

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Teorema de Decomposição
de Cheeger-Gromoll

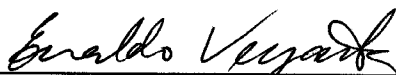
Marcus Petrucio de Almeida Cavalcante

Maceió, Brasil
14 de Dezembro 2007

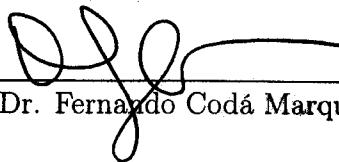
Teorema de Decomposição de Cheeger-Gromoll

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 14 de dezembro de 2007 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

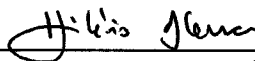
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Enaldo Vergasta



Prof. Dr. Fernando Codá Marques



Prof Dr. Hilário Alencar (Orientador)

*Aos meus pais Francisco Petrúcio Cavalcante
e Maria das Neves de Almeida Cavalcante.*

*O caminho do amor nunca é suave,
mas ele pode ser contínuo...*

Agradecimentos

Agradeço ao professor Hilário Alencar, meu orientador, por esses anos de orientação acadêmica e oportunidades dadas.

Ao professor Adán Corcho, pela orientação e amizade fornecidas de sua parte durante os anos de graduação e mestrado.

Ao meu irmão e professor Marcos Petrucio, pelo curso de Introdução à Geometria Riemanniana dado no primeiro semestre de 2007, pela moradia proporcionada nestes dois últimos anos, pela paciência, etc.

Aos professores Enaldo Vergasta e Fernando Codá Marques pelas valiosas correções e sugestões dadas para melhoria desta dissertação.

Aos meus amigos do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFAL, de forma especial a André Pizzaia, Arlyson Alves e Everson Fernando.

Aos meus amigos Askery Alexandre, Caio e Manoel do Instituto de Física da UFAL pela força dada, assim como também agradeço a Darliton Cezário, Gelsivânio Souza e José Eduardo.

Ao meu amigo Márcio Henrique, um agradecimento todo especial pelas importantes dúvidas esclarecidas, as quais deram firmeza a vários argumentos matemáticos desta dissertação.

Sou muito grato aos professores Adriano Aguiar e Eduardo Perdigão pelos seminários de Espaços Métricos e Introdução à Análise Funcional ministrados.

Ao professor Adelaílson Peixoto e seus orientandos pela amizade e apoio nesta dissertação, isto inclui Clarissa Codá e Claudemir Silvino.

A todos os professores do Instituto de Matemática da UFAL que colaboraram com minha formação matemática.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico -
CNPq - pelo apoio financeiro.

A Deus por tudo...

Resumo

Demonstramos o Teorema de Decomposição de Cheeger-Gromoll, o qual garante que uma variedade Riemanniana completa n -dimensional, com curvatura de Ricci não-negativa, que possui uma linha, pode ser decomposta isometricamente num produto Riemanniano de uma variedade $(n-1)$ -dimensional com o conjunto dos reais.

Palavras-chave: Isometria, Fórmula de Weitzenböck, Laplaciano, Decomposição de Cheeger-Gromoll, Funções de Busemann.

Abstract

We demonstrate the Splitting Theorem due to Cheeger and Gromoll, which ensures that a complete Riemannian n -manifold which has nonnegative Ricci curvature and a line, can be split isometrically into the Riemannian product of real with a $(n-1)$ -manifold.

Key words: Isometry, Weitzenböck's Formula, Laplacian, Splitting Theorem of Cheeger-Gromoll, Busemann Functions.

Sumário

Introdução	9
1 Conceitos Básicos da Geometria Riemanniana	12
1.1 Variedades e Métricas Riemannianas	12
1.2 A Conexão de Levi-Civita	16
1.3 Aplicação Exponencial	18
1.4 Variedades Completas	19
1.5 Curvaturas	20
2 Resultados Preliminares	24
2.1 Fórmula de Weitzenböck	24
2.2 A Hessiana da Função Distância	28
2.3 Teorema de Comparação do Laplaciano	33
3 O Teorema de Decomposição de Cheeger-Gromoll	39
3.1 Funções de Busemann	39
3.2 Teorema de Cheeger-Gromoll	41
Referências Bibliográficas	48
Índice Remissivo	50

Introdução

O Teorema de Decomposição de Cheeger-Gromoll é de fundamental importância em Geometria Riemanniana e, além disso, possui muitas aplicações. Inicialmente, este teorema foi provado por Cohn-Vossen, em 1936, para superfícies no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 e, em seguida, por Toponogov em 1964, para variedades completas n -dimensionais, com a hipótese de curvatura seccional não-negativa. A versão que apresentamos aqui, devida a Cheeger e Gromoll, generaliza o Teorema de Decomposição para variedades Riemannianas completas com curvatura de Ricci não-negativa, cujo resultado foi publicado em 1971 no *Journal of Differential Geometry* com o seguinte enunciado:

Teorema 0.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não-negativa. Então M é isométrica a um produto Riemanniano da forma $\mathbb{R}^k \times N$, onde N não contém linhas e \mathbb{R}^k possui a métrica canônica.*

No entanto, com um argumento de indução finita, é suficiente provar que se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana completa, a qual contém uma linha e $Ric(M) \geq 0$, então M é isométrica a um produto Riemanniano da forma $\mathbb{R} \times N$. Pois, teremos $Ric(N) \geq 0$ e N completa.

Esta dissertação está dividida da seguinte maneira.

No primeiro capítulo apresentamos conceitos básicos de Geometria Riemanniana e procuramos fixar as notações.

No segundo capítulo, alguns resultados preliminares são demonstrados, a saber, por exemplo, a Fórmula de Weitzenböck.

Proposição 0.1. *Seja $f \in C^3$ uma função definida em M . Então*

$$\frac{1}{2}\Delta(|\text{grad } f|^2) = |\text{Hess } f|^2 + \langle \text{grad } f, \text{grad}(\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f).$$

Apresentamos também resultados sobre a Hessiana da função distância e concluimos o capítulo com o Teorema de Comparação do Laplaciano:

Teorema 0.2. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa. Suponhamos que a curvatura de Ricci de M satisfaz $\text{Ric}(M) \geq (n-1)kg$. Seja r a distância geodésica ao ponto $p \in M$. Suponhamos ainda que a função r é diferenciável no ponto x . Então*

$$\Delta r(x) \leq \Delta r_k(\tilde{x}),$$

onde $r_k(\tilde{x}) = r(x) = r_0$ e $r_0 < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ se $k > 0$.

Finalmente, no terceiro capítulo desta dissertação, demonstramos o Teorema de Decomposição de Cheeger-Gromoll. Antes, porém, ainda demonstramos alguns resultados com o intuito de apresentarmos o teorema final com uma boa objetividade. Dentre tais resultados, mostramos que a função de Busemann b^+ associada a um raio γ é super-harmônica no sentido das distribuições e o Teorema de Comparação do Laplaciano no sentido das distribuições.

Ressaltamos que a demonstração feita nesta dissertação é baseada no seguinte artigo:

Eschenburg, J.-H., Heintze, E., *An elementary proof of the Cheeger-Gromoll splitting theorem*, Ann. Glob. Analysis and Geometry, vol. 2, (1984), 141–151.

O qual apresenta novas técnicas de como atacar teoremas de decomposição.

Vale observar que o teorema não é válido para variedades que possuem curvatura escalar não negativa. Como contra-exemplo, podemos citar a variedade $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$ com a métrica de Schwarzschild.

Capítulo 1

Conceitos Básicos da Geometria Riemanniana

Neste capítulo introduzimos conceitos e resultados básicos de Geometria Riemanniana, tais como variedades e métricas Riemannianas, a conexão de Levi-Civita, curvaturas, variedades completas e outros conceitos que precisaremos para os próximos capítulos desta dissertação.

