58 ilustra a referida técnica.

Figura 2.58 – Técnica "embedded elements"

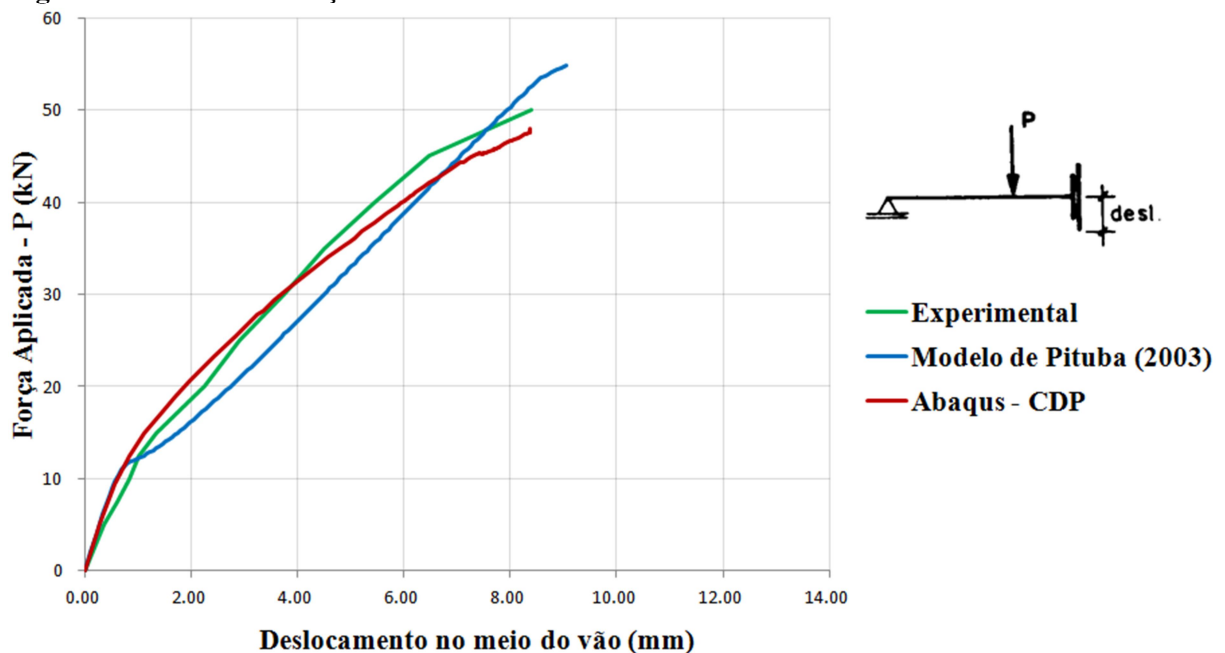


Fonte: Hibbitt et al. (2011).

#### 2.6.4.2 Análise dos resultados

Para analisar o modelo numérico desenvolvido, compara-se a curva da força aplicada *versus* o deslocamento no meio do vão com o experimento feito em Álvares (1993). Tal comparação está ilustrada na Figura 2.59.

Figura 2.59 – Curvas Força x Deslocamento



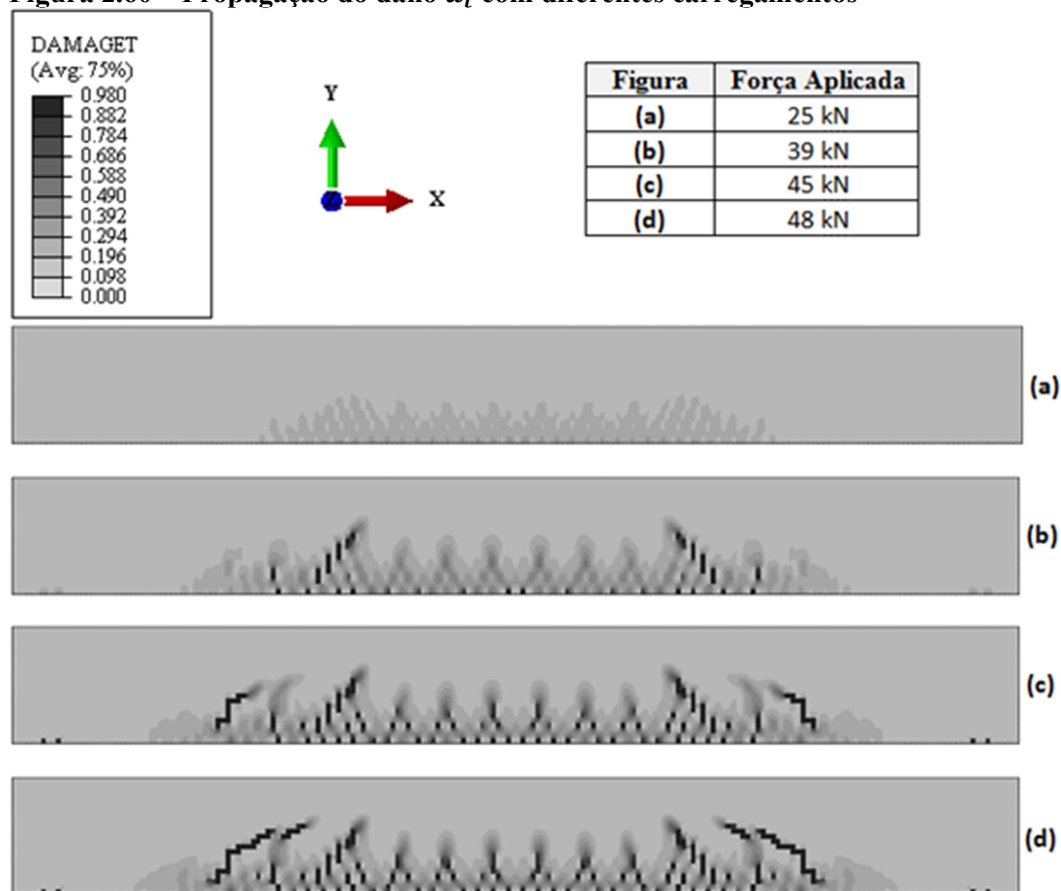
Fonte: Elaborada pelo autor.

Verifica-se que a curva do modelo numérico desenvolvido no Abaqus<sup>®</sup> utilizando o modelo CDP é similar à curva experimental, sendo que no início a viga se mostrou um pouco mais rígida, e, no final, ligeiramente menos resistente.

Em Pituba (2003), esta mesma viga foi analisada utilizando o modelo de dano proposto pelo próprio autor. Percebe-se que no início a curva se aproxima bastante do modelo com CDP, porém o dano se propaga de uma forma diferente, tornando o formato das curvas diferente.

Na Figura 2.60 é possível avaliar a evolução do dano de tração da viga e com isso prever a propagação das fissuras no elemento analisado, já que este tipo de dano está diretamente ligado com a perda de resistência à tração do elemento finito, que no caso dos materiais frágeis, como o concreto, acontece justamente pelo aparecimento das fissuras.

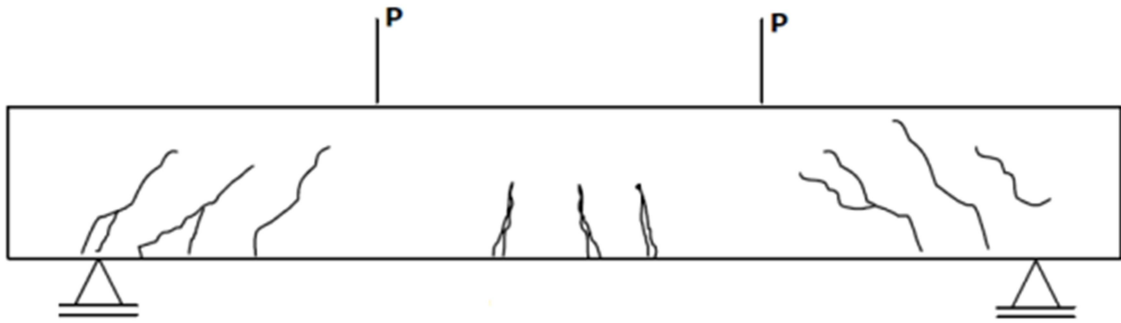
**Figura 2.60 – Propagação do dano  $d_t$  com diferentes carregamentos**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como descrito por Álvares (1993) em seu texto, as primeiras fissuras a aparecerem são no tramo central da viga, sendo que essas tendem a evoluir na vertical. Já nos terços externos da viga, entre o apoio e a carga concentrada, surgem fissuras inclinadas devido à presença do cisalhamento. A Figura 2.61 ilustra como são previstas as fissuras para este tipo de viga, sob estas condições de contorno.

**Figura 2.61 – Fissuras previstas para o caso estudado**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com base nos resultados, considera-se que o modelo CDP do Abaqus<sup>®</sup> simula adequadamente este elemento de concreto armado, considerando os parâmetros utilizados.



### 3 DESENVOLVIMENTO E ANÁLISES DE UM MODELO DE BIELAS E TIRANTES TRIDIMENSIONAL

Nesta seção é desenvolvido e estudado um modelo de bielas e tirantes tridimensional baseado no modelo plano elaborado em Guillou (2011), ilustrado pela Figura 2.30, e realizada a comparação entre os resultados destes dois modelos.

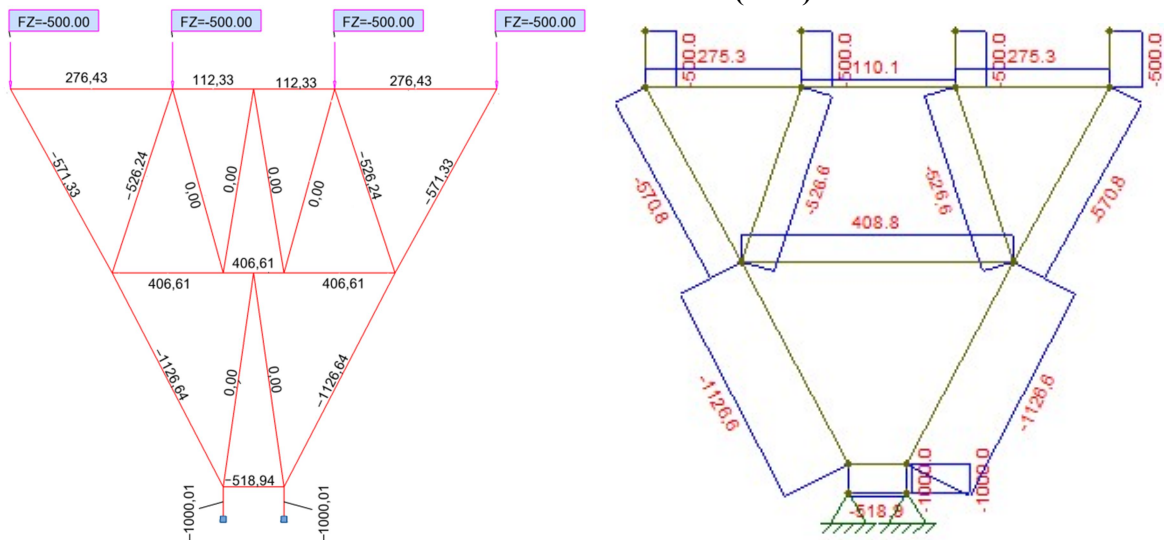
As análises são realizadas com o auxílio do *software* da Autodesk®, *Robot Structural Analysis* (RSA), tal qual, permite a modelagem de treliças tridimensionais com facilidade, além das várias opções gráficas de saída de resultados.

#### 3.1 Desenvolvimento do modelo

Neste trabalho, opta-se por desenvolver um modelo tridimensional baseado no modelo plano. Tal abordagem consiste em replicar vários planos iguais e liga-los por barras transversais formando uma treliça tridimensional.

Primeiramente, refaz-se o modelo plano descrito em Guillou (2011) no software RSA e se comparam os resultados, ilustrados na Figura 3.1. Observa-se que os esforços nas barras são semelhantes, sendo a diferença irrelevante, consequente da locação dos nós, devido ao arredondamento de casas decimais.

