Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Superfícies de Curvatura Média Constante Um no Espaço Hiperbólico

Márcio Silva Santos

Orientador: Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório

Maceió, Brasil
28 de Fevereiro de 2011

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S237s Santos, Márcio Silva.
Superfícies de curvatura média constante um no espaço hiperbólico / Márcio Silva Santos. ï 2011.
91 f. : il.

Orientador: Feliciano Marcílio Aguiar Vitório.
Dissertação (mestrado em Matemática) ï Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2011.

Bibliografia: f. 90-91.

1. Superfícies. 2. Curvatura média. 3. Espaço hiperbólico. 4. Representação weierstrass. I. Título.

CDU: 514.763.4

Superfícies de Curvatura Média Constante Um no Espaço Hiperbólico

Márcio Silva Santos

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 28 de Fevereiro de 2011 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório (Orientador)

Prof. Dr. Marcos Petrúcio Almeida Cavalcante

Prof. Dr. Heudson Tosta Mirandola

Aos meus pais Leônidas e Elenice
e a minha esposa Thatiane.

"Bem sei que tudo podes,
e nenhum dos teus planos
pode ser frustrado."
Jó 42:1-2

Agradecimentos

- ✓ A Deus por tudo que tens feito em minha vida.
- ✓ Ao professor Feliciano Vitório pela sua disposição em me ajudar neste trabalho e pelo incentivo em continuar meus estudos em nível de doutorado.
- ✓ Aos professores Heudson Mirandola(UFRJ) e Marcos Petrúcio(UFAL) pelas correções e sugestões que muito contribuiram para a melhoria do trabalho.
- ✓ Ao professor Jesus Zapata(PUCP) por suas valiosas sugestões.
- ✓ A todos professores do Instituto de Matemática que diretamente ou indiretamente contribuiram neste trabalho.
- ✓ Aos meus pais Leônidas e Elenice e meu irmão Wander, pois sem eles esta conquista não teria tanto prazer.
- ✓ À minha amada esposa Thatiane por estar comigo nos momentos mais difíceis desta caminhada e por não me deixar nunca desistir. À minha sogra Maria Teles, que é bênção na minha vida, agradeço pelas palavras de incentivo e pelas orações.
- ✓ Aos meus colegas de turma pela amizade, pelas conversas matemáticas e pelos momentos de descontração. Agradeço especialmente aos colegas Diogo Albuquerque, Rafael Nóbrega, Douglas Cedrim, Giovane Ferreira e Fábio Honorato vulgo "Arapiraca".
- ✓ Finalmente, agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas(FAPEAL) pelo suporte financeiro.

Resumo

O ponto crucial do trabalho é a obtenção de uma representação holomorfa para superfícies de curvatura média um no espaço hiperbólico. Esta representação possui uma grande semelhança com a representação de Weierstrass para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$. A partir disso, obteremos uma gama de resultados acerca da teoria de superfícies de curvatura média um, completas e de curvatura total finita em $\mathbb{H}^3$.

Palavras-chave: Superfícies Mínimas, Espaço Hiperbólico, Representação de Weierstrass.

Abstract

In this work the crucial point is to obtain a holomorphic representation for mean curvature one surfaces in hyperbolic space. This representation has a great resemblance to the Weierstrass representation for minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$. From this, we obtain a range of results about the theory of mean curvature one surfaces complete and finite total curvature in $\mathbb{H}^3$.

Keywords: Minimal Surface, Hyperbolic Space, Weierstrass Representation.

Sumário

Introdução

Em 1987, o eminente matemático Robert Bryant publicou o artigo *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space* pela revista *Asterisque*. Neste artigo, mostrou que as superfícies de curvatura média constante um em $\mathbb{H}^3$ são projeções de curvas nulas em $SL(2,\mathbb{C})$ e, assim, encontrou uma representação holomorfa de tais superfícies. Em essência, Bryant encontrou uma representação análoga a representação de Weierstrass para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$. Ademais, Bryant obteve resultados importantes sobre superfícies de curvatura média um em $\mathbb{H}^3$ com curvatura total finita e completa, estes resultados impulsionaram o estudo das superfícies de curvatura média um em $\mathbb{H}^3$. Devido a grande importância do trablho de Bryant, as superfícies de curvatura média um em $\mathbb{H}^3$ são chamadas *Superfícies de Bryant*.

No primeiro capítulo, apresentaremos as ferramentas básicas para uma boa compreensão do trabalho. Mais precisamente, faremos um breve estudo sobre alguns resultados de geometria riemanniana via método do referencial móvel.

No segundo capítulo, faremos uma introdução da teoria de superfícies em $\mathbb{H}^3$. Além disso, definiremos uma aplicação análoga a aplicação normal de Gauss em $\mathbb{R}^3$ e mostraremos o seguinte resultado:

Proposição. *A aplicação $[e_0 + e_3] : M \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$ é conforme se, e só se, f é totalmente umbílica (neste caso $[e_0 + e_3]$ reverte a orientação) ou f satisfaz $H \equiv 1$(nesse caso $[e_0 + e_3]$ preserva a orientação).*

No terceiro capítulo demonstraremos o teorema principal do trabalho. Segue abaixo o enunciado.

Teorema. *Seja M^2 uma superfície de Riemann e $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ uma imersão nula. Então $e_0 \circ F = f : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é uma imersão conforme com $H \equiv 1$. Reciprocamente, se M^2 é simplesmente conexa e $f : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é uma imersão com $H \equiv 1$, então existe uma imersão $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ holomorfa, tal que $f = e_0 \circ F$. Ademais, F é única a menos de uma multiplicação por uma constante $g \in SU(2)$.*

No último capítulo, estudaremos as superfícies de Bryant completas de curvatura total finita e apresentaremos alguns exemplos. Segue um importante resultado dete capítulo.

Proposição. *Sejam* $d\sigma^2$ *uma pseudo métrica e* $\Delta^* = \{w \in \mathbb{C}; 0 < |w| < 1\}$ *um disco furado. Suponhamos que* $(\Delta, d\sigma^2)$ *possua curvatura* 1*. Suponhamos também que a área de* Δ^* *na métrica* $d\sigma^2$ *é finita. Então, existe uma coordenada holomorfa local* z *sobre* $\Delta_\epsilon = \{w \in \mathbb{C}; |w| < \epsilon\}$ *, para algum* $\epsilon > 0$*, com* $z(0) = 0$*, e* $\beta > -1$ *um numero real tal que sobre* Δ_ϵ*, nós temos*

$$d\sigma^2|_{\Delta_\epsilon} = \frac{4(\beta+1)^2(z\overline{z})^\beta}{(1+(z\overline{z})^{\beta+1})^2} dz \otimes \ d\overline{z}.$$

Ademais, β *é única, e* z *é única a menos de uma dilatação* λz*, onde* $|z| = 1$*.*

Da teoria de superfícies mínimas completas e de curvatura total finita sabemos que a aplicação normal de Gauss e a diferencial de Hopf são meromorfas, ver [16]. Porém, este resultado é falso na teoria de superfícies de Bryant completas e de curvatura total finita. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema. *Seja* $f : \Delta^* \longrightarrow \mathbb{H}^3$ *uma imersão conforme de curvatura média 1, completa em* $z = 0$ *e de curvatura total finita. Então, a aplicação hiperbólica de Gauss* $[e_0 + e_3] : \Delta^* \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$ *estende-se holomorficamente em* $z = 0$ *se, e só se, a ordem de* $\mathcal{Q}$ *em* $z = 0$ *é pelo menos -2.*

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos algumas definições e alguns resultados básicos de geometria Riemanniana com o intuito de fixar a notação, admitindo que o leitor seja familiarizado com os pré-requisitos necessários. Para este capítulo as referências são [5],[6],[7],[8] e [11].

1.1 Superfícies de Riemann

Nesta sessão faremos um breve estudo sobre a teoria de Superfícies de Riemann. O objetivo principal é obter a característica de Euler-Poincaré de uma superfície de Riemann via formas diferenciais. Nossas principais referencias são [6] e [18].

Primeiramente vejamos dois exemplos de superfícies de Riemann importantes. Sejam $z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$, considere a seguinte relação de equivalência.

$$z \sim w \Leftrightarrow z = \lambda w,$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Denotemos as classes de equivalência desta relação por $[z_1, z_2]$. Definamos $\mathbb{CP}^1 = \{[z_1, z_2]; z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$. $\mathbb{CP}^1$ é dito *espaço projetivo complexo*. Consideremos $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{P}^1$ é dita *esfera de Riemann*.

Podemos identificar $\mathbb{CP}^1$ e $\mathbb{P}^1$, basta tomar a aplicação $\pi : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tal que

$$\pi[z_1, z_2] = \frac{z_2}{z_1}.$$

Esta aplicação está bem definida. De fato, suponha que $w = (w_1, w_2)$ é múltiplo de $z = (z_1, z_2)$, logo existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $w = \lambda z$. Daí, $\frac{w_2}{w_1} = \frac{z_2}{z_1}$ e, portanto, π está bem definida.

Definição 1.1.1. *Um divisor sobre uma superfície de Riemann M é uma combinação linear de um número finito de pontos de M com coeficientes inteiros.*

Definição 1.1.2. *Se $D = \sum n_p p$ é um divisor, então o grau de M é a soma*

$$deg(D) = \sum_p n_p.$$

Definição 1.1.3. *Se f é uma função meromorfa sobre uma superfície de Riemann M, e p é uma ponto de M, definimos a ordem de f, $\nu_p(f)$, por*

$$\nu_p(f) = \begin{cases} k & \text{se } f \text{ tem um zero de multiplicidade } k \text{ em } p \\ -k & \text{se } f \text{ tem um pólo de multiplicidade } k \text{ em } p \\ 0 & \text{se } f \text{ é holomorfa e não nula em } p \end{cases}$$

Toda função meromorfa possui uma quantidade finita de zeros ou pólos e, portanto,

$$D = \sum_p \nu_p(f)p$$

é claramente um divisor. O divisor $D = \sum_p \nu_p(f)p$ é chamado *divisor principal.*

Definição 1.1.4. *Seja ω uma 1-forma meromorfa sobre uma superfície de Riemann M, e $p \in M$. Definamos a ordem de ω em p por*

$$\nu_p(\omega) = \nu_p(f_p),$$

onde f_p é a representação de ω no ponto p, i.e, ω está representado localmente como $f_p dz$ numa vizinhança de p.

Esta definição não depende da vizinhança coordenada ver [6].

O divisor

$$(\omega) := \sum_p \nu_p(\omega)p$$

é dito *divisor canônico* da forma meromorfa ω. Segue um importante resultado, sua demonstração pode ser encontrada em [18].

Teorema 1.1.1. *Se ω é uma 1-forma diferencial sobre uma superfície de Riemann compacta M, então*

$$deg((\omega)) = -\chi,$$

onde χ é a característica de Euler-Poincaré da superfície de Riemann.

Seja $\zeta : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a projeção estereográfica(estendida). A métrica em $\mathbb{S}^2$ induz uma métrica padrão sobre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dada por

$$\mu = \frac{4d\zeta \otimes \ d\overline{\zeta}}{(1+\zeta\overline{\zeta})^2}.$$

Ademais, a métrica tem curvatura 1 sobre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ver [6]. O teorema abaixo segue de [9].

Lema 1.1.1. *Seja M uma superfície de Riemann simplesmente conexa e $d\sigma^2$ uma pseudo métrica sobre M tal que $(M, d\sigma^2)$ possui curvatura Gaussiana 1. Então existe uma função meromorfa $\xi : M \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tal que $\xi^*(\mu) = d\sigma^2$, isto é*

$$d\sigma^2 = \frac{4d\xi \otimes \ d\overline{\xi}}{(1 + \xi\overline{\xi})^2}.$$

Ademais, se $\xi' : M \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ também satisfaz $(\xi')^*(\mu) = d\sigma^2$, então $\xi' = \frac{a\xi - \bar{b}}{b\xi + \bar{a}}$, onde a, b são constantes complexas satisfazendo $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Segue um importante resultado da teoria de superfícies de Riemann simplesmente conexas, sua demonstração pode ser encontrada em [6].

Teorema 1.1.2. *Se M é uma superfície de Riemann simplesmente conexa então, M é conformemente equivalente a um e somente um dos casos seguintes:*

(i) $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$;

(ii) $\mathbb{C}$;

(iii) $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

1.2 O Método do Referencial Móvel

Nesta sessão introduziremos o método do referencial móvel para variedades Riemannianas. Este possibilitará fazermos um estudo da curvatura seccional de variedades utilizando formas diferenciais.

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n. Sejam $p \in M$ e $U \subset M$ uma vizinhança de p em M, onde seja possível definir campos diferenciáveis de vetores $e_1, ..., e_n$ tais que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

O conjunto $\{e_i\}_{i=1}^n$ é chamado *referencial ortonormal móvel* em U. Sejam $\{\omega^i\}_{i=1}^n$ formas diferenciais em U tais que

$$\omega^i(e_j) = \delta_{ij}.$$

As formas ω^i são chamadas *coreferencial assosciado* a $\{e_i\}$. Temos o seguinte resultado.

Lema 1.2.1. *Escolhido um referencial $\{e_i\}_{i=1}^n$ num aberto U de uma variedade Riemanniana M, existe em U um (único) conjunto de formas diferencias $\left\{\omega_i^j\right\}$, onde $\omega_i^j = -\omega_j^i$ e satisfazem*

$$d\omega^i = \sum_{k=1}^n \omega^k \wedge \omega_k^i.$$

A demonstração do lema anterior pode ser encontrada em [5].

As formas ω_i^j são chamadas *formas de conexão* de M no referencial $\{e_i\}_{i=1}^n$. As formas de conexão permitem definir uma noção de derivação covariante para campos em M.

Proposição 1.2.1. *Sejam X, Y campos diferenciáveis em M e $\{e_i\}$ um referencial em $U \subset M$. Suponha que $Y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ e faça*

$$\nabla_X Y = \sum_{j=1}^n \left\{ dy_j(X) + \sum_{i=1}^n \omega_i^j(X) y_i \right\} e_j.$$

Então $\nabla_X Y$ independe do referencial $\{e_i\}$ e, portanto, está bem definido em M.

A demonstração do resultado acima segue de [5].

$\nabla_X Y$ é dito *derivada covariante* de Y em relação a X. A derivada covariante possui importantes propriedades dadas pela proposição seguinte.

Proposição 1.2.2. *Sejam X, Y, Z campos diferenciáveis em M, f e g funções difereciáveis em M e a e b números reais então*

(i) $\nabla_{fX+gZ} Y = f\nabla_X Y + g\nabla_Z X$;

(ii) $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$;

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$;

(iv) $\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle = X(\langle Y, Z\rangle)$;

(v) Se $p \in M$, $(\nabla_X Y)(p)$ só depende do valor de X no ponto p e dos valores de Y ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$, com $\alpha(0) = p$, e $\alpha'(0) = X(p)$.

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em [5].

Note que

$$\langle \nabla_X e_i, e_j\rangle = \omega_i^j(X),$$

donde

$$\omega_i^j(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j\rangle .$$

Definamos as formas Ω_{ij} por $\Omega_{ij} = d\omega_i^j - \sum_{k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j$.

Estas são ditas *formas de curvatura* de M no referencial $\{e_i\}$.

Para cada $p \in M$, e cada par de vetores $X, Y \in T_pM$, a matriz $(\Omega_{ij})_p(X, Y)$ pode ser vista como a matriz da aplicação linear

$$(R_{XY})_p : T_pM \longrightarrow T_pM$$

em relação à base $\{e_1, ..., e_n\}$.

R_{XY} é chamado *operador curvatura* de M. Como $\Omega_{ij} = -\Omega_{ij}$ e Ω_{ij} é uma forma bilinear alternada, temos as seguintes equações para o operador curvatura: Se X, Y, Z e T são campos diferenciáveis em M então

$$\langle R_{XY}Z, T\rangle = -\langle R_{YX}Z, T\rangle \tag{1.1}$$

$$\langle R_{XY}Z, T\rangle = -\langle R_{XY}T, Z\rangle . \tag{1.2}$$

Derivando exteriormente a equação

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^{n} \omega^j \wedge \omega_j^i$$

temos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{n} d\omega^k \wedge \omega_k^j - \sum_{k=1}^{n} \omega^k \wedge d\omega_k^j \\ &= \sum_{ik=1}^{n} \omega^i \wedge \omega_i^k \wedge \omega_k^j - \sum_{i=1}^{n} \omega^i \wedge \ d\omega_i^j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega^i \wedge (\sum_{k=1}^{n} \omega_i^k \wedge \omega_k^j - d\omega_i^j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega^i \wedge \Omega_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega^i \wedge \Omega_{ij} = 0. \tag{1.3}$$

A equação (1.3) é chamada *primeira identidade de Bianchi*. Em termos de operador curvatura, ela se traduz da seguinte forma. Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} \omega^i \wedge \Omega_{ij}(X, Y, Z) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \omega^i(X)\Omega_{ij}(Y, Z) - \omega^i(Y)\Omega_{ij}(X, Z) + \omega^i(Z)\Omega_{ij}(X, Y) \right\} \\ &= \langle R_{YZ}X - R_{XZ}Y + R_{XY}Z, e_j\rangle . \end{aligned}$$

para $j = 1, ..., n$. Daí,

$$R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0 \tag{1.4}$$

Note que valem as seguintes igualdades

$$\begin{array}{rcl}
\langle R_{XY}Z, T\rangle + \langle R_{YZ}X, T\rangle + \langle R_{ZX}Y, T\rangle & = & 0 \\
\langle R_{YZ}T, X\rangle + \langle R_{ZT}Y, X\rangle + \langle R_{TY}Z, X\rangle & = & 0 \\
\langle R_{ZT}X, Y\rangle + \langle R_{TX}Z, Y\rangle + \langle R_{XZ}T, Y\rangle & = & 0 \\
\langle R_{TX}Y, Z\rangle + \langle R_{XY}T, Z\rangle + \langle R_{YT}X, Z\rangle & = & 0
\end{array}$$

Somando as equações acima e utilizando (1.4), temos

$$\langle R_{ZX}Y, T\rangle + \langle R_{TY}Z, X\rangle = 0.$$

Daí, por (1.2), temos

$$\langle R_{XY}Z, T\rangle = \langle R_{ZT}X, Y\rangle .$$

Como as formas Ω_{ij} são formas de grau dois, elas podem ser escritas

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{kl} R_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l.$$

As funções R_{ijkl} são chamadas as *componentes do tensor curvatura* de M. Notemos que

$$\begin{array}{rcl}
\langle R_{e_k e_l}(e_i), e_j\rangle & = & \Omega_{ji}(e_k, e_l) \\
& = & -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{s,t} R_{jist}\omega^s \wedge \omega^t(e_k, e_l) \\
& = & R_{ijkl} \\
& = & \left\langle R_{e_i e_j}(e_k), e_l\right\rangle .
\end{array}$$

As formas de curvatura nos permitem definir a curvatura seccional de uma variedade. A partir de agora faremos uma introdução de tal conceito.

Seja $P \subset T_pM$ um subespaço de dimensão dois do espaço tangente T_pM. Tomemos um referencial $\{e_1, ..., e_n\}$ em uma vizinhança de p de tal modo que $\{e_1, e_2\}$ geram P. Temos o seguinte resultado.

Proposição 1.2.3. *O número $(\Omega_{12})_p(e_1, e_2)$ depende apenas do subespaço P.*

A demonstração da proposição acima segue de [5] pág. 54.

O número

$$\begin{array}{rcl}
K_p(P) & = & -(\Omega_{12})_p(e_1, e_2) \\
& = & \langle (R_{e_1 e_2})_p(e_1), e_2\rangle
\end{array}$$

é chamado a *curvatura seccional* de M em p segundo P.

Temos o seguinte resultado.

Proposição 1.2.4. *Seja $P \subset T_pM$ um subespaço de T_pM. Se $X, Y \in P$ são vetores linearmente independentes de T_pM e $\{e_i\}$ é um referencial ortonormal tal que $\{e_1, e_2\}$ gera P, então*

$$K(p) = \frac{\langle R_{XY}X, Y\rangle}{(A(X,Y))^2},$$

onde $A(X, Y)$ é a área do paralelogramo formado por X e Y.

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em [5] pág. 55.

Definição 1.2.1. *Diz-se que uma variedade Riemanniana M, é isotrópica em p se todas as curvaturas seccionais em p têm o mesmo valor, isto é, se $K_p(P)$ não depende de $P \subset T_pM$.*

Finalmente, temos o resultado que traduz a importância das formas de curvatura de um referencial.

Proposição 1.2.5. *Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\{e_i\}$ um referencial em uma vizinhança de p. Então M é isotrópica em p se e só se*

$$\Omega_{ij} = -K_p \omega^i \wedge \omega^j.$$

A demonstração da proposição anterior pode ser encontrada em [5] pág. 55.
Naturalmente, temos a seguinte definição.

Definição 1.2.2. *Diz-se que uma variedade Riemanniana M tem curvatura constante, se $K_p(P)$ não depende de p e P.*

1.3 O Espaço de Lorentz-Minkowski-$\mathbb{L}^4$.

Nesta sessão exibiremos as equações de estrutura do espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4$.
Tomemos em $\mathbb{R}^4$ o semi produto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4,$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{L}^4$. O espaço $(\mathbb{R}^4, \langle . \rangle)$ é dito espaço de *Lorentz-Minkowski* e será representado por $\mathbb{L}^4$.

Sejam e_1, e_2, e_3, e_4 campos diferenciáveis sobre $\mathbb{L}^4$ tais que

$$\langle e_i, e_j\rangle = \epsilon_j \delta_{ij},$$

onde $i, j = 1, 2, 3, 4$ e

$$\epsilon_j = \begin{cases} -1 & \text{se j=1} \\ 1 & \text{se j=2,3,4} \end{cases}$$

Existem 1-formas $(\omega^i)_{i=1}^4$ sobre $\mathbb{L}^4$ tais que

$$\omega^i(e_j) = \epsilon_j \delta_{ij}.$$

O conjunto das formas diferenciais $(\omega^i)_{i=1}^4$ é chamado *coreferencial assosciado ao referencial* $(e_i)_{i=1}^4$. Para cada i, o campo e_i induz uma aplicação diferenciável $de_i : \mathbb{L}^4 \longrightarrow \mathbb{L}^4$. Daí, podemos escrever

$$de_i = \sum_{k=1}^{4} \epsilon_k \omega_i^k e_k. \tag{1.5}$$

As 1-formas $\left\{\omega_i^j\right\}$, são ditas *formas de conexão de* $\mathbb{L}^4$ no referencial $\{e_i\}_{i=1}^4$.

Note que da igualdade $\langle e_i, e_j \rangle = \epsilon_j \delta_{ij}$ temos, aplicando a diferencial,

$$\langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = 0.$$

Ademais, temos

$$\omega_i^j = \langle de_i, e_j \rangle = - \langle de_j, e_i \rangle = -\omega_j^i.$$

Daí,

$$\omega_i^j = -\omega_j^i,$$

onde $i, j = 1, ..., 4$.

Aplicando a diferencial na equação e usando o fato de que $d(d(e_i)) \equiv 0$, $i = 1, ..4$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= d(de_i) \\
&= d(\sum_{j=1}^{4} \epsilon_j \omega_i^j e_j) \\
&= \sum_{j=1}^{4} \epsilon_j (d\omega_i^j e_j - \omega_i^j \wedge de_j) \\
&= \sum_{j=1}^{4} \epsilon_j [d\omega_i^j e_j - \omega_i^j \wedge (\sum_{k=1}^{4} \epsilon_k \omega_j^k e_k)] \\
&= \sum_{k=1}^{4} \epsilon_k d\omega_i^k e_k - \sum_{j=1}^{4} \epsilon_j [\sum_{k=1}^{4} \epsilon_k \omega_i^j \wedge \omega_j^k e_k] \\
&= \sum_{k=1}^{4} [d\omega_i^k - \sum_{j=1}^{4} \epsilon_j \omega_i^j \wedge \omega_j^k] \epsilon_k e_k
\end{aligned}$$

Portanto como $\{e_i\}$ é um conjunto linearmente independente, então

$$d\omega_i^j = \sum_{k=1}^{4} \epsilon_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{1.6}$$

A equação (1.6) é chamada *equação de estrutura* de $\mathbb{L}^4$.

1.4 Modelos de Espaço Hiperbólico

Nesta sessão apresentaremos alguns modelos de espaço hiperbólico de dimensão 3.