1.1 Variedades e Métricas Riemannianas

Sabemos que dada uma variedade diferenciável M^n , um *campo de vetores* X em M é uma aplicação que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p)$ pertencente ao espaço tangente $T_p M$.

Considerando uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, podemos escrever, para cada $p \in \mathbf{x}(U)$,

$$X(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

onde $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ é a base de vetores tangentes em $p \in M$ associada à \mathbf{x} , e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são funções diferenciáveis em U . Com abuso de notação, escrevendo f ao invés de $f \circ \mathbf{x}$, podemos também pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$ do conjunto \mathcal{D} das funções

diferenciáveis em M no conjunto \mathcal{F} das funções em M , definida por

$$X(f)(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

O conjunto de todos os campos de vetores em M será denotado por $\mathcal{X}(M)$.

A seguir, apresentaremos o colchete de Lie de dois campos.

Exemplo 1.1. *Sejam $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ pertencentes a $\mathcal{X}(M)$. Então $[X, Y] := XY - YX$ pertence a $\mathcal{X}(M)$.*

De fato,

$$\begin{aligned} XY(f) &= X \left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_j X \left(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_j \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_j \sum_i a_i \left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \sum_j \sum_i \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_j \sum_i a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Analogamente, vemos que

$$YX(f) = \sum_i \sum_j \left(b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \sum_j b_j a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Daí, usando o teorema de Schwartz, obtemos

$$XY(f) - YX(f) = \sum_j \sum_i \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Isso mostra que $[X, Y]$ é um campo de vetores.

Denominamos $[X, Y]$ o colchete de Lie dos campos X e Y .

Passemos agora à seguinte definição:

Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável M^n é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = g_p(\cdot, \cdot)$ no espaço tangente $T_p M$, tal que: se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , então para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$ é uma função diferenciável em U .

As funções $g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ são chamadas *componentes da métrica Riemanniana* no sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$. Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana é chamada variedade Riemanniana. Denotaremos por (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n com uma métrica g .

Exemplo 1.2. A esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}(1) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ é uma variedade Riemanniana. Com efeito, basta definirmos a métrica g por $g(u, v)_p = \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^n}$, onde $u, v \in T_p \mathbb{S}^{n-1}$.

Exemplo 1.3. O espaço hiperbólico \mathbb{H}^n .

Considere a variedade diferenciável $U = \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, com a carta $id : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U$. Dado $p \in U$, $p = (x_1, \dots, x_n)$, sejam $v, w \in T_p U = \mathbb{R}^n$.

Definimos

$$h_p(v, w) = \frac{1}{x_n^2} \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Vê-se que $(U, h) := \mathbb{H}^n$ é uma variedade Riemanniana, denominada espaço hiperbólico.

Exemplo 1.4. Variedades Imersas.

Seja $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ uma imersão, isto é, f é uma aplicação diferenciável e $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se N tem uma métrica Riemanniana, f induz uma métrica Riemanniana em M , dada por

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad u, v \in T_p M.$$

Com efeito, como df_p é injetiva, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é positivo definido. As demais condições da definição de métrica Riemanniana podem ser facilmente

verificadas.

A métrica de M é então chamada a *métrica induzida por f* e f é uma *imersão isométrica*.

Quando $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ é uma imersão e, além disso, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset N$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que f é um *mergulho*. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma *subvariedade* de N .

Uma classe importante de variedades Riemannianas é dada no exemplo seguinte.

Exemplo 1.5. *Métrica Produto.*

Sejam $(M_1^{n_1}, g_1)$ e $(M_2^{n_2}, g_2)$ variedades Riemannianas e considere o produto cartesiano $M = M_1 \times M_2$ com a estrutura diferenciável produto. Sejam $\pi_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ e $\pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ as projeções naturais. Podemos introduzir em $M_1 \times M_2$ uma métrica Riemanniana pondo, para cada $(p, q) \in M_1 \times M_2$ e $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$,

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1 \cdot u, d\pi_1 \cdot v \rangle_p + \langle d\pi_2 \cdot u, d\pi_2 \cdot v \rangle_q.$$

Como casos particulares temos, por exemplo, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$ ou, mais geralmente, $\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^n$, os quais têm uma estrutura Riemanniana obtida quando escolhemos no círculo $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ a métrica Riemanniana induzida por \mathbb{R}^2 e, em seguida, tomamos a métrica produto em \mathbb{T}^n . O toro \mathbb{T}^n com esta métrica Riemanniana é chamado *toro plano* ou *toro flat*.

Teorema 1.1. *Toda variedade com base enumerável, diferenciável e de Hausdorff possui uma métrica Riemanniana.*

Demonstração. Ver [3], página 47. □

Definição 1.1. *Sejam (M^n, g) e $(\overline{M}^n, \overline{g})$ variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$ é dito uma isometria se*

$$\overline{g}_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v), d\varphi_p(w)) = g_p(v, w), \forall p \in M, \forall v, w \in T_p M.$$

1.2 A Conexão de Levi-Civita

Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

tal que, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $\forall f, g \in \mathcal{D}(M)$, tem-se

$$(i) \quad \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$$

$$(ii) \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$$

$$(iii) \quad \nabla_XfY = f\nabla_XY + X(f)Y.$$

Em coordenadas locais, $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, pode-se facilmente ver, para $X = \sum_i x_i X_i$ e $Y = \sum_i y_i Y_i$, que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k.$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k , definidos por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, são chamados *símbolos de Christoffel* da conexão.

Em termos dos coeficientes da métrica Riemanniana, os símbolos de Christoffel possuem a seguinte expressão:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km},$$

onde (g^{km}) é a matriz inversa de (g_{km}) , ver [3], página 62.

Dada uma curva diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$, um *campo ao longo de α* é uma função $V : I \longrightarrow TM$ tal que $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$, onde $TM = \{(p, v) | p \in M, v \in T_p M\}$ é o fibrado tangente de M .

Seja $t \in I$. Em coordenadas, temos a base $\{\frac{d}{dt}\}$ em $T_t I = \mathbb{R}$. Por definição, $\alpha'_t(\frac{d}{dt})$ é o vetor tangente à curva α em $\alpha(t)$. Usaremos a notação: $d\alpha(\frac{d}{dt}) = \alpha'(t)$.

Proposição 1.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana com uma conexão afim ∇ e $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável. Então para cada campo V ao longo de α , existe um único campo denotado por $\frac{DV}{dt}$ tal que*

$$(a) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt};$$

$$(b) \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt};$$

(c) *Se $V(t)$ é a restrição de um campo Y definido numa vizinhança de $\alpha(I)$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}Y$.*

Demonstração. Ver [3], página 57. □

Dizemos que uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é simétrica se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

A justificativa para tal nomenclatura vem do seguinte fato: $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0,$$

o que é equivalente a $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Dizemos que uma conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

O próximo teorema é fundamental em Geometria Riemanniana.

Teorema 1.2 (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M que é simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.*

Demonstração. Ver [3], página 61. □

Tal conexão é denominada conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de M . A partir daqui estaremos sempre considerando variedades Riemannianas com suas respectivas conexões de Levi-Civita.

1.3 Aplicação Exponencial

Uma curva α em M é uma *geodésica* em $t \in I$ se $\frac{D}{dt}\alpha'(t) = 0$.

Neste caso, se $v(t) = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}$ é a velocidade de α , temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(v^2(t)) &= \frac{d}{dt} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle \\ &= 2 \left\langle \frac{D}{dt} \alpha'(t), \alpha'(t) \right\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, se α é geodésica, então o vetor velocidade de α possui norma constante.

Definição 1.2. Um campo V ao longo de uma curva α é dito *paralelo* se $\frac{DV}{dt} = 0$.

Proposição 1.2. Sejam $\alpha : I \rightarrow M$ diferenciável e $V_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$. Então existe um único campo paralelo V , ao longo de α , tal que $V(t_0) = V_0$.

