



**Universidade Federal de Alagoas**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O Teorema de Comparação de  
Volume de Bishop-Gromov

Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Rio São Francisco

Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Dissertação de Mestrado

# **O Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Gromov**

Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

Maceió, Brasil  
27 de fevereiro de 2009

Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

O Teorema de Comparação de Volume  
de Bishop-Gromov

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof<sup>o</sup>. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

Maceió

2009

**Catlogação na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale**

S237t Santos, Erikson Alexandre Fonseca dos.  
O teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov / Erikson Alexandre  
Fonseca dos. – Maceió, 2009.  
66 f.

Orientador: Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante.  
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.  
Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 64.  
Índice: f. 65-66.

1. Weitzenböck, Fórmula de. 2. Bishop-Gromov, Comparação de volume.  
3. Comparação laplaciano. 4. Região aberta e conexa – Volume. I. Título.

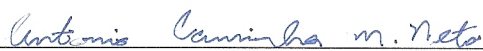
CDU: 514.774

# O Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Gromov

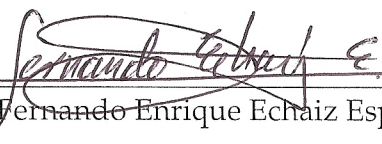
Erikson Alexandre Fonseca dos Santos

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 27 de fevereiro de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

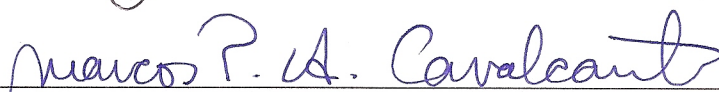
Banca Examinadora:



Prof<sup>o</sup>. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto (UFC)



Prof<sup>o</sup>. Dr. Fernando Enrique Echaiz Espinoza (UFAL)



Prof<sup>o</sup>. Dr. Marcos Petrúcio Cavalcante (Orientador)

*Aos meus pais Vera e Enoch,  
aos meus irmão Fernando e Júnior  
e à minha querida avó Terezinha,  
com muito amor, dedico.*

*“A arrogância que nos leva a acreditar  
que somos superiores aos outros  
tem origem no medo de sermos inferiores.”  
(Provérbio espiritual)*

## AGRADECIMENTOS

- » Agradeço, primeiramente, ao meu bom Deus pelo dom precioso da vida, pelo amor incondicional e por me amparar sempre, ante tantas dificuldades que a vida nos surpreende.
- » Agradeço à minha mãe Vera, e minha avó Terezinha pelo amor, carinho, incentivo, presença e arrimo durante toda minha existência.
- » Agradeço ao meu pai Enoch, e aos meus irmãos Fernando e Júnior pelo amor, desvelo e carinho em toda minha vida, ainda que contidos.
- » Agradeço à minha família, e de uma maneira muito especial aos “meus” tesouros Gustavo e Lisianne e à minha cunhada Lindiane pelo exemplo de perseverança, pelo apoio e por acreditarem sempre.
- » Agradeço ao meu eterno amigo César por sua presença constante, confiança, honestidade, encorajamento, e pelas valiosas conversas, que muito contribuíram para meu crescimento pessoal e profissional.
- » Agradeço ao meu orientador, Marcos Petrúcio, por me acompanhar desde 2005 como seu orientando, pela paciência, confiança, incentivo, apoio, pelas conversas matemáticas e não matemáticas, e por acreditar sempre.
- » Agradeço aos professores Antonio Caminha e Fernando Echaiz pelas valiosas, ponderadas e relevantes sugestões acrescentadas a este trabalho e por assentirem em participar da banca



de defesa desta dissertação.

- » Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas; em particular, aos professores Adán Corcho, Ediel Guerra e Krerley Oliveira pela contribuição significativa à minha formação acadêmica neste programa de Mestrado. Agradeço, de modo especial, ao professor José Adonai por seu valioso material de Geometria Diferencial cedido, gentilmente, durante o curso da disciplina.
- » Agradeço à Márcia e Silvinha, secretárias da Pós-Graduação, pela presteza e competência na execução de suas atribuições em todos os momentos e, em particular, dos que mais necessitei.
- » Agradeço a todos os colegas da Pós-Graduação deste Instituto, em particular aos da minha turma: Arlyson, Borges, Carlos, Darliton, Everson, Leandro e Leonardo pelo companherismo e cumplicidade sempre. Agradeço também a Eduardo pela disposição e paciência, sempre, em compartilhar seus conhecimentos.
- » Agradeço, de maneira muito especial, a Alex, Fábio e Priscila pela sincera amizade que sempre demonstraram, pelo companherismo, estímulo e presença constantes, pelos valiosos fins de semana de estudo e por todos os momentos de lazer dos quais eu nunca fui esquecido, ainda que eu não pudesse estar presente. O meu sincero afeto por vocês.
- » Agradeço a todos os colegas da Computação, que sempre se dispuseram a resolver nossos problemas técnicos, principalmente no surto dos laptops. De maneira particular, agradeço a Michel por sua eterna disposição em solucionar nossos problemas.
- » Agradeço a todos os colegas, servidores e professores que fazem o Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, e de modo particular, à D. Maria.
- » Agradeço à CAPES e à FAPEAL pelo fundamental apoio financeiro concedido durante estes dois anos.
- » Enfim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para que mais esta etapa de minha vida fosse concluída. O meu eterno e saudoso agradecimento.

Erikson Alexandre Fonseca

NESTA DISSERTAÇÃO, usamos o teorema de comparação do Laplaciano para demonstrar o teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov, o qual assegura que, se as curvaturas de Ricci de uma variedade Riemanniana completa são maiores ou iguais a  $(n - 1)k$ ,  $k$  uma constante real, então, para todo  $p \in M$  e para todo  $R > 0$ , o volume de uma bola centrada em  $p$  e de raio  $R$  é menor ou igual que o volume de uma bola geodésica de raio  $R$  na forma espacial de curvatura seccional constante  $k$ . Ademais, a igualdade ocorre se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando  $p$  e  $x$ , para planos contendo o vetor radial for constante e igual a  $k$ .

**Palavras-chave:** Volume de uma região aberta e conexa, fórmula de Weitzenböck, teorema de comparação do Laplaciano, teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov.

IN THIS dissertation, we use the Laplacian comparison theorem to prove the comparison of volume Bishop-Gromov's theorem, which assures that if the Ricci curvatures of a complete Riemannian manifold are larger than or equal to  $(n - 1)k$ , the volume of a ball with center in  $p$  and radius  $R$  is smaller than or equal to the volume of a geodesic ball with radius  $R$  in the space form of sectional constant curvature  $k$ , for all  $p \in M$  and  $R > 0$ , where  $k \in \mathbb{R}$ . Moreover, equality occurs if all sectional curvature throughout geodesics connecting  $p$  and  $x$ , for plans which contain the radial vector, is constant and equal to  $k$ .

**Keywords:** Volume of an open and connected region, Weitzenböck's formula, Laplacian comparison theorem, comparison of volume Bishop-Gromov's theorem.

<b>1</b>	<b>Definições Básicas</b>	<b>15</b>
1.1	Volume . . . . .	15
1.2	Variedades Completas . . . . .	21
1.3	Operadores em Variedades . . . . .	23
1.4	Curvaturas . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Resultados Preliminares</b>	<b>43</b>
2.1	Fórmula de Weitzenböck . . . . .	43
2.2	O Hessiano da Função Distância . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Teoremas de Comparação</b>	<b>52</b>
3.1	Teorema de Comparação do Laplaciano . . . . .	52
3.2	O Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Gromov . . . . .	59
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>65</b>

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Ilustração da definição de volume . . . . .	21
3.1	Comparação entre volumes . . . . .	59

OS TEOREMAS de comparação são um tópico substancialmente estudado em Geometria Riemanniana e podem ser observados e compreendidos de diversas maneiras. Em particular, nosso interesse estará em um dos teoremas que compara volumes, a saber, o teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov.

Como podemos ver em [2], R. L. Bishop demonstrou em 1964 o teorema que enunciamos a seguir e que é o principal resultado desta dissertação:

**Teorema 0.1.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana completa e suponhamos que, para  $k$  constante,*

$$\text{Ric}(g) \geq (n - 1)kg.$$

Então

$$\text{Vol}(B_R(p)) \leq \text{Vol}(B_R^k),$$

onde  $B_R^k$  é uma bola geodésica de raio  $R$  na forma espacial de curvatura seccional constante  $k$ . A igualdade ocorre, se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando  $p$  e  $x$ , para planos contendo o vetor radial, for constante e igual a  $k$ .

Entre 1982 e 1986, M. Gromov generalizou o resultado acima demonstrando que o quociente

$$\frac{\text{Vol}(B_R(p))}{\text{Vol}(B_R^k)}$$

é decrescente com relação a  $R$ , e em função disso, o teorema passou a receber o nome de ambos,

embora alguns autores o intitulem apenas como Bishop, veja a referência [3].

No primeiro dos três capítulos do nosso trabalho, iniciamos revisitando as formas diferenciais, que serão ferramentas imprescindíveis para a elucidação da definição de volume. Passamos, então, a fixar notações e recordar alguns conceitos de Geometria Riemanniana, como as variedades completas, ao passo que também fazemos um estudo dos operadores Laplaciano e Hessiano nestas variedades. Finalizamos este capítulo inicial com o estudo das curvaturas em variedades Riemannianas.

Iniciamos o capítulo subsequente com a apresentação e demonstração de uma identidade sobejamente utilizada em diversos contextos, bem como nesta dissertação, a saber a fórmula de Weitzenböck, também conhecida como fórmula de Bochner-Lichnerowicz, descrita a seguir:

**Proposição 0.1.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta\left(|\nabla f|^2\right) = |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f),$$

onde  $\text{Hess } f$  denota o Hessiano de  $f$ .

Concluimos esta segunda parte com uma seção que é destinada ao estudo do Hessiano da função distância e que culmina com a seguinte proposição:

**Proposição 0.2.** *Seja  $\mathbb{R}^n$  munido com a métrica Riemanniana  $g$ , que em coordenadas polares é escrita como*

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)dw^2,$$

onde  $dw^2$  representa a métrica canônica em  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Seja  $r(x) = d(x, p)$ , onde  $d$  é a função distância correspondente. Então, para  $x = rw$ ,  $r > 0$ ,  $w \in \mathbb{S}^{n-1}$  e para quaisquer  $X, Y$  ortogonais a  $\frac{\partial}{\partial r}$ ,

$$\text{Hess } r(X, Y) = \frac{f'(r)}{f(r)}g(X, Y).$$

Além disso,

$$\Delta r(x) = (n-1)\frac{f'(r)}{f(r)}.$$

Finalizamos o terceiro capítulo desta dissertação com duas seções. Na primeira, enunciamos e demonstramos o teorema de comparação do Laplaciano, descrito a seguir, que

além de ser um teorema considerável em Geometria Riemanniana, é também a ferramenta fundamental que usamos para a conclusão do teorema de Bishop-Gromov.

**Teorema 0.2.** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana completa e  $r$  a distância geodésica ao ponto  $p \in M$ . Suponhamos que a curvatura de Ricci de  $M$  satisfaz*

$$\text{Ric}(M) \geq (n - 1)k$$

e que a função  $r$  é diferenciável no ponto  $x$ . Então

$$\Delta r(x) \leq \Delta r_k(\tilde{x}),$$

onde  $r_k(\tilde{x}) = r(x) = r_0$ ,  $r_0 < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$  se  $k > 0$ , com  $r_k$  sendo a distância geodésica a partir de um ponto fixado numa forma espacial de curvatura seccional constante  $k$  e  $r$  é a distância geodésica a partir de um ponto fixado numa variedade completa. A igualdade é satisfeita, se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando  $p$  e  $x$ , para planos contendo o vetor radial for constante e igual a  $k$ .