1.4.1 Modelo do Semi-Espaço Superior

Seja

$$\mathbb{R}^3_+ = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 > 0\right\}.$$

Munindo $\mathbb{R}^3_+$ com a métrica

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2},$$

definiremos $\mathbb{H}^3 = (\mathbb{R}^3_+, ds^2)$. Este modelo é chamado *modelo do semi-espaço superior*.

As retas perpendiculares ao hiperplano $x_3 = 0$, os círculos cujos planos são perpendiculares a $x_3 = 0$ e cujos centros estão nesse hiperplano são as geodésicas de $\mathbb{H}^3$ neste modelo, ver [5] pág. 162.

1.4.2 Modelo de Poincaré

Seja $\mathbb{B}^3 \subset \mathbb{R}^3$ uma bola aberta de raio 2 e centro na origem,

$$\mathbb{B}^3 = \left\{p \in \mathbb{R}^3; |p| < 2\right\},$$

e introduza sobre $\mathbb{B}^3$ a métrica

$$h_{ij}(p) = \frac{\delta_{ij}}{(1 - \frac{1}{4}|p|^2)^2}.$$

$\mathbb{B}^3$ com esta métrica é um modelo de espaço hiperbólico chamado *modelo de poincaré*.

1.4.3 Modelo de Minkowski

Consideremos o conjunto

$$\mathbb{H}^3 = \{v \in \mathbb{L}^4; \langle v, v\rangle = -1, x_0 > 0\}.$$

Tomemos sobre $\mathbb{H}^3$ a forma quadrática

$$-dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

induzida de $\mathbb{L}^4$. Temos um importante resultado.

Lema 1.4.1. *O Modelo de Minkowski de $\mathbb{H}^3$ é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional -1.*

O lema acima pode ser encontrado em [8] pág. 20. O resultado 1.4.1 mostra que a forma quadrática de $\mathbb{L}^4$ quando restrita ao $\mathbb{H}^3$ torna-se uma métrica bem definida.

As geodésicas neste modelo são interseções de $\mathbb{H}^3$ com hiperplanos que passam pela origem de $\mathbb{L}^4$, ver [17] pág. 70.

Considere o conjunto

$$\mathbb{N}^3 = \{v \in \mathbb{L}^4; \langle v, v\rangle = 0, x_0(v) > 0\}.$$

Este conjunto é dito *cone de luz*. O espaço $\mathbb{N}^3$ é claramente uma variedade. Consideremos sobre $\mathbb{N}^3$ a métrica induzida de $\mathbb{L}^4$. Para cada ponto $v \in \mathbb{N}^3$ definamos $[v] = \left\{\alpha v, \alpha \in \mathbb{R}^*_+\right\}$. Definamos o conjunto

$$\mathbb{S}^2_\infty = \left\{[v]; v \in \mathbb{N}^3\right\}.$$

$\mathbb{S}^2_\infty$ é dito *bordo assintótico* de $\mathbb{H}^3$. A partir de $\mathbb{S}^2_\infty$ podemos compactificar o espaço hiperbólico, assim escreveremos

$$\overline{\mathbb{H}^3} = \mathbb{H}^3 \cup \mathbb{S}^2_\infty.$$

Este será o modelo de espaço hiperbólico que adotaremos no decorrer do trabalho.

1.4.4 Modelo Hermitiano

Consideremos as seguintes matrizes

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas matrizes são chamadas *Matrizes de Pauli* e serão muito úteis para descrevermos a representação matricial do espaço hiperbólico. Identificaremos $\mathbb{L}^4$ com o espaço das matrizes $\mathcal{H}$, hermitianas 2×2, pela identificação

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4 \leftrightarrow X = x_0\sigma_0 + \sum_{k=1}^{3} x_k\sigma_k = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Uma consequência desta identificação é que dado $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^4$ e seu associado $X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ temos que

$$\begin{aligned} det(X) &= (x_0 + x_3)(x_0 - x_3) - (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) \\ &= (x_0)^2 - (x_3)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 \\ &= -\langle x, x\rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$det(X) = -\langle x, x\rangle.$$

Tomemos $x = (x_0, x_1, x_2, x_3), y = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{L}^4$. Pela identificação de $\mathbb{L}^4$ com o espaço vetorial $\mathcal{H}$ escrevamos

$$X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_0 + y_3 & y_1 + iy_2 \\ y_1 - iy_2 & y_0 - y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

Note que

$$\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2} tr(X^t \sigma_2 Y \sigma_2).$$

De fato, veja que

$$X^t \sigma_2 = i \begin{pmatrix} -(x_1 - ix_2) & (x_0 + x_3) \\ -(x_0 - x_3) & (x_1 + ix_2) \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

$$Y \sigma_2 = i \begin{pmatrix} -(y_1 + iy_2) & (y_0 + y_3) \\ -(y_0 - y_3) & (y_1 - iy_2) \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Escrevendo $B = X^t \sigma_2 Y \sigma_2$ onde $B = (b_{ij})$ temos de (1.8) e (1.9) que

$$\begin{aligned} b_{11} &= -[x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_0 y_0 + x_3 y_3 + x_0 y_3 - x_3 y_0 + i(x_1 y_2 - x_2 y_1)] \\ b_{22} &= -[-x_0 y_0 + x_3 y_3 + x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_0 y_3 + x_3 y_0 + i(-x_1 y_2 + x_2 y_1)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} tr(X^t \sigma_2 Y \sigma_2) &= b_{11} + b_{22} \\ &= 2(x_0 y_0 - x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) \\ &= -2 \langle x, y \rangle . \end{aligned}$$

Daí,

$$\langle x, y \rangle = -\frac{1}{2} tr(X^t \sigma_2 Y \sigma_2).$$

Portanto, em $\mathcal{H}$, definiremos o pseudo produto interno dado por

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} tr(X \sigma_2 Y^t \sigma_2).$$

Considere

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{H}; \langle X, X \rangle = -1, tr(X) > 0\}.$$

Note que $\mathcal{A}$ claramente pode ser visto como a representação matricial de $\mathbb{H}^3$. Tal representação é dita *forma hermitiana de* $\mathbb{H}^3$. Consideremos o grupo de Lie, $SL(2, \mathbb{C})$, formado pelas matrizes 2×2 complexas com determinante 1. Dado $F \in SL(2, \mathbb{C})$, denotemos por F^* a matriz $(\overline{F})^t$. Temos o seguinte resultado.

Lema 1.4.2. $\mathbb{H}^3$ *pode ser representado matricialmente por* $\{FF^*; F \in SL(2, \mathbb{C})\}$.

Demonstração. Basta mostrar que

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{H}; det(X) = 1, tr(X) > 0\} = \{FF^*; F \in SL(2,\mathbb{C})\}.$$

Note que, dado $F \in SL(2,\mathbb{C})$ temos que

$$\begin{array}{rcl} (FF^*)^* & = & FF^* \\ det(FF^*) & = & 1 \end{array}$$

Ademais, como $det(F) = 1$ então $tr(FF^*) > 0$. Portanto, $FF^* \in \mathcal{A}$. Logo,

$$\{X \in \mathcal{H}; det(X) = 1, tr(X) > 0\} \supset \{FF^*; F \in SL(2,\mathbb{C})\}.$$

Por outro lado, seja $X \in \mathcal{H}$ tal que $detX = 1$ e $tr(X) > 0$. Como $\overline{X}^t = X$ então X possui um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Denotemos por $v = (v_1, v_2)$ um autovetor associado a λ tal que $|v_1|^2 + |v_2|^2 = 1$.

O polinômio característico de X é $p(t) = t^2 - tr(X)t + 1$. Note que,

$$p(\frac{1}{\lambda}) = \lambda^2 - \lambda tr(X) + 1.$$

Portanto, como λ é uma autovalor então $\frac{1}{\lambda}$ também é um autovalor de X. Tomemos o autovetor $\widetilde{v} = (-\overline{v_2}, \overline{v_1})$ assosciado a $\frac{1}{\lambda}$. Seja $E = \begin{pmatrix} v_1 & -\overline{v_2} \\ v_2 & \overline{v_1} \end{pmatrix}$. Assim, X pode ser escrito da forma

$$X = E \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} E^{-1}$$

Tomemos $F = E \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$. Assim, como $detF = 1$ então $F \in SL(2,\mathbb{C})$. Por outro lado, note que

$$\begin{array}{rcl} FF^* & = & E \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \overline{E}^t \\ & = & E \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \overline{E}^t \\ & = & XE\overline{E}^t \\ & = & X \end{array}$$

Portanto, $X = F\overline{F}^t$. $\square$

Considere $SU(2)$ o subconjunto de $SL(2,\mathbb{C})$ dado por

$$\left\{X \in SL(2,\mathbb{C}); \overline{X}^t = X^{-1}\right\}.$$

$SU(2)$ será bastante utilizado no decorrer do trabalho.

Definição 1.4.1. *Sejam G um grupo e M uma variedade. Dizemos que uma aplicação*

$$\phi : G \times M \longrightarrow \ M$$

é uma ação de G sobre M quando satisfaz as seguintes condições

(i) $\forall\ g \in G$, $\phi_g : M \longrightarrow \ M$ *dada por*

$$\phi_g(p) = \phi(g, p)$$

é um difeomorfismo.

(ii) Dados $g_1, g_2 \in G$,

$$\phi_{g_1 g_2} = \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}.$$

Lema 1.4.3. *O grupo de Lie complexo $SL(2, \mathbb{C})$ age sobre $\mathbb{L}^4$ pela aplicação*

$$\phi : SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{L}^4 \longrightarrow \mathbb{L}^4$$

definida por $\phi(g, v) = gvg^*$, onde v é uma matriz simétrica hermitiana e $g^* = \overline{g}^t$.

Demonstração. Note que vale (i) pois a multiplicação de matrizes é diferenciável. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \phi_{g_1 g_2} &= g_1 g_2 v (g_1 g_2)^* \\ &= g_1 (g_2 v g_2^*) g_1^* \\ &= \phi_{g_1}(g_2 v g_2^*) \\ &= \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\phi_{g_1 g_2} = \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}$$

e, portanto, vale (ii). Portanto, ϕ é uma ação de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre $\mathbb{L}^4$. □

Obteremos agora a representação matricial do cone de luz

$$\mathbb{N}^3 = \{v \in \mathbb{L}^4; \langle v, v \rangle = 0, x_0(v) > 0\}.$$

Mostraremos que a representação matricial de $\mathbb{N}^3$ é dada pelo conjunto $\mathcal{N}$ das matrizes positivas semi-definidas de determinante zero não-nulas. De fato, dado $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3$ temos uma matriz associada $X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$. Por outro lado,

$$\langle x, x \rangle = -det(X) \tag{1.10}$$

De (1.10) temos que $det(X) = 0$. Por outro lado, os autovalores de X são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2x_0$ e, portanto, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Daí, X é uma matriz positiva semi-definida. Ademais, como $x_0 > 0$ então X é não-nula. Portanto, $X \in \mathcal{N}$.

Seja agora $X \in \mathcal{N}$. Particularmente, X é hermitiana e, portanto, podemos encontrar $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tais que $X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$. É claro que $det(X) = 0$ e, portanto,

$$\langle (x_0, x_1, x_2, x_3), (x_0, x_1, x_2, x_3) \rangle = 0.$$

Como $X \in \mathcal{N}$ então seus autovalores são não negativos. Por outro lado, os autovalores de X são $\eta_1 = 0$ e $\eta_2 = 2x_0$ e, portanto, $x_0 \geq 0$. Notemos que

$$(x_0 - x_3)(x_0 + x_3) = x_1^2 + x_2^2.$$

Daí, é imediato que $x_0 = 0 \Leftrightarrow X = 0$ e, portanto, $x_0 > 0$. Logo, $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3$.

Através da identificação obtida escreveremos $\mathbb{N}^3 = \mathcal{N}$. Seja $X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$. Como X é positiva semi-definida então $x_0 + x_3 \geq 0$. Mas,

$$(x_0 - x_3)(x_0 + x_3) = x_1^2 + x_2^2 \tag{1.11}$$

e, portanto, $x_0 - x_3 \geq 0$. Assim, podemos encontrar um vetor não-nulo $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ tal que

$$\begin{aligned} a_1\overline{a_1} &= x_0 + x_3; \\ a_2\overline{a_2} &= x_0 - x_3. \end{aligned}$$

De (1.11), temos que

$$(a_1\overline{a_2})(a_2\overline{a_1}) = x_1^2 + x_2^2.$$

Assim, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_1 + ix_2 = e^{i\alpha} a_1 \overline{a_2}.$$

Tomemos $b_1 = e^{i\alpha/2} a_1$ e $\overline{b_2} = e^{i\alpha/2}\overline{a_2}$. Logo,

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1\overline{b_1} & b_1\overline{b_2} \\ \overline{b_1}b_2 & b_2\overline{b_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_1} & \overline{b_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{N} = \left\{ b\overline{b}^t, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; b_1, b_2 \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Sejam $v \in \mathcal{N}$ e $b = (b_1, b_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2$ tais que

$$v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_1} & \overline{b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{k_1} & \overline{k_2} \end{pmatrix}.$$

Logo, existem $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tais que $k_1 = e^{i\theta_1} b_1$ e $k_2 = e^{i\theta_2} b_2$. Por outro lado, $k_1 \overline{k}_2 = b_1 \overline{b}_2$ e, portanto, isso mostra que $\theta_1 = \theta_2$. Portanto, se $\theta = \theta_1 = \theta_2$ então $k = e^{i\theta} b$. Assim, dado $v \in \mathcal{N}$ existe um vetor não-nulo $(b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$, único a menos de multiplicação por $e^{i\theta}$, tal que $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_1} & \overline{b_2} \end{pmatrix}$. Seja a aplicação $\tau : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ definida por $\tau(v) = [b_1, b_2]$, onde $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_1} & \overline{b_2} \end{pmatrix}$. A aplicação τ está bem definida. De fato, sejam $b = (b_1, b_2), k = (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2$ tais que $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_1} & \overline{b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{k_1} & \overline{k_2} \end{pmatrix}$. Como visto anteriormente, temos que $k = e^{i\theta} b$. Daí,

$$\begin{aligned} [k_1, k_2] &= [e^{i\theta} b_1, e^{i\theta} b_2] \\ &= e^{i\theta}[b_1, b_2] \\ &= [b_1, b_2]. \end{aligned}$$

Portanto, τ está bem definida. A aplicação τ identifica $\mathbb{N}^3$ com $\mathbb{CP}^1$. Se $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_1} & \overline{b_2} \end{pmatrix}$ então dado $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ temos que

$$\lambda v = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} b_1 \\ \sqrt{\lambda} b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda}\overline{b_1} & \sqrt{\lambda}\overline{b_2} \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \tau(\lambda v) &= [\sqrt{\lambda} b_1, \sqrt{\lambda} b_2] \\ &= \sqrt{\lambda}[b_1, b_2] \\ &= [b_1, b_2] \\ &= \tau(v). \end{aligned}$$

Portanto, está bem definida a aplicação $\widetilde{\tau} : \mathbb{S}^2_\infty \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ dada por $\widetilde{\tau}([v]) = \tau(v)$. Assim, temos uma identificação de $\mathbb{S}^2_\infty$ com $\mathbb{CP}^1$.

1.5 Equações de Estrutura de $\mathbb{H}^3$

Nesta sessão, encontraremos equações de estrutura para o $\mathbb{H}^3$.
Consideremos as aplicações $e_\alpha : \mathbb{H}^3 \longrightarrow \mathbb{L}^4$, onde $\alpha = 0, ..., 3$, tais que

(i) e_0 é a aplicação de inclusão;

(ii) e_1, e_2, e_3 são campos tangentes ortonormais sobre $\mathbb{H}^3$.

Assim, temos

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} -1, & \text{se i=j=0} \\ \delta_{ij}, & \text{se i,j=1,2,3} \\ 0, & \text{se i=0 e j=1,2,3} \end{cases}$$

Seja

$$\mathcal{F} = \{(e_0(p), e_1(p), e_2(p), e_3(p)); p \in \mathbb{H}^3\}.$$

$\mathcal{F}$ é dito fibrado dos referenciais de $\mathbb{H}^3$. $\mathcal{F}$ é uma variedade de dimensão 6.

Consideremos as aplicações $\widetilde{e_\alpha} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{L}^4$, $\alpha = 0, ..., 3$, dada por

$$\widetilde{e_\alpha}(e_0(p), e_1(p), e_2(p), e_3(p)) = e_\alpha(p).$$

A aplicação

$$\widetilde{e_0} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{L}^4$$

é uma submersão. De fato, dado $q = (e_0(p), e_1(p), e_2(p), e_3(p)) \in \mathcal{F}$ temos uma aplicação linear $(d\widetilde{e_0})_q : T_q\mathcal{F} \longrightarrow T_p\mathbb{L}^4$. Sejam $v \in T_q\mathcal{F}$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathcal{F}$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = v$. Escrevamos $\gamma(t) = (e_0(p(t)), e_1(p(t)), e_2(p(t)), e_3(p(t)))$. Logo,

$$\begin{aligned} (d\widetilde{e_0})_q(v) &= \frac{d}{dt}((\widetilde{e_0})(\gamma(t))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(p(t))|_{t=0} \\ &= p'(0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$(d\widetilde{e_0})_q(v) = p'(0).$$

Suponhamos que $v \in Ker[(d\widetilde{e_0})_q]$. Assim, $p'(0) = 0$ e, portanto, a dimensão de $Ker[(d\widetilde{e_0})_q]$ é 3. Por outro lado, a dimensão de $T_q\mathcal{F}$ é 6 e a dimensão de $T_p\mathbb{H}^3$ é 3. Portanto, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $dim(Im[(d\widetilde{e_0})_q]) = 3$. Logo $(d\widetilde{e_0})_q$ é sobrejetiva e, portanto, $\widetilde{e_0}$ é uma submersão.

Notemos que $(\widetilde{e_0} + \widetilde{e_3}) \in \mathbb{N}^3$ e, portanto, está bem definida a aplicação $(\widetilde{e_0} + \widetilde{e_3}) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}^3$. De maneira análoga, pode-se verificar que a aplicação $(\widetilde{e_0} + \widetilde{e_3}) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{N}^3$ é uma submersão.

Ao invés de $\widetilde{e_\alpha}$ escreveremos e_α, onde $\alpha = 0, ...3$. Assim, a partir de agora, as aplicações e_α estarão definidas em $\mathcal{F}$.

Note que, existem (únicas) 1-formas diferenciais sobre $\mathcal{F}$ tais que

$$de_j = \sum_{k=0}^{3} e_k \omega_j^k$$

Observe que
$$\langle de_i, e_j\rangle = -\langle e_i, de_j\rangle.$$
Daí,
$$\omega_j^i = -\omega_i^j,$$
onde $i, j = 1, 2, 3$.

Note que,
$$-\omega_i^0 = \langle de_i, e_0\rangle = -\langle e_i, de_0\rangle = -\omega_0^i.$$
para $i = 1, 2, 3$. Desta forma,
$$\omega_i^0 = \omega_0^i,$$
para $i = 1, 2, 3$. Escreveremos
$$\omega^i = \omega_0^i = \omega_i^0.$$

Portanto, temos as seguintes equações
$$de_0 = \sum_{j=1}^{3} e_j\omega^j \tag{1.12}$$
$$de_i = e_0\omega^i + \sum_{j=1}^{3} e_j\omega_i^j \tag{1.13}$$

Diferenciando (1.13) e usando o fato de que $d(de_i) \equiv 0$ temos
$$\begin{aligned}
0 &= d(de_i)\\
&= d(e_0\omega^i + \sum_{j=1}^{3} e_j\omega_i^j)\\
&= d(e_0\omega^i) + \sum_{j=1}^{3} d(e_j\omega_i^j)\\
&= de_0 \wedge \omega^i - e_0 d\omega^i + \sum_{j=1}^{3} de_j \wedge \omega_i^j - \sum_{j=1}^{3} e_j d\omega_i^j\\
&= \sum_{k=1}^{3} e_k\omega^k \wedge \omega^i - e_0 d\omega_i + \sum_{j=1}^{3}(e_0\omega^j - \sum_{k=1}^{3} e_k\omega_j^k) \wedge \omega_i^j + \sum_{k=1}^{3} e_k d\omega_i^k\\
&= \sum_{k=1}^{3} e_k[\omega^k \wedge \omega^i - d\omega_i^k + \sum_{j=1}^{3} \omega_j^k \wedge \omega_i^j] + e_0[-d\omega^i + \sum_{j=1}^{3} \omega^j \wedge \omega_i^j]
\end{aligned}$$

Portanto, temos as equações

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^{3} \omega^j \wedge \omega_i^j \tag{1.14}$$

$$d\omega_j^i = \omega^i \wedge \omega^j + \sum_{k=1}^{3} \omega_k^i \wedge \omega_j^k \tag{1.15}$$

As equações (1.14) e (1.15) são chamadas, respectivamente, *primeira e segunda formas de estrutura* de $\mathbb{H}^3$. As formas de curvatura sobre $\mathcal{F}$ são

$$\Omega_{ij} = d\omega_j^i - \sum_{k=1}^{3} \omega_k^i \wedge \omega_j^k = +\omega^i \wedge \omega^j.$$

Denotemos por ds^2 a métrica sobre $\mathbb{H}^3$. Note que

$$\langle de_0, de_0 \rangle = \langle \sum_{j=1}^{3} e_j\omega^j, \sum_{j=1}^{3} e_j\omega^j \rangle = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2.$$

Como e_0 é uma submersão então podemos escrever

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2.$$

Em $\mathbb{N}^3$ será tomada a métrica induzida de $\mathbb{L}^4$, e esta será denotada por $d\sigma^2$. Em $\mathbb{S}^2_\infty$ será tomada a estrutura conforme induzida de $\mathbb{N}^3$ Note que,

$$\begin{aligned} d(e_0 + e_3) &= de_0 + de_3 \\ &= \sum_{k=1}^{3} e_k\omega^k + e_0\omega^3 + \sum_{k=1}^{3} e_k\omega_3^k \\ &= (e_0 + e_3)\omega^3 + e_1(\omega^1 + \omega_3^1) + e_2(\omega^2 + \omega_3^2). \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \langle d(e_0 + e_3), e_1 \rangle &= (\omega^1 + \omega_3^1) \\ \langle d(e_0 + e_3), e_2 \rangle &= (\omega^2 + \omega_3^2) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle d(e_0 + e_3), d(e_0 + e_3) \rangle = (\omega^1 + \omega_3^1)^2 + (\omega^2 + \omega_3^2)^2.$$

Como $e_0 + e_3$ é submersão podemos escrever

$$d\sigma^2 = \langle d(e_0 + e_3), d(e_0 + e_3) \rangle = (\omega^1 + \omega_3^1)^2 + (\omega^2 + \omega_3^2)^2.$$

Consideremos $[e_0 + e_3]$ a reta que contém $(e_0 + e_3)$ e a origem, fica bem definida a aplicação

$$[e_0 + e_3] : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty.$$

Sobre $\mathbb{S}^2_\infty$ tomaremos a orientação

$$(\omega^1 + \omega_3^1) \wedge (\omega^2 + \omega_3^2).$$

1.6 Forma de Maurer-Cartan

Nesta sessão definiremos a forma de Maurer-Cartan. Esta goza de importantes propriedades que serão fortemente utilizadas no decorrer do trabalho. A seguir encontraremos a forma de Maurer-Cartan do espaço hiperbólico, obtida atráves da ação de $SL(2,\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{L}^4$.

Definição 1.6.1. *Seja $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ um grupo de Lie matricial com algebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, e seja $g = (g^i_j)$ a função que mergulha G em $M_{n\times n}$, com diferencial $dg_a : T_aG \longrightarrow T_{g(a)}M_{n\times n} \cong M_{n\times n}$. Definimos a forma de Maurer-Cartan de G como*

$$\omega_a = g(a)^{-1}dg_a.$$

Pode-se escrever simplesmente

$$\omega = g^{-1}dg.$$

Note que, dado $\omega = g^{-1}dg$ temos que

$$d\omega = d(g^{-1}) \wedge dg + g^{-1} \wedge d(dg).$$

Mas, $d(dg) \equiv 0$, e daí

$$d\omega = d(g^{-1}) \wedge dg.$$

Para encontrarmos $d(g^{-1})$, considere a matriz $e = (\delta_{ij})$ como uma aplicação constante $G \longrightarrow M_{n\times n}$ e note que

$$0 = d(e) = d(g^{-1}g) = d(g^{-1})g + g^{-1}dg.$$

Então, $d(g^{-1}) = -g^{-1}(dg)g^{-1}$ e, portanto,

$$d\omega = -g^{-1}(dg)g^{-1} \wedge dg = -(g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}dg) = -\omega \wedge \omega.$$

Logo, temos

$$d\omega = -\omega \wedge \omega.$$

Segue um importante resultado.