Demonstração. Ver [3], página 58. □

Como consequência do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.3. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, existe uma única geodésica $\alpha : I \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Se $v \in T_pM$, vamos denotar por γ_v a única geodésica de M que passa por $p \in M$ com velocidade $v \in T_pM$.

Seja $\Sigma_p = \{v \in T_pM; \gamma_v \text{ está definida num intervalo contendo } [0, 1]\}$.

Definição 1.3. A aplicação $\exp_p : \Sigma_p \rightarrow M$, definida por $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$, é denominada *aplicação exponencial*.

Proposição 1.4. As seguintes propriedades são satisfeitas:

1. cada conjunto $\Sigma_p \subset T_pM$ é estrelado em relação a p ;

2. para cada $v \in T_p M$, a geodésica γ_v é dada por $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ onde os dois lados estão definidos;

3. a aplicação \exp_p é diferenciável.

Demonstração. Ver [3], página 71. \square

É possível aumentar a velocidade de uma geodésica diminuindo o seu intervalo de definição e vice-versa. Isso segue de uma propriedade conhecida, chamada *homogeneidade das geodésicas*. Em termos matemáticos, expressamos isso da seguinte forma:

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t), \quad \forall v \in T_p M \quad \text{e} \quad \forall \lambda, t \in \mathbb{R}.$$

Proposição 1.5. Para todo $p \in M$, existem uma vizinhança V da origem de $T_p M$ e uma vizinhança U de p , tais que $\exp_p : V \rightarrow U$ é um difeomorfismo.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} d(\exp_p)_0(v) &= \left. \frac{d}{dt}(\exp_p(tv)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(\gamma_v(t)) \right|_{t=0} \\ &= \gamma'_v(0) \\ &= v. \end{aligned}$$

Logo, $d(\exp_p)_0$ é a identidade de $T_p M$, segue-se então do teorema da função inversa que \exp_p é um difeomorfismo local numa vizinhança de 0 em $T_p M$. \square

O aberto U dado pela proposição anterior é chamado *vizinhança normal* de p .

1.4 Variedades Completas

Quando se está interessado em estudar propriedades globais de uma variedade Riemanniana, fica conveniente considerarmos variedades completas.

Definição 1.4. *Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se, para todo $p \in M$, a aplicação exponencial \exp_p está definida para todo $v \in T_p M$, isto é, as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Podemos definir uma distância $d(p, q)$ numa variedade Riemanniana, a qual estaremos sempre supondo conexa, da seguinte maneira: $d(p, q) = \text{ínfimo}$ dos comprimentos de todas as curvas $\alpha_{p,q}$, onde $\alpha_{p,q}$ é uma curva diferenciável por partes ligando p a q . Não é difícil ver que (M, d) é um espaço métrico.

Teorema 1.3 (Hopf-Rinow). *Uma variedade Riemanniana é completa se, e somente se, é completa como um espaço métrico.*

Demonstração. Ver [8], página 108. □

O Teorema (1.3) possui várias conseqüências, por exemplo:

- (i) se M é completa, então dois pontos quaisquer de M podem ser ligados por um segmento de geodésica minimizante;
- (ii) se M é compacta, então M é completa.

1.5 Curvaturas

Nesta seção, introduzimos o conceito de curvatura numa variedade Riemanniana, culminando com as definições de curvatura de Ricci e curvatura escalar. Mais considerações sobre curvaturas podem ser vistas, por exemplo, em [8], capítulo 7.

A *curvatura* R de uma variedade Riemanniana é a aplicação que a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ associa a correspondência

$$R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Para um espaço vetorial V com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dados dois vetores linearmente independentes $x, y \in V$,

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

é a área do paralelogramo gerado por $\{x, y\}$.

Pode-se verificar que, se $\sigma \subset T_p M$ é um subespaço de dimensão 2 com base $\{x, y\}$, então

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)y, x \rangle}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha da base de σ .

Fica então bem definida a *curvatura seccional* de σ em M no ponto p como sendo o número real dado por $K(\sigma) := K(x, y)$.

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p M$, tomemos uma base ortonormal $\mathcal{B} = \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x e consideremos as seguintes médias:

Definição 1.5. *Curvatura de Ricci*

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(x, z_i)z_i, x \rangle, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Definição 1.6. *Curvatura Escalar*

$$S(p) = \frac{1}{n} \sum_j Ric_p(z_j).$$

Em [3], página 108, é demonstrado que a curvatura de Ricci e a curvatura escalar não dependem das correspondentes bases ortonormais, portanto estão bem definidas.

Ainda considerando a base ortonormal \mathcal{B} , observamos que

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} K(x, z_i).$$

Portanto, se M é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional

não-negativa em todos os pontos, então o mesmo acontece com a curvatura de Ricci, isto é, $Ric(M) \geq 0$.

Observação 1.1. *Algumas vezes usaremos a notação de Einstein, ou seja, omitiremos o sinal de somatório em somas que aparecem índices repetidos, por exemplo*

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k X_k = \Gamma_{ij}^k X_k.$$

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de campos de vetores em torno de um ponto $p \in M$. Os coeficientes R_{ijk}^l , definidos por

$$\begin{aligned} R(e_i, e_j)e_k &= \sum_l R_{ijk}^l e_l \\ &= R_{ijk}^l e_l, \end{aligned} \tag{1.1}$$

são denominados *componentes do tensor curvatura*.

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \langle R(e_i, e_j)e_k, e_s \rangle &= \left\langle \sum_l R_{ijk}^l e_l, e_s \right\rangle \\ &= \sum_l R_{ijk}^l \delta_{ls} \\ &= R_{ijk}^s \\ &:= R_{ijk s}. \end{aligned}$$

Os coeficientes $R_{ijk s}$ são denominados *coeficientes de Ricci*.

Outra notação que utilizaremos é a seguinte:

$$Ric(v, w) = \sum_i \langle R(v, e_i)e_i, w \rangle = \langle R(v, e_i)e_i, w \rangle.$$

Os coeficientes de Ricci têm uma expressão em termos dos símbolos de

Christoffel dada por

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s - \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s + \frac{\partial}{\partial e_i} \Gamma_{jk}^s - \frac{\partial}{\partial e_j} \Gamma_{ik}^s, \quad (1.2)$$

a qual, na notação de Einstein, se expressa como

$$R_{ijk}^s = \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s + \frac{\partial}{\partial e_i} \Gamma_{jk}^s - \frac{\partial}{\partial e_j} \Gamma_{ik}^s.$$

A expressão (1.2) pode ser encontrada, por exemplo, em [3], página 103.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Os resultados deste capítulo formarão uma base para o próximo e último capítulo desta dissertação.

2.1 Fórmula de Weitzenböck

Apresentaremos a seguir um resultado de grande importância, a saber: a fórmula de Weitzenböck. Antes, porém, mostraremos a identidade de Ricci, a fim de fazermos uso adiante.