**Figura 3.1 – Comparação dos esforços, em kN, dos modelos planos. À esquerda o modelo no RSA. À direita o modelo estudado em Guillou (2011)**



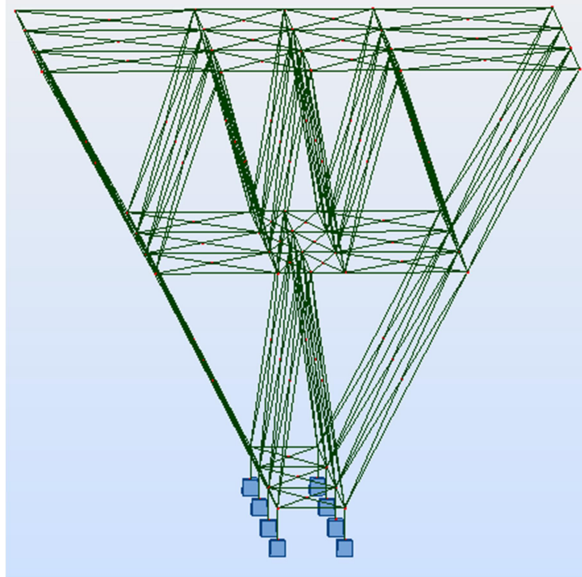
Fonte: Guillou (2011)

Percebe-se que existem seis barras a mais no modelo deste trabalho. Isso acontece porque, para processar corretamente no RSA, é necessário garantir a configuração de uma

treliça isostática. Porém, estas novas barras são apenas de compatibilização e não influenciam nos esforços na treliça plana.

Replica-se, então, o modelo plano, formando quatro treliças paralelas, com 20,0 cm de afastamento entre as mesmas. Criam-se barras de ligação entre as treliças planas, formando a treliça espacial ilustrada na Figura 3.2.

**Figura 3.2 – Modelo de bielas e tirantes espacial**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Apesar do grande número de barras e nós, e da dificuldade de ilustrar o modelo em figuras, o conceito do modelo é simples. Em cada nó existe uma barra transversal ligando uma treliça plana à outra, além de duas barras diagonais. Utilizando-se apenas uma barra na diagonal torna o modelo assimétrico, o que é indesejado.

Apesar de em Guillou (2011) terem sido analisados blocos com várias alturas, neste trabalho é apenas estudado o bloco com 60,0 cm de altura, comparando os resultados da treliça tridimensional com os da treliça plana e dos esforços obtidos a partir da própria análise elástica em elementos finitos.

Os parâmetros que determinam a geometria dos modelos são os ângulos entre as bielas e os tirantes ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$ ), a distância entre a biela BT e a superfície inferior ( $d1$ ) e a distância do tirante T1 e a superfície superior ( $d2$ ), conforme a Figura 2.30. Os valores de tais parâmetros para o bloco de 60,0 cm de altura são descritos na Tabela 3.1.

**Tabela 3.1 – Parâmetros geométricos do modelo de bielas e tirantes**

h (cm)	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	d1 (cm)	d2 (cm)
60,00	62,57°	60,2°	72,86°	3,6	7,3

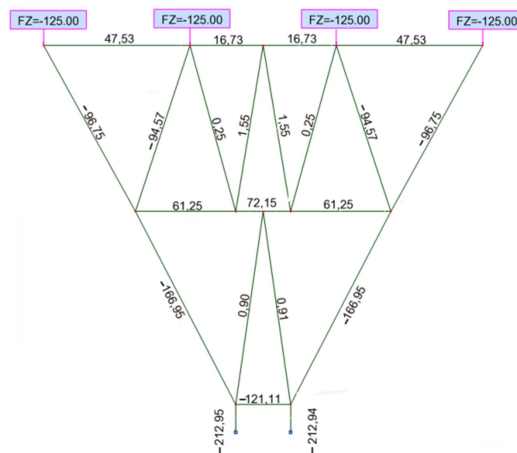
Fonte: Elaborada pelo autor.

Como a treliça espacial é composta por quatro treliças planas, para efeito de demonstração dos resultados, nomearam-se tais treliças de A, B, C e D, sendo A e D as treliças das extremidades e B e C as treliças próximas ao centro do modelo espacial.

### 3.2 Análise do modelo

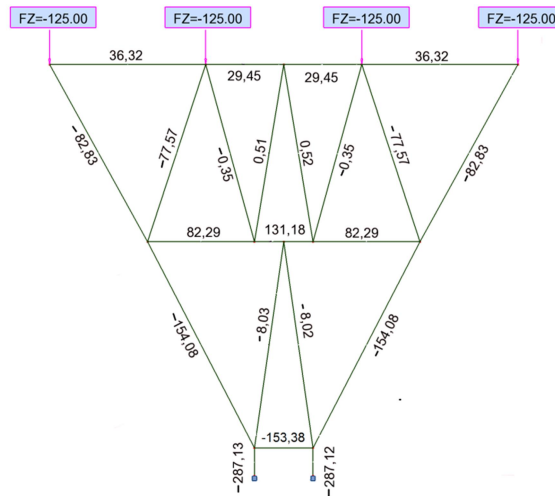
Para analisar e avaliar o modelo tridimensional desenvolvido neste trabalho, comparam-se os esforços deste modelo com os esforços encontrados na treliça plana desenvolvida em Guillou (2011).

A Figura 3.3 ilustra os esforços encontrados nos planos A e D da treliça espacial, enquanto que a Figura 3.4 os esforços encontrados nos planos B e C.

**Figura 3.3 – Esforços normais, em kN, nos planos A e D da treliça.**

Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 3.4 – Esforços normais, em kN, nos planos B e C da treliça.**

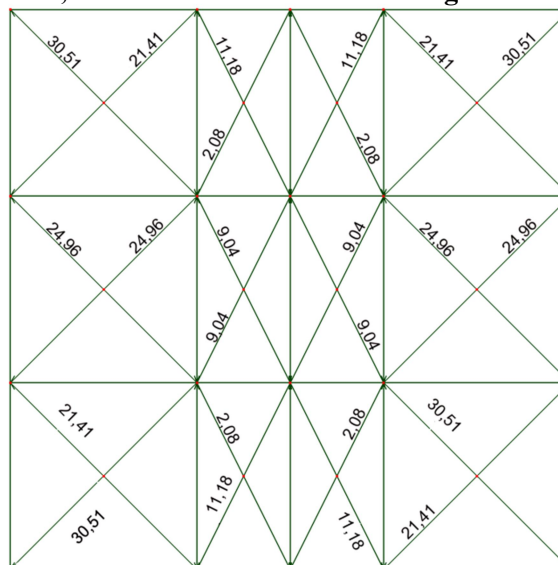


Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que, neste modelo, as barras que serviam apenas como compatibilização, agora estão transferindo esforços. Tal efeito ocorre porque estas barras possuem nós em comum com as barras horizontais que ligam as treliças planas. Percebe-se que nestas barras, os esforços, quando de tração, são insignificantes e quando de compressão, são relativamente baixos, quando comparados aos demais esforços e com a própria resistência à compressão do concreto.

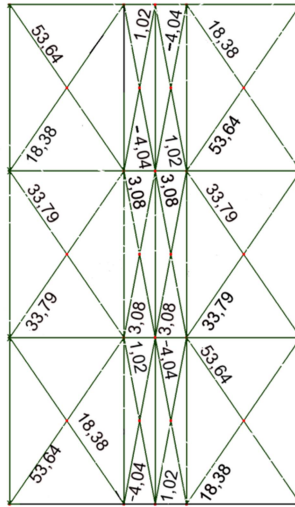
No entanto, analisando as barras de travamento em diagonal, utilizadas para ligar as treliças planas, verificam-se esforços de tração consideráveis. A Figura 3.5 mostra os esforços das barras em diagonal no plano horizontal superior, a Figura 3.6 no plano horizontal médio e a Figura 3.7 no plano horizontal inferior da treliça.

**Figura 3.5 – Esforços, em kN, nas barras de travamento diagonais no plano horizontal superior**



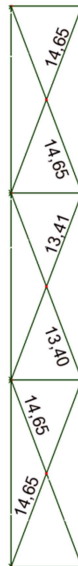
Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 3.6 – Esforços, em kN, nas barras de travamento diagonais no plano horizontal médio**



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 3.7 – Esforços, em kN, nas barras de travamento diagonais no plano horizontal inferior**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Decompondo os esforços das barras na direção paralela às treliças planas, verifica-se que os valores são consideráveis e devem ser somados aos esforços dos tirantes T1 e T2 e biela BT. A parcela destes esforços na direção perpendicular aos planos analisados pode ser descartada, pois o detalhamento do bloco de concreto armado deve ser realizado utilizando a mesma armadura nas duas direções.

Os parâmetros a serem comparados são os esforços nos tirantes T1 e T2 e da biela BT. A Tabela 3.2 mostram os valores dos esforços de forma resumida.

**Tabela 3.2 – Resumo dos esforços**

Treliça	T1 (kN)	T2 (kN)	BT (kN)
<b>A</b>	72,15	47,53	-121,11
<b>B</b>	131,18	36,32	-153,38
<b>C</b>	131,18	36,32	-153,38
<b>D</b>	72,15	47,53	-121,11
<b>Barras diagonais</b>	0,12	108,72	29,99
<b>Total</b>	406,78	276,42	-518,99

Fonte: Elaborada pelo autor.

A soma dos esforços encontrados nas quatro treliças paralelas e das componentes dos esforços encontrados nas barras diagonais é comparada aos valores encontrados nas treliças planas e aos valores derivados das análises elásticas em elementos finitos, encontrados a partir da média dos diagramas de tensões (Guillou, 2011). A Tabela 3.3 mostra esta comparação.

**Tabela 3.3 – Comparação entre os esforços dos modelos**

Modelo	T1 (kN)	T2 (kN)	BT (kN)
<b>Tridimensional</b>	406,8	276,4	-519,0
<b>Plano (Guillou, 2011)</b>	408,8	275,3	-518,9
<b>Resultante das análises elásticas</b>	269,5	246,6	-272,8

Fonte: Elaborada pelo autor.

Já na Tabela 3.4 é possível comparar a relação entre os esforços nos modelos de bielas e tirantes, espacial e plano, e os esforços resultantes das tensões elásticas.

**Tabela 3.4 – Comparação entre as relações dos modelos de bielas e tirantes e as resultantes da análise elástica**

Modelo	T1	T2	BT
<b>Tridimensional</b>	1,51	1,12	1,90
<b>Plano (Guillou, 2011)</b>	1,52	1,12	1,90

Fonte: Elaborada pelo autor.

Após análise do modelo, percebem-se diferenças mínimas entre os esforços, não justificando assim, a utilização do modelo tridimensional proposto. Tal constatação ratifica uma boa aproximação para o modelo plano, ao mesmo tempo em que a previsão de um modelo tridimensional a partir dele não é adequado. Isso sugere que outros tipos de modelos

especiais devem ser estudados a partir de novas abordagens não contempladas no presente trabalho.

## 4 DIMENSIONAMENTO E DETALHAMENTO DO BLOCO ESTUDADO

Já que o modelo de bielas e tirantes tridimensional desenvolvido na Seção 3 mostrou resultados muito próximos ao do modelo plano desenvolvido em Guillou (2011), faz-se o dimensionamento do bloco com base neste último, por praticidade. Para fins comparativos, o mesmo bloco é também dimensionado de forma análoga aos blocos sobre uma estaca, como descrito na Subseção 2.3.

Para o dimensionamento dos blocos são utilizados os mesmos parâmetros do modelo numérico analisado em Guillou (2011). A Tabela 4.1 expõe os dados utilizados.

**Tabela 4.1 – Parâmetros dos elementos dimensionados**

<b>Dim. Pilar</b>	15x80 cm
<b>Dim. Bloco</b>	110x110x60 cm
<b>Carga</b>	2000 kN
$f_{ck}$	30 MPa
$f_{yk}$	500 MPa
$\gamma_c$	1,4
$\gamma_s$	1,15

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 4.1 Dimensionamento análogo aos blocos sobre uma estaca

Este dimensionamento consiste em verificar a resistência à compressão e calcular a armadura para combater aos esforços de fendilhamento, a partir do método simplificado de Langendonck. Calcula-se, ainda, a armadura principal por analogia ao modelo de consolos curtos.

#### 4.1.1 Resistência à compressão

Considerando a região de aplicação da carga em um estado de confinamento, verifica-se a resistência do bloco à compressão excessiva a partir das Equações (2.17) e (2.18):

$$f_{cd}^* = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot \sqrt{\frac{A_{c1}}{A_{c0}}} = \sqrt{\frac{20,625 \cdot 110}{15 \cdot 80}} \cdot \frac{3}{1,4} = 2,95 \frac{kN}{cm^2} \leq 3,3 \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 7,07 \frac{kN}{cm^2}$$

$$R_d = A_{co} \cdot f_{cd}^* = 15 \cdot 80 \cdot 2,95 = 3540,00 \text{ kN}$$



$$3540,00 \text{ kN} \geq 2000 \text{ kN} \rightarrow R_d \geq S_d$$

É verificado, então, que segundo o método simplificado de Langendonck o bloco possui capacidade resistente superior ao carregamento aplicado.