Teorema 1.6.1 (Cartan)**.** *Seja G um grupo de Lie, formado por matrizes, com algebra de Lie $\mathfrak{g}$ e ω a forma de Maurer-Cartan. Seja M uma variedade tal que existe uma 1-forma, ϕ, valuada em $\mathfrak{g}$ tal que*

$$d\phi = -\phi \wedge \phi.$$

Então para qualquer $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e uma aplicação $f : U \longrightarrow G$ tal que $f^*(\omega) = \phi$. Ainda, se M é simplesmente conexa e verifica as condições acima então, a aplicação f está definida globalmente sobre M.

O teorema acima é um poderoso resultado, sua demonstração pode ser encontrada em [11] pág. 18.

Temos o seguinte resultado.

Lema 1.6.1. *Seja $B(t) = (b_{ij}(t))$ uma família suave de matrizes inversíveis $n \times n$, assim para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} det(B(t)) = tr(B^{'}(s)B^{-1}(s))det(B(s)).$$

Demonstração. Seja $A(t) = B(t)B^{-1}(s)$, assim $A(s) = Id$ e pelo lema anterior teremos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \det(A(t)) &= \operatorname{tr}(A^{'}(s)) \\ &= \operatorname{tr}(B^{'}(s)B^{-1}(s)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \det(B(t)B^{-1}(s)) = \operatorname{tr}(B^{'}(s)B^{-1}(s)),$$

ou seja,

$$\det(B^{-1}(s))\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \det(B(t)) = \operatorname{tra}(B^{'}(s)B^{-1}(s)).$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \det(B(t)) = \operatorname{tr}(B^{'}(s)B^{-1}(s))\det(B(s)).$$

□

Segue do lema acima que

$$\operatorname{tr}(dgg^{-1}) = 0.$$

Daí, como $\operatorname{tr}(dgg^{-1}) = \operatorname{tr}(g^{-1}dg)$ então

$$\operatorname{tr}(g^{-1}dg) = 0 \tag{1.16}$$

A equação (1.16) mostra que a forma de Maurer-Cartan assume valores na algebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

A partir da ação de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre $\mathbb{L}^4$ temos o seguinte resultado.

Lema 1.6.2. *O referencial e_0, e_1, e_2, e_3 pode ser visto no conjunto das matrizes 2×2 hermitianas como*

(i) $e_0 = gg^*$

(ii) $e_1 = g\sigma_1 g^*$

(iii) $e_2 = g\sigma_2 g^*$

(iv) $e_3 = g\sigma_3 g^*$

Estamos denotando por g^* a matriz $\overline{g}^t$.

Demonstração. Ver [8], pág. 125. □

Utilizaremos as equações acima, juntamente com as equações de estrutura, para obtermos a forma de Maurer-Cartan de $\mathbb{H}^3$.

Como visto anteriormente, temos

$$\begin{aligned} de_0 &= \sum_{j=1}^{3} e_j\omega^j \\ de_i &= e_0\omega^i + \sum_{j=1}^{3} e_j\omega_i^j. \end{aligned}$$

Aplicando a diferencial na equação (i) temos

$$dgg^* + gdg^* = de_0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} dgg^* + gdg^* &= e_1\omega^1 + e_2\omega^2 + e_3\omega^3 \\ &= \omega^1 e_0 + e_2\omega_1^2 + e_3\omega_1^3 \\ &= g(\omega^1\sigma_1 + \omega^2\sigma_2 + \omega^3\sigma_3)g^* \end{aligned}$$

Desta forma,

$$dgg^* + gdg^* = g\begin{pmatrix} \omega^3 & \omega^1 + i\omega^2 \\ \omega^1 - \omega^2 i & -\omega^3 \end{pmatrix} g^*$$

Logo,

$$g^{-1}dg + dg^*(g^*)^{-1} = \begin{pmatrix} \omega^3 & \omega^1 + i\omega^2 \\ \omega^1 - \omega^2 i & -\omega^3 \end{pmatrix}$$

Escreva

$$g^{-1}dg = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e

$$dg^*(g^*)^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Assim, temos que

- $a_{11} + b_{11} = \omega^3$
- $a_{21} + b_{21} = \omega^1 - \omega^2 i$

- $a_{22} + b_{22} = -\omega^3$

- $a_{12} + b_{12} = \omega^1 + \omega^2 i$

Aplicando a diferencial na equação (ii) temos

$$\begin{aligned} dg\sigma_1 g^* + g\sigma_1 dg^* &= de_1 \\ &= \omega^1 e_0 + e_2\omega_1^2 + e_3\omega_1^3 \\ &= \omega^1 gg^* + \omega_1^2 g\sigma_2 g^* + \omega_1^3 g\sigma_3 g^* \\ &= g(\omega^1\sigma_0 + \omega_1^2\sigma_2 + \omega_1^3\sigma_3)g^*. \end{aligned}$$

Daí,

$dg\sigma_1 g^* + g\sigma_1 dg^* = g \begin{pmatrix} \omega^1 + \omega_1^3 & i\omega_1^2 \\ -i\omega_1^2 & \omega^1 - \omega_1^3 \end{pmatrix} g^*$

Portanto,

$$g^{-1}dg\sigma_1 + \sigma_1 dg^*(g^*)^{-1} = \begin{pmatrix} \omega^1 + \omega_1^3 & i\omega_1^2 \\ -i\omega_1^2 & \omega^1 - \omega_1^3 \end{pmatrix}$$

Por outro lado,

$g^{-1}dg\sigma_1 + \sigma_1 dg^*(g^*)^{-1} = \begin{pmatrix} a_{12} + b_{21} & a_{11} + b_{22} \\ a_{22} + b_{11} & a_{21} + b_{12} \end{pmatrix}$

Daí, temos as equações abaixo

- $a_{12} + b_{21} = \omega^1 + \omega_1^3$

- $a_{11} + b_{22} = \omega_1^2 i$

- $a_{22} + b_{11} = -\omega_1^2 i$

- $a_{21} + b_{12} = \omega^1 - \omega_1^3$

Aplicando a diferencial na equação (iii) temos

$$\begin{aligned} dg\sigma_2 g^* + g\sigma_2 dg^* &= e_0 w^2 + e_1 w_2^1 + e_3 w_2^3 \\ &= w^2 g\sigma_0 g^* + w_2^1 g\sigma_1 g^* + w_2^3 g\sigma_3 g^* \\ &= g(w^2\sigma_0 + w_2^1\sigma_1 + w_2^3\sigma_3)g^{\cdot} \end{aligned}$$

Daí,

$$dg\sigma_2 g^* + g\sigma_2 dg^* = g \begin{pmatrix} \omega^2 + \omega_2^3 & \omega_2^1 \\ \omega_2^1 & \omega^2 - \omega_2^3 \end{pmatrix} g^*$$

Donde,

$$g^{-1}dg\sigma_2 + \sigma_2 dg^*(g^*)^{-1} = \begin{pmatrix} \omega^2 + \omega_2^3 & \omega_2^1 \\ \omega_2^1 & \omega^2 - \omega_2^3 \end{pmatrix}.$$

Desta forma,

$$g^{-1}dg\sigma_2 + \sigma_2 dg^*(g^*)^{-1} = \begin{pmatrix} i(b_{21} - a_{12}) & i(a_{11} + b_{22}) \\ -i(a_{22} + b_{11}) & i(a_{21} - b_{12}) \end{pmatrix}$$

Daí,

- $i(b_{21} - a_{12}) = \omega^2 + \omega_2^3$
- $i(a_{11} + b_{22}) = \omega_2^1$
- $-i(a_{22} + b_{11}) = \omega_2^1$
- $i(a_{21} - b_{12}) = \omega^2 - \omega_2^3$

Aplicando a diferencial na equação (iv) temos

$$\begin{aligned} dg\sigma_3 g^* + g\sigma_3 dg^* &= \omega^3 e_0 + \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 \\ &= g(\omega^3 \sigma_0 + \omega_3^1 \sigma_1 + \omega_3^2 \sigma_2) g^* \end{aligned}$$

Daí,

$$dg\sigma_3 g^* + g\sigma_3 dg^* = g \begin{pmatrix} \omega^3 & \omega_3^1 + \omega_3^2 i \\ \omega_3^1 - \omega_3^2 i & \omega^3 \end{pmatrix} g^*$$

Logo,

$$g^{-1}dg\sigma_3 + \sigma_3 dg^*(g^*)^{-1} = \begin{pmatrix} \omega^3 & \omega_3^1 + \omega_3^2 i \\ \omega_3^1 - \omega_3^2 i & \omega^3 \end{pmatrix}$$

Por outro lado,

$$g^{-1}dg\sigma_3 + \sigma_3 dg^*(g^*)^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & b_{12} - a_{12} \\ a_{21} - b_{21} & -a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}$$

Logo,

- $a_{11} + b_{11} = \omega^3$
- $b_{12} - a_{12} = \omega_3^1 + \omega_3^2 i$
- $a_{21} - b_{21} = \omega_3^1 - \omega_3^2 i$

- $a_{22} + b_{22} = -\omega^3$

Por outro lado, o traço de $g^{-1}dg$ é nulo e, portanto,

$$a_{11} = -a_{22}.$$

Pelas equações obtidas temos,

$$\begin{cases} b_{12} - a_{12} = \omega_3^1 + i\omega_3^2 \\ a_{12} + b_{12} = \omega^1 + i\omega^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} - a_{22} = \omega^3 + i\omega_1^2 \\ a_{11} = -a_{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(a_{21} - b_{12}) = \omega^2 - \omega_2^3 \\ a_{21} + b_{12} = \omega^1 - \omega_1^3 \end{cases}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\omega^3 + i\omega_1^2}{2} \\ a_{12} &= \frac{(\omega^1 - \omega_3^1) + i(\omega^2 - \omega_3^2)}{2} \\ a_{21} &= \frac{(\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2)}{2} \\ a_{22} &= \frac{-(\omega^3 + i\omega_1^2)}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, temos a forma de Maurer-Cartan

$$g^{-1}dg = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega^3 + i\omega_1^2 & (\omega^1 - \omega_3^1) + i(\omega^2 - \omega_3^2) \\ (\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2) & -(\omega^3 + i\omega_1^2). \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

1.7 Correspondência de Lawson

A correspondência de Lawson estabelece uma relação entre superfícies de curvatura média constante nos espaços $\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3$. A essência desta relação está no teorema fundamental as superfícies. Nesta sessão faremos um breve estudo sobre a Correspondência de Lawson. Para mais detalhes consultar [8].

Seja $M^3(\overline{K})$ a única forma espacial completa de dimensão 3, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante $\overline{K}$. Assim, a menos de isometria, por ([5]), temos três possibilidades

$$\begin{aligned} M^3(0) &= \mathbb{R}^3 \\ M^3(-1) &= \mathbb{H}^3 \\ M^3(1) &= \mathbb{S}^3 \end{aligned}$$

Seja Σ uma superfície de Riemann e considere $f : \Sigma \longrightarrow M^3(\overline{K})$ uma imersão com métrica induzida $ds^2 =< . >$. Considere ∇ a conexão de Levi-Civita e K a curvatura Gaussiana de $f(\Sigma)$. Denotaremos por S o operador forma da imersão f. Como a imersão f está bem definida, então satisfaz as equações de Gauss e Codazzi

$$K - \overline{K} = det(S); \tag{1.18}$$

$$\langle S([X,Y]), Z\rangle = \langle \nabla_X S(Y), Z\rangle - \langle \nabla_Y S(X), Z\rangle\,, \tag{1.19}$$

onde X, Y, Z campos diferenciáveis em Σ.

Assumiremos, daqui por diante, que a curvatura média, H, de f é constante. Portanto,

$$H = \frac{1}{2}tr(S)$$

é constante.

Tomemos $c \in \mathbb{R}$. Definamos,

$$\begin{aligned} \widetilde{S} &= S + cId \\ \widetilde{K} &= \overline{K} - ctr(S) - c^2 \end{aligned}$$

Tomando X, Y, Z campos diferenciáveis sobre Σ, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{S}([X,Y]), Z \right\rangle &= \langle S + cId([X,Y]), Z\rangle \\ &= \langle S([X,Y]), Z\rangle + c\,\langle Id([X,Y]), Z\rangle \\ &= \langle S([X,Y]), Z\rangle + c(\langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, Z\rangle) \\ &= \langle S([X,Y]), Z\rangle + c(\langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle \nabla_Y X, Z\rangle). \end{aligned}$$

Como S satisfaz as equações de Codazzi, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{S}([X,Y]), Z \right\rangle &= \langle S([X,Y]), Z\rangle + c\,\langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle \nabla_Y X, Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X S(Y), Z\rangle - \langle \nabla_Y S(X), Z\rangle + c(\langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle \nabla_Y X, Z\rangle) \\ &= \langle \nabla_X (S + cId)(Y), Z\rangle - \langle \nabla_Y (S + cId)(X), Z\rangle \\ &= \left\langle \nabla_X \widetilde{S}(Y), Z \right\rangle - \left\langle \nabla_Y \widetilde{S}(X), Z \right\rangle \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$K - \widetilde{K} = (K - \overline{K}) + ctr(S) + c^2 = detS + ctr(S) + c^2 = det(S + cId) = det(\widetilde{S}).$$

Ademais, temos

$$\frac{1}{2}tr(\widetilde{S}) = \frac{1}{2}(tr(S) + 2c) = H + c.$$

Assim, pelo teorema fundamental das superfícies, existe uma imersão $\widetilde{f} : \Sigma \longrightarrow M^3(\widetilde{K})$ com métrica induzida ds^2. Portanto, como as imersões f e $\widetilde{f}$ possuem a mesma métrica então $f(\Sigma)$ e $\widetilde{f}(\Sigma)$ são localmente isométricas. Ademais, a curvatura média, $\widetilde{H}$, de $\widetilde{f}$ é

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2} tr(\widetilde{S}) = H + c.$$

Portanto, temos uma correspondência entre superfícies de curvatura média constante H em $M^3(\overline{K})$ e superfícies de curvatura média constante $(H + c)$ em $M^3(\overline{K} - 2cH - c^2)$. Em particular, dada uma imersão mínima $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ existe uma imersão $\widetilde{f} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3$ de curvatura média constante 1 tal que $f(\Sigma)$ e $\widetilde{f}(\Sigma)$ são localmente isométricas. As superfícies dadas pelas imersões f e $\widetilde{f}$ são ditas *superfícies primas.*

Capítulo 2

Teoria Local das Superfícies de $\mathbb{H}^3$

Neste capítulo estudaremos a teoria das superfícies em $\mathbb{H}^3$ via método do referencial móvel.

2.1 Curvatura Média e Gaussiana

Sejam M uma variedade de dimensão 2 conexa e orientada e $f : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão suave. Definamos $\mathcal{F}_f^1 \subset M \times \mathcal{F}$ o espaço tal que dado $(m, e_0, e_1, e_2, e_3) \in \mathcal{F}_f^1$ tem-se

(i) $f(m) = e_0(f(m))$

(ii) e_1, e_2 é tangente a $f(M)$

(iii) $e_3 \perp f(M)$

$\mathcal{F}_f^1$ é dito *fibrado de primeira ordem do referencial.* Tomemos em M a métrica $ds_f^2 = \langle df, df \rangle$ induzida da imersão. Adotaremos o referencial $e_0, ..., e_3$ sobre $f(M)$ tal que e_0 descreve $f(M)$, e_1, e_2 geram $T_{f(m)}M$ e e_3 é normal a $f(M)$ no ponto $f(m)$. Este referencial é dito *referencial adaptado.* As aplicações, e_k, serão vistas, agora, como aplicações

$$e_k : \mathcal{F}_f^1 \longrightarrow \mathbb{L}^4,$$

onde $k = 0, 1, 2, 3$. Identificando T_mM com $T_{f(m)}f(M)$ tomaremos os vetores e_1, e_2, e_3 como vetores sobre o plano tangente em M. Para facilitar a notação vamos supor que todas as aplicações e formas estão definidas em $\mathcal{F}_f^1$ da maneira padrão.

Notemos que a diferencial exterior de f satisfaz

$$de_0 = df = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3.$$

Daí, podemos escrever

$$w^i(e_j) = \langle df(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, e_i \rangle = \delta_{ij}.$$

Portanto,

$$df(e_3) = \omega^1(e_3)e_1 + \omega^2(e_3)e_2 + \omega^3(e_3)e_3 = \omega^3.$$

Por outro lado, $df_m(e_3)$ é um vetor no plano $T_{f(m)}M$, logo $\omega^3 = 0$. Assim, podemos escrever

$$ds_f^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2.$$

O elemento de área é dado por $\omega^1 \wedge \omega^2 > 0$. Das equações de estrutura de $\mathbb{H}^3$, temos

$$d\omega^3 = \omega_1^3 \wedge \omega^1 + \omega_2^3 \wedge \omega^2.$$

Por outro lado, como $\omega^3 = 0$ então

$$\omega_1^3 \wedge \omega^1 + \omega_2^3 \wedge \omega^2 = 0.$$

Pelo lema de Cartan, ver [5], existem $h_{ij} = h_{ji}$ sobre $\mathcal{F}_f^{(1)}$ tais que

$$\omega_1^3 = h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2,$$

$$\omega_2^3 = h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2.$$

Desta forma, faz sentido definir a forma quadrática

$$II = h_{11}(\omega^1)^2 + 2h_{12}\omega^1 \otimes \omega^2 + h_{22}(\omega^2)^2$$

sobre M.

Note que

$$\begin{aligned} d\omega_1^2 &= -\omega_3^2 \wedge \omega_1^3 - \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= (h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2) \wedge (h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2) - \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= (1 + h_{12}^2 - h_{11}h_{22})\omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura Gaussiana de M é dada por

$$K = -1 - h_{12}^2 + h_{11}h_{22}.$$

A equação acima é dita *equação de Gauss.* A curvatura média de $f(M)$ é definida por

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}.$$

2.2 Aplicação Hiperbólica de Gauss

Definiremos agora uma aplicação análoga a aplicação normal de Gauss para imersões em $\mathbb{R}^3$. Note que, para todo $e_0 = f(m)$, a geodésica orientada em $\mathbb{H}^3$ passando por e_0 na direção e_3 intercepta o bordo ideal, $\mathbb{S}^2_\infty$, em dois pontos. Denotaremos estes pontos por $[e_0 + e_3]$ e $[e_0 - e_3]$. Como a geodésica está orientada, podemos considerar $[e_0 - e_3]$ o ponto inicial e $[e_0 + e_3]$ o ponto final. Desta forma fica bem definida a aplicação $[e_0 + e_3] : M \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$. Esta é a aplicação análoga a aplicação normal de Gauss em $\mathbb{R}^3$.

Se $M \subset \mathbb{R}^3$, temos que a aplicação normal de Gauss é conforme se, e só se, M é totalmente umbílica ou mínima. Temos um resultado análogo em $\mathbb{H}^3$.

Proposição 2.2.1. *A aplicação $[e_0 + e_3] : M \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$ é conforme se, e só se, f é totalmente umbílica (neste caso $[e_0 + e_3]$ reverte a orientação) ou f satisfaz $H \equiv 1$(nesse caso $[e_0 + e_3]$ preserva a orientação)*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que $[e_0 + e_3]$ é conforme se, e somente se, $d\sigma_f^2 = \langle d(e_0 + e_3), d(e_0 + e_3)\rangle$ é um múltiplo de ds_f^2.

De fato, suponhamos que $[e_0 + e_3]$ é conforme. Note que

$$[e_0 + e_3] = \overline{e_0 + e_3} = \{\lambda(e_0 + e_3), \lambda > 0\}.$$

Tomemos um representante de $\lambda(e_0 + e_3)$ de $[e_0 + e_3]$, logo $\langle \lambda d(e_0 + e_3), \lambda d(e_0 + e_3)\rangle$ é múltiplo de ds_f^2. Daí, $d\sigma_f^2$ é múltiplo de ds_f^2.

Reciprocamente, suponhamos que $d\sigma_f^2$ é múltiplo de ds_f^2. Daí, para cada representante $\lambda(e_0+e_3)$ de $[e_0 + e_3]$ tem-se que $\langle d[e_0 + e_3], d[e_0 + e_3]\rangle$ é múltiplo de ds_f^2 e, portanto, $[e_0 + e_3]$ é conforme.

Note que,

$$d\sigma_f^2 = (\omega^1 + \omega_3^1)^2 + (\omega^2 + \omega_3^2)^2.$$

Usando as equações

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2 \\ \omega_2^3 &= h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} d\sigma_f^2 &= ((1 - h_{11})\omega^1 - h_{12}\omega^2)^2 + (-h_{12}\omega^1 + (1 - h_{22})\omega^2)^2 \\ &= (\omega^1)^2((1 - h_{11})^2 + h_{12}^2) + (\omega^2)^2(h_{12}^2 + (1 - h_{22})^2) - 2h_{12}\omega^1 \otimes \omega^2(2 - h_{11} - h_{22}) \end{aligned}$$

Usando o fato de que

$$\begin{aligned} k &= -1 - h_{12}^2 + h_{11}h_{22} \\ H &= \frac{h_{11} + h_{22}}{2} \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} d\sigma_f^2 &= (\omega^1)^2(-2h_{11} + h_{11}^2 - k + h_{11}h_{22}) + (\omega^2)^2(-k - +h_{11}h_{22} - 2h_{22} + h_{22}^2) + 4h_{12}\omega^1 \otimes \omega^2(H-1) \\ &= (\omega^1)^2 h_{11}(-2+2H) - k((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) + (\omega^2)^2 h_{22}(2H-2) + 4h_{12}\omega^1 \otimes \omega^2(H-1) \\ &= (H-1)(2(\omega^1)^2 h_{11} + 2(\omega^2)^2 h_{22} + 4h_{12}\omega^1 \otimes \omega^2) - k((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) \end{aligned}$$

Escrevendo

$$q(\omega^1, \omega^2) = (H-1)((\omega^1)^2(h_{11} - h_{22}) + (\omega^2)^2(h_{22} - h_{11}) + 4h_{12}\omega^1 \otimes \omega^2),$$

temos que

$$\begin{aligned} d\sigma_f^2 &= (H-1)(2(\omega^1)^2 h_{11} + 2(\omega^2)^2 h_{22} + 4h_{12}\omega^1 \otimes \omega^2) - k((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) \\ &= q(\omega^1, \omega^2) + (\omega^1)^2((H-1)(h_{11} + h_{22}) - k) + (\omega^2)^2((H-1)(h_{11} + h_{22}) - k) \\ &= q(\omega^1, \omega^2) + ((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2)(2(H-1)H - k) \\ &= q(\omega^1, \omega^2) + (2(H^2 - H) - k)ds_f^2 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$d\sigma_f^2 = (2(H^2 - H) - k)ds_f^2 + (H-1)((h_{11} - h_{22})(\omega^1)^2 + 4h_{12}\omega^1 \otimes \omega^2 - (h_{11} - h_{22})(\omega^2)^2).$$

Note que $((h_{11} - h_{22})(\omega^1)^2 + 4h_{12}\omega^1 \otimes \omega^2 - (h_{11} - h_{22})(\omega^2)^2)$ não é múltiplo de ds_f^2.
Portanto, $d\sigma_f^2$ é múltiplo de ds_f^2 se, e só se,

$$(H-1)(h_{11} - h_{22}) = (H-1)h_{12} = 0.$$

Desta forma, pela igualdade acima, se $H \equiv 1$ ou f é totalmente umbílica temos que $[e_0 + e_3]$ é conforme.

Por outro lado, se $[e_0 + e_3]$ é conforme então temos as seguintes possibilidades

(i) $H \equiv 1$;

(ii) f totalmente umbílica;

(iii) $H \not\equiv 1$.