Na segunda seção, demonstramos o teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov, na qual usamos como referência o livro [6]. Para isto, consideramos o Laplaciano das funções  $r(x)$  e  $r_k(\tilde{x})$ , a fim de usar o teorema de comparação do Laplaciano; além disso, usamos a definição de volume de uma região aberta e conexa juntamente com integração em coordenadas polares para concluir a demonstração.

Finalizamos nosso trabalho com um apêndice que esclarece o fato visto na expressão (3.4), na demonstração do teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov.



NESTE CAPÍTULO introduzimos algumas definições e resultados básicos de Geometria Riemanniana com o intuito de fixar algumas notações, admitindo que o leitor seja familiarizado com os pré-requisitos que envolvem tais definições e resultados. Nossas principais referências serão os livros [5] e [8].

Em todo o trabalho, vamos supor que  $(M^n, g)$  é uma *variedade diferenciável* conexa e orientada de dimensão finita  $n \geq 2$ , munida da *métrica Riemanniana*  $g$ , a qual denotaremos por  $M$  apenas. A *conexão de Levi-Civita* de  $M$  será denotada por  $\nabla$ . Como é usual, muitas vezes escreveremos  $\langle X, Y \rangle$  para denotar  $g(X, Y)$ ,  $X, Y \in T_p M$ ,  $p \in M$ , ou ainda, algumas vezes também utilizaremos a notação clássica  $ds^2$  para representar a métrica Riemanniana  $g$ . Usaremos  $\mathcal{X}(M)$  para denotar o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $M$ .

## 1.1 Volume

Nesta seção desenvolvemos os fundamentos algébricos necessários para estudar as formas diferenciais. Inicialmente faremos um estudo em espaços vetoriais com produto interno e, posteriormente, o faremos em variedades Riemannianas. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências [4] e [10].

Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais e  $\varphi : E \times \cdots \times E \rightarrow F$  uma aplicação definida no produto cartesiano de  $r$  fatores iguais a  $E$ . Dizemos que  $\varphi$  é *r-linear* quando seus valores  $\varphi(v_1, \dots, v_r)$

dependem linearmente de cada uma das variáveis  $v_1, \dots, v_r \in E$ . Com as operações usuais de soma de duas aplicações e produto de uma aplicação por um número, o conjunto das aplicações  $r$ -lineares  $\varphi : E \times \dots \times E \rightarrow F$  é um espaço vetorial, e o denotaremos por  $\mathcal{L}_r(E, F)$ .

Dizemos que uma aplicação  $r$ -linear  $\varphi : E \times \dots \times E \rightarrow F$  é *alternada* quando

$$\varphi(v_1, \dots, v_r) = 0$$

sempre que a sequência  $(v_1, \dots, v_r)$  possuir repetições, ou seja, quando existirem  $i \neq j$  com  $v_i = v_j$ . A fim de que  $\varphi \in \mathcal{L}_r(E, F)$  seja alternada, é necessário e suficiente que  $\varphi$  seja *anti-simétrica*, ou seja, que

$$\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) = -\varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r)$$

para quaisquer  $v_1, \dots, v_r \in E$ . De fato, escrevamos o primeiro membro da igualdade acima como  $\varphi(v_i, v_j)$ . Daí, supondo  $\varphi$  alternada, temos que

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(v_i + v_j, v_i + v_j) &= \varphi(v_i, v_i) + \varphi(v_i, v_j) + \varphi(v_j, v_i) + \varphi(v_j, v_j) \\ &= \varphi(v_i, v_j) + \varphi(v_j, v_i), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi(v_i, v_j) = -\varphi(v_j, v_i).$$

Reciprocamente, se  $\varphi$  é antissimétrica, então

$$\varphi(v, v) = -\varphi(v, v).$$

Daí,  $2 \cdot \varphi(v, v) = 0$  e  $\varphi(v, v) = 0$ . Portanto,  $\varphi$  é alternada. Denotaremos por  $\mathcal{A}_r(E, F)$  o conjunto das aplicações  $r$ -lineares alternadas de  $E$  em  $F$ . Notemos que  $\mathcal{A}_r(E, F)$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{L}_r(E, F)$ .

Estaremos interessados, de modo especial, nas aplicações  $r$ -lineares alternadas  $\varphi : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , as quais chamaremos *formas  $r$ -lineares alternadas* ou, simplesmente,  *$r$ -formas*. Denotaremos o espaço vetorial  $\mathcal{A}_r(E, \mathbb{R})$  apenas por  $\mathcal{A}_r(E)$ . Os elementos de  $\mathcal{A}_r(E)$  são também chamados *formas alternadas de grau  $r$* . Por convenção,  $\mathcal{A}_r(E) = \{0\}$  para  $r < 0$  e  $\mathcal{A}_0(E) = \mathbb{R}$ .

Vejam alguns exemplos que ilustram o conceito de  $r$ -formas.

**Exemplo 1.1.** O determinante de uma matriz  $m \times m$  é uma  $m$ -forma alternada se, para  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^m$ , pusermos  $\det(v_1, \dots, v_m)$  igual ao determinante da matriz  $m \times m$  cujas colunas são os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_m$  escritos numa base fixada. Denotaremos isto simplesmente por  $\det \in \mathcal{A}_m(\mathbb{R}^m)$ .

**Exemplo 1.2 (Produto Exterior).** Seja  $E^*$  o espaço dual de  $E$  e consideremos  $r$  funcionais lineares  $f_1, \dots, f_r \in E^*$ . Definimos o produto exterior desses funcionais como sendo a  $r$ -forma

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_r : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_r)(v_1, \dots, v_r) = \det[f_i(v_j)], \quad i, j = 1, \dots, r.$$

A seguir, enunciaremos o fato mais importante a respeito das  $r$ -formas, cuja demonstração pode ser encontrada em [10], página 401.

**Teorema 1.1.** Seja  $\{e_i\}_{i=1}^m$  uma base de  $E^*$ . As  $r$ -formas  $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ , onde  $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$  percorre os subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, m\}$  com  $r$  elementos, constituem uma base de  $\mathcal{A}_r(E)$ . Em particular,  $\dim \mathcal{A}_r(E) = \binom{m}{r}$ .

Um caso particular importante ocorre quando  $m = \dim E$ . Neste caso,  $\dim \mathcal{A}_m(E) = 1$ , ou seja, a menos de um fator constante, existe apenas uma forma alternada de grau  $m$  sobre um espaço  $m$ -dimensional.

Introduziremos agora o conceito de forma de volume em um espaço vetorial. Para isto, seja  $E$  um espaço vetorial  $m$ -dimensional, orientado,<sup>1</sup> munido de um produto interno e seja  $\{e_i\}_{i=1}^m$  uma base ortonormal positiva em  $E$ .

Definimos a *forma de volume* de  $E$  como sendo a forma  $\text{vol} \in \mathcal{A}_m(E)$ , dada por

$$\text{vol}(e_1, \dots, e_m) = 1.$$

---

<sup>1</sup>Orientar um espaço vetorial é escolher nele uma base, chamá-la de “positiva” e declarar também positivas todas as demais bases que dela se obtenham por meio de uma matriz de passagem com determinante positivo.

Sabemos que, dada a sequência de vetores  $v_1, \dots, v_m \in E$ , podemos escrever

$$v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i,$$

para cada  $j = 1, \dots, m$ . Consideremos a matriz  $a = (a_{ij})_{m \times m}$  assim obtida. Afirmamos que

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_m) = \det a.$$

Ora, por um lado temos que  $\det(e_1, \dots, e_m) = 1$ . Por outro, como  $\dim \mathcal{A}_m(E) = 1$  então, para cada  $\omega \in \mathcal{A}_m(E)$ , existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\omega(v_1, \dots, v_m) = \lambda \det(v_1, \dots, v_m)$$

quaisquer que sejam  $v_1, \dots, v_m \in E$ . Pondo

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_m) = \omega(v_1, \dots, v_m),$$

segue que

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_m) = \lambda \det(v_1, \dots, v_m),$$

para quaisquer  $v_1, \dots, v_m \in E$  e, em particular,

$$\text{vol}(e_1, \dots, e_m) = \lambda \det(e_1, \dots, e_m),$$

donde  $\lambda = 1$ . Portanto,

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_m) = \det a.$$

Agora, vamos mostrar que  $\text{vol}$  independe da escolha da base que fizemos. Com efeito, definamos a matriz

$$g = (\langle v_i, v_j \rangle)_{n \times n},$$

na qual o elemento situado na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna é o produto interno  $\langle v_i, v_j \rangle$ .

Como

$$\begin{aligned}\langle v_i, v_j \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^m a_{ki} e_k, \sum_{s=1}^m a_{sj} e_s \right\rangle \\ &= \sum_{k,s=1}^m a_{ki} a_{sj} \langle e_k, e_s \rangle \\ &= \sum_{k=1}^m a_{ki} a_{kj},\end{aligned}$$

temos que

$$g = a^T a.$$

Logo,

$$\det(g) = \det(a^T a) = [\det(a)]^2,$$

e, portanto,

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_m) = \pm \sqrt{\det(g)},$$

onde o sinal depende da orientação tomada. A igualdade obtida acima mostra que a definição independe da escolha de uma base.

**Exemplo 1.3.** *Sejam  $\{e_i\}_{i=1}^n$  a base canônica do  $\mathbb{R}^n$  e  $\{dx_i\}_{i=1}^n$  sua base dual. Notemos aqui que a forma de volume de  $\mathbb{R}^n$  é dada por  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , ou seja,*

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \begin{cases} 1, & \text{se } 1 = i_1, \dots, n = i_n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Este exemplo também pode ser visto em [4], página 10.*

Passamos a estudar, agora, as formas diferenciais em variedades Riemannianas, e veremos que estas são os integrandos naturais das integrais em variedades.

Definimos a *forma elemento de volume em uma variedade Riemanniana orientada*  $M$  como a aplicação que faz corresponder a cada ponto  $p \in M$ , a forma de volume  $dM$  do espaço tangente  $T_p M$ , munida com a orientação induzida.

A seguir veremos como exibir a forma elemento de volume num sistema de coordenadas locais.

Seja  $X : U \rightarrow M$  uma parametrização positiva  $C^\infty$  em torno de  $p = X(q) \in M$ . Neste caso, a base coordenada  $\left\{ X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$  correspondente à base canônica de  $\mathbb{R}^n$  pela parametrização  $X$ , define a orientação positiva de  $T_p M$ . Neste sistema de coordenadas podemos escrever a métrica em sua forma matricial, pondo  $G = (g_{ij})$ , onde  $g_{ij} := \langle X_i, X_j \rangle$ . Para uso futuro, denotaremos por  $G^{-1} = (g^{ij})$  sua inversa.

Sabemos que a forma *pull back*  $X^*(dM)$  de  $dM$  é uma  $n$ -forma em  $U$  e, portanto, existe uma (única) função diferenciável  $a : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$X^*(dM)(q) = a(q) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(q).$$

Vejamos agora que esta função é facilmente determinada. De fato, segue da nossa discussão à página 17 que

$$\begin{aligned} a &= X^*(dM)(e_1, \dots, e_n) \\ &= dM(X_1, \dots, X_n) \\ &= \sqrt{\det(\langle X_i, X_j \rangle)} \\ &= \sqrt{\det(g_{ij})}. \end{aligned}$$

Para finalizar esta seção, vejamos como a forma elemento de volume é usada para definir o volume de certas regiões de uma variedade Riemanniana.