#### 4.1.2 Armadura de fendilhamento

A armadura necessária para resistir ao fendilhamento é calculada seguindo as Equações (2.19) e (2.21):

$$F_{st} = 0,3 \cdot \left(1 - \frac{a_o}{a}\right) \cdot S_d = 0,3 \cdot \left(1 - \frac{15}{110}\right) \cdot 2000 = 518,18 \text{ kN}$$

$$A_{s1} = \frac{F_{st}}{f_{yd}} = \frac{518,18}{50/1,15} = 11,92 \text{ cm}^2$$

É importante ressaltar que esta armadura não depende da altura do bloco, e advém apenas da relação entre a largura do pilar e a largura do bloco na direção analisada.

#### 4.1.3 Armadura principal

Utilizando a Equação (2.23), calcula-se a armadura principal do bloco:

$$A_{s2} = \frac{Fd}{2} \frac{1}{df_{yd}} \frac{(Ap - Ae)}{4} = \frac{2000}{2} \frac{1}{(60 - 7,3)43,5} \frac{(80 - 15)}{4} = 7,09 \text{ cm}^2$$

Observa-se que para determinar a altura útil ( $d$ ), considera-se a distância do eixo das armaduras até a face do bloco, utilizado para o desenvolvimento do modelo de bielas e tirantes ( $d = 7,30 \text{ cm}$ ).

## 4.2 Dimensionamento do bloco com o modelo de bielas e tirantes

### 4.2.1 Dimensionamento dos tirantes

O dimensionamento dos tirantes é feito de forma imediata, aplicando os esforços encontrados na análise da treliça, ilustrados na Figura 3.1, na Equação (2.1):

$$A_{st} = \frac{F_{st}}{f_{yd}} = \frac{406,61}{50/1,15} = 9,35 \text{ cm}^2$$

$$A_{st2} = \frac{F_{st2}}{f_{yd}} = \frac{276,41}{50/1,15} = 6,36 \text{ cm}^2$$

onde  $A_{st1}$  é a armadura necessária para o tirante T1 e  $A_{st2}$  é a armadura necessária para o tirante T2.

#### 4.2.2 Verificação dos nós

Admite-se que o nó N2 é contínuo, já que está localizado em uma região que permite a mudança suave da direção das tensões. O nó N1 é do tipo singular-CCC e os nós N3 e N4 são do tipo singular-CCT.

Os nós são verificados de acordo com os códigos normativos NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014), CEB-FIP (COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON , 1993), ACI 318-05 (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, 2005) e CSA-A23.3 (CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION, 2004). Considerando que o nó N1 é limitado apenas por bielas e apoios e os nós N3 e N4 são regiões com ancoragem de tirantes em apenas uma direção, os valores dos coeficientes  $\beta_n$  utilizados para cada nó de acordo com as normas são dispostos na Tabela 4.2.

**Tabela 4.2 – Coeficiente  $\beta_n$  utilizado para cada nó e de acordo com cada norma**

Nó	ACI	CEB	CSA	NBR
N1	1,00	0,85	0,85	0,85
N3 e N4	0,80	0,6	0,75	0,72

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com estes coeficientes são calculadas as resistências efetivas de cada nó, de acordo com cada norma:

$$f_{cn,N1}^{ACI} = 0,85 \cdot \beta_n \cdot f'_c \cdot \phi = 0,85 \cdot 1,00 \cdot 3,00 \cdot 0,75 = 1,91 \frac{kN}{cm^2}$$

$$f_{cn,N1}^{CEB} = \beta_n \cdot \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] \cdot f_{cd} = 0,85 \cdot \left[ 1 - \frac{30}{250} \right] \cdot \frac{3}{1,5} = 1,49 \frac{kN}{cm^2}$$

$$f_{cn,N1}^{CSA} = 0,60 \cdot \beta_n \cdot f'_c = 0,60 \cdot 0,85 \cdot 3,00 = 1,53 \frac{kN}{cm^2}$$

$$f_{cn,N1}^{NBR} = \beta_n \cdot \left[1 - \frac{f_{ck}}{250}\right] \cdot f_{cd} = 0,85 \cdot \left[1 - \frac{30}{250}\right] \cdot \frac{3}{1,4} = 1,6 \frac{kN}{cm^2}$$

$$f_{cn,N3}^{ACI} = f_{cn,N4}^{ACI} = 0,85 \cdot \beta_n \cdot f'_c \cdot \phi = 0,85 \cdot 0,8 \cdot 3,00 \cdot 0,75 = 1,53 \frac{kN}{cm^2}$$

$$f_{cn,N3}^{CEB} = f_{cn,N4}^{CEB} = \beta_n \cdot \left[1 - \frac{f_{ck}}{250}\right] \cdot f_{cd} = 0,6 \cdot \left[1 - \frac{30}{250}\right] \cdot \frac{3}{1,5} = 1,06 \frac{kN}{cm^2}$$

$$f_{cn,N3}^{CSA} = f_{cn,N4}^{CSA} = 0,60 \cdot \beta_n \cdot f'_c = 0,60 \cdot 0,75 \cdot 3,00 = 1,35 \frac{kN}{cm^2}$$

$$f_{cn,N3}^{NBR} = f_{cn,N4}^{NBR} = \beta_n \cdot \left[1 - \frac{f_{ck}}{250}\right] \cdot f_{cd} = 0,72 \cdot \left[1 - \frac{30}{250}\right] \cdot \frac{3}{1,4} = 1,36 \frac{kN}{cm^2}$$

A Tabela 4.3 resume as resistências efetivas dos nós de acordo com os quatro códigos normativos.

**Tabela 4.3 – Resistência efetiva à compressão dos nós**

Nó	Resistência efetiva - $f_{cn}$ (kN/cm <sup>2</sup> )			
	ACI	CEB	CSA	NBR
N1	1,91	1,49	1,53	1,60
N3 e N4	1,53	1,06	1,35	1,36

Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.2.2.1 Nó N1

Este nó possui quatro faces a serem verificadas. A primeira é a face de aplicação da carga, em que a espessura é igual à largura do pilar. A segunda face a ser verificada é a solicitada pela biela transversal. A espessura desta é o dobro da distância da biela BT à face inferior do bloco ( $d_1 = 3,60$  cm). A terceira e quarta faces são as limitadas pela biela B1. Já que o modelo é simétrico, sabe-se que estas duas faces possuem espessuras iguais, encontradas a partir da Equação (2.10):

$$w_{s1} = \frac{a_0}{2} \cdot \text{sen } \phi + b \cdot \text{cos } \phi = \frac{15}{2} \cdot \text{sen}62,57^\circ + 2 \cdot 3,6 \cdot \text{cos}62,57^\circ = 10,0 \text{ cm}$$

As áreas das faces são determinadas multiplicando-se a espessura pelo comprimento do pilar (80,00 cm). Assim, para esta região nodal, desconsidera-se qualquer contribuição de

resistência das regiões do bloco que estão fora da projeção do pilar, limitando de forma conservadora a resistência do nó.

A resistência de cada face da região nodal é calculada a partir da Equação (2.3), multiplicando-se a resistência efetiva pela área da face a ser analisada. A Tabela 4.4 resume os dados de cálculo, assim como as resistências e solicitações das faces do nó N1.

**Tabela 4.4 – Resistências das faces do nó N1**

		Face 1	Face 2	Faces 3 e 4
<b>Espessura (cm)</b>		15,0	7,2	10,0
<b>Área (cm<sup>2</sup>)</b>		1200,0	576,0	800,0
<b>Resistência - <math>R_{ndi}</math> (kN)</b>	<b>ACI</b>	2292,0	1100,2	1528,0
	<b>CEB</b>	<b>1788,0</b>	858,2	1192,0
	<b>CSA</b>	<b>1836,0</b>	881,3	1224,0
	<b>NBR</b>	<b>1920,0</b>	921,6	1280,0
<b>Solicitação - <math>S_{ndi}</math> (kN)</b>		2000,0	518,9	1126,6

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: Os valores em vermelho são inferiores aos esforços encontrados no modelo de bielas e tirantes

Observa-se que para a Face 1, na qual se aplica a carga, apenas os valores obtidos a partir do procedimento descrito no ACI 318 (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, 2005) são maiores que a solicitação. Logo, caso o dimensionamento esteja sendo realizado utilizando algum dos outros códigos, é necessário aumentar a resistência característica do concreto ou utilizar armadura de cintamento. A Tabela 4.5 mostra qual a resistência característica do concreto seria necessária para cada um dos textos normativos.

**Tabela 4.5 – Resistência característica necessária para o nó N1**

<b>Norma</b>	<b><math>f_{ck}</math> (MPa)</b>
<b>ACI</b>	30
<b>CEB</b>	34
<b>CSA</b>	33
<b>NBR</b>	32

Fonte: Elaborada pelo autor.

## 4.2.2.2 Nó N3

Nesta região nodal devem ser verificadas três faces. A primeira é a face de aplicação da carga, sendo a espessura desta igual a um quarto do comprimento do pilar (20,0 cm). A segunda face é a limitada pelo tirante T2, e sua espessura é duas vezes a distância do tirante à face superior do bloco ( $d_1 = 7,3$  cm). A terceira face é limitada pela biela B2, na qual a espessura é encontrada a partir da Equação (2.11):

$$w_{s3} = l_b \cdot \text{sen}\theta + w_t \cdot \text{cos}\theta = 20 \cdot \text{sen}60,2^\circ + 2 \cdot 7,3 \cdot \text{cos}60,2^\circ = 24,6 \text{ cm}$$

As áreas das faces são determinadas multiplicando-se a espessura pela largura do pilar (15,00 cm). Interessante ressaltar que em termos de profundidade, apesar da face limitada pela biela estar concentrada apenas na largura do pilar, a armadura é distribuída por todo o bloco e, portanto, esta região nodal se torna incoerente. Esta é uma das limitações de se analisar um elemento de volume por um modelo plano.

A resistência de cada face da região nodal é calculada a partir da Equação (2.9), multiplicando-se a resistência efetiva pela área da face a ser analisada.

A Tabela 4.6 resume os dados de cálculo, assim como as resistências e solicitações das faces do nó N3.

**Tabela 4.6 - Resistências das faces do nó N3**

		Face 1	Face 2	Face 3
<b>Espessura (cm)</b>		20,0	14,6	24,6
<b>Área (cm<sup>2</sup>)</b>		300,0	219,0	369,0
<b>Resistência - <math>R_{nd3}</math> (kN)</b>	<b>ACI</b>	<b>459,0</b>	335,1	<b>564,6</b>
	<b>CEB</b>	<b>318,0</b>	<b>232,1</b>	<b>391,1</b>
	<b>CSA</b>	<b>405,0</b>	295,7	<b>498,2</b>
	<b>NBR</b>	<b>408,0</b>	297,9	<b>501,8</b>
<b>Solicitação - <math>S_{nd3}</math> (kN)</b>		500,0	276,4	571,3

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: Os valores em vermelho são inferiores aos esforços encontrados no modelo de bielas e tirantes

Observa-se que para nenhum código normativo esta região nodal possui resistência superior à solicitação. Da mesma forma que no nó N1, a solução seria aumentar a resistência

característica do concreto. A Tabela 4.7 mostra os valores necessários para cada código normativo.

**Tabela 4.7 – Resistência característica necessária para o nó N3**

Norma	$f_{ck}$ (MPa)
ACI	33
CEB	53
CSA	38
NBR	38

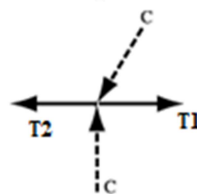
Fonte: Elaborada pelo autor.

Verifica-se que para o CEB-FIP (COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993) a resistência característica necessária é muito maior do que para os demais códigos.

#### 4.2.2.3 Nó N4

Apesar deste nó ser do tipo CCT, ele é diferente do nó N3, pois o tirante não ancora na região nodal, e sim passa direto. Neste caso, o equilíbrio do nó acontece pela diferença de esforços que ocorre no tirante, como ilustra a Figura 4.1.

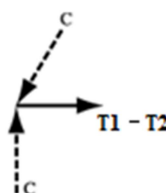
**Figura 4.1 – Equilíbrio do nó N4**



Fonte: American Concrete Institute (ACI 318, 2005).