Mostraremos que no terceiro caso f é totalmente umbílica. De fato, seja $U = \{m \in M; H(m) \neq 1\}$. Claramente U é aberto e, portanto, f é totalmente umbílica. Seja V uma componente conexa de U. Façamos $A = d(e_0 + e_3)$. Note que, como $f(U)$ é totalmente umbílica então

$$Av = kv.$$

Por outro lado, pela fórmula de Codazzi, ver [5] pág 138, temos

$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X),$$

onde $(\nabla_X A)(Y) = \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y)$ e $(\nabla_Y A)(X) = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X)$. Daí, como

$$(\nabla_X A)(Y) = \nabla_X(kY) - A(\nabla_X Y) = X(k)Y + k\nabla_X Y - k\nabla_X Y$$

e

$$(\nabla_Y A)(X) = \nabla_Y(kX) - A(\nabla_Y X) = Y(k)X + k\nabla_Y X - k\nabla_Y X$$

então

$$X(k)Y = Y(k)X.$$

Como X, Y são campos arbitrários então

$$X(k) = Y(k) = 0.$$

Portanto, H é constante em cada componente conexa. Em particular, H é constante sobre V. Por outro lado, como H é continua então H é constante sobre $\overline{V}$. Desta forma, temos que $\overline{V} \subset U$. Como V é conexo então $\overline{V}$ é conexo e $\overline{V}$ contém V então $\overline{V} = V$. Pelo fato de M ser conexo e V ser aberto e fechado temos que $V = M$. Logo, $H(m) \neq 1$ para qualquer $m \in M$. Em particular, f é totalmente umbílica. Finalmente, $[e_0 + e_3]$ é conforme se, e só se, $H \equiv 1$ ou f é totalmente umbílica.

Se $H \equiv 1$, então

$$d\sigma_f^2 = -k ds_f^2.$$

Logo, $k \leq 0$.

Ademais,

$$(\omega^2+\omega_2^3)\wedge(\omega^1+\omega_3^1) = (\omega^2-h_{21}\omega^1-h_{22}\omega^2)\wedge(\omega^1-h_{11}-h_{12}\omega^2) = (1+h_{21}h_{12}-h_{22}h_{11}) = -k\omega^1\wedge\omega^2.$$

Portanto, $[e_0 + e_3]$ preseva a orientação.

Se f é totalmente umbílica então

$$(\omega^2+\omega_2^3)\wedge(\omega^1+\omega_3^1) = (\omega^2-h_{21}\omega^1-h_{22}\omega^2)\wedge(\omega^1-h_{11}-h_{12}\omega^2) = (-1+2H-H^2)\omega^1\wedge\omega^2 = -(H-1)^2\omega^1\wedge\omega^2.$$

Portanto, $[e_0 + e_3]$ reverte a orientação. $\square$

Capítulo 3

Teorema da Representação de Bryant

Neste capítulo, demonstraremos o teorema principal do trabalho.

No grupo de Lie complexo $SL(2,\mathbb{C})$ temos a forma de Maurer-Cartan $g^{-1}dg$, ver (1.17). A partir disso, tomemos a forma quadrática

$$\Phi = -4det(g^{-1}dg)$$

sobre $SL(2,\mathbb{C})$. Note que

$$\Phi = [(\omega^1 - i\omega_3^2)^2 + (\omega^3 + i\omega_1^2)^2 + (\omega^2 + i\omega_3^1)^2]. \tag{3.1}$$

Seja M^2 uma superfície de Riemann. Dizemos que $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ é *nula* quando $F^*(\Phi)$ é uma forma identicamente nula. Note que

$$F^*(g^{-1}dg) = F^{-1}dF.$$

Donde, $F^*(\Phi) = -4det(F^{-1}dF)$ e, portanto, F é nula quando $det(F^{-1}dF) = 0$. Segue o teorema de Bryant.

Teorema 3.0.1. *Seja M^2 uma superfície de Riemann e $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ uma imersão holomorfa nula. Então $e_0 \circ F = f : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é uma imersão conforme com $H \equiv 1$. Reciprocamente, se M^2 é simplesmente conexa e $f : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é uma imersão com $H \equiv 1$, então existe uma imersão $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ holomorfa, com respeito a estrutura complexa sobre M^2, tal que $f = e_0 \circ F$. Ademais, F é única a menos de uma multiplicação por uma constante $g \in SU(2)$.*

Demonstração. Com o intuito de facilitar as contas, consideremos

$$\omega = \omega^1 + i\omega^2, \pi = \omega_1^3 - i\omega_2^3$$

Note que,

$$F^{-1}dF = F^*\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega^3 + i\omega_1^2 & (\omega^1 - \omega_3^1) + i(\omega^2 - \omega_3^2) \\ (\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2) & -(\omega^3 + i\omega_1^2) \end{pmatrix}$$

Escrevamos

$$\begin{aligned} F^*(\omega^3 + i\omega_1^2) &= 2\alpha \\ F^*[(\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2)] &= F^*(\overline{\omega} - \pi) = 2\beta \\ F^*[(\omega^1 - \omega_3^1) + i(\omega^2 - \omega_3^2)] &= F^*(\omega + \overline{\pi}) = 2\gamma, \end{aligned}$$

onde α, β, γ são 1-formas holomorfas sobre M^2.

De (3.1) temos

$$F^*(\Phi) = [F^*((\omega^1 - i\omega_3^2)^2 + (\omega^3 + i\omega_1^2)^2 + (\omega^2 + i\omega_3^1)^2)]. \tag{3.2}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} F^*((\omega^1 - i\omega_3^2)^2 + (\omega^2 + i\omega_3^1)^2) &= F^*([(\omega^1 - i\omega_3^2) + i(\omega^2 + i\omega_3^1)] \otimes [(\omega^1 - i\omega_3^2) - i(\omega^2 + i\omega_3^1)]) \\ &= F^*(\omega + \overline{\pi}) \otimes F^*(\overline{\omega} - \pi) \\ &= 4\beta \otimes \gamma \end{aligned}$$

Desta forma,

$$F^*(\Phi) = [F^*(\omega^1 - i\omega_3^2)^2 + F^*(\omega^3 + i\omega_1^2)^2 + +F^*(\omega^2 + i{\omega_3}^1)^2] = 4(\alpha^2 + \beta \otimes \gamma).$$

Como F é nula então

$$\alpha^2 + \beta \otimes \gamma = 0.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} F^*(\omega^3) &= \alpha + \overline{\alpha} \\ F^*(\omega) &= \frac{F^*(\omega - \overline{\pi} + \omega + \overline{\pi})}{2} \\ &= \frac{1}{2}(F^*(\omega - \overline{\pi}) + F^*(\omega + \overline{\pi})) \\ &= \overline{\beta} + \gamma \end{aligned}$$

Logo, temos as seguintes equações

$$\begin{aligned} F^*(\Phi) &= 4(\alpha^2 + \beta \otimes \gamma) = 0 \\ F^*(\omega^3) &= \alpha + \overline{\alpha} \\ F^*(\omega) &= \overline{\beta} + \gamma. \end{aligned}$$

Tomemos $f = e_0 \circ F : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$. Logo,

$$\begin{aligned}
f^*(ds^2) &= F^* \circ e_0^*(ds^2) \\
&= F^*((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^3) \\
&= F^*(\omega \otimes \overline{\omega} + (\omega^3)^2) \\
&= F^*((\omega^3)^2) + F^*(\omega \otimes \overline{\omega}) \\
&= (\alpha + \overline{\alpha})^2 + (\overline{\beta} + \gamma)^2 \otimes (\beta + \overline{\gamma}) \\
&= (\alpha^2 + \beta \otimes \gamma) + ((\overline{\alpha})^2 + \overline{\beta} \otimes \overline{\gamma}) + [2\alpha \otimes \overline{\alpha} + \beta \otimes \overline{\beta} + \gamma \otimes \overline{\gamma}] \\
&= 2\alpha \otimes \overline{\alpha} + \beta \otimes \overline{\beta} + \gamma \otimes \overline{\gamma}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$ds_f^2 = 2\alpha \otimes \overline{\alpha} + \beta \otimes \overline{\beta} + \gamma \otimes \overline{\gamma}. \tag{3.3}$$

Por outro lado, note que a expressão $2\alpha \otimes \overline{\alpha} + \beta \otimes \overline{\beta} + \gamma \otimes \overline{\gamma}$ é positiva definida, pois caso contrário F não seria uma imersão. Portanto, de (3.3), temos que f é uma imersão. Mostraremos que o fato de F ser nula mostra que F é conforme. Com efeito, seja $<,>$ o produto interno dado pela forma quadrática ϕ. Considere $z = u + iv$ uma coordenada em M, assim

$$\begin{aligned}
0 &= F^*(\Phi)(v) \\
&= \Phi(dF(v)) \\
&= F^*(\Phi)(\partial_u F - i\partial_v F) \\
&= \Phi(dF(\partial_u F - i\partial_v F)) \\
&= \Phi(F_u - iF_v) \\
&= < F_u - iF_v, F_u - iF_v > \\
&= < F_u, F_u > - < F_v, F_v > -2i < F_u, F_v > .
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
< F_u, F_u > &= < F_v, F_v > \\
< F_u, F_v > &= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, F é conforme. Desta forma, como e_0 é a aplicação de inclusão então

$$\begin{aligned}
< f_u, f_u > &= < f_v, f_v > \\
< f_u, f_v > &= 0.
\end{aligned}$$

e, portanto, f é conforme.

Mostraremos que $H \equiv 1$. Note que toda superfície de Riemann pode ser parametrizada utilizando parâmetros isotérmicos, ver [6]. Assim, sejam $U \subset M$ um aberto simplesmente conexo e ϕ uma 1-forma do tipo $(1,0)$ definida sobre U tal que a métrica ds_f^2 induzida sobre M pela imersão seja dada por $ds_f^2 = \phi \otimes \overline{\phi}$.

Faz sentido considerar funções complexas A, B, C sobre U tais que

$$\begin{aligned}
F^*(\omega^3 + i\omega_1^2) &= 2A\phi \\
F^*(\overline{\varpi} - \pi) &= 2B\phi \\
F^*(w + \overline{\pi}) &= 2C\phi \\
A^2 + BC &= 0 \\
2A\overline{A} + B\overline{B} + C\overline{C} &= 1
\end{aligned}$$

De fato, note que a existência de funções A, B, C complexas que satisfazem

$$\begin{aligned}
A\phi &= \alpha \\
B\phi &= \beta \\
C\phi &= \gamma.
\end{aligned}$$

é imediata. Observado este fato, temos que

$$\alpha^2 + \beta \otimes \gamma = 0 \Longrightarrow \phi(A^2 + BC) = 0.$$

Desta forma, podemos supor que A, B, C satisfazem a equação

$$A^2 + BC = 0.$$

Note que,

$$2\alpha \otimes \overline{\alpha} + \beta \otimes \overline{\beta} + \gamma \otimes \overline{\gamma} \Longrightarrow (2A\overline{A} + B\overline{B} + C\overline{C})\phi \otimes \overline{\phi} = ds_f^2.$$

Portanto, podemos considerar

$$2A\overline{A} + B\overline{B} + C\overline{C} = 1.$$

Consideraremos, agora, funções $p, q : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\begin{aligned}
A &= pq \\
B &= p^2 \\
C &= -q^2 \\
p\overline{p} + q\overline{q} &= 1.
\end{aligned}$$

Observe que tal escolha de funções p, q verifica a igualdade

$$A^2 + BC = 0.$$

Ainda, note que

$$2A\overline{A} + B\overline{B} + C\overline{C} = 1 \Longrightarrow (p\overline{p} + q\overline{q})^2 = 1.$$

Desta forma, podemos supor sem perda de generalidade que $p\overline{p}+q\overline{q} = 1$. Fica claro que é possível a escolha de p, q com tais propriedades.

Note que, como α, β, γ são 1-formas holomorfas em $U \subset M$, então $A\phi, B\phi, C\phi$ são claramente holomorfas sobre U. Logo, como

$$\frac{p}{q} = \frac{B}{A},$$

onde $A \neq 0$, então $\frac{p}{q}$ é meromorfa sobre U.

Podemos notar que a 1-forma

$$pdq - qdp = \begin{cases} p^2 d(\frac{q}{p}) \\ \\ -q^2 d(\frac{p}{q}) \end{cases}$$

Assim, temos que $pdq - qdp$ é uma 1-forma holomorfa sobre U. Particularmente, $pdq - qdp$ é do tipo $(1, 0)$.

Consideremos a aplicação $h : U \longrightarrow SU(2)$ definida por

$$h = \begin{pmatrix} q & -\overline{p} \\ p & \overline{q} \end{pmatrix}.$$

Como $h \in SU(2)$ então $hh^* = I$. Logo,

$$(Fh)(Fh)^* = F(hh^*)F^* = FF^*.$$

Portanto, $e_0(Fh) = e_0(F)$.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} F^{-1}dF &= \frac{1}{2}F^* \begin{pmatrix} \omega^3 + i\omega_1^2 & (\omega^1 - \omega_3^1) + i(\omega^2 - \omega_3^2) \\ (\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2) & -(\omega^3 + i\omega_1^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \\ &= \phi \begin{pmatrix} A & C \\ B & -A \end{pmatrix} \\ &= \phi \begin{pmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note também que

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{q} & \overline{p} \\ -p & q \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{array}{rcl}(Fh)^{-1}d(Fh) & = & h^{-1}(F^{-1}dF)h + h^{-1}dh \\ & = & h^{-1}\phi\begin{pmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix} h + h^{-1}dh \\ & = & h^{-1}(\phi\begin{pmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & -\overline{p} \\ p & \overline{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dq & -d\overline{p} \\ dp & d\overline{q} \end{pmatrix}) \\ & = & h^{-1}\begin{pmatrix} dq & -d\overline{p} - q\phi \\ dp & -p\phi + d\overline{q} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \overline{q} & \overline{p} \\ -p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dq & -d\overline{p} - q\phi \\ dp & -p\phi + d\overline{q} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \overline{q}dq + \overline{p}dp & -\overline{q}d\overline{p} + \overline{p}d\overline{q} - \phi \\ -pdq + qdp & pd\overline{p} + qd\overline{q} \end{pmatrix}\end{array}$$

Por outro lado,

$$(Fh)^{-1}d(Fh) = \frac{1}{2}(Fh)^*\begin{pmatrix} \omega^3 + \omega_1^2 i & (\omega^1 - \omega_3^1) + i(\omega^2 - \omega_3^2) \\ (\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2) & -(\omega^3 + i\omega_1^2) \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}(Fh)^*\begin{pmatrix} \omega^3 + i\omega_1^2 & \omega + \pi \\ \overline{\omega} - \pi & -(\omega^3 + i\omega_1^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{q}dq + \overline{p}dp & -\overline{q}d\overline{p} + \overline{p}d\overline{q} - \phi \\ -pdq + qdp & pd\overline{p} + qd\overline{q} \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos as seguintes equações

$$\begin{array}{rcl}(Fh)^*(\omega) & = & \frac{1}{2}(Fh)^*(\omega + \overline{\pi} + \overline{\overline{\omega} - \pi}) \\ & = & (-\overline{q}d\overline{p} + \overline{p}d\overline{q} - \phi) + \overline{(qdp - pdq)} \\ & = & -\phi\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}(Fh)^*(\omega^3) & = & \frac{1}{2}(Fh)^*((\omega^3 + i\omega_1^2) - (\overline{-\omega^3 - i\omega_1^2})) \\ & = & (-\overline{q}dq + \overline{p}dp - \overline{(pd\overline{p} - qd\overline{q})}) \\ & = & 0\end{array}$$

$$(Fh)^*(-\pi) = -\overline{\phi} - 2(qdp - pdq).$$

A aplicação $Fh : U \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ satisfaz a equação $f = e_0 \circ F = e_0(Fh)$.
Sabemos que,

$$\begin{aligned} \omega_1^3 \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge \omega_2^3 &= 2H\omega^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega^3 &= -\omega_1^3 \wedge \omega^1 - \omega_2^3 \wedge \omega^2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \pi \wedge \omega &= (\omega_1^3 - i\omega_2^3) \wedge (\omega^1 + i\omega^2) \\ &= \omega_1^3 \wedge \omega^1 + i\omega_1^3 \wedge \omega^2 - i\omega_2^3 \wedge \omega^1 + \omega_2^3 \wedge \omega^2. \\ &= i(\omega_1^3 \wedge \omega^2 - i\omega_2^3 \wedge \omega^1) \\ &= 2Hi\omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (Fh)^*(\pi \wedge \omega) &= ((Fh)^*(\pi) \wedge (Fh)^*(\omega) \\ &= (-\overline{\phi} - 2(qdp - pdq)) \wedge -\phi \\ &= \overline{\phi} \wedge \phi + 2(qdp - pdq) \wedge \phi. \end{aligned}$$

Como $qdp - pdq$ e ϕ são do tipo $(1,0)$ então $(qdp - pdq) \wedge \phi = 0$. Logo,

$$(Fh)^*(\pi \wedge \omega) = \overline{\phi} \wedge \phi.$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \omega \wedge \overline{\omega} &= (\omega^1 + i\omega^2) \wedge (\omega^1 - i\omega^2) \\ &= -2i\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

Das equações

$$\begin{aligned} \omega \wedge \overline{\omega} &= -2i\omega^1 \wedge \omega^2 \\ \pi \wedge \omega &= 2Hi\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

temos que

$$\pi \wedge \omega = -H\omega \wedge \overline{\omega}.$$

Logo,

$$(Fh)^*(\pi \wedge \omega) = -H(Fh)^*(\omega \wedge \overline{\omega}).$$

Donde,

$$\overline{\phi} \wedge \phi = H\overline{\phi} \wedge \phi.$$

Portanto, como $\overline{\phi} \wedge \phi \neq 0$ temos que $H \equiv 1$. Fica provado então que a imersão $f = e_0(F)$ possui curvatura média 1.

Reciprocamente, seja M^2 uma superfície de Riemann simplesmente conexa e $f : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão com curvatura média 1. É possível definir uma 1-forma ϕ globalmente sobre M^2 de modo que $ds_f^2 = \phi \otimes \overline{\phi}$.

Tomemos a aplicação holomorfa $G : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ tal que $e_0 \circ G = f$. Desta forma, note que

$$\begin{aligned} f^*(\omega \otimes \overline{\omega}) &= (e_0 \circ G)^*(\omega \otimes \overline{\omega}) \\ &= G^* \circ e_0^*(\omega \otimes \overline{\omega}) \\ &= G^*(\omega \otimes \overline{\omega}) \\ &= ds_f^2 \\ &= \phi \otimes \overline{\phi}. \end{aligned}$$

Logo, podemos assumir que G satisfaz $G^*(\omega) = -\phi$.

Sabemos que

$$G^{-1}dG = \frac{1}{2}G^* \begin{pmatrix} \omega^3 + i\omega_1^2 & (\omega^1 - \omega_3^1) + i(\omega^2 - \omega_3^2) \\ (\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2) & -(\omega^3 + i\omega_1^2) \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, sabemos que $f^*(\omega^3) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} f^*(\omega^3) &= (e_0 \circ G)^*(\omega^3) \\ &= G^* \circ e_0^*(\omega^3) \\ &= G^*(\omega^3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Note que ω_1^2 é uma 1-forma real, e escreva $G^*(\omega_1^2) = \rho$. Daí, $G^*(\omega^3 + i\omega_1^2) = i\rho$. Tomemos $G^*(\overline{\omega} - \pi) = \eta$. Logo,

$$G^*(\pi) = -\overline{\phi} - \eta.$$

Mostraremos que como a curvatura média, H, da imersão f é 1 então a 1-forma η é do tipo $(1,0)$. De fato, temos que

$$\pi \wedge \omega = -\omega \wedge \overline{\omega}.$$

Donde,

$$G^*(\pi \wedge \omega) = -G^*(\omega \wedge \overline{\omega}).$$

Daí,

$$(-\overline{\phi} - \eta) \wedge -\phi = \overline{\phi} \wedge \phi.$$

Logo,

$$\eta \wedge \phi = 0.$$

Portanto, como ϕ é uma 1-forma do tipo $(1,0)$ então η é do tipo $(1,0)$.

Note que

$$
\begin{aligned}
G^*(\omega + \overline{\pi}) &= G^*(\omega) + G^*(\overline{\pi}) \\
&= -\phi + \overline{G^*(\pi)} \\
&= -\phi + \overline{-\overline{\phi} - \eta} \\
&= -2\phi - \overline{\eta}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
G^{-1}dG = \frac{1}{2}G^* \begin{pmatrix} \omega^3 + i\omega_1^2 & \omega + \overline{\pi} \\ \overline{\omega} - \pi & -(\omega^3 + i\omega_1^2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\rho & -2\phi - \overline{\eta} \\ \eta & -i\rho \end{pmatrix}.
$$

Considere a 1-forma sobre M dada por

$$
\mu = \begin{pmatrix} i\rho & -\overline{\eta} \\ \eta & -i\rho \end{pmatrix}.
$$

Vale salientar que μ toma valores em $SU(2)$.

Escrevamos $\omega = G^{-1}dG$. Assim, temos que

$$
2\omega = \mu + \alpha,
$$

onde $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -2\phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sabemos que ω satisfaz a equação de compatibilidade e, portanto,

$$
d\omega = -\omega \wedge \omega.
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
2d\omega &= d(\mu + \alpha)G^*(\omega) \\
&= -(\mu + \alpha) \wedge (\mu + \alpha) \\
&= -\mu \wedge \mu + \mu \wedge \alpha + \alpha \wedge \mu + \alpha \wedge \alpha
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
d\mu + \mu \wedge \mu = -(d\alpha + \mu \wedge \alpha + \alpha \wedge \mu + \alpha \wedge \alpha).
$$

Note que, como ϕ é do tipo $(1,0)$ então $d\phi = 0$. Daí, $d\alpha = 0$. Ainda, é claro que $\alpha \wedge \alpha = 0$. Portanto,

$$
d\mu + \mu \wedge \mu = \mu \wedge \alpha + \alpha \wedge \mu.
$$

Por outro lado, note que

$$\mu \wedge \alpha = \alpha \wedge \mu = \begin{pmatrix} 0 & 2i\phi \wedge \rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como ρ é um 1-forma real, em particular, ρ é do tipo $(1,0)$. Logo, $\phi \wedge \rho = 0$. Portanto,

$$d\mu + \mu \wedge \mu = 0.$$

O Teorema de Cartan, (1.6.1),garante que existe uma aplicação $h : M^2 \longrightarrow SU(2)$, única a menos de translação à esquerda por uma constante, tal que

$$\mu = h^{-1}dh.$$

Denotemos por p, q funções sobre M^2 tais que

$$h = \begin{pmatrix} q & -\overline{p} \\ p & \overline{q} \end{pmatrix}.$$

Definamos a aplicação $F = Gh^{-1} : M \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$. Note que,

$$F = Gh^{-1} \Longrightarrow Fh = G \Longrightarrow \ dFh + Fdh = dG.$$

Daí,

$$dF = (dG - Fdh)h^{-1}.$$

Logo,

$$F^{-1}dF = F^{-1}dGh^{-1} - (dh)h^{-1}.$$

Por outro lado, note que $F^{-1} = hG^{-1}$ e $\mu = h^{-1}dh$. Daí,

$$\begin{aligned} F^{-1}dF &= (hG^{-1})dGh^{-1} - (h\mu)h^{-1} \\ &= h(G^{-1}dG)h^{-1} - h\mu h^{-1} \\ &= h(G^{-1}dG - \mu)h^{-1} \\ &= \frac{1}{2}h \begin{pmatrix} 0 & -2\phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h^{-1}. \end{aligned}$$

Donde,

$$F^{-1}dF = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q & -\overline{p} \\ p & \overline{q} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2\phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{q} & \overline{p} \\ -p & q \end{pmatrix}$$

Daí, $F : M^2 \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ satisfaz

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} qp & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix} \phi.$$

Donde,

$$dF = F \begin{pmatrix} qp & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix} \phi.$$

Como ϕ é do tipo $(1,0)$ então

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Logo, temos que F é holomorfa. Ademais, como

$$det(F^{-1}dF) = 0,$$

então F é nula.

Por outro lado, como $h \in SU(2)$ temos $h^* = h^{-1}$. Logo,

$$\begin{aligned} FF^* &= (Gh^{-1})(Gh^{-1}) \\ &= G(h^{-1}(h^{-1})^*)G^* \\ &= GG^* \end{aligned}$$

Daí,

$$e_0(F) = e_0(Gh^{-1}) = e_0(F) = f.$$

Finalmente, mostramos que existe uma aplicação nula holomorfa $F : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ tal que $e_0 \circ F = f$.

Por último, mostraremos que F é única a menos de uma multiplicação à direita por uma constante $g \in SU(2)$. De fato, sejam $F_1, F_2 : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ imersões nulas e holomorfas tais que

$$e_0 \circ F_1 = e_0 \circ F_2 = f.$$

Note que

$$F_1F_1^* = F_2F_2^*.$$

Daí,

$$F_1 = F_2[F_2^*(F_1^*)^{-1}].$$

Definamos a aplicação $g : M^2 \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ dada por $g = F_2^*(F_1^*)^{-1}$. Por outro lado, note que $F_1^* = g^*F_2^*$. Daí,

$$F_1F_1^* = F_2F_2^* \Longrightarrow (F_2g)(g^*F_2^*) = F_2F_2^* \Longrightarrow F_2(gg^* - I)F_2^* = 0.$$

Como F_2 é inversível, então $gg^* = I$. Portanto, $g \in SU(2)$.