Seja  $R \subset M$  uma região aberta e conexa cujo fecho é compacto e seja  $p \in M$ . Vamos supor que  $\bar{R}$  está contida na vizinhança coordenada  $X(U)$  da parametrização  $X : U \rightarrow M$  dada acima, e que a fronteira de  $X^{-1}(R) \subset U$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^n$ , como ilustra a figura 1.1.

Definimos o *volume* de  $R$ , que denotamos por  $\text{Vol}(R)$ , como sendo a integral em  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(R) &= \int_R dM := \int_{X^{-1}(R)} X^* dM \\ &= \int_{X^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

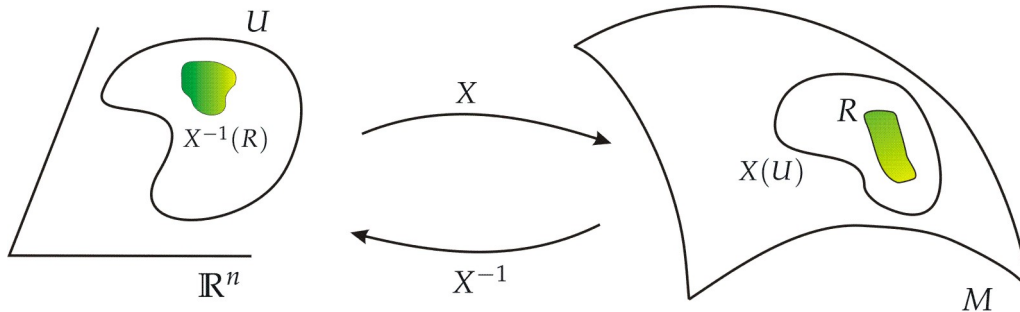


Figura 1.1: Ilustração da definição de volume

## 1.2 Variedades Completas

Nesta seção recordaremos alguns fatos sobre variedades Riemannianas completas. Para isto, dados  $p, q \in M$ , definimos a *distância* de  $p$  a  $q$  em  $M$ , que denotamos por  $d(p, q)$ , como sendo o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes ligando  $p$  a  $q$ . Como  $M$  é conexa, esta definição está bem posta.

Um primeiro fato sobre a função distância é que ela torna  $M$  um espaço métrico.

**Lema 1.1.** *Com a distância  $d$  definida acima, toda variedade Riemanniana conexa é um espaço métrico, tal que topologia induzida por  $d$  em  $M$  coincide com a topologia inicial de  $M$ .*

*Demonstração.* Veja [8], página 94. □

Seja  $\alpha : I = [a, b] \rightarrow M$  uma curva suave em  $M$ . Dizemos que  $\alpha$  é uma *geodésica*, se

$$\nabla_{\alpha'(t)} \alpha'(t) = 0.$$

Isto significa que  $\alpha$  tem aceleração nula na variedade. Um fato básico é que geodésicas minimizam comprimento localmente, veja por exemplo [5].

Dizemos que uma geodésica é *maximal* quando não é possível estendê-la a um intervalo  $\tilde{I}$  que contenha  $I$  propriamente.

Definimos o *comprimento* de  $\alpha$  em  $M$ , que denotamos por  $l(\alpha)$ , pela expressão

$$l(\alpha) = \int_I |\alpha'(t)| dt,$$

onde  $|\alpha'(t)| = \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}$ .

Uma geodésica  $\alpha : I \rightarrow M$  é dita *minimizante* se o seu comprimento for menor ou igual que o comprimento de qualquer outra curva  $\tilde{\alpha}$ , diferenciável por partes, ligando  $\alpha(a)$  e  $\alpha(b)$ , ou seja, se  $l(\alpha) \leq l(\tilde{\alpha})$ . Da definição de distância, segue que  $\alpha$  é minimizante se, e somente se,  $l(\alpha)$  é igual à distância entre seus extremos.

Dizemos que uma variedade Riemanniana é *geodesicamente completa* se toda geodésica maximal está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . O teorema que enunciamos a seguir nos mostra um critério simples para determinar quando uma variedade Riemanniana é geodesicamente completa, e devido a este resultado diremos que  $M$  é, simplesmente, *completa*.

**Teorema 1.2** (Hopf-Rinow). *Uma variedade Riemanniana é geodesicamente completa se, e somente se, é completa como espaço métrico.*

*Demonstração.* Veja [8], página 108. □

Uma consequência importante deste teorema é dada no seguinte corolário.

**Corolário 1.1.**  *$M$  é completa se, e somente se, dois pontos quaisquer em  $M$  podem ser ligados por uma geodésica minimizante.*

Vejamos alguns exemplos que ilustram o conceito de completude.

**Exemplo 1.4.** O espaço  $\mathbb{R}^n$  munido da métrica Euclidiana  $ds_0^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$  é uma variedade Riemanniana completa, mas  $\mathbb{R}^n \setminus F$ , onde  $F \neq \emptyset$  é fechado, não é completa.

**Exemplo 1.5.** O semiplano  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_n > 0\}$ , munido da métrica Euclidiana não é uma variedade Riemanniana completa. Contudo, munido da métrica hiperbólica  $ds^2(p) = \frac{1}{x_n^2} ds_0^2$ ,  $p = (x_1, \dots, x_n)$ , é uma variedade completa.



Para finalizar esta seção trazemos o conceito de cut-locus de um ponto  $p \in M$  em uma variedade Riemanniana completa, onde usamos como referência principal o livro [1].

Sabemos, do teorema de Hopf-Rinow, que a aplicação exponencial  $\exp_p(rv)$  com  $|v| = 1$  está definida para todo  $r \in \mathbb{R}$  e  $v \in S^{n-1}(1) \subset T_pM$ . Além disso, a aplicação exponencial é diferenciável, como pode ser visto em [5], página 73.

Agora, consideremos a aplicação  $\psi : v \in S^{n-1}(1) \mapsto \mu(v)$  de modo que  $\mu(v) \in ]0, \infty]$  seja a cota superior do conjunto dos  $r$ 's, tal que a geodésica  $\gamma : s \in [0, r] \rightarrow C(s)$ , onde  $C(s) = \exp_p(sv)$ , é minimizante. É claro que, para  $0 < r \leq \mu(v)$ , a geodésica  $\gamma$  é minimizante.

Definimos o *cut-locus* de  $p$ , que denotamos por  $C_m(p)$ , como o conjunto dos pontos  $\exp_p[\mu(v)v]$ , quando  $v$  varia em  $S^{n-1}(1)$ .

É possível mostrar que  $\mu(v)$  é uma função contínua em  $S^{n-1}(1)$  com valor em  $]0, \infty]$ , veja por exemplo, em [2] seção 11.6. Assim, o cut-locus é um subconjunto fechado de medida nula em  $M$ , veja em [7], página 137. Então, quando  $M$  é completa,  $\exp_p$ , que é definida e diferenciável em todo  $\mathbb{R}^n$ , é um difeomorfismo de  $\mathcal{E}_p$  em  $\Omega = \exp_p(\mathcal{E}_p)$ , onde

$$\mathcal{E}_p = \{rv \in \mathbb{R}^n; 0 \leq r < \mu(v), v \in S^{n-1}(1)\}.$$

Por vezes, escrevemos  $M$  como a união disjunta dos conjuntos  $\Omega$  e  $C_m(p)$ .

### 1.3 Operadores em Variedades

Nesta seção definiremos os operadores Laplaciano e Hessiano em variedades Riemannianas, os quais serão usados nos capítulos subsequentes. Iniciamos estendendo alguns conceitos clássicos do cálculo em várias variáveis para o contexto de variedades Riemannianas, utilizando a métrica Riemanniana e a conexão de Levi-Civita.

Dada uma função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos o *gradiente* de  $f$ , o que denotamos por  $\nabla f$ , como o (único) campo vetorial em  $M$  que satisfaz

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para qualquer campo vetorial  $X$  de  $M$ .

Outro conceito importante é o de divergente de um campo. Dado um campo  $X$  em  $M$ ,

definimos o *divergente* de  $X$ , que será denotado por  $\operatorname{div} X$ , como sendo a aplicação

$$\operatorname{div} : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$$

dada por

$$p \mapsto \operatorname{div} X(p) := \operatorname{tr}(Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)),$$

onde  $\mathcal{D}(M)$  denota o anel das funções diferenciáveis em  $M$ .

Agora estamos aptos à apresentar os principais conceitos desta seção.

Definimos o *Laplaciano* de  $f$  como a aplicação

$$\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad \Delta f(p) = \operatorname{div}(\nabla f)(p).$$

O *Hessiano* de  $f$ , que denotamos por  $\operatorname{Hess} f$ , é a forma bilinear simétrica

$$\operatorname{Hess} f : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$$

dada por

$$\operatorname{Hess} f(p)(X, Y) = (XYf)(p) - \nabla_X Y(f)(p).$$

De agora em diante, em geral omitiremos o ponto  $p$  explicitando, apenas, quando houver perigo de confusão.

Podemos também definir de forma equivalente, o Hessiano de  $f$  a partir da expressão acima. Com efeito,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} f(X, Y) &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) \\ &= X \langle Y, \nabla f \rangle - \langle \nabla_X Y, \nabla f \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, \nabla f \rangle + \langle Y, \nabla_X \nabla f \rangle - \langle \nabla_X Y, \nabla f \rangle \\ &= \langle Y, \nabla_X \nabla f \rangle. \end{aligned} \tag{1.2}$$

A fim de apresentarmos os operadores acima de forma mais palpável, introduziremos o conceito de um referencial local.

Inicialmente, vamos fixar um sistema de coordenadas locais dado por uma parametrização  $X : U \rightarrow M$  numa vizinhança de  $p \in M$ . Também numa vizinhança de  $p$  iremos considerar

um referencial ortonormal geodésico  $\{E_i\}_{i=1}^n$ , ou seja, uma família  $\{E_i\}$  de campos de vetores ortonormais em cada ponto de uma vizinhança  $V$  de  $p$ , tal que, em  $p$ ,  $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ .

Ao longo desta dissertação faremos uso alternadamente dos campos  $X_1, \dots, X_n$  e  $E_1, \dots, E_n$  em uma vizinhança de um ponto  $p \in M$ , conforme for mais conveniente para os cálculos. Em alguns casos usaremos os dois referenciais e, por isso, no que segue estabelecemos como é feita a mudança de um para o outro.

Fixado  $p \in M$ , temos que as coleções  $\{X_i\}$  e  $\{E_i\}$  são bases para  $T_p M$ . Daí, podemos expressar uma em termos da outra,

$$E_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \quad \text{e} \quad X_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} E_j. \quad (1.3)$$

Escrevendo  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{n \times n}$ , afirmamos que

$$A = B^{-1} \quad \text{e} \quad G^{-1} = A^t A.$$

Observemos que isto é equivalente a mostrar que

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \text{e} \quad g^{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}. \quad (1.4)$$

Ora, da expressão (1.3) temos que, para quaisquer  $i$  e  $j$ ,

$$\begin{aligned} E_i &= \sum_{k=1}^n a_{ik} X_k \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \left( \sum_{j=1}^n b_{kj} E_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) E_j. \end{aligned}$$

Pela unicidade da combinação linear, se  $i = j$ , então  $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = 1$ , e caso contrário  $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = 0$ , verificando assim a primeira identidade em (1.4).