Lema 2.1 (Identidade de Ricci). *Dada $f \in C^3(M)$, para quaisquer $1 \leq i, j, k \leq n$, vale a igualdade:*

$$f_{ikl} = f_{ilk} + R_{klsi}f_s,$$

onde R_{klsi} são os coeficientes de Ricci.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} f_{ik} &= \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial e_i})}{\partial e_k} - \frac{\partial f}{\partial e_u} \Gamma_{ki}^u \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_k} - \frac{\partial f}{\partial e_u} \Gamma_{ki}^u. \end{aligned}$$

Daí,

$$f_{ikl} = \frac{\partial f_{ik}}{\partial e_l} - \Gamma_{li}^u f_{uk} - \Gamma_{lk}^u f_{ui},$$

e

$$f_{ilk} = \frac{\partial f_{il}}{\partial e_k} - \Gamma_{ki}^u f_{ul} - \Gamma_{kl}^u f_{ui}.$$

Como $\Gamma_{lk}^u = \Gamma_{kl}^u$, segue-se que

$$f_{ikl} - f_{ilk} = \frac{\partial f_{ik}}{\partial e_l} - \Gamma_{li}^u f_{uk} - \frac{\partial f_{il}}{\partial e_k} + \Gamma_{ki}^u f_{ul}. \quad (2.1)$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ik}}{\partial e_l} &= \frac{\partial}{\partial e_l} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial e_i \partial e_k} - \Gamma_{ik}^u \frac{\partial f}{\partial e_u} \right) \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial e_l \partial e_i \partial e_k} - \frac{\partial}{\partial e_l} (\Gamma_{ik}^u) \frac{\partial f}{\partial e_u} - \Gamma_{ik}^u \frac{\partial^2 f}{\partial e_l \partial e_u} \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial f_{il}}{\partial e_k} = \frac{\partial^3 f}{\partial e_k \partial e_i \partial e_l} - \frac{\partial}{\partial e_k} (\Gamma_{il}^u) \frac{\partial f}{\partial e_u} - \Gamma_{il}^u \frac{\partial^2 f}{\partial e_k \partial e_u}.$$

Assim,

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial e_l} - \frac{\partial f_{il}}{\partial e_k} = -\frac{\partial}{\partial e_l} (\Gamma_{ik}^u) \frac{\partial f}{\partial e_u} - \Gamma_{ik}^u \frac{\partial^2 f}{\partial e_l \partial e_u} + \frac{\partial}{\partial e_k} (\Gamma_{il}^u) \frac{\partial f}{\partial e_u} + \Gamma_{il}^u \frac{\partial^2 f}{\partial e_k \partial e_u}.$$

Aplicando essa última equação a (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} f_{ikl} - f_{ilk} &= -\frac{\partial}{\partial e_l} (\Gamma_{ik}^u) \frac{\partial f}{\partial e_u} - \Gamma_{ik}^u \frac{\partial^2 f}{\partial e_l \partial e_u} + \frac{\partial}{\partial e_k} (\Gamma_{il}^u) \frac{\partial f}{\partial e_u} + \Gamma_{il}^u \frac{\partial^2 f}{\partial e_k \partial e_u} \\ &\quad - \Gamma_{li}^u f_{uk} + \Gamma_{ki}^u f_{ul} \\ &= -\frac{\partial}{\partial e_l} (\Gamma_{ik}^u) \frac{\partial f}{\partial e_u} - \Gamma_{ik}^u \frac{\partial^2 f}{\partial e_l \partial e_u} + \frac{\partial}{\partial e_k} (\Gamma_{il}^u) \frac{\partial f}{\partial e_u} + \Gamma_{il}^u \frac{\partial^2 f}{\partial e_k \partial e_u} \\ &\quad - \Gamma_{li}^u \left(\frac{\partial^2 f}{\partial e_u \partial e_k} - \Gamma_{uk}^s \frac{\partial f}{\partial e_s} \right) + \Gamma_{ki}^u \left(\frac{\partial^2 f}{\partial e_u \partial e_l} - \Gamma_{ul}^s \frac{\partial f}{\partial e_s} \right). \end{aligned}$$

Usando mais uma vez a simetria dos símbolos de Christoffel, vemos que

$$\begin{aligned} f_{ikl} - f_{ilk} &= \left(\Gamma_{li}^u \Gamma_{uk}^s - \Gamma_{ki}^u \Gamma_{ul}^s + \frac{\partial}{\partial e_k} (\Gamma_{il}^s) - \frac{\partial}{\partial e_l} (\Gamma_{ik}^s) \right) \frac{\partial f}{\partial e_s} \\ &= R_{klsi} f_s. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.1 (Fórmula de Weitzenböck). *Seja $f \in C^3$ uma função definida em M . Então*

$$\frac{1}{2} \Delta (|\text{grad } f|^2) = |\text{Hess } f|^2 + \langle \text{grad } f, \text{grad}(\Delta f) \rangle + Ric(\text{grad } f, \text{grad } f).$$

Demonstração. Seja $\{E_1, \dots, E_n\}$ uma base ortonormal em torno de um ponto $p \in M$. Afirmamos que $|\text{grad } f|^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2$. De fato, em $p \in M$, o campo $\text{grad } f$ pode ser escrito na base $\{E_1, \dots, E_n\}$ como $\text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(p) E_i(p)$, onde cada $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável em U .

Visto que

$$\begin{aligned} f_i &= E_i(f) \\ &= \langle E_i, \text{grad } f \rangle \\ &= \alpha_i, \end{aligned}$$

temos que $\text{grad } f = \sum_{i=1}^n f_i E_i$ e, portanto,

$$\begin{aligned} |\text{grad } f|^2 &= \langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n f_i E_i, \sum_{i=1}^n f_i E_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n f_i^2. \end{aligned}$$

Isto prova a afirmação.

Agora,

$$\begin{aligned}(|\text{grad } f|^2)_j &= \left(\sum_i f_i^2\right)_j \\ &= \sum_i 2f_i f_{ij},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}(|\text{grad } f|^2)_j = \sum_i f_i f_{ij}.$$

Temos também que

$$\frac{1}{2}(|\text{grad } f|^2)_{jj} = \sum_i (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}),$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(|\text{grad } f|^2) &= \sum_j \left(\sum_i (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj})\right) \\ &= \sum_{i,j} (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Agora, como a Hessiana de uma função é um 2-tensor simétrico, temos que $f_{ijj} = f_{jij}$. Usando este fato juntamente com a identidade de Ricci, obtemos que

$$f_{ijj} = f_{jij} = f_{jji} + R_{ijsj} f_s.$$

Aplicando esta última igualdade a (2.2), vemos que

$$\frac{1}{2}\Delta(|\text{grad } f|^2) = \sum_{i,j} (f_{ij}^2 + f_i (f_{jji} + R_{ijsj} f_s)).$$

Finalmente, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta (|\text{grad } f|^2) &= \sum_{i,j} f_{ij}^2 + \sum_{i,j} f_i f_{jji} + \sum_{i,j} R_{ijsj} f_s f_i \\
&= |\text{Hess } f|^2 + \langle \text{grad } f, \text{grad}(\Delta f) \rangle + \sum_{i,s} \text{Ric}(E_s, E_i) f_s f_i \\
&= |\text{Hess } f|^2 + \langle \text{grad } f, \text{grad}(\Delta f) \rangle + \text{Ric}\left(\sum_s f_s E_s, \sum_i f_i E_i\right) \\
&= |\text{Hess } f|^2 + \langle \text{grad } f, \text{grad}(\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f).
\end{aligned}$$

□

2.2 A Hessiana da Função Distância

Nesta seção, obteremos dois resultados sobre a Hessiana da função distância. Tais resultados serão importantes para a demonstração do Teorema de Comparação do Laplaciano na próxima seção.

Proposição 2.2. *Seja $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $r(x) = d(x, p)$, onde d é a função distância. Então $\text{Hess } r\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 0$. Além disso, se $\forall X \perp \frac{\partial}{\partial r}$, vale $\text{Hess } r\left(\frac{\partial}{\partial r}, X\right) = 0$, onde $\frac{\partial}{\partial r}$ é o vetor velocidade.*

Demonstração. Usando a definição de Hessiana para a função r e o fato que as curvas $r \mapsto rw$, para w fixado, são geodésicas com vetor velocidade $\frac{\partial}{\partial r}$, temos que

$$\begin{aligned}
\text{Hess } r\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} r - \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} r \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Agora, pelo Lema de Gauss, ver [8], página 102, temos que

$$\text{grad } r = \frac{\partial}{\partial r}.$$

Portanto, se $X \perp \frac{\partial}{\partial r}$, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Hess } r\left(\frac{\partial}{\partial r}, X\right) &= \text{Hess } r\left(X, \frac{\partial}{\partial r}\right) \\ &= X \frac{\partial}{\partial r} r - (\nabla_X \frac{\partial}{\partial r})r \\ &= -\left\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle, \end{aligned}$$

pois $X(\frac{\partial}{\partial r})r = X(1) = 0$.