A aplicação g pode ser vista como

$$\begin{pmatrix} q & -\overline{p} \\ p & \overline{q} \end{pmatrix} \phi.$$

Desta forma, como g é holomorfa então $p, \overline{p}, q, \overline{q}$ são holomorfas. Logo, h é uma função constante. Portanto, $F_1 = F_2h$, onde $h \in SU(2)$. $\square$

Observação 3.0.1. *A partir do teorema acima temos o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "f"'] & SL(2,\mathbb{C}) \arrow[d, "e_0"] \\ & \mathbb{H}^3 \end{tikzcd} .$$

As seguintes observações mostram as semelhanças entre a representação de Bryant e a representação de Weierstrass. Na representação de Bryant se substituirmos $\mathbb{H}^3$ *por* $\mathbb{R}^3$, $H \equiv 1$ *por* $H \equiv 0$, *o produto interno dado por* ϕ *pelo produto interno canônico em* $\mathbb{C}^3$, $F : M \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ *com* $det(dF) = 0$ *por* $\alpha : M \longrightarrow \mathbb{C}^3$ *onde* $|\alpha'| = 0$ *e* e_0 *é por* $\Re\phi$ *temos a representação de Weierstrass. Veja o diagrama.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{C}^3 \arrow[d, "\Re\alpha"] \\ & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd} .$$

Capítulo 4

Superfícies de Curvatura Média 1 Completas de Curvatura Total Finita em $\mathbb{H}^3$

Na teoria das superfíes mínimas em $\mathbb{R}^3$, as superfícies completas e de curvatura total finita têm grande importância. Neste capítulo, faremos o estudo das imersões $f : M \longrightarrow \mathbb{H}^3$ de curvatura média constante 1 onde ds_f^2 é completa e (M, ds_f^2) possui curvatura total finita. Continuaremos a considerar todas as formas e aplicações sobre $\mathcal{F}_f^1$.

Da teoria de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ temos o seguinte resultado.

Teorema. *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima tal que a métrica induzida é completa e de curvatura total finita. Logo,*

(i) Existe uma superfície de Riemann compacta, $\overline{M}^2$, e um conjunto finito $E \subset \overline{M}^2$ tal que M^2 e $\overline{M}^2 - E$ são conformemente equivalentes, isto é, existe um biholomorfismo entre M^2 e $E \subset \overline{M}^2$.

(ii) A aplicação de Gauss $N : M \longrightarrow \mathbb{S}^2$ é holomorfa e estende-se a uma aplicação meromorfa $N : \overline{M}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$. Ademais, o grau de $\overline{N}$ é a curvatura total dividida por -4π.

A demonstração pode ser encontrada em [16].

Mostraremos, em breve, que o teorema acima não é totalmente verdadeiro para superfícies completas, de curvatura total finita e curvatura média um em $\mathbb{H}^3$.

Proposição 4.0.2. *A forma quadrática $\mathcal{Q} = (1-h_{11}+ih_{12})(\omega)^2$ é uma forma quadrática holomorfa bem definida sobre M.*

Demonstração. Sejam

$$\begin{aligned} \eta &= (\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2) \\ \omega &= \omega^1 + i\omega^2. \end{aligned}$$

Lembre que

$$\begin{array}{rcl}\omega_1^3 & = & h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2 \\ \omega_2^3 & = & h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2.\end{array}$$

Daí,

$$\begin{array}{rcl}\eta & = & (\omega^1 + \omega_3^1) - i(\omega^2 + \omega_3^2) \\ & = & (\omega^1 - h_{11}\omega^1 - h_{12}\omega^2) - i(\omega^2 - h_{21}\omega^1 - h_{22}\omega^2) \\ & = & \omega^1 - i\omega^2 - h_{11}\omega^1 + ih_{12}\omega^1 - h_{12}\omega^2 + ih_{22}\omega^2 \\ & = & \omega^1 + i\omega^2 - ih_{11}\omega^2 - h_{11}\omega^1 + ih_{12}\omega^1 - h_{12}\omega^2 \\ & = & \omega^1 + i\omega^2 - h_{11}(\omega^1 + i\omega^2) + h_{12}(i\omega^1 - \omega^2) \\ & = & (\omega^1 + i\omega^2)(1 - h_{11} + h_{12}i) \\ & = & \omega((1 - h_{11}) + h_{12}i).\end{array}$$

Portanto,

$$\eta = \omega((1 - h_{11}) + h_{12}i).$$

Logo,

$$\mathcal{Q} = ((1 - h_{11}) + ih_{12})(\omega)^2 = \eta \otimes \omega,$$

e, portanto, $\mathcal{Q}$ está bem definida sobre $\mathcal{F}_f^1$. Em particular, está bem definida sobre M. Por outro lado, como todas as formas são holomorfas então $\mathcal{Q}$ é holomorfa. $\square$

A forma diferencial $\mathcal{Q}$ é dita *diferencial de Hopf.*

Lembre que

$$d\sigma_f^2 = (\omega^1 + \omega_3^1)^2 + (\omega^2 + \omega_3^2)^2$$

é a forma quadrática induzida da aplicação $[e_0 + e_3] : M \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$, ou seja, $d\sigma_f^2$ é dada por $\langle d(e_0 + e_3), d(e_0 + e_3)\rangle$. Desta forma, podemos notar que

$$d\sigma_f^2 = \eta \otimes \overline{\eta}.$$

Observação 4.0.2. *Se $\mathcal{Q} \equiv 0$, então segue que $\eta \equiv 0$. Logo, $d\sigma_f^2 = \eta \otimes \eta \equiv 0$. Portanto, a curvatura seccional de $f(M)$ é zero e, portanto, f é totalmente umbílica. Como $H \equiv 1$ então $f(M^2)$ é uma horoesfera. Daqui por diante assumiremos que $\mathcal{Q}$ não é identicamente nulo.*

Tomemos o divisor

$$B = \sum_{p \in M} \nu_p(\mathcal{Q}).p,$$

onde $\nu_p(\mathcal{Q})$ é a ordem de anulamento de $\mathcal{Q}$ em $p \in M$.

Denotemos por $|B|$ o suporte de B, ou seja, o conjunto formado por $p \in M$ tal que $\nu_p(\mathcal{Q}) > 0$.

Lema 4.0.1. *$|B|$ é um conjunto discreto*

Demonstração. De fato, note que $|B| = \{p \in M; \mathcal{Q}(p) = 0\}$. Como $\mathcal{Q}$ é holomorfa e não é identicamente nula então $|B|$ é discreto. $\square$

Proposição 4.0.3. *A forma quadrática $d\sigma_f^2$ é uma pseudo métrica sobre M tal que $(M, d\sigma_f^2)$ possui curvatura Gaussiana constante* 1.

Demonstração. Seja $p \in M$ e tome $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma carta coordenada holomorfa com $p \in U$ e $z(p) = 0$. Passaremos a ver a forma $\mathcal{Q}|_U$ como uma forma quadrática sobre $z(U)$. Assim, como $z(p) = 0$, pela identificação $\mathcal{Q}(0) = 0$. Portanto, podemos escrever

$$\mathcal{Q}|_U = (z)^{\nu_p(\mathcal{Q})} h(z)(dz)^2,$$

onde $h(z)$ é holomorfo e $h(0) \neq 0$. Por outro lado, sobre U ds_f^2 pode ser escrito da forma $ds_f^2|_U = e^{2\lambda} dz \otimes d\overline{z}$, onde λ é uma função contínua sobre U. Note que,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \otimes \overline{\mathcal{Q}} &= (\eta \otimes \omega) \otimes (\overline{\eta} \otimes \overline{\omega}) \\ &= (\eta \otimes \overline{\eta}) \otimes (\omega \otimes \overline{\omega}) \\ &= d\sigma_f^2 \otimes ds_f^2 \end{aligned}$$

Logo, sobre U, temos

$$|z|^{2\nu_p(\mathcal{Q})} |h(z)|^2 (dz)^2 \otimes (d\overline{z})^2 = e^{2\lambda} d\sigma_f^2 dz \otimes d\overline{z}.$$

Daí,

$$d\sigma_f^2|_U = |z|^{2\nu_p(\mathcal{Q})} |h(z)|^2 e^{-2\lambda} dz \otimes d\overline{z}.$$

Mas a função, em $f(U)$, $g(z) = |z|^{2\nu_p(\mathcal{Q})} |h(z)|^2 e^{-2\lambda}$ possui zero, pelo menos em $z = 0$. Ainda, note que g é não negativa. Portanto, $d\sigma_f^2|_U$ é uma pseudo métrica. Portanto, $d\sigma_f^2$ é uma pseudo métrica sobre M.

Mostraremos agora que $(M, d\sigma_f^2)$ possui curvatura Gaussiana 1. De fato, sejam $\eta_1 = \omega^1 + \omega_3^1$ e $\eta_2 = \omega^2 + \omega_3^2$. Assim, η_1, η_2 podem ser vistos como as formas de conexão do referencial e_1, e_2 para $(M, d\sigma_f^2)$. Mostraremos que

$$d\eta_1^2 = -\eta^1 \wedge \eta^2.$$

Para isto basta mostrarmos que

$$d\omega_1^2 = -\eta^1 \wedge \eta^2.$$

Note que

$$\eta = \eta^1 - i\eta^2 = \omega((1 - h_{11}) + h_{12} i).$$

Logo,

$$\eta \wedge \overline{\eta} = -2i\eta^1 \wedge \eta^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\eta\wedge\overline{\eta} &= \frac{i}{2}\omega((1-h_{11})+h_{12}i)\wedge\overline{\omega}((1-h_{11})-ih_{12})\\
&= \frac{i}{2}((1-h_{11})^2+h_{12}^2)\omega\wedge\overline{\omega}\\
&= \frac{i}{2}(1-2h_{11}+h_{11}^2+h_{12}^2)\omega\wedge\overline{\omega}\\
&= (-K)\frac{i}{2}\omega\wedge\overline{\omega},
\end{aligned}$$

onde K é curvatura de M na métrica ds_f^2. Portanto,

$$\eta\wedge\overline{\eta} = (-K)\omega\wedge\overline{\omega}. \tag{4.1}$$

Note que

$$\begin{aligned}
d\omega &= d\omega^1 + id\omega^2\\
&= -\omega_2^1\wedge\omega^2 - \omega_3^1\wedge\omega^3 + i(-\omega_1^2\wedge\omega^1 - \omega_3^2\wedge\omega^3)\\
&= \omega^1\wedge\omega^2 - i\omega_1^2\wedge\omega^1\\
&= \omega_1^2\wedge(\omega^2 - i\omega^1)\\
&= i\omega_1^2\wedge\omega.
\end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned}
d\eta &= d\omega^1 + d\omega_3^1 - i(d\omega^2 + d\omega_3^2)\\
&= (-\omega_2^1\wedge\omega^2 - \omega_3^1\wedge\omega^3) + d\omega_3^1 - i(-\omega_1^2\wedge\omega^1 - \omega_3^2\wedge\omega^3 + d\omega_3^2)\\
&= \omega_1^2\wedge(i\omega^1+\omega^2) - \omega_2^1\wedge\omega_3^2 - \omega^2\wedge\omega^3 - i(-\omega_1^2\wedge\omega_3^1 - \omega^2\wedge\omega^3)\\
&= \omega_1^2\wedge(i(\omega^1+\omega_3^1)+\omega^2+\omega_3^2)\\
&= i\omega_1^2\wedge\eta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\eta &= i\omega_1^2\wedge\eta\\
d\omega_1^2 &= \frac{i}{2}\eta\wedge\overline{\eta}
\end{aligned}$$

Daí,

$$d\eta_1^2 = \frac{i}{2}\eta\wedge\overline{\eta} = -\eta^1\wedge\eta^2$$

e, portanto, $(M, d\sigma_f^2)$ possui curvatura seccional 1.

$\square$

Proposição 4.0.4. *Sejam $d\sigma^2$ uma pseudo métrica e $\Delta^* = \{w \in \mathbb{C}; 0 < |w| < 1\}$ um disco furado. Suponhamos que $(\Delta, d\sigma^2)$ possua curvatura 1. Suponhamos também que a área de Δ^* na métrica $d\sigma^2$ é finita. Então, existe uma coordenada holomorfa local z sobre $\Delta_\epsilon = \{w \in \mathbb{C}; |w| < \epsilon\}$, para algum $\epsilon > 0$, com $z(0) = 0$, e $\beta > -1$ um numero real tal que sobre Δ_ϵ, nós temos*

$$d\sigma^2|_{\Delta_\epsilon} = \frac{4(\beta+1)^2(z\overline{z})^\beta}{(1+(z\overline{z})^{\beta+1})^2} dz \otimes \ d\overline{z}.$$

Ademais,β é única, e z é única a menos de uma dilatação λz, onde $|z| = 1$.

Demonstração. Seja $L = \{y \in \mathbb{C}; \Re(y) < 0\}$. Note que a aplicação $exp : L \longrightarrow \Delta^*$ dada por $\exp(y) = e^y = w$ é a aplicação de recobrimento universal de Δ^*. Tomemos a pseudo métrica $\widetilde{d\sigma^2} = \exp^*(d\sigma^2)$ sobre L. Assim, $(L, \widetilde{d\sigma^2})$ possui curvatura gaussiana constante 1. Note que, $\exp(y + 2\pi i) = \exp y = w$. Assim, tomando a aplicação $g : L \longrightarrow \ L$ dada por $g(y) = y + 2\pi i$, podemos escrever $\exp(g(y)) = \exp(y) = w$. Daí,

$$(\exp \circ g)^*(d\sigma^2) = \widetilde{d\sigma^2}.$$

Portanto, $\widetilde{d\sigma^2}$ é invariante pela transformação $y \longrightarrow \ y + 2\pi i$.

Note que, como L é simplesmente conexo e $\widetilde{d\sigma^2}$ e $(L, \widetilde{d\sigma^2})$ possui curvatura seccional constante 1, então segue do lema (1.1.1) que existe uma aplicação meromorfa $\xi : L \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tal que $\xi^*(\mu) = \widetilde{d\sigma^2}$. Daí,

$$\widetilde{d\sigma^2} = \frac{4d\xi \otimes d\overline{\xi}}{(1+\xi\overline{\xi})^2}.$$

Considere a composição $\xi \circ g : L \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Note que,

$$\begin{aligned}
(\xi \circ g)^*(\mu) &= g^* \circ \xi^*(\mu) \\
&= g^*(\widetilde{d\sigma^2}) \\
&= g^*(\exp^*(d\sigma^2)) \\
&= (\exp \circ g)^*(d\sigma^2) \\
&= \widetilde{d\sigma^2}
\end{aligned}$$

Portanto, pelo lema (1.1.1), existem $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ com $|a|^2 + |b|^2 = 1$ tais que

$$\xi(y + 2\pi i) = \frac{a\xi(y) - \overline{b}}{b\xi(y) + \overline{a}}.$$

Podemos tomar a e b de modo que ξ seja dado por

$$\xi(y + 2\pi i) = e^{2\pi i\alpha}\xi(y),$$

onde $\alpha \in [0,1)$ é um número real. Em geral, temos $\xi(y+2k\pi i) = e^{2\pi k i\alpha}\xi(y)$. Desta forma, fica bem definida a aplicação $\psi : \Delta^* \longrightarrow \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ dada por $\psi(w) = \psi(e^y) = e^{-\alpha y}\xi(y)$, $y \in L$. De fato, sejam $w \in \Delta^*$ e $y, y' \in L$ tais que $e^y = e^{y'} = z$. Logo, $y' = y + 2k\pi i$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} \psi(e^{y'}) &= e^{-\alpha y'}\xi(y+2\pi i) \\ &= e^{-\alpha y'}e^{2\pi i\alpha}\xi(y) \\ &= e^{-\alpha(y'-2\pi i)}\xi(y) \\ &= e^{-\alpha y}\xi(y) \\ &= \psi(e^y) \end{aligned}$$

Portanto, ψ está bem definida. Notemos também que ψ é meromorfa sobre Δ^*.

Por outro lado, temos $w^\alpha\psi(w) = e^{\alpha y}e^{-\alpha y}\xi(y) = \xi$. Portanto, tomemos a coordenada holomorfa $z : \Delta^* \longrightarrow \mathbb{P}^1$. dada por $z(w) = w^\alpha\psi(w)$. Logo, temos a fórmula

$$d\sigma^2 = \frac{4d(w^\alpha\psi)\otimes\overline{d(w^\alpha\psi)}}{(1+|w^\alpha\psi|^2)^2}.$$

Note que

$$d(w^\alpha\psi) = \alpha w^{\alpha-1}\psi dw + w\alpha\psi' dw.$$

Donde,

$$d(w^\alpha\psi)\otimes\overline{d(w^\alpha\psi)} = |w|^{2(\alpha-1)}|a\psi + w\psi'|^2 dw\otimes d\overline{w}.$$

Portanto,

$$d\sigma^2 = \frac{4|w|^{2(\alpha-1)}|a\psi+w\psi'|^2 dw\otimes d\overline{w}}{(1+|w^\alpha\psi|^2)^2}.$$

Usaremos a hipótese de que Δ^* tem área finita para mostrar que ψ é meromorfa em $w=0$, isto é, ψ não tem singularidade essencial em $w=0$. Assumindo este resultado, temos que se ψ é meromorfa em $w=0$ então existe $n\in\mathbb{Z}$ tal que $w^{-n}\psi(w)$ é uma função holomorfa não nula numa vizinhança $U_\rho = \{w\in\mathbb{C}; |w|<\rho\}$ de 0. Desta forma, em U_ρ, podemos definir uma função holomorfa g tal que $\psi(w) = w^n e^{g(w)}$. Feito isso, temos os seguintes casos:

(i) $\alpha + n > 0$

Neste caso, tomemos $\beta = \alpha + n - 1$. Assim, $\beta > -1$. Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} z \ : \ U_\rho &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ w &\longmapsto we^{\frac{g(w)}{\beta+1}} \end{aligned}$$

Temos que z é uma coordenada holomorfa de U_ρ e $z(0)=0$.

Lembre que,
$$d\sigma^2 = \frac{4|w|^{2(\alpha-1)}|a\psi + w\psi^{'}|^2 dw \otimes d\overline{w}}{(1+|w^\alpha\psi|^2)^2}.$$
Ainda, sobre U_ρ temos $\psi(w) = w^n e^{g(w)}$, logo
$$\begin{aligned} 4|w|^{2(\alpha-1)}|\alpha\psi + w\psi^{'}|^2 &= 4|w|^{2(\alpha-1)}|\alpha w^n e^g + w^n(ne^g + we^g.g^{'})|^2 \\ &= 4|w|^{2(\alpha-1)}|w^n e^g|^2|\alpha + n + wg^{'}|^2 \\ &= 4|w|^{2\beta}|e^{2g}||\alpha + n + wg^{'}|^2 \end{aligned}$$
Notemos que,
$$dz = \frac{e^{\frac{g}{\beta+1}}}{\beta+1}(\beta + 1 + wg^{'})dw.$$
Logo,
$$dz \otimes d\overline{z} = \frac{|e^{\frac{2g}{\beta+1}}|}{(\beta+1)^2}|\alpha + n + wg^{'}|^2 dw \otimes d\overline{w}.$$
Daí,
$$dw \otimes d\overline{w} = \frac{(\beta+1)^2}{|e^{\frac{2g}{\beta+1}}||\alpha + n + wg^{'}|^2} dz \otimes d\overline{z}.$$
Por último, note que
$$|w^\alpha\psi|^2 = |w^\alpha w^n e^g|^2 = |w^{\beta+1}e^g|^2 = |we^{\frac{g}{\beta+1}}|^{2(\beta+1)} = (z\overline{z})^{\beta+1}.$$
Portanto, temos que
$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \frac{4|w|^{2(\alpha-1)}|\alpha\psi + w\psi^{'}|^2 dw \otimes d\overline{w}}{(1+|w^\alpha\psi|^2)^2} \\ &= \frac{4(\beta+1)^2|w|^{2\beta}|e^{2g}|}{|e^{\frac{2g}{\beta+1}}|(1+(z\overline{z})^{\beta+1})^2} dz \otimes d\overline{z} \\ &= \frac{4(\beta+1)^2|w|^{2\beta}|e^{\frac{2g\beta}{\beta+1}}|}{(1+(z\overline{z})^{\beta+1})^2} dz \otimes d\overline{z} \\ &= \frac{4(\beta+1)^2(z\overline{z})^\beta}{(1+(z\overline{z})^{\beta+1})^2} dz \otimes d\overline{z} \end{aligned}$$
Finalmente, obtemos
$$d\sigma^2 = \frac{4(\beta+1)^2(z\overline{z})^\beta}{(1+(z\overline{z})^{\beta+1})^2} dz \otimes d\overline{z}.$$

(ii) $\alpha + n < 0$

Basta considerar $\beta = -(\alpha + n - 1)$ e $z(w) = we^{\frac{g}{\beta+1}}$.

(iii) $\alpha + n = 0$

Como n é inteiro e $0 \leq \alpha < 1$ então $\alpha = n = 0$. Logo,

$$d\sigma^2 = \frac{4d\psi \otimes d\overline{\psi}}{(1 + \psi\overline{\psi})^2}.$$

Seja $\phi(w) = \frac{a\psi - \bar{b}}{b\psi + \bar{a}}$ uma rotação de ψ tal que $\phi(0) = 0$. Trocaremos ψ por ϕ. Segue-se daí que existe $\beta \geq$ tal que $\phi = z^{\beta+1}$ numa vizinhança sobre $0 \in U_\rho$. Daí,

$$d\sigma^2 = \frac{4d\phi \otimes d\overline{\phi}}{(1 + \psi\overline{\phi})^2} = \frac{4(\beta+1)^2(z\overline{z})^\beta}{(1 + (z\overline{z})^{\beta+1})^2} dz \otimes d\overline{z}.$$

Resta mostrar que a aplicação $w^\alpha\psi(w)$ é meromorfa em $w = 0$.
Na mesma notação de [3] temos

$$dd^c log(1 + |w^\alpha\psi(w)|^2) = \frac{4d(w^\alpha\psi) \otimes \overline{d(w^\alpha\psi)}}{(1 + |w^\alpha\psi|^2)^2}.$$

Logo, como a área de $(\Delta^*, d\sigma^2)$ é finita temos

$$\int_{\Delta^*} dd^c log(1 + |w^\alpha\psi(w)|^2) < \infty.$$

Tomemos $\epsilon > 0$ e definamos a aplicação $\widetilde{\psi} = \psi(\frac{w}{1+\epsilon})$ sobre o disco $\{w|0 < |w| < 1 + \epsilon\}$ tal que $\widetilde{\psi}$ não possua zeros ou pólos sobre $|w| = 1$. Para não sobrecarregar a notação escreveremos ψ ao invés de $\widetilde{\psi}$.

Seja $h(w) = 1 + |w^\alpha\psi(w)|^2$. Note que $h(w)$ não possui zeros e $h(w) \geq 1$. Daí, pelo corolário (1.5) de **??**, temos que

$$N(D, r) \leq \int_1^r (\int_{A_\rho} dd^c logh)\frac{d\rho}{\rho} + Clogr + C'.$$

Mas,

$$\int_{A_\rho} dd^c logh < \infty.$$

Daí,

$$N(D, r) \leq \int_1^r (\int_{A_\rho} dd^c logh)\frac{d\rho}{\rho} + Clogr + C' \leq \int_1^r C''\frac{d\rho}{\rho} + Clogr + C'.$$

Logo,

$$N(D,r) \leq C_1 logr + C_2$$

e, portanto, ψ tem uma quantidade finita de pólos em Δ^*. Logo, dilatando e restringindo a Δ^*, podemos assumir que ψ não possui pólos sobre Δ^* e é contínua sobre o bordo $|w| = 1$.

Sejam $\Delta^- = \{z \in \Delta^*; z \in \mathbb{R}^+\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, consideremos sobre Δ^* o único ramo de z^β tal que $1^\beta = 1$. Assim, está bem definida a aplicação

$$\zeta(y) = y^{2\alpha}\psi(y^2) : \Delta^- \longrightarrow \mathbb{C}.$$

A aplicação ζ possui uma extensão natural $\zeta' : \Delta^* \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\zeta'(y) = y^{2\alpha}\psi(y^2)$. Assim, diremos que ζ é holomorfa. Abusando da notação, não faremos distinção entre ζ e ζ'. Seja $\mu = \frac{4d\xi\wedge d\bar{\xi}}{(1+\xi\bar{\xi})^2}$ a forma de área da esfera $\mathbb{P}^1$.