Para verificarmos a segunda identidade de (1.4), inicialmente observamos que esta é equivalente a  $G = BB^t$ , simplesmente tomando a inversa. Dessa forma, para quaisquer  $i$  e

$j$ , temos

$$\begin{aligned}
 g_{ij} &= \langle X_i, X_j \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{k=1}^n b_{ik} E_k, \sum_{l=1}^n b_{jl} E_l \right\rangle \\
 &= \sum_{k,l=1}^n b_{ik} b_{jl} \langle E_k, E_l \rangle \\
 &= \sum_{k=1}^n b_{ik} b_{jk},
 \end{aligned}$$

que é a  $(i, j)$ -ésima entrada em  $BB^t$ , provando assim a segunda parte de (1.4).

Veamos agora como ficam os nossos operadores no referencial ortonormal geodésico  $\{E_i\}_{i=1}^n$ . Afirmamos que o gradiente de  $f$  é dado pela expressão

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i.$$

Com efeito, escrevendo  $\nabla f = \sum_{i=1}^n b_i E_i$  e tomando o produto interno com  $E_j$  temos

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla f, E_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n b_i E_i, E_j \right\rangle \\
 &= b_j.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a definição de gradiente,

$$\langle \nabla f, E_j \rangle = E_j(f),$$

ou seja,  $b_j = E_j(f)$ , como queríamos demonstrar.

Como consequência direta deste fato temos que

$$|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n E_i^2(f). \quad (1.5)$$

Usaremos este fato na demonstração da fórmula de Weitzenböck, no próximo capítulo.

Agora, escrevendo  $X = \sum_{i=1}^n a_i E_i$ , afirmamos que  $\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n E_i(a_i)$ . De fato, como  $\operatorname{div} X = \operatorname{tr}(Y \rightarrow \nabla_Y X)$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} X)(p) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{E_i} \left( \sum_{j=1}^n a_j E_j \right), E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n \nabla_{E_i} a_j E_j, E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n (a_j \nabla_{E_i} E_j + E_i(a_j) E_j), E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n E_i(a_j) E_j, E_i \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n E_i(a_j) \langle E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n E_i(a_i),
\end{aligned}$$

onde na quinta igualdade usamos o fato que  $\{E_i\}_{i=1}^n$  é um referencial geodésico em  $p$ .

Vamos obter agora as expressões dos operadores estudados anteriormente em coordenadas locais. Para isso, vamos simplesmente utilizar as expressões do referencial  $\{E_i\}_{i=1}^n$  em termos dos campos coordenados, conforme vimos em (1.3). Como antes, iniciaremos pelo gradiente. Afirmamos que

$$\nabla f = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n g^{kj} X_j(f) \right) X_k. \tag{1.6}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n a_{ij} a_{ik} X_j(f) X_k \\
&= \sum_{j,k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} \right) X_j(f) X_k \\
&= \sum_{j,k=1}^n g^{jk} X_j(f) X_k \\
&= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n g^{kj} X_j(f) \right) X_k.
\end{aligned}$$

De maneira parecida encontramos a expressão do divergente em coordenadas. Para isto utilizaremos os *símbolos de Christoffel*, que são as funções  $\Gamma_{ij}^k$  determinadas pela igualdade

$$\nabla_{X_j} X_i = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k. \quad (1.7)$$

Aqui vale observar que num sistema de coordenadas, o fato de ser  $\nabla$  simétrica implica que  $\forall i, j = 1, \dots, n$

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad (1.8)$$

e isto é equivalente ao fato que  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

Também vamos precisar escrever o campo  $X$  na base coordenada, digamos  $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$ .

Assim,

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n x_i X_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left( \sum_{j=1}^n b_{ij} E_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n x_i b_{ij} \right) E_j \\ &= \sum_{j=1}^n a_j E_j, \end{aligned}$$

onde,  $a_j = \sum_{i=1}^n x_i b_{ij}$ .

Feito isto, podemos encontrar a expressão para o divergente de  $X$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{j=1}^n E_j(a_j) = \sum_{j=1}^n E_j \left( \sum_{i=1}^n x_i b_{ij} \right) = \sum_{i,j=1}^n E_j(x_i b_{ij}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n E_j(x_i) b_{ij} + \sum_{i,j=1}^n E_j(b_{ij}) x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n b_{ij} E_j(x_i) \right) + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n E_j(b_{ij}) \right) x_i \\ &= \sum_{i=1}^n X_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n E_j(b_{ij}) \right) x_i. \end{aligned}$$

Para concluir afirmamos que

$$\sum_{j=1}^n E_j(b_{ij}) = \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j.$$

Com efeito, em  $p$  temos

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_j} X_i &= \nabla_{(\sum_{k=1}^n b_{jk} E_k)} \left( \sum_{l=1}^n b_{il} E_l \right) \\
&= \sum_{k=1}^n b_{jk} \sum_{l=1}^n \nabla_{E_k} (b_{il} E_l) \\
&= \sum_{k=1}^n b_{jk} \sum_{l=1}^n (b_{il} \nabla_{E_k} E_l + E_k(b_{il}) E_l) \\
&= \sum_{k,l=1}^n b_{jk} E_k(b_{il}) E_l \\
&= \sum_{k,l=1}^n b_{jk} E_k(b_{il}) \left( \sum_{m=1}^n a_{lm} X_m \right) \\
&= \sum_{m=1}^n \left( \sum_{k,l=1}^n a_{lm} b_{jk} E_k(b_{il}) \right) X_m.
\end{aligned}$$

Comparando a expressão acima com a expressão (1.7) dos símbolos de Christoffel, obtemos que

$$\Gamma_{ij}^m = \sum_{k,l=1}^n a_{lm} b_{jk} E_k(b_{il}).$$

Logo,

$$\Gamma_{ij}^j = \sum_{k,l=1}^n a_{lj} b_{jk} E_k(b_{il}).$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k,l=1}^n a_{lj} b_{jk} E_k(b_{il}) \right) \\
&= \sum_{k,l=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{lj} b_{jk} \right) E_k(b_{il}) \\
&= \sum_{k,l=1}^n \delta_{lk} E_k(b_{il}) \\
&= \sum_{j=1}^n E_j(b_{ij}),
\end{aligned}$$



como queríamos.

Obtemos, assim, a expressão do divergente em coordenadas, dada por

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n X_i(x_i) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^j x_i. \quad (1.9)$$

A seguir, demonstramos dois fatos que serão úteis para chegar à expressão do Laplaciano em coordenadas locais. Primeiramente, afirmamos que

$$X_k(g) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g X_k(g_{ij}),$$

onde  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  é a função determinante da métrica, definida por  $g(p) = \det(G(p))$  que é sempre uma função positiva.

De fato, pela regra da cadeia temos que

$$X_k(g) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} X_k(g_{ij}). \quad (1.10)$$

Agora recordemos que

$$G^{-1} = \left[ \frac{(-1)^{i+j}}{g} (G_{ij}) \right]_{n \times n},$$

onde  $G_{ij}$  é a matriz dos cofatores, ou seja,  $G_{ij}$  é o determinante da matriz  $(n-1) \times (n-1)$  obtida eliminando-se a  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna da matriz  $G$ . Por outro lado, sabemos da *fórmula de Laplace*, veja [9], que

$$g := \det G = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} g_{ij} G_{ij},$$

para qualquer  $j = 1, \dots, n$ . Portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = (-1)^{i+j} G_{ij},$$

para quaisquer  $i$  e  $j$ . Assim,

$$G^{-1} = \left[ \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \right]_{n \times n},$$

ou seja,

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}.$$

Daí, a expressão (1.10) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$X_k(g) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g X_k(g_{ij}),$$

como queríamos.

Desta última conclusão, temos que

$$\sum_{i,j=1}^n g^{ij} X_k(g_{ij}) = \frac{1}{g} X_k(g) = X_k(\log(g)). \quad (1.11)$$

Agora, recordemos que a expressão dos símbolos de Christoffel em termos da métrica é dada por

$$\Gamma_{ij}^j = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n g^{hj} \{ X_j(g_{ih}) + X_i(g_{hj}) - X_h(g_{ji}) \}. \quad (1.12)$$

Com o auxílio desta expressão verificaremos o segundo fato, ou seja,

$$\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j = \frac{1}{2} X_i(\log(g)).$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n g^{hj} \{X_j(g_{ih}) + X_i(g_{hj}) - X_h(g_{ji})\} \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_j(g_{ih}) \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_i(g_{hj}) \right) - \frac{1}{2} \left( \sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_h(g_{ji}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_j(g_{ih}) \right) - \left( \sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_h(g_{ij}) \right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_i(g_{hj}) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \left( \sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_h(g_{ij}) \right) - \left( \sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_h(g_{ij}) \right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^n g^{hj} X_i(g_{hj}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{h,j=1}^n g^{hj} X_i(g_{hj}) \\
&= \frac{1}{2} X_i(\log(g)),
\end{aligned}$$

como havíamos afirmado.

Retornando à expressão do divergente em coordenadas, vista em (1.9), e usando o fato acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n X_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j \right) x_i \\
&= \sum_{i=1}^n X_i(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i(\log(g)) x_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left[ X_i(x_i) + \frac{1}{2} X_i(\log(g)) x_i \right]. \tag{1.13}
\end{aligned}$$

Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{g}} X_i(\sqrt{g}x_i) &= \frac{1}{\sqrt{g}} [X_i(\sqrt{g})x_i + X_i(x_i)\sqrt{g}] \\
&= X_i(x_i) + \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{1}{2} X_i(g) g^{-\frac{1}{2}} \right) x_i \\
&= X_i(x_i) + \frac{1}{2} \left( \frac{X_i(g)}{g} \right) x_i \\
&= X_i(x_i) + \frac{1}{2} X_i(\log(g)) x_i,
\end{aligned}$$

e a expressão (1.13) para o divergente do campo  $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$  pode ser reescrita como

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}} X_i(\sqrt{g}x_i).$$

Pela definição do Laplaciano, temos que  $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$ . Recordemos da expressão (1.6) que

$$\nabla f = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n g^{kj} X_j(f) \right) X_k.$$

Assim, sendo  $f_i = \sum_{j=1}^n g^{kj} X_j(f)$ , temos

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \operatorname{div} \sum_{i=1}^n f_i X_i \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}} X_i(\sqrt{g}f_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}} X_i \left[ \sqrt{g} \left( \sum_{j=1}^n g^{ij} X_j(f) \right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n X_i \left( \sqrt{g} g^{ij} X_j(f) \right),
\end{aligned}$$

que é a expressão do Laplaciano em coordenadas locais.

## 1.4 Curvaturas

Apresentaremos nesta seção o conceito do tensor curvatura em uma variedade Riemanniana, o qual se faz necessário para as definições de curvatura de Ricci e curvatura escalar.

Definimos o *tensor curvatura*, ou simplesmente a *curvatura*,  $R$  de  $M$  como a aplicação

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

dada por

$$R(X, Y, Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Como é usual, algumas vezes denotaremos  $R(X, Y)Z$  por  $R(X, Y, Z)$ .

Considerando a base coordenada  $\{X_i\}_{i=1}^n$  de uma parametrização  $X : U \rightarrow M$  em torno de um ponto  $p \in M$ , podemos reescrever a definição acima da seguinte maneira

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k,$$

onde usamos o fato que  $[X_i, X_j] = 0$ . Isto significa que a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante.