Usando a compatibilidade da métrica, obtemos

$$\text{Hess } r\left(\frac{\partial}{\partial r}, X\right) = -\frac{1}{2}X \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle.$$

Finalmente, como as geodésicas radiais são parametrizadas por comprimento de arco,

$$\text{Hess } r\left(\frac{\partial}{\partial r}, X\right) = -\frac{1}{2}X(1) = 0.$$

□

Proposição 2.3. *Consideremos \mathbb{R}^n munido com a métrica g , escrita em coordenadas polares como $dr^2 + f^2(r)dw^2$, onde dw^2 representa a métrica canônica em S^{n-1} . Seja $r(x) = d(x, p)$, onde d é a função distância. Então, se $x = rw$, $r > 0$, $w \in S^{n-1}$, para quaisquer X, Y ortogonais a $\frac{\partial}{\partial r}$,*

$$\text{Hess } r(X, Y) = \frac{f'(r)}{f(r)}g(X, Y).$$

Além disso,

$$\Delta r(x) = (n-1)\frac{f'(r)}{f(r)}.$$

Demonstração. Sejam X, Y campos de vetores tangentes ao conjunto de nível

$r = c$, onde c é uma constante positiva. Temos que

$$\begin{aligned}
\text{Hess } r(X, Y) &= Y(X(r)) - \nabla_Y X(r) \\
&= Y \left\langle X, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle - \left\langle \nabla_Y X, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_Y X, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle + \left\langle X, \nabla_Y \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle - \left\langle \nabla_Y X, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \\
&= \left\langle X, \nabla_Y \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \\
&= \left\langle Y, \nabla_X \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Na última igualdade usamos a simetria da Hessiana.

Agora, sejam $\frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial r}$ o campo normal a hipersuperfície $r = c$ e $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$, os campos coordenados em \mathbb{S}^{n-1} .

Assim, para $1 \leq i, j \leq n-1$, temos que

$$\begin{aligned}
\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle \\
&= \left\langle \Gamma_{ni}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= \Gamma_{ni}^k g_{kj}
\end{aligned}$$

Usando a fórmula dos símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da métrica e usando o fato que $g_{ni} = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = 0$, $\forall i = 1, \dots, n-1$, encontramos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ni}^k &= \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ln}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_n} - \frac{\partial g_{ni}}{\partial x_l} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \frac{\partial g_{li}}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Mas, por outro lado,

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial r} = 2f f'(dw^2)_{li} \quad \text{e} \quad g^{kl} = f^{-2}(dw^2)^{kl}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\Gamma_{ni}^k &= \frac{1}{2} \sum_l f^{-2} (dw^2)^{kl} 2f f' (dw^2)_{li} \\ &= \frac{f'}{f} \delta_{ik}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \frac{f'}{f} \delta_{ik} g_{kj} \\ &= \frac{f'}{f} g \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right).\end{aligned}$$

Logo, se X e Y são ortogonais a $\frac{\partial}{\partial r}$, então

$$\text{Hess } r(X, Y) = \frac{f'}{f} g(X, Y).$$

Agora, sabemos que existe $A : TS \rightarrow TS$ tal que $\text{tr Hess } r = \text{tr } A$ e $\text{Hess } r(X, Y) = \langle AX, Y \rangle, \forall X, Y \in TS$. Ora, $A(X_i) = a^{ij} X_j$. Isto implica que $\langle A(X_i), X_k \rangle = a^{ij} g_{jk}$, ou seja, $a^{ij} = g^{jk} \text{Hess } r(X_i, X_k)$.

Assim,

$$\begin{aligned}\Delta r &= \text{tr Hess } r = \text{tr } A \\ &= \sum_i g^{ik} \frac{f'}{f} g(X_i, X_k) \\ &= (n-1) \frac{f'}{f}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.1. *Calcularemos o Laplaciano da função distância r_k , com respeito a métrica*

$$dr^2 + f_k^2 dw^2,$$

onde

$$f_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{kr}), & \text{se } k > 0 \\ r, & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-kr}), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Observamos que, quando $k > 0$, obtemos a métrica da esfera \mathbb{S}^n de raio $\frac{1}{\sqrt{k}}$ que tem curvatura seccional constante k . Quando $k < 0$, obtemos a métrica do espaço hiperbólico \mathbb{H}^n , também com curvatura seccional constante igual a k . Quando $k = 0$, obtemos a métrica canônica do \mathbb{R}^n em coordenadas polares.

É fácil ver que

$$f'_k(r) = \begin{cases} \cos(\sqrt{kr}), & \text{se } k > 0 \\ 1, & \text{se } k = 0 \\ \cosh(\sqrt{-kr}), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Assim, para $k > 0$, temos

$$\begin{aligned} \text{Hess } r_k &= \frac{\sqrt{k} \cos(\sqrt{kr})}{\sin(\sqrt{kr})} g \\ &= \sqrt{k} \cot(\sqrt{kr}) g. \end{aligned}$$

Quando $k = 0$,

$$\text{Hess } r = \frac{1}{r} g.$$

E

$$\begin{aligned} \text{Hess } r_k &= \frac{\sqrt{k} \cosh(\sqrt{-kr})}{\sinh(\sqrt{-kr})} g \\ &= \sqrt{k} \coth(\sqrt{-kr}) g, \end{aligned}$$

se $k < 0$.

Portanto

$$\frac{1}{n-1}\Delta r_k = \begin{cases} \sqrt{k} \cot(\sqrt{k}r), & \text{se } k > 0 \\ \frac{1}{r}, & \text{se } k = 0 \\ \sqrt{-k} \coth(\sqrt{-k}r), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

2.3 Teorema de Comparação do Laplaciano

Partimos agora para o teorema de Comparação do Laplaciano, o qual será demonstrado com o uso da fórmula de Weitzenböck.

Teorema 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa. Suponhamos que a curvatura de Ricci de M satisfaz $\text{Ric}(M) \geq (n-1)kg$. Seja r a distância geodésica ao ponto $p \in M$. Suponhamos ainda que a função r é diferenciável no ponto x . Então*

$$\Delta r(x) \leq \Delta r_k(\tilde{x}), \quad (2.3)$$

onde $r_k(\tilde{x}) = r(x) = r_0$ e $r_0 < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ se $k > 0$. Se a igualdade é satisfeita, então a curvatura seccional de qualquer plano que contenha o vetor radial, ao longo de geodésicas ligando p e x , é constante e igual a k .