Note que o pull-back de μ via $w^\alpha\psi(w) : \Delta^* \longrightarrow \mathbb{C}$ é $4\pi log(1 + |w^\alpha\psi(w)|^2)$. Como a aplicação $y \rightarrow y^2$ é um duplo recobrimento de Δ^* então

$$\int_{\Delta^*} 4\pi log(1 + |\zeta|^2) < \infty.$$

Logo, a imagem esférica de $\zeta(\Delta^*)$ é finita. Portanto, podemos tomar um conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$ com medida, usual, positiva tal que $\zeta(y) = k$ tem um número finito de soluções para $k \in K$. Reduzindo Δ^*, podemos supor que $\zeta(\Delta^*) \cap K = \emptyset$. Em particular, $\zeta(\Delta^-) \cap K = \emptyset$. Definamos os conjuntos

$$B_m = \left\{z \in \Delta^*; 2^{-m-2} < |z| < 3.2^{-m-2}, -3\pi/4 < argz < 3\pi/4\right\},$$

onde $m \in \mathbb{N}$.

Definamos as funções

$$\zeta_m(y) = \zeta(2^{-m}y),$$

onde $y \in B_0$. A sequência de funções holomorfas $(\zeta_m(y))$ claramente não assume valores em K e, portanto, podemos usar o teorema de Montel, [10]. Daí, por [10], concluimos que $(\zeta_m(y))$ é uma família normal. Portanto, existe uma subsequência $\zeta_{m_k}(y)$ que converge uniformemente sobre conjuntos compactos a uma função holomorfa ou converge uniformemente ao $\infty \in \mathbb{P}^1$.

Suponhamos que $\zeta_{m_k}(y)$ converge para uma função holomorfa. Em particular, $\zeta_{m_k}(y)$ converge no conjunto

$$K = \left\{z \in B_0; |z| = \frac{1}{2}, \Re(z) \geq 0\right\}.$$

Daí, $\zeta_{m_k}(y)$ é limitada e, portanto, existe uma constante M tal que

$$|\zeta_{m_k}(y)| \leq M,$$

onde $y \in K$. Note que,

$$\zeta_{m_k}(y) = \zeta_{m_k}(\frac{1}{2}e^{i\theta}),$$

onde $\theta \in [0, \pi/2]$. Por outro lado,

$$\zeta_{m_k}(y) = \zeta(2^{-m_k}y) = (2^{-m_k}y)^{2\alpha}\psi((2^{-m_k}y)^2).$$

Daí,

$$|\zeta_{m_k}(y)| = |\zeta(2^{-m_k-1}e^{i\theta})| = |(2^{-m_k-1}e^{i\theta})^{2\alpha}\psi((2^{-m_k-1}e^{i\theta})^2)| \leq M,$$

onde $y \in K$ e $\theta \in [0, \pi/2]$. Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $a > \alpha$, logo

$$|(2^{-m_k-1}e^{i\theta})^{2a}\psi((2^{-m_k-1}e^{i\theta})^2)| \leq ||(2^{-m_k-1}e^{i\theta})^{2\alpha}\psi((2^{-m_k-1}e^{i\theta})^2)| \leq M,$$

onde $y \in K$ e $\theta \in [0, \pi/2]$ Portanto, $w^a\psi(w)$ é limitada nos arcos

$$C_k = \left\{z \in \mathbb{C}; z = 2^{-m_k-1}e^{i\theta}; \theta \in [0, \pi/2]\right\},$$

onde $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos o anel

$$A_k = \left\{z \in \mathbb{C}; 2^{-m_k-1} \leq |z| \leq 2^{-m_{k+1}-1}, arg(z) \in [0, \pi/2]\right\}.$$

Pelo teorema do Módulo Máximo, [10], $w^a\psi$ deve ser limitado uniformente em cada anel e, portanto,

$$|w^a\psi(y)| \leq M,$$

onde $y \in A_k$. Portanto, podemos encontrar uma vizinhança de $w = 0$ na qual $w^a\psi$ é limitada. Daí, pelo teorema de Casorati Weierstrass, [10], $w = 0$ não é uma singularidade essencial e, portanto, $w^a\psi$ possui uma singularidade removível $w = 0$.

Por outro lado, se a sequência $\zeta_{m_k}(y)$ converge para ∞ então definamos a sequência

$$\eta_k(y) = \frac{1}{\zeta_{m_k}(y)},$$

onde $y \in K$. Logo, $\eta_k(y)$ converge para 0. Análogo ao primeiro caso, temos que $\frac{1}{w^a\psi(w)}$ não possui uma singularidade essencial em $w = 0$.

Portanto, ψ nos dois casos não possui uma singularidade essencial e, portanto, ψ é meromorfa em Δ.

□

Semelhantemente ao caso $\mathbb{R}^3$ temos o seguinte resultado.

Teorema. *Seja $f : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão de curvatura média 1 satisfazendo*

(i) A métrica induzida ds_f^2 é completa;

(ii) A curvatura total de M é finita.

Então, M é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta $\overline{M}$ menos um número finito de pontos $E \subset \overline{M}$. A demonstração pode ser encontrada em [16] pág. 81.

A partir de agora identificaremos M com $\overline{M} - E$. Os pontos de E são ditos *fins da imersão.* Segue o lema abaixo.

Lema 4.0.2. *Se $|B|$ não possui pontos de acumulação em E, então $|B|$ é finito.*

Demonstração. De fato, suponhamos que $|B|$ é infinito. Logo, podemos tomar uma sequência $p_n \in |B|$ com $p_n \neq p_{n+1}$. Como $|B| \subset M$ então p_n é uma sequência limitada e, portanto, p_n possui um ponto de acumulação p_0. Logo, $p_0 \in M$ ou $p_0 \in E$. Se $p_0 \in M$ então $|B|$ possui um ponto de acumulação em M, mas isto é absurdo, pois, $|B|$ é discreto em M. Portanto, $|B|$ possui um ponto de acumulação em E. □

Lema 4.0.3 (Ossermann)**.** *Seja $h(z) \neq 0$ uma função analítica em $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$ e considere $ds^2 = |h(z)|^2|dz|^2$. Se ds^2 é completa em $z = 0$ então $h(z)$ tem no máximo um pólo na origem.*

Demonstração. Ver [16] pág. 83. □

Na teoria das superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$, temos que a diferencial de Hopf estende-se aos fins da superfície ver[16]. Segue o resultado análogo em $\mathbb{H}^3$.

Proposição 4.0.5. *O suporte do divisor B é finito em M e $\mathcal{Q}$ estende-se a $\overline{M}$ meromorficamente.*

Demonstração. Mostraremos que $|B|$ é finito. Pelo resultado anterior, basta mostrar que $|B|$ não possui pontos de acumulação em E. Como a curvatura total, na métrica ds_f^2, é finita, então a área de M com relação a pseudo métrica $d\sigma_f^2$ é finita. Pela proposição anterior, segue que, se $e \in M$ então existe uma coordenada local holomorfa $z : U \longrightarrow \mathbb{C}$ sobre $U \subset \overline{M}$ onde $e \in U$, $z(e) = 0$ e um número real $\beta = \beta(e)$ tal que

$$d\sigma_f^2 = \frac{4(\beta+1)^2(z\overline{z})^\beta}{(1+(z\overline{z})^{\beta+1})^2} dz \otimes d\overline{z}.$$

Denotemos $U - \{e\} = U^*$. Particularmente, z não se anula em U^*. Sabemos que

$$\mathcal{Q} \otimes \overline{\mathcal{Q}} = ds_f^2 \otimes d\sigma_f^2.$$

Logo, como $\mathcal{Q}$ se anula em $|B|$ então $d\sigma_f^2$ se anula em $|B|$, Ainda, como $\mathcal{Q}$ não se anula em U^* temos

$$B \cap (U^*) = \emptyset.$$

Portanto, $|B|$ não possui pontos de acumulação em E. Portanto, $|B|$ é finito.

Mostraremos que $\mathcal{Q}$ se estende meromorficamente sobre $\overline{M}$. De fato, como $\mathcal{Q}$ não se anula em U^* e é holomorfa, então existe uma função $h(z)$ holomorfa sobre $z(U^*)$ tal que

$$\mathcal{Q}|_{U^*} = h(z)(dz)^2.$$

Daí, de

$$\mathcal{Q} \otimes \overline{\mathcal{Q}} = ds_f^2 \otimes d\sigma_f^2$$

temos que

$$ds_f^2|_{U^*} = \frac{(1 + (z\overline{z})^{\beta+1})^2 |h(z)|^2}{4(\beta+1)^2 (z\overline{z})^{\beta}} dz \otimes d\overline{z}.$$

Se $b \geq \beta$ é um inteiro, podemos tomar uma vizinhaça suficientemente próxima de e tal que

$$ds_f^2 \leq c \frac{|h(z)|^2}{|z^b|^2} dz \otimes d\overline{z},$$

para alguma constante $c > 0$ e numa vizinhança deletada V de e em U.

Pela desigualdade, acima, como ds_f^2 é completo em e temos que $|h(z)z^{-b}|^2 dz \otimes d\overline{z}$ é completo. Segue do lema de Osserman, (4.0.3), que $h(z)z^{-b}$ tem um pólo no infinito e, portanto, $h(z)z^{-b}$ tem um pólo em $z = 0$. Assim, $h(z)z^{-b}$ é meromorfa em $z(U)$. Daí, $h(z)$ é meromorfa em $z(U)$. Donde, $\mathcal{Q}$ é meromorfa em e.

Portanto, $\mathcal{Q}$ estende-se meromorficamente em $\overline{M}$. □

Assim podemos definir $\nu_p(\mathcal{Q})$ para qualquer $p \in \overline{M}$. Deste modo, podemos ver a característica de Euler-Poincaré como

$$\chi(\overline{M}) = -\frac{1}{2} deg(\overline{B}) = \frac{1}{2} \sum_{p \in M} \nu_p(\mathcal{Q}),$$

onde $\overline{B}$ é o divisor de $\mathcal{Q}$ como uma função meromorfa em $\overline{M}$.

Corolário 4.0.1. *Para todo $e \in E$, $\beta(e) \geq \nu_e(\mathcal{Q}) + 1$.*

Demonstração. Notemos primeiramente que podemos tomar a vizinhança V^*, mencionada acima, suficientemente pequena de modo que

$$(z\overline{z})^{\beta+1} < \beta.$$

Desta forma,

$$ds_f^2|_{V^*} < \frac{|h(z)|^2}{(z\overline{z})^{\beta}} dz \otimes d\overline{z}.$$

Portanto, como ds_f^2 é completa em e, então $\frac{|h(z)|^2}{(z\overline{z})^{\beta}} dz \otimes d\overline{z}$ é completa em e. Logo, $\frac{h(z)}{z^{\beta}}$ possui um pólo em $z = 0$.

Pelo resultado anterior, $h(z)$ possui um pólo de ordem $-\nu_e(\mathcal{Q})$. Portanto, podemos escrever

$$h(z) = \frac{p(z)}{z^{-\nu_e(\mathcal{Q})}},$$

onde $p(z) \neq 0$. Portanto,

$$\frac{h(z)}{z^\beta} = \frac{p(z)}{z^{\beta - \nu_e(\mathcal{Q})}}.$$

Daí, como $p(z) \neq 0$ então a ordem do pólo da função $\frac{h(z)}{z^\beta}$, em $z = 0$, é

$$\beta - \nu_e(\mathcal{Q}).$$

Portanto,

$$\beta(e) - \nu_e(\mathcal{Q}) \geq 1.$$

□

4.1 Exemplos

Como é de se esperar, as imersões de curvatura média um no espaço hiperbólico e as imersões mínimas em $\mathbb{R}^3$ nem sempre partilham as mesmas características. Vejamos agora alguns exemplos que ilustram algumas diferenças entre as duas teorias.

Suponhamos M^2 uma superfície de Riemann e $F : M \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ uma imersão holomorfa nula. Assim, podemos escrever

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}, F_1F_4 - F_2F_3 \equiv 1,$$

onde F_i é holomorfa sobre M.

Na mesma notação da prova do teorema da Representação de Bryant, escreveremos

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix} \phi, p\overline{p} + q\overline{q} = 1,$$

onde ϕ é do tipo $(1, 0)$ sobre $U \subset M$ e p, q são funções holomorfas sobre U com $\frac{p}{q}$ meromorfa. Consideraremos também

$$h = \begin{pmatrix} q & -\overline{p} \\ p & \overline{q} \end{pmatrix}.$$

A aplicação $Fh : U \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ satisfaz

$$f = Fh(Fh)^*.$$

Donde,

$$\begin{aligned} e_0 + e_3 &= Fh(\sigma_0 + \sigma_3)h^*F^* \\ &= Fh\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h^*F^* \\ &= 2F\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{q} & \overline{p} \end{pmatrix} F^* \\ &= 2\begin{pmatrix} F_1q + F_2p \\ F_3q + F_4p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{F_1q + F_2p} & \overline{F_3q + F_4p} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Também podemos escrever

$$f = e_0 = F\sigma_0 F^* = FF^*.$$

Pela nossa identificação de $\mathbb{S}^2_\infty$ com $\mathbb{CP}^1$ temos

$$[e_0 + e_3] = [F_1 q + F_2 p, F_3 q + F_4 p].$$

Por outro lado, note que

$$dF = F \begin{pmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix} \phi.$$

Donde,

$$\begin{array}{rcl} p(F_1 q + F_2 p) & = & dF_1 \\ p(F_3 q + F_4 p) & = & dF_3 \end{array}$$

Portanto,

$$[e_0 + e_3] = [F_1 q + F_2 p, F_3 q + F_4 p] = [dF_1, dF_3].$$

Por outro lado, note que

$$\mathcal{Q} \otimes \overline{\mathcal{Q}} = d\sigma_f^2 \otimes ds_f^2.$$

Daí,

$$\mathcal{Q} \otimes \overline{\mathcal{Q}} = 4(pdq - qdp) \otimes (\overline{p}d\overline{q} - \overline{q}d\overline{p}) \otimes \phi \otimes \overline{\phi}.$$

Portanto,

$$\mathcal{Q} = 2(pdq - qdp) \otimes \phi$$

é a diferencial de Hopf.

Note

$$d\sigma_f^2 = 4\frac{d(p/q) \otimes d(\overline{p/q})}{(1 + |p/q|^2)^2}.$$

Daí,

$$\int_U K = -4 \int_U \frac{d(p/q) \otimes d(\overline{p/q})}{(1 + |p/q|^2)^2}.$$

Portanto, a curvatura total de ds_f^2 sobre U é a área, contada com as multiplicidades, da imagem esférica da aplicação $p/q : U \longrightarrow \mathbb{P}^1$.

Exemplo 1. Considere a aplicação $F : \mathbb{C} \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ dada por

$$F(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ az & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, dados $p, v \in \mathbb{C}$ temos

$$dF_p(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ av & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, imediatamente, temos que $det(dF_p(v)) = 0$ e, portanto, F é nula. Note também que

$$dF_p(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

e, portanto, F é uma imersão. Portanto pelo teorema de Bryant, FF^* é uma imersão de curvatura média um em $\mathbb{H}^3$. Note que,

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos, então, $pq\phi = q^2\phi = 0$ e $p^2\phi = a$.
Donde, $q \equiv 0$ e $\phi = \frac{a}{p^2}$. Logo,

(i) $ds_f^2 = |a|^2 dz \otimes d\overline{z}$;

(ii) $d\sigma_f^2 = 2(pdq - qdp) \otimes \phi \equiv 0$;

(iii) $\mathcal{Q} \equiv 0$;

(iv) $[e_0 + e_3] = [dF_1, dF_3] = [0, a] \approx \{\infty\} \in \mathbb{P}^1$.

A imersão encontrada é totalmente umbílica e possui curvatura média constante um e, portanto, é uma horoesfera. A métrica ds_f^2 coincide com a métrica no plano euclidiano, ver [12]. Logo, o plano e a horoesfera são superfícies primas e, portanto, são localmente isométricas.

Exemplo 2. Seja $M = \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{C}|\{0\}$. Tomemos a aplicação $F : \mathbb{C} \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ dada por

$$F(z) = \begin{pmatrix} cosh(\lambda z) - \lambda z senh(\lambda z) & \lambda senh(\lambda z) \\ \lambda^{-1} senh(\lambda z) - z cosh(\lambda z) & cosh(\lambda z) \end{pmatrix}$$

Logo,

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} cosh(\lambda z) & -\lambda senh(\lambda z) \\ -\lambda^{-1} senh(\lambda z) + z cosh(\lambda z) & cosh(\lambda z) - \lambda z senh(\lambda z) \end{pmatrix}$$

Notemos que F é holomorfa pois suas entradas são holomorfas, daí

$$dF = \begin{pmatrix} -\lambda^2 z cosh(\lambda z) & \lambda^2 cosh(\lambda z) \\ -z\lambda senh(\lambda z) & \lambda senh(\lambda z) \end{pmatrix} dz.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F^{-1}dF &= \begin{pmatrix} cosh(\lambda z) & -\lambda senh(\lambda z) \\ -\lambda^{-1} senh(\lambda z) + z cosh(\lambda z) & cosh(\lambda z) - \lambda z senh(\lambda z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda^2 z cosh(\lambda z) & \lambda^2 cosh(\lambda z) \\ -z\lambda senh(\lambda z) & \lambda senh(\lambda z) \end{pmatrix} dz \\ &= -\lambda^2 \begin{pmatrix} z & -1 \\ z^2 & -z \end{pmatrix} dz \end{aligned}$$

Daí, $det(dF) = 0$ e, portanto, F é nula. Além disso, F é uma imersão. De fato, dados $v, z \in \mathbb{C}$ temos que $dF_z(v) = \begin{pmatrix} -v\lambda^2 z cosh(\lambda z) & v\lambda^2 cosh(\lambda z) \\ -zv\lambda senh(\lambda z) & v\lambda senh(\lambda z) \end{pmatrix} dz = 0 \Longleftrightarrow v = 0$ ou $cosh(\lambda z) = senh(\lambda z) = 0$. Portanto, claramente temos que $v = 0$. Daí, F é uma imersão.

Tomemos

$$\phi = -\lambda^2(1 + z\overline{z})dz \tag{4.2}$$

uma 1-forma definida globalmente sobre $\mathbb{C}$. Desta forma,

$$ds_f^2 = \phi \otimes \overline{\phi} = |\lambda|^4(1 + z\overline{z})^2 dz \otimes d\overline{z}$$

é a métrica induzida em $\mathbb{C}$.

Podemos definir as aplicações p, q sobre $\mathbb{C}$ de modo que

$$p^2\phi = -\lambda^2 z^2 dz \tag{4.3}$$

$$-q^2\phi = \lambda^2 dz \tag{4.4}$$

$$pq\phi = -\lambda^2 z dz \tag{4.5}$$

De (4.3) e (4.4) temos

$$p^2 = \frac{z^2}{1 + z\overline{z}}.$$

De (4.3) e (4.5) temos

$$q^2 = \frac{1}{1 + z\overline{z}}.$$

Logo, podemos definir,

$$p(z) = \frac{z}{\sqrt{1 + z\overline{z}}}, \tag{4.6}$$

$$q(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z\overline{z}}}. \tag{4.7}$$

Donde,

$$\begin{aligned} pdq - qdp &= p^2 d(q/p) \\ &= \frac{z^2}{1 + z\overline{z}} d(1/z) \\ &= \frac{z^2}{1 + z\overline{z}} \frac{-1}{z^2} dz \\ &= -\frac{dz}{1 + z\overline{z}}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$d\sigma_f^2 = 4(pdq - qdp) \otimes (\overline{p}d\overline{q} - \overline{q}d\overline{p}) = 4\frac{dz \otimes d\overline{z}}{(1 + z\overline{z})^2}.$$

Note que,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &= 2(pdq - qdp) \otimes \phi \\ &= \frac{-2}{1+z\overline{z}} \otimes -\lambda^2(1+z\overline{z})dz \\ &= 2\lambda^2(dz)^2\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{Q} = 2\lambda^2(dz)^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}dF_1 &= -\lambda^2 z cosh(\lambda z) \\ dF_3 &= -z\lambda senh(\lambda z).\end{aligned}$$

Daí,

$$[dF_1, dF_3] = [-\lambda^2 z cosh(\lambda z), -z\lambda senh(\lambda z)] = [\lambda cosh(\lambda z), senh(\lambda z)].$$

Portanto,

$$[e_0 + e_3] = [\lambda cosh(\lambda z), senh(\lambda z)].$$

Esta imersão é dita *Enneper primo*.

Seja $\overline{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a imersão mínima tal que $f(\mathbb{C})$ é a superfície de Enneper. Por,[12], a métrica induzida sobre $\mathbb{C}$ pela imersão é $ds^2_{\overline{f}} = |\lambda|^4(1+z\overline{z})^2 dz \otimes d\overline{z}$. Portanto, $ds^2_f = ds^2_{\overline{f}}$. Daí, as imersões f e $\overline{f}$ são primas. Em particular, as imersões f e $\overline{f}$ são localmente isométricas.

Ainda, por [12], como $ds^2_{\overline{f}}$ é completa sobre $\mathbb{C}$ então ds^2_f também é completa sobre $\mathbb{C}$.

Pode-se notar que

$$d\sigma^2_f = 4\frac{dz \otimes d\overline{z}}{(1+z\overline{z})^2}$$

é a métrica padrão sobre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ restrito a $\mathbb{C}$.

Portanto, a curvatura total na métrica ds^2_f é dada por -área($\mathbb{P}^1$) $= -4\pi$.

Notemos que a aplicação hiperbólica de Gauss $[e_0 + e_3] : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$ será dada por

$$[e_0 + e_3](z) = [\lambda cosh(\lambda z), senh(\lambda z)].$$

Assim é claro que essa aplicação omite $[\lambda, 1]$ e $[\lambda, -1]$. Além disso, como $[e_0 + e_3]$ é holomorfa então $[e_0 + e_3]$ não pode omitir um outro ponto. Portanto, $[e_0 + e_3]$ cobre o restante de $\mathbb{S}^2_\infty$ infinitas vezes.

Exemplo 3. Sejam $M = \mathbb{C}^*$ e μ um número real satisfazendo $\mu > -\frac{1}{2}, \mu > 0$. Considere a aplicação holomorfa multivaluada

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \begin{pmatrix} (\mu+1)z^{\mu} & \mu z^{-(\mu+1)} \\ \mu z^{\mu+1} & (\mu+1)z^{-\mu} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$dF = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \begin{pmatrix} (\mu+1)\mu z^{\mu-1} & -\mu(\mu+1)z^{-(\mu+2)} \\ \mu(\mu+1)z^{\mu} & -(\mu+1)\mu z^{-\mu-1} \end{pmatrix} = \frac{\mu(\mu+1)}{\sqrt{2\mu+1}} \begin{pmatrix} z^{\mu-1} & -z^{-(\mu+2)} \\ z^{\mu} & -z^{-\mu-1} \end{pmatrix} dz.$$

Note que

$$F^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \begin{pmatrix} (\mu+1)z^{-\mu} & -\mu z^{-(\mu+1)} \\ -\mu z^{\mu+1} & (\mu+1)z^{\mu} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$F^{-1}dF = \frac{\mu(\mu+1)}{\sqrt{2\mu+1}} \begin{pmatrix} z^{-1} & -z^{-(2\mu+2)} \\ z^{2\mu} & -z^{-1} \end{pmatrix} dz.$$

Tomemos a aplicação $\widetilde{F} : \widetilde{\mathbb{C}^*} \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$, onde $\widetilde{\mathbb{C}^*}$ é o recobrimento universal de $\mathbb{C}^*$ e $\widetilde{F}$ é o levantamento univaluado de F. Assim, $\widetilde{F}$ é uma imersão holomorfa nula. Escrevendo $f = FF^*$, temos

$$f(z) = \begin{pmatrix} (\mu+1) & \frac{\mu}{z} \\ \mu z & (\mu+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (z\overline{z})^{\mu} & 0 \\ 0 & (z\overline{z})^{-\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu+1) & \mu\overline{z} \\ \mu/\overline{z} & (\mu+1) \end{pmatrix}.$$

Assim, $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é uma imersão bem definida de curvatura média constante um.
Tomemos

$$\phi = \frac{\mu(\mu+1)(1+(z\overline{z})^{2\mu+1})}{(2\mu+1)z^{2\mu+1}}.$$

Podemos definir sobre $\mathbb{C}^*$ funções p e q tais que

$$pq\phi = \frac{\mu(\mu+1)}{2\mu+1} z^{-1}dz; \tag{4.8}$$

$$p^2\phi = \frac{\mu(\mu+1)}{2\mu+1} z^{2\mu}dz. \tag{4.9}$$

De (4.8), temos

$$pq = \frac{z^{2\mu}}{1+(z\overline{z})^{2\mu+1}}.$$

De (4.9), temos

$$p^2 = \frac{z^{4\mu+1}}{1+(z\overline{z})^{2\mu+1}}.$$

Portanto, $p(z) = \frac{z^{2\mu+1/2}}{\sqrt{1+(z\overline{z})^{2\mu+1}}}$ e $q(z) = \frac{z^{-1/2}}{\sqrt{1+(z\overline{z})^{2\mu+1}}}$.