Faz-se então uma adaptação da região nodal, em que uma das faces estará sujeita ao esforço equivalente à diferença entre os esforços do tirante à montante e à jusante do nó, como ilustra a Figura 4.2.

**Figura 4.2 – Equilíbrio do nó N4 adaptado**



Fonte: American Concrete Institute (ACI 318, 2005).

Assim sendo, as espessuras das faces desta região nodal são calculadas da mesma forma que no nó N3. A Tabela 4.8 resume os dados de cálculo das resistências das faces do nó N4.

**Tabela 4.8 – Resistências das faces do nó N4**

		Face 1	Face 2	Face 3
<b>Espessura (cm)</b>		20,0	14,6	23,4
<b>Área (cm<sup>2</sup>)</b>		300,0	219,0	351,0
<b>Resistência - <math>R_{nd4}</math> (kN)</b>	<b>ACI</b>	<b>459,0</b>	335,1	537,0
	<b>CEB</b>	<b>318,0</b>	232,1	<b>372,1</b>
	<b>CSA</b>	<b>405,0</b>	295,7	<b>473,9</b>
	<b>NBR</b>	<b>408,0</b>	297,9	<b>477,4</b>
<b>Solicitação - <math>S_{nd4}</math> (kN)</b>		500,0	164,1	526,2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: Os valores em vermelho são inferiores aos esforços encontrados no modelo de bielas e tirantes.

Assim como no nó N3, esta região nodal não possui resistência superior à solicitação de cálculo, para nenhum dos códigos normativos aplicados neste trabalho. Os valores das resistências características necessárias para cada código normativo são iguais aos do nó N3 e estão dispostos na Tabela 4.7.

#### 4.2.3 Verificação das bielas

As bielas são idealizadas como radiais, em que próximo à face do bloco ou da aplicação da carga suas áreas são menores, com tensões mais elevadas, enquanto que no centro do bloco, as áreas são maiores e as tensões mais suaves. Assim, as menores áreas das bielas serão iguais às áreas das faces dos seus respectivos nós, resumidas na Tabela 4.9.

**Tabela 4.9 – Menores áreas das bielas**

<b>Biela</b>	<b>B1</b>	<b>B2</b>	<b>B3</b>
<b>Área - <math>A_{cs}</math> (cm<sup>2</sup>)</b>	800,0	369,0	351,0

Fonte: Elaborada pelo autor.

As resistências efetivas das bielas pelo ACI 318 (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, 2005), CEB-FIP (COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993) e

NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014) são iguais para as bielas B1, B2 e B3. Considerando que as bielas estão em regiões fissuradas com armaduras transversais, na Tabela 4.10 apresenta-se o valor do coeficiente  $\beta_s$  para cada código normativo.

**Tabela 4.10 – Coeficiente  $\beta_s$  utilizado para cada biela e de acordo com cada norma**

ó	ACI	CEB	NBR
<b>B1</b>	0,75	0,6	0,72
<b>B2</b>			
<b>B3</b>			

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para determinar as resistências efetivas pelo ACI 318 (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, 2005) utiliza-se a equação (2.4). Já para o CEB-FIP (COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993) e NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014), utiliza-se a equação (2.5).

$$f_{cu,B1}^{ACI} = f_{cu,B2}^{ACI} = f_{cu,B3}^{ACI} = 0,85 \cdot \beta_n \cdot f'_c \cdot \phi = 0,85 \cdot 0,75 \cdot 3,00 \cdot 0,75 = 1,44 \frac{kN}{cm^2}$$

$$f_{cu,B1}^{CEB} = f_{cu,B2}^{CEB} = f_{cu,B3}^{CEB} = \beta_n \cdot \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] \cdot f_{cd} = 0,6 \cdot \left[ 1 - \frac{30}{250} \right] \cdot \frac{3}{1,5} = 1,06 \frac{kN}{cm^2}$$

$$f_{cu,B1}^{NBR} = f_{cu,B2}^{NBR} = f_{cu,B3}^{NBR} = \beta_n \cdot \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] \cdot f_{cd} = 0,72 \cdot \left[ 1 - \frac{30}{250} \right] \cdot \frac{3}{1,4} = 1,36 \frac{kN}{cm^2}$$

Para a norma canadense CSA-A23.3 (CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION, 2004), a resistência efetiva da biela varia com a deformação de tração na direção perpendicular à biela ( $\varepsilon_1$ ), que, por sua vez, depende do ângulo entre a biela e o tirante. Utiliza-se a equação (2.7) para o cálculo do parâmetro  $\varepsilon_1$  de cada biela.

$$\varepsilon_{1,B1} = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + 0,002) \cdot \cot g^2 \theta = \frac{\frac{500}{1,15}}{210000} + \left( \frac{\frac{500}{1,15}}{210000} + 0,002 \right) \cdot \cot g^2 62,57^\circ = 3,17 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{1,B2} = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + 0,002) \cdot \cot g^2 \theta = \frac{\frac{500}{1,15}}{210000} + \left( \frac{\frac{500}{1,15}}{210000} + 0,002 \right) \cdot \cot g^2 60,2^\circ = 3,40 \cdot 10^{-3}$$



$$\varepsilon_{1,B3} = \varepsilon_s + (\varepsilon_s + 0,002) \cdot \cot g^2 \theta = \frac{\frac{500}{1,15}}{210000} + \left( \frac{\frac{500}{1,15}}{210000} + 0,002 \right) \cdot \cot g^2 72,9^\circ = 2,46 \cdot 10^{-3}$$

Os valores do parâmetro  $\varepsilon_1$  para cada biela são mostrados na Tabela 4.11.

**Tabela 4.11 – Parâmetro  $\varepsilon_1$  de cada biela**

Biela	$\varepsilon_1$
<b>B1</b>	0,00317
<b>B2</b>	0,00340
<b>B3</b>	0,00246

Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando a Equação (2.6), calcula-se a resistência efetiva de cada biela, de acordo com a norma canadense CSA-A23.3 (CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION, 2004):

$$f_{cu,B1}^{CSA} = \phi_c \cdot \frac{f'_c}{0,80 + 170 \cdot \varepsilon_1} = 0,60 \cdot \frac{3,00}{0,80 + 170 \cdot 3,17 \cdot 10^{-3}} = 1,34 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$f_{cu,B2}^{CSA} = \phi_c \cdot \frac{f'_c}{0,80 + 170 \cdot \varepsilon_1} = 0,60 \cdot \frac{3,00}{0,80 + 170 \cdot 3,4 \cdot 10^{-3}} = 1,31 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$f_{cu,B3}^{CSA} = \phi_c \cdot \frac{f'_c}{0,80 + 170 \cdot \varepsilon_1} = 0,60 \cdot \frac{3,00}{0,80 + 170 \cdot 2,46 \cdot 10^{-3}} = 1,48 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Os valores das resistências efetivas estão resumidos na Tabela 4.12.

**Tabela 4.12 – Resistência efetiva à compressão das bielas**

Biela	Resistência efetiva - $f_{cu}$ (kN/cm <sup>2</sup> )			
	ACI	CEB	CSA	NBR
<b>B1</b>	1,44	1,06	1,34	1,36
<b>B2</b>			1,31	
<b>B3</b>			1,48	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, utilizando a Equação (2.3), determina-se a resistência de cálculo de cada biela, comparando-a com as solicitações de cálculo, com o auxílio da Tabela 4.13.

**Tabela 4.13 – Resistência de cálculo das bielas**

		B1	B2	B3
<b>Resistência - <math>R_{sd}</math> (kN)</b>	<b>ACI</b>	1152,0	<b>531,4</b>	<b>505,4</b>
	<b>CEB</b>	<b>848,0</b>	<b>391,1</b>	<b>372,1</b>
	<b>CSA</b>	<b>1072,0</b>	<b>483,4</b>	<b>459,8</b>
	<b>NBR</b>	<b>1088,0</b>	<b>501,8</b>	<b>477,4</b>
<b>Solicitação - <math>S_{nd4}</math> (kN)</b>		1126,6	571,3	526,2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota: Os valores em vermelho são inferiores aos esforços encontrados no modelo de bielas e tirantes

Observa-se que em nenhum dos casos as bielas são resistentes o suficiente para suportar a solicitação de cálculo, excetuando-se a biela B1 considerando os parâmetros do ACI 318 (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, 2005). Portanto, é necessário aumentar a resistência característica do concreto para este elemento estrutural. A Tabela 4.14 mostra qual a resistência necessária para cada código normativo.

**Tabela 4.14 – Resistência característica do concreto necessária para cada código normativo**

<b>Norma</b>	<b><math>f_{ck}</math> (MPa)</b>
<b>ACI</b>	33
<b>CEB</b>	50
<b>CSA</b>	37
<b>NBR</b>	35

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 4.3 Análise dos resultados e comparação entre os métodos de dimensionamento

Quanto ao dimensionamento da armadura do bloco, percebe-se a proximidade dos valores encontrados a partir do modelo de bielas e tirantes e do dimensionamento de blocos para uma estaca. A Tabela 4.15 resume os resultados.

**Tabela 4.15 – Comparação entre armaduras dimensionadas (cm<sup>2</sup>)**

Fendilhamento no Centro do Bloco		Tração na Face do Bloco	
$A_{s1}$	11,92	$A_{s2}$	7,09
$A_{st1}$	9,35	$A_{st2}$	6,36
$\frac{A_{st1}}{A_{s1}}$	0,79	$\frac{A_{st2}}{A_{s2}}$	0,90

Fonte: Elaborada pelo autor.

No caso da armação contra o fendilhamento, o resultado pode se aproximar ainda mais, caso seja utilizado o modelo de bielas e tirantes conforme Figura 2.18 no lugar da Equação (2.19).

Já no caso da resistência à compressão do concreto, verifica-se uma diferença muito grande entre os resultados. Enquanto que na teoria dos blocos parcialmente carregados há um acréscimo de resistência devido ao confinamento do concreto, na verificação das bielas e tirantes e nós há uma diminuição muito grande da resistência. A Tabela 4.16 mostra a resistência característica necessária do concreto para os diferentes dimensionamentos.

**Tabela 4.16 – Resistência característica do concreto necessária de acordo com o método de dimensionamento**

Método de Dimensionamento		$f_{ck}$ (MPa)
Bloco Parcialmente Carregado		17
Modelo de bielas e tirantes	ACI	33
	CEB	53
	CSA	38
	NBR	38

Fonte: Elaborada pelo autor.

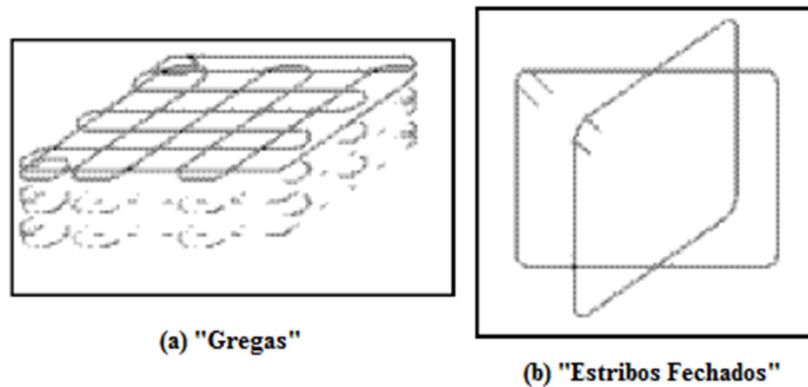
Pelas análises elásticas por meio do MEF, verifica-se que as regiões de tensões máximas de compressão realmente possuem um efeito de confinamento, sendo que a tração e o aparecimento das fissuras ocorrem fora da região de aplicação de carga e apoio. Isso revela que os valores de resistência destas regiões nodais são subestimados pelas avaliações utilizadas no dimensionamento do bloco a partir do modelo de bielas e tirantes. Para confirmar tal comportamento se faz necessário realizar análises não lineares e/ou ensaios experimentais, avaliando o comportamento do elemento estrutural durante o processo de incrementos de carga.

Deve-se destacar, também, o fato de que são utilizados valores característicos de normas técnicas diferentes, os quais são encontrados com diferentes formas de amostragem e coeficientes ponderadores. Portanto, não é possível comparar diretamente tais valores, ou julgar mais ou menos conservador.