Demonstração. A Hessiana da função r possui um autovalor igual a zero, pois $\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0$ e $\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r}, X \right) = 0, \forall X \perp \frac{\partial}{\partial r}$. Esse fato e a desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada às matrizes Hessiana de r e Identidade nos dão

$$|\text{Hess } r|^2 \geq \frac{(\Delta r)^2}{n-1}. \quad (2.4)$$

Usando a fórmula de Weitzenböck e o fato de que $|\text{grad } r| = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= |\text{Hess } r|^2 + \langle \text{grad } r, \text{grad}(\Delta r) \rangle + \text{Ric} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) \\
&= |\text{Hess } r|^2 + \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \text{grad}(\Delta r) \right\rangle + \text{Ric} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) \\
&= |\text{Hess } r|^2 + \frac{\partial}{\partial r} \Delta r + \text{Ric} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) \\
&= |\text{Hess } r|^2 + (\Delta r)' + \text{Ric} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right).
\end{aligned}$$

Seja $\varphi = \Delta r$. Usando a hipótese sobre a curvatura de Ricci e a desigualdade (2.4), vemos que

$$\varphi' + \frac{\varphi^2}{n-1} + (n-1)k \leq 0.$$

Estudando o caso da igualdade, observamos que $\psi = \Delta r_k = (n-1) \frac{f_k'}{f_k}$ satisfaz a igualdade, onde r_k é a função distância sobre a variedade de curvatura seccional constante k e

$$f_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}r), & \text{se } k > 0 \\ r, & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}r), & \text{se } k < 0. \end{cases}$$

Visto que ψ é injetiva em seus respectivos domínios, podemos escolher uma função $\theta(t)$, definida em $[0, r_0)$, satisfazendo

$$\theta(0) = 0, \quad \psi(\theta(t)) = \varphi(t).$$

Agora, como

$$\varphi'(t) + \frac{\varphi^2(t)}{n-1} + (n-1)k \leq 0 = \psi'(\theta(t)) + \frac{\psi^2(\theta(t))}{n-1} + (n-1)k,$$

segue-se diretamente que

$$\varphi'(t) \leq \psi'(\theta(t)).$$

Mas $\varphi'(t) = \psi'(\theta(t))\theta'(t)$ e, portanto,

$$\psi'(\theta(t))\theta'(t) \leq \psi'(\theta(t)).$$

Como $\psi'(t) < 0$, temos $\theta'(t) \geq 1$. Integrando esta última desigualdade segue-se que $\theta(t) \geq t$, donde

$$\varphi(t) = \psi(\theta(t)) \leq \psi(t),$$

pois a função ψ é decrescente. Isto é, vale a desigualdade (2.3).

Quanto à igualdade em (2.3), sabemos que a mesma ocorre se, e somente se, a Hessiana é múltipla da identidade, ou seja, $\text{Hess } r = \lambda I$, para alguma constante λ . Mas o fato de $\text{Hess } r \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0$ implica, neste caso, que o termo a_{nn} da matriz Hessiana de r é nulo e, portanto, $|\text{Hess } r|^2 = (n-1)\lambda^2$.

Por outro lado,

$$|\text{Hess } r|^2 = \frac{\psi^2}{n-1}.$$

Dessas duas últimas igualdades, segue-se que $\lambda = \frac{\psi}{n-1}$. Agora, consideremos a base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_{n-1}, \frac{\partial}{\partial r}\}$ de vetores ortonormais que diagonaliza a Hessiana de r .

Afirmamos que

$$\nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\psi}{n-1} e_j.$$

De fato, escrevendo $\nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}$ na base \mathcal{B} , temos

$$\nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k + a \frac{\partial}{\partial r}.$$

Daí, $\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = a = 0$, pois

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} e_j \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle \\ &= a. \end{aligned}$$

Para $i \neq j$, temos $\langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, e_i \rangle = \text{Hess } r(e_j, e_i) = 0$, ou seja, $\alpha_i = 0$ para todo $i \neq j$.

Assim, obtemos que

$$\nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r} = \alpha_j e_j.$$

Como $\alpha_j = \langle \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \rangle = \text{Hess } r(e_j, e_j) = \lambda$, temos

$$\nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\psi}{n-1} e_j.$$

E a afirmação está provada.

Temos então

$$\begin{aligned} K \left(e_j, \frac{\partial}{\partial r} \right) \Big|_x &= R \left(e_j, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right) \\ &= \left\langle \nabla_{e_j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \nabla_{e_j} \frac{\partial}{\partial r} - \nabla_{[e_j, \frac{\partial}{\partial r}]} \frac{\partial}{\partial r}, e_j \right\rangle \\ &= - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \left(\frac{\psi}{n-1} \right) e_j, e_j \right\rangle \\ &= - \left\langle \frac{\psi'}{n-1} e_j + \frac{\psi}{n-1} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} e_j, e_j \right\rangle \\ &= - \frac{\psi'}{n-1} - \frac{\psi}{n-1} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} e_j, e_j \right\rangle \\ &= - \frac{1}{n-1} \left(\psi' + \frac{\psi^2}{n-1} \right) \\ &= k. \end{aligned}$$

□

Definição 2.1. Dizemos que $\Delta r \leq f$ no sentido das distribuições, se

$$\int_M r \Delta \varphi \leq \int_M \varphi f, \quad \forall \varphi \geq 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(M).$$

O Teorema de Comparação do Laplaciano também é válido no sentido das distribuições.

Teorema 2.2. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa e r a função distância geodésica. Suponhamos que a curvatura de Ricci de g satisfaz $\text{Ric}(M) \geq (n-1)kg$. Então $\Delta r(x) \leq \Delta r_k$ no sentido das distribuições.*

Demonstração. Seja $p \in M$ e consideremos o mergulho $\exp_p : \Sigma_p \rightarrow M$. Consideremos também uma família de abertos estrelados $\{\Omega_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ tal que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\Omega_\varepsilon \rightarrow \Sigma_p$. Pelo Teorema de Comparação do Laplaciano,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta r \varphi \leq \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta r_k \varphi, \quad \varphi \geq 0. \quad (2.5)$$

Agora, a primeira identidade de Green nos dá

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta r \varphi = - \int_{\Omega_\varepsilon} \langle \text{grad } r, \text{grad } \varphi \rangle + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial r}{\partial \eta} \varphi.$$

Como $\varphi \geq 0$ e Ω_ε é estrelado, temos que a integral sobre Ω_ε é maior ou igual a zero. Daí

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta r \varphi \geq - \int_{\Omega_\varepsilon} \langle \text{grad } r, \text{grad } \varphi \rangle.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ e usando a desigualdade (2.5), obtemos

$$- \int_{\Sigma_p} \langle \text{grad } r, \text{grad } \varphi \rangle \leq \int_{\Sigma_p} \Delta r_k \varphi.$$

Como a função distância é Lipschitziana, conseqüentemente é *q.t.p.* diferenciável e, portanto, sua derivada coincide com a derivada fraca em H^1 , ver [6], páginas 81 e 235.

Por outro lado, a definição de derivada fraca em H^1 nos diz que

$$-\int_M \langle \text{grad } r, \text{grad } \varphi \rangle = \int_M r \Delta \varphi, \quad \forall \varphi \geq 0, \varphi \in C_0^\infty(M).$$

Portanto

$$\int_M r \Delta \varphi \leq \int_M \Delta r_k \varphi, \quad \forall \varphi \geq 0, \varphi \in C_0^\infty(M).$$

□

Capítulo 3

O Teorema de Decomposição de Cheeger-Gromoll

Neste capítulo estaremos sempre nos direcionando ao Teorema de Decomposição de Cheeger-Gromoll, obtendo antes importantes resultados que faremos uso em sua demonstração.

3.1 Funções de Busemann

As funções de Busemann desempenham um papel importante na demonstração que daremos do Teorema de Cheeger-Gromoll sobre decomposição de variedades Riemannianas com curvatura de Ricci não-negativa.

Definição 3.1. *Uma geodésica $\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow M$, parametrizada pelo comprimento de arco, é chamada uma linha, se $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$, $\forall t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$.*

Definição 3.2. *Uma geodésica $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$, parametrizada pelo comprimento de arco, é chamada um raio, se $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$, $\forall t_1, t_2 \in [0, \infty)$.*

Observamos que se M é completa e não compacta, então, para todo $p \in M$, existe um raio γ tal que $\gamma(0) = p$, ver [2], página 405. Porém nem toda variedade completa e não compacta possui uma linha, como é

o caso do parabolóide de revolução $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$. Uma demonstração deste último fato pode ser encontrada em [2], páginas 309 e 363.