Logo,

$$\frac{p}{q} = z^{2\mu+1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d\sigma_f^2 &= 4\frac{d(p/q) \otimes d(\overline{p/q})}{(1+|p/q|^2)^2} \\ &= 4\frac{d(z^{2\mu+1}) \otimes d(\overline{z^{2\mu+1}})}{(1+|z^{2\mu+1}|^2)^2} \\ &= 4\frac{(2\mu+1)^2 (z\overline{z})^{2\mu}}{(1+(z\overline{z})^{2\mu+1})^2} dz \otimes d\overline{z}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\mathcal{Q} \otimes \overline{\mathcal{Q}} = ds_f^2 \otimes d\sigma_f^2,$$

então

$$\mathcal{Q} \otimes \overline{\mathcal{Q}} = 4\frac{\mu^2(\mu+1)^2}{z\overline{z}} (dz)^2 \otimes (d\overline{z})^2.$$

Portanto, a diferencial de Hopf será dada por

$$\mathcal{Q} = -2\frac{\mu(\mu+1)}{z^2}(dz)^2.$$

A aplicação hiperbólica de Gauss será dada por

$$\begin{aligned} [e_0 + e_3](z) &= [dF_1, dF_3] \\ &= [\mu(\mu+1)z^{\mu-1}, \mu(\mu+1)z^{\mu}] \\ &= [1, z]. \end{aligned}$$

Esta imersão é dita *Catenóide Primo*.

Por, [12], como a métrica ds_f^2 coincide com a métrica induzida da imersão mínima, dada pela representação de Weierstrass, que descreve o catenóide, então ds_f^2 é completa.

Note que a curvatura total da imersão é $-4\pi(2\mu+1)$.

A aplicação hiperbólica de Gauss pode ser vista em $\mathbb{P}^1$ como uma aplicação $[e_0+e_3] : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tal que $[e_0 + e_3] = z$.

Podemos ver que $f(\mathbb{C})^*$ é uma superfície de revolução pois f é da forma $f = AXA^*$, ver [8].

4.2 Condições de Extensão Meromórfica

Nesta sessão encontraremos condições para as quais a aplicação hiperbólica de Gauss e a diferencial de Hopf possam estender-se meromorficamente aos fins da superfície.

Seguem alguns resultados.

Lema 4.2.1. *Uma função inteira possui uma singularidade removível no infinito se, e só se, é constante.*

Demonstração. De fato, seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira com uma singularidade removível no infinito. Daí, $f(1/z)$ possui uma singularidade removível em $z = 0$ e, portanto,

$$f(1/z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n,$$

onde $(a_n) \in \mathbb{C}$. Portanto,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^{-n}.$$

Como f é inteira temos que $a_k = 0$, para $k \geq 1$.

Reciprocamente, se $f(z)$ é constante então $f(\frac{1}{z})$ é constante e, portanto, possui uma singularidade removível em $z = 0$. □

Lema 4.2.2. *Uma função inteira tem um pólo no infinito de ordem m se, e só se, é um polinômio de grau m*

Demonstração. De fato, suponha que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ possui um pólo de ordem n no infinito. Daí, por definição, $f(\frac{1}{z})$ tem um pólo de ordem n em $z = 0$. Portanto, podemos escrever

$$f(\frac{1}{z}) = a_{-n}z^{-n} + a_{-n+1}z^{-n+1} + ... + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k,$$

onde $a_{-n}, a_{-n+1}, ..., a_0, a_1, ... \in \mathbb{R}$. Logo,

$$f(z) = a_{-n}z^{n} + a_{-n+1}z^{n+1} + ... + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k},$$

e portanto, como f é inteira temos que $a_1, a_2, ... \equiv 0$. Daí,

$$f(z) = a_{-n}z^{n} + a_{-n+1}z^{n+1} + ... + a_0$$

e, portanto, f é um polinômio de grau n.

Reciprocamente, escrevamos $f(z) = a_n z^n + a_{n+1}z^{n-1} + ... + a_0$, onde $a_n \neq 0$. Desta forma, temos que $f(\frac{1}{z})$ claramente possui um pólo de ordem n em $z = 0$. □

Teorema 4.2.1. *Suponha M^2 simplesmente conexa e $f : M^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão completa, com curvatura média 1, de curvatura total finita. Então, M é conformemente equivalente a $\mathbb{C}$. Toda aplicação $F : M^2 \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ fornecida pelo teorema da representação de Bryant satisfaz*

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} r_1 r_2 & -r_2^2 \\ r_1^2 & -r_1 r_2 \end{pmatrix} dz,$$

onde z é a coordenada padrão $z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, identidade, e r_1, r_2 são polinômios em z sem zeros comuns. Reciprocamente, dado um par de polinômios sem zeros comuns, digamos (r_1, r_2), temos que existe $F : \mathbb{C} \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ única a menos de translação à esquerda satisfazendo a equação acima. A aplicação $f = FF^* : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é então uma imersão conforme, de curvatura média 1, e curvatura total $-4\pi n$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que M não pode ser compacta, logo M não é conformemente equivalente a esfera de Riemann. Ainda, sabemos que M é conformemente equivalente a $\overline{M} - E$ onde E é finito e não vazio, logo M não é conforme equivalente ao disco de Poincaré. Portanto, como M é simplesmente conexo então pelo teorema (1.1.2), temos que M é conformemente equivalente a $\mathbb{C}$.

Pelo teorema da representação de Bryant, existe uma imersão nula $F : \mathbb{C} \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ tal que $f = FF^*$. Como F é holomorfa então as componentes de $F^{-1}dF$ são 1-formas holomorfas. Ainda, como F é uma imersão então as entradas de $F^{-1}dF$ não possuem zeros comuns sobre $\mathbb{C}$. Escrevamos

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} F_1 & -F_3 \\ F_2 & -F_1 \end{pmatrix} dz,$$

onde $F_i(z)$ são funções inteiras sem zeros comuns satisfazendo

$$F_1^2 = F_2 F_3.$$

Assim com as mesmas notações do teorema, podemos escrever

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} F_1 & -F_3 \\ F_2 & -F_1 \end{pmatrix} dz = \begin{pmatrix} pq & -q^2 \\ p & -pq \end{pmatrix} \phi.$$

A métrica induzida induzida da imersão $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}^3$ é dada por

$$\begin{aligned} f^*(ds^2) &= ds_f^2 \\ &= 2\alpha \otimes \overline{\alpha} + \beta \otimes \overline{\beta} + \gamma \otimes \overline{\gamma} \\ &= 2|pq|^2|\phi|^2 + |p|^2|\phi|^2 + |q|^2|\phi|^2 \\ &= (2|F_1|^2 + |F_2|^2 + |F_3|^2) dz \otimes d\overline{z} \end{aligned}$$

Dividiremos a prova em dois casos, $F_2 \equiv 0$ e $F_2 \not\equiv 0$.

Suponhamos $F_2 \equiv 0$, então

$$F_1^2 = F_2 F_3 \equiv 0. \tag{4.10}$$

Daí,

$$ds_f^2 = |F_3|^2 dz \otimes d\overline{z}.$$

Ademais, como as funções não possuem zeros comuns então, pela equação (4.10), F_3 não se anula em $\mathbb{C}$. Portanto, como ds_f^2 é completa então, pelo lema de Osserman, temos que F_3 não tem uma singularidade essencial em $z = \infty$. Assim pelos lemas (4.2.1)e (4.2.2), F_3 é um polinômio ou F_3

é constante. Mas, F_3 é não nulo e, portanto, F_3 é constante. Portanto, basta tomar o par de polinômios constantes $(r_1, r_2) = (0, (F_3^{\frac{1}{2}}(0))$ e nosso problema estará resolvido.

Suponhamos agora que $F_2 \not\equiv 0$. Note que

$$\frac{p}{q} = \frac{F_2}{F_1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

Como havíamos observado anteriormente, a curvatura total finita era dada pela imagem esférica da aplicação $\frac{p}{q}$. Mostremos que $\frac{p}{q}$ é meromorfo em $z = \infty$. De fato, suponha por absurdo que $z = \infty$ é uma singularidade essencial de $\frac{p}{q}$, então pelo teorema de Picard,[10], $\frac{p}{q}$ assume todos os valores em $\mathbb{P}^1$ infinitamente, com no máximo duas exceções. Daí, pode se concluir que a imagem esférica de $\frac{p}{q}$ é infinita e consequentemente a curvatura total de M é infinita. Absurdo. Portanto, $\frac{p}{q}$ é meromorfo em $\mathbb{P}^1$. Donde, F_2/F_1 é meromorfo em $\mathbb{P}^1$.

Note que $F_2/F_1 : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ é uma aplicação meromorfa e, portanto, existem polinômios r_1, r_2, primos entre si, tal que

$$F_2/F_1 = r_1/r_2.$$

Considere a aplicação meromorfa

$$G = F_2/r_1 = F_1/r_2.$$

Podemos notar que G não possui pólos em $\mathbb{C}$, ou seja, as singularidades de G são removíveis. De fato se existisse um pólo $a \in \mathbb{C}$ de ordem k de G teríamos que

$$G(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^k},$$

onde f é holomorfa e $f(a) \neq 0$. Daí,

$$F_1 = \frac{r_2 f}{(z-a)^k}, F_2 = \frac{r_1 f}{(z-a)^k}.$$

Daí, como F_1 e F_2 não possuem pólos teríamos que $r_1(a) = r_2(a) = 0$, mas isto é absurdo. Portanto, G não possui pólos.

Note que valem as seguintes equações

$$\begin{aligned} F_2 &= r_1 G; \\ F_1 &= r_2 G; \\ F_1^2 &= F_2 F_3. \end{aligned}$$

Daí,

$$r_2^2 G^2 = r_1 G F_3.$$

Note que $G \neq 0$ pois caso contrário F_2 e F_3 se anulariam simultaneamente. Portanto, podemos escrever

$$F_3 = \frac{r_2^2 G}{r_1}.$$

Considere função
$$P = \frac{G}{r_1} = \frac{F_3}{r_2^2}.$$
Note que como P é quociente de funções inteiras então P é meromorfa. Como F_3 é inteira e r_1, r_2 não possuem zeros comuns então, por um argumento usado anteriormente, as singularidades de P são removíveis e, portanto, P não tem pólos em $\mathbb{C}$. Temos as seguintes equações
$$\begin{aligned} F_1 &= r_1 r_2 P; \\ F_2 &= r_1^2 P; \\ F_3 &= r_2^2 P. \end{aligned}$$
Podemos escrever
$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} r_1 r_2 & -r_2^2 \\ r_1^2 & -r_1 r_2 \end{pmatrix} P dz.$$
Mostraremos que P é constante.

De fato, note que
$$r_1/r_2 = F_1/F_2 = p/q.$$
Daí,
$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= 2(pdq - qdp) \otimes \phi \\ &= 2p^2 d(q/p) \otimes \phi \\ &= 2p^2 d(r_2/r_1) \otimes \phi \\ &= 2r_1^2 d(r_2/r_1) \otimes \phi \\ &= 2(r_2 dr_1 - r_1 dr_2) \otimes \phi \\ &= 2(r_2 dr_1 - r_1 dr_2) \otimes P dz \end{aligned}$$
Por (4.0.5), $\mathcal{Q}$ é meromorfo em $z = \infty$. Portanto, como r_1, r_2 são polinômios então teremos que P meromorfo em $z = \infty$. Notemos que P não pode ter zeros pois F é uma imersão. Denotemos os zeros de r_2 por $z_1, ..., z_n$, logo a função $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $h(z) = (z - z_1)...(z - z_n)P(z)$ para $z \neq z_1, ..., z_n$ e $h(z_1) = ... = h(z_n) = 0$ é uma função inteira sobre $\mathbb{C}$. Portanto, como P possui pólo em $z = \infty$ então $h(z)$ possui pólo em $z = \infty$ e, portanto, pelo lema (4.2.2), h é um polinômio. Daí, P é um polinômio. Portanto, por (4.2.2) temos que P é constante. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $P \equiv 1$. Isto prova a primeira parte do teorema.

Reciprocamente, dado um par de polinômios (r_1, r_2) primos entre si, considere a equação diferencial
$$\frac{dF}{dz} = F(z) \begin{pmatrix} r_1 r_2 & -r_2^2 \\ r_1^2 & -r_1 r_2 \end{pmatrix},$$
com condição inicial $F(0) = I_2$, onde I_2 é a matriz identidade. Assim, podemos encontrar uma única solução $F : \mathbb{C} \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$. Daí, temos
$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} r_1 r_2 & -r_2^2 \\ r_1^2 & -r_1 r_2 \end{pmatrix}.$$

Considere $f = FF^*$, logo, pelo teorema da representação de Bryant, é claro que f é uma imersão de curvatura média 1. Pelo que vimos anteriormente, temos que

$$ds_f^2 = (2|F_1|^2 + |F_2|^2 + |F_3|^2)dz \otimes d\overline{z}.$$

Daí,

$$ds_f^2 = (2|r_1 r_2|^2 + |r_2^2|^2 + |r_1^2|^2)dz \otimes d\overline{z} = (|r_1|^2 + |r_2|^2)^2 dz \otimes d\overline{z}.$$

Note que r_1 e r_2 não se anulam simultaneamente e, portanto, podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|r_1|^2 + |r_2|^2 > k. \tag{4.11}$$

Observe que na métrica $d\alpha^2 = kdz \otimes d\overline{z}$ temos que $(\mathbb{C}, d\alpha^2)$ é completo. Logo, por ([**?**]), temos que $(\mathbb{C}, ds_f^2)$ é completo.

Finalmente, do teorema de Picard, [10], temos que a imagem da aplicação $r_1/r_2 : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ cobre $\mathbb{P}^1$ n vezes, onde $n = \max\{grau(r_1), grau(r_2)\}$. Mas, a área da esfera é 4π e, portanto, a área coberta pela imagem de r_1/r_2 é $4\pi n$. Portanto, a curvatura total de $f(\mathbb{C})$ é $-4\pi n$. □

Definição 4.2.1. *Sejam $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$ e $f : \Delta^* \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão de curvatura média 1 conforme. Dizemos que a métrica induzida ds_f^2 é completa em $z = 0$ se dada qualquer curva $\gamma(t)$ em Δ^* que tende a zero quando $t \to \infty$ tem comprimento infinito.*

O próximo resultado estabelece uma condição necessária e suficiente para que a aplicação hiperbólica de Gauss estenda-se meromorficamente.

Proposição 4.2.1. *Seja $f : \Delta^* \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma imersão conforme de curvatura média 1, completa em $z = 0$ e de curvatura total finita. Então, a aplicação hiperbólica de Gauss $[e_0 + e_3] : \Delta^* \longrightarrow \mathbb{S}^2_\infty$ estende-se holomorficamente em $z = 0$ se, e só se, a ordem de $\mathcal{Q}$ em $z = 0$ é pelo menos -2.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{Q} \equiv 0$ em Δ^*. Logo, $f(\Delta^*)$ é totalmente umbílica e, portanto, a aplicação hiperbólica de Gauss $[e_0 + e_3]$ é constante. Portanto, $z = 0$ é uma singularidade removível de $[e_0 + e_3]$. Daí, $[e_0 + e_3]$ é meromorfa em Δ.

Assumiremos que $\mathcal{Q} \not\equiv 0$. Sabemos que $d\sigma^2$ é uma pseudo métrica onde $(\Delta, d\sigma^2)$ tem curvatura 1. Portanto, pela proposição (4.0.4) existe um disco $\Delta^*_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < \epsilon\} \subset \Delta^*$ e uma coordenada z holomorfa tal que para algum $\beta > -1$, temos

$$d\sigma_f^2 = \frac{4(\beta + 1)^2 (z\overline{z})^\beta dz \otimes d\overline{z}}{(1 + (z\overline{z})^{\beta+1})^2}.$$

Escrevamos,

$$\mathcal{Q} = h(z)(dz)^2$$

sobre $z(\Delta_\epsilon)$. Como $\mathcal{Q}$ estende-se meromorficamente em $z = 0$, então $h(z)$ e meromorfa em $z = 0$. Note que a quantidade de zeros de uma aplicação holomorfa é finita. Assim, podemos tomar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de tal maneira que $h(z) \neq 0$ em $z(\Delta^*_\epsilon)$.

Considere o conjunto

$$\widetilde{\Delta}^*_\epsilon = \{y \in \mathbb{C}; \Re(y) < log\epsilon\}.$$

Tomemos aplicação de recobrimento $exp : \widetilde{\Delta}^*_\epsilon \longrightarrow \Delta^*_\epsilon$ dada por $exp(y) = e^y$. Note que, para $z \in \Delta^*_\epsilon$ temos que

$$e^{\beta y} = z^\beta.$$

Como $\widetilde{\Delta_\epsilon}$ é simplesmente conexo, pelo teorema da representação de Bryant, temos uma aplicação holomorfa $F : \widetilde{\Delta_\epsilon} \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ tal que

$$f(e^y) = F(y)F^*(y).$$

Por outro lado, sobre o disco Δ^*_ϵ temos

$$\begin{aligned} d\sigma^2_f &= \frac{4(\beta+1)^2(z\overline{z})^\beta}{(1+(z\overline{z})^{\beta+1})^2} dz \otimes d\overline{z} \\ \mathcal{Q} &= h(z)(dz)^2 \end{aligned}$$

Sabemos que existem aplicações p, q e uma 1-forma ϕ tais que

$$\begin{aligned} d\sigma^2_f &= 4\frac{d(p/q) \otimes d(p/q)}{(1+|p/q|^2)^2} \\ \mathcal{Q} &= 2(pdq - qdp) \otimes \phi \end{aligned}$$

Daí, escreveremos

$$d(\frac{p}{q}) = (\beta+1)z^\beta dz.$$

Assim, $\frac{p}{q} = z^{\beta+1}$.

Mas,

$$d\sigma^2_f = 4(pdq - qdp) \otimes (\overline{p}d\overline{q} - \overline{q}d\overline{p}).$$

Logo,

$$pdq - qdp = \frac{(\beta+1)(z)^\beta}{(1+(z\overline{z})^{\beta+1})} dz.$$

Note, ainda que,

$$pdq - qdp = -q^2 d(p/q).$$

Daí, temos a equação

$$\frac{(\beta+1)(z)^\beta}{(1+(z\overline{z})^{\beta+1})} dz = -q^2(\beta+1)z^\beta dz.$$

Donde,

$$q = \frac{i}{\sqrt{1+(z\overline{z})^{\beta+1}}}.$$

Como $\frac{p}{q} = z^{\beta+1}$ então

$$p = \frac{z^{\beta+1} i}{\sqrt{1 + (z\overline{z})^{\beta+1}}}.$$

Notemos que

$$\mathcal{Q} = h(z)(dz)^2 = 2(pdq - qdp) \otimes \phi.$$

Logo,

$$h(z)dz = \frac{2(\beta+1)z^{\beta}}{1 + (z\overline{z})^{\beta+1}} \otimes \phi.$$

Portanto,

$$\phi = \frac{(1 + (z\overline{z})^{\beta+1})h(z)}{2(\beta+1)z^{\beta}} dz.$$

Note que,

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} pq & -q^2 \\ p^2 & -pq \end{pmatrix} \phi.$$

Portanto, sobre $\widetilde{\Delta}^*_{\epsilon}$, temos

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} \frac{-z^{\beta+1}}{1+(z\overline{z})^{\beta+1}} & \frac{1}{1+(z\overline{z})^{\beta+1}} \\ \frac{-z^{2(\beta+1)}}{1+(z\overline{z})^{\beta+1}} & \frac{z^{\beta+1}}{1+(z\overline{z})^{\beta+1}} \end{pmatrix} \frac{(1 + (z\overline{z})^{\beta+1})h(z)}{2(\beta+1)z^{\beta}} dz.$$

Daí,

$$F^{-1}dF = \frac{-zh(z)}{2(\beta+1)} \begin{pmatrix} 1 & -z^{-(\beta+1)} \\ z^{\beta+1} & -1 \end{pmatrix} dz.$$

Note que,

$$f(e^{y+2\pi i}) = f(e^{y}).$$

Logo,

$$F(y + 2\pi i)F^*(y + 2\pi i) = F(y)F^*(y),$$

para todo $y \in \widetilde{\Delta}^*_{\epsilon}$.

Seja $h : \widetilde{\Delta}^*_{\epsilon} \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ uma aplicação dada ´por $h(y) = F^{-1}(y)F(y + 2\pi i)$. A aplicação é claramente holomorfa.

Note que,

$$\begin{aligned} h^*(y) &= \overline{(F^{-1}(y)F(y+2\pi i))^t} \\ &= \overline{F^t(y+2\pi i)(F^{-1})^t} \\ &= F^*(y+2\pi i)(F^{-1})^*(y) \\ &= F^{-1}(y+2\pi i)F(y) \\ &= h^{-1}(y) \end{aligned}$$

Logo, $h^*(y) = h^{-1}(y)$, daí $h \in SU(2)$. Portanto, como h é holomorfa então h é constante. Escreveremos $h(y) \equiv H$. Desta forma,

$$F(y + 2\pi i) = F(y)H.$$

Note que,

$$\begin{array}{rcl} F^{-1}(y + 2\pi i) & = & H^{-1}F^{-1}(y) \\ dF(y + 2\pi i) & = & dF(y)H \end{array}$$

Daí,

$$\begin{array}{rcl} F^{-1}(y + 2\pi i)dF(y + 2\pi i) & = & F^{-1}(y + 2\pi i)dF(y)H \\ & = & (H^{-1}F^{-1}(y))dF(y)H \\ & = & H^{-1}(F^{-1}(y)dF(y))H \end{array}$$

Portanto,

$$F^{-1}(y + 2\pi i)dF(y + 2\pi i) = H^{-1}(F^{-1}(y)dF(y))H.$$

Lembremos que, em termos de $z = e^y$,

$$F^{-1}dF = \frac{-zh(z)}{2(\beta + 1)} \begin{pmatrix} 1 & -z^{-(\beta+1)} \\ z^{\beta+1} & -1 \end{pmatrix} dz.$$

Daí, fazendo a substituição de z por y, temos

$$F^{-1}(y)dF(y) = \frac{-e^y h(e^y)}{2(\beta + 1)} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-(\beta+1)y} \\ e^{(\beta+1)y} & -1 \end{pmatrix} e^y dy.$$

Logo,

$$F^{-1}(y + 2\pi i)dF(y + 2\pi i) = \frac{-e^y h(e^y)}{2(\beta + 1)} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-(\beta+1)(y+2\pi i)} \\ e^{(\beta+1)(y+2\pi i)} & -1 \end{pmatrix} e^y dy.$$

De

$$F^{-1}(y + 2\pi i)dF(y + 2\pi i) = H^{-1}(F^{-1}(y)dF(y))H,$$

temos,

$$\begin{pmatrix} 1 & -e^{-(\beta+1)(y+2\pi i)} \\ e^{(\beta+1)(y+2\pi i)} & -1 \end{pmatrix} = H^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-(\beta+1)y} \\ e^{(\beta+1)y} & -1 \end{pmatrix} H.$$

Escrevamos,

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix},$$

onde $h_{11} = \overline{h_{22}}$ e $h_{21} = -\overline{h_{12}}$. Portanto, temos a equação

$$\begin{pmatrix} h_{11} + h_{12}e^{(\beta+1)(y+2\pi i)} & -h_{11}e^{-(\beta+1)(y+2\pi i)} - h_{12} \\ h_{21} + h_{22}e^{(\beta+1)(y+2\pi i)} & -h_{21}e^{-(\beta+1)(y+2\pi i)} - h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} - h_{21}e^{-(\beta+1)y} & -h_{22}e^{-(\beta+1)y} + h_{12} \\ -h_{21} + h_{11}e^{(\beta+1)y} & h_{12}e^{(\beta+1)y} - h_{22} \end{pmatrix}.$$

Da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} h_{12}e^{(\beta+1)(y+2\pi i)} &= -h_{21}e^{-(\beta+1)y} \\ -h_{11}e^{-(\beta+1)(y+2\pi i)} - h_{12} &= -h_{22}e^{-(\beta+1)y} + h_{12} \\ h_{21} + h_{22}e^{(\beta+1)(y+2\pi i)} &= -h_{21} + h_{11}e^{(\beta+1)y} \end{aligned}$$

Note que,

$$h_{12}e^{(\beta+1)(y+2\pi i)} = -h_{21}e^{-(\beta+1)y} \Longrightarrow h_{12}e^{2(\beta+1)(y+\pi i)} = -h_{21}.$$

Daí,

$$|h_{12}||e^{2(\beta+1)(y+\pi i)}| = |h_{21}|.$$

Mas, como $h \in SU(2)$ então $h_{21} = -\overline{h_{12}}$. Daí, podemos escrever $|h_{12}| = |h_{21}| = k$. Portanto,

$$k(|e^{2(\beta+1)(y+\pi i)}| - 1) = 0.$$

Por outro lado, escrevendo $y = y_1 + iy_2$ temos

$$|e^{2(\beta+1)(y+\pi i)}| = e^{2(\beta+1)y_1}.$$

Lembre que $y \in \widetilde{\Delta}^*_\epsilon$, isto é, $\Re y < log\epsilon < 0$. Daí, $y_1 < 0$. Ademais, estamos supondo $\beta > -1$. Portanto,

$$2(\beta+1)y_1 \neq 0.$$

Daí,

$$|e^{2(\beta+1)(y+\pi i)}| = e^{2(\beta+1)y_1} \neq 1.$$

Logo, $k = |h_{12}| = |h_{21}| = 0$, e portanto, $h_{12} = h_{21} = 0$.