#### 4.4 Detalhamento

Para a disposição das armaduras dentro do bloco, adota-se a utilização de "gregas" para resistir às tensões de fendilhamento no centro do bloco, estas chamadas de armaduras de fendilhamento, e "estribos fechados" para combater aos esforços de tração nas faces superior e inferior do bloco, chamados de armadura principal. A Figura 4.3 ilustra tais armações.

**Figura 4.3 – Tipos de armaduras utilizadas**

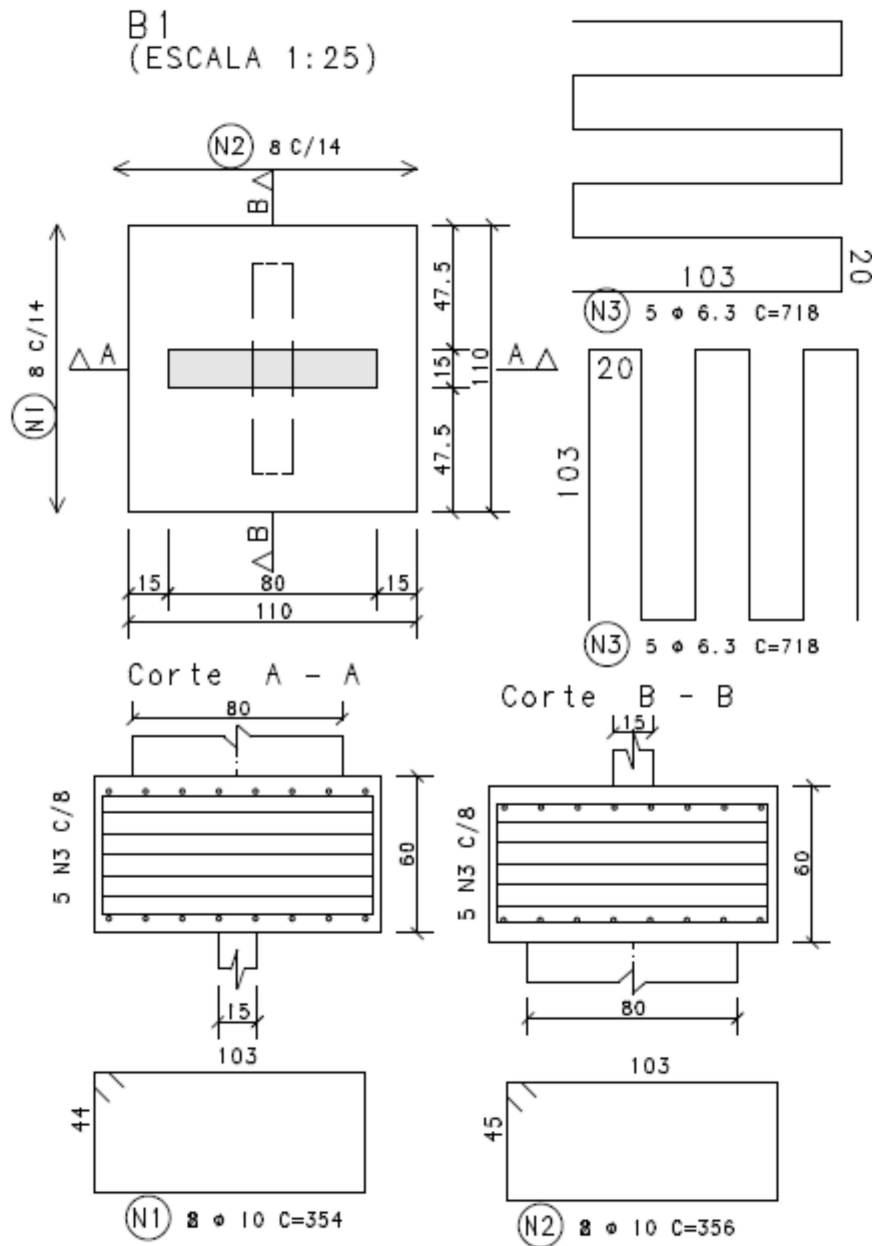


Fonte: Adaptado de TQS Informática Ltda ([s.d]).

Sendo a área de aço necessária para a armadura de fendilhamento igual a  $9,4 \text{ cm}^2$ , adotam-se cinco "gregas" distribuídas ao longo da altura, com seis "pernas" cada e diâmetro igual a  $6,3 \text{ mm}$ , totalizando  $9,4 \text{ cm}^2$ .

Já para a armadura principal, precisa-se de  $6,3 \text{ cm}^2$  de área de aço. São dispostos oito "estribos fechados" de diâmetro igual a  $10,0 \text{ mm}$ , totalizando uma área de aço de  $6,3 \text{ cm}^2$ . O detalhamento final do bloco pode ser verificado na Figura 4.4.

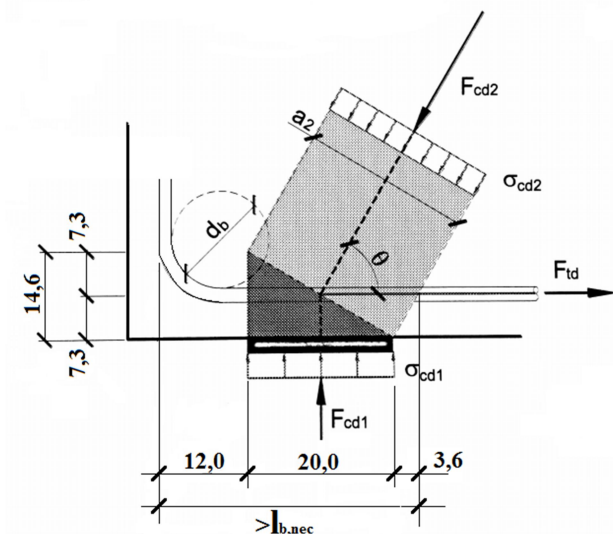
Figura 4.4 – Detalhamento do bloco de transição



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para garantir a segurança nas regiões nodais, além de verificar as tensões nas faces do nó, é necessário garantir a ancoragem das armaduras, quando o nó é do tipo CCT, CTT ou TTT. A ancoragem se inicia quando o tirante entra na zona nodal estendida, como ilustra a Figura 4.5.

Figura 4.5 – Verificação da ancoragem da armadura principal, nó N3



Fonte: Adaptado de Santos (2013).

Seguindo a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014), o cálculo do comprimento de ancoragem necessário é determinado por

$$l_{b,nec} = \alpha_1 \cdot l_b \cdot \frac{A_{s,calc}}{A_{s,ef}} \geq 25 \cdot \phi \quad (0.1)$$

com

$$l_b = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_{yk}}{f_{bd} \cdot \gamma_s} \quad (0.2)$$

tal que

$$f_{bd} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot f_{ctd} \quad (0.3)$$

e

$$f_{ctd} = 0,3 \cdot 0,7 \cdot \frac{f_{ck}^{2/3}}{\gamma_c} \quad (0.4)$$

onde:

$\eta_1$  - coeficiente que leva em conta o tipo de barra de aço utilizada;

$\eta_2$  - coeficiente que leva em conta a qualidade da aderência de acordo com a posição da barra;

$\eta_3$  - coeficiente que leva em conta o diâmetro da barra ancorada;

$A_{s,calc}$  - área de aço calculada;

$A_{s,ef}$  - área de aço efetiva;

$\alpha_1$  - coeficiente que leva em conta a existência de ganchos ou barras transversais soldadas.

$\gamma_c$  - coeficiente ponderador da resistência do concreto ( $\gamma_c = 1,4$ )

$\gamma_s$  - coeficiente ponderador da resistência do aço ( $\gamma_s = 1,15$ )

$\phi$  - diâmetro nominal da barra de aço.

Considerando que  $\eta_1 = 2,25$  (barras de aço nervuradas),  $\eta_2 = 0,70$  (zona de má aderência),  $\eta_3 = 1,00$  ( $\phi = 10mm < 32mm$ ),  $A_{s,calc} = A_{s,ef}$  e  $\alpha_1 = 0,70$  (existência de gancho), para um concreto com  $f_{ck} = 30,0$  MPa e aço CA-50, tem-se que  $l_{b,nec} = 34,0$  cm.

Para este nó, verifica-se na Figura 4.5 que o comprimento de ancoragem disponível ( $l_{b,disp}$ ), é igual a

$$l_{b,disp} = 12,0 + 20,0 + 3,6 = 35,6 \text{ cm}$$

e como

$$l_{b,nec} \leq l_{b,disp}$$

a verificação da ancoragem é satisfeita.

## 5 ANÁLISES NUMÉRICAS APLICANDO A NÃO LINEARIDADE FÍSICA DO CONCRETO

Nesta seção são realizadas análises numéricas aplicando a não linearidade física ao concreto e ao aço, com o objetivo de obter informações sobre o comportamento do bloco utilizado na transição de pilares rotacionados, quando submetidos a incrementos de cargas, verificando a evolução do dano, a capacidade de carga do elemento e o modo de ruptura. Para tal, é utilizado o mesmo exemplo do bloco dimensionado e detalhado a partir do modelo de bielas e tirantes na Seção 4 deste trabalho.

### 5.1 Propriedades dos materiais

Por falta de ensaios experimentais para uma análise comparativa, são adotados modelos teóricos encontrados em códigos normativos e na literatura, para definição das propriedades dos materiais.

#### 5.1.1 Propriedades do aço

Para simular o comportamento mecânico do aço, admite-se uma relação constitutiva elástica linear até a tensão de escoamento do aço e a partir deste ponto considera-se perfeitamente plástico, como ilustrado pela Figura 2.48. Os parâmetros utilizados módulo de elasticidade ( $E_s$ ), coeficiente de Poisson ( $\nu_s$ ) e tensão de escoamento ( $f_{yk}$ ) são descritos na Tabela 5.1.

**Tabela 5.1 – Parâmetros do aço**

Módulo de Elasticidade ( $E_s$ )	210000 MPa
Coef. de Poisson ( $\nu_s$ )	0,3
Tensão de escoamento ( $f_{yk}$ )	500 MPa

Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 5.1.2 Propriedades do concreto

Os parâmetros do concreto são baseados no código modelo CEB-FIP (COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993) e, considerando a resistência à compressão característica  $f_{ck} = 30,0 \text{ MPa}$ , encontra-se o módulo de elasticidade a partir de



$$E_{ci} = E_{co} \left[ \frac{(f_{ck} + \Delta f)}{f_{cmo}} \right]^{\frac{1}{3}} = 2.15 \cdot 10^4 \cdot \left[ \frac{(30 + 8)}{10} \right]^{\frac{1}{3}} = 33550 \text{ MPa} \quad (5.1)$$

onde:

$E_{ci}$  - é o módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias (MPa);

$\Delta f = 8 \text{ MPa}$ ;

$f_{cmo} = 10 \text{ MPa}$ ;

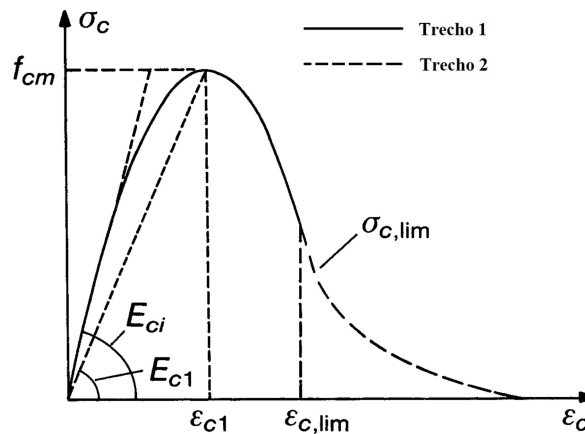
$E_{co} = 2.15 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ .

Já para o coeficiente de Poisson, adota-se  $\nu_c = 0,2$ .

#### 5.1.2.1 Comportamento na compressão

O diagrama tensão-deformação de compressão uniaxial do concreto adotado é o descrito no código modelo CEB-FIP (COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993). Tal modelo consiste em dois trechos, como ilustra a Figura 5.1.

**Figura 5.1 – Modelo de diagrama tensão-deformação para compressão uniaxial**



Fonte: Adaptado de CEB-FIT (1993).

O primeiro é regido por

$$\sigma_c = - \frac{\left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \cdot \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}} \right)^2 \right)}{1 + \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) \cdot \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}} \cdot (f_{ck} + \Delta f) \quad (5.2)$$

onde:

$E_{ci}$  - módulo da tangente;

$\sigma_c$  - tensão de compressão (MPa);

$\varepsilon_c$  - deformação na compressão;

$\varepsilon_{c1} = -0.0022$ ;

$E_{c1} = \frac{(f_{ck} + \Delta f)}{0.0022}$ , é o módulo secante da origem ao pico da curva.