Ainda neste sistema, ponhamos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s X_s, \quad (1.14)$$

ou seja,  $R_{ijk}^s$  são como as *componentes* do tensor curvatura  $R$  no sistema de coordenadas  $(X_1, \dots, X_n)$ .

Agora, consideremos os campos  $X, Y$  e  $Z$  de modo que

$$X = \sum_{i=1}^n u_i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^n v_j X_j, \quad \text{e} \quad Z = \sum_{k=1}^n w_k X_k.$$

Como  $R$  é trilinear, segue-se que

$$R(X, Y, Z) = \sum_{i,j,k,s=1}^n R_{ijk}^s u_i v_j w_k X_s.$$

Vamos obter a expressão de  $R_{ijk}^s$  em termos dos símbolos de Christoffel. Para isto, consideremos a definição de curvatura em coordenadas e a igualdade  $\nabla_{X_j} X_i = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$ , vista em (1.7).

Assim,

$$\begin{aligned}
R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k \\
&= \nabla_{X_j} \left( \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l X_l \right) - \nabla_{X_i} \left( \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l X_l \right) \\
&= \sum_{l=1}^n \{ \Gamma_{ik}^l \nabla_{X_j} X_l + X_j(\Gamma_{ik}^l) X_l \} - \sum_{l=1}^n \{ \Gamma_{jk}^l \nabla_{X_i} X_l + X_i(\Gamma_{jk}^l) X_l \} \\
&= \sum_{s=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + X_j(\Gamma_{ik}^s) - X_i(\Gamma_{jk}^s) \right\} X_s.
\end{aligned}$$

Comparando a expressão acima com a igualdade vista em (1.14), obtemos

$$R_{ijk}^s = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + X_j(\Gamma_{ik}^s) - X_i(\Gamma_{jk}^s). \quad (1.15)$$

Feito isto, consideremos a expressão  $R(X_i, X_j)X_k$  e tomemos o produto interno dela com  $X_m$ . Daí,

$$R_{ijkm} := \langle R(X_i, X_j)X_k, X_m \rangle = \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s g_{sm}. \quad (1.16)$$

Definida a curvatura, podemos introduzir a noção de curvatura seccional. Para isto, consideremos  $p \in M$  e um subespaço bidimensional  $\sigma \subset T_p M$  gerado pelos vetores linearmente independentes  $X, Y \in T_p M$ . Definimos a *curvatura seccional* de  $\sigma$  em  $p$  pela expressão

$$K(X, Y) := K(\sigma) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}.$$

Não é difícil de se verificar que esta definição não depende das escolhas dos geradores  $X$  e  $Y$ , veja [5], página 104.

As variedades completas que possuem curvatura seccional constante são chamadas formas espaciais. No teorema principal desta dissertação, trabalharemos com bolas geodésicas neste

tipo de variedade.

A seguir apresentamos o teorema de classificação de Cartan, o qual afirma que essencialmente as únicas variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas, com curvatura seccional constante são o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , a esfera unitária  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  e o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  de dimensão  $n$ .

**Teorema 1.3** (Cartan). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante  $K$ . Então  $M$  é isométrica a:*

- (a)  $\mathbb{H}^n$ , se  $K = -1$ ,
- (b)  $\mathbb{R}^n$ , se  $K = 0$ ,
- (c)  $S^n$ , se  $K = 1$ .

*Demonstração.* Veja [5], página 181. □

O *tensor de Ricci*, que denotaremos por  $\text{Ric}$ , é definido como sendo o traço do tensor  $R$ . Mais especificamente, se  $\{E_i\}_{i=1}^n$  é uma base ortonormal de  $T_p M$ , então

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y) &= \text{tr}(Z \mapsto R(X, Z)Y) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle. \end{aligned}$$

Exprimindo o que acabamos de fazer em um sistema de coordenadas, temos que os coeficientes  $R_{ik} := \text{Ric}(X_i, X_k)$  do tensor de Ricci nesta base satisfazem as seguintes igualdades

$$R_{ik} = \sum_{j,s=1}^n R_{ijks} g^{js} = \sum_{j=1}^n R_{ijk}^j.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
R_{ik} = \text{Ric}(X_i, X_k) &= \sum_{m=1}^n \langle R(X_i, E_m)X_k, E_m \rangle \\
&= \sum_{m=1}^n \langle R(X_i, \sum_{j=1}^n a_{mj}X_j)X_k, \sum_{s=1}^n a_{ms}X_s \rangle \\
&= \sum_{m,j,s=1}^n \langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle a_{mj}a_{ms} \\
&= \sum_{j,s=1}^n R_{ijks} \sum_{m=1}^n a_{mj}a_{ms} \\
&= \sum_{j,s=1}^n R_{ijks} g^{js} \\
&= \sum_{j,s,p=1}^n R_{ijk}^p g_{ps} g^{js} \\
&= \sum_{j,p=1}^n R_{ijk}^p \delta_{pj} \\
&= \sum_{j=1}^n R_{ijk}^j
\end{aligned}$$

como queríamos, onde na sétima igualdade usamos a expressão (1.16).

Para fins de aplicação futura vamos recordar a definição de derivada covariante para tensores covariantes. Sejam  $T$  um tensor covariante de ordem  $r$  e  $Y_i, Z \in \mathcal{X}(M)$  campos vetoriais em  $M$ , com  $i = 1, \dots, r$ . Definimos a *derivada covariante*  $\nabla T$  de  $T$  como o tensor covariante de ordem  $(r+1)$  dado por

$$\begin{aligned}
\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) &= Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) \\
&\quad - \dots - T(Y_1, \dots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r).
\end{aligned}$$

**Exemplo 1.6.** Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Podemos considerar  $f$  como sendo um tensor covariante de ordem 0, e denotaremos este fato por  $\nabla^0 f$ . Mais geralmente,  $\nabla^{k+1} f$  é um tensor



covariante de ordem  $k + 1$ , definido indutivamente da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \nabla^{k+1}f(X_1, \dots, X_k, Y) &:= Y(\nabla^k f(X_1, \dots, X_k)) - \nabla^k f(\nabla_Y X_1, \dots, X_k) \\ &\quad - \dots - \nabla^k f(X_1, \dots, X_{k-1}, \nabla_Y X_k). \end{aligned}$$

Assim, dados  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , temos que  $\nabla^1 f(X)$  e  $\nabla^2 f(X, Y)$  coincidem com o gradiente de  $f$  e com  $\text{Hess}f$ , respectivamente. Com efeito,

$$\nabla^1 f(X) = X(\nabla^0 f) = X(f)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) &= Y(\nabla f(X)) - \nabla f(\nabla_Y X) \\ &= YX(f) - \nabla_Y X(f). \end{aligned}$$

**Observação 1.1.** Se a conexão é simétrica, então o Hessiano também o é. De fato,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) &:= YX(f) - \nabla_Y X(f) \\ &= XY(f) - \nabla_X Y(f) \\ &=: \nabla^2 f(Y, X) \\ &= \text{Hess}f(X, Y). \end{aligned}$$

Em um sistema de coordenadas locais em  $p \in M$ , sabemos que

$$f_i := df_p(X_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \langle \nabla f, X_i \rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
f_{kj} &= \nabla^2 f(X_k, X_j) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla f(X_k)) - \nabla f(\nabla_{X_j} X_k) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) - \nabla f \left( \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial f}{\partial x_l}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

De maneira inteiramente análoga, poderíamos calcular as componentes  $f_{kji}$  de um tensor covariante de ordem 3,  $\nabla^3 f$ , cuja expressão é dada por:

$$f_{kji} = \frac{\partial f_{kj}}{\partial x_i} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l f_{lj} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l f_{lk}. \tag{1.18}$$

Agora, provaremos dois fatos importantes que usaremos na demonstração da fórmula de Weitzenböck, no capítulo 2.

**Observação 1.2.** Considerando um sistema de coordenadas normais em torno de  $p \in M$ , ou seja, uma parametrização  $E : U \rightarrow M$  tal que  $\left\{ E_i := \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$  é uma base ortonormal em  $p$  e  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ , temos que  $f_{ijj} = f_{jij}$ . Ora,

$$\begin{aligned}
f_{ijj} - f_{jij} &= \nabla^3 f(E_i, E_j, E_j) - \nabla^3 f(E_j, E_i, E_j) \\
&= E_j \nabla^2 f(E_i, E_j) - \nabla^2 f(\nabla_{E_j} E_i, E_j) - \nabla^2 f(E_i, \nabla_{E_j} E_j) \\
&\quad - E_j \nabla^2 f(E_j, E_i) + \nabla^2 f(\nabla_{E_j} E_j, E_i) + \nabla^2 f(E_j, \nabla_{E_j} E_i) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

em  $p$ . Observamos ainda que o sistema de coordenadas normais pode ser considerado como sendo um referencial ortonormal geodésico num ponto fixo  $p \in M$ , ou seja, os cálculos feitos com o sistema de coordenadas normais valem também para um referencial ortonormal geodésico.

**Observação 1.3.** Considerando a expressão do gradiente, dada por  $\nabla f = \sum_{i=1}^n f_i E_i$ , e usando o fato que

$f_i = \nabla f(E_i)$ , afirmamos que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n f_{ii}. \quad (1.20)$$

Com efeito, usando as definições do Laplaciano e da derivada covariante, obtemos em  $p$  que

$$\begin{aligned} \Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) &= \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^n f_i E_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n E_i(f_i) \\ &= \sum_{i=1}^n E_i(\nabla f(E_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n [\nabla^2 f(E_i, E_i) + \nabla f(\nabla_{E_i} E_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n [\nabla^2 f(E_i, E_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n f_{ii}. \end{aligned}$$

Finalizaremos esta seção provando a Identidade de Ricci que, assim como os dois fatos anteriores, será utilizada na demonstração da fórmula de Weitzenböck.

**Lema 1.2.** (Identidade de Ricci) Sejam  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $E : U \rightarrow M$  um sistema de coordenadas normais em torno de  $p$ . Usando as notações acima temos que, para quaisquer  $1 \leq i, j, k \leq n$ , vale a igualdade:

$$f_{kji} = f_{kij} + \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s f_s. \quad (1.21)$$

*Demonstração.* Vimos em (1.17) e (1.18) que as expressões de  $f_{kj}$  e  $f_{kji}$  são dadas por:

$$f_{kj} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial f}{\partial x_l} \quad \text{e} \quad f_{kji} = \frac{\partial f_{kj}}{\partial x_i} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l f_{lj} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l f_{lk}.$$

Usando a simetria dos símbolos de Christoffel, segue que

$$f_{kji} - f_{kij} = \frac{\partial f_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_j} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l f_{lj} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l f_{li}. \quad (1.22)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial f_{kj}}{\partial x_i} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} - \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^l) \frac{\partial f}{\partial x_l} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l}.$$

Daí,

$$\frac{\partial f_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_j} = - \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^l) \frac{\partial f}{\partial x_l} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^l) \frac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l}.$$

Substituindo a expressão acima em (1.22), obtemos

$$\begin{aligned} f_{kji} - f_{kij} &= - \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^l) \frac{\partial f}{\partial x_l} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^l) \frac{\partial f}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_l} \\ &\quad - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_j} - \sum_{s=1}^n \Gamma_{jl}^s \frac{\partial f}{\partial x_s} \right) + \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} - \sum_{s=1}^n \Gamma_{il}^s \frac{\partial f}{\partial x_s} \right). \end{aligned}$$

Novamente pela simetria dos índices inferiores dos símbolos de Christoffel após alguns cancelamentos e usando (1.15), vemos que

$$\begin{aligned} f_{kji} - f_{kij} &= \sum_{s=1}^n \left( \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + X_j(\Gamma_{ik}^s) - X_i(\Gamma_{jk}^s) \right) f_s \\ &= \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s f_s, \end{aligned}$$

o que completa a prova deste lema. □

**Observação 1.4.** Observemos que, para este resultado, a função  $f$  precisou apenas ser  $C^3$ .

NESTE CAPÍTULO demonstramos resultados importantes que nos auxiliarão na prova dos teoremas de comparação, que estudaremos no próximo capítulo. Os fatos aqui demonstrados tiveram [6] como principal referência.