Note que $H \in SL(2, \mathbb{C})$, e portanto,

$$h_{11}h_{22} = 1.$$

Das igualdades anteriores, temos

$$h_{22}e^{(\beta+1)(y+2\pi i)} = +h_{11}e^{(\beta+1)y}.$$

Daí,

$$h_{22}e^{2(\beta+1)(y+\pi i)} = h_{11}.$$

Portanto,

$$h_{11}h_{22}e^{2(\beta+1)(y+\pi i)} = (h_{11})^2.$$

Donde,

$$e^{2(\beta+1)(y+\pi i)} = (h_{11})^2.$$

Portanto, $h_{11} = \pm e^{(\beta+1)(y+\pi i)}$ e $h_{22} = \pm e^{-(\beta+1)(y+\pi i)}$.

Finalmente,

$$H = \sigma \begin{pmatrix} e^{(\beta+1)(y+\pi i)} & 0 \\ 0 & e^{-(\beta+1)(y+\pi i)} \end{pmatrix},$$

onde $\sigma = \pm 1$.

Definamos a aplicação $G : \widetilde{\Delta}^*_\epsilon \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$ dada por

$$G(y) = F(y) \begin{pmatrix} e^{-(\beta+1)y/2} & 0 \\ 0 & e^{(\beta+1)y/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que, $G(y + 2\pi i) = \sigma G(y)$. De fato,

$$\begin{aligned} G(y+2\pi i) &= F(y+2\pi i) \begin{pmatrix} e^{-(\beta+1)(y/2+\pi i)} & 0 \\ 0 & e^{(\beta+1)(y/2+\pi i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= F(y)H \begin{pmatrix} e^{-(\beta+1)(y/2+\pi i)} & 0 \\ 0 & e^{(\beta+1)(y/2+\pi i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= F(y)\sigma \begin{pmatrix} e^{(\beta+1)\pi i} & 0 \\ 0 & e^{-(\beta+1)\pi i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-(\beta+1)(y/2+\pi i)} & 0 \\ 0 & e^{(\beta+1)(y/2+\pi i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= F(y)\sigma \begin{pmatrix} e^{-(\beta+1)y/2} & 0 \\ 0 & e^{(\beta+1)y/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sigma G(y) \end{aligned}$$

Escrevamos

$$G = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix},$$

onde $u_i, v_i : \widetilde{\Delta}^*_\epsilon \longrightarrow \mathbb{C}$. Como G é holomorfa então u_i, v_i são holomorfas e, portanto, as aplicações $\frac{u_1}{u_2}, \frac{v_1}{v_2} : \widetilde{\Delta}^*_\epsilon \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ são meromorfas.

Note que,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= G(y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= F(y) \begin{pmatrix} e^{-(\beta+1)y/2} \\ e^{(\beta+1)y/2} \end{pmatrix} \\ &= e^{-(\beta+1)y/2} F(y) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{(\beta+1)y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por outro lado, escrevamos

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}.$$

Lembre que, $F^{-1}dF = \frac{-e^y h(e^y)}{2(\beta+1)} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-(\beta+1)y} \\ e^{(\beta+1)y} & -1 \end{pmatrix} e^y dy$. Daí,

$$dF = F \begin{pmatrix} 1 & -e^{-(\beta+1)y} \\ e^{(\beta+1)y} & -1 \end{pmatrix} \lambda(y)dy,$$

onde $\lambda(y) = \frac{-e^{2y}h(e^y)}{2(\beta+1)}$. Portanto,

$$\begin{aligned} dF_1 &= (F_1 + F_2 e^{(\beta+1)y})\lambda \\ dF_3 &= (F_3 + F_4 e^{(\beta+1)y})\lambda \end{aligned}$$

Note que,

$$F(y) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{(\beta+1)y} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} F_1 + F_2 e^{(\beta+1)y}) \\ (F_3 + F_4 e^{(\beta+1)y}) \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\begin{pmatrix} dF_1 \\ dF_3 \end{pmatrix} = F(y) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{(\beta+1)y} \end{pmatrix}$. Daí,

$$\begin{pmatrix} dF_1 \\ dF_3 \end{pmatrix} = e^{(\beta+1)y/2} \begin{pmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \end{pmatrix}.$$

Finalmente, a aplicação hiperbólica de Gauss de $f : \Delta_\epsilon^* \longrightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$[e_0 + e_3](e^y) = [u_1(y), u_2(y)].$$

Note que

$$u_i(y + 2\pi i) = \sigma u_i(y),$$

onde $i = 1, 2$.

Definamos aplicações $\widetilde{u_i} : \Delta_\epsilon^* \longrightarrow \mathbb{P}^1$ dadas por

$$\widetilde{u_i}(z) = u_i(y),$$

onde $e^y = z$ e $i = 1, 2$. Se $\sigma = 1$ temos que $u_i(y + 2\pi i) = u_i(y)$. Assim, mostremos que $\widetilde{u_i}$ é univaluada. De fato, por indução, note que $u_i(y + 2\pi ti) = u_i(y)$ onde $t \in \mathbb{Z}$. Dados $y, y^{'}$ tais que $e^y = e^{y^{'}}$ temos que $y^{'} = y + 2k\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ e, portanto, $u_i(y^{'}) = u_i(y)$. Daí, $\widetilde{u_i}(z)$ está bem definida e, portanto, é univaluada.

Se $\sigma = -1$ temos que $u_i(y+2\pi i) = -u_i(y)$. Dados $y, y^{'}$ tais que $e^y = e^{y^{'}}$ temos que $y^{'} = y+2k\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ e, daí, temos que $u_i(y^{'}) = -u_i(y)$. Portanto, $\widetilde{u_i}(z) = \pm u_i(y)$. Assim, $\widetilde{u_i}(z)$ é duplamente valuada.

Quando $u_1(y) \neq 0$ temos

$$\frac{u_2}{u_1}(y + 2\pi i) = \frac{u_2}{u_1}(y).$$

Mostraremos a aplicação $\widetilde{\frac{u_2}{u_1}} : \Delta_\epsilon^* \longrightarrow \mathbb{P}^1$ dada por

$$\widetilde{\frac{u_2}{u_1}}(z) = \frac{u_2}{u_1}(y),$$

onde y é tal que $e^y = z$, está bem definida. De fato, sejam $y_1, y_2 \in \Delta_\epsilon^*$ tal que $e^{y_1} = e^{y_2} = z$. Logo, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $y_1 = y_2 + 2t\pi i$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{u_1}(y_1) &= \frac{u_2}{u_1}(y_2 + 2t\pi i) \\ &= \frac{u_2(y_2 + 2t\pi i)}{u_1(y_2 + 2t\pi i)} \\ &= \frac{u_2}{u_1}(y_2) \end{aligned}$$

Isto prova que a aplicação $\widetilde{\frac{u_2}{u_1}}$ está bem definida, noutras palavras a aplicação em questão é univaluada.

Note que $\widetilde{\frac{u_2}{u_1}}$ é a aplicação normal hiperbólica de Gauss, obtida através da identificação canônica de $\mathbb{CP}^1$ com $\mathbb{P}^1$. Portanto, para concluirmos a demonstração basta mostrar que $\widetilde{\frac{u_2}{u_1}}$ é meromorfo em $z = 0$ se, e só se, $h(z)$ tem um pólo em $z = 0$ de ordem no máximo 2.

Para não sobrecarregar a notação ao invés de $\widetilde{\frac{u_2}{u_1}}$ escreveremos $\frac{u_2}{u_1}$. Ademais, olharemos u_i, v_i, como funções de z de forma que $u_i(z) = u_i(y)$ e $v_i(z) = v_i(y)$, onde y é tal que $e^y = z$. Desta forma, na pior das hipóteses, u_i, v_i são duplamente valuadas. Note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} &= \frac{d}{dz}F(z)\begin{pmatrix} z^{-(\beta+1)/2} & 0 \\ 0 & z^{(\beta+1)/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left[F_z\begin{pmatrix} z^{-(\beta+1)/2} & 0 \\ 0 & z^{(\beta+1)/2} \end{pmatrix} + F\frac{\beta+1}{2}\begin{pmatrix} -z^{-(\beta-3)/2} & 0 \\ 0 & z^{(\beta-1)/2} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que,

$$F_z = \frac{-zh(z)}{2(\beta+1)}F\begin{pmatrix} 1 & -z^{-(\beta+1)} \\ z^{\beta+1} & -1 \end{pmatrix}$$

Para facilitar as contas, escreveremos $k = \frac{(\beta+1)}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} &= \left[F_z\begin{pmatrix} z^{-k} & 0 \\ 0 & z^k \end{pmatrix} + Fk\begin{pmatrix} -z^{-k-1} & 0 \\ 0 & z^{k-1} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= F\left[\frac{-zh(z)}{4k}\begin{pmatrix} z^{-k} & -z^{-k} \\ z^k & -z^k \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -z^{-k-1} & 0 \\ 0 & z^{k-1} \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= F\begin{pmatrix} -kz^{-k-1} & \frac{z^{1-k}h}{4k} \\ kz^{k-1} & \frac{z^{1+k}h}{4k} + kz^{k-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} z^k & 0 \\ -z^k & z^{-k} \end{pmatrix} F^{-1}.$$

Portanto,

$$G^{-1}\frac{dG}{dz} = \begin{pmatrix} z^k & 0 \\ -z^k & z^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -kz^{-k-1} & \frac{z^{1-k}h}{4k} \\ kz^{k-1} & \frac{z^{1+k}h}{4k} + kz^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Daí, fazendo as contas, temos

$$G^{-1}\frac{dG}{dz} = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -k & \frac{z^2h}{4k} \\ 2k & k \end{pmatrix}.$$

Logo, temos

$$\frac{dG}{dz} = \frac{1}{z} G \begin{pmatrix} -(\beta+1)/2 & \frac{z^2h}{2(\beta+1)} \\ \beta+1 & (\beta+1)/2 \end{pmatrix}.$$

Daí, note que

$$\begin{aligned} u_1^{'} &= \frac{1}{z}(\beta+1)\left(\frac{-u_1}{2} + v_1\right) \\ v_1^{'} &= \frac{1}{2z}\left(\frac{u_1 z^2 h(z)}{(\beta+1)} + v_1(\beta+1)\right) \end{aligned}$$

Assim,

$$v_1^{'} - \frac{u_1^{'}}{2} = \frac{1}{2z}\left(\frac{z^2h(z)}{\beta+1} + \frac{\beta+1}{2}\right) u_1.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} z^2 u_1'' &= (\beta+1)\left((\frac{u_1}{2} - v_1) + z(v_1^{'} - \frac{u_1^{'}}{2})\right) \\ z u_1^{'} &= (\beta+1)\left(\frac{-u_1}{2} + v_1\right) \end{aligned}$$

Donde,

$$z^2 u_1^{''} + z u_1^{'} = (\beta+1) z (v_1^{'} - \frac{u_1^{'}}{2}).$$

Portanto,

$$z^2 u_1^{''} + z u_1^{'} - \left(\frac{z^2h(z)}{2} + \frac{(\beta+1)^2}{4}\right) u_1 = 0,$$

isto é, u_1 é solução da equação

$$z^2 u^{''} + z u^{'} - \left(\frac{z^2h(z)}{2} + \frac{(\beta+1)^2}{4}\right) u = 0.$$

Analogamente, podemos ver que u_2 também é solução da equação acima. Note que u_1 e u_2 são soluções linearmente independentes. De fato, suponha por absurdo que exista $l \in \mathbb{C}$ tal que $u_1 = lu_2$. Logo, $u_1^{'} = lu_2^{'}$. Mas,

$$\begin{aligned} zu_1^{'} &= (\beta+1)\left(\frac{-u_1}{2}+v_1\right) \\ zu_2^{'} &= (\beta+1)\left(\frac{-u_2}{2}+v_2\right) \end{aligned}$$

Daí,

$$zu_1^{'} = zlu_2^{'} \Rightarrow -u_1 + lu_2 = 2(-v_1 + lv_2) \Rightarrow v_1 = lv_2.$$

Mas, isto é um absurdo pois G é inversível. Daí, u_1, u_2 são linearmente independentes.

Suponhamos que $\frac{u_2}{u_1}$ se estende meromorficamente em $z = 0$. Escreva $r = \frac{u_2}{u_1}$. Daí, $\frac{r^{''}}{r^{'}}$ possui um pólo simples em $z = 0$. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$ a ordem do pólo de r em $z = 0$, assim, podemos escrever

$$r(z) = A_{-n}z^{-n} + A_{-n+1}z^{-n+1} + ... + A_{-1}z^{-1} + g(z),$$

onde $A_{-k} \neq 0$, k=1,..,n, e $g(z)$ é holomorfa em Δ_ϵ^*. Daí,

$$\begin{aligned} r^{'} &= -nA_{-n}z^{-n-1} + (-n+1)A_{-n+1}z^{-n} + ... - A_{-1}z^{-2} + g^{'}(z) \\ r^{''} &= -n(-n-1)A_{-n}z^{-n-2} + ... + 2A_{-1}z^{-3} + g^{''}(z) \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} z^{n+1}r^{'} &= p(z) + z^{n+1}g^{'}(z) \\ z^{n+2}r^{''} &= q(z) + z^{n+2}g^{''}(z), \end{aligned}$$

onde $p(z)$ e $q(z)$ são polinômios. Daí,

$$\frac{r^{''}}{r^{'}} = \frac{q(z) + g^{''}(z)z^{n+2}}{z(p(z) + g^{'}(z)z^{n+1})}.$$

Podemos notar, pela nossa construção, que $p(0), q(0) \neq 0$. Logo, $\frac{q(z)+g^{''}(z)z^{n+2}}{p(z)+g^{'}(z)z^{n+1}}$ não se anula em $z = 0$. Ademais, podemos supor ϵ suficientemente pequeno tal que $p(z) + g^{'}(z)z^{n+1} \neq 0$, assim temos que $\frac{q(z)+g^{''}(z)z^{n+2}}{p(z)+g^{'}(z)z^{n+1}}$ é holomorfa em Δ_ϵ^* e não se anula em $z = 0$. Portanto, da equação

$$\frac{r^{''}}{r^{'}} = \frac{q(z) + g^{''}(z)z^{n+2}}{z(p(z) + g^{'}(z)z^{n+1})}$$

concluimos que $\frac{r^{''}}{r^{'}}$ é meromorfa em $z = 0$ e possui um pólo simples em $z = 0$.

Por outro lado, considere $S(r)=\left(\frac{r''}{r'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{r''}{r'}\right)^2$ a derivada Schwarziana de $r(z)$. Como $\frac{r''}{r'}$ tem um pólo simples em $z=0$ então $S(r)$ possui um pólo em $z=0$ de ordem no máximo 2. Note que

$$r=\frac{u_2}{u_1}\Rightarrow u_1'r+r'u_1=u_2'\Rightarrow z(u_1'r+r'u_1)=zu_2'$$

Derivando, novamente, temos

$$u_2''=u_1'r'+u_1''r+r''u_1+r'u_1'\Rightarrow z^2u_2''=z^2(u_1'r'+u_1''r+r''u_1+r'u_1').$$

Portanto, como

$$z^2u_2''+zu_2'-\left(\frac{z^2h(z)}{2}+\frac{(\beta+1)^2}{4}\right)u_2=0$$

temos que

$$z^2(u_1'r'+u_1''r+r''u_1+r'u_1')+z(u_1'r+r'u_1)-\big((\beta+1)^2/4+z^2h(z)/2\big)\,ru_1=0.$$

Daí,

$$r''(u_1z^2)+r'(2u_1'z^2+zu_1)+r(z^2u_1''+zu_1'-\big((\beta+1)^2/4+z^2h(z)/2\big)\,u_1)=0.$$

Logo, como u_1 é solução da equação diferencial, mencionada acima, temos que

$$r''(u_1z^2)+r'(2u_1'z^2+zu_1)=0.$$

Portanto, escreveremos

$$\frac{r''}{r'}=-\frac{2u_1'z+u_1}{u_1z}.$$

Donde

$$\left(\frac{r''}{r'}\right)'=-\frac{2u_1''z^2u_1-2(u_1')^2-u_1^2}{(u_1z)^2}.$$

Por outro lado,

$$\left(\frac{r''}{r'}\right)^2=\frac{4(u_1')^2z^2+4u_1'u_1z+(u_1)^2}{(u_1z)^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
S(r) &= \left(\frac{r''}{r'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{r''}{r'}\right)^2\\
&= -\frac{2u_1''z^2u_1-2(u_1')^2-u_1^2}{(u_1z)^2}-\frac{1}{2}\frac{4(u_1')^2z^2+4u_1'u_1z+(u_1)^2}{(u_1z)^2}\\
&= \frac{1}{2u_1z^2}(-4(z^2u_1''+u_1'z)+u_1)\\
&= \frac{1}{2u_1z^2}(-4(\frac{(\beta+1)^2}{4})u_1+u_1)\\
&= \frac{1-(\beta+1)^2}{2z^2}-h(z)
\end{aligned}$$

Daí, como $S(r)$ tem um pólo de ordem no máximo 2 em $z = 0$, temos que $h(z)$ tem um pólo de ordem no máximo 2 em $z = 0$. Donde a ordem de $\mathcal{Q}$ é pelo menos -2.

Suponhamos que $\mathcal{Q}$ tem um pólo de ordem 2 em $z = 0$ Logo, $h(z)$ tem um pólo de ordem 2. Daí, a aplicação $z^2h(z)$ é holomorfa Δ_ϵ. Note que

$$z^2u^{''} + zu^{'} - \left(\frac{z^2h(z)}{2} + \frac{z(\beta+1)^2}{4}\right)u = 0 \tag{4.12}$$

é uma equação diferencial de segunda ordem complexa. Por outro lado, note que $\frac{z^2h(z)}{2}$ é holomorfa em $z = 0$ e, portanto, dizemos que $z = 0$ é *ponto regular singular da equação.*

Suponhamos que $\sigma = 1$, logo sabemos que u_1 e u_2 são univaluadas. Portanto como u_1 e u_2 são soluções da equação então u_1 e u_2 são meromorfas em $z = 0$. Portanto, $r = \frac{u_2}{u_1}$ é meromorfa em $z = 0$. Caso $\sigma = -1$ então sabemos que u_1 e u_2 são duplamente valuados sobre Δ_ϵ. Note que, as aplicações $z^{1/2}u_1$ e $z^{1/2}u_2$ são univaluadas e, portanto, $z^{1/2}u_1$ e $z^{1/2}u_2$ são meromorfas em Δ_ϵ. Daí, $r = \frac{u_2}{u_1}$ é meromorfa em Δ_ϵ. □

Corolário 4.2.1. *Se $F : \mathbb{C} \longrightarrow SL(2,\mathbb{C})$ é uma imersão nula tal que $f = FF^*$ é completo e de curvatura finita, e a aplicação hiperbólica de Gauss estende se holomorficamente em $z = \infty$, então $f(\mathbb{C})$ é uma horoesfera.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $f(\mathbb{C})$ não é uma horosfera. Portanto, $f(\mathbb{C})$ não é totalmente umbílica. Assim, $\mathcal{Q}$ não é identicamente nula. Pelo que foi mostrado anteriormente, $\mathcal{Q}$ estende-se meromorficamente ao fim de $\mathbb{C}$. Daí, $\mathcal{Q}$ é meromorfa em $\mathbb{P}^1$. Logo, $\mathcal{Q}$ tem um pólo em $z = \infty$. Pela relação de Riemann, temos

$$\chi(\mathbb{P}^1) = -\frac{1}{2}deg(\overline{B}) = -\frac{1}{2}\sum_{p\in M}\nu_p(\mathcal{Q}).$$

Mas, a característica de $\mathbb{P}^1$ é 2. Daí, o grau do divisor de $\mathcal{Q}$ é -4, isto é

$$\sum_{p\in M}\nu_p(\mathcal{Q}) = -4.$$

Por outro lado, pela proposição anterior, como a aplicação de Gauss hiperbólica estende-se meromorficamente em $z = \infty$ então

$$\nu_\infty(\mathcal{Q}) > -2.$$

Daí,

$$-4 = \sum_{p\in M}\nu_p(\mathcal{Q}) > \nu_\infty(\mathcal{Q}) > -2.$$

Mas, isto é absurdo.

Portanto, $f(\mathbb{C})$ é uma horoesfera. □

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, J. L. M. & COLARES, A. G., *Minimal Surfaces in* $\mathbb{R}^3$, 1ª ed., Berlin: Sprinjer-Verlag. 1986, Vol 01. 124p;

[2] BRYANT, R. *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Asterisque 154.155 (1987), 321.347.

[3] COWEN, M. & GRIFFITHS, P. *Holomorphic Curves and metrics of negative curvature*, J. Analyse Math.29 (1976), 93.153

[4] DO CARMO, M. P. ,*Geometria Riemanniana*, 4ª ed., Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2008;

[5] DO CARMO, M. P. ,*O Método do Referencial Móvel*, Publicações Matemática. IMPA 2008;

[6] FARKAS, H. & KRA,I. *Riemann Surfaces*, 2ª ed., GTM, Springer, 1980.

[7] FORSTER, O. *Lectures on Riemann Surfaces*, GTM, Springer, 1980.

[8] FUJIMORI, S., KOBAIASHI, S. & ROSMANN, W. *Loop Group Methods for Constant Mean Curvature Surfaces*, http://arxiv.org/abs/math/0602570v2.

[9] GÁLVEZ,J. & MIRA, P. *The liouville equation in a half-plane*, J. Differential Equations, 246(2009).

[10] HILLE, E. *Analitic Function Theory volume 2*, Chelsea Publishing Company, New York, 1962

[11] IVEY, T. & LANDSBERG J. *Cartan for Beginners: Differential Geometry Via Moving Frames and Exterior Differential Systems*, Graduate Studies in Mathematics, 2003.

[12] LAWSON, H. B., *Lectures on Minimal Submanifolds Volume 1*, University of California, Berkelei, 1980;

[13] LEE, J. M. ,*Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, GTM, Springer, 1997;

[14] NETO, L.A. *Funções de uma Variável Complexa*, Projeto Euclides, IMPA, 1993.

[15] O'NEILL,B. *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York 1966

[16] OSSERMAN,R., *A Survey of Minimal Surface*,2^{a} ed.,New York:Van Nostrand Reinhard 1986;

[17] RATCLIFFE, J. G. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics 149, Spring-Verlag, New York, 1994;

[18] TALOVIKOVA, V. *Riemann Roch Theorem*,VIGRE/REUPapers, 2009.