Este trecho só é válido até o ponto de deformação limite ( $\varepsilon_{c,lim}$ ), encontrada a partir de

$$\frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{ci}}{E_{c1}} + 1 \right) + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{ci}}{E_{c1}} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

Já o segundo trecho, esse é utilizado para deformações maiores que a limite e é determinado por

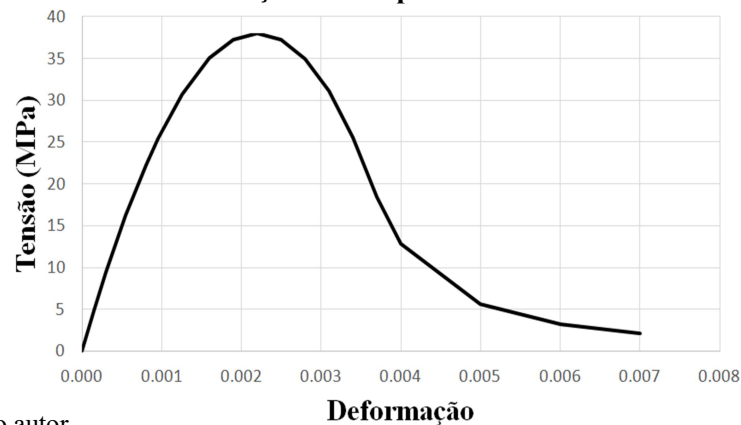
$$\sigma_c = - \left[ \left( \frac{1}{\frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}} \xi - \frac{2}{\left(\frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}}\right)^2}} \right) \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 + \left( \frac{4}{\frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}} - \xi} \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right]^{-1} f_{cm} \quad (5.4)$$

com

$$\xi = \frac{4 \left[ \left( \frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) + 2 \frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}} - \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \right]}{\left[ \frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}} \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) + 1 \right]} \quad (5.5)$$

Assim, assumindo um  $f_{ck} = 30,0 \text{MPa}$ , chega-se ao diagrama ilustrado na Figura 5.2.

**Figura 5.2 – Diagrama tensão-deformação de compressão uniaxial utilizado no modelo**



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir dos pontos dessa curva, encontram-se os valores de deformações inelásticas e de dano na compressão, utilizando as Equações (2.49), (2.50), (2.28) e (2.29).

A Tabela 5.2 resume os dados utilizados na caracterização do concreto à compressão.

**Tabela 5.2 – Caracterização do concreto à compressão**

$\sigma_c$ (MPa)	E	$\xi_c^{in}$	$d_c$
0,00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
4,84	1,49E-04	4,63E-06	0,00
9,40	2,99E-04	1,87E-05	0,00
16,29	5,49E-04	6,36E-05	0,00
22,26	7,99E-04	1,36E-04	0,00
25,40	9,49E-04	1,92E-04	0,00
30,67	1,25E-03	3,36E-04	0,00
35,05	1,60E-03	5,55E-04	0,00
37,26	1,90E-03	7,90E-04	0,00
38,00	2,20E-03	1,07E-03	0,00
37,24	2,50E-03	1,39E-03	0,02
34,95	2,80E-03	1,76E-03	0,08
31,08	3,10E-03	2,17E-03	0,18
25,59	3,40E-03	2,64E-03	0,33
18,44	3,70E-03	3,15E-03	0,51
12,88	4,00E-03	3,62E-03	0,66
5,67	5,00E-03	4,83E-03	0,85
3,26	6,00E-03	5,90E-03	0,91
2,13	7,00E-03	6,94E-03	0,94

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 5.1.2.2 Comportamento na tração

No código modelo CEB-FIP (COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON, 1993) não há nenhuma recomendação quanto ao trecho descendente do diagrama tensão-deformação do concreto na tração uniaxial. No entanto, descreve o diagrama tensão-abertura de fissuras, ilustrado pela Figura 5.3, em que

$$w_c = \frac{\alpha_F G_F}{f_{ctm}} \quad (5.6)$$

com

$$f_{ctm} = f_{ctk0,m} \left( \frac{f_{ck}}{f_{ck0}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.7)$$

e

$$G_F = G_{F0} \left( \frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0,7} \quad (5.8)$$

onde:

$w_c$  - abertura da fissura (mm) para  $\sigma_{ct} = 0$ ;

$\alpha_F$  - coeficiente para um diâmetro máximo do agregado dado. Para  $d_{m\acute{a}x} = 32 \text{ mm}$ ,  $\alpha_F = 5$ ;

$G_F$  - energia de fratura ( $N \text{ mm/mm}^2$ );

$G_{F0}$  - valor base da energia de fratura, que depende do diâmetro máximo do agregado.

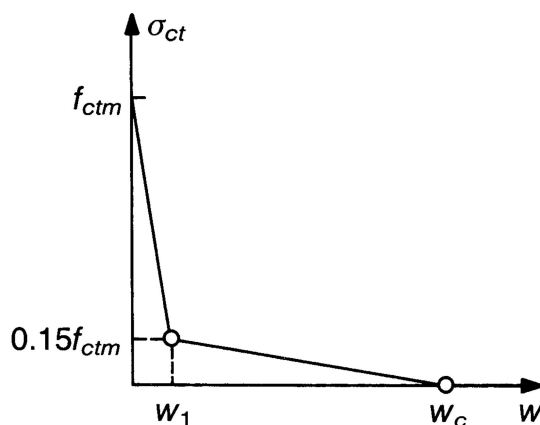
$f_{ctm}$  - resistência à tração (MPa).

$f_{ctk0,m} = 1,4 \text{ MPa}$ ;

$f_{ck0} = 10,0 \text{ MPa}$ ;

$f_{cm0} = 10,0 \text{ MPa}$ ;

**Figura 5.3 – Diagrama tensão-abertura de fissuras**



Fonte: CEB-FIP (1993).

Segundo López-Almansa, Alfarah e Eller (2014), a partir deste diagrama é possível desenvolver o diagrama tensão-deformação utilizando a seguinte equação:

$$\frac{\sigma_t(w)}{\sigma_{t0}} = \left[ 1 + \left( c_1 \frac{w}{w_c} \right)^3 \right] e^{-c_2 \frac{w}{w_c}} - \frac{w}{w_c} (1 + c_1^3) e^{-c_2} \quad (5.9)$$

com

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t0} + \frac{w}{l_{eq}} \quad (5.10)$$

onde:

$w$  - abertura de fissura;

$\sigma_{t0}$  - tensão de tração máxima, ou seja, início de trecho descendente da curva;

$l_{eq}$  - tamanho do elemento finito utilizado;

$\varepsilon_{t0}$  - deformação equivalente à tensão de tração máxima;

$c_1 = 3,0$  e  $c_2 = 6,93$ , para o concreto, segundo Hordjick (1992 apud BIRTEL; MARK, 2006)

Percebe-se que este modelo depende do tamanho do elemento finito adotado. Uma vantagem deste modelo é o fato de ser possível a obtenção da abertura de fissuras a partir das deformações inelásticas, sabendo que, de acordo com Birtel e Mark (2006),

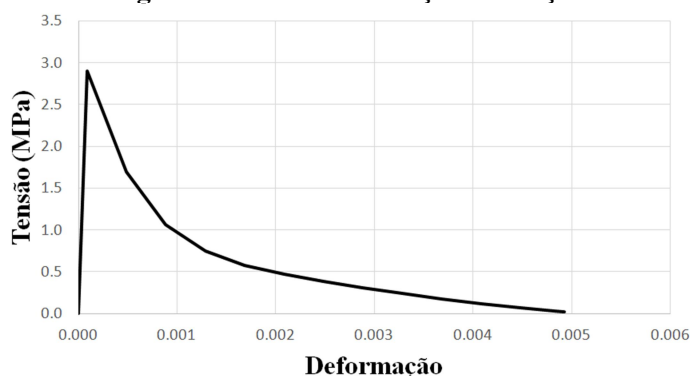
$$w = l_{eq} \cdot \tilde{\varepsilon}_t^{cr} \quad (5.11)$$

Assim, utilizando os parâmetros resumidos na Tabela 5.3, desenvolve-se o diagrama ilustrado na Figura 5.4.

**Tabela 5.3 – Parâmetros considerados para o modelo de tração**

$f_{ck}$ (MPa)	$d_{m\acute{a}x}$ (mm)	$G_{Fo}$ (N/mm)	$G_F$ (N/mm)	$l_{eq}$ (mm)
30	32	0,058	0,148	50

Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 5.4 – Diagrama tensão-deformação de tração uniaxial utilizado no modelo**

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 5.4 resume os dados utilizados na caracterização do concreto à tração.

**Tabela 5.4 – Caracterização do concreto à tração**

$\sigma_t$ (MPa)	E	$\tilde{\xi}_t^{cr}$	$d_t$
2,900	8,64E-05	0,00E+00	0,000
1,698	4,86E-04	4,36E-04	0,414
1,066	8,86E-04	8,55E-04	0,632
0,748	1,29E-03	1,26E-03	0,742
0,579	1,69E-03	1,67E-03	0,800
0,471	2,09E-03	2,07E-03	0,837
0,386	2,49E-03	2,47E-03	0,867
0,309	2,89E-03	2,88E-03	0,894
0,237	3,29E-03	3,28E-03	0,918
0,172	3,69E-03	3,68E-03	0,941
0,114	4,09E-03	4,08E-03	0,961
0,065	4,49E-03	4,48E-03	0,977
0,030	4,83E-03	4,83E-03	0,990
0,021	4,92E-03	4,92E-03	0,993

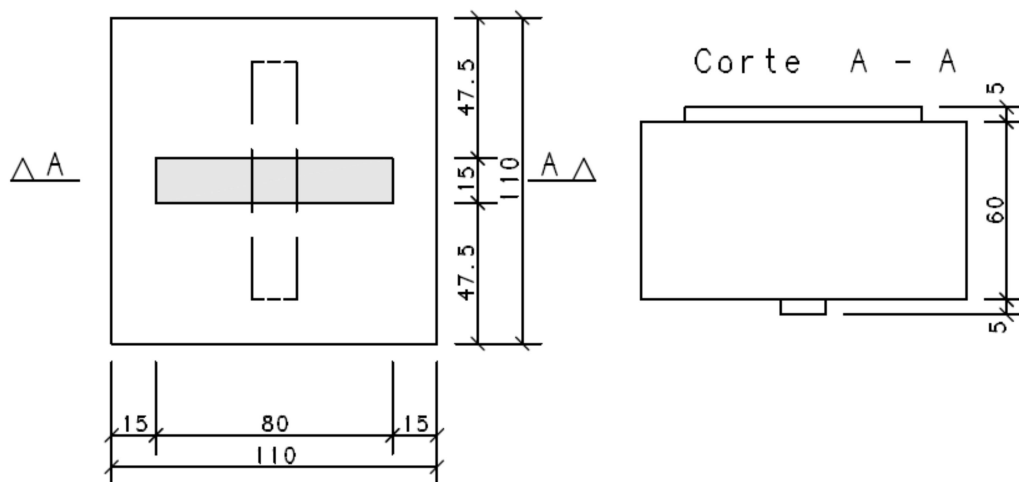
Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5.2 Geometria, malha e condições de contorno

O modelo consiste em um bloco com dimensões em planta iguais a 110,0x110,0 cm e altura igual a 60,0 cm. Considera-se também um trecho de pilar na face superior e outro na face inferior, saindo do bloco apenas 5,0 cm. As solicitações são aplicadas no trecho de pilar

da face superior e no centro deste é medido o deslocamento. A geometria está ilustrada na Figura 5.5.

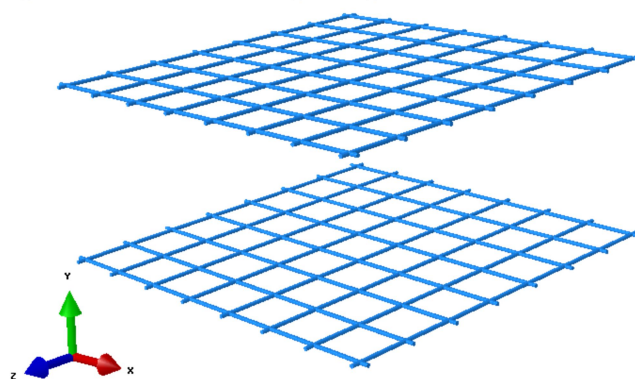
**Figura 5.5 – Geometria do modelo**



Fonte: Elaborada pelo autor.