## 2.1 Fórmula de Weitzenböck

Mostramos nesta seção a fórmula de Weitzenböck, uma identidade básica utilizada em vários contextos e que nos será útil na demonstração do teorema de comparação do Laplaciano.

**Proposição 2.1** (Fórmula de Weitzenböck). *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta\left(|\nabla f|^2\right) = |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f),$$

onde  $\text{Hess } f$  denota ao Hessiano de  $f$ .

*Demonstração.* Consideremos um sistema de coordenadas normais  $E : U \rightarrow M$ ,  $\left\{E_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ , em torno de  $p \in M$ . Como usual, poremos

$$f_i = E_i(f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \langle \nabla f, E_i \rangle.$$

Recordemos de (1.5) que a norma do gradiente de  $f$  nesse sistema de coordenadas é dada por

$$|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2.$$

Derivando a expressão acima em relação a  $j$ , obtemos

$$(|\nabla f|^2)_j = \left( \sum_{i=1}^n f_i^2 \right)_j = 2 \sum_{i=1}^n f_i f_{ij},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}(|\nabla f|^2)_j = \sum_{i=1}^n f_i f_{ij}.$$

Derivando, novamente, a expressão acima em relação a  $j$ , temos que

$$\frac{1}{2}(|\nabla f|^2)_{jj} = \sum_{i=1}^n (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}).$$

Daí, somando em  $j$  e usando o fato que  $\Delta f = \sum_{j=1}^n f_{jj}$ , visto em (1.20), para a função  $|\nabla f|^2$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Visto que o Hessiano de uma função é um 2-tensor covariante simétrico, segue que  $f_{ij} = f_{ji}$ , como vimos em (1.19). Este fato e a identidade de Ricci, vista em (1.21), nos mostram que

$$f_{ijj} = f_{jij} = f_{jji} + \sum_{s=1}^n R_{jij}^s f_s.$$

Substituindo esta última igualdade em (2.1), vemos que

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = \sum_{i,j,s=1}^n [f_{ij}^2 + f_i (f_{jji} + R_{jij}^s f_s)].$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) &= \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^n f_i f_{jji} + \sum_{i,j,s=1}^n R_{jij}^s f_s f_i \\
&= |\text{Hess } f|^2 + \sum_{i=1}^n f_i (\Delta f)_i + \sum_{i,s=1}^n R_{si} f_s f_i \\
&= |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \sum_{i,s=1}^n \text{Ric}(E_s, E_i) f_s f_i \\
&= |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \text{Ric}\left(\sum_{s=1}^n f_s E_s, \sum_{i=1}^n f_i E_i\right) \\
&= |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f),
\end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração da fórmula de Weitzenböck. □

## 2.2 O Hessiano da Função Distância

O caráter local dos resultados desta seção nos permitem trabalhar num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  do espaço Euclidiano munido de uma métrica Riemanniana  $g$ , que em coordenadas polares  $(r, w)$  pode ser escrita como

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)dw^2, \quad (2.2)$$

onde  $dw^2$  representa a métrica canônica em  $S^{n-1}$ .

Nesse contexto, inicialmente, observamos que fixado  $p \in U$ , se  $r(x) := d(x, p)$  é a função distância induzida por  $g$ , então

$$\nabla r = \frac{\partial}{\partial r},$$

onde, para cada  $w$  fixado em  $T_p M$ ,  $\frac{\partial}{\partial r}$  é o vetor velocidade das geodésicas dadas pelas curvas  $r \mapsto \exp_p(rw)$ , com  $\exp$  denotando a aplicação exponencial.

De fato, por um lado, temos que

$$\left\langle \nabla r, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = \frac{\partial r}{\partial r} = 1. \quad (2.3)$$

via definição de gradiente. Por outro,

$$\left\langle \nabla r, \frac{\partial}{\partial w_i} \right\rangle = \frac{\partial r}{\partial w_i} = 0,$$

pois,  $r$  não depende dos  $w_i$ 's. Assim,  $\nabla r$  é um múltiplo de  $\frac{\partial}{\partial r}$  e, pela expressão (2.3), o múltiplo de  $\nabla r$  é igual a 1. Logo,

$$\nabla r = \frac{\partial}{\partial r},$$

como afirmamos.

A seguir, apresentamos o principal resultado dessa seção, o qual usaremos na demonstração do teorema de comparação do Laplaciano.

**Proposição 2.2.** *Seja  $\mathbb{R}^n$  munido com a métrica Riemanniana  $g$  em coordenadas polares, vista em (2.2). Então, para  $x = r\omega$ ,  $r > 0$ ,  $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ , para quaisquer  $X, Y$  ortogonais a  $\frac{\partial}{\partial r}$ , temos*

$$\text{Hess } r(X, Y) = \frac{f'(r)}{f(r)} g(X, Y).$$

Além disso,

$$\Delta r(x) = (n-1) \frac{f'(r)}{f(r)}. \quad (2.4)$$

*Demonstração.* Inicialmente consideremos  $X, Y$  campos de vetores tangentes ao conjunto de nível  $r = c$ , onde  $c$  é uma constante positiva. Daí, considerando a função  $r$  e usando a expressão (1.2), temos que

$$\text{Hess } r(X, Y) = \left\langle Y, \nabla_X \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle.$$

Sejam agora  $\frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial r}$  o campo normal à hipersfera  $r = c$  e  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$  os campos coordenados tangentes à tal hipersfera. Dessa forma, para quaisquer  $1 \leq i, j \leq n-1$ , temos



que

$$\begin{aligned}
\text{Hess } r \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \Gamma_{ni}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \left\langle \Gamma_{ni}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \Gamma_{ni}^k g_{kj}.
\end{aligned}$$

Agora, encontraremos uma expressão para  $\Gamma_{ni}^k$  nesse sistema de coordenadas. Para isto, usaremos a fórmula dos símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da métrica, vista em (1.12), e o fato que  $g_{ni} = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = 0, \forall i = 1, \dots, n-1$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ni}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left( \frac{\partial g_{ln}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_n} - \frac{\partial g_{ni}}{\partial x_l} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \frac{\partial g_{li}}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Por outro lado, como  $g(r, w) = dr^2 + f^2(r)dw^2$ , segue que

$$g^{kl} = f^{-2}(dw^2)^{kl} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g_{li}}{\partial r} = 2ff'(dw^2)_{li}, \quad k, l = 1, \dots, n-1.$$

Retornando para (2.5) com as expressões acima, temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ni}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n f^{-2}(dw^2)^{kl} 2ff'(dw^2)_{li} \\
&= \frac{f'}{f} \delta_{ik}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \text{Hess } r \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{f'}{f} \delta_{ik} g_{kj} \\ &= \frac{f'}{f} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, usando linearidade, se  $X$  e  $Y$  são ortogonais a  $\frac{\partial}{\partial r}$ , então

$$\text{Hess } r(X, Y) = \frac{f'}{f} g(X, Y).$$

Para mostrar a segunda parte da proposição, observemos que dada a aplicação bilinear  $\text{Hess } r : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $p \in M$  fixado, sabemos que existe uma aplicação linear

$$A : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

dada por

$$\langle AX, Y \rangle = \text{Hess } r(X, Y).$$

Ademais,  $\text{tr} A = \text{tr}(\text{Hess } r)$  e se  $A(X_i) = a^{ij} X_j$ , então

$$\text{Hess } r(X_i, X_k) = \langle A(X_i), X_k \rangle = \left\langle a^{ij} X_j, X_k \right\rangle = a^{ij} g_{jk},$$

ou seja,

$$a^{ij} = g^{jk} \text{Hess } r(X_i, X_k).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Delta r &= \text{tr}(\text{Hess } r) = \text{tr} A \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} g^{ik} \frac{f'}{f} g(X_i, X_k) \\ &= (n-1) \frac{f'}{f}. \end{aligned}$$

□

Um caso particular da proposição anterior, pode ser visto no seguinte resultado:

**Proposição 2.3.** *Seja  $r : M \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $r(x) = d(x, p)$ . Então,*

$$\text{Hess } r \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0.$$

Ademais, se  $X \perp \frac{\partial}{\partial r}$ , então

$$\text{Hess } r \left( \frac{\partial}{\partial r}, X \right) = 0.$$

*Demonstração.* Sabemos que, para cada  $w$  fixado em  $T_p M$ , as curvas  $r \mapsto \exp_p(rw)$  são geodésicas com vetor velocidade  $\frac{\partial}{\partial r}$ . Este fato e a definição do Hessiano para a função  $r$  nos dão

$$\begin{aligned} \text{Hess } r \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r \right) - \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} \right) r \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e isto demonstra a primeira parte da proposição.

Para provar a segunda parte, vemos que

$$\begin{aligned} \text{Hess } r \left( \frac{\partial}{\partial r}, X \right) &= \text{Hess } r \left( X, \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= X \left( \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) (r) \right) - \left( \nabla_X \frac{\partial}{\partial r} \right) (r) \\ &= - \left\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle, \end{aligned}$$

pois  $X \left( \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) (r) \right) = X(1) = 0$ .

Pela compatibilidade da métrica, segue que

$$\text{Hess } r \left( \frac{\partial}{\partial r}, X \right) = -\frac{1}{2} X \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle.$$

Por fim, como as geodésicas radiais são parametrizadas pelo comprimento de arco, concluímos que

$$\text{Hess } r \left( \frac{\partial}{\partial r}, X \right) = -\frac{1}{2}X(1) = 0,$$

como queríamos. □

Como aplicação das duas proposições que acabamos de mostrar, apresentamos o seguinte exemplo:

**Exemplo 2.1.** *Vamos calcular o Laplaciano da função distância  $r_k$ , considerando a métrica*

$$dr^2 + f_k^2(r)dw^2, \tag{2.6}$$

onde

$$f_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(r\sqrt{k}), & \text{se } k > 0 \\ r, & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(r\sqrt{-k}), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Diferenciando a função  $f_k(r)$  temos que

$$f_k'(r) = \begin{cases} \cos(r\sqrt{k}), & \text{se } k > 0 \\ 1, & \text{se } k = 0 \\ \cosh(r\sqrt{-k}), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Usando o resultado das duas proposições acima, vemos que

$$\begin{cases} k > 0 \Rightarrow \text{Hess } r_k = \sqrt{k} \cot(r\sqrt{k})g \\ k = 0 \Rightarrow \text{Hess } r = \frac{1}{r}g \\ k < 0 \Rightarrow \text{Hess } r_k = \sqrt{-k} \coth(r\sqrt{-k})g. \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{1}{n-1} \Delta r_k = \begin{cases} \sqrt{k} \cot(r\sqrt{k}), & \text{se } k > 0 \\ \frac{1}{r}, & \text{se } k = 0 \\ \sqrt{-k} \coth(r\sqrt{-k}), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

É possível mostrar que, usando a expressão (2.6) da métrica obtém-se, após alguns cálculos com a fórmula (1.15), que a curvatura seccional é constante e igual a  $k$ . Daí, pelo teorema de classificação de Cartan (teorema 1.3), se  $k > 0$  existe uma isometria entre esta métrica e a métrica da esfera  $S^n$  de raio  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  que tem curvatura seccional constante  $k$ . Se  $k < 0$ , a métrica (2.6) é isométrica à métrica do espaço hiperbólico  $H^n$ , também com curvatura seccional constante igual a  $k$  e, por fim, quando  $k = 0$ , obtemos a isometria entre a tal métrica e a métrica canônica do  $\mathbb{R}^n$  em coordenadas polares.