Definição 3.3. *Dado um raio γ , a função de Busemann associada a esse raio, b_γ , é definida por*

$$b_\gamma(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, \gamma(t)) - t).$$

Dada uma linha $\gamma : (-\infty, \infty) \rightarrow M$, podemos associar a ela duas funções de Busemann, a saber:

$$b^+(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \gamma(t)) - t,$$

e

$$b^-(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \gamma(-t)) - t.$$

Definindo

$$b_t^+(x) := d(x, \gamma(t)) - t,$$

temos, pela desigualdade triangular, que

$$\begin{aligned} b_t^+(x) &\leq d(x, \gamma(0)) + d(\gamma(0), \gamma(t)) - t \\ &= d(x, \gamma(0)). \end{aligned}$$

Portanto, a família de funções $\{b_t^+\}_{t \geq 0}$ é uniformemente limitada nos compactos de M . Afirmamos agora que esta família é não-crescente.

De fato, se $t_1 < t_2$, pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} b_{t_2}^+(x) &= d(x, \gamma(t_2)) - t_2 \\ &\leq d(x, \gamma(t_1)) + d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) - t_2 \\ &= d(x, \gamma(t_1)) + t_2 - t_1 - t_2 \\ &= b_{t_1}^+(x). \end{aligned}$$

A família $t \mapsto b_t^+$ é, portanto, monótona não-crescente. Assim, $b_t^+ \rightarrow b^+$

uniformemente nos compactos de M e b^+ está bem definida.

Observamos ainda que, como

$$\begin{aligned} b_t^+(x) - b_t^+(y) &= d(x, \gamma(t)) - d(y, \gamma(t)) \\ &\leq d(x, y) + d(y, \gamma(t)) - d(y, \gamma(t)) \\ &= d(x, y), \end{aligned}$$

as funções b_t^+ são Lipschitzianas para $t > 0$, com constante de Lipschitz igual a 1, claro que a função b^+ também é Lipschitziana, sendo, portanto, *q.t.p.* diferenciável, ver [6], página 81.

3.2 Teorema de Cheeger-Gromoll

A idéia da prova consiste em construir uma função h suave e harmônica, definida em M , tal que $|\text{grad } h| = 1$. Então, com o auxílio da fórmula de Weitzenböck, mostramos que os conjuntos de nível de h são subvariedades totalmente geodésicas de M . Definimos então $N = h^{-1}(0)$. Para tal construção, contaremos com as funções de Busemann b^+ e b^- associadas à linha γ .

Proposição 3.1 (Desigualdade do Valor Médio). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com $\text{Ric}(M) \geq 0$. Seja $f \geq 0$ uma função Lipschitziana tal que $\Delta f \leq 0$ no sentido das distribuições. Então*

$$f(x) \geq \frac{1}{w_n R^n} \int_{B_R(x)} f.$$

Demonstração. É suficiente mostrar que a função $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, definida por

$$h(R) = \frac{1}{w_n R^n} \int_{B_R(x)} f,$$

é não crescente. Pois, como

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{w_n R^n} \int_{B_R(x)} f = f(x),$$

uma vez mostrado que h é não crescente, teremos o seguinte: se $R > R_1 > \dots > R_n > \dots > 0$, então $h(R) \leq h(R_1) \leq \dots \leq h(R_n) \leq \dots \leq f(x)$.

Observemos que h é localmente Lipschitziana, portanto, h é *q.t.p.* diferenciável.

Temos que

$$\begin{aligned} h'(R) \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{w_n R^n} \left(\int_{B_R(x)} f \right)' - \frac{n}{w_n R^{n+1}} \int_{B_R(x)} f \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\int_{B_R(x)} f \right)' \leq \frac{n}{R} \int_{B_R(x)} f \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{B_{(R+\varepsilon)} \cap \Sigma_p} f \sqrt{\det g} \, dx - \int_{B_R \cap \Sigma_p} f \sqrt{\det g} \, dx}{\varepsilon} &\leq \int_{\text{int}(S_R \cap \Sigma_p)} f \sqrt{\det g} \, d\sigma \\ &= \int_{S'_R} f \, d\sigma_g, \end{aligned}$$

onde $S'_R = \exp_p(\text{int}(S_R \cap \Sigma_p))$.

Precisamos então mostrar que

$$R \int_{S'_R} f \leq n \int_{B_R} f. \quad (3.1)$$

Vale observar que estamos omitindo em (3.1) o elemento de área na integral da esquerda e o elemento de volume da integral do lado direito.

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{B_R} f \Delta r^2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\exp_p(B_R(0) \cap \Omega_\varepsilon)} f \Delta r^2 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{\exp_p(B_R(0) \cap \Omega_\varepsilon)} \langle \text{grad } f, \text{grad } r^2 \rangle + \int_{\partial \exp_p(B_R(0) \cap \Omega_\varepsilon)} f \frac{\partial r^2}{\partial \eta} \right) \\ &\geq - \int_{B_R} \langle \text{grad } f, \text{grad } r^2 \rangle + 2R \int_{S'_R} f, \end{aligned}$$

ou seja,

$$2R \int_{S'_R} f - \int_{B_R} \langle \text{grad } f, \text{grad } r^2 \rangle \leq \int_{B_R} f \Delta r^2.$$

Ora, pelo Teorema de Comparação do Laplaciano no sentido das distribuições,

$$\begin{aligned} \Delta r^2 &= 2r \Delta r + 2 \langle \text{grad } r, \text{grad } r \rangle \\ &\leq 2(n-1) + 2 = 2n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$2R \int_{S'_R} f - \int_{B_R} \langle \text{grad } f, \text{grad } r^2 \rangle \leq 2n \int_{B_R} f. \quad (3.2)$$

Temos também que

$$\begin{aligned} - \int_{B_R} \langle \text{grad } f, \text{grad } r^2 \rangle &= - \int_{B_R} \langle \text{grad } f, \text{grad}(r^2 - R^2) \rangle \\ &= \int_{B_R} \Delta f (r^2 - R^2) \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

pois $\Delta f \leq 0$ e $r^2(x) - R^2 \leq 0, \forall x \in B_R$.

A desigualdade (3.3) aplicada a (3.2) nos fornece

$$2R \int_{S'_R} f \leq 2n \int_{B_R} f.$$

□

Corolário 3.1. *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com $\text{Ric}(M) \geq 0$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-negativa com $\Delta f \leq 0$. Suponhamos que existe $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = 0$. Então $f \equiv 0$.*

Demonstração. De fato,

$$0 \geq \int_{B_R(x_0)} f, \forall R.$$

□

Lema 3.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não-negativa. A função $b^+ : M \rightarrow \mathbb{R}$, é super-harmônica no sentido das distribuições, isto é, $\Delta b^+ \leq 0$ no sentido das distribuições.*

Demonstração. O Teorema 2.2 implica, para todo $t > 0$ e para toda $\varphi \in C_0^\infty$, $\varphi \geq 0$, que

$$\begin{aligned} \int_M b_t^+ \Delta \varphi &= \int_M \varphi \Delta b_t^+ \\ &= \int_M d(x, \gamma(t)) \Delta \varphi \\ &\leq (n-1) \int_M \varphi \frac{1}{d(x, \gamma(t))}. \end{aligned}$$

Ora,

$$d(x, \gamma(t)) \geq d(\gamma(t), \gamma(0)) - d(\gamma(0), x).$$

Temos então que, fixada a função φ diferenciável, não-negativa e de suporte compacto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_M \varphi \frac{1}{d(x, \gamma(t))} = 0.$$

Logo, obtemos

$$\int_M b^+ \Delta \varphi \leq 0.$$

□

Vale observar que, analogamente, podemos provar que b^- também é super-harmônica no sentido das distribuições.

Estamos agora em condições de demonstrar o principal resultado desta monografia, o Teorema de Decomposição de Cheeger-Gromoll.