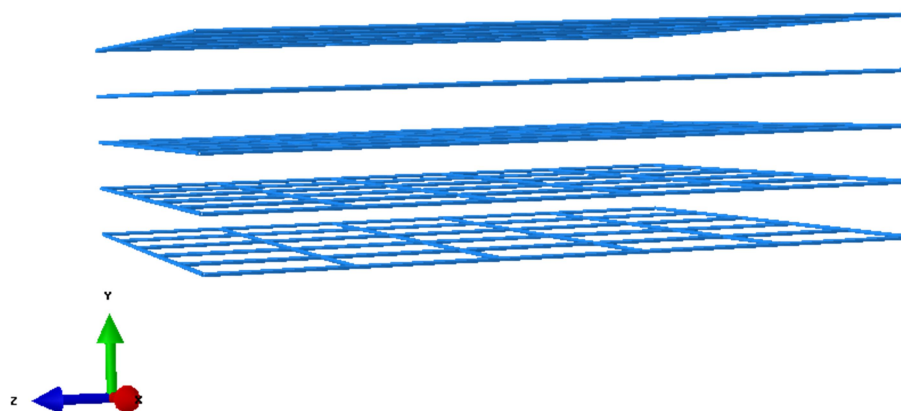
Quanto à armação do bloco, segue-se o detalhamento ilustrado na Figura 4.4, considerando a mesma quantidade de barras e o mesmo diâmetro, porém a armadura é inserida como barras retas, mantendo, desta forma, a simetria do modelo. A Figura 5.6 e a Figura 5.7 ilustram a armadura inserida no modelo.

**Figura 5.6 – Armadura principal inserida no modelo**



Fonte: Elaborada pelo autor.

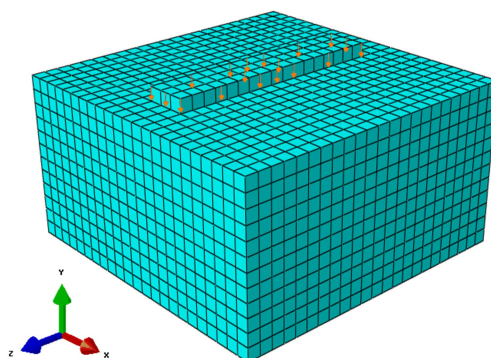
**Figura 5.7 – Armadura de fendilhamento inserida no modelo**



Fonte: Elaborada pelo autor.

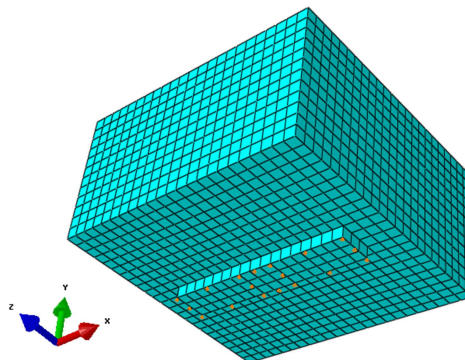
As solicitações são aplicadas como deslocamentos impostos, na direção da altura do bloco (direção Y), e os apoios são simulados a partir da restrição à translação na mesma direção. A Figura 5.8 e Figura 5.9 ilustram a configuração da malha gerada e as condições de contorno utilizadas.

**Figura 5.8 – Malha e deslocamento imposto no trecho superior de pilar.**



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 5.9 – Malha e restrição à translação do trecho inferior de pilar**



Fonte: Elaborada pelo autor.

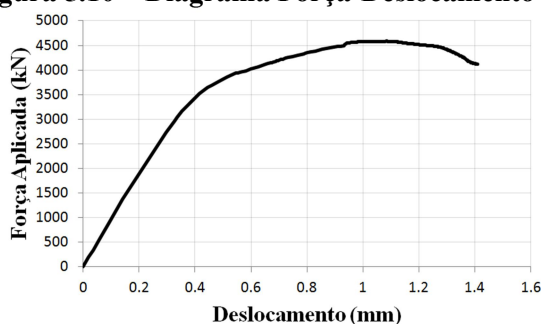


Os elementos finitos utilizados para o bloco são os mesmos adotados na Subseção 2.6.2, porém com dimensões aproximadas de 50,0 mm. Já para as barras de aço, são os mesmos elementos da Subseção 2.6.4.1, com tamanhos aproximados de 50,0 mm.

### 5.3 Análise dos resultados

A partir dos resultados, desenvolve-se o diagrama força-deslocamento ilustrado na Figura 5.10. O deslocamento é medido no centro do trecho de pilar em que é aplicada a solicitação.

**Figura 5.10 – Diagrama Força-Deslocamento**



Fonte: Elaborada pelo autor.

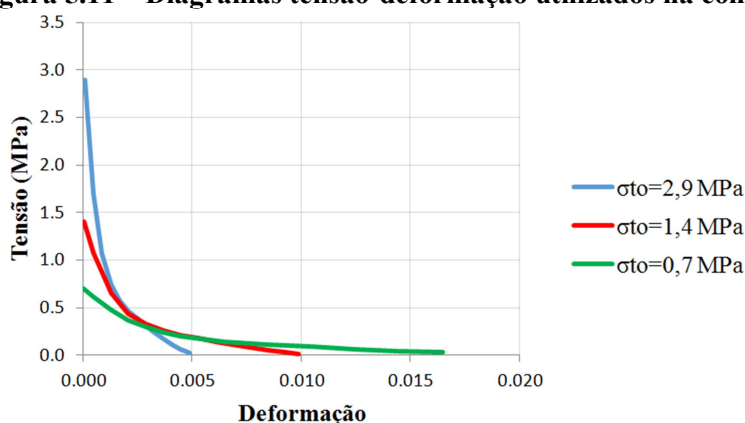
Verificando o diagrama, logo se percebe que a capacidade última deste modelo é muito superior para o que foi dimensionado. Lembra-se aqui que o bloco havia sido dimensionado para uma solicitação de cálculo  $S_d = 2000 \text{ kN}$ , o que significa uma solicitação característica  $S_k = 2000/1,4 = 1428,6 \text{ kN}$  (considerando  $\gamma_f = 1,4$ ). Neste caso, a capacidade última do bloco,  $F_u = 4580 \text{ kN}$ , equivale a 321% da solicitação característica no dimensionamento.

Observa-se que quando a força aplicada é aproximadamente 2000 kN, os valores máximos de tensões nas armaduras estão em torno de 20 MPa o que significa 4% da tensão de escoamento do aço. Logo, quando a carga já está maior que a solicitação de cálculo, a armadura praticamente ainda não começou a "trabalhar". Isso indica que o próprio concreto está resistindo aos esforços de tração.

Neste tipo de elemento, as tensões principais são de compressão. Guillou (2011) constata em suas análises elásticas que as tensões de tração máxima neste bloco equivalem a aproximadamente 16% das tensões de compressão máxima. Sendo assim, a resistência à tração do concreto, por menor que seja, influencia de forma significativa na resistência final do bloco, ao contrário de um elemento submetido à flexão, como no caso da viga, em que a resistência à tração do concreto pouco importa no resultado da capacidade última.

Para quantificar a influência da resistência à tração do concreto na capacidade última do bloco, analisam-se mais dois modelos modificando a resistência à tração e seu diagrama tensão-deformação. No primeiro, considera-se a tensão de tração máxima igual a 1,4 MPa e, no segundo modelo, igual a 0,7 MPa. Os diagramas são construídos seguindo os mesmos princípios descritos na Subseção 5.1.2.2. A Figura 5.11 ilustra a diferença entre os diagramas tensão-deformação.

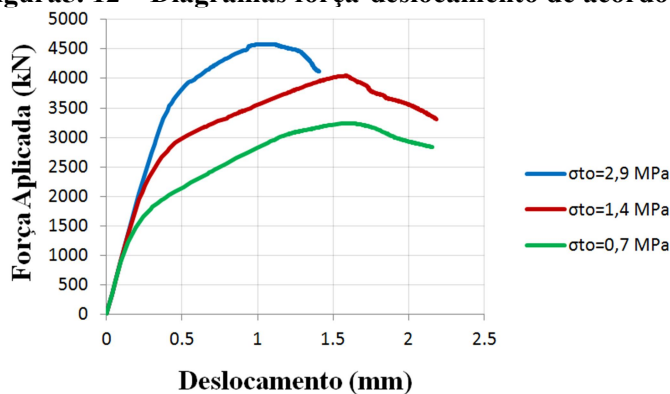
**Figura 5.11 – Diagramas tensão-deformação utilizados na comparação**



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 5.12 ilustra os diagramas força-deslocamento para cada modelo de tração.

**Figura 5.12 – Diagramas força-deslocamento de acordo com  $\sigma_{to}$**

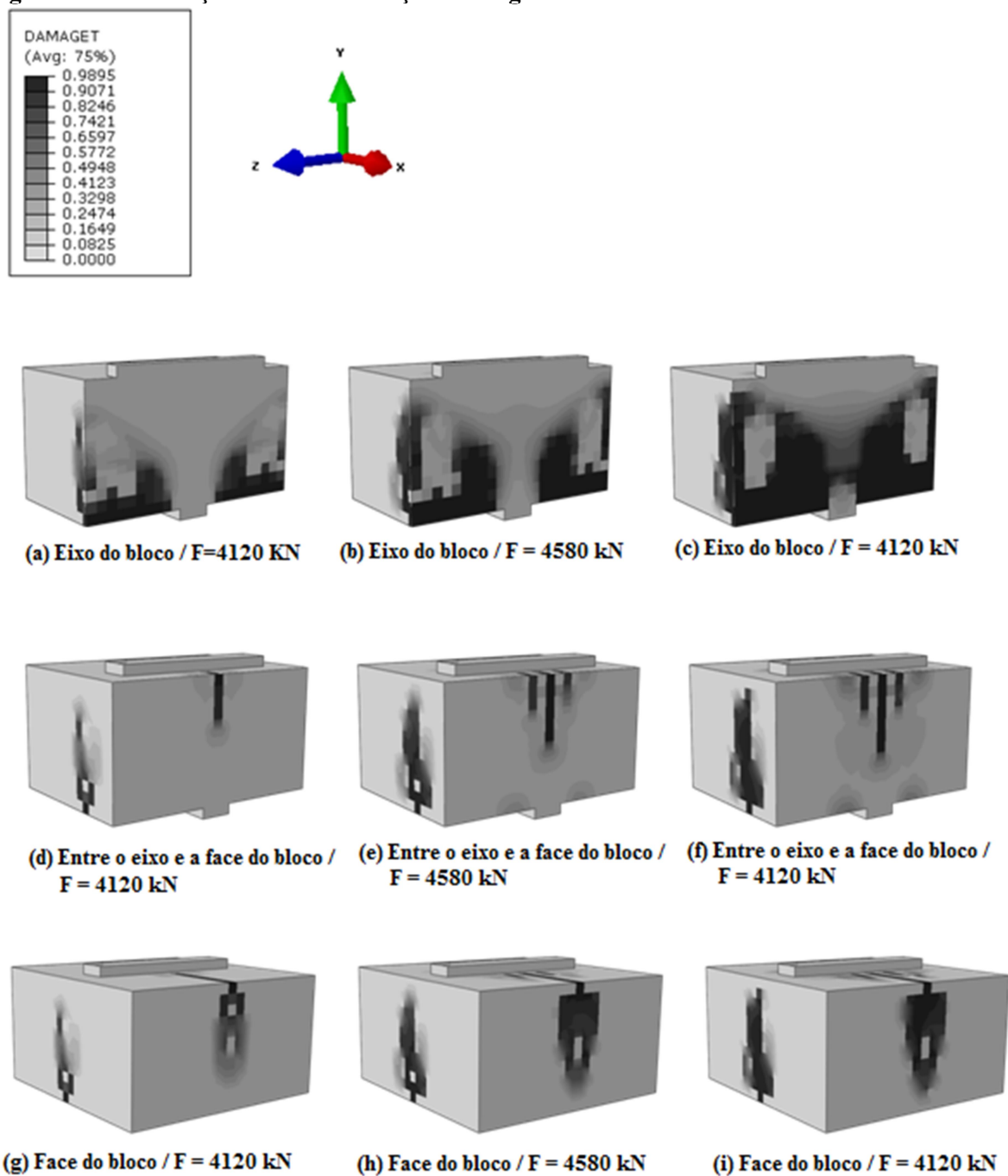


Fonte: Elaborada pelo autor.