## CAPÍTULO 3

# TEOREMAS DE COMPARAÇÃO

NESTE CAPÍTULO faremos a demonstração do principal resultado desta dissertação. Para isto, usaremos alguns fatos vistos nos capítulos anteriores e o teorema de comparação do Laplaciano, que introduzimos a seguir.

### 3.1 Teorema de Comparação do Laplaciano

**Teorema 3.1** (Comparação do Laplaciano). *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana completa e  $r$  a distância geodésica ao ponto  $p \in M$ . Suponhamos que a curvatura de Ricci de  $M$  satisfaz*

$$\text{Ric}(M) \geq (n - 1)k$$

*e que a função  $r$  é diferenciável no ponto  $x$ . Então*

$$\Delta r(x) \leq \Delta r_k(\tilde{x}), \quad (3.1)$$

*onde  $r_k(\tilde{x}) = r(x) = r_0$  e  $r_0 < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$  se  $k > 0$ , com  $r_k$  sendo a distância geodésica a partir de um ponto fixado numa forma espacial de curvatura seccional constante  $k$  e  $r$  é a distância geodésica a partir de um ponto fixado numa variedade completa. A igualdade ocorre, se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando  $p$  e  $x$ , para planos contendo o vetor radial for constante e igual a  $k$ .*

*Demonstração.* Como

$$\text{Hess } r \left( \frac{\partial}{\partial r'}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Hess } r \left( \frac{\partial}{\partial r'}, X \right) = 0, \quad \forall X \perp \frac{\partial}{\partial r'}$$

concluimos que o Hessiano da função  $r$  possui um autovalor igual a zero. Este fato e a desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada às matrizes Hessiano de  $r$  e Identidade nos dão

$$|\text{Hess } r|^2 \geq \frac{(\Delta r)^2}{n-1}. \quad (3.2)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \left| \text{tr} \left( \text{Hess } r|_{\langle \frac{\partial}{\partial r'} \rangle^\perp} \cdot \text{Id}^T|_{\langle \frac{\partial}{\partial r'} \rangle^\perp} \right) \right| &= |\langle \text{Hess } r, \text{Id} \rangle| \\ &\leq |\text{Hess } r| \cdot |\text{Id}|, \end{aligned}$$

onde omitimos  $|_{\langle \frac{\partial}{\partial r'} \rangle^\perp}$ , por comodidade. Daí

$$\begin{aligned} |\text{Hess } r|^2 \cdot |\text{Id}|^2 &= |\text{Hess } r|^2 \cdot (n-1) \geq |\Delta r|^2 \\ &= (\Delta r)^2, \end{aligned}$$

pois

$$|\text{Id}|^2 = \text{tr}(\text{Id} \cdot \text{Id}^T) = n-1.$$

Logo,

$$|\text{Hess } r|^2 \geq \frac{(\Delta r)^2}{n-1}.$$

Do fato que  $|\nabla r| = 1$  e fazendo uso da fórmula de Weitzenböck para a função  $r$ , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= |\text{Hess } r|^2 + \langle \nabla r, \nabla(\Delta r) \rangle + \text{Ric}(\nabla r, \nabla r) \\ &= |\text{Hess } r|^2 + \left\langle \frac{\partial}{\partial r'}, \nabla(\Delta r) \right\rangle + \text{Ric}(\nabla r, \nabla r) \\ &= |\text{Hess } r|^2 + \frac{\partial}{\partial r} \Delta r + \text{Ric}(\nabla r, \nabla r) \\ &= |\text{Hess } r|^2 + (\Delta r)' + \text{Ric}(\nabla r, \nabla r). \end{aligned}$$

Agora, consideremos  $\varphi = \Delta r$ . Usando a hipótese sobre a curvatura de Ricci e a desigualdade (3.2) na expressão acima, vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= |\text{Hess } r|^2 + \varphi' + \text{Ric}(\nabla r, \nabla r) \\ &\geq \frac{\varphi^2}{n-1} + \varphi' + \text{Ric}(\nabla r, \nabla r) \\ &\geq \frac{\varphi^2}{n-1} + \varphi' + (n-1)k. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Vamos estudar o caso da igualdade na expressão anterior. Para isto, consideremos a aplicação

$$\psi = \Delta r_k = (n-1) \frac{f'_k}{f_k}$$

e vejamos que  $\psi$  satisfaz tal igualdade, onde  $r_k$  é a função distância sobre a variedade de curvatura seccional constante  $k$  e

$$f_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(r\sqrt{k}), & \text{se } k > 0 \\ r, & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(r\sqrt{-k}), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Ora, supondo  $k = 0$ , temos que

$$f_k = r \quad \text{e} \quad f'_k = 1.$$

Daí

$$\psi = \frac{(n-1)}{r} \quad \text{e} \quad \psi' = -\frac{(n-1)}{r^2}.$$

Logo,

$$\frac{\psi^2}{n-1} + \psi' + (n-1)k = \frac{(n-1)}{r^2} - \frac{(n-1)}{r^2} = 0.$$

Para o caso  $k > 0$ , vemos que

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(r\sqrt{k}) \quad \text{e} \quad f'_k = \cos(r\sqrt{k}).$$



Assim,

$$\psi = \sqrt{k}(n-1) \frac{\cos(r\sqrt{k})}{\sin(r\sqrt{k})} \quad \text{e} \quad \psi' = -\frac{k(n-1)}{\sin^2(r\sqrt{k})},$$

donde,

$$\begin{aligned} \frac{\psi^2}{n-1} + \psi' + (n-1)k &= k(n-1) \frac{\cos^2(r\sqrt{k})}{\sin^2(r\sqrt{k})} - \frac{k(n-1)}{\sin^2(r\sqrt{k})} + (n-1)k \\ &= \frac{k(n-1) - k(n-1)}{\sin^2(r\sqrt{k})} = 0. \end{aligned}$$

Finalmente supondo  $k < 0$ , obtemos que

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(r\sqrt{-k}) \quad \text{e} \quad f'_k = \cosh(r\sqrt{-k}).$$

Daí,

$$\psi = \sqrt{-k}(n-1) \frac{\cosh(r\sqrt{-k})}{\sinh(r\sqrt{-k})} \quad \text{e} \quad \psi' = -\frac{k(n-1)}{\sinh^2(r\sqrt{-k})}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\psi^2}{n-1} + \psi' + (n-1)k &= -k(n-1) \frac{\cosh^2(r\sqrt{-k})}{\sinh^2(r\sqrt{-k})} - \frac{k(n-1)}{\sinh^2(r\sqrt{-k})} + (n-1)k \\ &= \frac{k(n-1) - k(n-1)}{\sinh^2(r\sqrt{-k})} = 0, \end{aligned}$$

donde  $\psi$  satisfaz a igualdade em (3.3).

Como  $\psi$  é injetiva em seu domínio, é possível escolher uma função contínua  $\theta(t)$ , definida em  $[0, r_0)$ , de modo que

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \psi(\theta(t)) = \varphi(t). \end{cases}$$

Daí,

$$\frac{\varphi^2(t)}{n-1} + \varphi'(t) + (n-1)k \leq 0 = \frac{\psi^2(\theta(t))}{n-1} + \psi'(\theta(t)) + (n-1)k,$$

o que nos dá

$$\varphi'(t) \leq \psi'(\theta(t)).$$

Como

$$\varphi'(t) = \psi'(\theta(t)) \cdot \theta'(t),$$

segue que

$$\psi'(\theta(t)) \cdot \theta'(t) \leq \psi'(\theta(t)).$$

Visto que  $\psi'(t) < 0$ , temos  $\theta'(t) \geq 1$  e assim

$$\theta(t) \geq t.$$

Do fato de  $\psi$  ser decrescente, obtemos que

$$\varphi(t) = \psi(\theta(t)) \leq \psi(t).$$

Portanto,

$$\Delta r(x) \leq \Delta r_k(\tilde{x}).$$

Se a igualdade vale em (3.1), então todas as desigualdades na demonstração tornam-se igualdades. Em particular, a igualdade em (3.2) ocorre se, e somente se,  $\text{Hess } r|_{\langle \frac{\partial}{\partial r} \rangle^\perp} = \lambda \text{Id}$ ,  $\lambda$  uma constante. Como  $\text{Hess } r \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0$  então, neste caso, o termo  $a_{nn}$  da matriz Hessiano de  $r$  é nulo e, assim,

$$|\text{Hess } r|^2 = (n-1)\lambda^2.$$

Por outro lado, como  $\Delta r = \Delta r_k$ , ou seja,  $\varphi = \psi$ , temos que

$$|\text{Hess } r|^2 = \frac{\psi^2}{n-1}.$$

Logo,

$$\lambda = \frac{\psi}{n-1},$$

e isto nos dá que o Hessiano de  $r$  tem  $n-1$  autovalores iguais a  $\frac{\psi}{n-1}$ . Para finalizar a demonstração deste resultado, devemos verificar que

$$K \left( e_j, \frac{\partial}{\partial r} \right) \Big|_x = k,$$

$k$  uma constante. Para isto, provaremos uma afirmação que será útil na finalização da prova do teorema.

**Afirmção 3.1.** Consideremos a base  $\mathcal{B} = \left\{ e_1, \dots, e_{n-1}, \frac{\partial}{\partial r} \right\}$  de vetores ortonormais que diagonaliza o Hessiano de  $r$ . Afirmamos que

$$\nabla_{e_j} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\psi}{n-1} e_j.$$

Com efeito, vamos escrever  $\nabla_{e_j} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)$  na base  $\mathcal{B}$ . Assim,

$$\nabla_{e_j} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k + \alpha_n \frac{\partial}{\partial r}.$$

Como

$$\left\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = \alpha_n \quad \text{e} \quad \left\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = \frac{1}{2} e_j \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 0$$

segue-se que

$$\alpha_n = 0,$$

ou seja,

$$\left\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 0.$$

Para  $i \neq j$ , temos

$$\left\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, e_i \right\rangle = \text{Hess } r(e_j, e_i) = 0,$$

isto é,

$$\alpha_i = 0 \quad \text{para todo } i \neq j.$$

Dessa forma, obtemos que

$$\nabla_{e_j} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) = \alpha_j e_j.$$

Visto que  $\alpha_j = \left\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right\rangle = \text{Hess } r(e_j, e_j) = \lambda$ , temos

$$\nabla_{e_j} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\psi}{n-1} e_j,$$

provando assim a afirmação.