Teorema 3.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não-negativa. Se M possui uma linha. Então M é isométrica a $N \times \mathbb{R}$ munida da métrica produto, onde N é uma variedade Riemanniana de dimensão $(n - 1)$ com $\text{Ric}(N) \geq 0$.*

Demonstração. Inicialmente, usando a desigualdade triangular, vemos que a função $f(x) = b^+(x) + b^-(x)$ é não-negativa. Além disso, $f(x) = 0$ para $x = \gamma(t)$. Pelo Lema 3.1, a função f é super-harmônica no sentido das distribuições, uma vez que f é soma de funções super-harmônicas. Segue então do Corolário da Proposição 3.1 que $f = 0$ em M . Portanto, $\Delta f = 0$, isto é, $\Delta b^+ + \Delta b^- = 0$. Isto implica que $\Delta b^+ = \Delta b^- = 0$ no sentido das distribuições, pois $\Delta b^+ \leq 0$ e $\Delta b^- \leq 0$. Isto garante a suavidade das funções de Busemann, pelo Lema de Weyl. Afirmamos agora que a função $h := b^+$ satisfaz $|\text{grad } h| = 1$. De fato, $|\text{grad } h|^2 \leq 1$, pois já vimos que h é Lipschitziana com constante de Lipschitz igual a 1. Logo a função $F := 1 - |\text{grad } h|^2$ é não-negativa.

Usando a fórmula de Weitzenböck, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta (|\text{grad } h|^2) &= |\text{Hess } h|^2 + \langle \text{grad } h, \text{grad}(\Delta h) \rangle + \text{Ric}(\text{grad } h, \text{grad } h) \\ &\geq |\text{Hess } h|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Segue-se então que $\Delta F \leq 0$. Por sua vez, temos que $\frac{d}{ds} h(\gamma(s)) = -1$ (isso segue da definição de b^+) e, portanto, $\langle \text{grad } h, \gamma'(s) \rangle = -1$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz implica

$$1 = |\langle \text{grad } h, \gamma'(s) \rangle| \leq |\text{grad } h| |\gamma'(s)| \leq 1,$$

donde $\text{grad } h = -\gamma'$. Daí, obtemos que $F(\gamma(s)) = 0$. Finalmente, usando o Corolário (3.1), temos $F \equiv 0$. Isto prova a afirmação, ou seja, $|\text{grad } h| = 1$. Como conseqüência disso, ainda obtemos que $|\text{Hess } h| = 0$. Portanto $\text{grad } h$ é paralelo.

Podemos então definir uma isometria entre \mathbb{R} cartesiano $N := h^{-1}(0)$ e

M da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} \times N &\longrightarrow M \\ (t, x) &\longrightarrow \exp_x(t \operatorname{grad} h(x)),\end{aligned}$$

Com efeito, para vetores verticais basta observarmos que

$$\begin{aligned}\left\langle d\varphi_{(t,x)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\varphi_{(t,x)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \right\rangle &= \langle \operatorname{grad} h, \operatorname{grad} h \rangle \\ &= 1 \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle.\end{aligned}$$

Quando temos um vetor vertical e outro horizontal, o resultado segue do Lema de Gauss.

Finalmente, no caso em que temos u e v , vetores horizontais, a função

$$f(t) := \langle d\varphi_{(t,x)}(u), d\varphi_{(t,x)}(v) \rangle,$$

é constante em t . Com efeito, pelo Lema de Simetria, ver [3], página 76, e por $\operatorname{grad} h$ ser um campo paralelo, obtemos

$$\begin{aligned}f'(t) &= \langle \nabla_{\operatorname{grad} h} d\varphi_{(t,x)}(u), d\varphi_{(t,x)}(v) \rangle + \langle d\varphi_{(t,x)}(u), \nabla_{\operatorname{grad} h} d\varphi_{(t,x)}(v) \rangle \\ &= \left\langle \nabla_{d\varphi_{(t,x)}(u)} \operatorname{grad} h, d\varphi_{(t,x)}(v) \right\rangle + \left\langle d\varphi_{(t,x)}(u), \nabla_{d\varphi_{(t,x)}(v)} \operatorname{grad} h \right\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\langle d\varphi_{(t,x)}(u), d\varphi_{(t,x)}(v) \rangle &= \langle d\varphi_0(u), d\varphi_0(v) \rangle \\ &= \langle u, v \rangle,\end{aligned}$$

para quaisquer $u, v \in T_{(t,x)}\mathbb{R} \times N$. □

Corolário 3.2. *Seja M uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não-negativa. Então M é isométrica a um produto $N \times \mathbb{R}^k$, onde N não contém linhas e \mathbb{R}^k possui a métrica canônica.*

Demonstração. De fato, se M^n possuir uma linha, então pelo teorema anterior, M é isométrica a um produto $\mathbb{R} \times N^{n-1}$. Se, além disso, N possuir uma linha, então usamos o teorema mais uma vez, já que $Ric(N) \geq 0$ e N é completa. O resultado segue por indução. \square

Referências Bibliográficas

- [1] Cheeger, J., Gromoll, D., *The Splitting Theorem for Manifolds of Nonnegative Ricci Curvature*, J. Differential Geometry, (1971), 119–128.
- [2] do Carmo, M. P., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Textos Universitários, SBM, Rio de Janeiro, 2ª edição, 2005.
- [3] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 3ª edição, 2005.
- [4] Eschenburg, J.-H., Heintze, E., *An elementary proof of the Cheeger-Gromoll splitting theorem*, Ann. Glob. Analysis and Geometry, vol. 2, (1984), 141–151.
- [5] Escobar, J. F., *Topics in PDE'S and Differential Geometry*, XII Escola de Geometria Diferencial, 2002.
- [6] Evans, L. C., Gariepy, R. F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992.
- [7] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, 2002.
- [8] Lee, J. M., *Riemannian Manifolds - An Introduction to Curvature*, Springer, 1997.
- [9] Schoen, R., Yau, S. T., *Lectures on Differential Geometry*, International Press Inc, Boston, vol. 1, 1994.

- [10] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, INC. Houston, Texas (U.S.A.), Volume II, 1970.

Índice Remissivo

- aplicação exponencial, 15, 17
- campo
 - de vetores, 9, 10, 19
 - de vetores tangentes, 26
 - paralelo, 15, 42
- coeficientes
 - da métrica, 13, 27
 - de Ricci, 19, 21
- conexão, 9, 13
 - afim, 13, 14
 - compatível, 14
 - de Levi-Civita, 14
 - simétrica, 14
- conjunto
 - dos campos de vetores, 10
- curvatura, 17
 - de Ricci, 18, 19, 30, 31, 34, 36, 41, 43
 - escalar, 18
 - seccional, 18, 29, 31
- difeomorfismo, 12, 16
- esfera unitária, 11
- espaço
 - hiperbólico, 11, 29
 - métrico, 17
- tangente, 9
- Fórmula de Weitzenböck, 23
- fibrado tangente, 13
- função de Busemann, 35
- geodésica, 8, 15–17, 25, 26, 30, 34, 36
- Identidade de Ricci, 21
- imersão, 11, 12
 - isométrica, 12
- isometria, 12, 42
- Lema
 - de Gauss, 25
 - de Simetria, 42
- linha, 34, 41
- métrica
 - canônica, 26, 43
 - da esfera, 29
 - do espaço hiperbólico, 29
 - induzida, 12
 - produto, 12, 41
 - Riemanniana, 11–14
- mergulho, 12
- notação de Einstein, 19
- parametrização, 9

produto interno, 11, 18

raio, 34

símbolos de Christoffel, 13, 19, 23, 27

subvariedade, 12, 36

Teorema

- da função inversa, 16
- de Comparação do Laplaciano, 30, 36
- de Decomposição de Cheeger-Gromoll, 41
- de Hopf-Rinow, 17
- de Levi-Civita, 14

teorema

- de Schwartz, 10

toro plano, 12

variedade

- de Hausdorff, 12
- diferenciável, 9, 11, 13
- imersa, 11
- Riemanniana, 11, 12, 14, 17, 18, 34, 41
- completa, 8, 17, 30, 34, 36, 37, 40, 41, 43