Constata-se, então, que a capacidade última diminui significativamente, quando reduzida a resistência à tração do concreto. Segundo estes resultados, em um modelo de bielas e tirantes, quando se despreza qualquer contribuição do concreto no que se diz respeito à resistência à tração, para um elemento com estas características, está se negligenciando boa parte da capacidade última. No entanto, é necessário verificar as condições em serviço, como a abertura de fissuras.

A Figura 5.13 ilustra a evolução do dano na tração em três diferentes planos de corte, no eixo do bloco, na metade entre o eixo e a face do bloco e na própria face do bloco. Com isso, é possível prever um mapeamento de fissuras que ocorreria em um bloco de transição entre pilares rotacionados durante o processo de acréscimo de sollicitação.

**Figura 5.13 – Evolução do dano na tração ao longo do bloco**



Fonte: Elaborada pelo autor.

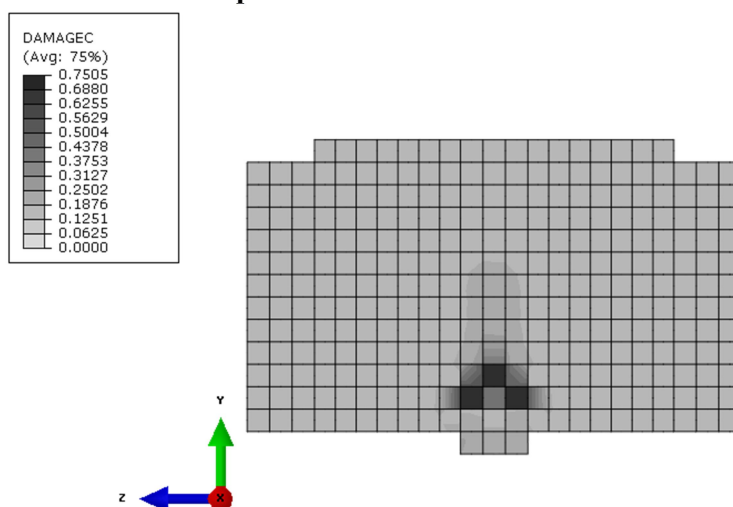
Nas imagens (a), (b) e (c), é possível verificar o dano causado pelas tensões de tração na direção X. Já nas figuras (e), (f) e (g), as tensões de tração surgem na direção Z na face superior do bloco. É possível ver claramente o aumento da primeira fissura e o surgimento de novas fissuras paralelas devido ao acréscimo de carga. Nas figuras (g), (h) e (i), observam-se as fissuras chegando até as faces laterais do bloco. Nas figuras (c), (f) e (i), a força aplicada já está no trecho descendente do diagrama.

A abertura de fissuras no momento da ruptura, calculada a partir das deformações inelásticas, é igual a 0,73 mm e se localiza justamente no alinhamento da primeira fissura. A força aplicada no momento em que ocorre uma abertura de fissura igual a 0,3 mm, valor médio esperado em estruturas de concreto armado, é igual a  $F_{w,lim} = 4130 \text{ kN}$ .

Quanto à tensão nas barras de aço, a armadura de fendilhamento entra em escoamento quando a carga  $F_{y, fend} = 4482 \text{ kN}$ , e a armadura principal quando a carga  $F_{y, prin} = 4580 \text{ kN}$ . Sendo a carga  $F_{y, prin} = F_u$ , entende-se que a ruptura do elemento acontece em função do escoamento da armadura principal.

Quanto à resistência à compressão, percebe-se que o dano na compressão até o momento da ruptura é muito baixo, sendo que no próprio momento da ruptura seu valor máximo é aproximadamente  $d_{c,u}^{máx} = 0,02$ . Percebe-se então que, como imaginado anteriormente, as resistências baixas encontradas para os nós e para as bielas no modelo de bielas e tirantes não correspondem com as análises numéricas.

Após o momento de ruptura, no entanto, o dano na compressão começa a se desenvolver, e seus valores máximos se encontram justamente na região do nó N1 verificado no modelo de bielas e tirantes, confirmando que aqueles são os pontos mais desfavoráveis, quando se verifica as tensões de compressão. A Figura 5.14 ilustra o dano na compressão, quando o bloco já está no trecho descendente do diagrama força-deslocamento.

**Figura 5.14 – Dano na compressão no trecho descendente da curva força-deslocamento**

Fonte: Elaborada pelo autor.

Sendo assim, considera-se que as análises não lineares apresentam resultados qualitativamente adequados, porém a comparação quantitativa destes valores só é possível junto a ensaios experimentais. No entanto, destaca-se que nas análises realizadas por meio de experimentos, o comportamento à tração do concreto a ser utilizado seja devidamente quantificado, pois tende a ser uma variável decisiva para a capacidade última do modelo.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo maior contribuir com os estudos de blocos de transição entre pilares rotacionados, aplicando novos métodos e análises, a fim de desenvolver este tema que ainda é pouco abordado, apesar da grande necessidade técnica atual.

Com o intuito de buscar um modelo de bielas e tirantes mais próximo da realidade, desenvolveu-se um modelo tridimensional, baseado no modelo plano estudado em Guillou (2011). No entanto, apesar da complexidade, o novo modelo apresentou resultados similares aos já obtidos a partir do modelo plano, sendo descartada a viabilidade de sua utilização e ratificada a utilização do modelo plano.

A partir da comparação entre o dimensionamento de um bloco utilizando o modelo plano de bielas e tirantes e análogo a blocos sobre uma estaca, percebe-se que as áreas de aço necessárias são semelhantes, quando considerada a armadura principal no caso de blocos sobre estacas.

O cálculo desta armadura é desconsiderado na maioria das bibliografias, o que leva alguns profissionais a também desconsiderá-la. No entanto, quando as dimensões do pilar são consideravelmente diferentes da estaca, ocorre o efeito de tração nas faces inferior ou superior do bloco que a teoria de blocos parcialmente carregados não considera.

Por outro lado, o modelo plano de bielas e tirantes apresenta incoerências, principalmente, na definição das resistências dos nós e das bielas. Verificou-se que enquanto na teoria dos blocos parcialmente carregados a região de aplicação de carga apresenta acréscimo de resistência por conta do confinamento existente, as resistências dos nós no modelo de bielas e tirantes são bastante penalizadas, sugerindo que a falha do bloco ocorreria por falta de resistência à compressão.

A partir das análises não lineares, verifica-se que a ruptura ocorre pelo escoamento da armadura principal. Observa-se ainda que a carga de ruptura do bloco é muito maior que a solicitação característica, porém varia consideravelmente de acordo com o modelo de tração que seja adotado.

Apesar da análise não linear apresentar adequados resultados em termos qualitativos, só é possível a validação dos termos quantitativos a partir de comparações com ensaios experimentais, sendo esta a principal recomendação para trabalhos futuros. Há ainda de se trabalhar mais na elaboração de modelos de bielas e tirantes, partindo de novas abordagens, como, por exemplo, a otimização topológica. Sabendo que todos os resultados do presente

trabalho são da análise de apenas um exemplo de bloco, é necessária uma pesquisa de cunho estatístico, variando-se as dimensões dos pilares, dos blocos, as solicitações, entre outros.

No mais, percebe-se que este tema ainda está no início, restando muitos estudos e trabalhos, numéricos e experimentais, a serem realizados para se chegar a um conhecimento técnico suficiente para a utilização de tais elementos estruturais com a devida segurança.

## REFERÊNCIAS

- ÁLVARES, M. S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto**: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos. 1993. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) –Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318-05**: building code requirements for structural concrete and commentary. Detroit, 2005.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro, 2014.
- BERGMEISTER, K. et al. **Detailing for structural concrete**. Austin: University of Texas, 1993.
- BIRTEL, V.; MARK P. Parameterised finite element modelling of rc beam shear failure. In: ANNUAL WORLDWIDE ABAQUS USERS' CONFERENCE (AUC), 19., 2006, Massachusetts. **Proceeding...** Massachusetts: ABAQUS, 2006.
- CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION. **CSA Standard-A23.3**: design of concrete structures. Rexdale, 2004.
- COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990**: design code. London, 1993.
- CHEN, W.F.; HAN D.J. **Plasticity for structural engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988.
- EL DEBS, M.K. **Concreto pré-moldado**: fundamentos e aplicações. São Carlos: EESC-USP, 2000.
- FUSCO, P. **Técnica de armar estruturas de concreto**. São Paulo: PINI, 2003.
- GUILLOU, R. A. **Aplicação do modelo de bielas e tirantes para um estudo do comportamento de tensões em blocos de concreto armado utilizados na transição entre pilares rotacionados**. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil)–Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2011.
- HIBBITT, K., KARLSSON, B.; SORENSEN, P. **ABAQUS/CAE user's manual**, Pawtucket: ABAQUS, 2011, Versão 6.11.
- HIBBITT, K., KARLSSON, B.; SORENSEN, P. **ABAQUS analysis user's manual**, Pawtucket: ABAQUS, 2011, Versão 6.11.
- HIBBITT, K., KARLSSON, B.; SORENSEN, P. **ABAQUS theory manual**, Pawtucket: ABAQUS, 2011, Versão 6.11.



JANKOWIAK, T.; LODYGOWSKI, T. Identification of parameters of concrete damage plasticity constitutive model. **Foundations of Civil and Environmental Engineering**, Poznań, n. 6, p. 53-69, 2005.

JOHANNSSON, B.; REITZEL, P. **Numerical analysis of a Reinforced Concrete Beam in abaqus 6.10**. Dinamarca: Aalborg University, 2011.

KMIECIK, P.; KAMINSKI, M. Modelling of reinforced concrete structures and composite structures with concrete strength degradation taken into consideration. **Archives of Civil and Mechanical Engineering**, Amsterdam, v. 11, n. 3, p.623-636, 2011.

LEONHARDT, F.; MÖNNING, E. **Construções de concreto**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. v. 2.

LIU, G. R.; QUEK, S. S. **The finite element method: A practical course**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2003.

LÓPEZ-ALMANZA, F.; ALFARAH, B.; ELLER, S. Numerical simulation of RC Frame testing with damaged plasticity model: comparison with simplified models. In: EUROPEAN CONFERENCE ON EARTHQUAKE ENGINEERING AN SEISMOLOGY, 2., 2014, Istanbul. **Proceeding...** Istanbul: European Association for Earthquake Engineering, 2014.

LUBLINER, J.; OLIVER, J.; OLLER, S.; OÑATE, E. A plastic-damage model for concrete. **International Journal of Solids and Structures**, Amsterdam, v. 25, n. 3, p. 299-326, 1989, ISSN 0020-7683.

KMIECIK, P.; KAMINSKI, M. Modelling of reinforced concrete structures and composite structures with concrete strength degradation taken into consideration. **Archives of Civil and Mechanical Engineering**, Amsterdam, v. 11, n. 3, p. 623-636, 2011, ISSN 1644-9665.

MUNHOZ, F. S. **Análise do comportamento de blocos de concreto armado sobre estacas submetidos à ação de força centrada**. 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) –Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

OLLER, S.; OÑATE, E.; OLIVER, J.; LUBLINER, J. Finite Element Nonlinear Analysis of Concrete Structures Using a "Plastic-Damage Model". **Engineering Fracture Mechanics**, Amsterdam, v. 35, n. 1/2/3, p.219-231, 1990.

PITUBA, J. J. C. **Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto**. 2003. 151 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) –Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

PROENÇA, S. P. B. **Sobre Modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições**. 1998. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) –Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

SANTOS, D. M. **Projeto de estruturas de concreto armado com o auxílio de modelos de bielas e tirantes**. São Paulo: ABECE, 2013, 168 p. [Apostila do Curso de Projeto de Estruturas de Concreto Armado com o Auxílio de Modelos de Bielas e Tirantes - ABECE]

SCHÄFER, K.; SCHLAICH, J. Consistent design of structural concrete using strut and tie model. In: COLÓQUIO SOBRE COMPORTAMENTO E PROJETO DE ESTRUTURAS, 5., 1988, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1988.

SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K.; JENNEWEIN, M. Toward a consistent design of structural concrete. **PCI Journal**, Chicago, v. 32, n. 3, p. 74-150, 1987.

SILVA, R. C.; GIONGO, J. S. **Modelos de bielas e tirantes aplicados a estruturas de concreto armado**. São Carlos: EESC-USP, 2000.

TQS INFORMÁTICA. **Manual teórico CAD/fundações**. São Paulo: TQS Informática, 2011.