Temos, portanto,

$$\begin{aligned}
K \left( e_j, \frac{\partial}{\partial r} \right) \Big|_x &= R \left( e_j, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right) \\
&= \left\langle \nabla_{e_j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \nabla_{e_j} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) - \nabla_{[e_j, \frac{\partial}{\partial r}]} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right), e_j \right\rangle \\
&= - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left( \frac{\psi}{n-1} \right) e_j + \nabla_{[e_j, \frac{\partial}{\partial r}]} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right), e_j \right\rangle \\
&= - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left( \frac{\psi}{n-1} \right) e_j, e_j \right\rangle - \left\langle \nabla_{(\nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r})} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right), e_j \right\rangle + \left\langle \nabla_{(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} e_j)} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right), e_j \right\rangle \\
&= - \frac{\psi'}{n-1} - \frac{\psi}{n-1} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} e_j, e_j \right\rangle - \left\langle \nabla_{\left( \frac{\psi}{n-1} e_j \right)} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \nabla_{\left( \left\langle \nabla_{\left( \frac{\partial}{\partial r} \right)} e_j, e_i \right\rangle e_i + \left\langle \nabla_{\left( \frac{\partial}{\partial r} \right)} e_j, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \frac{\partial}{\partial r} \right)} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right\rangle \\
&= - \frac{\psi'}{n-1} - \frac{\psi}{n-1} \left\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right\rangle + \left\langle \nabla_{\left( \frac{\partial}{\partial r} \right)} e_j, e_i \right\rangle \left\langle \nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \nabla_{\left( \frac{\partial}{\partial r} \right)} e_j, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right\rangle \\
&= - \frac{\psi'}{n-1} - \frac{\psi}{n-1} \left\langle \left( \frac{\psi}{n-1} \right) e_j, e_j \right\rangle + \left\langle \nabla_{\left( \frac{\partial}{\partial r} \right)} e_j, e_i \right\rangle \left\langle \left( \frac{\psi}{n-1} \right) e_i, e_j \right\rangle \\
&= - \frac{\psi'}{n-1} - \frac{\psi^2}{(n-1)^2} - \frac{\psi}{n-1} \left\langle \nabla_{\left( \frac{\partial}{\partial r} \right)} e_j, e_i \right\rangle \delta_{ij} \\
&= - \frac{1}{n-1} \left( \psi' + \frac{\psi^2}{n-1} \right) \\
&= - \frac{1}{n-1} [-k(n-1)] \\
&= k,
\end{aligned}$$

o que nos mostra que a curvatura seccional ao longo de geodésicas, ligando  $p$  e  $x$ , é constante e igual a  $k$ , finalizando assim a demonstração do teorema.  $\square$

### 3.2 O Teorema de Comparação de Volume de Bishop-Gromov

Nesta seção provamos o teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov, que é uma aplicação do teorema de comparação do Laplaciano e o principal resultado de nosso trabalho.

**Teorema 3.2** (Comparação de Volume de Bishop-Gromov). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa e suponhamos que, para  $k$  constante,*

$$\text{Ric}(g) \geq (n - 1)kg.$$

Então

$$\text{Vol}(B_R(p)) \leq \text{Vol}(B_R^k),$$

onde  $B_R^k$  é uma bola geodésica de raio  $R$  na forma espacial de curvatura seccional constante  $k$ . A igualdade ocorre, se toda curvatura seccional ao longo de geodésicas ligando  $p$  e  $x$ , para planos contendo o vetor radial, for constante e igual a  $k$ .

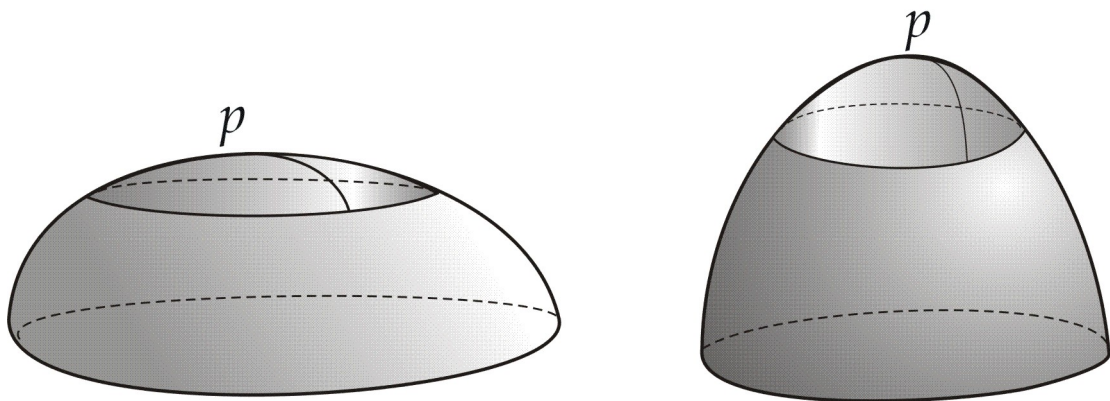


Figura 3.1: Comparação entre volumes

*Demonstração.* Como vimos em (2.4), a expressão do Laplaciano em coordenadas polares é dada por

$$\Delta r(x) = (n - 1) \frac{f'(r)}{f(r)}.$$

Sabendo que  $g = \det(g_{ij})$  e considerando a métrica  $g$  em coordenadas polares como sendo

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\tau^2,$$

vista em (2.2), segue que

$$g = f^{2(n-1)}.$$

Assim

$$\sqrt{g} = f^{n-1},$$

donde

$$(\sqrt{g})' = (n-1)f^{n-2}f'.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Delta r &= (n-1)\frac{f'}{f} = (n-1)\frac{\left(\frac{f^n}{f^2}\right)'}{\left(\frac{f^n}{f}\right)}f' \\ &= (n-1)\frac{f^{n-2}}{f^{n-1}}f' \\ &= \frac{(\sqrt{g})'}{\sqrt{g}}. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos que

$$\Delta r_k = (n-1)\frac{f'_k}{f_k} = \frac{(\sqrt{g_k(r)})'}{\sqrt{g_k(r)}}.$$

Do teorema de comparação do Laplaciano temos que  $\Delta r \leq \Delta r_k$ , e assim para qualquer  $\omega$  vale

$$\frac{(\sqrt{g(r, \omega)})'}{\sqrt{g(r, \omega)}} \leq \frac{(\sqrt{g_k(r)})'}{\sqrt{g_k(r)}}.$$

Da desigualdade acima, vemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{g(r, \omega)}}{\sqrt{g_k(r)}}\right)' &= \frac{\sqrt{g_k(r)}(\sqrt{g(r, \omega)})' - \sqrt{g(r, \omega)}(\sqrt{g_k(r)})'}{g_k(r)} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Daí, como pode ser visto no apêndice,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g(r, \omega)}}{\sqrt{g_k(r)}} = 1, \quad (3.4)$$

e assim, segue que

$$\sqrt{g(r, \omega)} \leq \sqrt{g_k(r)},$$

para todo  $r > 0$ .

Por fim, usando a definição de volume vista em (1.1) e integração em coordenadas polares e, lembrando também que  $\Omega = \exp_p(\mathcal{E}_p)$  tem medida total, como vimos na seção 1.2, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B_R(p)) &= \int_{B_R(p)} dM \\ &= \int_{B_R(p) \cap \Omega} dM \\ &= \int_{B_R(0) \cap \mathcal{E}_p} \sqrt{g} dr d\omega \\ &\leq \int_{B_R(0) \cap \mathcal{E}_p} \sqrt{g_k} dr d\omega \\ &= \text{Vol}(B_R^k), \end{aligned}$$

como queríamos.

Quanto à igualdade, ela decorre do teorema de comparação do Laplaciano. □

Neste apêndice apresentamos a justificativa para o limite visto na expressão (3.4) na demonstração do teorema de comparação de volume de Bishop-Gromov.

Consideremos  $(X, U)$  um sistema de coordenadas normais em torno de  $p \in M$ , com  $X(0) = p$ . Isto significa que

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \nabla_{X_j} X_i(p) = 0,$$

como podemos ver, por exemplo, em [8] Proposição 5.11, página 78. Assim, na expansão de Taylor para  $g_{ij}$ , não aparecem termos de ordem 1. Mais precisamente,

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(|x|^2),$$

ou seja, existem constantes  $C > 0$  e  $\varepsilon > 0$  tais que

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| \leq C|x|^2, \quad \forall x \in B(0, \varepsilon) \subset U.$$

Dessa forma, também obtemos uma expansão para o determinante  $g = \det(g_{ij})$ , com  $i, j = 1, \dots, n$ , a saber

$$g(x) = 1 + O(|x|^{2n}),$$



a qual pode ser escrita como

$$C|x|^{2n} - 1 \leq g(x) \leq 1 + C|x|^{2n}.$$

Claramente obtemos a mesma expansão para a métrica  $g_k$  de uma forma espacial de curvatura seccional constante  $k$ , mudando apenas a constante, digamos  $C_k$ . Assim, obtemos que

$$\frac{C|x|^{2n} - 1}{C_k|x|^{2n} - 1} \leq \frac{g(x)}{g_k(x)} \leq \frac{1 + C|x|^{2n}}{1 + C_k|x|^{2n}},$$

para valores de  $x$  próximos de 0.

Em particular, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g(x)}}{\sqrt{g_k(x)}} = 1,$$

como queríamos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Aubin, T., *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*, Springer, 1998.
- [2] Bishop, R. L., Crittenden, R.J. *Geometry of manifolds*, Academic Press, New York-London, 1964.
- [3] Chavel, I., *Riemannian Geometry - A Modern Introduction*, Cambridge University Press, Second Edition, 2006.
- [4] do Carmo, M. P., *Differential Forms and Applications*, Springer-Verlag, 1994.
- [5] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 3ª edição, 2005.
- [6] Escobar, J. F., *Topics in PDE'S and Differential Geometry*, XII Escola de Geometria Diferencial, 2002.
- [7] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J., *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [8] Lee, J. M., *Riemannian Manifolds - An Introduction to Curvature*, Springer, 1997.
- [9] Lima, E. L., *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 7ª edição, 2006.
- [10] Lima, E. L., *Curso de Análise volume 2*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 9ª edição, 2006.

- $r$ -formas, 16
- Aplicação
  - $r$ -linear, 15
  - alternada, 16
  - anti-simétrica, 16
- Base coordenada, 20
- Bola geodésica, 59
- Comprimento de curva, 22
- Curvatura, 35
  - componentes da, 35
  - de Ricci, 35, 52, 54
  - escalar, 35
  - seccional, 36
    - constante, 51, 54
- Cut-locus, 23
- Derivada Covariante, 38
- Distância, 21
- Divergente, 24
  - em coordenadas locais, 31
- Espaço
  - hiperbólico, 51
  - métrico, 22
  - vetorial orientado, 17
- Fórmula de Weitzenböck, 43
- Forma
  - alternada de grau  $r$ , 16
  - de volume de um espaço vetorial, 17
  - elemento de volume em variedade, 19
  - espacial, 36
  - pull back, 20
- Geodésica, 21, 45, 49, 52
  - maximal, 22
  - minimizante, 22
  - radial, 50
- Gradiente, 23
  - em coordenadas locais, 27
- Hessiano, 23, 24
  - da função distância, 45
- Identidade de Ricci, 41
- Laplaciano, 23, 24
  - em coordenadas locais, 34
  - em coordenadas polares, 59

## Métrica

- canônica, 45
- da esfera, 51
- do espaço hiperbólico, 51

Produto exterior, 17

Referencial ortonormal geodésico, 25

Símbolos de Christoffel, 32, 42, 47

Sistema de coordenadas normais, 40, 43, 62

## Tensor

- curvatura, 35
- de Ricci, 37

## Teorema

- de Hopf-Rinow, 22
- de classificação de Cartan, 37
- de Comparação
  - do Laplaciano, 52
  - de Volume de Bishop-Gromov, 59

## Variedade

- Riemanniana, 59
  - completa, 22, 52
  - geodesicamente completa, 22

Volume, 20